3 Técnicas de reconto. Combinatoria.

Pablo Pasarín López

"A gran variedade que aparece tanto na natureza como nas accións das persoas, e que constitúe a maior parte da beleza do universo, se debe ás moitas maneiras nas que as súas diversas partes se mezclan ou colocan unhas cerca das outras. Pero, debido a que o número de causas que concurren en producir un evento dado, a miúdo é inmensamente grande, e son tan diferentes entre si, é extremadamente difícil calcular todas as maneiras nas que se organizan ou combinan."

- J. Bernouilli

1. Introdución

A combinatoria é a rama das matemáticas que estuda as ordenacións ou agrupacións dun determinado número de elementos pertencentes a estruturas finitas como grafos ou conxuntos, co obxectivo de obter resultados e propiedades destas estruturas, seguindo certas regras. Pódese empregar para combinar obxectos creando novos arreglos, contar o número de arreglos que se poden facer a partir dun grupo de obxectos ou atopar o mellor arreglo dadas as circunstancias.

Certos problemas combinatorios xurden na antigüidade. Por exemplo, os cadrados máxicos, que son matrices cadradas coa propiedade de que as filas, columnas e diagonais sumen o mesmo número, aparecen en China no s. XII a.C., ou os coeficientes enteiros da expansión binomial xa eran coñecidos polo matemático hindú Bhaskara do s. XII. En Occidente a combinatoria comeza no s. XVII cos traballos de Pascal e Fermat sobre probabilidade. Leibniz introduce os primeiros conceptos sobre pertumacións e combinacións e J. Bernouilli desenvolve unha teoría xeral sobre estas aplicada aos xogos de azar. Ademais, demostra o teorema binomial para expoñentes enteiros.

Os estudos de Euler sobre a partición e descomposición de enteiros como suma de naturais, establecen as bases dun dos métodos fundamentais para o cálculo de configuracións combinatorias, que é o método das funcións xeradoras.

No s. XX, a combinatoria experimenta un auxe con novas aplicacións a outras áreas, dende a álxebra á probabilidade, e da análese funcional á teoría de números.

2. Técnicas elementais de conteo

A continuación enúncianse tres principios básicos para contar os elementos dun conxunto, ou máis precisamente, determinar o seu cardinal. As demostracións son rutinarias aplicando indución polo que as omitimos.

Sexa A un conxunto finito non valeiro, entón diremos que A ten cardinal n se existe unha bixección entre A e o conxunto $\{0,1,\dots,n-1\}$, e denotamos por $|A|$ ao cardinal de A. Polo tanto, dous conxuntos son bixectivos se teñen o mesmo cardinal.

2.1 Teorema: Principio de Adición. Sexan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conxuntos finitos e disxuntos, é dicir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ con $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entón

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

2.2 Teorema: Principio do Produto. Sexan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conxuntos non valeiros, entón

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|$$

denotando por $\times$ ao produto cartesiano dos A_i

2.3 Observación. O teorema anterior se pode enunciar dunha maneira máis práctica: *“ Dadas n celdas cada unha con k_i bolas. Consideremos o experimento de extraer unha bola de cada celda, e distribuilas na orde na que se extraen. Nese caso o número de posibles distribucións é $\prod_{i=1}^{n} k_i$”*

2.4 Teorema: Principio de Distribución. Sexan $r, n, m \in \mathbb{N}$. Se queremos distribuir n bolas en m celdas, con $rm < n$, polo menos unha celda debe recibir máis de r bolas.

3. Permutacións, Variacións e Combinacións

3.1 Permutacións.

3.1.1 Definición. Sexa A un conxunto finito non valeiro. Unha permutación de dito conxunto é unha bixección de A en A. Se $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $\sigma : A \to A$ é unha bixección en A, a permutación σ se poderá representar do seguinte modo:

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \cdots & \sigma(a_n) \end{pmatrix}$$

De modo que se $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})$ é unha ordenación de elementos de A, podemos definir unha bixección en A definida por $\sigma(a_j) = a_{i_j}$. Recíprocamente, a calquera bixección σ, pódeselle asociar unha ordenación $(\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_n))$. Deste xeito, **unha permutación tamén se pode definir como unha ordenación dos elementos de A.**

3.1.2 Teorema. Sexan A e B dous conxuntos de cardinal n, entón o número de bixeccións distintas de A a B que podemos definir é $n!$.

