

Teoria das Categorias Mónades e Flechas em Java

Pablo M. Parada¹, Mozart L. Siqueira²

Ciência da Computação

Centro Universitário La Salle - Unilasalle

E-mail: pablo.paradabol@gmail.com¹, mozarts@unilasalle.edu.br²

Resumo—A não convencional Teoria das Categorias contribui para diversas áreas da computação, principalmente no modelo semântico de linguagens de programação e em técnicas aplicadas em linguagens funcionais. Duas de suas abstrações, chamadas respectivamente de mónade e flecha formam os blocos básicos para a solução de problemas em linguagens funcionais. Com adição de lambda expressions, a linguagem Java adentra no mundo do paradigma funcional. As estruturas citadas estão presentes em diversos trabalhos e bibliotecas, populando a plataforma com novas funcionalidades. Entretanto, cada instância é implementada a sua maneira, geralmente atentando apenas para a solução de um problema específico. Este trabalho apresenta a implementação de uma interface genérica para mónade, o operador de composição descrito por flecha e os axiomas que regem estas estruturas. Desta forma, a generalização destas estruturas é garantida por uma interface comum, facilitando a implementação de outros conceitos advindos desta teoria. Além do mais, o ecossistema da linguagem é incrementado fornecendo novas abstrações para seus usuários.

Palavras-chave—Mónade, Flecha, Teoria das Categorias, Java, Haskell, Lambda expressions, Paradigma funcional.

I. INTRODUÇÃO

A Teoria das Categorias desempenha um papel importante na matemática, sendo capaz de influenciar diversas outras áreas da ciência. Na computação, consolidou-se recentemente, contribuindo principalmente no modelo semântico de linguagens de programação e em técnicas aplicadas em linguagens funcionais [1, 2]. Sua capacidade de abstração demonstra-se conveniente na representação de problemas computacionais, podendo substituir a Teoria dos Conjuntos.

De todas as construções algébricas oriundas desta teoria, Mónade destaca-se como a estrutura com maior aplicação em linguagens funcionais. Em seu trabalho, Hughes [3] define mónade como um tipo de interface padronizada. Um mónade é construído a partir de um tipo polimórfico. Pode ser imaginado como um recipiente que encapsula um valor. Para modificar o valor do recipiente, aplicam-se funções. O contexto computacional definido pelo recipiente determina o valor resultante desta aplicação.

As poderosas abstrações monádicas contribuem na escrita de programas concorrentes, tornando-os mais próximos do paradigma imperativo. Em ambientes distribuídos, mónades fornecem meios de computação em nuvem abstraindo o mo-

delo MapReduce e trabalhando com terabytes de dados [4, 5]. Além disso, formam a base para memória transacional em software [6] e atenuam a complexidade derivada do ambiente concorrente.

O conceito de flecha abstrai problemas computacionais e generaliza mónade. Esta construção permite a definição de uma computação parcialmente estática, que geralmente depende dos tipos de entrada. Seu funcionamento é análogo a mónade, onde valores são encapsulados em flechas e modificados pela aplicação de funções em seu contexto.

As propriedades intrínsecas desta estrutura fornecem os blocos básicos para a solução de problemas na computação. Em seu trabalho, Swierstra e Duponcheel propõem a substituição da estrutura monádica pela flecha na construção de analisadores sintáticos para gramáticas LL1 [7]. A partir de flechas, a biblioteca Fruit permite a construção de interfaces gráficas reativas de forma declarativa [8, 9]. A instância Kleisli encapsula estruturas monádicas fornecendo uma maneira concisa de descrever a composição destas.

A oitava distribuição da linguagem Java adicionou as funcionalidades necessárias para habilitar o uso de funções de primeira classe. Conhecidas como lambda expression, estas adicionam características presentes principalmente em linguagens funcionais. Com isto, estruturas da Teoria das Categorias tornam-se cada vez mais presentes na plataforma.

Tanto bibliotecas quanto trabalhos das mais diversas áreas da computação descrevem estruturas monádicas [10, 11, 12] na linguagem Java. Entretanto, cada instância é implementada a sua maneira, muitas das vezes atentando apenas para a solução de um problema específico. Este trabalho apresenta a implementação de uma interface genérica para mónade, o operador de composição descrito por flecha e os axiomas que regem estas estruturas. Embora a Java não possua todos os recursos presentes em linguagens funcionais, ainda assim é possível expressar estes conceitos com os recursos existentes.

O restante deste artigo é organizado da seguinte forma. Seção II e III elucidam as características do paradigma funcional e a sua adoção pela linguagem Java a partir do recurso de lambda expressions. Com ampla utilização em linguagens funcionais, mónades e flechas são descritas formalmente na Seção IV. Na direção de aplicações práticas, a Seção V fornece implementações destas estruturas, seguida pela Seção VI com

o desenvolvimento proposto neste trabalho. Os resultados obtidos no desenvolvimento de mónades e flechas são discutidos nas Seções VII e VIII.

II. PARADIGMA FUNCIONAL

Influenciado principalmente pelo desenvolvimento do lambda calculus [13], compondo o grupo da programação declarativa, o paradigma funcional utiliza-se da ideia de expressar computações através de funções combinadas em expressões. Neste, funções determinam o que deverá ser computado, ao invés de como será computado [14]. Programas são construídos através da composição, tal que funções triviais (building blocks) são combinadas dando origem a novas funções que descrevem computações mais complexas.

Building blocks não devem fazer uso de variáveis que dependam de estado, isso significa que a computação deve ser pura e sem efeitos colaterais (side-effects). Também destaca-se o princípio de imutabilidade, onde o valor de uma variável é determinado em sua criação, não permitindo novas atribuições posteriormente. Ao expressar um programa em uma linguagem funcional obtém-se uma maneira concisa de solucionar problemas, sendo que este constitui-se de operações e objetos atômicos e regras gerais para sua composição [15].

Tais propriedades são apreciadas nos tempos atuais, visto que a Lei de Moore nos fornece cada vez mais núcleos, não necessariamente núcleos mais rápidos [16]. Em programas não-determinísticos, múltiplas threads podem alterar os dados representados por objetos imutáveis sem ocasionar os diversos problemas já conhecidos como dead locks e race conditions. Além do thread safety oferecido pela propriedade de imutabilidade, há também o conceito de funções transparentes referencialmente, ou seja, funções que não utilizam variáveis de estado. Em ambientes distribuídos onde a execução é subdivida em diferentes threads, a transparência referencial garante sempre o mesmo retorno, dados os mesmos argumentos.

O paradigma funcional expressa programas através de composições mantendo a imutabilidade e a transparência referencial, portanto apresenta características importantes para os tempos atuais. A complexidade intrínseca à ambientes distribuídos é reduzida. Programas completos são vistos como apenas uma aplicação de função.

