

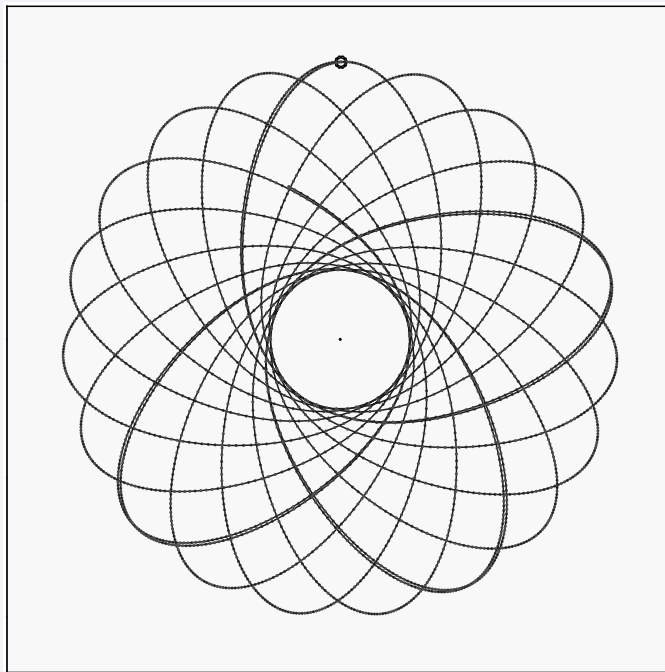
Apuntes de FÍSICA 1

(grado en Estudios en Arquitectura)

Volumen 1 de la serie:
MANUALES DE FISICA GENERAL

por
B. VILLACAMPA & A. BADIA

Departamento de Física de la Materia Condensada,
Universidad de Zaragoza (España)



GRADO EN ESTUDIOS EN ARQUITECTURA: **FÍSICA 1**

Colección de Manuales de Física General

Vol. 1

Esta colección recoge una serie de textos de Física General desarrollados como material de apoyo para nuestros alumnos de varias titulaciones científico-técnicas en la Universidad de Zaragoza.

Apuntes de Física 1 (Estudios en Arquitectura)
Segunda edición
Zaragoza, 2018

Autores:

M. Belén Villacampa Naverac y Antonio Badía Majós



Departamento de
Física de la
Materia Condensada
Universidad Zaragoza

VILLACAMPA NAVERAC, M Belén & BADÍA MAJÓS, Antonio

“APUNTES FÍSICA 1”

SEGUNDA EDICIÓN (REVISADA) ZARAGOZA, 2018

PRIMERA EDICIÓN ZARAGOZA, 2017

Este trabajo está licenciado bajo *Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License*.



El documento electrónico y las condiciones de uso pueden obtenerse en
http://personal.unizar.es/bvillaca/docencia/libros_docentes.html

Acerca de los autores

<http://personal.unizar.es/bvillaca/index.html>

<http://personal.unizar.es/anabadia/index.html>

© 2018, M Belén Villacampa Naverac

© 2018, Antonio Badía Majós

Índice

PRÓLOGO	IX
I LAS MAGNITUDES FÍSICAS	1
INTRODUCCIÓN	3
1. MAGNITUDES, UNIDADES Y DIMENSIONES	5
1.1. Conceptos básicos	5
1.2. Magnitudes físicas. Análisis dimensional	7
1.3. Incertidumbre y cifras significativas	8
2. PROPIEDADES VECTORIALES	11
2.1. Magnitudes vectoriales	11
2.2. Representaciones coordenadas. Componentes de un vector . .	12
2.3. Operaciones con vectores: propiedades	15
3. PROPIEDADES GEOMÉTRICAS Y ANALÍTICAS	19
3.1. Geometría básica	19
3.2. Trigonometría básica	20
3.3. Cálculo diferencial e integral	22
3.4. Gradiente de una función escalar	24
II FUNDAMENTOS DE MECÁNICA	29
INTRODUCCIÓN	31
4. CINEMÁTICA DE UNA PARTÍCULA	33
4.1. Vectores posición, velocidad y aceleración	33
4.2. Ejemplos de movimientos. Sistemas de referencia.	35
5. DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA: FUERZAS Y MOMENTOS	41
5.1. Leyes de Newton	41

5.2.	<i>Tipos de fuerzas: aplicadas y de ligadura</i>	46
5.3.	<i>Diagramas de fuerzas. Ejemplos de situaciones de equilibrio</i>	51
5.4.	<i>Momento lineal y angular</i>	53
5.4.1.	<i>Momento e impulso lineal. Ley de conservación.</i>	53
5.4.2.	<i>Momento e impulso angular. Ley de conservación.</i>	55
5.5.	<i>Ejemplos de aplicación</i>	57
5.5.1.	<i>Movimiento de una partícula bajo la acción de fuerza de rozamiento viscoso.</i>	57
6.	DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA: TRABAJO Y ENERGÍA	61
6.1.	<i>Trabajo</i>	62
6.2.	<i>Potencia</i>	64
6.3.	<i>Energía cinética</i>	65
6.4.	<i>Fuerzas conservativas y disipativas. Energía potencial</i>	67
6.5.	<i>Variación/Conservación de la energía mecánica</i>	71
6.6.	<i>Representación gráfica y estudio de las curvas de energía potencial</i>	71
III	MOVIMIENTO OSCILATORIO	75
	INTRODUCCIÓN	77
7.	MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE	79
7.1.	<i>Ecuaciones básicas y ejemplos</i>	79
7.2.	<i>Trabajo y energía en el movimiento armónico simple</i>	81
7.3.	<i>Ejemplos</i>	84
7.4.	<i>Pequeñas oscilaciones. Aproximación armónica</i>	86
8.	OSCILACIONES AMORTIGUADAS	91
8.1.	<i>Ecuaciones básicas.</i>	91
8.2.	<i>Discusión de la solución exacta de la oscilación amortiguada</i>	94
9.	OSCILACIONES AMORTIGUADAS Y FORZADAS	99
9.1.	<i>Ecuaciones básicas y soluciones</i>	99
9.1.1.	<i>Primera aproximación: régimen estacionario</i>	101
9.1.2.	<i>Solución completa: régimen transitorio y estacionario</i>	101
9.2.	<i>Trabajo y energía</i>	103
9.3.	<i>Resonancia</i>	104
IV	DINÁMICA DE SISTEMAS DE PARTÍCULAS	107
	INTRODUCCIÓN	109

10. CENTRO DE MASAS: ECUACIÓN DE MOVIMIENTO	111
10.1. <i>Definición de Centro de Masas: ejemplos</i>	111
10.1.1. Ejemplo: Centro de Masas de un alambre semicircular	113
10.2. <i>Momento lineal y angular de un sistema de partículas</i>	114
10.2.1. Velocidad y aceleración del Centro de Masas.	114
10.2.2. Momento lineal. Conservación.	115
10.2.3. Momento angular. Conservación.	115
10.3. <i>Energía de un sistema de partículas</i>	118
10.3.1. Energía Cinética.	118
10.3.2. Energía Potencial.	118
10.3.3. Energía Mecánica. Teorema de conservación	119
10.4. <i>Consideraciones generales sobre el movimiento del sistema de partículas</i>	119
10.4.1. Cuadro-resumen:	120
10.5. <i>Ejemplo. Colisiones</i>	120
11. DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO	125
11.1. <i>Rotación del sólido rígido en torno a un eje. Momento angular</i>	126
11.2. <i>Momento de inercia: cálculo, teoremas y ejemplos</i>	129
11.2.1. Teorema de los ejes paralelos o de Steiner.	129
11.2.2. Teorema de los ejes perpendiculares.	130
11.2.3. Ejemplos.	131
11.3. <i>Ecuación de rotación del sólido rígido</i>	134
11.4. <i>Cálculo del momento de una fuerza. Ejemplos</i>	135
11.5. <i>Energía cinética de rotación</i>	137
11.6. <i>Aplicaciones de la teoría del sólido rígido</i>	138
11.6.1. Ejemplo: el péndulo físico	138
11.6.2. El movimiento de rodadura	140
11.6.3. Las poleas reales	142
V EQUILIBRIO DE LOS SÓLIDOS	145
INTRODUCCIÓN	147
12. EQUILIBRIO DEL SÓLIDO RÍGIDO	149
12.1. <i>Condiciones de equilibrio de un sólido rígido</i>	149
12.2. <i>Fuerzas equivalentes. Sistemas de fuerzas paralelas. Centro de fuerzas</i>	153
13. DIAGRAMAS DE FUERZAS. FUERZAS APLICADAS Y DE LIGADURA	159
13.1. <i>Enlaces en sistemas planos</i>	159

13.2.	<i>Sistemas estáticamente determinados</i>	163
13.3.	<i>Solicitaciones</i>	170
14.	FUNDAMENTOS DE ELASTICIDAD	175
14.1.	<i>Esfuerzo y deformación</i>	175
14.2.	<i>Ejemplos</i>	179
VI	MECÁNICA DE FLUIDOS	181
	INTRODUCCIÓN	183
15.	ESTÁTICA DE FLUIDOS	185
15.1.	<i>Conceptos previos</i>	185
15.2.	<i>Presión hidrostática</i>	187
15.2.1.	Dependencia de la presión con la profundidad	188
15.2.2.	Aplicaciones. Medidas de la presión	190
15.2.3.	Cálculo de la fuerza hidrostática sobre una pared vertical	191
15.3.	<i>Fuerza de empuje. Principio de Arquímedes</i>	192
16.	DINÁMICA DE FLUIDOS	195
16.1.	<i>Conceptos previos</i>	195
16.2.	<i>Ecuación de continuidad</i>	197
16.3.	<i>Ecuación de Bernouilli</i>	198
16.4.	<i>Aplicaciones</i>	199
16.4.1.	Teorema de Torricelli	199
16.4.2.	Efecto Venturi	200
VII	ADDENDA	203
	GLOSARIO	205

PRÓLOGO

Este manual forma parte de una serie de textos concebidos como una herramienta de apoyo para los estudiantes de las asignaturas de Física de primer curso de universidad impartidas por los autores. Dada la variedad de titulaciones involucradas, en cada caso se ha hecho hincapié en aquellos capítulos y apartados que recojan los aspectos más relevantes para la formación de los alumnos, de acuerdo a lo recogido en el plan de estudios y guías docentes del correspondiente grado.

El que nos ocupa está dirigido a los estudiantes de primero de Arquitectura, como apoyo para la asignatura Física 1. El texto se ha estructurado en seis partes, cada una con varios capítulos, dedicados al estudio de la mecánica de una partícula y de sistemas de partículas, haciendo especial hincapié en la estática de sólidos; en la última parte se dan algunas nociones de mecánica de fluidos. Al final se ha incluido un anexo que contiene un glosario con la notación utilizada en el manual así como el alfabeto griego, con el que el lector deberá familiarizarse.

El trabajo personal de los alumnos es una necesidad incuestionable. A lo largo del texto se encontrarán algunos ejercicios propuestos y sugerencias; así, cuando en un apartado se lee que un resultado dado “se puede comprobar”, es muy recomendable intentar completar el desarrollo. Dichas comprobaciones deben considerarse como ejercicios adicionales a los problemas propiamente que se proponen en los distintos temas. Los problemas ayudan a asimilar los conocimientos previamente adquiridos: es indispensable comprender los conceptos físicos expuestos en la parte teórica para desenvolverse en la realización de problemas prácticos. Las tutorías con el profesor son un gran aliado para aclarar las dudas que puedan surgir al revisar la materia explicada en clase.

Queremos destacar que, a pesar de que este manual pretende ser autoconsistente, en el sentido de que los contenidos se van apoyando en los que ya han sido introducidos, la idea básica en la redacción ha sido recopilar las notas correspondientes al curso para el que se ha destinado. Por tanto, no se trata tanto de material de estudio autodidacta como de material de apoyo para

facilitar el seguimiento de la asignatura.

Somos conscientes de que un texto de estas características nunca puede darse por acabado; serán por supuesto bien bienvenidos los comentarios que nos ayuden a mejorarlo y corregir cualquier error.

Los autores deseamos aclarar que en la redacción se ha utilizado el género masculino para aligerar la lectura. Rogamos sobreentiendan “lector o lectora”, “alumno o alumna” cada vez que lean “lector’ ’, “alumno”.

Por último, nos gustaría agradecer a M. Luisa Ramón su ayuda en el proceso de edición de este manual.

Septiembre 2018, Zaragoza - España

Parte I

LAS MAGNITUDES FÍSICAS

INTRODUCCIÓN

La Física Fundamental, motivo de estudio en esta asignatura, está integrada por diversas disciplinas. Entre ellas, existen diferencias no sólo en los fenómenos de interés, sino también en los métodos de descripción. Por ejemplo, en “Dinámica de una partícula” nos ocuparemos de la expresión completa de las coordenadas que definen su movimiento, mientras que en “Dinámica de fluidos” se afronta sólo de modo promedio el movimiento de miles de partículas.

No obstante, una característica esencial compartida por todos los casos es el carácter cuantitativo del estudio. En el terreno experimental esto significa que las mediciones deben proporcionar datos numéricos, objetivos y contrastables. En el terreno teórico, hemos de tener en cuenta que las leyes físicas que gobiernan los procesos físicos deben expresarse mediante ecuaciones matemáticas cuyas variables y parámetros serán las magnitudes físicas.

De estos aspectos nos ocuparemos en esta primera parte de la asignatura. Concretamente, revisaremos cómo deben expresarse las magnitudes físicas teniendo en cuenta su carácter escalar o vectorial. Introduciremos algunos conceptos de Análisis Dimensional, que no es otra cosa que el requerimiento de la consistencia entre las magnitudes que se relacionan mediante una ley física. Por ejemplo, resultaría inadmisibile igualar (o sumar) un tiempo con una velocidad, aunque nada impide su producto. Se hará hincapié asimismo en la importancia de conocer y expresar correctamente la incertidumbre inherente a cualquier medida

A continuación, ya incidiendo en aspectos más teóricos, haremos una breve recopilación de conceptos matemáticos imprescindibles. Repasaremos las propiedades básicas de las magnitudes vectoriales: operaciones entre vectores y representaciones coordenadas, y algunos elementos de análisis matemático: derivación e integración.

Capítulo 1

MAGNITUDES, UNIDADES Y DIMENSIONES

1.1. *Conceptos básicos*

Como se ha mencionado, es esencial el carácter cuantitativo de la Física. La verificación de cualquier teoría sobre los fenómenos físicos se basa en la medición y la concordancia de los resultados numéricos. Llamamos **Magnitud Física** a cualquier propiedad utilizada para caracterizar un fenómeno físico que se puede medir de forma reproducible. Serían ejemplos: tiempo, velocidad, energía, carga eléctrica, voltaje,...

Por otra parte, todas las magnitudes físicas se miden en términos de unos patrones que se conocen como **unidades**. El uso correcto y la soltura en el manejo de las unidades es imprescindible en Física.

Se llama **Magnitudes Fundamentales** a un conjunto básico de magnitudes en función del cual pueden expresarse todas las demás mediante las leyes físicas. Así, construir un **sistema de unidades** implica la elección de las unidades de las magnitudes fundamentales y derivar de ellas las demás.

El sistema internacional (SI), aceptado por convenios internacionales en prácticamente todo el mundo, considera hasta siete magnitudes fundamentales, que se muestran en la tabla 1.1.

Este sistema se conoce también como MKS, por las iniciales de las unidades fundamentales de las tres primeras magnitudes (metro, kilogramo, segundo). A partir de esas siete, aparece un gran número de unidades que se derivan de

MAGNITUD	UNIDAD	SÍMBOLO
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura	kelvin	K
Intensidad lumínica	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

Cuadro 1.1: Magnitudes fundamentales del Sistema Internacional de unidades. En Física 1 solo utilizaremos algunas de ellas.

Potencia de 10	Prefijo	SÍMBOLO	Ejemplo
10^{-15}	femto	f	fs (femtosegundo)
10^{-12}	pico	p	pF (picofaradio)
10^{-9}	nano	n	nA (nanoamperio)
10^{-6}	micro	μ	μ Pa (micropascal)
10^{-3}	mili	m	mJ (milijulio)
10^3	kilo	k	kV (kilovoltio)
10^6	mega	M	MW (megawatio)
10^9	giga	G	GHz (gigahertzio)
10^{12}	tera	T	T Ω (teraohmio)

Cuadro 1.2: Prefijos con que se nombran los múltiplos y subdivisores de las distintas unidades.

ellas (por ejemplo el ms^{-1} , unidad de velocidad). Algunas unidades derivadas importantes tienen nombre propio, como el Voltio (potencial eléctrico), el Julio (energía: $E \propto mv^2 \Rightarrow \text{Julio} = \text{kilogramo metro}^2/\text{segundo}^2$), el Newton (fuerza), etc.