Demostración.

Sexa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $f : A \to B$ unha bixección. Como imaxe de a_1 podemos tomar calquera dos n elementos de B. Determinado $f(a_1)$, quedan $n-1$ elementos distintos en B para $f(a_2)$. Continuando cos restantes elementos de A quedarían dous elementos para a imaxe de a_{n-1} e un para $f(a_n)$. Basta aplicar o **Principio de Multiplicación** para obter o número total de bixeccións distintas:

$$n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 = n!$$

■

3.1.3 Observacións.

1. Se $A = B$ obtemos o número de permutacións. Polo tanto o número de permutacións dun conxunto de n elementos, que denotamos por P_n é $n!$.
2. As permutacións aparecen cando temos que organizar n obxectos en n posicións. Se as posicións se numeran do 1 a n, ao proceso que move un obxecto do lugar i ao lugar j pódeselle asociar unha permutación σ tal que $\sigma(i) = j$.

3.2 Variacións.

3.2.1 Definicións. Sexa A un conxunto finito de n elementos e sexa $r \leq n$. Unha **variación** de orde r de A é unha lista ordenada $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ de r elementos distintos de A. Dúas variacións son diferentes se algún elemento de unha das dúas listas non se atopa noutra, ou ben se as dúas listas teñen os mesmos elementos pero en distinto orde.

Chámanse **variacións de n elementos tomados de r en r**, e denótase por $V_{n,r}$, ao número de variacións de orde r do conxunto A de n elementos.

3.2.2 Observación. Sexa $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ unha variación de orde r de A e sexa $B = \{1, 2, \ldots, r\}$. Podemos construir unha aplicación inxectiva $\sigma : B \to A$ definida por $\sigma(i) = a_i$ para $i = 1, 2, \ldots, r$. Reciprocamente, dada unha aplicación inxectiva $\sigma : B \to A$, se lle pode asociar a variación $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(r))$. Polo tanto, unha variación de orde r se pode definir como unha aplicación inxectiva $\sigma : \{1, 2, \ldots, r\} \to A$. En particular, as permutacións do conxunto A son variacións de orde r de A con $r = n$.

3.2.3 Teorema. Sexan A e B dous conxuntos tales que $|A| = n$, $|B| = r$ e $r \leq n$. O número de aplicacións inxectivas de B a A, ou equivalentemente, o número de variacións de orde r nun conxunto de n elementos é

$$V_{n,r} = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Demostración.

Sexan $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$. Como imaxe de b_1 podemos tomar calquera dos elementos de B. Determinada $f(b_1)$, quedan $n-1$ elementos distintos en A para $f(b_2)$. Continuando cos restantes elementos de B quedarían $n-(r-1) = n-r+1$ elementos para a imaxe de b_r. Basta aplicar o Principio de Multiplicación para obter o número total de aplicacións inxectivas. ■

3.3 Variacións con repetición.

3.3.1 Definicións. Sexa A un conxunto de cardinal n e sexa $r \in \mathbb{N}$. Unha variación con repetición de orde r de A é unha lista ordenada de r elementos, non necesariamente diferentes, de A (poden repetirse elementos). Dúas variacións con repetición serán diferentes se algún elemento dunha das dúas listas non se atopa na outra, ou ben se as dúas listas conteñen os mesmos elementos, pero en distinta orde.

Chámase **número de variacións con repetición de n elementos tomados de r en r**, e denótase por $\mathrm{VR}_{n,r}$, ao número de variacións con repetición de orde r do conxunto A.

3.3.2 Observación. Pódese establecer unha bixección entre o conxunto das variacións con repetición de orde r de A e o conxunto das aplicacións entre os conxuntos $B = \{1, 2, \ldots, r\}$ e A. Deste xeito, podemos definir unha **variación con repetición de orde** r como unha aplicación $\sigma : \{1, 2, \ldots, r\} \to A$.

