Teste de hipótese

Porque construimos modelos estatísticos

- Para termos representação do mundo real: um bom modelo estatístico tem uma boa aderência a um conjunto de dados e generaliza (amostra) e generaliza bem para uma população.

- População - público de interesse
- Amostra - subconjuntos dessa população

O modelo é uma boa representação do mundo real?

Quando selecionamos os dados eles podem variar de duas formas:

- Variação sistemática: variação explicada pelo modelo
- Variação não sistemática: variação que não pode ser explicada pelo modelo ajustado aquele conjunto de dados

Estatística teste

Se estamos tentando estabelecer se o modelo é uma representação razoável do que está acontecendo com a população, geralmente calculamos a estatística teste.

A maioria das estatísticas testes representam essencialmente a mesma coisa:

Estatística teste = variância explicada pelo modelo / variância não explicada pelo modelo

Teste de Hipótese

Definição

- É usado para testar a validade de uma suposição (hipótese nula) que é feita sobre uma população usando dados de amostra. A hipótese alternativa é aquela em que você acreditaria se a hipótese nula fosse concluída como sendo não aceita (falsa)
- Em outras palavras, faremos uma suposição (hipótese nula) e usaremos amostra para verificar se a suposição é válida. E se não for válida, escolhemos nossa hipótese alternativa

Teste de Hipótese

Normalmente são formuladas duas hipóteses:

H_0: (hipótese nula) que é a hipótese que não se quer testar;

H_a: (hipótese alternativa) que será aceita se não for possível provar que H_0 é verdadeira.

Exemplo

H_0: mulheres vivem o mesmo ou mais que os homens;

H_a: mulheres vivem menos que os homens.

Teste de Hipótese

Todas conclusões estatísticas são feitas em referência a hipótese nula

Nós sempre rejeitamos ou falhamos em rejeitar a hipótese nula, nós nunca aceitamos a hipótese nula

Se nós falhamos em rejeitar a hipótese nula, nós concluímos que nossos dados suportam a hipótese alternativa

Teste de Hipótese

Exemplo

Em um estudo para avaliar um novo motor instalado em automóveis, um grupo de pesquisa está buscando evidências para concluir que o novo motor aumenta a média de quilômetros por litro.

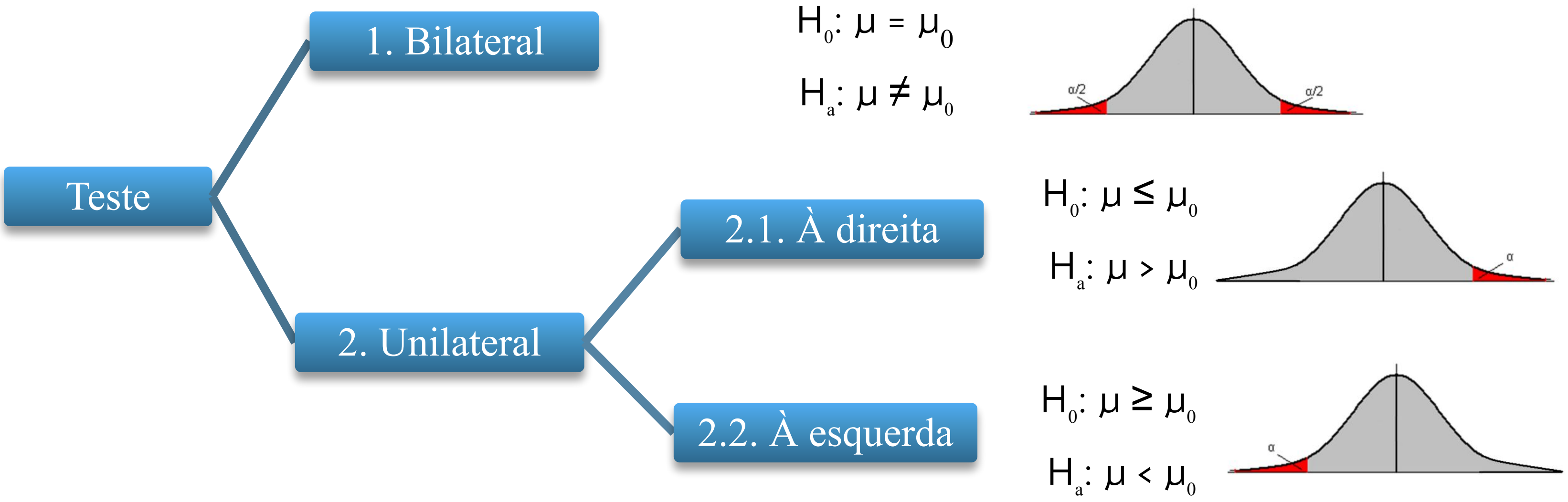
H_0: $\mu \leq 15$ (hipótese nula)