Además del SI hay otros sistemas de unidades, como el CGS (por las iniciales de centímetro, gramo, segundo), que se usa en áreas específicas de la Física. Por otra parte, en disciplinas técnicas se utiliza el Sistema Técnico, cuyas magnitudes fundamentales son longitud (metro), fuerza (kilogramo-fuerza o simplemente kilogramo) y tiempo (segundo).

En muchas ocasiones, las unidades básicas son demasiado grandes o pequeñas para expresar la medida que nos interesa de modo razonable. En estos casos se utilizan los múltiplos y subdivisiones de las unidades (ver tabla 1.2).

MAGNITUD	UNIDADES	DIMENSIONES
Longitud	metro (m)	[L]
Masa	kilogramo (kg)	[M]
Tiempo	segundo (s)	[T]
Intensidad de corriente	amperio (A)	[I]
Carga eléctrica	culombio (C)	$[Q] = [I] [T]$
Energía	julio (J)	$[M] [L]^2 [T]^{-2}$

Cuadro 1.3: Ecuación de dimensiones de algunas magnitudes fundamentales del sistema MKS, así como de la carga y de la energía.

1.2. Magnitudes físicas. Análisis dimensional

Para describir algunas magnitudes físicas basta una cantidad numérica y la unidad correspondiente. Es el caso de la masa o la temperatura, por ejemplo. Se conocen como **magnitudes escalares**.

Sin embargo, muchas magnitudes físicas requieren ser descritas mediante vectores, esto es, con módulo (con las correspondientes unidades), dirección, sentido (en ocasiones habrá que precisar también el punto de aplicación). Son las llamadas **magnitudes vectoriales**. Ejemplos de magnitudes vectoriales: velocidad, fuerza, campo eléctrico..

Para revisar el concepto de vector y sus tipos, así como algunas operaciones que se pueden realizar con ellos y sus propiedades, remitimos al lector al capítulo 2. En lo que sigue nos centraremos en las magnitudes escalares (o en el módulo de las magnitudes vectoriales) para introducir el concepto de análisis dimensional.

La expresión de una magnitud física en función de las fundamentales nos da las *dimensiones de la magnitud*. Llamamos **Ecuación de Dimensiones** a la expresión de cualquier magnitud en función de las magnitudes fundamentales en el correspondiente sistema de unidades.

Siguiendo con el ejemplo del sistema MKS, en la tabla 1.3 se proporciona la ecuación de dimensiones de algunas magnitudes fundamentales y derivadas.

Las ecuaciones que contienen magnitudes físicas han de ser **dimensionalmente consistentes**, es decir, sólo se pueden sumar o igualar términos con las mismas dimensiones. Este es un primer criterio de comprobación de la corrección de un resultado.

Ejemplo: Comprobar como ejercicio cuál de las dos expresiones que se proporcionan para la frecuencia de oscilación de la masa m (Fig. 1.1) es dimensionalmente consistente:

$$\nu_a = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2) m} \right]^{1/2}$$

$$\nu_b = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{k_1 + k_2}{m k_1 k_2} \right]^{1/2}$$

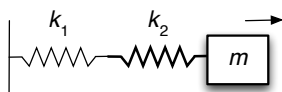


Figura 1.1: Masa oscilante m unida a dos muelles de constantes elásticas distintas.

1.3. Incertidumbre y cifras significativas

Cualquier medida va acompañada de una incertidumbre inherente a la misma. Si se mide un bolígrafo con una regla ordinaria, no tendría sentido decir, por ejemplo, que su longitud es 145,25 mm, porque la regla solo permite medir de forma “confiable” al mm más cercano. Por el contrario, si se utiliza un micrómetro, que mide distancias aproximándose al 0,01 mm más cercano, la medida anterior sí que sería posible. Esa **incertidumbre** (también llamada **error**) se expresa habitualmente como un “ \pm ” que acompaña al valor numérico; así, en el primer caso diríamos que la longitud es 145 ± 1 mm, (o $14,5 \pm 0,1$ cm) . Eso debe interpretarse como que es poco probable que el bolígrafo mida más de 14,6 cm o menos de 14,4 cm. En el caso del micrómetro se expresaría la longitud como $145,25 \pm 0,01$ mm.

No es extraño expresar la incertidumbre en forma porcentual. Por ejemplo, si una resistencia viene expresada como $R = 680 \pm 10\%$ ohmios, debe interpretarse que lo más probable es que el valor real de la resistencia esté comprendido en un rango de ± 7 ohmios alrededor de 680.

A menudo no se da explícitamente la incertidumbre, sino que se indica con el número de **cifras significativas** (dígitos informativos) con el que se expresa la medida. Si se indica que un folio mide 31,5 cm de alto, hay que entender que los dos primeros dígitos (3 y 1) son correctos, pero que el tercero está afectado por un error de 0,1 cm.

Cuando se realizan cálculos con números con un cierto error, el resultado también estará afectado por una incertidumbre. Así, si se están multiplicando o dividiendo números, el resultado no puede tener más cifras significativas que el que menos tuviera de los números originales. La superficie de una hoja de papel de 31,5 cm de alto y 20,9 cm de ancho, será 658 cm^2 . Si se están sumando o restando dos números, el resultado no puede tener más dígitos significativos a la derecha de la coma decimal que el término que menos tenga. Por ejemplo, si se suma 11,24 más 13,1, el resultado da 24,3 no 24,34 (hasta las décimas, como el 13,1).

Es importante recordar que al reducir al número correcto de cifras significativas hay que **redondear**: la regla a seguir es que la última cifra significativa se aumentará en una unidad si la primera no significativa a su derecha es mayor o igual que 5 y se dejará igual si dicha cifra es menor que 5. Por ejemplo, si se desea redondear el número 1,3563342 a tres cifras significativas, lo correcto sería expresarlo como 1,36 y el número 1,4428638 como 1,44.

Cuando se utilizan números muy grandes o muy pequeños, es frecuente usar la **notación científica** que consiste en escribir la coma decimal tras la primera cifra significativa y a continuación el resto de cifras significativas. Finalmente, se multiplica ese número por 10 elevado a la potencia correspondiente. (Los números entre 0 y 10 se expresan sin la potencia). Por ejemplo, el número 0,00285 se expresaría como $2,85 \cdot 10^{-3}$. El uso de potencias de 10 es muy útil para aplicar bien el convenio de cifras significativas (3 en el ejemplo).

Para terminar, querríamos señalar que **exactitud** y **precisión** no son sinónimos en este contexto. La exactitud se refiere al grado de concordancia entre el valor exacto (“real”, “verdadero”) de la magnitud y el valor medido. La precisión se refiere, por una parte a la sensibilidad del aparato de medida. Una balanza de cocina bien calibrada, que es capaz de apreciar hasta 1 gramo, es menos precisa que una de laboratorio capaz de apreciar 0,1mg. Pero si ésta no está bien calibrada, no será exacta, aunque sea muy precisa. La precisión también hace referencia al grado de concordancia entre los resultados de las diferentes medidas.

Capítulo 2

PROPIEDADES VECTORIALES

Revisaremos el concepto de vector y sus tipos, así como algunas de las operaciones que se pueden realizar con ellos. Asimismo mostraremos algunas propiedades y aplicaciones de dichas operaciones. Se han recopilado aquellas que resultan esenciales para el desarrollo de la asignatura.

2.1. *Magnitudes vectoriales*

Retomando la clasificación de las magnitudes introducida en el capítulo 1.2, recordemos que muchas magnitudes físicas requieren ser descritas mediante vectores, esto es, con módulo (con las correspondientes unidades), dirección, sentido siendo relevante en ocasiones el punto de aplicación (origen del vector). Son las llamadas **magnitudes vectoriales**. Tal es el caso de la aceleración, la fuerza o los campos eléctrico y magnético.

Definición: Un vector es un segmento orientado.

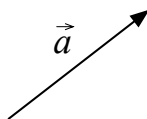


Figura 2.1: Un vector.

Existen distintos tipos de vectores desde un punto de vista matemático, pero cuyas diferencias son importantes a la hora de aplicar sus propiedades a las diferentes magnitudes físicas que tienen carácter vectorial.

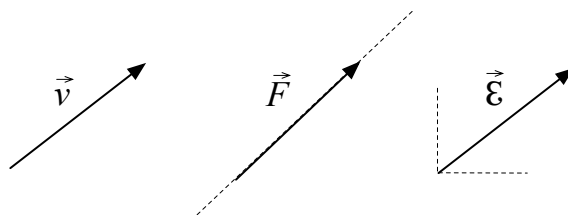


Figura 2.2: Ejemplos de vectores: libre (velocidad), deslizante (fuerza) y ligado (campo eléctrico).

Así, dependiendo de si su *punto de aplicación* puede trasladarse, los vectores se clasifican en **libres** (el origen puede trasladarse a cualquier punto, sin alterar el efecto de su acción: ej. velocidad de la luz), **deslizantes** (ej. el origen puede trasladarse a lo largo de la línea de acción del vector: fuerza aplicada sobre un sólido) o **ligados** (el origen no puede moverse: ej. el campo eléctrico en un punto dado).

Aquellos vectores tales que en su definición interviene un *giro*, se denominan **axiales** (como la velocidad angular, el par o momento de una fuerza o el momento angular). Todos los demás se clasifican en la categoría de **polares** (como el momento lineal). Es importante tener en cuenta que en una igualdad física los vectores a ambos lados de la igualdad deben ser del mismo tipo.

2.2. Representaciones coordenadas. Componentes de un vector

Todo vector admite representaciones en distintas bases del espacio. Generalmente, se suelen utilizar bases de vectores unitarios ortogonales:

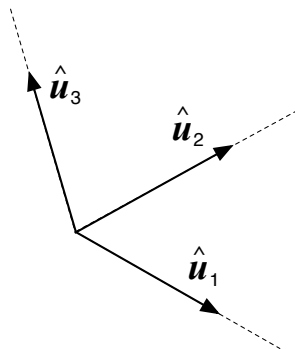


Figura 2.3: Vectores unitarios ortogonales.

Expresaremos los vectores en términos de la base del modo

$$\vec{a} = a_1 \hat{u}_1 + a_2 \hat{u}_2 + a_3 \hat{u}_3$$

siendo a_1 , a_2 y a_3 las **componentes del vector** en la base dada. Veámoslo de modo explícito en dos casos de bases ortogonales usuales en Física:

1. COORDENADAS CARTESIANAS

Fijemos un punto O en el espacio (origen del sistema de referencia) y consideremos tres direcciones perpendiculares preferentes X, Y y Z.

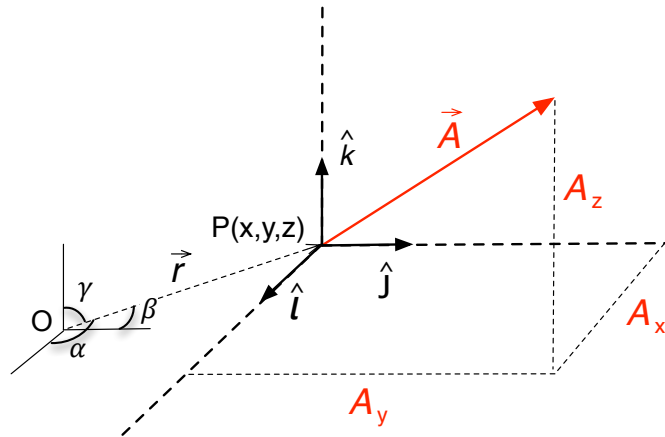


Figura 2.4: Componentes cartesianas del vector \vec{A} .

Los vectores unitarios correspondientes a esas direcciones \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} forman una base ortogonal en cada punto del espacio.

En este sistema, las coordenadas de un punto P vienen dadas por las componentes del vector de posición \vec{r} de dicho punto (\vec{r} =vector con origen en el origen de coordenadas y extremo en el punto). Por otra parte, $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ reciben el nombre de **cosenos directores** y determinar de forma unívoca la dirección del vector \vec{r} .

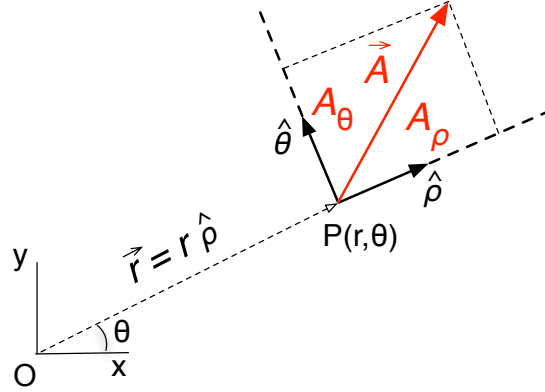
Un vector \vec{A} cualquiera con origen en P se puede representar como:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (2.1)$$

Nótese que los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} , son independientes del punto P elegido.

2. COORDENADAS POLARES EN EL PLANO

Fijemos de nuevo un punto O en el plano y consideremos un eje preferente (por convenio el X).

Figura 2.5: Componentes polares del vector \vec{A} .

En este caso, como se indica en la figura, la posición del punto P se especifica mediante las coordenadas r y θ , que corresponden a la distancia desde el origen y el ángulo con el eje X . Debe notarse que la base ortogonal $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ es distinta en cada punto del plano $P(r, \theta)$.

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_\rho \hat{\rho} + A_\theta \hat{\theta} \\ A_\rho &= A_\rho(r, \theta) \\ A_\theta &= A_\theta(r, \theta)\end{aligned}$$

Resultan útiles las siguientes expresiones, que relacionan las componentes cartesianas y polares de un punto determinado, así como los vectores unitarios en éste.

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \tan \theta = y/x \\ x &= r \cos \theta \quad ; \quad y = r \sin \theta\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad ; \quad \hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \\ \hat{i} &= \cos \theta \hat{\rho} - \sin \theta \hat{\theta} \quad ; \quad \hat{j} = \sin \theta \hat{\rho} + \cos \theta \hat{\theta}\end{aligned}$$

Estos conceptos quedarán más claros al aplicarlos en diferentes casos, que mostrarán la utilidad de usar sistemas coordenados adaptados a diferentes situaciones. Por ahora, se recomienda practicar con ellas de modo explícito mediante el ejercicio que se propone a continuación.

Ejemplo: Considérese un vector \vec{A} , con origen en el punto (1,2) y extremo en (4,3) expresados en coordenadas cartesianas. Obténgase las componentes

cartesianas y polares de \vec{A} . Represéntese gráficamente el vector y sus componentes en ambos sistemas.

2.3. Operaciones con vectores: propiedades

Revisemos de modo escueto algunas operaciones que se pueden realizar con vectores y sus propiedades.

1. SUMA (el resultado es un vector)

Dados dos vectores \vec{a} y \vec{b} en componentes cartesianas, su suma se obtiene aplicando:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j} + (a_z + b_z) \hat{k} \quad (2.3)$$

También puede efectuarse la operación suma mediante la siguiente construcción geométrica, que muestra la suma de dos vectores realizada de modo gráfico (regla del paralelogramo).

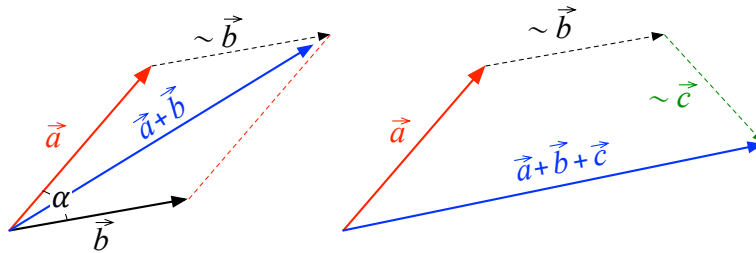


Figura 2.6: Interpretación gráfica de la suma de vectores.

