

## 4. SISTEMAS LINEALES DE SEGUNDO ORDEN (I)

### 4.1 INTRODUCCIÓN – DOMINIO TIEMPO

Un sistema lineal de segundo orden con una variable de entrada, " $x(t)$ ", y una variable salida, " $y(t)$ " se modela matemáticamente con una ecuación que en función de parámetros de significado dinámico se escribe en la siguiente forma:

$$\tau^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t) \quad (4.1)$$

Siendo,  $\tau$  una constante de tiempo,  $\zeta$  el factor de amortiguamiento y  $K$  la ganancia en estado estacionario del sistema. Estos tres parámetros se calculan con ecuaciones en función de características físicas del sistema. La constante de tiempo expresa un atraso dinámico, el valor del factor de amortiguamiento determina el tipo de respuesta del sistema y la ganancia tiene el mismo significado definido para los sistemas de primer orden

La ecuación (4.1) se escribe, usualmente, en términos de las variables desviación con respecto a sus valores en el estado inicial, es decir en la forma estándar para análisis dinámico o de sistemas de control:

$$\tau^2 \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = KX(t) \quad (4.2)$$

Siendo,

$$Y(t) = y(t) - y(0)$$
$$X(t) = x(t) - x(0)$$

La solución de una ecuación diferencial lineal no homogénea como la (4.2) es la suma de una solución general y una solución particular. La solución general es la que se obtiene con la parte homogénea de la ecuación, es decir, con la expresión contenida en el miembro izquierdo igualado a cero y la solución particular depende de la expresión matemática que constituye al miembro derecho de la ecuación no homogénea. Para la solución general se plantea la denominada *Ecuación característica* o *Ecuación auxiliar* correspondiente a una ecuación algebraica

polinómica del mismo grado de la parte homogénea de la ecuación diferencial. Para la ecuación (4.2), la ecuación característica es de segundo grado con la siguiente expresión, siendo " $r$ " las raíces de la ecuación característica:

$$\tau^2 r^2 + 2\zeta\tau r + 1 = 0 \quad (4.3)$$

Las raíces de la ecuación (4.3) se obtienen con la siguiente fórmula:

$$r = \frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} \quad (4.4)$$

La ecuación (4.4) muestra que la naturaleza de sus raíces depende del factor de amortiguamiento, lo que determina el tipo de respuesta que se obtiene para la ecuación diferencial (4.2) o el comportamiento del sistema, de la siguiente manera:

**Si  $\zeta > 1$ ,** las raíces son reales diferentes y negativas y la respuesta del sistema es una suma de términos exponenciales con signos negativos. Esto se define como un *Comportamiento monotónico estable o Sobreamortiguado*

**Si  $\zeta = 1$ ,** las raíces son reales iguales y negativas y la respuesta del sistema es una expresión exponencial con signo negativo. Esto muestra un *Comportamiento monotónico estable crítico o Amortiguado crítico* porque si se disminuye el valor del coeficiente de amortiguamiento la respuesta es de tipo subamortiguado y si, por lo contrario, se aumenta el sistema es más sobreamortiguado

**Si  $0 < \zeta < 1$ ,** las raíces son complejas conjugadas con parte real negativa y la respuesta del sistema es una expresión exponencial sinusoidal decreciente. Esto muestra un *Comportamiento oscilatorio estable o Subamortiguado estable*

**Si  $\zeta = 0$ ,** las raíces son cantidades imaginarias iguales de signo contrario y la respuesta del sistema es una expresión sinusoidal. Esto muestra un *Comportamiento oscilatorio sostenido*

**Si  $-1 < \zeta < 0$ ,** las raíces son complejas conjugadas con parte real positiva y la respuesta del sistema es una expresión exponencial sinusoidal creciente. Esto muestra un *Comportamiento oscilatorio inestable o Subamortiguado inestable*, es decir con oscilaciones de amplitud creciente

Si  $\zeta \leq -1$ , las raíces son reales positivos y la respuesta del sistema es una expresión exponencial con signos positivos. Esto muestra un *Comportamiento monotónico inestable o Sobreamortiguado inestable*.

## 4.2 RESPUESTA PASO DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

Al considerar que en la ecuación diferencial heterogénea (4.2), la variable de entrada es perturbada con un cambio paso constante, es decir que  $X(t) = \Delta x$ , entonces se puede escribir que:

$$\tau^2 \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = K\Delta x \quad (4.5)$$

Al resolver la ecuación (4.5) para cada uno de los casos se encuentran las siguientes soluciones

### Respuesta Sobreamortiguada

Si el factor de amortiguamiento es mayor que uno, las dos raíces de la ecuación característica de la ecuación (4.5) son reales diferentes y negativas y expresan dos atrasos dinámicos equivalentes,  $\tau_1, \tau_2$ , que permiten demostrar que la respuesta paso de un sistema lineal de segundo orden es sobreamortiguado estable de la forma:

$$Y(t) = K\Delta x \left[ 1 - \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-(t/\tau_1)} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-(t/\tau_2)} \right] \quad (4.6)$$

Siendo  $\tau_1 = -\frac{1}{r_1} = \frac{\tau}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}$  y  $\tau_2 = -\frac{1}{r_2} = \frac{\tau}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}$

Estas expresiones para los atrasos dinámicos se explican al considerar que para este caso la ecuación característica se puede escribir de la siguiente manera:

$$(\tau_1 r_1 + 1)(\tau_2 r_2 + 1) = 0 \quad (4.7)$$

La solución homogénea o complementaria es de la forma

$$Y_c(t) = A_1 e^{-(t/\tau_1)} + A_2 e^{-(t/\tau_2)} \quad (4.8)$$

La solución particular es una expresión constante y, por lo tanto se puede escribir como que

$$Y_p(t) = A_3 \quad (4.9)$$

Desarrollando la ecuación (4.9) en la (4.5) se encuentra que  $A_3 = K\Delta x$ , y la solución general de la ecuación diferencial (4.5) es:

$$Y(t) = A_1 e^{-(t/\tau_1)} + A_2 e^{-(t/\tau_2)} + K\Delta x \quad (4.10)$$

Evaluando la ecuación (4.10) para las condiciones  $Y(0) = 0$  y  $\frac{dY(0)}{dt} = 0$ , se obtienen las expresiones que calculan a los coeficientes y que finalmente hacen que la respuesta paso de un sistema de segundo orden sobreamortiguado sea la ecuación (4.6).

Cuando el factor de amortiguamiento es menor o igual que -1, las dos raíces son reales positivas, los atrasos dinámicos correspondientes son negativos y los términos exponenciales de la ecuación (4.6) aumentan con el tiempo y, por lo tanto, la respuesta paso de un sistema lineal de segundo orden es sobreamortiguada pero inestable.