H_a: $\mu > 15$ (hipótese alternativa)

Neste exemplo a hipótese alternativa é a hipótese de pesquisa. Em tal caso as hipóteses nula e alternativa devem ser formuladas de modo que a rejeição de H_0 suporte a conclusão e ação que estão sendo procuradas.

Teste de Hipótese

As hipóteses podem ter várias formas:



Onde μ_0 é o valor numérico específico que está sendo considerado nas hipóteses nula e alternativa.

Como realizar Testes de Hipótese

Passo 1

Interprete a situação de modo a obter a média μ;

Passo 2

Construa as hipóteses, dizendo se é bilateral ou unilateral, considerando a média em questão;

Passo 3

Obtenha o grau de significância;

Passo 4

Verifique qual o tipo de distribuição mais apropriado (Z ou t-Student);

(1) Formular a hipótese nula (H0)

H_0: $\mu = \mu_0$

Expressar em valores aquilo que deve ser testado;
Esta hipótese é sempre de igualdade;
Deve ser formulada com o objetivo de ser rejeitada.

(2) Formular a hipótese alternativa (H1)

H_a: $\mu > \mu_0$ (teste unilateral/unicaudal à direita)
$\mu < \mu_0$ (teste unilateral/unicaudal à esquerda)
$\mu \neq \mu_0$ (teste bilateral/bicaudal) .

(3) Definir um valor crítico (α)

- Isto envolve definir um ponto de corte a partir do qual a hipótese nula será rejeitada (aceita a hipótese alternativa).
- Esta hipótese é de fato a expressão daquilo que ser quer provar.

(4) Calcular a estatística teste

- A estatística teste é obtida através dos dados amostrais, isto é, ela é a evidência amostral;
- A forma de cálculo depende do tipo de teste envolvido, isto é, do modelo teórico ou modelo de probabilidade.

(5) Tomar uma decisão

- A estatística teste e o valor crítico são comparados e a decisão de aceitar ou rejeitar a hipótese nula é formulada;
- Se for utilizado um software estatístico pode-se trabalhar com a significância do resultado (p-value) ao invés do valor crítico.

(6) Formular uma conclusão

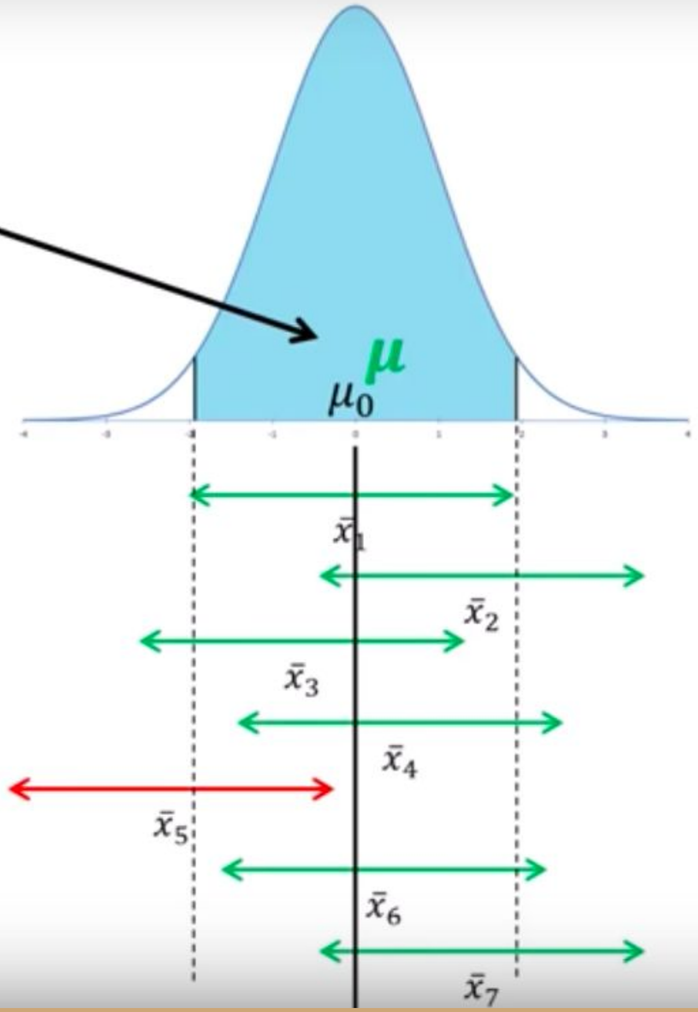
- Expressar em termos do problema (pesquisa) qual foi a conclusão obtida;
- Não esquecer que todo resultado baseado em amostras está sujeito a erros e que geralmente apenas um tipo de erro é controlado.