III. JAVA LAMBDA EXPRESSIONS

Na última década muitos dos problemas encontrados – como enviar não só dados, mas também comandos através de redes – já foram solucionados em linguagens que suportam o paradigma funcional [17]. Assim, linguagens multi-paradigma têm adicionado suporte à estas mesmas estruturas, aumentando sua flexibilidade e ganho para com os desenvolvedores. O suporte a lambda expressions em Java não tem como objetivo apenas substituir Anonymous Inner Classes, mas também ser capaz de trazer os benefícios deste paradigma ao ponto de incrementar o ecossistema da linguagem.

A. Lambda Expressions e Anonymous Inner Classes

Ao fornecer suporte a funções de primeira classe, também chamadas de lambda expressions ou closures¹, a linguagem Java habilita a substituição de anonymous inner classes (AIC) de forma transparente. Conforme a Listagem 1, em Java a ordenação de inteiros pode ser implementada a partir de uma AIC em conjunto do método *sort* da classe *Arrays*.

```
Integer[] integers = new Integer[]{5, 4, 3, 2, 1};

Arrays.sort(integers, new Comparator<Integer>() {
    public int compare(Integer a, Integer b) {
        return a.compareTo(b);
    }
});
```

Listagem 1: Sort - Anonymous Inner Class

Neste trecho de código o método *sort* recebe como primeiro argumento um array de inteiros (já declarado na variável *integers*) e como segundo qualquer instância que satisfaça o contrato de *Comparator*. Assim, para satisfazer o segundo argumento, instância-se uma AIC através da palavra reservada *new* que implementa o método *compare* declarado no contrato.

Entretanto, com closures o mesmo método *sort* pode ter seus argumentos simplificados. Conforme demonstrado na Listagem 2, ao invés de instanciar uma AIC, uma lambda expression é passada como segundo argumento, removendo a necessidade de instanciação de uma classe e a implementação de um contrato imposto por *Comparator*.

```
Arrays.sort(integers, (a, b) -> a.compareTo(b));
```

Listagem 2: Sort - Lambda Expression

De fato, apesar de expressarem o mesmo comportamento a nível de código, ambas funcionalidades possuem diferentes implementações sob a Máquina Virtual Java (JVM). AIC são compiladas, ou seja, geram novos arquivos contendo declarações de classes. Além do mais, ao utilizar a palavra reservada *this* referencia-se a própria instância anônima. Como representam instâncias de uma classe, estas devem ser carregadas pelo classloader e seus construtores invocados pela máquina virtual. Ambas etapas consomem memória, tanto heap [18] para alocação de objetos quanto permgen².

Diferentemente de AIC, lambdas postergam a estratégia de compilação para em tempo de execução, utilizando a instrução

¹Lambda expressions ou closures são funções que não exigem vínculos de classe, como exemplo podendo ser atribuída a uma variável. Com esta característica, uma função atua como dado, ou seja, pode ser passada como argumento para outras funções.

²Área de memória limitada separada da heap chamada Permanent Generation que possui a função de armazenar objetos de geração permanente como metadados, classes e métodos.

invokedynamic [19]. Funções são traduzidas para métodos estáticos vinculados ao arquivo da classe correspondente a sua declaração, eliminando o consumo de memória. Agora, ao referir-se a *this*, a classe que delimita a lambda expression é acessada, ao contrário de AIC que acessa sua própria instância.

Dessa forma, o suporte a lambda expressions traz benefícios para os usuários da linguagem. Tal funcionalidade está além de uma mera substituição, pois acrescenta um novo paradigma no ecossistema Java.

IV. TEORIA DAS CATEGORIAS E SUAS ESTRUTURAS

A Teoria das Categorias (TC) foi inventada no início dos anos 1940 por Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane [20] como uma ponte entre os diferentes campos da topologia e álgebra [21]. Afim de demonstrar as relações entre estruturas e sistemas matemáticos [22], a TC estabelece uma linguagem formal capaz de encontrar aplicabilidade em várias áreas da ciência. Por volta dos anos 1980, computação e TC passaram a ser consideradas áreas correlatas de estudo [2].

Aplicações do modelo categorial ocorrem na composição de funções encorajada pelo paradigma funcional. Além do mais, em linguagens de programação, o estudo dos tipos pode ser representado através de categorias. Muitos modelos computacionais que fazem uso de estruturas de dados como grafos podem ser generalizados para categorias de grafos. Portanto, tais aplicações demonstram a capacidade de abstração e a importância da TC para a computação.

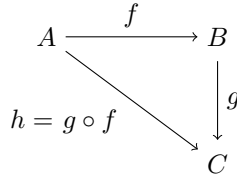


Figura 1: Funções entre coleções de objetos [23]

Tal como a Teoria dos Grupos³ abstrai a ideia do sistema de permutações como simetrias de um objeto geométrico, a TC manifesta-se como um sistema de funções entre conjuntos de objetos [23]. Esta abstração pode ser vista a partir da Figura 1, onde os conjuntos de objetos são representado por A , B e C . Nesta mesma estrutura, f e g denotam os morfismos entre os diferentes conjuntos de objetos, tal que $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$. Por fim, h expressa a ideia de composição, sendo produto da união dos morfismos f e g .

A TC nasceu como uma ferramenta matemática, com propósito de estudar a relação objetos e morfismos. Contudo, tal conceito tornou-se uma ferramenta utilizada por diversas áreas da ciência. Na computação, diversos problemas são abstraídos através de estruturas da TC, pois ajudam na sua resolução.

³Teoria que estuda as estruturas algébricas de grupos. Um grupo é formado por um conjunto de elementos finito ou infinito associado a uma operação binária, como por exemplo a adição ou multiplicação.

A. Categoria – Objetos e Morfismos

Uma categoria consiste em uma coleção de coisas, todas relacionadas de algum modo. As coisas são nomeadas de objetos e as relações de morfismos [21].

Definição [21, 22]: define-se a categoria C como:

- (a) uma coleção $Ob(C)$, contendo os objetos de C ;
- (b) para cada par $a, b \in Ob(C)$, um conjunto $Hom_C(a, b)$ chamado de morfismos de a para b ;
- (c) para cada objeto $a \in Ob(C)$, um morfismo de *identidade* em a denotado por $id_a \in Hom_C(a, a)$;
- (d) para cada três objetos $a, b, c \in Ob(C)$, uma função de composição $\circ : Hom_C(b, c) \times Hom_C(a, b) \rightarrow Hom_C(a, c)$;

Dado os objetos $a, b \in Ob(C)$, denota-se o morfismo $f \in Hom_C(a, b)$ por $f : a \rightarrow b$; onde a é o domínio e b o contradomínio.

Estas operações em C devem satisfazer os seguintes axiomas:

(*Identidade*) Para todo objeto $a, b \in Ob(C)$ e todo morfismo $f : a \rightarrow b$, tem-se $id_a \circ f = f = id_b \circ f$;

(*Associatividade*) Sejam os objetos $a, b, c, d \in Ob(C)$ e os morfismos $f : a \rightarrow b$, $g : b \rightarrow c$ e $h : c \rightarrow d$. Então $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Ambos axiomas podem ser representados pelos diagramas comutativos das Figura 2 e Figura 3.