### **Respuesta Amortiguada Crítica**

Cuando el factor de amortiguamiento es igual a 1, las dos raíces son iguales y negativas, los atrasos dinámicos son iguales y puede demostrarse que la paso de un sistema lineal de segundo orden es de la forma:

$$Y(t) = K\Delta x \left[ 1 - \left( \frac{t}{\tau} + 1 \right) e^{-(t/\tau)} \right] \quad (4.11)$$

Cuando las raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial (4.5) sean reales iguales negativas la solución general es de la forma:

$$Y(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-(t/\tau)} + K\Delta x \quad (4.12)$$

Evaluando la ecuación (4.12) para las condiciones  $Y(0) = 0$  y  $\frac{dY(0)}{dt} = 0$ , se obtienen las expresiones que calculan a los coeficientes y que finalmente hacen que la respuesta paso de un sistema de segundo orden amortiguado crítico sea la ecuación (4.11)

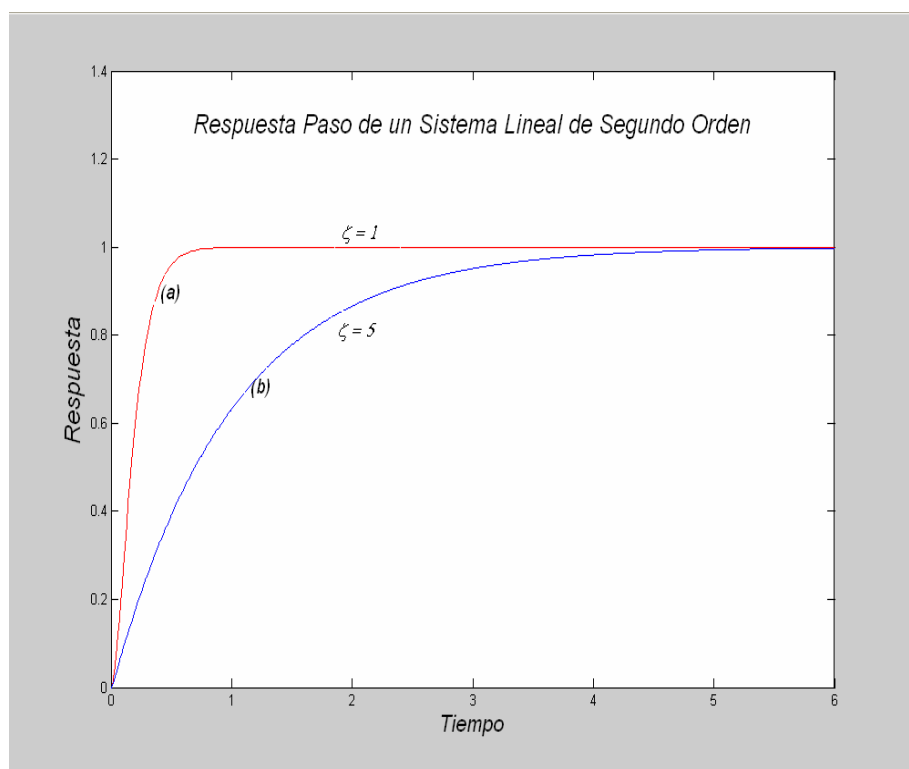


Figura 4.1 Respuesta Paso de un sistema de segundo orden (a) Amortiguada Crítica, (b) Sobreamortiguada

La Figura 4.1 muestra los perfiles típicos de la respuesta paso sobreamortiguada y amortiguada crítica de un sistema lineal de segundo orden. Se observa que la rapidez inicial de cambio de la respuesta es cero y que entonces incrementa a un máximo y finalmente disminuye para aproximarse exponencialmente a su cambio final en el estado estacionario. Este comportamiento diferencia a un sistema de segundo orden con respecto a uno de primer orden en el que la máxima rapidez de cambio en la respuesta ocurre exactamente en el momento en que se aplica el cambio paso

### Respuesta Subamortiguada

Si el factor de amortiguamiento es mayor que cero y menor que 1, las dos raíces son complejas conjugadas con parte real negativa, las transformaciones de los términos exponenciales incluidos en la solución permiten demostrar que la respuesta paso de un sistema lineal de segundo orden es subamortiguada estable porque la solución de la ecuación diferencial (4.5) es una expresión exponencial sinusoidal decreciente de la forma:

$$Y(t) = K\Delta x \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-(\zeta/\tau)t} \text{Sen}(\psi t + \phi) \right] \quad (4.13)$$

Siendo  $\psi = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}$  y  $\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

En este caso las raíces en forma de variable compleja se expresan de la siguiente manera:

$$r = \frac{-\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau} = a \pm bj \quad (4.14)$$

Siendo  $a = -\frac{\zeta}{\tau}$  y  $b = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}$

Se puede escribir la solución general de la ecuación (4.5) en la siguiente forma:

$$Y(t) = A_1 e^{(a+bj)t} + A_2 e^{(a-bj)t} + K\Delta x \quad (4.15)$$

Aplicando las equivalencias de los exponenciales complejos en términos de variable compleja y funciones trigonométricas, es decir que  $e^{jbt} = \cos(bt) + j\sin(bt)$  y que  $e^{-jbt} = \cos(bt) - j\sin(bt)$  y evaluando la solución de la ecuación diferencial (4.5) para las condiciones iniciales  $Y(0) = 0$  y  $\frac{dY(0)}{dt} = 0$ , se obtienen las expresiones que calculan a los coeficientes y que finalmente hacen que la respuesta paso de un sistema de segundo orden subamortiguado sea la ecuación (4.13)

Cuando el factor de amortiguamiento es mayor que -1 y menor que cero, las dos raíces de la ecuación característica de la ecuación (4.5) son complejas conjugadas con parte real positiva y la respuesta paso de un sistema lineal de segundo orden es exponencial sinusoidal pero creciente, es decir, subamortiguada pero inestable

La Figura 4.2 muestra el perfil característico de la respuesta paso subamortiguada estable de un sistema lineal de segundo orden. Algunas definiciones introducidas en dicho comportamiento son