3.3.3 Teorema. Sexan A e B dous conxuntos con $|A| = n$ e $|B| = r$. O número de aplicacións de B a A é n^r. Deste xeito, o número de variacións con repetición de orde r nun conxunto de n elementos é $\mathrm{VR}_{n,r} = n^r$.

Demostración.

Sexan $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$. A imaxe de cada b_i pode ser calquera dos n elementos de A. Aplicando o Principio de Multiplicación, o número total de aplicacións é $n \cdot n \cdots n = n^r$ ■

3.3.4 Proposición. Se A é un conxunto finito con $|A| = n$, entón o cardinal do conxunto das partes de A, é dicir, o número total de subconxuntos de A é 2^n.

Demostración.

Sexa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conxunto ordenado. Calquera subconxunto de r elementos de A se pode escribir como $R = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\}$, de modo que se pode construir unha bixección entre R e unha lista de n elementos formada por uns e ceros, tal que se o elemento a_{i_j} pertence a R, entón escribimos un 1, e se non, un 0. Deste xeito, existe unha bixección entre subconxuntos de A e listas de n elementos con ceros e uns. O número destas listas, é o de variacións con repetición de orde n do conxunto $\{0, 1\}$, é dicir, 2^n. Polo tanto, o cardinal das partes de A é 2^n. ■

3.4 Combinacións.

3.4.1 Definicións. Sexa A un conxunto finito con $|A| = n$ e sexa $r \leq n$. Unha combinación de orde r de A é unha **lista non ordenada** $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ de diferentes elementos de A. Dúas combinacións son diferentes se difieren nalgún elemento.

Chámase número de **combinacións de n elementos tomados de r en r**, e denótase por $\mathrm{C}_{n,r}$ ou mediante o chamado número combinatorio n sobre r: $\binom{n}{r}$, ao número de combinacións de orde r do conxunto A.

3.4.2 Teorema. Sexan $n, r \in \mathbb{N}$ con $r \leq n$. Entón

$$\mathrm{C}_{n,r} = \frac{\mathrm{V}_{n,r}}{r!}; \quad \text{polo tanto} \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Demostración.

Defínese a seguinte relación de equivalencia sobre o conxunto $V_n(A)$ das variacións de orde r de A:

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}) \sim (a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_r}) \quad \text{se e só se} \quad \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\} = \{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_r}\}$$

é dicir, dúas variacións están relacionadas se teñen os mesmos elementos. O conxunto cociente desta relación de equivalencia é o conxunto das combinacións de orde r de A. Ademais, como cada clase de equivalencia está formada por $r!$ elementos (número de ordenacións diferentes dos r elementos da lista), entón o cardinal do conxunto cociente será: $|V_n(A)/\sim| = \mathrm{C}_{n,r} = \frac{\mathrm{V}_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

En particular se $r = 0$, entón $\mathrm{C}_{n,0} = 1$, por definición $0! = 1$. ■

3.5 Combinacións con repetición.

3.5.1 Definicións. Sexa A un conxunto con $|A| = n$ e sexa $r \in \mathbb{N}$. Unha combinación con repetición de orde r de A é unha lista non ordenada $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ de r elementos, non necesariamente diferentes, de A (se poden repetir elementos). Dúas combinacións con repetición serán diferentes se difieren nalgún elemento.

Chámase **número de combinacións con repetición de n elementos tomados de r en r**, e denótase por $\mathrm{CR}_{n,r}$, ao número de combinacións con repetición de orde r de A.

3.5.2 Teorema. O número de combinacións con repetición de orde r dun conxunto A, con $|A| = n$, coincide co número de solucións enteiras non negativas da ecuación

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$$

Demostración.

Sexa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Considérase unha lista de r elementos de A e defínese x_i = número de veces que aparece o elemento $a_i \in A$ na lista, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Deste xeito, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$. Reciprocamente, se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é unha solución enteira non negativa, entón se lle pode asociar a lista:

$$(\overbrace{a_1, \ldots, a_1}^{x_1} | \overbrace{a_2, \ldots, a_2}^{x_2} | \ldots | \overbrace{a_n, \ldots, a_n}^{x_n})$$

■

3.5.3 Teorema. Sexan $m, n \in \mathbb{Z}^+$. O número de solucións enteiras non negativas da ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ é $\mathrm{C}_{n+r-1,r}$.