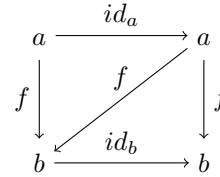


Figura 2: Identidade [23]

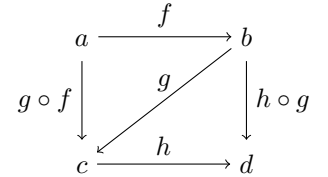


Figura 3: Associatividade [23]

B. Functor – Morfismos entre Categorias

Um functor é um mapeamento entre duas categorias de tal modo que o domínio, contradomínio, objetos e morfismos são preservados [23].

Definição [21, 22]: para as categorias C e D , um functor $F : C \rightarrow D$ com domínio C e contradomínio D consiste em duas funções relacionadas. São elas:

- (a) a função de objeto F que atribui cada objeto $a \in Ob(C)$ para um objeto $F(a) \in Ob(D)$;
- (b) e a função de flecha (também chamada F) que atribui cada morfismo $f : a \rightarrow b \in Hom_C(a, b)$ para um morfismo $F(f) : F(a) \rightarrow F(b) \in Hom_D(a, b)$.

Tal que os seguintes axiomas são satisfeitos:

(*Identidade*) Para todo objeto $a \in Ob(C)$ existe um morfismo $F(id_a) = id_{F(a)}$ que preserva a identidade;

(*Associatividade*) Sejam os objetos $a, b, c \in Ob(C)$ e os morfismos $f : a \rightarrow b$ e $g : b \rightarrow c$. Então $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Estas funções capazes de preservar as características das categorias C e D também podem ser ilustradas a partir da Figura 4.

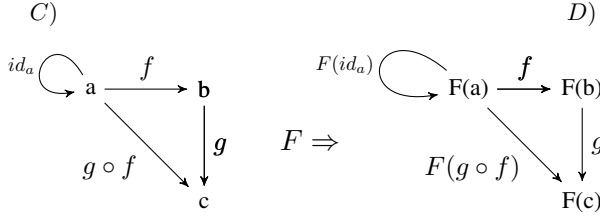


Figura 4: Funtor F [23]

C. Mônade – Endofuntor e Transformações Naturais

Podendo ser visto como um padrão estrutural que ocorre diversos ramos da matemática [21], a construção fundamental mônade (também chamada de tripla) estrutura-se a partir de um endofuntor⁴ e das transformações naturais⁵ de identidade e multiplicação.

Definição [22, 23]: dada a mônade $T = (T, \eta, \mu)$ em uma categoria C consiste em:

(a) um endofuntor T , tal que $T : C \rightarrow C$;

(b) nas transformações naturais:

(*Identidade*) $\eta : id_C \rightarrow T$;

(*Multiplicação*) $\mu : T^2 \rightarrow T$, onde $T^2 = T \circ T$.

Fazendo com que os diagramas da Figura 5 e Figura 6 comutem, respeitando os axiomas de identidade (esquerda e direita) e associatividade.

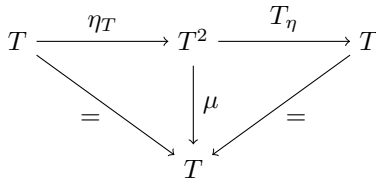


Figura 5: Identidade à Esquerda e à Direita [22]

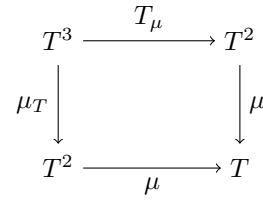


Figura 6: Associatividade [22]

D. Flechas – Categoria de Kleisli

A partir de uma tripla obtemos a Categoria de Kleisli (CK), capaz de representar a mesma estrutura monádica através de uma sintaxe diferente [24]. Mantendo definições similares as já apresentadas em IV-A, a CK destaca-se por abstrair a estrutura de objetos e morfismos sendo capaz compor o endofuntor subjacente.

Definição [22, 24, 25]: dada a tripla (T, η, μ) sob a categoria C , então define-se C_T como:

(a) cada objeto $a \in Ob(C)$, um novo objeto a_T ;

(b) cada morfismo $f : a \rightarrow b$, um novo morfismo $f^* : a_T \rightarrow b_T$.

Dado os morfismos $f^* : a_T \rightarrow b_T$, $g^* : b_T \rightarrow c_T$ e $h : c \rightarrow d_T$ e o operador de extensão $-^*$, então:

(*Composição*) $g^* \circ f^* = (\mu_c \circ T(g) \circ f)^*$.

Similar as outras estruturas desta seção, C_T deve obedecer as seguintes leis:

(*Identidade à Esquerda*) $f^* \circ \eta_a = f$;

(*Identidade à Direita*) $\eta_a^* \circ h = id_{T(a)} \circ h$;

(*Associatividade*) $(g^* \circ (f^* \circ h)) = (g^* \circ f)^* \circ h$.

V. APLICAÇÃO EM HASKELL

As funções do paradigma funcional podem ser vistas como morfismos na categoria dos tipos. Percebendo estas relações, Wadler [26, 27, 28, 29] utilizou o conceito de mônade para estruturar programas puramente funcionais em Haskell. Assim, o primeiro problema pertencente ao conjunto Awkward Squad⁶ foi solucionado [30].

A introdução da mônade para E/S (entrada e saída) padronizou a maneira de executar estas ações e encapsular seus efeitos colaterais. Assim, outras mônades foram adicionadas à linguagem, estendendo as bibliotecas padrões para fornecer suporte a exceções, nulidade, concorrência, etc. Logo, mônades trouxeram utilidade para a linguagem, pois confrontaram o Awkward Squad [30].

⁴Um funtor que mapeia uma categoria para ela mesma.

⁵Mapeamento entre dois funtores que possuem o mesmo domínio e contradomínio, tal que satisfaça a condição de naturalidade.

⁶Conjunto de questões cruciais relacionadas a linguagens funcionais sem resposta até o surgimento de mônades.

Com a rápida adoção de mónades para a solução de problemas envolvendo E/S, constatou-se que outros conceitos da TC também poderiam ser aproveitados. Qualquer estrutura recursiva (listas, mapas, árvores, grafos) que possa ser iterada é representada por um funtor. A categoria de Haskell, chamada *Hask*, preocupa-se em tratar tipos como objetos e funções como morfismos, fornecendo funções de composição e identidade.

Type classes definem comportamentos genéricos que podem ser implementados por um conjunto variado de tipos. Esta funcionalidade tornou a implementação das estruturas previamente mencionadas disponíveis para qualquer tipo de dado, dependendo apenas da implementação de suas instâncias [31].