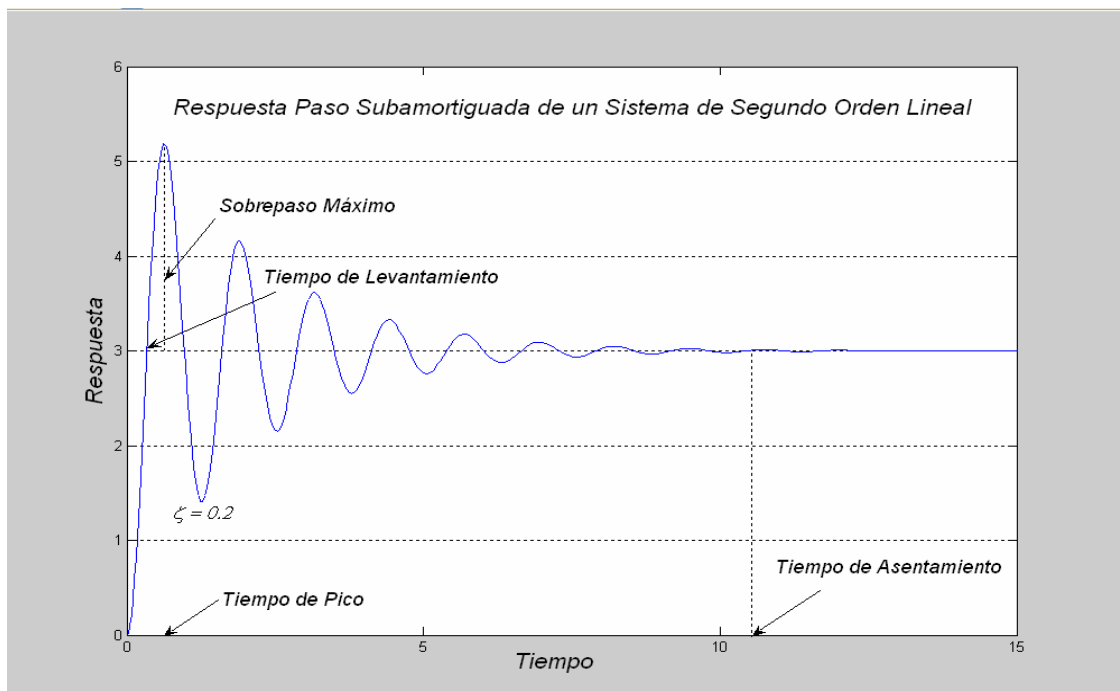


Figura 4.2 Respuesta Paso Subamortiguada de un Sistema Lineal de Segundo Orden

**Tiempo de Levantamiento:** Es el tiempo requerido para que la respuesta alcance por primera vez el valor último.

**Sobrepaso máximo:** Es el valor del pico máximo de la curva. Su valor se expresa en porcentaje como la diferencia entre el valor del pico máximo y el valor último de la respuesta con respecto a este valor último. Se puede demostrar que el valor del sobrepaso máximo se calcula con la siguiente ecuación:

$$\text{Sobrepaso} = \exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (4.16)$$

**Tiempo de pico:** Es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico del sobrepaso

**Tiempo de asentamiento:** Es el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final del tamaño especificado por el porcentaje absoluto del valor final (por lo general, de 2 a 5 %) y permanezca dentro de él.

**Razón de decaimiento:** Es la relación entre los tamaños de dos picos sucesivos y se puede demostrar que se puede calcular con la siguiente ecuación

$$\text{Razón de decaimiento} = \text{Sobrepaso}^2 = \exp\left(-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \quad (4.17)$$

## Respuesta Oscilatoria Sostenida

Las raíces de la ecuación característica (4.5) son imaginarias iguales con signos contrarios cuando el factor de amortiguamiento del sistema es igual a cero. Al tener en cuenta este valor para utilizarlo en la solución dada por la ecuación (4.13) se obtiene una simplificación que muestra una expresión sinusoidal en la siguiente forma

$$Y(t) = K\Delta x \left[ 1 - \text{Sen}\left(\frac{t}{\tau} + \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (4.18)$$



La Figura 4.3 muestra el perfil de la respuesta paso de un sistema lineal de segundo orden para un coeficiente de amortiguamiento de cero. Se observa un comportamiento oscilatorio de amplitud constante

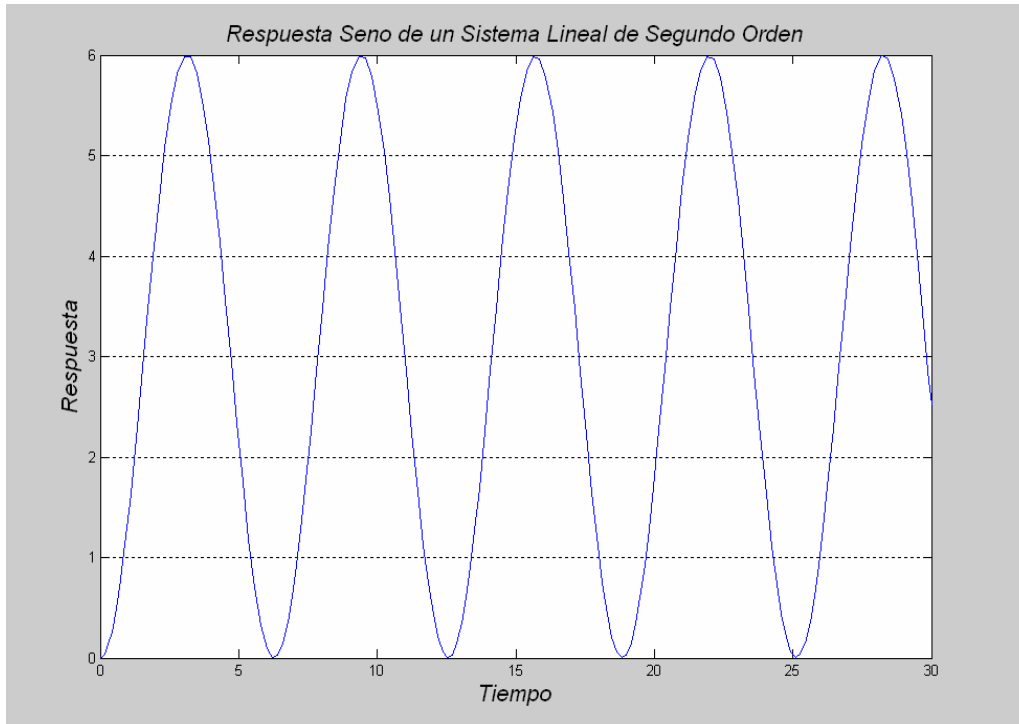


Figura 4.3 Respuesta Paso Oscilatoria de un Sistema Lineal de Segundo Orden

### 4.3 RESPUESTA RAMPA DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

Al considerar que en la ecuación diferencial heterogénea (4.2), la variable de entrada es perturbada con un cambio rampa de pendiente “ $r$ ”, es decir que  $X(t) = rt$ , entonces se puede escribir que:

$$\tau^2 \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = Krt \quad (4.19)$$

Al resolver la ecuación (4.19) para cada uno de las respuestas se encuentran las siguientes soluciones

### Respuesta Sobreamortiguada

En este caso, se puede demostrar que la respuesta rampa de un sistema lineal de segundo orden sobreamortiguado es de la forma:

$$Y(t) = Kr \left[ \frac{\tau_1^2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-(t/\tau_1)} + \frac{\tau_2^2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-(t/\tau_2)} + t - (\tau_1 + \tau_2) \right] \quad (4.20)$$

La ecuación (4.19) escrita en términos de los atrasos dinámicos corresponde a:

$$\tau_1 \tau_2 \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = Krt \quad (4.21)$$

La solución homogénea es una expresión igual a la ecuación (4.8) pero la solución particular es diferente con la siguiente expresión

$$Y_p(t) = A_3 t + A_4 \quad (4.22)$$

Desarrollando la ecuación (4.22) en la (4.19) se encuentra que  $A_3 = Kr$ , y  $A_4 = -Kr(\tau_1 + \tau_2)$ , y la solución general de la ecuación diferencial (4.19) es:

$$Y(t) = A_1 e^{-(t/\tau_1)} + A_2 e^{-(t/\tau_2)} + Krt - Kr(\tau_1 + \tau_2) \quad (4.23)$$

Evalutando la ecuación (4.23) para las condiciones  $Y(0) = 0$  y  $\frac{dY(0)}{dt} = 0$ , se obtienen las expresiones que calculan a los coeficientes y que finalmente hacen que la respuesta rampa de un sistema de segundo orden sobreamortiguado sea la ecuación (4.20).