Demostración.

Sexa $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ unha solución enteira non negativa, entón se lle pode asociar unha sucesión formada por r uns e $n-1$ ceros:

$$\overbrace{1, \ldots, 1}^{x_1}, 0, \overbrace{1, \ldots, 1}^{x_2}, 0, \ldots, 0, \overbrace{1, \ldots, 1}^{x_n}$$

Recíprocamente, a cada sucesión de r uns e $n-1$ ceros lle corresponde unha solución enteira non negativa. Deste xeito, conclúese que o número de solucións enteiras non negativas da ecuación é igual ao número de sucesións diferentes de r uns e $n-1$ ceros. Existen $r+n-1$ posicións onde se poden colocar r uns, polo tanto o número de solucións enteiras non negativas será igual ao número de combinacións de $r+n-1$ elementos tomados de r en r. ■

3.5.4 Corolario. O número de combinacións con repetición de orde r dun conxunto A de n elementos é

$$\mathrm{CR}_{n,r} = \mathrm{C}_{n+r-1,n} = \binom{n+r-1}{r}$$

3.6 Permutacións circulares.

3.6.1 Definición. Unha **permutación circular de n obxectos distintos de orde** r con $r \leq n$, é unha distribución ordenada de r dos n obxectos en r posicións igualmente espaciadas sobre unha circunferencia. Dúas permutacións circulares son iguais se unha se pode obter doutra mediante unha rotación da circunferencia. Se $r = n$, chámase **permutación circular de r elementos**. O número total de permutacións de r elementos denótase por PC_r.

3.6.2 Teorema. O número de permutacións circulares de n obxectos distintos de orde r é

$$\mathrm{C}_{n,r} \cdot (r-1)!, \quad \text{polo tanto,} \quad \mathrm{PC}_r = (r-1)!$$

Demostración.

Escoller os n obxectos a colocar na circunferencia pódese realizar de $\mathrm{C}_{n,r}$ maneiras diferentes. Supoñamos que os obxectos colocados son $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$, fixando a posición dun deles como punto de referencia na circunferencia, por exemplo, a_1, débese escoller a posición relativa a a_1 dos $r-1$ restantes, o cal se pode facer de $(r-1)!$ formas diferentes. Deste xeito, o número total de permutacións circulares de orde r de n elementos distintos é $\mathrm{C}_{n,r} \cdot (r-1)!$. ■

3.7 Permutacións con repetición.

3.7.1 Definición. Dados n obxectos de k tipos con $k \leq n$, e tal que hai n_i obxectos do tipo i para cada $i = 1, 2, \dots, k$ con $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Unha permutación con repetición de n elementos nos que hai n_i iguais entre si, é unha ordenación destes n elementos. Dúas ordenacións son iguais se para cada $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ os obxectos que ocupan o lugar j son do mesmo tipo.

3.7.2 Teorema. O número de permutacións con repetición de n elementos onde hai n_i iguais entre si para cada $i = 1, 2, \dots, k$ é

$$\mathrm{P}(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Chámase coeficiente multinomial a $\mathrm{P}(n; n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Demostración.

Se primeiro colocamos os n_1 obxectos do primeiro tipo, observamos que ao ser iguais entre si non influirá a orde relativa entre eles. Existen n posicións onde colocar n_1 obxectos iguais entre si, polo tanto, o número de formas diferentes de colocalos é $\binom{n}{n_1}$. Agora, existen $n-n_1$ posicións para os n_2 obxectos do segundo tipo, polo tanto, o número de formas diferentes de colocalos é $\binom{n-n_1}{n_2}$. Repetindo o proceso, chégase a que os obxectos de tipo k teñen que ocupar as $n-(n_1+\ldots+n_{k-1}) = n_k$ posicións restantes: $\binom{n_k}{n_k} = 1$. Basta aplicar o Principio de