En la construcción de la izquierda de la Fig. 2.6 puede verse que en este caso el módulo del vector suma se calcula aplicando el teorema del coseno:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2 a b \cos \alpha}$$

Recordemos algunas propiedades de la suma:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} \\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \\ |\vec{a} + \vec{b}| &\leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \end{aligned} \quad (2.4)$$

2. PRODUCTO ESCALAR (es un escalar)

El producto escalar de dos vectores \vec{a} y \vec{b} definidos en coordenadas cartesianas se calcula así:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

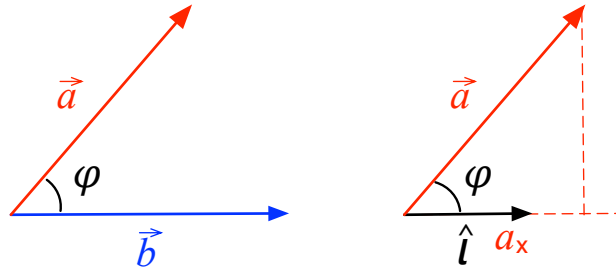


Figura 2.7: Interpretación geométrica del producto escalar.

En su interpretación geométrica (ver Fig. 2.7):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b \cos \varphi \quad (2.5)$$

Donde φ es el ángulo formado por \vec{a} y \vec{b} llevados a un origen común, y a y b los módulos de los vectores.

Nótese que $\vec{a} \cdot \vec{b}$ nos proporciona la proyección de \vec{a} sobre \vec{b} si \vec{b} es unitario (en general, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a \text{ proy}_a b = b \text{ proy}_b a$). Aprovechando esta propiedad, se plantea el siguiente ejercicio: dadas las expresiones vistas en las ecuaciones 2.2 de cambio de coordenadas cartesianas a polares, partiendo de las directas obtenga las inversas.

Pista: $\hat{\rho} \cdot \hat{i} = \cos \theta$; $\hat{\theta} \cdot \hat{i} = -\sin \theta$ ($\hat{i} = \cos \theta \hat{\rho} - \sin \theta \hat{\theta}$).

3. PRODUCTO VECTORIAL (es otro vector)

Dadas las componentes cartesianas de los vectores \vec{a} y \vec{b} , su producto vectorial \vec{c} en coordenadas cartesianas se expresa:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k} \quad (2.6)$$

En su interpretación geométrica :

$$|\vec{c}| = a b \sin \varphi = S$$

S es el área del paralelepípedo definido por los vectores \vec{a} y \vec{b} cuando se hace coincidir su punto de aplicación, y \vec{c} apunta en la dirección perpendicular al plano que forman \vec{a} y \vec{b} .

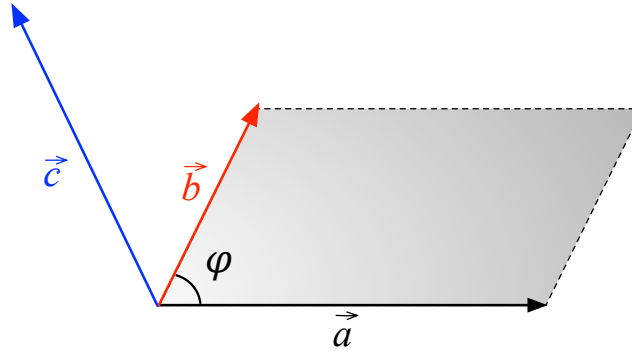
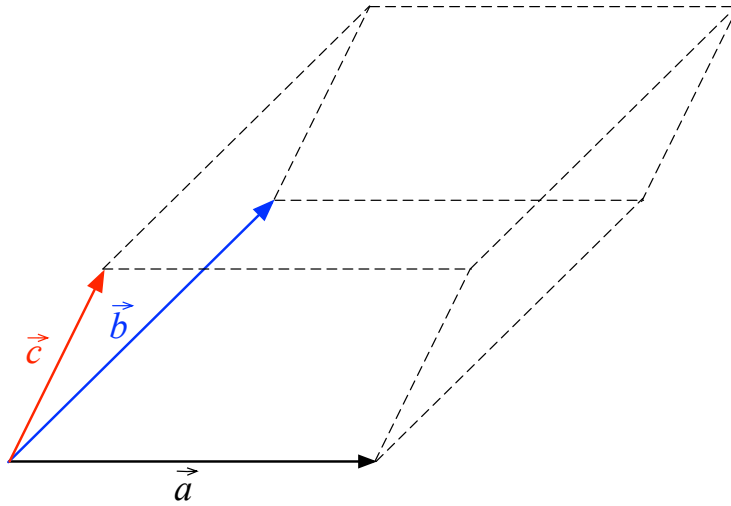


Figura 2.8: Producto vectorial.

Figura 2.9: Producto mixto: $V = \vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$.

4. PRODUCTO MIXTO (es un escalar)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (2.7)$$

Se propone como ejercicio obtener su expresión en función de las componentes cartesianas de los vectores, utilizando las definiciones de producto escalar y vectorial en componentes cartesianas.

En su interpretación geométrica, el producto mixto corresponde al volumen del paralelepípedo formado por \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} .

PROPIEDADES: Se muestran a continuación algunas propiedades de las operaciones con vectores que pueden resultar de utilidad:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \vec{b} \vec{c} \vec{a} = \vec{c} \vec{a} \vec{b} = -\vec{a} \vec{c} \vec{b} = -\vec{b} \vec{a} \vec{c} = -\vec{c} \vec{b} \vec{a}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c}) (\vec{a} \cdot \vec{d})$$

Capítulo 3

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS Y ANALÍTICAS

En este tercer capítulo de la sección introductoria se presenta una recopilación de algunas propiedades geométricas y analíticas que deben conocerse bien.

3.1. *Geometría básica*

En los temas siguientes utilizaremos con frecuencia la relación entre un ángulo y el arco que abarca.

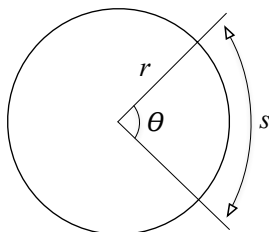


Figura 3.1: Circunferencia de radio r , ángulo central θ y arco abarcado s .

Definición del ángulo en radianes:

$$\theta = s/r \quad \text{radianes}$$

Es importante saber identificar la igualdad entre ángulos opuestos, alternos, o formados por segmentos perpendiculares, como muestra la figura.

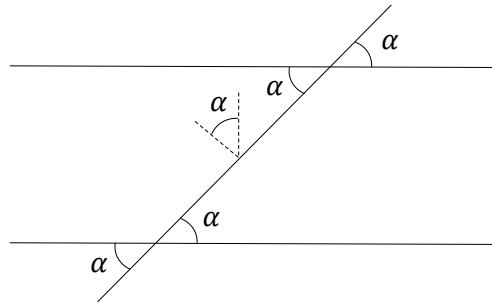


Figura 3.2: Igualdad entre diferentes ángulos definidos por secantes entre rectas paralelas o segmentos perpendiculares.

3.2. Trigonometría básica

Recordemos las definiciones básicas de la trigonometría y algunas relaciones que pueden ser útiles a lo largo de la asignatura.

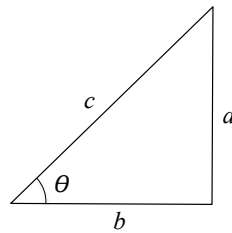


Figura 3.3: Triángulo rectángulo: notación utilizada en las definiciones de las razones trigonométricas.

Definiciones:

$$\text{sen } \theta = a/c$$

$$\text{cos } \theta = b/c$$

$$\text{tan } \theta = a/b$$

Relación fundamental de la trigonometría:

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$$

Otras relaciones trigonométricas de utilidad:

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{A \pm B}{2} \cos \frac{A \mp B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = 2 \operatorname{sen} \frac{A + B}{2} \operatorname{sen} \frac{B - A}{2}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

Circunferencia trigonométrica: Es una construcción muy útil, que permite visualizar de modo sencillo la relación entre las funciones trigonométricas de ángulos que difieren en ciertos valores notables, como $\pi/2, \pi, \dots$. Por ejemplo:

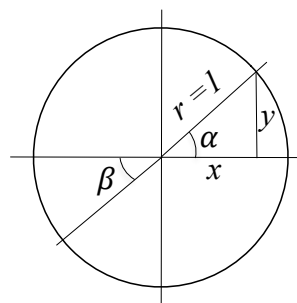


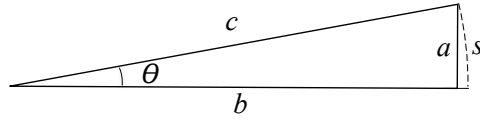
Figura 3.4: Circunferencia trigonométrica (radio unidad).

$$y = \operatorname{sen} \alpha \quad ; \quad x = \cos \alpha$$

$$\text{Si } \beta = \pi + \alpha: \quad \operatorname{sen} \beta = -\operatorname{sen} \alpha, \quad \cos \beta = -\cos \alpha.$$

Aproximaciones útiles:

Para finalizar esta parte, mostraremos una propiedad que nos resultará útil más adelante, y se refiere al caso límite de ángulos muy pequeños. Como

Figura 3.5: Aproximación $a \approx s$.

se deduce de la figura, en ese caso podemos aproximar con gran precisión los valores de algunas funciones trigonométricas mediante expresiones muy sencillas.

De manera exacta, tenemos $\theta = s/c$

Pero además, si el ángulo θ es muy pequeño, $s \approx a$ y entonces:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= a/c \approx s/c = \theta \text{ rad} \\ \tan \theta &= a/b \approx s/b \approx s/c = \theta \text{ rad} \\ \cos \theta &= b/c \approx 1 (\text{en una primera aproximación}); \cos \theta \approx 1 - \theta^2/2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.3. Cálculo diferencial e integral

En muchos casos, las leyes que expresan relaciones entre magnitudes físicas involucran expresiones diferenciales (derivadas) o integrales. En este apartado recordaremos algunas definiciones básicas para funciones de una variable. Nos apoyaremos en la figura 3.6, que recoge las ideas esenciales. Derivar una función es una operación que nos proporciona información local, en concreto nos dice cómo cambia la función en un punto determinado (si aumenta o disminuye al realizar pequeños desplazamientos en su variable). Por el contrario, la integración es una operación que proporciona información global del comportamiento de la función sobre una zona de su dominio. En el caso de una única variable, esto corresponde al área bajo la gráfica entre dos límites fijados. En términos más precisos, esto se expresa como sigue.

1. **Derivada de una función.** En la figura 3.6 se ilustra el concepto de derivada de la función $f(x)$ en el punto x_0 . Nótese que indicamos que al incrementar la variable en Δx , el valor de la función se ve incrementado en Δf . El cociente entre dichos incrementos, que es lo que vamos a

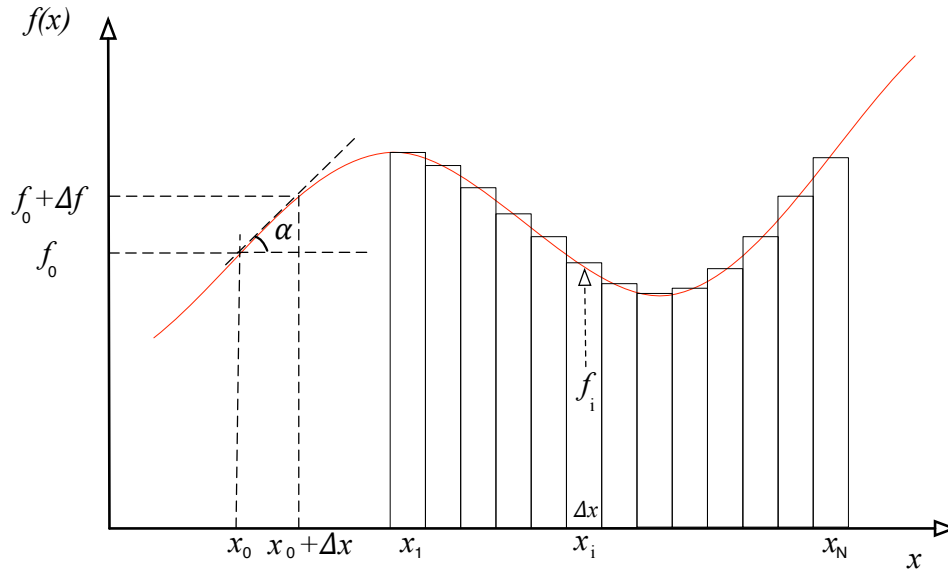


Figura 3.6: Aproximación a los conceptos de derivada e integral.

entender como derivada, puede interpretarse de modo geométrico. Si los incrementos son muy pequeños ($\Delta x \rightarrow 0$, en cuyo caso lo denominaremos diferencial: dx), la función se confunde con su tangente en ese punto y el cociente de incrementos corresponde a la tangente del ángulo α :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \tan \alpha$$

Así pues, la expresión df/dx es algo más que una notación; nos va a permitir obtener $df = f'(x) dx$. Esto justifica manipulaciones habituales, que realizaremos a lo largo del texto, del tipo:

$$\frac{dv}{dt} = -k v \Rightarrow dv = -k v dt \quad (3.2)$$

2. **Integral de una función.** El concepto de integral definida de una función también admite una interpretación geométrica sencilla (ver Fig. 3.6). En el caso que se muestra, representamos la suma incremental de los elementos de área rectangulares $f_i \Delta x_i$, que obviamente aproximarán el área bajo la gráfica en el caso límite ($\Delta x_i \rightarrow 0$). Esto se indica:

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i f(x_i) \Delta x_i$$

El concepto de *integral* de la función no debe confundirse con el de *primitiva* de la función. Éste último hace referencia al modo que habitualmente

tenemos de evaluar la integral de una función. Así pues, si definimos $F(x)$ (primitiva de $f(x)$) como aquella que cumple $F'(x) = f(x)$, se va a verificar

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx = F(x_N) - F(x_1)$$

Esto puede demostrarlo el lector aplicando la relación $df = f'(x) dx$ de forma reiterada en el sumatorio anterior.

Como es bien sabido, encontrar la primitiva de una función puede resultar muy complicado fuera de los casos elementales. Existen técnicas que nos pueden ayudar como son los cambios de variable, integración por partes, etc. No obstante, insistiendo una vez más en que una cosa es integrar una función y otra hallar su primitiva, debemos indicar que en muchas ocasiones se aplican otros métodos, por ejemplo de tipo computacional, que pueden resultar muy convenientes.

Continuando con la expresión 3.2, como $dv = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \Delta v$ podemos escribir:

$$\frac{dv}{v} = -kdt; \quad \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = \int_0^t -kdt$$

siendo $v(t)$ la velocidad en el instante t , y v_0 la velocidad en el instante inicial. Resolviendo las dos integrales -directas en este caso- se obtiene la función $v(t)$

$$\ln v(t) - \ln v_0 = \ln \frac{v(t)}{v_0} = -kt \rightarrow v(t) = v_0 e^{-kt}$$

3.4. Gradiente de una función escalar

Con cierta frecuencia, en Física se utilizan los conceptos de derivada direccional y de gradiente, cuyo significado es fácil de comprender en términos de la definición de derivada tratada en el punto anterior. La idea fundamental, que generaliza el concepto de derivada de una función, es la siguiente: si la función que nos interesa depende de más de una variable (por ejemplo $f(x, y)$)

los incrementos de ésta tendrán relación con los valores de Δx y Δy y con un nuevo aspecto, la tasa de variación de ambos ($\Delta y/\Delta x$). Puesto que este cociente define un ángulo en el plano XY que es donde la función toma valores, hablaremos de derivada direccional. En términos sencillos, la variación de la función depende no sólo de cuánto nos movamos, sino de hacia dónde nos movamos. Veámoslo con un ejemplo.