La Figura 4.4 muestra la respuesta rampa de un sistema de segundo orden lineal sobreamortiguado. Se observa que cuando los términos exponenciales se hacen despreciables, la respuesta toma un perfil de una rampa de pendiente  $Kr$ . En la figura se representa la respuesta dividida por la ganancia para notar la igualdad de la

pendiente entre los perfiles lineales cuando los términos exponenciales son despreciables y, además, el atraso de la respuesta con respecto a la rampa de entrada, que es igual a la suma de los dos atrasos dinámicos

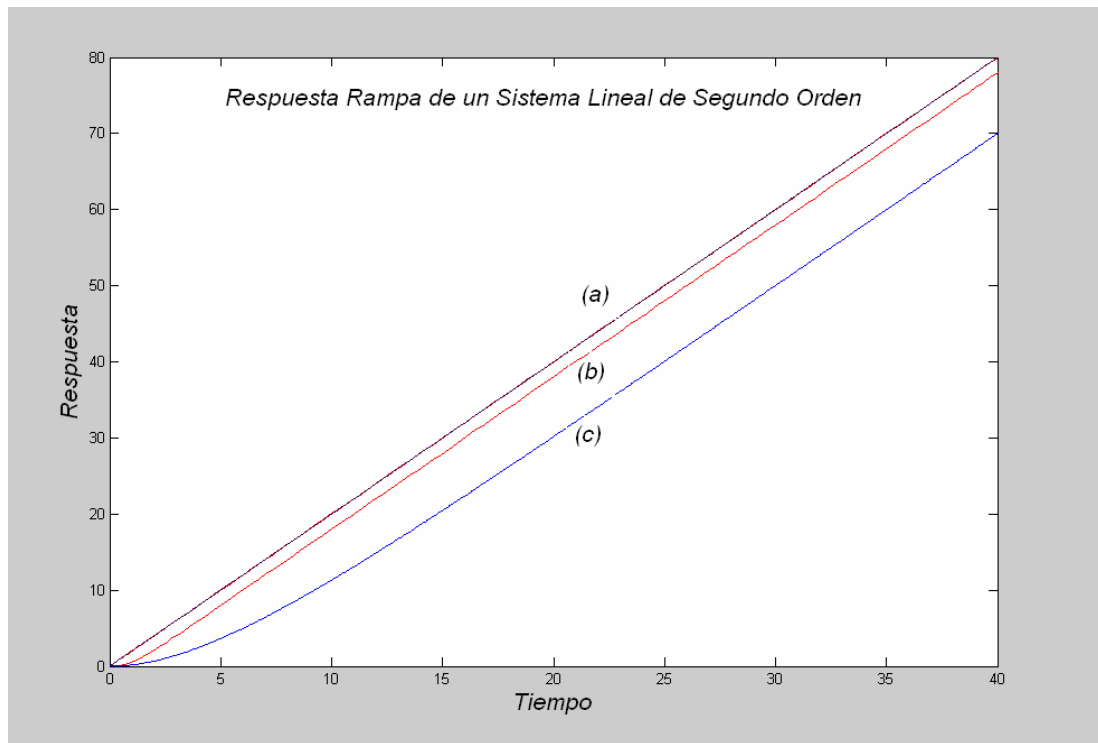


Figura 4.4 Respuesta Rampa de un Sistema de Segundo Orden, (a) Rampa (b) Amortiguada Crítica (c) Sobreamortiguada

### Respuesta Amortiguada Crítica

Para este caso, puede demostrarse que la respuesta rampa de un sistema lineal de segundo orden es de la forma:

$$Y(t) = Kr \left[ (t + 2\tau) e^{-(t/\tau)} + t - 2\tau \right] \quad (4.24)$$

La ecuación (4.19) para cuando los atrasos dinámicos son iguales se transforma a la ecuación

$$\tau^2 \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + 2\tau \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = Krt \quad (4.25)$$

La solución particular (4.22), aplicada a la ecuación (4.25), resulta que  $A_3 = Kr$ , y  $A_4 = -2Kr\tau$ , y la solución general de la ecuación diferencial (4.25) es:

$$Y(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-(t/\tau)} + Krt - 2Kr\tau \quad (4.26)$$

Evaluando la ecuación (4.26) para las condiciones  $Y(0) = 0$  y  $\frac{dY(0)}{dt} = 0$ , se obtienen las expresiones que calculan a los coeficientes y que finalmente hacen que la respuesta rampa de un sistema de segundo orden amortiguado crítico sea la ecuación (4.24).

La Figura (4.4) muestra que la respuesta amortiguada crítica es similar al de la sobreamortiguada. El atraso, en este caso, es igual a dos veces la constante de tiempo

### Respuesta Subamortiguada

Para este caso se puede demostrar que la respuesta rampa de un sistema lineal de segundo orden es subamortiguada porque la solución de la ecuación diferencial (4.17) contiene una expresión exponencial sinusoidal decreciente de la forma:

$$Y(t) = Kr \left[ \frac{\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-(\zeta/\tau)t} \text{Sen}(\psi t + \phi) + t - 2\zeta\tau \right] \quad (4.27)$$

Siendo  $\psi = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}$  y  $\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}{2\zeta^2 - 1}$

En este caso, la solución particular aplicada a la ecuación (4.17) resulta que  $A_3 = Kr$ , y  $A_4 = -2Kr\tau\zeta$ . Teniendo en cuenta la naturaleza compleja de las raíces de

acuerdo a las ecuaciones (4.14) y la solución general para la ecuación heterogénea de la forma

$$Y(t) = A_1 e^{(a+bj)t} + A_2 e^{(a-bj)t} + Krt - 2Kr\tau\zeta \quad (4.28)$$

Se aplican las equivalencias de los exponenciales complejos en términos de variable compleja y funciones trigonométricas, es decir que  $e^{jbt} = \cos(bt) + j\sin(bt)$  y que  $e^{-jbt} = \cos(bt) - j\sin(bt)$  y evaluando la ecuación (4.28) para las condiciones iniciales  $Y(0) = 0$  y  $\frac{dY(0)}{dt} = 0$ , se obtienen las expresiones que calculan a los coeficientes y que finalmente hacen que la respuesta rampa de un sistema lineal de segundo orden subamortiguado sea la ecuación (4.27)