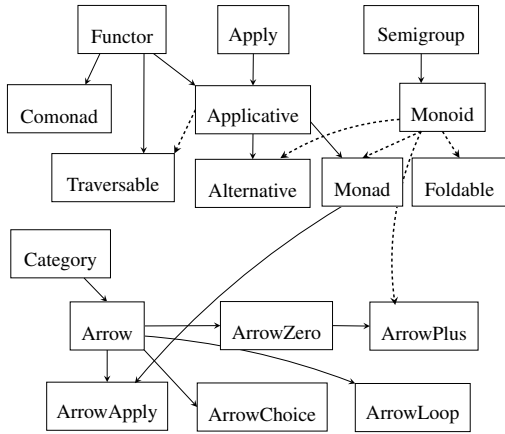


Figura 7: Hierarquia de type classes [32]

Conforme a Typeclassopedia, a Figura 7 demonstra as relações entre as type classes, identificadas por linhas contínuas e tracejadas:

- (a) (*Tracejadas*) Determinam relações de é-um, ou seja, se existe uma flecha de *A* para *B*, então todo *B* é um *A*;
- (b) (*Pontilhadas*) Indicam algum tipo de relação, como por exemplo a equivalência entre *Monoid* e *MonadPlus*.

A implementação de uma type class pode ser visualizada na Listagem 3, onde a primeira declaração incorpora uma nova classe com nome *Eq*, uma variável de tipo *a* e um comportamento explicitado pela função *equals*.

```
class Eq a where
  equals :: a -> a -> Bool
```

Listagem 3: Type class Eq [33]

Na Listagem 4, instância-se *Eq* para os tipos *Int* e *Char*. A primeira instância declara que *Int* pertence a *Eq*, e que a implementação de igualdade de inteiros é dada por *primEqInt*. Similarmente, *Char* pertence *Eq* e fornece a implementação de igualdade por *primEqChar*. Logo, como *a* é um parâme-

tro de tipo, as assinaturas de *primEqInt* e *primEqChar* são tipadas $Int \rightarrow Int \rightarrow Bool$ e $Char \rightarrow Char \rightarrow Bool$ consecutivamente [33].

```
instance Eq Int where
  equals = primEqInt

instance Eq Char where
  equals = primEqChar
```

Listagem 4: Instâncias Eq [33]

Com a instância de *Eq Int* é possível comparar dois inteiros tal que *equals*(1 + 1, 2) retorna *True*; ou *equals*(1 + 1, 0) retorna *False*. De maneira similar, com *Eq Char* é possível comparar dois caracteres, onde *equals*('a', 'a') retorna *True*; ou *equals*('a', 'b') retorna *False*.

A. Monad

Para a programação funcional, mónades oferecem um contexto computacional que encapsula efeitos colaterais. Além disso, tal contexto monádico permite o encadeamento de funções que operam sob um determinado tipo. Em Haskell, esta abstração é expressa através da type class *Monad*.

```
class Monad m where
  (>>=) :: m a -> (a -> m b) -> m b
  (>>)  :: (>>) m a -> m b -> m b
  return :: a -> m a
```

Listagem 5: Type class Monad [34]

Conforme a Listagem 5, a type class *Monad* consiste em um tipo construtor *m* e as operações *>>=*, *>>* e *return*. A operação *>>* existe apenas como um facilitador para a composição de funções no contexto *m*. *>>=* e *return* são equivalentes as transformações naturais de multiplicação e identidade.

A operação *return* encapsula o tipo *a* no contexto monádico *m a* e retorna este como resultado. A próxima é *bind*, declarada simbolicamente por *>>=*, que habilita o encadeamento de funções. *Bind* aplica a função $a \rightarrow m b$ no contexto monádico *m a*, retornando uma nova instância de *Monad* do tipo *m b*.

Todas instâncias de *Monad* devem seguir as leis monádicas de associatividade e identidade. Estes axiomas são demonstrados na Listagem 6.

```
return a >>= k = k a
m >>= return = m
m >>= (\x -> k x >>= h) = (m >>= k) >>= h
```

Listagem 6: Leis para Monad [34]

A possibilidade de encadear funções com `>>=` é tão importante que diversas linguagens funcionais oferecem suporte sintático para mónades. Em Haskell, esta sintaxe especial é chamada de **do notation** [34].

```
putStr "x: " >>
  getLine >>= \l ->
    return (words l)
```

Listagem 7: Encadeando Funções com Bind e Then [34]

Na Listagem 7 as funções *putStr* e *getLine* são encadeadas pelos operadores `>>` e `>>=`. Estas mesmas funções podem ser encadeadas utilizando a utilizando o suporte sintático de **do notation**, conforme a Listagem 8.

```
do
  putStr "x: "
  l <- getLine
  return (words l)
```

Listagem 8: Encadeando Funções com Do Notation [34]

Com esta notação, um código pertencente ao paradigma funcional é escrito de forma imperativa, ou seja, a computação é declarada passo a passo. Assim, obtém-se uma sintaxe simplificada para expressar efeitos colaterais em linguagens puramente funcionais como Haskell.

B. Arrow

Conforme o exemplo de programação tácita ⁷ da Listagem 9, Hughes [35] constrói uma função que conta o numero de ocorrências de uma palavra em um *String*.

```
count w = length . filter (==w) . words
```

Listagem 9: Função *count* [35]

A função *count* é implementada pela união de *length*, *filter*, *==* e *words*. Por último mas não menos importante, a função de composição *(.)* atua na implementação de *count* como um operador de ligação entre as funções menores. Entretanto, funções com efeitos colaterais não são compostas tão facilmente. Conforme a Listagem 10, *readFile* retorna um *String* encapsulado pela mónade *IO*. Em contrapartida, *count* espera um *String* como argumento, não um tipo construtor *m*.

⁷Um paradigma de programação no qual as funções não identificam seus argumentos, em vez disso são construídas a partir de funções combinatórias que manipulam os argumentos.

```
readFile :: FilePath -> IO String
```

Listagem 10: Funções de E/S [35, 36]

Não há como por exemplo utilizar *(.)* para unir *readFile* e *count*, ou seja, não é possível ler um arquivo do disco e contar a ocorrência de uma determinada palavra. Entretanto, a união destas é desejável. Sendo assim, para permitir a composição destes tipos de funções, Hughes introduziu a type class *Arrow*. Na Listagem 11, *Arrow* denota uma computação pelos tipos *b*, *c* e *d*, um tipo construtor *a* e as operações *arr* e `>>>`.

```
class Arrow a where
  arr :: (b -> c) -> a b c
  (>>>) :: a b c -> a c d -> a b d
```

Listagem 11: Type class *Arrow* [8]

Destas, a mais comum é *arr*, declarada com a assinatura $(b \rightarrow c) \rightarrow a b c$. Dada qualquer função com entrada *b* e saída *c*, *arr f* constrói uma instância de *Arrow* a partir de *f* [8].

A segunda operação é definida simbolicamente por `>>>` com assinatura $a b c \rightarrow a c d \rightarrow a b d$. Recebe como argumento uma instância definida por *a c d* e retorna *a b d*. Logo, `>>>` aplica sequencialmente as funções passadas para *arr*, gerando uma computação de entrada *b* e saída *d* encapsuladas em uma instância de *Arrow*.