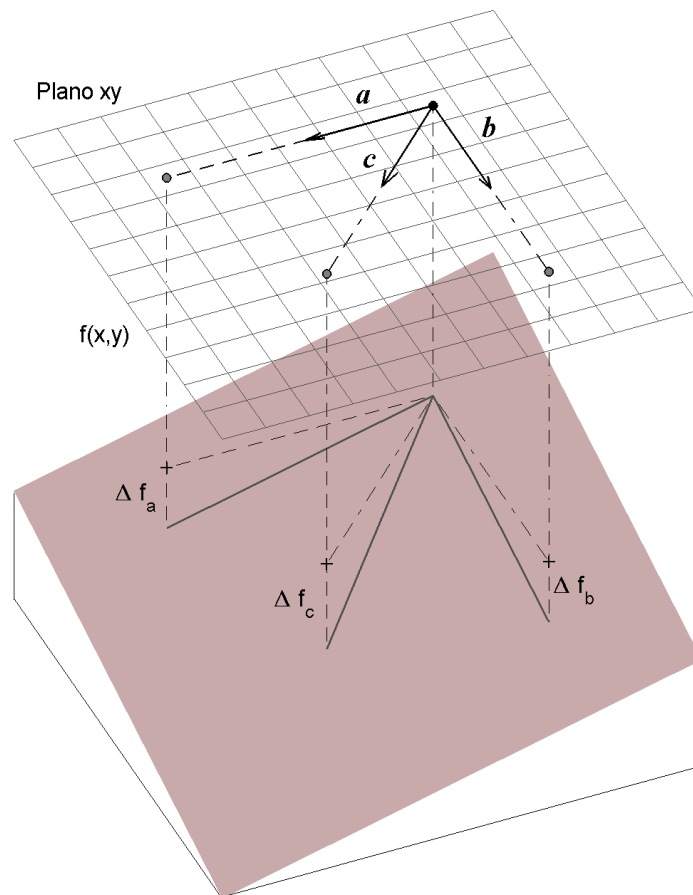


Figura 3.7: Aproximación al concepto de derivada direccional y gradiente.

Consideraremos la función que representa la profundidad de una piscina medida desde la superficie del agua. El fondo está inclinado, de modo que

puede expresarse mediante la relación $f(x, y) = p_0 + p_1x + p_2y$ siendo p_0, p_1 y p_2 constantes positivas. Evidentemente, tal como muestra la figura, si nos colocamos en un punto determinado de coordenadas (x, y) las variaciones de profundidad dependen de la dirección en la que nos movamos. Hemos representado tres casos, dados por variaciones a lo largo de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{b}}$ y $\hat{\mathbf{c}}$ sobre el plano XY , y está claro que para desplazamientos de la misma longitud, la variación en profundidad es mayor a lo largo de la dirección de $\hat{\mathbf{c}}$. Matemáticamente lo expresaremos del siguiente modo.

1. Derivada direccional

Se define la **derivada direccional** dada por el desplazamiento a lo largo de la dirección definida por el vector $\hat{\mathbf{c}}$ como:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + \epsilon \hat{\mathbf{c}}) - f(\vec{r})}{\epsilon}$$

donde $\vec{r} \equiv (x, y)$ y $\epsilon \equiv \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

En el caso de que el vector de dirección coincida con alguno de los de la base cartesiana, hablaremos de derivada parcial respecto a la coordenada correspondiente. Así, en el ejemplo que mostramos ($\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{j}}$), y la derivada parcial respecto a x será:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + \epsilon \hat{\mathbf{i}}) - f(\vec{r})}{\epsilon}$$

De forma análoga se puede escribir la derivada parcial respecto a y .

2. Gradiente

En el apartado anterior, al tratar el concepto de derivada de una función $f(x)$, se ha visto que es posible escribir $df = f'(x) dx$.

Planteemos ahora la cuestión en el caso de una función que depende de varias variables; se pretende averiguar la relación entre la variación df y un desplazamiento $d\vec{r}$ (que puede llevar cualquier dirección). Escribamos por el momento, por analogía con la expresión anterior, $df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$, siendo $d\vec{r}$ un desplazamiento arbitrario (dx, dy) y $\vec{\nabla} f$ un vector cuyo significado vamos a discutir, apoyándonos en la figura 3.8.

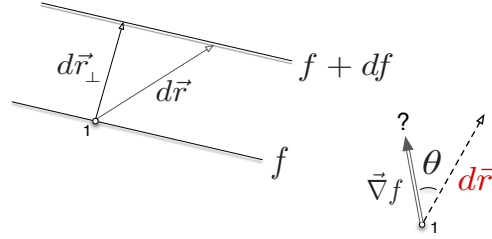


Figura 3.8: Aproximación al concepto de gradiente.

En la figura se han representado dos líneas en el plano XY en las que el valor de la función es constante (f y $f + df$, respectivamente). Tomemos como referencia un punto cualquiera 1 (sobre la línea f), en el que $\vec{\nabla} f$ tendrá un valor y llevará una dirección determinada. Es evidente que partiendo del punto 1 hay una infinidad de desplazamientos $d\vec{r}$ que permiten alcanzar $f + df$, y que el más corto, $d\vec{r}_\perp$, proporciona la mayor tasa de variación de la función con respecto al desplazamiento. Volviendo a la expresión de df ,

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \nabla f \, dr \cos\theta \quad ; \quad \frac{df}{dr} = \nabla f \cos\theta$$

donde df/dr representa la derivada direccional de f a lo largo de la dirección genérica de $d\vec{r}$ y θ es el ángulo entre $\vec{\nabla} f$ y dicha dirección. Evidentemente el máximo valor se dará para $\cos\theta = 1$. Como ya se ha dicho, la derivada direccional es máxima a lo largo de $d\vec{r}_\perp$, de donde resulta que el vector que hemos introducido $\vec{\nabla} f$ debe llevar la dirección de la variación máxima ($\vec{\nabla} f \parallel d\vec{r}_\perp$), y que el módulo de $\vec{\nabla} f$ coincide con el valor de la derivada direccional a lo largo de esa dirección. A $\vec{\nabla} f$ se le denomina **gradiente** de la función f .

En la práctica, y para una función de dos variables, se puede calcular en coordenadas cartesianas mediante la expresión:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j}$$

Se propone como ejercicio obtener el vector gradiente para el ejemplo dado en la figura 3.7, y evaluar los incrementos que sufre la función f , es decir df_a, df_b, df_c para variaciones a lo largo de las direcciones indicadas. (Sol.: $\vec{\nabla} f = (p_1, p_2)$ sobre el plano XY)

Aprovecharemos el ejemplo utilizado para poner de manifiesto el interés de estos conceptos en la Física. La función $f(x, y)$ puede representar la energía potencial gravitatoria de una partícula puntual sobre la superficie

mencionada (bastaría multiplicar por su masa, por la aceleración de la gravedad, y cambiar el signo $U(x, y) = -m g f(x, y)$). Si dicha partícula se apoyase sin fricción sobre la superficie y la depositáramos en un punto de coordenadas (x, y) se deslizaría hacia el fondo a lo largo de la línea definida por la dirección de $\vec{\nabla} f$ (trayectoria central en el dibujo), o lo que es lo mismo de $-\vec{\nabla} U$. Diremos, por tanto, que las líneas de fuerza vienen dadas por la dirección del gradiente de la energía potencial (cambiado de signo).

Parte II

FUNDAMENTOS DE MECÁNICA

INTRODUCCIÓN

La parte II de este manual está dedicada a los fundamentos de Mecánica Clásica (o newtoniana) de una partícula. Se van a manejar conceptos fundamentales, con muchos de los cuales los alumnos están ya familiarizados. No obstante, es imprescindible estudiar a fondo esta parte, ya que va a sentar las bases de buena parte de lo que se estudie posteriormente.

La mecánica es una teoría del movimiento; así, algunas de las preguntas que van a surgir - y a las que deberemos dar respuesta- son: ¿respecto a quién o qué se mueve una partícula? ¿por qué cambia su movimiento? ¿cuáles son las causas de ese cambio?

La mecánica introduce claramente el carácter direccional de algunas de las magnitudes físicas involucradas en el análisis del movimiento de un cuerpo (por ejemplo su posición, su velocidad, la fuerza ejercida), lo que implica la necesidad de establecer un sistema de referencia, siendo necesario representar de forma correcta dichas magnitudes.

Se va a comenzar con un capítulo de cinemática, en el que se verá cómo describir el movimiento de una partícula -en función del tiempo- mediante las magnitudes posición, velocidad y aceleración, en general en varias dimensiones.

Se continuará con los capítulos de dinámica, uno de cuyos sus focos será el análisis de las fuerzas como responsables del cambio del estado de movimiento de una partícula. Será igualmente fundamental el estudio de qué magnitudes se conservan, mediante el análisis de los principios de conservación de la energía y del momento.

Capítulo 4

CINEMÁTICA DE UNA PARTÍCULA

La Cinemática es la parte de la Mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos. La pregunta fundamental a la que deberá dar respuesta lo estudiado en este tema será: ¿dónde está la partícula en cualquier instante de tiempo?

En Cinemática sólo se trabaja con dos magnitudes fundamentales: longitud y tiempo ([L] y [T]).

4.1. *Vectores posición, velocidad y aceleración*

En mecánica clásica no relativista, el tiempo es una magnitud absoluta: el intervalo Δt entre dos sucesos dados es el mismo para todos los sistemas de referencia. Así pues, en lo que sigue hablaremos de una única variable tiempo (t) sea cual sea el sistema de referencia.

La magnitud que contiene toda la información sobre la posición de la partícula es su **vector de posición** $\vec{r}(t)$. El vector $\vec{r}(t)$ va cambiando cuando se mueve la partícula. La curva que describe el extremo de $\vec{r}(t)$ es la **trayectoria de la partícula** (Fig. 4.1).

Ejemplo: Si $\vec{r}(t) = t^2 \hat{i} + t \hat{j}$, ¿qué trayectoria describe la partícula?

Solución: Las ecuaciones paramétricas del movimiento son $x(t) = t^2$, $y(t) = t$. Si despejamos t en la segunda ecuación y lo sustituimos en la primera, se obtiene: $x = y^2$, que nos informa de que la trayectoria que describe la partícula es una parábola.

Nótese que la ecuación de la trayectoria no contiene información temporal, al despejar la hemos “ocultado”.

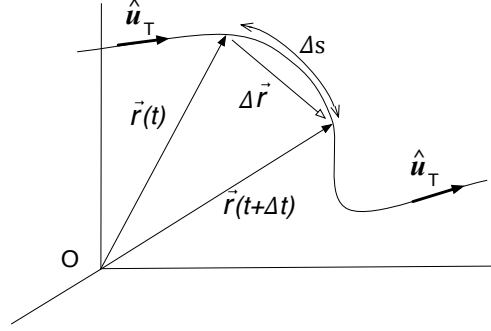


Figura 4.1: Vectores de posición y trayectoria.

Además de saber dónde está la partícula en todo momento, suele interesar conocer a qué ritmo ha llegado hasta allí. La magnitud que nos proporciona dicha información es la **velocidad**.

Cuando se habla de velocidad, a veces nos referimos a la **velocidad media**. En general:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_f) - \vec{r}(t_0)}{t_f - t_0}$$

Pero esta magnitud no informa sobre los detalles del movimiento: unos tramos han podido hacerse más rápidamente que otros, o incluso la partícula ha podido detenerse en el trayecto. Para obtener información del detalle instantáneo del movimiento se introduce la **velocidad instantánea**:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Observad que \vec{v} **siempre es tangente a la trayectoria**. Si llamamos \hat{u}_T al vector unitario tangente a la trayectoria en cada punto de la misma:

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_T = v \hat{u}_T \quad (4.1)$$

¿Cómo la calculamos? En coordenadas cartesianas, el vector velocidad:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} \\ v_x &= \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

Por último, la velocidad de la partícula también puede cambiar. La información de esos cambios nos la proporciona el **vector aceleración**:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \quad (4.2)$$

En coordenadas cartesianas:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k}$$

Obtener la velocidad y la aceleración a partir de $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ no plantea mayor dificultad, sólo hay que derivar las expresiones. Sin embargo, para calcular $\vec{v}(t)$ y $\vec{r}(t)$ a partir de $\vec{a}(t)$ y $\vec{v}(t)$, respectivamente, debemos integrar y además necesitamos conocer algún dato del movimiento (las condiciones iniciales, $\vec{r}(0)$ y $\vec{v}(0)$ o, alternativamente, los valores de \vec{r} y \vec{v} en un instante t dado).

4.2. Ejemplos de movimientos. Sistemas de referencia.

Vamos a ver varios ejemplos de cómo se puede estudiar el movimiento de una partícula mediante el manejo de las magnitudes cinemáticas.

1. Movimiento con aceleración constante: $\vec{a}=\text{constante}$.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v} = \int \vec{a} dt = \vec{a} \int dt$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = \vec{a} t$$

Cuando $\vec{v}(0)$ lleva la misma dirección que \vec{a} , se tiene un **movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, en el que la velocidad no cambia de dirección**.

En cuanto a la posición:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(0) = \int \vec{v} dt$$

$$\vec{r}(t) - \vec{r}(0) = \vec{v}(0) t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

2. Movimiento con aceleración no constante: $\vec{a}(t)$

Supongamos que la aceleración de la partícula (en la dirección x en este ejemplo) aumenta proporcionalmente con el tiempo: $\vec{a}(t) = 3t\hat{i}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v} = \int \vec{a} \, dt = \int 3t \hat{i} \, dt$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(0) = \frac{3t^2}{2} \hat{i}$$

Se propone como ejercicio obtener la expresión de la posición en cualquier instante de tiempo. Es importante tener presente que si no se conocen las condiciones iniciales nos queda una cierta indeterminación en la solución.

3. Descripción del movimiento usando coordenadas polares: movimiento circular.

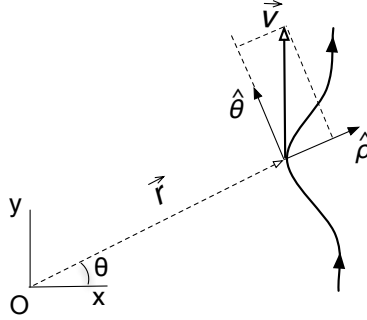


Figura 4.2: Vectores unitarios de las coordenadas polares en un punto de la trayectoria de vector posición \vec{r} .

Conviene recordar que la base de vectores ortogonales en coordenadas polares se define para cada punto del espacio en función de la ubicación del origen de coordenadas, de tal forma que se cumple la relación $\vec{r} = r \hat{\rho}$ (ver Fig. 4.2). A partir de ella se calcula la velocidad, derivando respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (r \hat{\rho}) = \frac{dr}{dt} \hat{\rho} + r \frac{d\hat{\rho}}{dt} \quad (4.3)$$

Para hacer esta derivada, hay que tener en cuenta la relación entre las bases $\hat{\rho}$, $\hat{\theta}$ e \hat{i} , \hat{j} .

$$\hat{\rho} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$$

Así,

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{i} + \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{j} \quad (4.4)$$

Sustituyendo:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \hat{\rho} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \quad (4.5)$$

Se propone como ejercicio comprobar que, una vez realizadas las correspondientes derivadas y reagrupando términos, las componentes de la aceleración son:

$$\vec{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2 \right) \hat{\rho} + \left(2\omega \frac{dr}{dt} + r \frac{d\omega}{dt} \right) \hat{\theta} \quad (4.6)$$

donde $\omega = d\theta / dt$ es lo que conocemos como **velocidad angular**.

Caso particular: movimiento circular

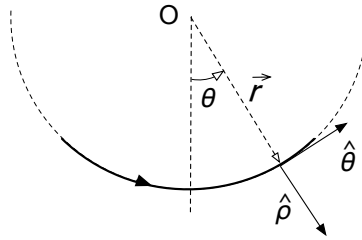


Figura 4.3: Movimiento circular: notación de las variables utilizadas.

En una trayectoria circular, la distancia de cualquier punto al centro es constante. La ubicación más lógica para el origen de coordenadas polares es el centro de la circunferencia, porque en este caso particular y con esta elección del origen de coordenadas, las expresiones vistas para el movimiento en coordenadas polares se simplifican considerablemente:

$$|\vec{r}| = r = \text{constante}$$

$$\vec{v} = r \omega \hat{\theta} \Rightarrow \omega = v/r$$

La velocidad, siempre tangente a la trayectoria, en el movimiento circular solo tiene componente en la dirección del vector unitario $\hat{\theta}$. En cuanto a la aceleración:

$$\vec{a} = r \frac{d\omega}{dt} \hat{\theta} - r \omega^2 \hat{\rho} = \frac{dv}{dt} \hat{\theta} - \frac{v^2}{r} \hat{\rho} \quad (4.7)$$

Así, el uso de coordenadas polares permite separar la aceleración en dos componentes con significado físico: una componente que refleja los cambios en el módulo de \vec{v} (dirección de $\hat{\theta}$) y otra que informa sobre los

cambios en la dirección de la velocidad (aceleración centrípeta, en la dirección de $\hat{\rho}$).

Coordenadas intrínsecas. Componentes intrínsecas de la aceleración.