La Figura 4.5 (c) muestra que el perfil de la respuesta rampa de un sistema subamortiguado de segundo orden es lineal con una pendiente igual a  $Kr$  para tiempos en los que los términos exponenciales en la ecuación (4.28) se hacen despreciables

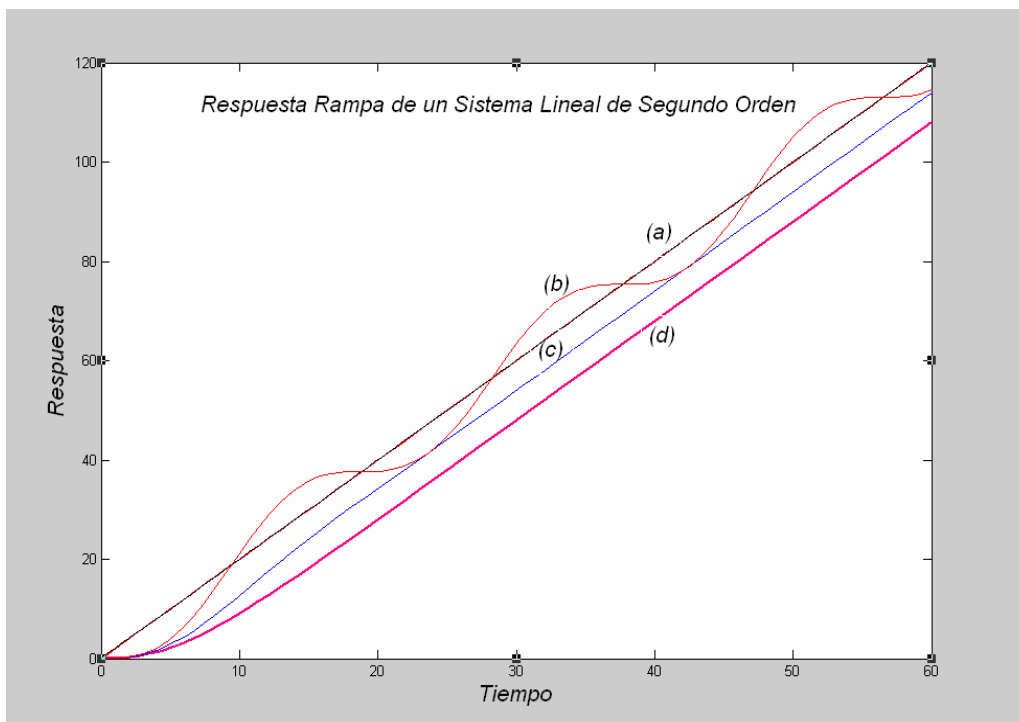


Figura 4.5 Respuesta Rampa de un Sistema de Segundo Orden (a) Rampa (b) Amortiguada Crítica (c) Subamortiguada (d) Sobreamortiguada

### Respuesta Oscilatoria Sostenida

Las raíces de la ecuación característica (4.17) son imaginarias iguales con signos contrarios cuando el factor de amortiguamiento del sistema es igual a cero. Al tener en cuenta este valor para utilizarlo en la solución dada por la ecuación (4.25) se obtiene una simplificación que muestra una expresión sinusoidal en la siguiente forma

$$Y(t) = Kr \left[ \tau \text{Sen} \left( \frac{t}{\tau} \right) + t \right] \quad (4.29)$$

La Figura 4.5 (b) muestra que la respuesta rampa de un sistema de segundo orden es de un perfil sinusoidal sostenido en la dirección de la rampa para un factor de amortiguamiento igual a cero

### 3.4 RESPUESTA SENO DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

Al considerar que en la ecuación diferencial heterogénea (4.2), la variable de entrada es perturbada con un cambio sinusoidal de amplitud “ $A$ ” y frecuencia “ $w$ ” es decir que  $X(t) = A \text{Sen}(wt)$ , entonces se puede escribir que:

$$\tau^2 \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = KA \text{Sen}(wt) \quad (4.30)$$

Al resolver la ecuación (4.30) para cada uno de los casos se encuentran las siguientes soluciones

#### Respuesta Sobreamortiguada

En este caso, se puede demostrar que la respuesta seno de un sistema lineal de segundo orden sobreamortiguado es de la forma:

$$Y(t) = A_1 e^{-(t/\tau_1)} + A_2 e^{-(t/\tau_2)} + \frac{KA}{\sqrt{1+(w\tau_1)^2} \sqrt{1+(w\tau_2)^2}} \text{Sen}(wt + \theta) \quad (4.31)$$

Siendo  $\theta = \tan^{-1}(-w\tau_1) + \tan^{-1}(-w\tau_2)$

La ecuación (4.30) escrita en términos de los atrasos dinámicos corresponde a:

$$\tau_1\tau_2 \frac{d^2Y(t)}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = KASen(wt) \quad (4.32)$$

La solución homogénea es una expresión igual a la ecuación (4.8) pero la solución particular es diferente con la siguiente expresión

$$Y_p(t) = A_3Sen(wt) + A_4Cos(wt) \quad (4.33)$$

Desarrollando la ecuación (4.33) en la (4.32) se encuentran las expresiones para los coeficientes  $A_3$  y  $A_4$ , de tal manera que la solución general es la escrita como la ecuación (4.31). Evaluando la ecuación (4.31) para las condiciones  $Y(0) = 0$  y  $\frac{dY(0)}{dt} = 0$ , se obtienen las expresiones que calculan a los coeficientes  $A_1$  y  $A_2$

La Figura 4.6 (b) muestra que los términos exponenciales de la respuesta seno sobreamortiguada - ecuación (4.31) - se hacen despreciables para ciertos tiempos de respuesta y que, entonces, se desarrolla un perfil completamente sinusoidal con una amplitud que depende del valor de la amplitud y la frecuencia de la onda sinusoidal de entrada. La fase de la respuesta con respecto a la de entrada también es función de la frecuencia de la función seno de entrada

### Respuesta Amortiguada Crítica

Para este caso, puede demostrarse que la respuesta seno de un sistema lineal de segundo orden es de la forma:

$$Y(t) = (A_1 + A_2t)e^{-(t/\tau)} + \frac{KA}{1 + (w\tau)^2} Sen(wt + \theta) \quad (4.34)$$

Siendo 
$$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{2w\tau}{1-w^2\tau^2}\right)$$

La ecuación (4.32) para cuando los atrasos dinámicos son iguales se transforma a la ecuación

$$\tau^2 \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + 2\tau \frac{dY(t)}{dt} + Y(t) = KASen(wt) \quad (4.35)$$

La solución particular (4.33), aplicada a la ecuación (4.35), se encuentran las expresiones para los coeficientes  $A_3$  y  $A_4$ , de tal manera que la solución general es la escrita como la ecuación (4.34). Evaluando la ecuación (4.34) para las condiciones  $Y(0) = 0$  y  $\frac{dY(0)}{dt} = 0$ , se obtienen las expresiones que calculan a los coeficientes  $A_1$  y  $A_2$