Multiplicación para obter o número de permutacións con repetición:

$$\binom{n}{n_1}\cdot\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-(n_1+n_2+\ldots+n_{k-1})}{n_k}=$$
$$=\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-(n_1+n_2))!}\cdots\frac{(n-(n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}))!}{n_k!0!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

■

4. Propiedades dos números combinatorios

4.1 Teorema. Sexan $n,r\in\mathbb{N}$ tal que $0\le r\le n$, entón verifícanse

$$\text{a) }\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1;\quad \text{b) }\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r};\quad \text{c) }\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}\text{ (Fórmula de Pascal)}$$

Demostración.

Demostremos a terceira igualdade xa que as dúas primeiras son inmediatas.

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\frac{n!}{r!(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}=\frac{n!(n-r+1)+n!r}{r!(n-r+1)!}=\frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}=\binom{n+1}{r}$$

■

4.2 Corolario. Aplicando sucesivamente a fórmula de Pascal,

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-2}{r-1}+\ldots+\binom{r-1}{r-1}$$

4.3 Corolario. Aplicando a fórmula de Pascal, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0$

Demostración.

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}=$$
$$=\binom{n}{0}-\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}\right]+\left[\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}\right]-\ldots+(-1)^{n-1}\left[\binom{n-1}{n-2}+\binom{n-1}{n-1}\right]+(-1)^n\binom{n}{n}=$$
$$=\binom{n}{0}+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}=1-1+(-1)^{n-1}+(-1)^n=0$$

■

4.4 Triángulo de Pascal. Dado o valor inicial $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$, pódense calcular os números combinatorios de maneira iterativa. Distribuíndo estes nunha figura chamada triángulo de Pascal, verifícase que o primeiro e último elemento de cada fila é 1 (propiedade a)), ademais hai unha simetría central dentro de cada fila (propiedade b)), e calquera outro número se pode obter sumando os dous números que se atopan enriba del (propiedade c)).

$$\begin{array}{lccccccccccr}
n=0: & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & =2^0\\
n=1: & & & & \binom{1}{0} & + & \binom{1}{1} & & & & & =2^1\\
n=2: & & & \binom{2}{0} & + & \binom{2}{1} & + & \binom{2}{2} & & & & =2^2\\
n=3: & & \binom{3}{0} & + & \binom{3}{1} & + & \binom{3}{2} & + & \binom{3}{3} & & & =2^3\\
n=4: & \binom{4}{0} & + & \binom{4}{1} & + & \binom{4}{2} & + & \binom{4}{3} & + & \binom{4}{4} & & =2^4\\
\ldots & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}$$

5. Principio de Inclusión-Exclusión

5.1 Teorema: Principio de Inclusión-Exclusión. Sexan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conxuntos finitos e non nesariamente disxuntos, entón

$$|\cup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \tag{3.1}$$

Demostración.

Sexa $a \in \cup_{i=1}^n A_i$ e supoñamos que a pertence exactamente a r dos n conxuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ con $1 \le r \le n$. Deste xeito, dito elemento é contado $\binom{r}{1}$ veces pola expresión $\sum |A_i|$, $\binom{r}{2}$ veces pola expresión $\sum |A_i \cap A_j|$, e, en xeral, $\binom{r}{k}$ veces pola expresión $\sum |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$ con $(1 \le k \le n)$. Polo tanto, aplicando o corolario 4.3, o número de veces que é contado pola expresión (1) é

$$\binom{r}{1} - \binom{r}{2} + \ldots + (-1)^{r+1}\binom{r}{r} = 1 - \left[\binom{r}{0} - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} - \ldots + (-1)^r \binom{r}{r}\right] = 1 - 0 = 1$$

■

Moitos problemas de combinatoria se poden resolver mediante este principio. Unha maneira alternativa de enuncialo é:

5.2 Corolario. Sexa A un conxunto finito e $P_1, P_2, \ldots, P_n$ propiedades que cada un dos elementos de A pode ou non satisfacer. Denótase por $N(P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k})$ ao número de elementos de A que verifican as propiedades $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}$, por $N(P_1', P_2', \ldots, P_n')$ ao número de elementos que non verifican ningunha das propiedades e por N ao cardinal de A, entón

$$N(P_1', P_2', \ldots, P_n') = N - \sum_{i=1}^n N(P_i) + \sum_{1\le i<j\le n} N(P_i, P_j) - \sum_{1\le i<j<k\le n} N(P_i, P_j, P_k) - \ldots + (-1)^n N(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

Demostración.