Para un movimiento plano general, pueden extenderse los resultados anteriores del modo siguiente:

En geometría diferencial se demuestra que para una “curva regular” cualquiera existe en cada punto una circunferencia que tiene con ésta lo que se denomina un contacto de segundo orden. Dejando al margen detalles técnicos, esto significa que hay un “buen solapamiento” a nivel local entre la curva y dicha circunferencia. Ésta recibe el nombre de **circunferencia osculatriz**, y al centro y radio de dicha circunferencia se les llama respectivamente **centro de curvatura** y **radio de curvatura**.

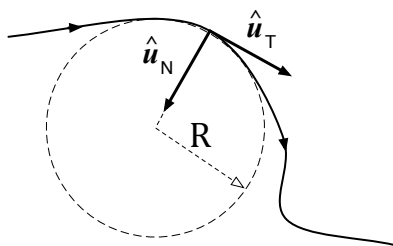


Figura 4.4: Movimiento en coordenadas intrínsecas. Se muestra la circunferencia osculatriz

Este concepto permite definir para cada punto de un movimiento plano general un nuevo sistema de referencia, el **sistema de coordenadas intrínsecas**, que tiene como origen el centro de curvatura y como base ortonormal la que se muestra en la figura 4.4: un vector perpendicular a la trayectoria en el punto considerado dirigido hacia el centro de la circunferencia (vector normal \hat{u}_N) y un vector tangente a la trayectoria y con el sentido dado por el sentido del movimiento (vector tangencial \hat{u}_T).

Este nuevo sistema de coordenadas nos recuerda el de coordenadas polares utilizado para el movimiento circular, pero los vectores unitarios no coinciden: en la dirección radial $\hat{\rho}$ y \hat{u}_N tienen sentidos opuestos, y en la tangencial $\hat{\theta}$ y \hat{u}_T serán iguales u opuestos dependiendo del sentido del movimiento.

Adaptando las expresiones vistas para el movimiento circular al sistema de coordenadas intrínsecas (ver Fig. 4.4) y sustituyendo r por R (radio

de curvatura) se obtiene:

$$\vec{a} = R \omega^2 \hat{\mathbf{u}}_N + R \frac{d\omega}{dt} \hat{\mathbf{u}}_T$$
$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \hat{\mathbf{u}}_N + \frac{dv}{dt} \hat{\mathbf{u}}_T$$

Las componentes de la aceleración en el sistema de coordenadas intrínsecas reciben el nombre de **aceleración normal** (asociada al cambio de dirección de \vec{v}) y **aceleración tangencial** (asociada a los cambios del módulo de la velocidad).

Capítulo 5

DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA: FUERZAS Y MOMENTOS

La Mecánica Clásica o newtoniana es una teoría del movimiento ¹ que se basa en los conceptos de masa y fuerza, y los relaciona con las magnitudes cinemáticas: posición, velocidad y aceleración.

En este capítulo introduciremos la dinámica newtoniana aplicándola al caso más simple: una partícula, entendiendo como tal un ente que carece de estructura interna (se considera dicha estructura irrelevante para el estudio de su movimiento) y cuya posición puede identificarse con un “punto”. Esto es, estudiaremos la dinámica de cualquier objeto cuyas dimensiones sean irrelevantes para el estudio del problema concreto que nos ocupe.

5.1. *Leyes de Newton*

Son las leyes fundamentales de la Mecánica Clásica. Éste es el enunciado de las leyes proporcionado por su autor, Isaac Newton, en su obra *Principios Matemáticos de Filosofía Natural y su Sistema del Mundo*, publicada en 1687:

- **LEY PRIMERA:** *Todos los cuerpos perseveran en su estado de reposo o movimiento uniforme en línea recta, salvo que se vean forzados a cambiar ese estado por fuerzas impresas.*

¹No hay que olvidar por tanto que nuestro objetivo es averiguar dónde está la partícula en cualquier instante de tiempo.

- **LEY SEGUNDA:** *El cambio del movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y se hace en la dirección de la línea recta en que se imprime esa fuerza.*
- **LEY TERCERA:** *Para toda acción hay siempre una reacción opuesta e igual. Las acciones recíprocas de dos cuerpos entre sí son siempre iguales y dirigidas hacia partes opuestas.*

Hay que tener muy presente el carácter axiomático de estas leyes que a continuación vamos a analizar en detalle, pensando fundamentalmente en su posterior aplicación.

1. Primera ley: sistemas de referencia inerciales.

La primera ley de Newton también se conoce como **ley de la inercia**. En un castellano más actual, nos dice que todo cuerpo continúa en su estado de reposo o movimiento con velocidad constante (rectilíneo y uniforme) salvo que actúe sobre él una fuerza neta.

Los cuerpos se “oponen” a cambiar su estado de movimiento (tienen una ‘inercia’).

Es importante tener presente que esta ley no distingue entre un cuerpo en reposo y otro que se mueve a velocidad constante: a efectos de la primera ley de Newton, todos los sistemas con movimiento relativo a velocidad constante son indistinguibles, y la validez de esta ley se reduce a ellos. Estos sistemas reciben el nombre de **sistemas inerciales**.

En la figura 5.1 vemos un ejemplo de sistema no inercial: el objeto, apoyado sobre una mesa completamente lisa, adquiere una aceleración $-\vec{A}$ para un observador en el interior del camión y que se mueve por tanto con O' a pesar de que **no** actúa ninguna fuerza sobre él.

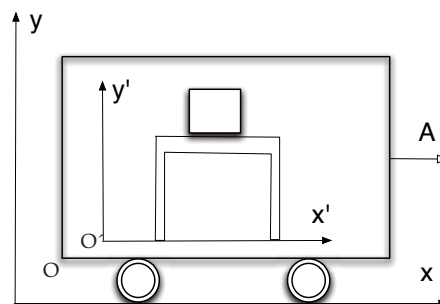


Figura 5.1: La primera ley de Newton no se cumple para un observador situado dentro del camión que está acelerando.

2. Segunda ley: ecuación de movimiento. Fuerza, masa y peso.

En la formulación de las leyes de Newton juegan un papel fundamental no solo las magnitudes vistas en cinemática sino un nuevo concepto que introduciremos ahora: la masa inercial.

“La fuerza ínsita de la materia es un poder de resistencia de todos los cuerpos, en cuya virtud perseveran para mantener su estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta”.

Lo que en su formulación original Newton denominaba “fuerza ínsita”, es la **masa inercial** o **masa inerte** (m_i). Es una magnitud que proporciona una medida de la oposición de un cuerpo al cambio de su estado de movimiento. La expresión matemática de la segunda ley de Newton es:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}) \quad (5.1)$$

Antes de continuar con el estudio de la segunda ley conviene profundizar en el concepto de masa. Además de la masa inercial, cuyo sentido acaba de explicarse, no hay que olvidar que la fuerza de atracción de la Tierra sobre un cuerpo en puntos próximos a la superficie se expresa en términos de la **masa gravitatoria** (m_g), que se define como una propiedad que hace que los cuerpos experimenten la atracción gravitatoria ² (un objeto “pesa” porque tiene masa gravitatoria).

$$\vec{P} = m_g \vec{g}$$

Experimentos cuidadosos demuestran que $m_i = m_g$, con lo que en adelante suprimiremos los subíndices y la denotaremos simplemente *masa*.

Una vez aclarado este concepto, retomemos la ecuación 5.1. En los casos en que la masa no varía con el tiempo, la segunda ley puede resumirse así: la aceleración de un objeto es inversamente proporcional a su masa y directamente proporcional a la fuerza que actúa sobre él.

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (5.2)$$

Así, si conocemos en todo momento \vec{F} podremos obtener la aceleración \vec{a} , y por tanto caracterizar por completo el movimiento (conocidas las condiciones iniciales). En este sentido puede decirse que la segunda ley de Newton nos proporciona la **ecuación de movimiento** de la partícula.

²Aunque fuera del ámbito de la Física solemos hablar de masa y peso indistintamente (se dice “un peso de 10 kg”) es importante recordar que la masa es una característica intrínseca del cuerpo y el peso depende de dónde esté el cuerpo. Así, el peso de un cuerpo de masa m en la Luna es seis veces menor que en la Tierra, pero haría falta aplicarle la misma fuerza que en la Tierra para proporcionarle una misma aceleración.

Cuando actúen varias fuerzas sobre un cuerpo habrá que calcular la **resultante de las fuerzas**, entendida como la suma vectorial de todas las que actúen sobre él. Si llamamos \vec{F}_T a la fuerza resultante, esto se indica así:

$$\vec{F}_T = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

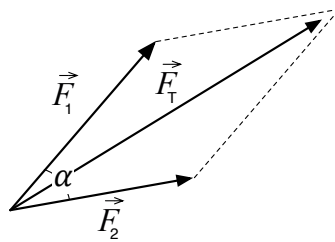


Figura 5.2: Obtención de la resultante de varias fuerzas.

En la figura 5.2 indicamos cómo obtener la resultante con el método gráfico que permite sumar las fuerzas de dos en dos (ver el repaso de la suma vectorial de la sección 2.3). Aplicando el teorema del coseno:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow F_T^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos \alpha$$

Si usamos coordenadas cartesianas podemos obtener el mismo resultado sumando componentes:

$$\left. \begin{aligned} F_{Tx} &= \sum_{i=1}^N F_{ix} \\ F_{Ty} &= \sum_{i=1}^N F_{iy} \end{aligned} \right\} F_T = \sqrt{F_{Tx}^2 + F_{Ty}^2}$$

En el caso particular de que $\vec{a}=0$, se dice que la partícula está en equilibrio, siendo la ecuación correspondiente:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$$

Sobre esto volveremos en el apartado 5.3

3. Tercera ley: acción y reacción. Ejemplos.

Las fuerzas entre distintos cuerpos siempre aparecen por pares: si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre un cuerpo B, el cuerpo B a su vez ejerce una fuerza sobre el A igual y de sentido opuesto: $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$.

En el apartado 5.3 insistiremos en la importancia de la tercera ley. Por el momento simplemente veremos un ejemplo sencillo, ilustrado en la figura 5.3, identificando en él las parejas de fuerzas de acción y reacción a las que se refiere la tercera ley de Newton.

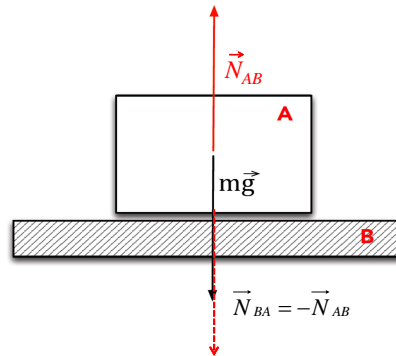


Figura 5.3: Fuerza perpendicular a la superficie, ejercida por B sobre el cuerpo A, \vec{N}_{AB} . La correspondiente reacción a la acción \vec{N}_{AB} es la fuerza \vec{N}_{BA} ejercida por A sobre B.

Cuando apoyamos un cuerpo A sobre una superficie rígida B, sobre el cuerpo se ejerce una fuerza perpendicular a la superficie. Es la denominada fuerza normal, ejercida por la superficie sobre el cuerpo: \vec{N}_{AB} (ver Fig. 5.3). La correspondiente “pareja” sería la fuerza \vec{N}_{BA} ejercida por el cuerpo sobre la superficie, cumpliéndose que: $\vec{N}_{BA} = -\vec{N}_{AB}$. Al analizar las fuerzas sobre un determinado cuerpo prestad atención al hecho de que este tipo de fuerzas no se equilibran entre sí, por la sencilla razón de que cada una actúa sobre un cuerpo distinto.

4. Rango de aplicación de las leyes de Newton. Sistemas de referencia no inerciales. LECTURA OPCIONAL

Como se ha mostrado en el ejemplo de la Figura 5.1, estrictamente las leyes de Newton sólo son válidas en sistemas de referencia **inerciales**. No obstante, en sistemas no inerciales (acelerados) podemos hacer una formulación en que las leyes de Newton sean válidas mediante la introducción de ‘pseudofuerzas’ que dependen de la aceleración del sistema.

Nos centraremos en un caso particular sencillo: sistemas con aceleración traslacional (a modo del ejemplo del camión antes citado).

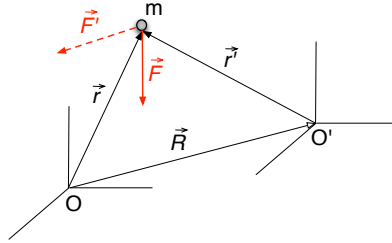


Figura 5.4: Sistemas de referencia inercial (O) y no inercial (O').

En XYZ: $\vec{F} = m \vec{a}$.

Ahora bien, si la posición de la partícula en los sistemas O y O' viene dada por \vec{r} y \vec{r}' respectivamente, se puede escribir $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \Rightarrow \vec{a} = \vec{A} + \vec{a}'$.

Entonces:

$$\vec{F} = m \vec{A} + m \vec{a}' \Rightarrow \vec{F} - m \vec{A} = m \vec{a}'$$

Introduciendo la fuerza ficticia (también denominada fuerza de inercia) $\vec{F}' = -m \vec{A}$ se seguirá cumpliendo la segunda ley de Newton en el sistema X'Y'Z':

$$\vec{F} + \vec{F}' = m \vec{a}'$$

5.2. Tipos de fuerzas: aplicadas y de ligadura

Puede hablarse de distintos tipos de fuerzas exteriores actuando sobre un sistema atendiendo a que su origen sea activo o pasivo:

- **Fuerzas aplicadas** (\vec{F}): son aquellas cuyo valor no depende de otras fuerzas que puedan actuar o no sobre el sistema.
- **Fuerzas de ligadura o de reacción** (\vec{R}): son las que tienen su origen en la respuesta de otros elementos que imponen limitaciones en las posiciones que puede ocupar el sistema que nos ocupa y en el movimiento que puede realizar (Fig.5.5). Veremos que estas fuerzas son fundamentales a la hora de plantear y resolver problemas de estática.

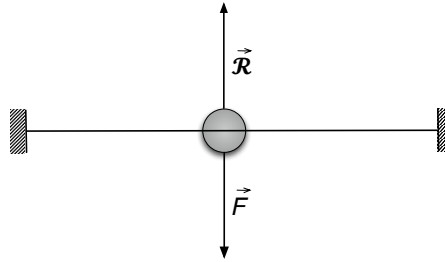


Figura 5.5: Fuerza de ligadura \vec{R} sobre una partícula insertada en una varilla rígida y sobre la que actúa una fuerza aplicada \vec{F} .

Conocer la expresión de las ligaduras ‘a priori’ no es posible. Para determinarlas hemos de conocer el resto de fuerzas que actúan sobre el sistema.

Veamos algunos ejemplos:

■ Fuerza de **reacción o de ligadura normal**:

Supongamos una partícula de masa m apoyada sobre el suelo. Sobre m actúan su peso $\vec{P} = M \vec{g}$ y la fuerza \vec{N}_s que ejerce el suelo sobre m , conocida como **fuerza de reacción normal** o simplemente **normal**. En la situación de la figura 5.6 a), sin ninguna otra fuerza actuando sobre la partícula, \vec{N}_s compensa \vec{P} , cumpliéndose: $\vec{N} = -M \vec{g}$. Como veremos en el apartado siguiente, esta ecuación corresponde a la condición de equilibrio de la partícula.

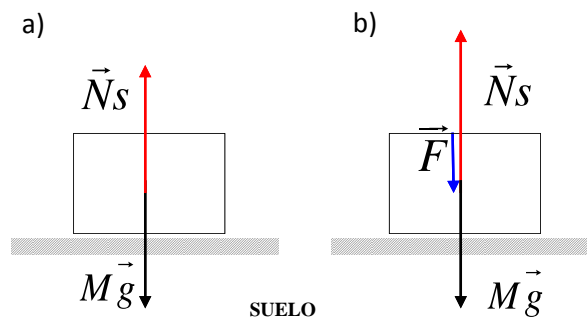


Figura 5.6: Fuerza normal ejercida por la superficie sobre el cuerpo.

Si ahora aplicamos sobre la misma partícula una fuerza \vec{F} vertical y

hacia abajo y la partícula sigue en reposo sin hundirse (como en la figura 5.6 b)), \vec{N}_s deberá aumentar para compensar tanto \vec{P} como \vec{F} : $\vec{N}_s \equiv -M \vec{g} - \vec{F}$

■ **Tensión** (cuerdas y cables):

Supongamos una cuerda inextensible (no se deforma), con un extremo fijo, que se mantiene tensa al aplicar una fuerza \vec{F} (ver Fig. 5.7) en el otro extremo.