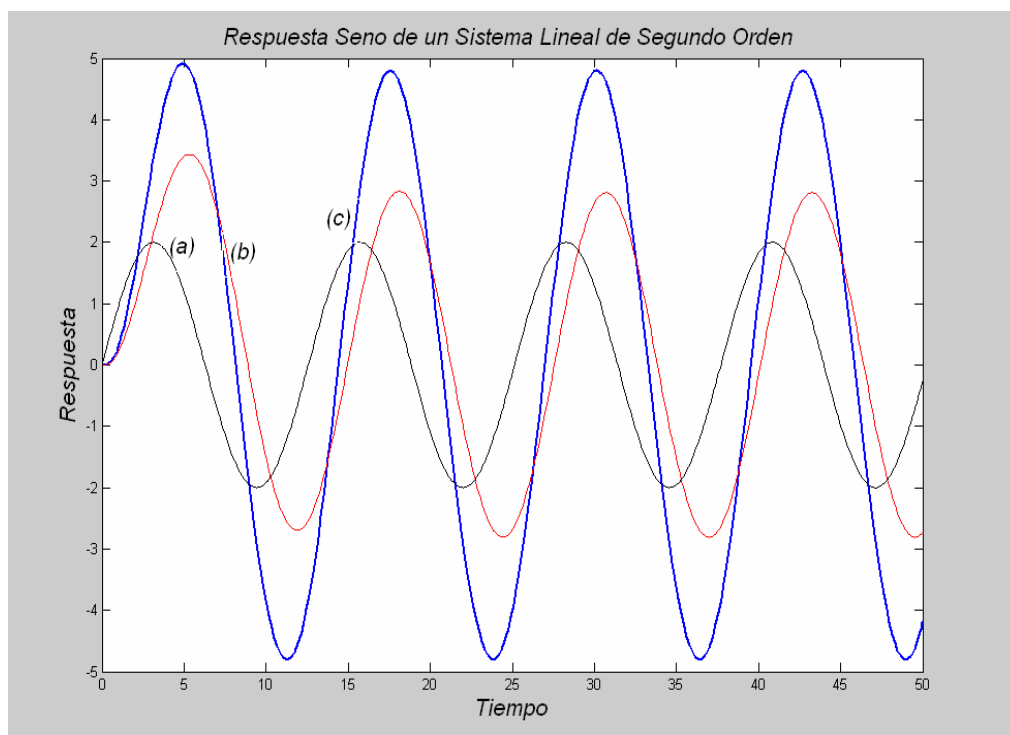


Figura 4.6 Respuesta Seno de un Sistema de Segundo Orden (a) Seno (b) Sobreamortiguada (c) Amortiguada Crítica



La Figura 4.6 (c) muestra que la respuesta seno amortiguada crítica de un sistema de segundo orden es de un comportamiento similar al que se observa con la respuesta sobreamortiguada

### Respuesta Subamortiguada

Para este caso se puede demostrar que la respuesta seno de un sistema lineal de segundo orden es subamortiguada porque la solución de la ecuación diferencial (4.30) contiene una expresión exponencial sinusoidal decreciente de la forma:

$$Y(t) = KA \left[ De^{-(\zeta/\tau)t} \text{Sen}(\psi t + \phi) + \frac{1}{\sqrt{(1 - w^2\tau^2)^2 + (2\zeta\tau w)^2}} \text{Sen}(wt + \theta) \right] \quad (4.36)$$

Siendo  $\psi = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\tau}$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( -\frac{2w\tau}{1 - w^2\tau^2} \right)$$

Con la solución particular (4.33), aplicada a la ecuación (4.30), se encuentran las expresiones para los coeficientes  $A_3$  y  $A_4$ , de tal manera que la solución general es la escrita como la ecuación (4.36)

La Figura 4.7 (b) muestra el perfil gráfico de la respuesta seno de un sistema lineal subamortiguado de segundo orden. Se observa la respuesta periódica característica de la función seno incluida en la ecuación (4.36). En forma similar, se cumple la influencia de la amplitud y la frecuencia en el valor de la amplitud y la fase de la respuesta

La Figura 4.7 (c) muestra el perfil gráfico de la respuesta seno de un sistema lineal amortiguado crítico igual al que se observa en la Figura 4.6 (c)

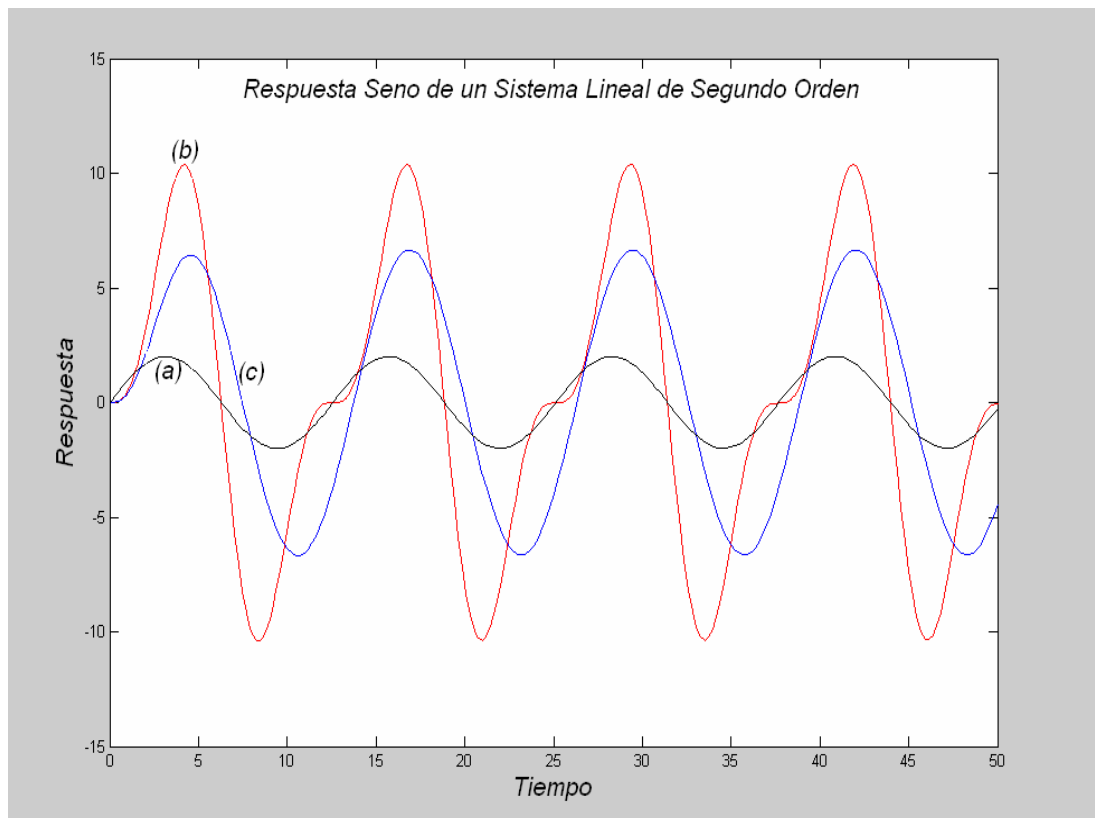


Figura 4.7 Respuesta Seno de un Sistema Lineal de Segundo Orden (a) Seno (b) Subamortiguada (c) Amortiguada Crítica