Sexa $A_i = \{x \in A : x \text{ verifica } P_i\}$, entón $A_i^C = A - A_i = \{x \in A : x \text{ no verifica } P_i\}$. Deste xeito, $N(P_1', P_2', \ldots, P_n') = \cap_{i=1}^n |A_i^C| = |A| - \cup_{i=1}^n |A_i|$, e basta aplicar o Principio de Inclusión-Exclusión. ■

6. Aplicacións da Combinatoria. Distribucións de bolas en celdas

6.1 Bolas e celdas distinguibles. Consideramos n bolas distinguibles e r celdas distinguibles. A cuestión que nos interesa é determinar de cantas maneiras se poden distribuir as bolas nas celdas, distinguindo que bolas van en cada celda. Os casos máis relevantes son:

6.1.1 Distinción en canto ao número de bolas que caben nunha celda. Consideremos dous casos:

1. Poden quedar celdas valeiras, é dicir, non hai restriccións, r pode tomar calquera valor e pode haber máis dunha bola nunha celda. Como cada bola se pode colocar en calquera das r celdas, o número de posibles distribucións é

$$\mathrm{VR}_{r,n} = r^n$$

2. Se en cada celda cabe unha e só unha bola, entón

$$\mathrm{V}_{n,r} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

onde $n \ge r$

6.1.2 Distinción en canto ao tipo de bolas e celdas. Consideremos o seguinte caso:

1. O conxunto A ten diferentes tipos de bolas, concretamente hai k_i bolas do tipo k_i para $i = 1, 2, \ldots, m$ con $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.

Resolución: Supoñamos que temos (p,q) tipos de bolas con $p+q=n$, e r celdas numeradas da 1 á r. O número de distribucións posibles de p bolas en r celdas é $\mathrm{CR}_{r,p}=\binom{r+p-1}{p}$. Razoase igual para q, e aplicando o Principio do Produto obtense o número total de distribucións: $\binom{p+r-1}{p}\cdot\binom{q+r-1}{q}$. En xeral, para $(k_1,\dots,k_m)$ tipos o número de distribucións é

$$\prod_{i=1}^{m}\binom{k_i+r-1}{k_i}$$

6.2 Bolas idénticas e celdas distinguibles. Consideremos n bolas idénticas para distribuir en r celdas distinguibles. Deste xeito, unha distribución se pode codificar como unha lista $(x_1,\dots,x_r)$ cuxa suma é $x_1+\dots+x_r=n$. Os casos máis relevantes son:

1. As n bolas se distribúen de maneira que algunhas das celdas poden quedar valeiras, é dicir, a restricción é $x_i\geq 0$. Entón r pode tomar calquera valor e o número de posibles distribucións é:
$$\mathrm{CR}_{n,r}=\binom{n+r-1}{r}=\binom{n+r-1}{n-1}\quad \text{para } n\geq 1, r\geq 1$$
2. As n bolas se distribúen de maneira que ningunha celda pode quedar valeira, é dicir, a restricción é $x_i\geq 1$. Entón, o problema é análogo a calcular o número de combinacións con repetición de n elementos tomados de r en r nas que é necesario empregar polo menos unha vez cada elemento. Deste xeito, se consideramos a sucesión formada por n uns e $r-1$ ceros:
$$\underbrace{\overbrace{1,\dots,1}^{x_1},0,\overbrace{1,\dots,1}^{x_2},0,\dots,0,\overbrace{1,\dots,1}^{x_m}}_{n}$$
existen $n-1$ posicións entre uns $1\overset{1}{\downarrow}1\overset{2}{\downarrow}1\overset{3}{\downarrow}\dots\overset{n-1}{\downarrow}1$ onde se poden colocar $r-1$ ceros, polo tanto o número de solucións enteiras positivas é igual ao número de combinacións de $n-1$ elementos tomados de $r-1$ en $r-1$.
O problema é análogo a determinar o número de maneiras nas que se poden trazar $r-1$ liñas entre $n-1$ intervalos de pares de bolas.
$$\mathrm{C}_{n-1,r-1}=\binom{n-1}{r-1}\quad \text{para } n\geq r\geq 1$$
Tamén se pode formular como o número de maneiras nas que se poden pintar n bolas usando r cores.