Tem-se na Listagem 12 uma instância de *Arrow* que fornece a composição de funções ordinárias. Nesta, *arr* é implementada pela função de identidade *id*, disponível no pacote *Prelude*. Na operação de composição `>>>`, utiliza-se *(.)* e *flip* [35]. Assim, define-se o tipo *Arrow* (\rightarrow), instância de *Arrow* para funções ordinárias. Sua assinatura é dada por $a \rightarrow b$, sendo *a* e *b* tipos quaisquer.

```
instance Arrow (->) where
  arr = id
  (>>>) = flip (.)
```

Listagem 12: Arrow - Composição de Funções [35]

Além disso, a definição do tipo *Kleisli* para *Arrow* na Listagem 13 e 14 provê a composição de mónades. Os tipos de entrada e saída são definidos explicitamente em *Kleisli*, diferentemente de *Monad*. Portanto, *Arrow (Kleisli m)* generaliza *Monad* [35].

```
newtype Kleisli m a b = Kleisli {
  runKleisli :: a -> m b
}
```

Listagem 13: Definição do tipo *Kleisli* [35]

```
instance Monad m => Arrow (Kleisli m) where
  ...
  first (Kleisli f) = Kleisli (\(a,c) ->
    do b <- f a
    return (b,c))
```

Listagem 14: Instância para *Monad* [35]

Apesar de possuir nove axiomas, na Listagem 15 estão listados apenas os necessários para as operações de composição e identidade [37].

```
arr id >>> f = f
f >>> arr id = f
(f >>> g) >>> h = f >>> (g >>> h)
arr (g . f) = arr f >>> arr g
...
```

Listagem 15: Leis para *Arrow* [37]

VI. APLICAÇÃO EM JAVA

A linguagem Java originou-se a partir de um projeto de pesquisa, tendo como objetivo de desenvolver uma plataforma capaz de operar em tempo real. Em sua criação, decisões arquiteturais e de design foram embasadas em linguagens como SmallTalk, Eiffel, Objective C e Cedar/Mesa [38]. Para ser considerada uma linguagem orientada a objetos, Java suporta encapsulamento, polimorfismo e herança desde sua elaboração.

Desde sua quinta versão, tendo como base o trabalho de Bracha *et al.* [39, 40], Java conta com tipos genéricos. A abstração de tipos nos permite utilizar tipos parametrizáveis, generalizando implementações de interfaces, classes e métodos. Com isto o compilador é capaz de checar os tipos em tempo de compilação, evitando erros de conversão e em tempo de execução.

Recentemente obteve-se o suporte a funções anônimas. Estas foram adicionadas a partir do Lambda Project [16], na versão 8 da JDK. De extrema importância, Lambda Expressions acrescentam novas características compatíveis com as já existentes em linguagens funcionais. Logo, contando com as funcionalidades já citadas e as recém adicionadas na

plataforma, Java é capaz de fornecer suporte a mónades e flechas.

A. Problema dos Tipos Construtores

Construtores de classe constroem objetos, respectivamente, tipos construtores constroem tipos. Tipos construtores possuem aridade, ou seja, recebem tipos como argumento [41]. Se um tipo construtor não receber argumentos, este é chamado de tipo construtor nulário. Um tipo qualquer A origina-se a partir de um construtor nulário, assim como um tipo $C(A)$ é aplicado para construtores de aridade n .

Tipos genéricos são equivalentes a construtores unários, incapazes de representar tipos construtores com aridade n . Tendo como exemplo o mesmo tipo $C(A)$ anterior, este poderia ser expresso por genéricos se C fosse estaticamente definido. Portanto, para qualquer C definido estaticamente como *List*, *Set*, *Queue*, *Map*, e assim em diante, é possível parametrizar A com genéricos.

Entretanto, para a construção da interface monádica é necessário expressar um tipo construtor de aridade n . A declaração de um tipo $Monad(M(A))$ utilizando tipos genéricos é inválida, ocasiona um erro em tempo de compilação. Logo, a declaração de interface abaixo não pode ser expressa na linguagem.

```
public interface Monad<M<A>>> {}
```

Listagem 16: Interface *Monad* inválida

Afim de solucionar esta inconsistência, na Listagem 17 propõe-se o tipo $Kind(A, K)$. Sendo capaz de simular tipos construtores, este possui os parâmetros de tipo genérico A e K .

- (a) (A) este primeiro parâmetro genérico é equivalente ao valor encapsulado A na declaração $Monad(M(A))$.
- (b) (K) determina uma restrição de herança, na qual K herda $Kind$ e parametriza este com um tipo curinga e o próprio K que representa $Kind$.

```
public interface Kind<A, K extends Kind<?, K>>> {}
```

Listagem 17: Interface *Kind*

A hierarquia imposta na herança de K e $Kind$ limita a simulação de tipos construtores reais. Em outras linguagens, estes apenas são preenchidos por tipos, sem necessariamente impor uma classificação. Contudo, subclasses que implementem o contrato de $Kind$ mantém o controle do tipo mais interno A e do mais externo K . Além disso, estas também podem ser utilizadas como tipos construtores pois herdam as características de $Kind$ após implementá-lo.

B. Implementação de Monad

A interface *Monad*, conforme 18, conta com as operações monádicas de identidade e multiplicação por meio de seu construtor de classe e do método *flatMap*. Afim de tornar *M* um tipo construtor, *Monad* implementa *Kind* e parametriza este nos tipos *A* e *M*. Também é importante salientar a implementação de *Functor* que mantém consistente a hierarquia dessas construções e garante a implementação de *map*.

Em sua declaração, *M* herda *Kind*, porém não especializa o valor deste primeiro tipo. Durante a declaração de interface ou classe, apenas os tipos genéricos deste escopo estão disponíveis, e desta forma não é possível determinar qual o valor do primeiro parâmetro de tipo de *Kind*. Como existe apenas *A* e os métodos da classe podem retornar outros valores, determina-se que *Kind* é parametrizado pelo operador coringa.

Para a declaração de *flatMap* utilizam-se genéricos no escopo de método. Os tipos *B* e *M(B)* representam a saída da operação natural de multiplicação de mónade. Com estes declarados, a função *f* que será aplicada neste contexto consegue expressar a entrada *A* e saída *M(B)*. Como na declaração de classe *Kind* foi parametrizado com o operador coringa, agora é possível especializar o retorno de *flatMap* por *Monad(M(B))*.

O método *map* é herdado de *Functor* e seu tipo de retorno é especializado em *Monad*. Neste, utiliza-se o mesmo modo de declaração de *flatMap* com genéricos no escopo de método. Sua declaração é mais simples, pois a função *f* retorna um tipo simples *B*. Por fim, *M* é utilizado no retorno de *map* onde declara-se *Monad(M(B))*.