## 4.5 MODELAMIENTO DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

Un ejemplo interesante de un sistema cuyo modelo es lineal de segundo orden es el de un bloque atado a una pared vertical mediante un resorte y un amortiguador viscoso, que al aplicarle una fuerza provoca un movimiento del sistema considerado inicialmente en reposo. En el próximo capítulo se presentará este modelo como la base para explicar la dinámica de una válvula de control neumática, uno de los elementos que integran un lazo de control de una variable en un proceso

### Masa – Resorte – Amortiguador Viscoso

Un bloque de masa “ $m$ ” descansa sobre una superficie horizontal sin fricción y se encuentra conectado a una pared vertical mediante un resorte horizontal y un amortiguador viscoso. Al aplicar sobre el bloque una fuerza horizontal, “ $F(t)$ ”, cuya magnitud puede variar con el tiempo, se considera que el sistema oscila libre y

horizontalmente. El resorte tiene una constante de elasticidad, “ $K$ ” y el amortiguador un coeficiente viscoso, “ $C$ ”.

El origen del sistema de coordenadas es el borde derecho del bloque cuando el resorte se encuentra completamente distendido. Inicialmente, el bloque se encuentra en reposo en el origen del sistema de coordenadas. La dirección positiva para la fuerza y el desplazamiento del bloque se indican en la Figura 4.8.

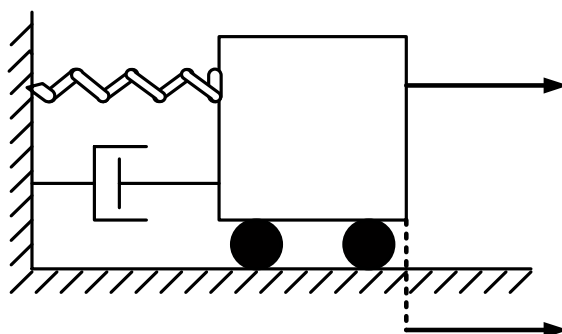


Figura 4.8 Sistema Masa – Resorte – Amortiguador Viscoso

### Modelo matemático

Al aplicar la segunda ley de Newton de la dinámica, la ecuación que modela el movimiento del bloque sobre el cual actúan la fuerza horizontal, la fuerza elástica del resorte y la fuerza viscosa del amortiguador es:

Resorte,  $K$

$$\frac{m}{g_c} \frac{d^2 X(t)}{dt^2} = -KX(t) - C \frac{dX(t)}{dt} + F(t) \quad (4.37)$$

Siendo  $g_c = 32.2 \frac{lbm - pie}{lbf - s^2}$

$m$  = Masa del bloque,  $lbm$

$C$  = Coeficiente de amortiguamiento viscoso,  $\frac{lbm}{pie \cdot s}$  Amortiguador,  $C$

$K$  = Constante de Hooke del resorte,  $lbf / pie$

$F(t)$  = Fuerza motriz ejercida sobre el bloque,  $lbf$

Una transposición de términos en la ecuación (4.37), permite expresarla de tal manera que se deduzcan las expresiones para calcular los parámetros dinámicos del sistema de acuerdo a la ecuación general de un sistema de segundo orden.

Al arreglar la ecuación (4.37) en la forma general de la ecuación (4.1):

$$\frac{m}{g_c K} \frac{d^2 X(t)}{dt^2} + \frac{C}{K} \frac{dX(t)}{dt} + X(t) = \frac{1}{K} F(t) \quad (4.38)$$

Se obtienen las siguientes ecuaciones para calcular la constante de tiempo, el factor de amortiguamiento y la ganancia del sistema masa – resorte – amortiguador viscoso, conociendo sus parámetros físicos.

Constante de tiempo, *segundos*:

$$\tau = \sqrt{\frac{m}{g_c K}} \quad (4.39)$$

Coefficiente de amortiguamiento, adimensional:

$$\zeta = \sqrt{\frac{g_c C^2}{4mK}} \quad (4.40)$$

Ganancia en estado estacionaria, *pie / lbf*:

$$K_s = \frac{1}{K} \quad (4.41)$$

## 4.6 SOLUCION NUMERICA DE UN SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN

Una ecuación diferencial de segundo orden se puede transformar en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden mediante la introducción de dos variables que sustituyan a la variable de salida de la siguiente manera:

$$Y(t) = y(1)$$

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{dy(1)}{dt} = y(2)$$

$$\frac{d^2 Y(t)}{dt^2} = \frac{dy(2)}{dt}$$

En términos de  $y(1)$ ,  $y(2)$ , la ecuación diferencial de segundo orden (4.2) se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy(1)}{dt} = y(2) \quad (4.42)$$

$$\tau^2 \frac{dy(2)}{dt} + 2\zeta\tau y(2) + y(1) = KX(t) \quad (4.43)$$

### Solución con Matlab de un modelo lineal de segundo orden

Para la simulación con Matlab de las respuestas paso, rampa y seno de un sistema lineal de segundo orden, mediante las ecuaciones (4.42) y (4.43), se construyen los archivos, *pslineal.m*, *rslineal.m* y *sslineal.m*, que definen, respectivamente, la ecuación diferencial para cada uno de los casos y que aparecen en la sección 4.7, mas adelante .

En el código en Matlab después de declarar la función para la definición de un sistema de ecuaciones diferenciales y las variables incluidas, se escribe el sistema de ecuaciones diferenciales dentro de un corchete separándolas con punto y coma

La respuesta de un sistema lineal de segundo orden se simula con un archivo de nombre *solslin.m* construido. La estructura de su construcción es como sigue:

1. Se selecciona el tipo de respuesta que se quiere simular y se introducen los parámetros dinámicos del sistema y los de la simulación dinámica
2. El programa despliega el valor de las raíces de la ecuación característica del sistema
3. Según el tipo de respuesta señalado en el numeral (1), a continuación el programa solicita los parámetros requeridos de acuerdo a ello
4. Solucionada la ecuación diferencial, el programa muestra algunas características de la respuesta para algunos casos incluyendo el perfil gráfico.