6.3 Bolas numeradas e celdas idénticas.

6.3.1 Proposición. Supoñamos que queremos distribuir n bolas numeradas en r celdas iguais, entón se o número de celdas valeiras é exactamente k, o número de posibles distribucións é

$$A_n^{r-k}=\frac{n!}{(r-k)!}\binom{n-1}{r-k-1}$$

Demostración.

1. Supoñamos que as n bolas se atopan distribuídas ordenadamente:
$$(a_1,a_2,\dots,a_i|a_{i+1},\dots,a_{i_j}|a_{i_{j+1}},\dots,a_k|a_{k+1},\dots,a_{n-1},a_n)$$
onde as barras indican a celda na que se atopan as bolas. Para calcular todas as posibles maneiras, temos que darnos de conta, primeiro de que necesitamos permutar as n bolas para conseguir calquera distribución, é dicir $n!$, e segundo que temos $r-1$ barras para situar en $n-1$ intervalos posibles, é dicir, $\binom{n-1}{r-1}$.
Do produto $n!\cdot\binom{n-1}{r-1}$, obtemos todas as distribucións posibles das n bolas en r celdas, nas que sen querer estamos distinguindo as celdas. Para resolver este problema dividimos entre todas as permutacións das

r celdas:

$$A_n^r = \frac{n!}{r!}\binom{n-1}{r-1}$$

2. Se o número de celdas valeiras é k, basta considerar n bolas numeradas a distribuir en $r-k$ celdas.

$$A_n^{r-k} = \frac{n!}{(r-k)!}\binom{n-1}{r-k-1}$$

■

6.3.2 Proposición. Supoñamos que non hai celdas valeiras e que a orde das bolas nas celdas non se ten en conta. Entón o número de destribucións é

$$S(n,r) = \frac{1}{r!}\sum_{s_1+s_2+\ldots+s_r=n}\frac{n!}{s_1!s_2!\cdots s_r!}$$

onde s_i é o número de bolas que hai na i-ésima celda para $i = 1,2,\ldots,r$. Chámase número de Stirling de segunda especie a $S(n,r)$.

Demostración.

Para un caso concreto $s_1+s_2+\ldots+s_r = n$, existen $\binom{n}{s_1}$ maneiras de encher a primeira celda, $\binom{n-s_1}{s_2}$ de encher a segunda, $\binom{n-s_1-s_2}{s_3}$ a terceira,$\ldots$,$\binom{n-s_1-s_2-\ldots-s_{r-1}}{s_r}$ maneiras de encher a r-ésima. Aplicando o Principio do Produto obtense as meneiras de encher as r celdas. Deste xeito, considerando os restantes casos e dividindo entre $r!$ para non ter en conta as permutacións das r celdas, obtense o número buscado:

$$B_n^r = \frac{1}{r!}\sum_{s_1+s_2+\ldots+s_r=n}\frac{n!}{s_1!(n-s_1)!}\cdot\frac{(n-s_1)!}{s_2!(n-s_1-s_2)!}\cdots\frac{(n-s_1-s_2-\ldots-s_{r-1})!}{s_r!(n-s_1-s_2-\ldots-s_r)!} = \frac{1}{r!}\sum_{s_1+s_2+\ldots+s_r=n}\frac{n!}{s_1!s_2!\cdots s_r!}$$

■

6.4 Bolas e celdas indistinguibles.

Tamén se soe presentar como o problema da partición dun número natural na suma de naturais menores que este.