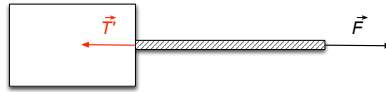


Figura 5.7: Cuerda tensa bajo la acción de una fuerza.

Si aplicamos la segunda ley de Newton, considerando que la cuerda tiene una masa m_c podremos calcular la tensión de la cuerda:

$$\vec{F} + \vec{T}' = m_c \vec{a}. \text{ Si } m_c \approx 0 \Rightarrow \vec{T}' = -\vec{F}$$

Si consideramos un segmento de esa misma cuerda y lo aislamos del resto “idealmente”, volviendo a aplicar la segunda ley de Newton:



Figura 5.8: Fuerzas que actúan sobre un segmento de cuerda.

Si la masa del segmento $\Delta m_c \rightarrow 0 \Rightarrow \vec{T}_1 + \vec{T}_2 \approx 0 \Rightarrow \vec{T}_1 = -\vec{T}_2$. De modo que la tensión actúa sobre cada elemento de cuerda como una fuerza aplicada a cada extremo, con valor neto nulo y que se transmite íntegramente de extremo a extremo. Es importante tener en cuenta que *la tensión será constante a lo largo de la cuerda siempre que la cuerda no tenga masa*: si nos fijamos en el fragmento de cuerda, $\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$, tanto en equilibrio como cuando hay aceleración del sistema.

Supongamos ahora un objeto de masa m colgado de una cuerda inextensible y sin masa, en una situación de equilibrio, como en la figura de la izquierda: $\vec{T} = -m \vec{g}$. Mientras no sobrepasemos el límite de resistencia de la cuerda, cualquier fuerza externa actuando sobre m se verá compensada por la tensión: $\vec{T} = -m \vec{g} - \vec{F}$ (figura de la derecha).

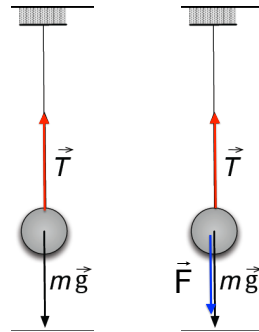


Figura 5.9: Tensión de una cuerda o cable.

Como segundo ejemplo, supongamos dos masas m y M apoyadas sobre un suelo liso y unidas por una cuerda. Si tiramos del conjunto con una fuerza \vec{F} la cuerda "se tensa", estableciéndose una tensión T a lo largo de ella. Es posible estudiar el movimiento del bloque m bajo la acción de \vec{T} . La tensión de la cuerda depende de \vec{F} ; proponemos verificar que $T = m F / (m + M)$.

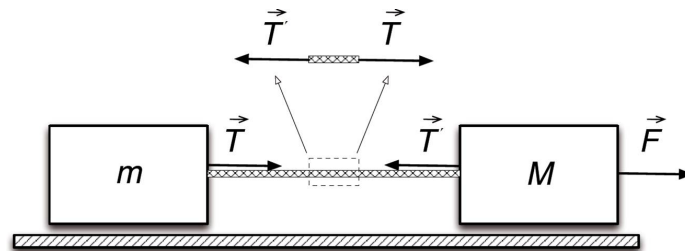


Figura 5.10: Tensión de la cuerda que une las dos masas.

- **Fuerza de rozamiento.** El rozamiento es un tipo muy frecuente de ligadura que surge cuando desplazamos una superficie material sobre otra o cuando, aunque no haya desplazamiento, se ejerce una fuerza con componente paralela a la superficie. Vamos a fijarnos en el cuerpo de la figura, sobre el que se ejerce una fuerza \vec{F} . El bloque no se hunde en el suelo, debido a la fuerza de ligadura perpendicular (la normal) que será $\mathcal{N} = \mathcal{R}_\perp = F_\perp + mg$.

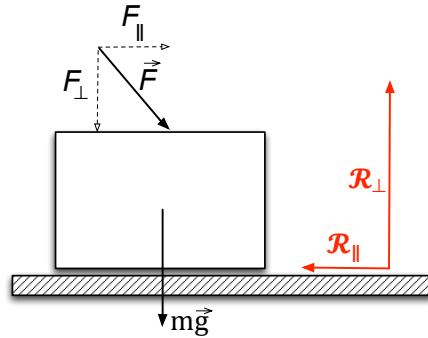


Figura 5.11: Fuerzas de ligadura en el apoyo de un bloque sobre una superficie con fricción.

Por su parte, la existencia de rozamiento implica la aparición de \mathcal{R}_{\parallel} . Experimentalmente se ve que el bloque de la figura permanece en equilibrio si $F_{\parallel} \leq \mu_e \mathcal{R}_{\perp}$. Por tanto, la componente horizontal de la reacción $\mathcal{R}_{\parallel} \leq \mu_e \mathcal{R}_{\perp}$. Esa componente horizontal es lo que se conoce como fuerza de rozamiento estático: $F_R = \mathcal{R}_{\parallel}$

Así, \mathcal{R}_{\parallel} podrá tomar distintos valores, pero con el límite impuesto por la desigualdad anterior, es decir $\mathcal{R}_{\parallel}^{max} = \mu_e \mathcal{R}_{\perp}$. El coeficiente de proporcionalidad μ_e recibe el nombre de **coeficiente de rozamiento estático**.

Una vez que se inicia el movimiento, se observa una disminución de μ que adquiere el valor denominado **coeficiente de rozamiento dinámico** μ_d :

$$\mathcal{R}_{\parallel} = F_R = \mu_d \mathcal{R}_{\perp} \equiv \mu_d N.$$

μ_d y μ_e dependen de la naturaleza de las superficies, pero no del tamaño. Por otra parte, μ_d depende de \vec{v} , pero para velocidades entre 1 cm/s y varios m/s puede considerarse constante.

Materiales	μ_e	μ_d
Acero sobre acero	0.7	0.6
Latón sobre acero	0.5	0.4
Cobre sobre hierro fundido	1.1	0.3
Vidrio sobre vidrio	0.9	0.4
Teflón sobre teflón	0.04	0.04
Teflón sobre acero	0.04	0.04
Caucho sobre hormigón (seco)	1.0	0.80
Caucho sobre hormigón (húmedo)	0.30	0.25
Esquí encerado sobre nieve (0° C)	0.1	0.05

Cuadro 5.1: Valores aproximados de los coeficientes de fricción.

5.3. Diagramas de fuerzas. Ejemplos de situaciones de equilibrio

Para analizar el comportamiento dinámico o la condición de equilibrio de una partícula, resulta fundamental dibujar correctamente las fuerzas que actúan sobre la misma. Llamaremos **diagrama de cuerpo libre** al diagrama de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Para trazarlo, hay que identificar el objeto considerado y dibujar las fuerzas aplicadas sobre el mismo. Hay que dibujar asimismo las fuerzas de ligadura, ejercidas por los elementos externos al objeto.

Fijémonos en la figura 5.12 donde se han dibujado las fuerzas sobre m , sobre M y sobre el sistema $(m+M)$ considerado como un todo. Como vimos en el apartado 5.1 al hablar de la tercera ley de Newton, dada una fuerza (acción) ejercida por un cuerpo M sobre otro cuerpo m , su correspondiente reacción será igual pero de signo contrario, y estará aplicada en M . No pueden equilibrarse al plantear el diagrama de fuerzas sobre cada cuerpo aislado, porque cada una de esas fuerzas actúa sobre un cuerpo distinto.

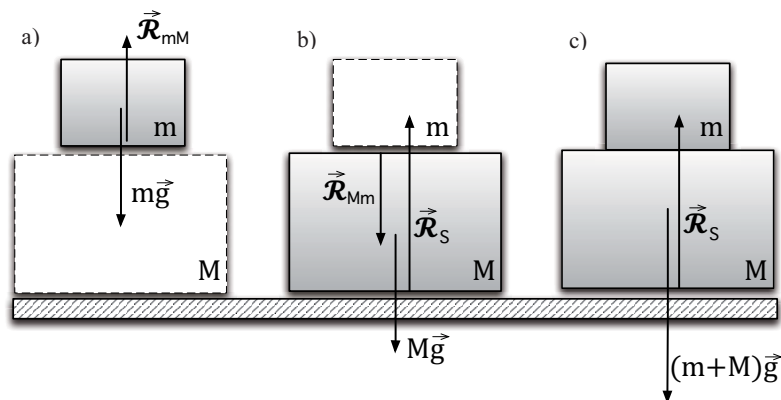


Figura 5.12: Diagramas de cuerpo libre asociados a un sistema de dos bloques. a) Fuerzas sobre el bloque superior; b) Sobre el inferior; c) Sobre el sistema completo.

Así, en el ejemplo de la figura 5.12:

$$\vec{\mathcal{R}}_{mM} = -\vec{\mathcal{R}}_{Mm}$$

Como se ha mencionado ya, desde el punto de vista de las fuerzas que actúan sobre una partícula, diremos que está en equilibrio si la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella se anula:

$$\vec{F}_T = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$$

Apliquemos esta condición a los tres diagramas de cuerpo libre que surgen en la figura 5.12.

- i) la condición de equilibrio al sistema completo de la figura 5.12 (las dos partículas juntas):

$$\vec{\mathcal{P}}_T + \vec{\mathcal{R}}_S = 0 \Rightarrow (m + M) \vec{g} + \vec{\mathcal{R}}_S = 0$$

Y si ahora aplicamos la condición de equilibrio a las partículas aisladas:

ii) Partícula de masa m : $m \vec{g} + \vec{\mathcal{R}}_{mM} = 0$

iii) Partícula de masa M : $M \vec{g} + \vec{\mathcal{R}}_{Mm} + \vec{\mathcal{R}}_S = 0$

Nótese que realmente las tres ecuaciones no son independientes. De hecho, si sumamos las ecuaciones II) e III), y aplicamos la tercera ley de Newton, obtenemos la ecuación I).

Al resolver los problemas hay que tener cuidado al pasar de las anteriores expresiones vectoriales a las correspondientes relaciones entre los módulos de las fuerzas. Así, si se elige el vector unitario \hat{j} en la dirección vertical y sentido hacia abajo:

$$\vec{\mathcal{P}}_T = (m + M) g \hat{j} \text{ y } \vec{\mathcal{R}}_S = -R_s \hat{j}.$$

La condición de equilibrio del sistema se expresaría:

$$(m + M) g \hat{j} - R_s \hat{j} = 0$$

siendo el módulo de la reacción normal igual al módulo del peso del sistema completo.

5.4. Momento lineal y angular

5.4.1. Momento e impulso lineal. Ley de conservación.

El **momento lineal** o **cantidad de movimiento** de una partícula se define como:

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

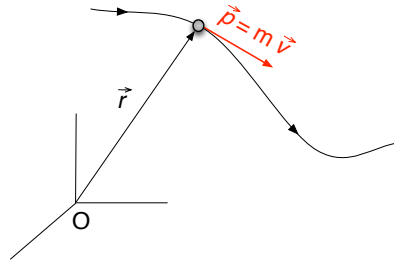


Figura 5.13: Momento lineal de una partícula. Como la velocidad, el momento lineal es tangente a la trayectoria en cada punto.

Es una magnitud que da menos información que m y \vec{v} por separado. Sin embargo, \vec{p} es la magnitud relevante en la segunda Ley de Newton, que como decíamos, en su forma “completa” se expresa (entendiendo \vec{F} como la fuerza neta)

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}) \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

y sólo si m permanece constante (como ocurre en el caso de una partícula) toma la forma:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

La expresión $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ nos permite obtener información sobre la dinámica de la partícula bajo diferentes puntos de vista:

- $\vec{p} = \text{constante} \iff \vec{F} = 0$

Se trata de la **ley de conservación del momento lineal**, que identifica las fuerzas como responsables del cambio de momento lineal de las partículas:

Si sobre un sistema no actúan fuerzas externas, su momento lineal permanece constante (y viceversa).

- La variación de momento lineal en un intervalo de tiempo proporciona también información relevante sobre el movimiento. Definimos $\vec{\mathcal{I}}$, magnitud denominada **impulso lineal** de la fuerza \vec{F} , como

$$\vec{\mathcal{I}} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F} dt = \Delta \vec{p} \equiv \vec{p}(t_f) - \vec{p}(t_0) \quad (5.3)$$

Veamos algunas propiedades y analicemos la información que puede extraerse si se conoce el impulso:

1. Si la fuerza permanece constante en el tiempo, la integral es inmediata y tenemos:

$$\vec{F} (t_f - t_0) = \Delta \vec{p} = m \vec{v}_f - m \vec{v}_0 = \vec{\mathcal{I}} \quad (5.4)$$

En este caso, el impulso (medida de la variación del momento lineal) coincide con el producto de la fuerza por el intervalo de tiempo en el que actúa.

2. Si $\vec{\mathcal{I}} = 0$, eso garantiza que los valores del momento lineal inicial y final coinciden, pero no informa detalladamente sobre su evolución.

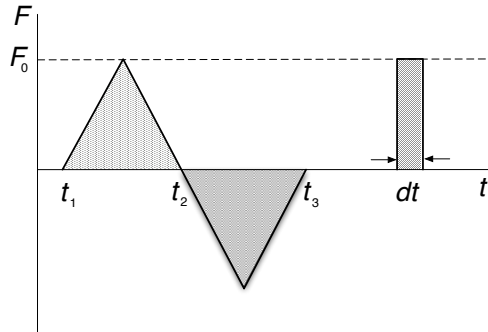


Figura 5.14: Gráficas de la evolución temporal de la fuerza.

En el primer caso de la gráfica 5.14, el impulso es nulo, $\vec{p}(t_3) = \vec{p}(t_1)$ y sin embargo \vec{p} ha ido variando. Por ejemplo, $\vec{p}(t_2) \neq \vec{p}(t_1)$.

3. Comparemos ahora el efecto de una fuerza muy intensa actuando durante un intervalo muy corto, con el de una fuerza que se prolonga en el tiempo pero es más débil: si el impulso lineal es el mismo, la variación de momento lineal será la misma. Esto es interesante en la descripción de fuerzas muy intensas actuando durante un breve intervalo de tiempo (por ejemplo en el análisis de choques y percusiones). Lo visualizamos en el segundo caso de la figura. Es obvio

que $\vec{L} = \vec{F}_0 \Delta t$. Si F_0 es muy grande aunque Δt sea muy pequeño ($\Delta t \rightarrow 0$), se tiene $\vec{L} \neq 0$.

Continuando con el ejemplo anterior, analicemos ahora el impulso de una fuerza finita que dura un tiempo infinitesimal. En este caso:

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \Delta \vec{p} = 0$$

No se produce variación de momento apreciable. Por este motivo, al analizar el problema de la explosión de una granada se desprecia por ejemplo $\Delta \vec{p}$ debido a la gravedad.

5.4.2. Momento e impulso angular. Ley de conservación.

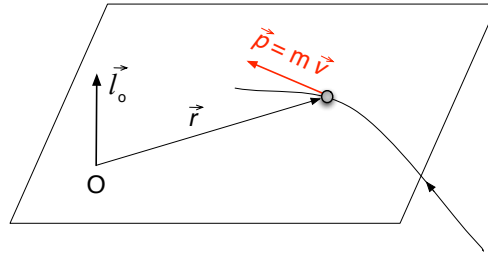


Figura 5.15: Definición de momento angular.

Para completar el análisis del movimiento de una partícula introduciremos la magnitud **momento angular**, que se calcula respecto a un punto:

$$\vec{l}_o = \vec{r} \times \vec{p}$$

En el ejemplo de la figura el momento angular se calcularía respecto al punto O, siendo \vec{r} el vector de posición (instantánea) de la partícula respecto al citado punto. (ver Fig. 5.15).