$\alpha = .05$

95% of all sample means ($\bar{x}$) are *hypothesized to be* in this region.

$H_0\colon \mu = \mu_0$

$H_a\colon \mu \neq \mu_0$



Fail to reject null hypothesis

Fail to reject null hypothesis

Fail to reject null hypothesis

Fail to reject null hypothesis

Reject null hypothesis

Fail to reject null hypothesis

Fail to reject null hypothesis

If we took a sample and it was by chance like $\bar{x}_5$, we would incorrectly reject the null hypothesis.

Erros de decisão

Média dentro da área de não rejeição devido ao acaso

- Erro tipo I: rejeitar H_0 quando está verdadeira;
- Erro tipo II: não rejeitar H_0 quando está falsa;

Decisão	H_0 é verdadeira	H_0 é falsa
Não rejeitar H_0	Decisão Correta	Erro tipo II
Rejeitar H_0	Erro tipo I	Decisão Correta

Média fora da área de não rejeição devido ao acaso

- A probabilidade de cometer erro tipo I é denominada "nível de significância" e é denotada por α.
- A probabilidade de cometer erro tipo II é denotada por β.

Erros de decisão

- Na prática é especificado a probabilidade máxima permissível de se cometer o erro tipo I, chamado nível de significância.
- Escolhas comuns para o nível de significância são:

0,05 (5%) e 0,01 (1%)

Ou seja, em cada 100 amostras eu estou “aceitando” o risco de cometer o erro tipo 1 cinco ou uma vez.

Erros de decisão

- Assim, se a probabilidade de se cometer um erro Tipo I é controlada por selecionar um pequeno valor para o nível de significância, temos um alto grau de confiança que a conclusão para rejeitar H_0 está correta.

Erros de decisão

- Como na prática não se atenta para a probabilidade de se cometer o erro tipo II, se decidimos aceitar H_0 não podemos determinar quão confiantes podemos estar com aquela decisão.
- Assim recomenda-se que seja usado a declaração "*não rejeitar H_0*" em vez de aceitar H_0.

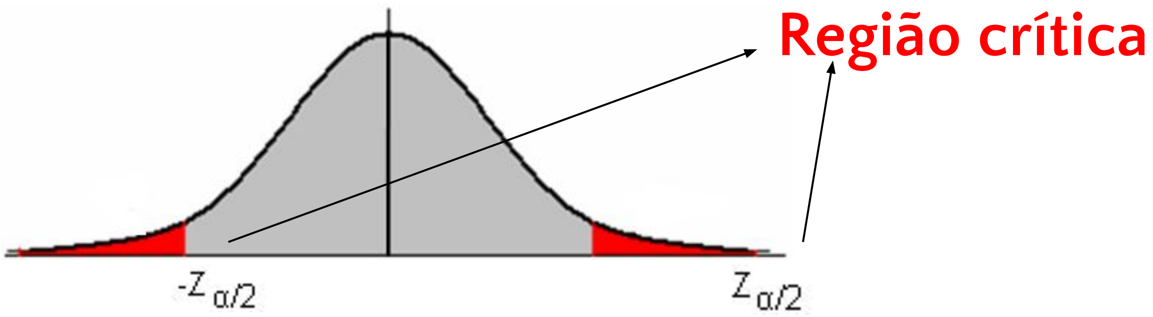
Como realizar Testes de Hipótese

Calcule a estatística de teste, usando:

- $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ (para a normal)
- $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$ (para a t-Student)

Como realizar Testes de Hipótese

Interprete a estatística de teste para verificar se a hipótese nula será ou não rejeitada. Se z ou t corresponder a valores da região crítica, rejeite H_0, caso contrário, não rejeite H_0.



Diferentes níveis de significância podem gerar diferentes conclusões. Com um nível de 5%, H_0 poderá ser rejeitado, mas com 1% poderá ser aceito.

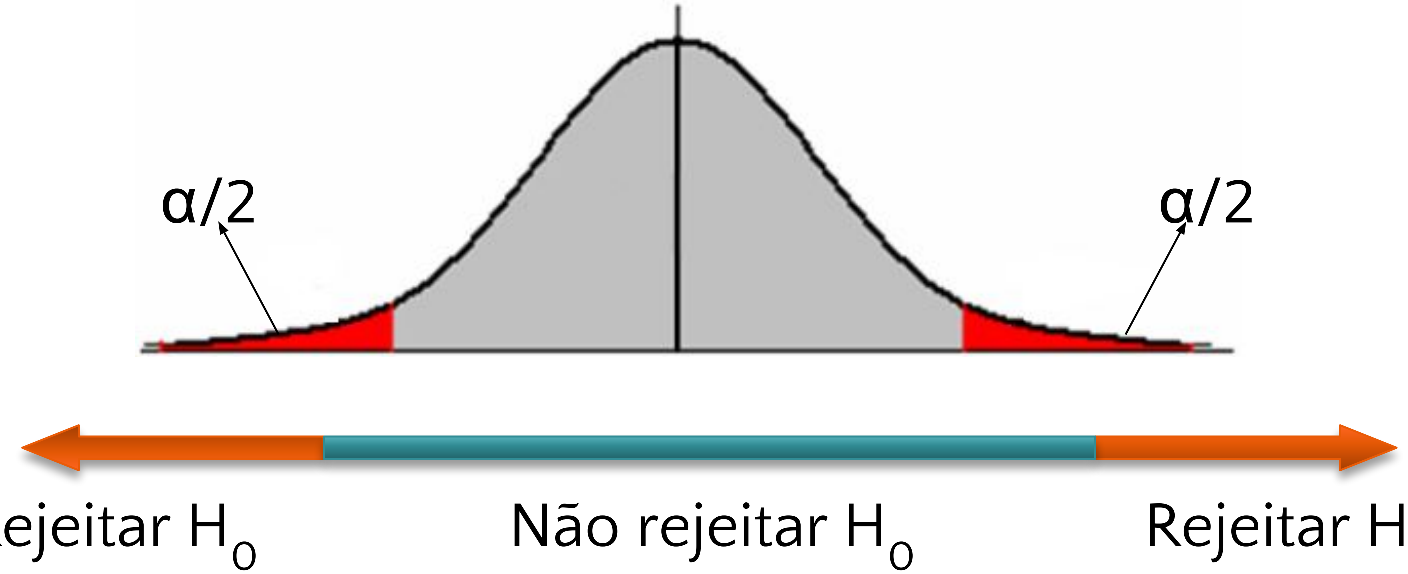
Como realizar Testes de Hipótese

- Para amostras pequenas ($n \leq 30$) ou quando σ for desconhecido, usamos *s* ao invés de σ e consideramos o grau de liberdade como n-1;
- Para σ desconhecido, a distribuição é uma *t*, não uma normal, mas para amostras de tamanho muito grandes, as diferenças entre as distribuições normal e *t* são desprezíveis, mas o uso da distribuição *t* dá melhores resultados.