Diversas estruturas que utilizam o conceito do contexto monádico podem implementar o contrato *Monad* da Listagem 18. Os métodos *map* e *flatMap* e os parâmetros de tipo exigidos pela interface visam garantir consistência entre suas implementações. Para demonstrar os benefícios de *Monad*, na Listagem 19, 20 e 21 a interface *Maybe* e suas subclasses *Just* e *Nothing* são implementadas.

```
public class Just<A> implements Maybe<A> {  
    public Just(A value) {  
        this.value = value;  
    }  
  
    public static <A> Just<A> pure(A a) {  
        return new Just<>(a);  
    }  
  
    ...  
}
```

Listagem 20: Classe *Just*

O tipo *Maybe* é uma mónade que encapsula um valor opcional. Esta pode conter valor e ser uma instância de *Just(A)*, ou estar vazia e corresponder a *Nothing*. Os métodos *map*

e *flatMap* dispõem o encadeamento de funções no contexto de *Maybe*. Os construtores e métodos utilitários como *pure* determinam como dá-se a instanciação.

```
public class Nothing<A> implements Maybe<A> {  
    public Nothing() {}  
}
```

Listagem 21: Classe *Nothing*

Na Listagem 22 demonstra-se a utilização de *Maybe* e suas subclasses para evitar exceções em tempo de execução. O método *divide* recebe dois argumentos do tipo *double* e garante que divisões por zero não ocorram, retornando *Just(Double)* ou *Nothing*. No retorno deste método, encadeia-se uma lambda expression trivial de soma com *flatMap*. Portanto, se *n* assumir valor zero, o retorno de *flatMap* é *Nothing*, caso contrário teremos o valor inicial de *a* dividido por *b* e acrescentado em dois.

```
public Maybe<Double> divide(double a, double b) {  
    if (b == 0) return new Nothing();  
    else return Just.pure(a / b);  
}  
  
...  
  
divide(10, n).flatMap(x -> Just.pure(x + 2))
```

Listagem 22: Exemplo de utilização de *Maybe*

Consequentemente, *Maybe* possibilita que os axiomas de identidade e associatividade de *Monad* sejam validados. Na Listagem 23, os métodos *leftIdentity*, *rightIdentity* e *associativity* representam as leis que regem a estrutura e garantem que estas são válidas para *Maybe*, garantindo a fidelidade da interface *Monad*.

```
public void leftIdentity() {  
    assertEquals(Just.pure(a).flatMap(f),  
        f.apply(a));  
}  
  
public void rightIdentity() {  
    assertEquals(m.flatMap(Just::pure), m);  
}  
  
public void associativity() {  
    assertEquals(m.flatMap(f).flatMap(g),  
        m.flatMap(x -> f.apply(x).flatMap(g)));  
}
```

Listagem 23: Leis de *Monad*

a) *Identidade* - *leftIdentity* e *rightIdentity*: encapsular um valor em um contexto monádico não deve apresentar


```

public interface Monad<A, M extends Kind<?, M>> extends Functor<A>, Kind<A, M> {
    <B, MB extends Kind<B, M>> Monad<B, M> flatMap(Function<? super A, MB> f);
    <B> Monad<B, M> map(Function<? super A, ? extends B> f);
}

```

Listagem 18: Interface *Monad*

```

public interface Maybe<A> extends Monad<A, Maybe<?>> {
    ...
    default <B, MB extends Kind<B, Maybe<?>>> Maybe<B> flatMap(Function<? super A, MB> f) {
        if (isDefined()) return (Maybe<B>) f.apply(get());
        else return new Nothing<>();
    }
    default <B> Maybe<B> map(Function<? super A, ? extends B> f) {
        if (isDefined()) return Just.pure(f.apply(get()));
        else return new Nothing<>();
    }
    ...
}

```

Listagem 19: Interface *Maybe*

alterações no valor ou na estrutura da mónade.

b) *Associatividade - associativity*: a ordem na qual as funções são encadeadas em um contexto monádico não deve importar.

Todas as leis estão implementadas considerando a igualdade de objetos descrita por *equals* e *hashCode* [38]. O método *assertEquals* recebe dois argumentos como valores comparativos e a equivalência dos objetos deve resultar em um tipo booleano verdadeiro, caso contrário a as leis são invalidadas.

C. Problema da Generalização de Arrow

Na declaração de *Arrow* na Listagem 24, a interface apresenta três parâmetros de tipo. Como primeiro tipo genérico, *A* representa um tipo construtor por ser subtipo de *Kind*. O restante, *B* e *C*, apenas explicitam os tipos de entrada e saída de *Arrow*.

Assim como *Monad*, subclasses de *Arrow* devem utilizar seus construtores para incluir $B \rightarrow C$ em seus contextos. Além disso, o método *andThen* define a composição de *Arrow* por $A(B, D) = A(B, C) \circ A(C, D)$.

```

interface Arrow<A extends Kind<?, ?>, B, C> {
    <D, AD extends Kind<D, ?>> Arrow<AD, B, D>
        andThen(Arrow<AD, C, D> k);
}

```

Listagem 24: Interface *Arrow*

A Listagem 25 declara a classe *Kleisli*. Esta implementa o contrato definido em *Arrow* e conta com os tipos genéricos *M*, *A* e *B*. Os argumentos e a implementação de *andThen* foram eliminados afim de manter a simplicidade na declaração do método.

Como *Kleisli* trabalha com tipos monádicos, seu primeiro parâmetro de tipo impõe uma ligação entre *M* e *Monad*. O tipo genérico *A* define a entrada da função encapsulada pelo construtor de classe e *B* o valor encapsulado pela mónade *M*. Além disso, os tipos genéricos declarados em *Kleisli* são repassados para *Arrow* e consequentemente formam os tipos de entrada e saída dos métodos sobrescritos.

```

public class Kleisli<M extends Monad<B, ?>, A, B>
    implements Arrow<M, A, B> {

    ...

    public Kleisli(Function<A, M> f) {
        this.f = f;
    }

    public <D, MD extends Kind<D, ?>> Arrow<MD, A,
        D> andThen() {
        ...
    }
}

```

Listagem 25: Implementação concreta da interface *Arrow*

Para manter a consistência na implementação de *Kleisli*, o método *andThen* deve retornar uma instância de *Arrow* onde $M(D)$ estenda *Monad*. Contudo, *Arrow* impõe restrições através de *Kind* e estas devem ser mantidas na subclassificação. Portanto, o retorno de *andThen* definido por *Arrow* não pode ser expresso em *Kleisli*. Assim, esta interface não é suficientemente genérica de modo que possa expressar as diferentes implementações de flechas. A implementação da flecha de *Kleisli* deverá abrir mão do contrato genérico de *Arrow*.

D. Implementação de *Kleisli*

A implementação da classe *Kleisli* na Listagem 26 contem os tipos genéricos M , B e C . Como esta trabalha sob tipos monádicos e suas composições, M é declarado como sendo um *Monad* e representa o retorno da função encapsulada por *Kleisli*. O tipo B é a entrada da função e C o valor encapsulado no contexto de M , dado por $M(C)$.

Semelhante a *Monad*, valores são incluídos no contexto de *Kleisli* a partir construtor de classe. Este recebe uma função $B \rightarrow M$ que é armazenada e está disponível no escopo de classe. A aplicação da função encapsulada é disponibilizada pelo método *run*.