### Solución del modelo para el sistema Masa – Resorte - Amortiguador

Se deja como ejercicio para el estudiante que modifique el programa *solslin.m* para aplicarlo a la solución del modelo planteado para el sistema masa – resorte – amortiguador viscoso, de tal manera que el usuario introduzca los parámetros físicos característicos del sistema y el programa calcule sus parámetros dinámicos

Se propone que se inicie la simulación fijando un constante de elasticidad de 1 lbf/pie y un bloque de masa 32.2 lbm y se modifique el valor del coeficiente de amortiguamiento viscoso de tal manera que el coeficiente de amortiguamiento alcance valores que hagan mostrar respuestas sobrearmortiguada, amortiguada crítica, subamortiguada y oscilatoria para cambios pasos, rampas o senos en la fuerza aplicada al bloque. Las condiciones iniciales para el desplazamiento del bloque y la fuerza aplicada al sistema son de un valor de cero

## 4.7 PROGRAMAS CODIFICADOS CON Matlab

### Archivo pslineal.m

```
function dy = pslineal(t,y)
global K X sigma tau
dy = [y(2); (K*X - y(1) - 2*sigma*tau*y(2))/(tau^2)];
```

### Archivo rslineal.m

```
function dy = rslineal(t,y)
global K sigma tau r
dy = [y(2); (K*r*t - y(1) - 2*sigma*tau*y(2))/(tau^2)];
```

### Archivo sslineal.m

```
function dy = sslineal(t,y)
global K A w sigma tau
dy = [y(2); (K*A*sin(w*t) - y(1) - 2*sigma*tau*y(2))/(tau^2)];
```

### Archivo solslineal.m

```
function f = solslin(t,y)
clc
global R K tau sigma Rango Inicio p z X atraso Frecuencia Fase Sobrepasso
Decaimiento r A w
disp('=====')
disp(' ')
disp('          SIMULACION DE UN SISTEMA LINEAL DE SEGUNDO ORDEN');
disp('          TIPO DE RESPUESTA DEL SISTEMA')
```

```

disp(' ')
disp('=====')
disp(' ')
R = input('Escriba la respuesta a simular con números así: 1 = PASO, 2 = RAMPA,
3 = SENO ');
disp(' ')
disp('=====')
disp(' ')
disp('          PARAMETROS DINAMICOS DEL SISTEMA')
disp(' ')
disp('=====')
disp(' ')
K = input('Ganancia en estado estacionario = ');
tau = input('Constante de tiempo = ');
sigma = input('Factor de amortiguamiento = ');
disp(' ')
disp('=====')
disp(' ')
disp('          PARAMETROS DE LA SIMULACION DINAMICA')
disp(' ')
disp('=====')
disp(' ')
Rango = input('Tiempo de simulación = ');
Inicio = input('Condiciones Iniciales = ');
disp(' ')
disp('=====')
disp(' ')
disp('          RAICES DE LA ECUACION CARACTERISTICA')
disp(' ')
disp('=====')
disp(' ')
p = [tau^2 2*sigma*tau 1];
z = roots(p)
disp(' ')
disp('=====')
disp(' ')

switch R

case 1
disp('=====')
disp(' ')
disp('          CAMBIO PASO EN LA VARIABLE DE ENTRADA')

```

```

disp(' ')
disp('=====')
disp(' ')
X = input('Introduzca el valor del cambio paso en la variable de entrada = ');
disp(' ')
disp('=====')
[t,y] = ode45('pslineal', Rango, Inicio);
disp(' ')
disp('                                RESULTADOS')
disp(' ')
disp('=====')
disp(' ')
disp('Respuesta Ultima')
K*X
if sigma > 1
    disp('Respuesta Sobreamortiguada Estable')
    disp('Atrasos dinámicos')
    atraso = -1./z
elseif sigma == 1
    disp('Respuesta Amortiguada Crítica')
    disp('Atrasos dinámicos')
    atraso = -1./z
elseif (sigma < 1)&(sigma > 0)
    disp('Respuesta Subamortiguada Estable')
    Frecuencia = sqrt(1-sigma^2)/tau
    Fase = atan(sqrt(1-sigma^2)/sigma)
    Sobrepasso = 100*exp(-pi*sigma/sqrt(1-sigma^2))
    Decaimiento = (Sobrepasso/100)^2
elseif sigma == 0
    disp('Respuesta Oscilatoria Sostenida')
else
    disp('Respuesta Inestable')
end
plot(t,y(:,1))
title('Respuesta Paso de un Sistema Lineal de Segundo Orden');
xlabel('Tiempo');
ylabel('Respuesta')

case 2
disp('=====')
disp(' ')
disp('                                CAMBIO RAMPA EN LA VARIABLE DE ENTRADA')

```



```

disp(' ')
disp('=====')
disp(' ')
r = input('Introduzca el valor de la pendiente de la rampa de entrada = ');
disp(' ')
disp('=====')
[t,y] = ode45('rslineal', Rango, Inicio);
disp(' ')
disp('                                RESULTADOS')
disp(' ')
disp('=====')
disp(' ')
if sigma > 1
    disp('Respuesta Sobreamortiguada')
    disp('Atrasos dinámicos')
    atraso = -1./z
elseif sigma == 1
    disp('Respuesta Amortiguada Crítica')
    disp('Atrasos dinámicos')
    atraso = -1./z
elseif (sigma < 1)&(sigma > 0)
    disp('Respuesta Subamortiguada')
    Frecuencia = (sqrt(1-sigma^2))/tau
    Fase = atan(2*sigma*(sqrt(1-sigma^2))/(2*sigma^2-1))
elseif sigma == 0
    disp('Respuesta Oscilatoria Sostenida')
else
    disp('Respuesta Inestable')
end
plot(t,r*t,t,y(:,1)/K)
title('Respuesta Rampa de un Sistema Lineal de Segundo Orden');
xlabel('Tiempo');
ylabel('Respuesta')

case 3
disp('=====')
disp(' ')
disp('                                CAMBIO SENO EN LA VARIABLE DE ENTRADA')
disp(' ')
disp('=====')
disp(' ')
A = input('Amplitud de la entrada seno = ');
w = input('Frecuencia de la entrada seno = ');

```

```

disp(' ')
disp('=====')
[t,y] = ode45('sslineal',Rango,Inicio);
disp('=====')
disp(' ')
disp('
                                RESULTADOS')
disp(' ')
disp('=====')
disp(' ')
if sigma > 1
    disp('Respuesta Sobreamortiguada')
    disp('Atrasos dinámicos')
    atraso = -1./z
    Fase = atan(-w*atraso(1)) + atan(-w*atraso(2))
    Amplitud = K*A/((sqrt(1+(w*atraso(1))^2))*(sqrt(1+(w*atraso(2))^2)))
elseif sigma == 1
    disp('Respuesta Amortiguada Crítica')
    disp('Atrasos dinámicos')
    atraso = -1./z
elseif (sigma < 1)&(sigma > 0)
    disp('Respuesta Subamortiguada')
elseif sigma == 0
    disp('Respuesta Oscilatoria Sostenida')
else
    disp('Respuesta Inestable')
end
plot(t,A*sin(w*t),t,y(:,1))
title('Respuesta Seno de un Sistema Lineal de Segundo Orden');
xlabel('Tiempo');
ylabel('Respuesta')
end

```