1. Testes de Hipótese Bilateral

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_a: \mu \neq \mu_0$$



1. Testes de Hipótese Bilateral

Exemplo

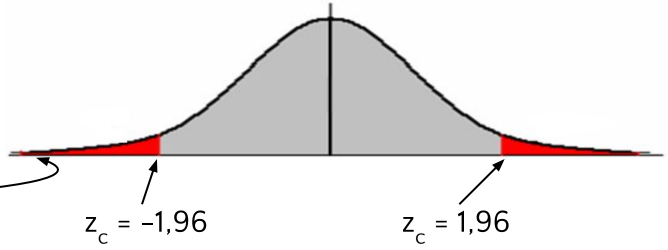
Um comprador de tijolos julga que a qualidade dos tijolos está deteriorando. Sabe-se pela experiência passada que a média de resistência ao esmagamento destes tijolos é de 400 libras com desvio padrão de 20 libras. Uma amostra de 100 tijolos deu uma média de 395 libras. Teste a hipótese de que a qualidade média não se alterou contra a alternativa de que se tenha deteriorado. (considere o nível de significância de 5%)

$H_0: \mu = 400$

$H_a: \mu \neq 400$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{395 - 400}{20 / \sqrt{100}} = \frac{-5}{2} = -2{,}5$$

Para 5%, $z_c = 1{,}96$

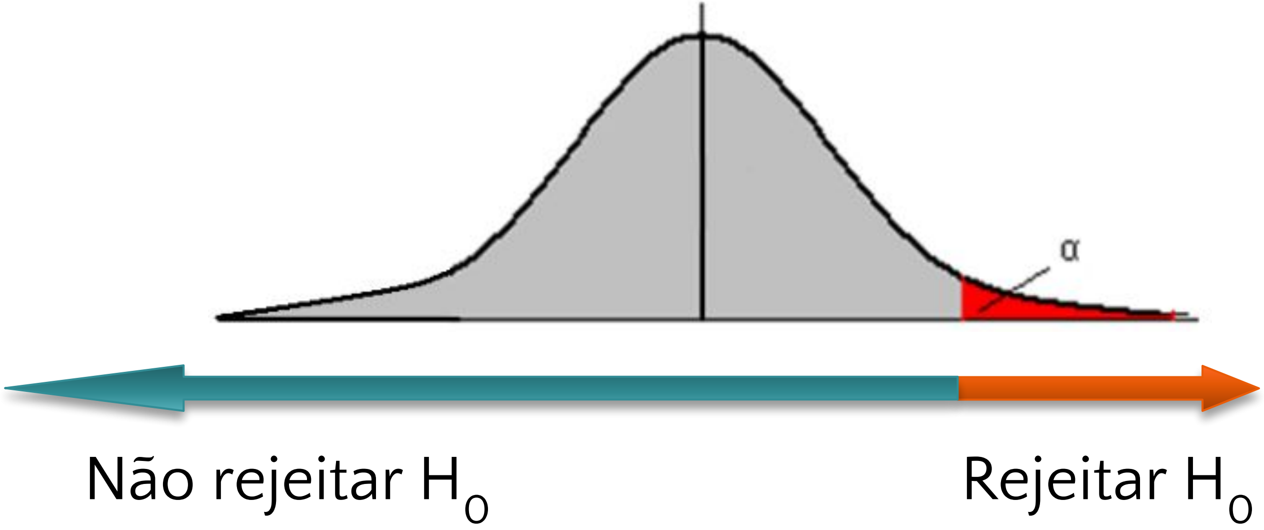


Conclusão: rejeitamos H_0, isto é, a resistência não é mais de 400 libras.

2.1 Testes de Hipótese Unilateral a direita

$$H_0: \mu \leq \mu_0$$

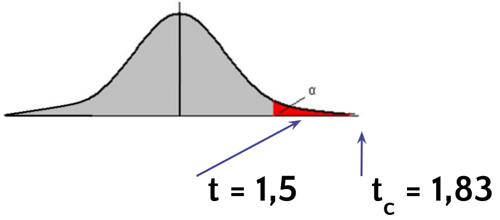
$$H_a: \mu > \mu_0$$



2.1 Testes de Hipótese Unilateral a direita

Exemplo

Um trecho de uma rodoviária, quando é utilizado o radar, são verificadas em média 7 infrações diárias por excesso de velocidade. O chefe da polícia acredita que este número pode ter aumentado. Para verificar isso, o radar foi mantido por 10 dias consecutivos. Os resultados foram: 8, 9, 5, 7, 8, 12, 6, 9, 6, 10. Os dados trazem evidências do amento das infrações?