O operador de composição é expresso pelo método *andThen*. Apesar de conter diversas declarações de tipos genéricos na assinatura do método, *andThen* recebe uma instância de *Kleisli* parametrizada por $M(D)$, C e D . Deste argumento dá-se a composição, onde o valor de C resultante da aplicação de $B \rightarrow M(C)$ é passada para $C \rightarrow M(D)$ de k . Deste encadeamento obtemos uma nova instância de *Kleisli* definida por $M(D)$, B e D .

Com a implementação de *Kleisli* é possível compor mónades de forma semelhante a cadeia de *flatMap* e *map*. Na Listagem 27 f , g e h expressam funções na forma $A \rightarrow M(B)$, mais precisamente $Integer \rightarrow Maybe(Integer)$. O método *andThen* em conjunto com *run* consegue aplicar o valor passado como argumento na função encapsulada e repassa-lo para outras flechas, encadeando os valores entre as mónades.

```

Kleisli<Maybe<Integer>, Integer, Integer> f() {
    return new Kleisli<>(i -> Just.pure(i + 1));
}

Kleisli<Maybe<Integer>, Integer, Integer> g() {
    return new Kleisli<>(i -> Just.pure(i * 10));
}

Kleisli<Maybe<Integer>, Integer, Integer> h() {
    return new Kleisli<>(i -> Just.pure(i - 5));
}

h().andThen(f().andThen(g())) .run(5);

```

Listagem 27: Composição monádica com *andThen*

Kleisli mantém as regras das estruturas subjacentes. A aplicação de h , f , g e *run*(5) por *andThen* resulta em uma instância *Just*(10). De maneira semelhante, se umas destas funções retornar *Nothing*, a cadeia não é executada e retorna este como resultado final.

Diversas leis devem ser satisfeitas por instâncias de *Arrow*. Todavia, como *Kleisli* não implementa uma interface genérica de *Arrow*, em sua implementação preocupou-se apenas com as leis de composição. Na Listagem 28 são implementados os axiomas de identidade e associatividade de *Kleisli*.

```

public void identity() {
    ... kf = new Kleisli<>(f);

    assertEquals(kf.run(a), f.apply(a));
}

public void associativity() {
    assertEquals(g.andThen(h).andThen(f).run(a),
        f.andThen(g.andThen(h)).run(a));
}

```

Listagem 28: Leis de *Kleisli*

c) *Identidade - identity*: a função f com assinatura na forma $A \rightarrow B$ é encapsulada por *Kleisli* e aplicada por *run*(a). A mesma função f fora do contexto de *Kleisli* é aplicada por *apply*(a). A integridade do axioma de identidade está na igualdade do valor obtido de ambas aplicações.

d) *Associatividade - associativity*: as funções f , g e h com assinatura na forma $A \rightarrow M(B)$ são encapsuladas em instâncias de *Kleisli* e compostas por *andThen* em diferentes ordens. A associatividade é garantida pela aplicação de ambas cadeias de funções por *run*(a) e a igualdade de seus resultados.

VII. TRABALHOS RELACIONADOS

Em trabalhos relacionados Du Bois e Echevarria [11] apresentam CMTJava, uma linguagem de domínio específico para compor transações em memória. Transações são implementadas por uma mónade de passagem de estado com funções

```

public class Kleisli<M extends Monad<?, ?>, B, C> {
    ...

    public Kleisli(Function<B, M> f) {
        this.f = f;
    }

    public M run(B b) {
        return f.apply(b);
    }

    public <D, MC extends Monad<C, MC>, MD extends Monad<D, ?>> Kleisli<MD, B, D> andThen(Kleisli<MD, C,
        D> k) {
        return new Kleisli<>(b -> (MD) ((MC) this.run(b)).flatMap(c -> (MC) k.run(c)));
    }
}

```

Listagem 26: Implementação de *Kleisli*

BBGA⁸. A mónade *STM* encapsula valores do tipo A e controla o acesso a memória compartilhada na concorrência computacional. O método *stmreturn* insere qualquer valor do tipo A no contexto da mónade resultando na criação de uma simples transação. A combinação de diferentes transações é disponibilizada através do método *bind*, que tem como argumento uma transação do tipo $STM(A)$ e uma função $A \rightarrow STM(B)$.

Na computação quântica, Crestani e Kaizer [10] utilizam o conceito de mónade para a construção de abstrações de algoritmos quânticos. A mónade quântica encapsula valores do tipo A em vetores quânticos $Vec(A)$. O método *qreturn* recebe um argumento de tipo A e constrói estados quânticos retornando instâncias $Vec(A)$. Transformações quânticas são representadas por $Lin(A, B)$ e descrevem transformações $A \rightarrow V(B)$ encadeadas por *bind*.

Em ambos estudos as estruturas implementadas não estendem um contrato genérico *Monad* (18). Estas são compostas pelos métodos fornecidos em suas instâncias, isto é, sem a utilização de abstrações como *Kleisli* (26). Portanto, apesar de relacionadas, tais pesquisas são demasiadas específicas atendo-se apenas em seu tema principal e não corroboram com a construção de conceitos genéricos propostos por este trabalho.

VIII. CONCLUSÃO

Este trabalho demonstrou a construção da interface monádica, instância de flecha *Kleisli* e a garantia de coesão dada pelos axiomas destas estruturas. Diferentemente de linguagens funcionais, tipos construtores não são suportados em Java e foram simulados a partir da interface *Kind*. Além disso, outras limitações de tipos genéricos e herança impossibilitaram a construção de uma interface para flecha.

Apesar deste estudo demonstrar uma implementação apenas para o tratamento de nulidade, mónades podem de fato servir como abstrações para concorrência. Uma instância concreta da interface mónade pode encapsular funções e executá-las em um contexto contendo threads. Com isto, funcionalidades disponíveis no pacote de concorrência podem ser abstraídas facilitando a construção de programas concorrentes.

Em ambientes distribuídos, muitas das vezes, faz-se necessário compartilhar valores entre diferentes máquinas. Outra importante implementação da interface são as mónades de leitura e escrita. De forma similar a mónade de concorrência, tais mónades encapsulam funções que trabalham com estes valores e abstraem a complexidade do ambiente contido nestas aplicações.

Por meio do polimorfismo obtido na implementação do contrato monádico, *Kleisli* conseguiu generalizar o operador de composição. Esta instância permitiu a execução de funções de forma sequencial em ambos contextos monádicos, respeitando seus axiomas e mantendo suas estruturas. Portanto, todas as derivações da interface mónade disponibilizadas neste trabalho são desenvolvidas individualmente, porém são compostas de maneira genérica pela flecha *Kleisli*.

Com o incremento na inferência de tipos do compilador tais estruturas podem ser simplificadas. A simulação de tipos construtores e as complicadas hierarquias de tipos devem ser substituídas por soluções nativas. Como possível trabalho futuro, diversas outras estruturas oriundas da Teoria das Categorias carecem de implementação. Assim, a implementação de contratos capazes de generalizar outras estruturas tornam-se relevantes.

Este trabalho buscou fornecer novas funcionalidades a partir de recursos pré-existentes na linguagem Java. O suporte a lambda expressions e as estruturas advindas da teoria das categorias dão origem a soluções para problemas cada vez mais presentes na atualidade.