Analicemos ahora los aspectos de la dinámica de la partícula que quedan patentes en su momento angular. De forma análoga a lo visto para \vec{p} , cuya variación viene dada por la fuerza que actúa sobre la partícula, veremos cuál es la magnitud asociada a las variaciones del momento angular:

$$\frac{d\vec{l}_o}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 + \vec{r} \times \vec{F} \equiv \vec{\tau}_o \quad (5.5)$$

Al producto $\vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{\tau}_o$, se le denomina **momento o par de la fuerza** \vec{F} respecto de O. El momento de la fuerza es un vector perpendicular al

plano definido por los vectores \vec{F} y \vec{r} (vector de posición del punto de aplicación de la fuerza respecto a O). Veremos que esta magnitud $\vec{\tau}_o$, que pone de manifiesto la influencia del **punto de aplicación de la fuerza**, es de capital importancia al analizar la dinámica de los objetos no puntuales; de momento quedémonos con su definición y con su papel como responsable de las variaciones del momento angular. La ecuación

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}_o \quad (5.6)$$

nos proporciona la **ley de conservación del momento angular**: *El momento angular de una partícula respecto a un punto O se conserva si el momento resultante de las fuerzas que actúan sobre ella respecto a dicho punto es nulo.*

Análogamente a lo visto para el impulso lineal, definiremos el **impulso angular** $\vec{\mathcal{J}}$ del siguiente modo:

$$d\vec{\mathcal{J}} = \vec{\tau} dt = (\vec{r} \times \vec{F}) dt = \vec{r} \times d\vec{\mathcal{I}} \quad (5.7)$$

Integrando:

$$\vec{\mathcal{J}} = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{\mathcal{J}} = \vec{\mathcal{J}}(t_2) - \vec{\mathcal{J}}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau} dt$$

La utilidad de este concepto deriva de la ecuación 5.7 que relaciona impulso lineal y angular. Por ejemplo, nos permitirá relacionar las variaciones de velocidad lineal y angular de objetos sometidos a percusiones.

Para finalizar este apartado, planteamos un par de ejercicios a modo de ejemplos de cálculo de momento angular de una partícula.

Ejemplo 1: Para una partícula en órbita circular uniforme, evalúese \vec{l}_o y $\vec{l}_{o'}$ en los instantes marcados. ¿Se conserva \vec{l} ?

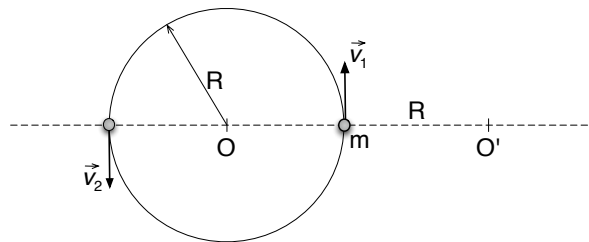


Figura 5.16: Ejemplo 1: movimiento circular uniforme entorno al punto O.

Solución:

El momento angular de la partícula respecto a O en las dos posiciones marcadas será:

$$\vec{l}_o(t_1) = \vec{l}_o(t_2) = m R v \hat{k} = m R^2 \omega \hat{k} = \text{constante}$$

donde hemos tenido en cuenta, como se vio al estudiar el movimiento circular, que $v = \omega R$. La fuerza que actúa sobre la partícula en este ejemplo tiene necesariamente dirección radial y por tanto su momento respecto al centro O de la trayectoria es cero y el momento angular es constante. Ahora bien, si se calcula respecto a O', es inmediato ver que el momento angular no se conserva:

$$\vec{l}_{o'}(t_2) = 3 m R v \hat{k} \text{ y } \vec{l}_{o'}(t_1) = -m R v \hat{k} \quad (5.8)$$

Ejemplo 2: Evalúese el momento angular de una partícula en movimiento rectilíneo respecto a un punto O, a distancia d de la recta.

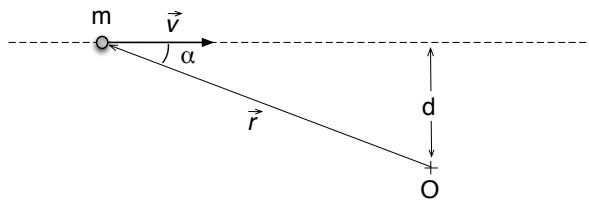


Figura 5.17: Ejemplo 2.

$$l_o = m r v \sin \alpha = m v d$$

$$\vec{l}_o = -m v d \hat{k}$$

5.5. Ejemplos de aplicación

5.5.1. Movimiento de una partícula bajo la acción de fuerza de rozamiento viscoso.

- **Fuerza de rozamiento viscoso** (\vec{F}_v):

Se la denomina también **fuerza de arrastre**. Está asociada a la presencia de un fluido que se opone a que una partícula se mueva en su seno.

Aunque en general todos los fluidos la ofrecen, la resistencia que ofrecen los líquidos por ejemplo el agua, es claramente mayor que la ofrecida por el aire.

Cuando \vec{v} es pequeña, la fuerza de fricción viscosa es proporcional a \vec{v} y de sentido opuesto:

$$\vec{F}_v = -k \eta \vec{v}$$

- k es el coeficiente de fricción viscosa, que depende de la geometría del objeto que se mueve dentro del fluido. Para objetos esféricos $k = 6 \pi R$ (ley de Stokes).
- η es una característica del fluido llamada **viscosidad**. Es una medida de la fricción interna entre unas moléculas y otras (dice lo “pastoso” que es el fluido).

La unidad de viscosidad en el sistema CGS es el poise: $1 \text{ poise} \equiv 1 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Se propone como ejercicio deducir de la ecuación de dimensiones de la viscosidad esta equivalencia de unidades.

En la práctica, se suele agrupar k y η en un único parámetro, denotado con la letra b , escribiéndose $\vec{F}_v = -b\vec{v}$. Analicemos a continuación la dinámica de un objeto que cae en el seno de un fluido viscoso. Si se deja caer una partícula de masa m por un fluido viscoso, se observa que \vec{v} aumenta al principio, porque como la velocidad es próxima a cero, también la fuerza viscosa es pequeña. No obstante, poco a poco v aumenta y también lo hace la fuerza viscosa. La aceleración entonces disminuye hasta llegar a una situación estacionaria, con v constante.

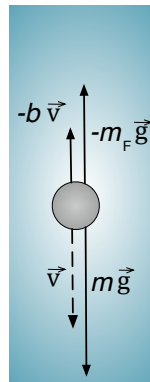


Figura 5.18: Fuerzas que actúan sobre una partícula que cae por un fluido viscoso.

Si aplicamos la segunda Ley de Newton (ver Fig. 5.18 en que se representan las fuerzas que actúan sobre la partícula):

$$m a = m g - m_F g - b v$$

donde $m_F g$ es el peso del fluido desalojado por la partícula, esto es, la fuerza de empuje que experimenta la partícula (principio de Arquímedes).

Se llama **velocidad límite** (v_{lim}) a la velocidad de la partícula al alcanzar la situación estacionaria ($a = 0$):

$$v_{lim} = \frac{(m - m_F) g}{b} \quad (5.9)$$

Si considerásemos el empuje despreciable: $v_{lim} = m g/b$.

Volviendo al caso de empuje no despreciable, si consideramos que la partícula es esférica de radio R y densidad ρ_o , y el fluido de densidad ρ_F y viscosidad η :

$$\left. \begin{array}{l} m = \rho_o \frac{4}{3} \pi R^3 \\ m_F = \rho_F \frac{4}{3} \pi R^3 \\ b = 6 \pi R \eta \end{array} \right\} v_{lim} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 g (\rho_o - \rho_F)}{6 \pi R \eta} = \frac{2}{9} \frac{g R^2 (\rho_o - \rho_F)}{\eta}$$

Es sencillo estudiar en el laboratorio la caída de bolitas de acero de distintos diámetros en un tubo lleno de un líquido viscoso. Mediante la relación anterior y los datos experimentales puede obtenerse la viscosidad η del líquido.

Se propone como ejercicio el cálculo de la velocidad límite (en unidades del Sistema Internacional) de una gota de agua cayendo en aire y una bolita de acero en glicerina (líquido viscoso).

Datos: diámetro de la gota de agua y de la bolita de acero $d = 1 \text{ mm}$, densidad del agua $\rho_{agua} = 1 \text{ g/cm}^3$, densidad del aire $\rho_{aire} = 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$, viscosidad del aire $\eta_{aire} = 1.81 \cdot 10^{-4} \text{ poises}$, densidad del acero $\rho_{acero} = 7.9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, densidad de la glicerina $\rho_{glicerina} = 1.3 \text{ g/cm}^3$, viscosidad de la glicerina $\eta_{glicerina} = 8.33 \text{ poises}$.

Solución: $v_{lim}(\text{gota}) = 30.0 \text{ m/s}$, $v_{lim}(\text{bolita}) = 4.3 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$.

Capítulo 6

DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA: TRABAJO Y ENERGÍA

En el capítulo anterior se ha introducido el concepto de fuerza, núcleo de la Mecánica Clásica como teoría del movimiento. Conceptualmente, una vez conocidas las fuerzas que actúan sobre una partícula, podemos determinar con precisión los detalles de su movimiento. Esto será posible en tanto seamos capaces de resolver la ecuación de movimiento $\vec{F} = d(m\vec{v})/dt$. En la práctica, esto no es siempre posible, por una variedad de razones. Realmente, salvo en casos excepcionalmente sencillos (por lo que se refiere a las dependencias de \vec{F} respecto al espacio o al tiempo) resolver la segunda ley de Newton puede ser matemáticamente muy complicado. No obstante, debe tenerse en cuenta que en muchos casos la información exhaustiva que proporciona la solución de dicha ecuación no resulta necesaria. Por ejemplo, nos puede bastar con conocer la velocidad con la que la partícula llega a un punto concreto, sin necesidad de tener datos sobre la trayectoria que haya seguido en función del tiempo.

Los conceptos que vamos a introducir en este capítulo: trabajo, energía, leyes de conservación,... atienden precisamente a la cuestión anterior. Mostraremos cómo resolver de una manera simplificada una variedad de problemas de indudable interés práctico en los cuales la variable tiempo no resulta relevante, apoyados en un conocimiento “global” de las fuerzas que actúan.

6.1. Trabajo

Vamos a introducir una nueva magnitud relacionada con la dinámica de una partícula: el **trabajo**.

Supongamos una partícula de masa m que se desplaza a lo largo de una trayectoria bajo la acción de una fuerza \vec{F} .

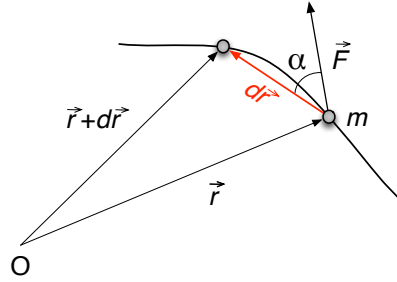


Figura 6.1: El trabajo elemental realizado por \vec{F} es el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento $d\vec{r}$.

El **trabajo elemental** dW realizado por la fuerza \vec{F} se define como el producto escalar:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde $d\vec{r}$ es un diferencial del desplazamiento de la masa m .

En el caso de la figura 6.1, $dW \equiv \vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos \alpha$. El trabajo total a lo largo de un recorrido será:

$$W = \int_{\text{trayectoria}} dW = \int_{\text{trayectoria}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

En particular, si la masa se desplaza entre los puntos de vector posición \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , denotaremos:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (6.1)$$

El trabajo tiene las dimensiones : $[W] = [M] [L]^2 [T]^{-2}$, y en el Sistema Internacional se mide en julios ($J = N m$).

Nótese que para que se realice un trabajo **es necesario que la fuerza tenga una componente en la dirección del desplazamiento**.

Ejemplo 1: Trabajo bajo una fuerza constante.

Al calcular el trabajo realizado por una fuerza constante, dicha fuerza puede “salir” de la integral:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Supongamos que se trata de la fuerza gravitatoria:

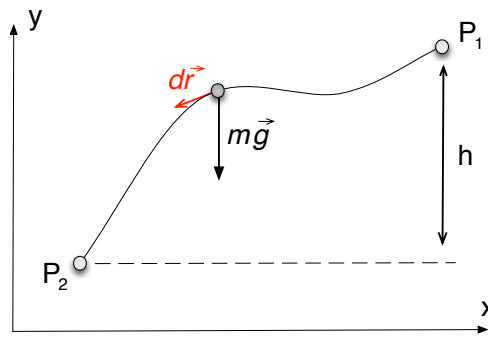


Figura 6.2: Trabajo de la fuerza de atracción gravitatoria, que puede considerarse constante cerca de la superficie terrestre.

$$\vec{F} = -m g \hat{j}$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1) \hat{i} + (y_2 - y_1) \hat{j}$$

Teniendo en cuenta que $\vec{F} \perp \hat{i}$ y que el ángulo entre \vec{F} y \hat{j} es de 180° :

$$W = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = m g (y_1 - y_2) = m g h$$

El trabajo realizado por la fuerza de gravedad es independiente de la trayectoria recorrida, dependiendo únicamente de la diferencia de altura entre las posiciones inicial y final.

Ejemplo 2: Péndulo simple.

Vamos a analizar ahora el trabajo realizado por las fuerzas que actúan en el sistema de la Fig. 6.3. Por lo que respecta a la tensión, no realiza trabajo porque no tiene componente en la dirección del desplazamiento.

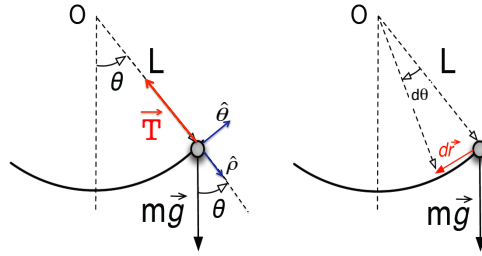


Figura 6.3: Péndulo simple de masa m y longitud del hilo L .

Calculemos entonces el trabajo realizado por el peso:

$$dW = (m \vec{g}) \cdot d\vec{r}$$

El trabajo realizado es el producto del desplazamiento por la *componente del peso en la dirección del desplazamiento*, que denotaremos $\vec{\mathcal{P}}_t$ (componente tangencial del peso).

$$\vec{\mathcal{P}}_t = -m g \sin \theta \hat{\theta} \quad ; \quad d\vec{r} = +L d\theta \hat{\theta}$$

$$dW = -m g L \sin \theta d\theta$$

Nótese que $dW > 0$ porque fuerza y desplazamiento van en el mismo sentido (en la situación del dibujo: $\sin \theta > 0$ y $d\theta < 0$). Integrando:

$$W_{\theta \rightarrow 0} = \int_{\theta}^0 -m g L \sin \theta d\theta = m g L [\cos \theta]_{\theta}^0 = m g L [1 - \cos \theta]$$

A modo de resumen del ejemplo, diremos que cuando la masa se dirige hacia los puntos de amplitud máxima, el trabajo que realiza la gravedad es negativo y tiende a disminuir la velocidad de la partícula. En cambio, cuando se dirige al punto $\theta = 0$, el trabajo realizado por la gravedad es positivo y aumenta la velocidad de la masa.

6.2. Potencia

En muchas ocasiones interesa conocer el “ritmo” con que se realiza trabajo (se transmite energía) sobre la partícula. La magnitud que representa este concepto es la **potencia** (\mathcal{P}). Definiremos a continuación la *potencia instantánea*.

Para ello, recordemos que dW , el trabajo en un recorrido infinitesimal, se ha definido como: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Expresando \vec{r} en función de la velocidad de la partícula escribiremos:

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \mathcal{P} dt \quad (6.2)$$

donde se ha definido la potencia instantánea como $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = dW/dt$.

En cuanto a sus dimensiones: $[\mathcal{P}] = [M] [L]^2 [T]^{-3}$, y se mide en vatios ($W = J/s$).

En muchos casos es interesante conocer la *potencia media* (potencia promediada durante un intervalo de tiempo representativo), definida como sigue:

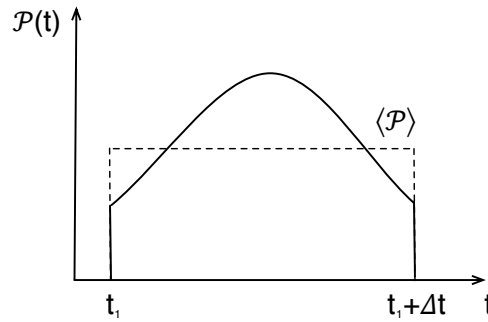


Figura 6.4: Concepto de potencia promedio.

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P} \rangle &\equiv \bar{\mathcal{P}} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} \mathcal{P} dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{W_{total}}{\Delta t} \end{aligned}$$

donde W_{total} es el trabajo realizado por la fuerza en el intervalo de tiempo Δt . Es evidente que $\langle \mathcal{P} \rangle$ puede interpretarse como aquel valor de potencia constante que produciría el mismo trabajo total en el intervalo de tiempo considerado.