Consideremos n bolas e r celdas indistinguibles. Podemos distribuir as n bolas do conxunto A en r subconxuntos ou particións non valeiras de maneira que a i-ésima partición conteña a_i bolas con $a_i > 0$ para $i = 1,2,\ldots,n$.

Podemos supoñer sen perda de xeneralidade que as particións son "ordenadas" segundo o número de bolas que conteñen. Deste xeito, $a_i \geq a_{i+1}$ para $i = 1,2,\ldots,r-1$. Agora, se denotamos con $P_r(n)$ ao número de posibles particións, é inmediato que $P_1(n) = 1$, $P_r(r) = 1$, e $P_r(n) = 0$ para $n < r$. Para calcular $P_r(n)$ con $n > r$, comezamos eliminando unha bola de cada partición. Deste xeito, hai $n-r$ bolas en A para distribuir en r conxuntos permitindo que algúns queden valeiros: $P_1(n-r) = 1$, $P_2(n-r) =$ número de distribucións das $n-r$ bolas en 2 subconxuntos,$\ldots$, $P_i(n-r)$,$\ldots$,$P_r(n-r) =$ número de distribucións das $n-r$ bolas en r subconxuntos. Dado que engadindo unha bola en cada subconxunto obtemos as particións orixinais, o número que se obten ao sumar estas distribucións é $P_r(n)$, isto é, $P_r(n) = \sum_{i=1}^{r} P_i(n-r)$.

Deste xeito, podemos calcular por recorrencia as particións para calquera r. Por exemplo, se $r = 2$, entón $P_2(1) = 0$ e $P_2(2) = 1$, e para calquera n:

$$P_2(n) = \sum_{i=1}^{2} P_i(n-2) = P_1(n-2) + P_2(n-2) = 1 + P_2(n-2)$$

$$P_2(n) = 1 + P_2(n-2) = 1 + 1 + P_2(n-4) = 2 + P_2(n-4)$$

Repetindo o proceso, chégase a que se n é par, entón $P_2(n) = \frac{n-2}{2} + P_2(2) = \frac{n}{2}$. Doutra banda, se n é impar, entón $P_2(n) = \frac{n-1}{2} + P_2(1) = \frac{n-1}{2}$.

Sen embargo, a resolución comeza a complicarse considerablemente para $r = 3$. Cando se traballa con valores de r relativamente altos, utilízase un valor aproximado $P_r(n) \approx \frac{1}{r!}\binom{n-1}{r-1}$.

7. Conclusión

Para min a combinatoria é a "arte de contar". Algunhas cuestións e problemas que aquí se mencionan son casos moi sinxelos de plantexar pero moi difíciles de resolver, e este é un anaco da beleza das matemáticas.

Problemas como os tratados anteriormente, de distribución de bolas en celdas existen dende moito tempo e a súa resolución é, aínda que moi elaborada, moi interesante e instrutiva. Ademais, pódense atopar similitudes destes problemas noutros de diversa formulación, como particións de conxuntos, conxuntos de subgrafos, etc.

Na bibliografía que se engade a continuación, o lector pode ampliar contidos en canto a distintos procedementos de resolución como de complexidade. Un texto moi interesante e recomendable é *¿De cuántas formas?* de Vilenkin.

8. Contexto no currículo

O alumnado introdúcese na combinatoria: combinacións, variacións e permutacións; e comeza a usar estratexias de reconto sinxelas, así como outras técnicas combinatorias, en 4º da ESO nas Matemáticas Académicas. Nas Matemáticas de Bacharelato, aplican a combinatoria ao cálculo de probabilidades.

Ademais, podemos usar a combinatoria como un medio para publicitar as Matemáticas, xa que ao alumnado o atraeremos mellor cun teorema de números enteiros que ten unha formulación sinxela pero de resolución complicada, que por exemplo, coa conxetura de Poincaré e a topoloxía dunha variedade de dimensión n.

9. Bibliografía recomendada

Elementos de Matemática Discreta, *Emilio Bujalance e outros, Ed. Sanz y Torres.*

¿De cuántas formas?, *Vilenkin N., MIR-MOSCU*

10. Anotacións

- Reducir contenido.

Índice general