⁸Projeto de extensão da linguagem Java que tinha como proposta suportar lambda expressions.

REFERÊNCIAS

- [1] B. Pierce, “A taste of category theory for computer scientists,” 1990.
- [2] P. B. Menezes e C. E. Ramisch, “Características da teoria das categorias e sua importância para a ciência da computação,” in *STC 2006 - I Simpósio de Teoria das Categorias*. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Mar. 2006.
- [3] J. Hughes, “Generalising monads to arrows,” *Science Computer Programming*, v. 37, n. 1-3, p. 67–111, 2000.
- [4] J. Dean e S. Ghemawat, “Mapreduce: simplified data processing on large clusters,” *Communications of the ACM*, v. 51, n. 1, p. 107–113, 2008.
- [5] J. Dzik, N. Palladinos, K. Rontogiannis, E. Tsarpalis e N. Vathis, “Mbrace: cloud computing with monads,” in *Proceedings of the Seventh Workshop on Programming Languages and Operating Systems*. ACM, 2013, p. 7.
- [6] S. P. Jones, “Beautiful concurrency,” *Beautiful Code: Leading Programmers Explain How They Think*, p. 385–406, 2007.
- [7] S. D. Swierstra e L. Duponcheel, “Deterministic, error-correcting combinator parsers,” in *Advanced Functional Programming*. Springer, 1996, p. 184–207.
- [8] A. Courtney e C. Elliott, “Genuinely functional user interfaces,” in *Haskell workshop*, 2001, p. 41–69.
- [9] A. Courtney, H. Nilsson e J. Peterson, “The yampa arcade,” in *Proceedings of the 2003 ACM SIGPLAN workshop on Haskell*. ACM, 2003, p. 7–18.
- [10] B. Crestani Calegaro e J. Kaizer Vizzotto, “Quantum monad using java closures,” in *Theoretical Computer Science (WEIT), 2013 2nd Workshop-School on*. IEEE, 2013, p. 34–39.
- [11] A. R. Du Bois e M. Echevarria, “A domain specific language for composable memory transactions in java,” in *Domain-Specific Languages*, ser. Lecture Notes in Computer Science, W. Taha, Ed. Springer Berlin Heidelberg, 2009, v. 5658, p. 170–186.
- [12] R.-G. Urma *et al.*, “Java 8 in action,” 2014.
- [13] P. Hudak, “Conception, evolution, and application of functional programming languages,” *ACM Computing Surveys (CSUR)*, v. 21, n. 3, p. 359–411, 1989.
- [14] K. Loudon *et al.*, *Programming Languages: Principles and Practices*. Cengage Learning, 2011.
- [15] G. Michaelson, *An Introduction to Functional Programming Through Lambda Calculus*. Courier Corporation, 2011.
- [16] B. Goetz *et al.*, “State of the lambda,” Set. 2013, White Paper. [Online]. Available: <http://cr.openjdk.java.net/~briangoetz/lambda/lambda-state-final.html>
- [17] R. Fischer, *Java Closures and Lambda*, 11° ed. Apress, 2015.
- [18] C. Hunt e B. John, *Java Performance*. Prentice Hall Press, 2011.
- [19] B. Goetz, “Translation of lambda expressions,” Abr. 2012, White Paper. [Online]. Available: <http://cr.openjdk.java.net/~briangoetz/lambda/lambda-translation.html>
- [20] S. Eilenberg e S. MacLane, “General theory of natural equivalences,” *Transactions of the American Mathematical Society*, p. 231–294, 1945.
- [21] D. I. Spivak, *Category Theory for the Sciences*. The MIT Press, 2014, n. 1.
- [22] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, ser. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1971, n. 5.
- [23] S. Awodey, *Category Theory - Oxford Logic Guides*, 22° ed. Oxford University Press, 2010, v. 52.
- [24] J. M. Hill e K. Clarke, “An introduction to category theory, category theory monads, and their relationship to functional programming,” Technical Report QMW-DCS-681, Department of Computer Science, Queen Mary and Westfield College, Relatório Técnico, 1994.
- [25] M. C. Pedicchio e W. Tholen, *Categorical Foundations Special Topics in Order, Topology, Algebra, and Sheaf Theory*. Cambridge University Press, 2004, n. 97.
- [26] S. L. Peyton Jones e P. Wadler, “Imperative functional programming,” in *Proceedings of the 20th ACM SIGPLAN-SIGACT symposium on Principles of programming languages*. ACM, 1993, p. 71–84.
- [27] P. Wadler, “Monads for functional programming,” in *Advanced Functional Programming*. Springer, 1995, p. 24–52.
- [28] P. Wadler, “Comprehending monads,” *Mathematical structures in computer science*, v. 2, n. 04, p. 461–493, 1992.
- [29] P. Wadler, “The essence of functional programming,” in *Proceedings of the 19th ACM SIGPLAN-SIGACT symposium on Principles of programming languages*. ACM, 1992, p. 1–14.
- [30] S. P. Jones, “Tackling the awkward squad: monadic input/output, concurrency, exceptions, and foreign-language calls in haskell,” in *Engineering Theories of Software Construction*. Press, 2001, p. 47–96.
- [31] B. O’Sullivan *et al.*, *Real world haskell: Code you can believe in*, 11° ed. O’Reilly Media, Inc., 2008.
- [32] B. Yorgey, “Typeclassopedia,” <https://wiki.haskell.org/Typeclassopedia>, Mar. 2009, acessado em 17/09/2015.
- [33] C. V. Hall *et al.*, “Type classes in haskell,” *ACM Trans. Program. Lang. Syst.*, v. 18, n. 2, p. 109–138, 1996.
- [34] S. Marlow *et al.*, “Haskell 2010 language report,” Disponível em: <http://www.haskell.org/onlinereport/haskell2010>, 2010.
- [35] J. Hughes, “Programming with arrows,” in *Advanced Functional Programming*, ser. Lecture Notes in Computer Science, V. Vene e T. Uustalu, Eds. Springer Berlin Heidelberg, 2005, v. 3622, p. 73–129.
- [36] “Prelude,” <http://hackage.haskell.org/package/base-4.8.1.0/docs/Prelude.html>, Jul. 2001, acessado em 26/09/2015.
- [37] S. Lindley, P. Wadler e J. Yallop, “Idioms are oblivious, arrows are meticulous, monads are promiscuous,” *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, v. 229, n. 5, p. 97–117, 2011.

- [38] J. Gosling e H. McGilton, “The java language environment,” *Sun Microsystems Computer Company*, v. 2550, 1995.
- [39] G. Bracha, “Generics in the java programming language,” *Sun Microsystems Computer Company*, p. 1–23, 2004.
- [40] G. Bracha *et al.*, “Making the future safe for the past: Adding genericity to the java programming language,” *ACM Sigplan Notices*, v. 33, n. 10, p. 183–200, 1998.
- [41] B. C. Pierce, *Types and programming languages*. MIT Press, 2002.