H_0: $\mu \leq 7$

H_a: $\mu > 7$

Média amostral = $\frac{8+9+5+7+8+12+6+9+6+10}{10} = 8$

Não conhecendo σ, estimamos s, onde s = 2,1

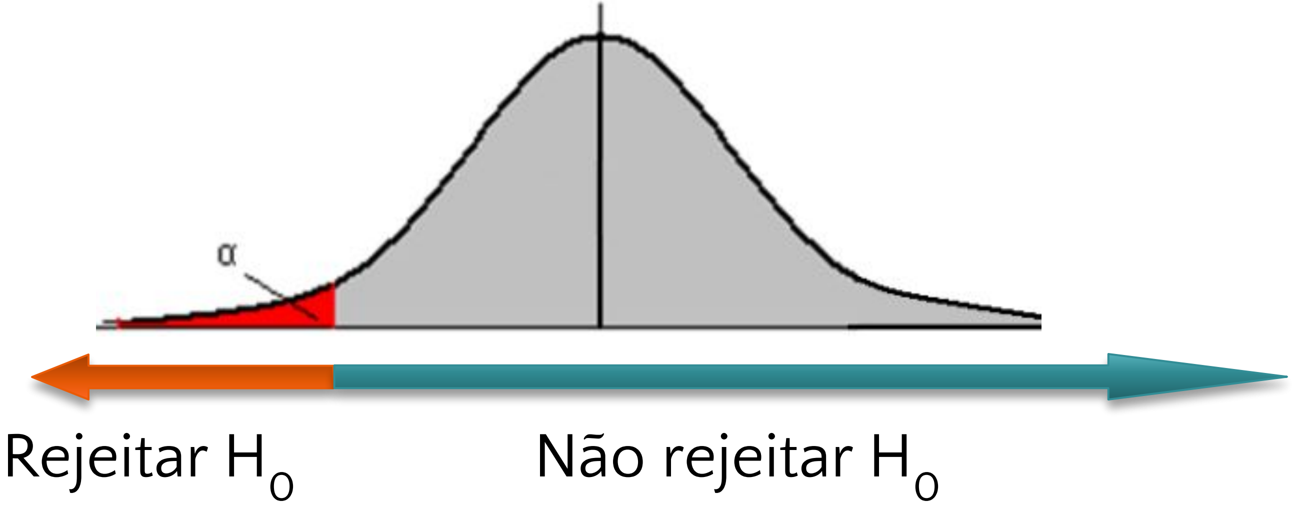
Usando t-Student: $t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{8-7}{2{,}1/\sqrt{10}} = 1{,}5$

Conclusão: Não rejeitamos H0, o que implica que o número de infrações não teve um aumento significativo.

2.2 Testes de Hipótese Unilateral a esquerda

$$H_0: \mu \geq \mu_0$$

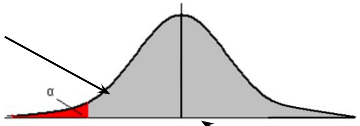
$$H_a: \mu < \mu_0$$



2.2 Testes de Hipótese Unilateral a esquerda

Exemplo

Uma pesquisa feita em universidades mostrou que professores de Estatística ganham em média de R$45.678. Um deles contestou a pesquisa e disse que a real média seria de R$48.000 com um desvio padrão de R$7.000. Foram analisados 81 professores para que ele chegasse a essa média amostral. O que o professor disse é válido? (nível de significância de 5%)



$H_0: \mu \geq 45{,}678$

$H_a: \mu < 45{,}678$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{48.000 - 45.678}{7.000/\sqrt{81}} = \frac{2.322}{777{,}77} = 2{,}98$$

Para 5%, z_c = 1,65

Conclusão: Não rejeitamos H_0. O salário não é menor que R$ 45.678 considerando o nível de significância de 5%.