6.3. Energía cinética

Consideremos la fuerza total que actúa sobre una partícula:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (6.3)$$

En el caso en que la masa permanezca constante, el trabajo realizado sobre la partícula puede expresarse como:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = m \vec{v} d\vec{v}$$

A partir de la fórmula anterior se puede encontrar una relación sencilla entre el trabajo total que realiza la fuerza y la modificación de la velocidad de la partícula sobre la que actúa. Así, el trabajo que realiza la fuerza \vec{F} cuando la masa m se desplaza de \vec{r}_1 a \vec{r}_2 :

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \vec{v} d\vec{v} = m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

Si definimos la **energía cinética** como:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

entonces, el trabajo realizado por la fuerza \vec{F} en la trayectoria entre los puntos 1 y 2 se puede expresar así:

$$W_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1$$

El trabajo de la fuerza total aplicada (el trabajo que realizan todas las fuerzas que actúan sobre una partícula) es igual a la variación de su energía cinética (se “invierte” en modificar T .)

Hay que tener presente que el trabajo proporciona una información parcial: nos dice cómo cambia el módulo de la velocidad entre los puntos extremos de la trayectoria, pero no da información de lo que ocurre en el trayecto.

Ejemplo: Trabajo realizado por una fuerza central.

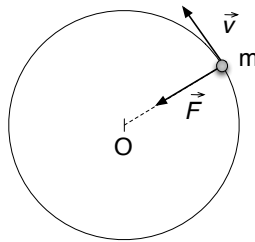


Figura 6.5: Trayectoria circular de una partícula bajo la acción de una fuerza central.

En el ejemplo de la figura, la fuerza que actúa sobre la partícula es central, en dirección radial. Esa fuerza es la causante de la aceleración normal o centrípeta de la partícula en su trayectoria circular.

$$\vec{F} = m \vec{a}_N \quad (6.4)$$

$$\vec{F} \perp d\vec{r} \Rightarrow dW = 0 \Rightarrow \Delta T = 0. \quad (6.5)$$

Como vemos, si una partícula describe una trayectoria circular bajo la acción de una fuerza dirigida hacia el centro de dicha trayectoria, su energía cinética no varía. Si \vec{F} tuviera una componente tangencial el módulo de la velocidad cambiaría y $\Delta T \neq 0$.

6.4. *Fuerzas conservativas y disipativas. Energía potencial*

En general, el trabajo realizado por una fuerza en un desplazamiento entre dos puntos depende de la trayectoria. Existe, sin embargo, un tipo particular de fuerzas para las que esto no es así y el trabajo depende exclusivamente de la posición de los puntos inicial y final de la trayectoria¹ no del camino seguido. Este tipo de fuerzas reciben el nombre de **fuerzas conservativas**:

$$\int_{1, C_1}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{1, C_2}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \forall C_1, C_2$$

Entre las fuerzas conservativas se encuentran la gravitatoria, la elástica y la electrostática. Por su parte, entre las no conservativas se encuentran las que dependen de la velocidad o el tiempo y las fuerzas de rozamiento.

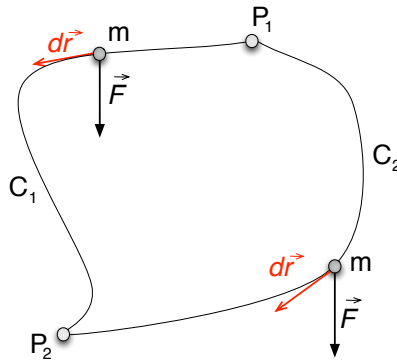


Figura 6.6: Desplazamiento de una partícula entre dos puntos, a lo largo de diferentes trayectoria, C_i .

Para una fuerza conservativa, como el trabajo sólo depende de los puntos

¹En lo que sigue, y por brevedad, denotaremos P_1 y P_2 o simplemente 1 y 2 los puntos inicial y final de la trayectoria, (\vec{r}_1 y \vec{r}_2 hasta el momento).

de partida y llegada, el trabajo a lo largo de una trayectoria cerrada será nulo:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall C \text{ cerrada}$$

Para demostrarlo, basta con considerar dos puntos que dividan C en los dos caminos C_1 y C_2 (ver figura 6.6):

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{1, C_1}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{2, C_2}^1 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Puesto que W no depende del camino, $[\int_{1, C_1}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{1, C_2}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}]$, cambiando los límites de integración obtenemos que:

$$\int_{1, C_1}^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{2, C_2}^1 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Entonces, sustituyendo el primer sumando por su valor, obtenemos:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Dado que el trabajo realizado por una fuerza conservativa sólo depende de los puntos de partida y de llegada, se puede definir una función escalar llamada **energía potencial**, $\mathcal{U}(\vec{r})$, tal que:

$$\Delta\mathcal{U} = \mathcal{U}(\vec{r}) - \mathcal{U}(\vec{r}_o) = -W = - \int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') d\vec{r}'$$

donde \vec{r}_o es un punto arbitrario de referencia.

Es importante tener en cuenta que, de acuerdo con la definición anterior, es la **diferencia de energía potencial** entre dos puntos lo que está definido sin ambigüedad. Despejando en la relación anterior podemos expresar el valor de la energía potencial en un punto \vec{r} , pero sin olvidar que la estamos refiriendo al valor que adquiere en uno de referencia \vec{r}_o . (Se suele elegir $\mathcal{U}(\vec{r}_o) = 0$).

$$\mathcal{U}(\vec{r}) = \mathcal{U}(\vec{r}_o) - \int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') d\vec{r}'$$

Es importante tener presente que para poder definir una función de energía potencial, la fuerza tiene que ser necesariamente conservativa (la energía potencial tiene que ser independiente de la “historia” de la partícula). Lo podemos enfatizar mediante la relación $\Delta\mathcal{U} = -W_c$, donde llamamos W_c al trabajo de las fuerzas conservativas.

Las fuerzas no conservativas evidentemente pueden realizar trabajo, pero el valor de éste no queda determinado por lo que ocurre en los puntos inicial y final, sino que depende además del camino seguido entre ellos.

Antes de comentar algunos ejemplos de fuerzas conservativas, podemos anticipar que la relación entre \mathcal{U} y \vec{F} se puede invertir para obtener la fuerza a partir de la energía potencial. Más concretamente, restringiéndonos a problemas unidimensionales, tendremos que:

$$d\mathcal{U} = -F dx \Rightarrow F = -\frac{d\mathcal{U}}{dx}$$

Ejemplo 1: fuerza y energía potencial gravitatoria:

Recordemos que la fuerza gravitatoria se expresa:

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}, \quad (6.6)$$

donde G es la constante de gravitación universal ($G = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$), m_1 y m_2 las masas de los cuerpos que se atraen, r la distancia que los separa y \hat{r} un vector unitario en la dirección que une ambos cuerpos.

Pensemos en la atracción ejercida por la Tierra, de masa M_T , sobre un cuerpo de masa m . Es sencillo comprobar que la fuerza gravitatoria es conservativa calculando el trabajo entre dos posiciones genéricas cualesquiera de m :

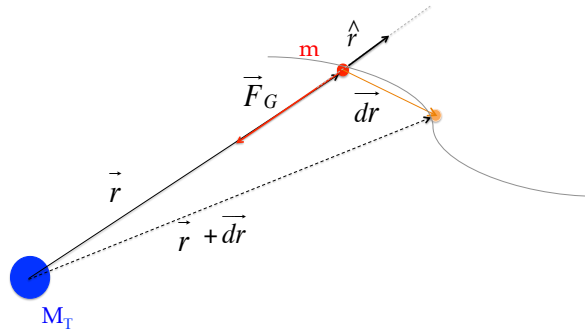


Figura 6.7: Fuerza gravitatoria ejercida por M_T sobre una partícula de masa m , en una posición dada por \vec{r} respecto a M ; la dirección de la fuerza viene dada por la de \vec{r} .

$$W = - \int_{r_0}^r \frac{G M_T m}{r^2} \hat{r} d\vec{r} = - \int_{r_0}^r \frac{G M_T m}{r^2} dr = \frac{G M_T m}{r} \Big|_{r_0}^r = G M_T m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Vemos que el trabajo solo depende de las posiciones extremas de la partícula, quedando demostrado que la fuerza gravitatoria es conservativa.

La forma más sencilla de calcular la energía potencial gravitatoria es calcular el trabajo de la fuerza gravitatoria y utilizar la expresión:

$$W = -\Delta\mathcal{U}$$

Si pensamos en el ejemplo 1 estudiado al hablar del trabajo realizado por una fuerza constante (sección 6.1, figura 6.2), es inmediato reconocer que el trabajo calculado corresponde a menos la variación de energía potencial gravitatoria: el trabajo realizado por el peso cuando la partícula iba de la posición 1 a la 2 era positivo, lo que implica que disminuye su energía potencial gravitatoria.

Ejemplo 2: energía potencial elástica:²

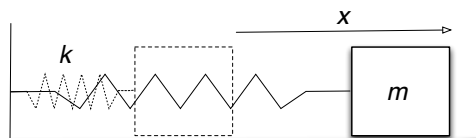


Figura 6.8: La fuerza elástica de compresión ejercida por el resorte cuando se ha estirado respecto a su longitud natural. Se ha representado en trazo discontinuo la situación en que el resorte está sin estirar y la posición de la masa viene dada por $x=0$.

Supongamos un resorte ideal de constante elástica k unido a un bloque de masa m (ver Fig. 6.8). Veamos que la fuerza elástica $\vec{F} = -k\vec{x}$ resulta ser conservativa:

$$\mathcal{U}(x) - \mathcal{U}(0) = - \int_{x'=0}^x \vec{F} \cdot d\vec{x}' = - \int_0^x (-k x') dx' = \frac{1}{2} k x^2$$

²Se estudiará en profundidad la fuerza elástica en los próximos capítulos; por el momento nos detendremos en la comprobación de su carácter conservativo

6.5. Variación/Conservación de la energía mecánica

Consideremos una partícula sometida a la acción simultánea de fuerzas conservativas y no conservativas:

$$\vec{F} = \vec{F}_{nc} + \vec{F}_c$$

El trabajo realizado por dichas fuerzas será:

$$W = W_{nc} + W_c$$

Aplicando lo visto anteriormente:

$$\left. \begin{array}{l} W_c = -\Delta\mathcal{U} \\ W = \Delta T \end{array} \right\} \Rightarrow W_{nc} = \Delta T + \Delta\mathcal{U}$$

Si definimos la **energía mecánica** $E \equiv T + \mathcal{U}$, la ecuación anterior nos indica:

$$\Delta E = W_{nc}, \quad (6.7)$$

resultado que debe entenderse del siguiente modo: *en presencia de fuerzas no conservativas, la ecuación anterior permite determinar el cambio de energía mecánica que producen dichas fuerzas*. Dicha expresión nos da un método para resolver problemas con fuerzas no conservativas si podemos evaluar W_{nc} de algún modo. Por otra parte, si solo actúan fuerzas conservativas recuperamos el conocido teorema de conservación de la energía: *si sobre una partícula sólo actúan fuerzas conservativas (no existe acción de fuerzas no conservativas), la energía mecánica se conserva*.³:

$$W_{nc} = 0 \Rightarrow E = \text{constante}.$$

6.6. Representación gráfica y estudio de las curvas de energía potencial

Como decíamos más arriba, en ausencia de fuerzas no conservativas (como podría ser el rozamiento), la energía mecánica se conserva: $E = T + \mathcal{U}$

³Es importante entender la afirmación que dice que la energía mecánica se “conserva” cuando no existen fuerzas de tipo no conservativo. Uno de los principios más asentados del conocimiento científico es que la energía se conserva siempre. Lo que ocurre es que el trabajo producido por fuerzas no conservativas puede convertirse en otras formas de almacenamiento energía, diferentes de la cinética o potencial

$= \text{constante}$. Cumpliéndose esa condición y conociendo la relación entre fuerza (conservativa) y energía potencial, que en una dimensión no es sino:

$$\mathcal{U}(x) = - \int F \, dx \Rightarrow F_x = - \frac{d\mathcal{U}}{dx}$$

estamos en condiciones de obtener información del movimiento a partir de las propiedades de $\mathcal{U}(x)$. Vamos a verlo con un ejemplo:

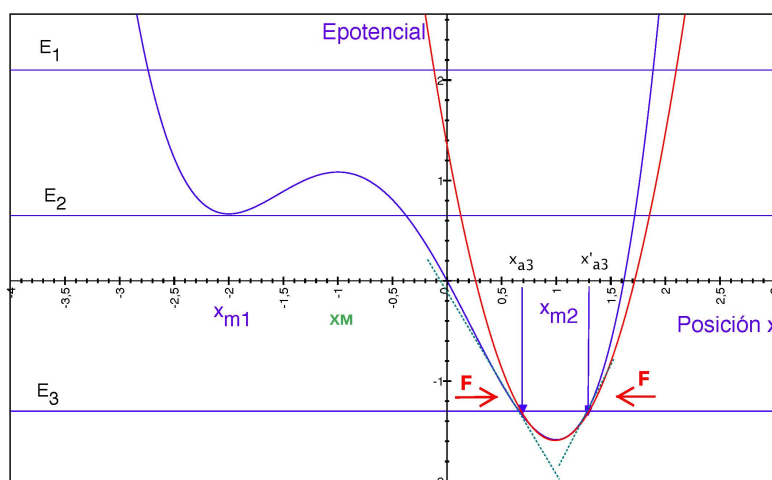


Figura 6.9: Representación gráfica de una función de energía potencial de una partícula, junto a diversos posibles valores de energía mecánica.

- Posiciones de equilibrio: son los puntos en que la derivada de $U(x)$ se anula, esto es, los máximos y mínimos de la función.

La energía potencial de la figura 6.9 presenta dos mínimos, x_{m1} y x_{m2} , y un máximo x_M que corresponden con las posiciones de equilibrio de la partícula.

- Direcciones y sentidos de la fuerza: como \vec{F} es la derivada de la energía potencial cambiada de signo, su signo es opuesto al de la pendiente de la curva. En el ejemplo de la figura, fijémonos en el mínimo en x_{m2} . Allí la partícula estará en equilibrio. Para $x > x_{m2}$ la pendiente es positiva, luego \vec{F} será negativa, dirigida hacia la posición de equilibrio, y para $x < x_{m2}$ la pendiente es negativa luego \vec{F} será positiva, dirigida de nuevo hacia la posición de equilibrio. Tenemos así una fuerza que conduce continuamente a la partícula hacia la posición de equilibrio; x_{m2} será una posición de equilibrio estable. Un análisis análogo en torno a x_M nos conduce a identificarlo como una posición de equilibrio inestable. Con

carácter general se identifican los mínimos de $U(x)$ como posiciones de equilibrio estable y sus máximos como posiciones de equilibrio inestable. A fuerzas como las que se acaban de describir, que tienden a llevar de nuevo a la partícula a su posición de equilibrio, se las denomina “fuerzas recuperadoras”.

- Puntos de retorno. Dependiendo del valor de la energía mecánica E_i de la partícula, esta va a poder describir distintos movimientos. Vamos a centrarnos, por ejemplo, en un nivel como el etiquetado como E_3 en la gráfica. Con esa energía la partícula solo puede moverse en torno a x_{m2} , con un movimiento acotado entre x_{a3} y x'_{a3} (puntos de retorno). La partícula no puede estar fuera de ese rango porque su energía potencial nunca puede superar el valor de su energía mecánica; los puntos de retorno por tanto son las abscisas de los puntos de intersección entre la curva $U(x)$ y el nivel -constante- E . Veremos que la situación que acabamos de describir se corresponde con un **movimiento oscilatorio** en torno al mínimo, con una amplitud dada por x_{a3} y x'_{a3} que depende del valor de la energía. Para valores de energía mecánica mayores que E_3 (como las E_2 y E_1 de la figura), la partícula podría recorrer un rango más amplio de posiciones a lo largo del eje x .

Parte III

MOVIMIENTO OSCILATORIO

INTRODUCCIÓN

Existen muchos movimientos que se repiten una y otra vez. Es decir, si pensamos en las magnitudes cinemáticas, la posición, velocidad y aceleración de la partícula toman el mismo valor a intervalos regulares de tiempo. Nos referiremos entonces a movimientos periódicos u oscilaciones. Un movimiento periódico se caracteriza porque existe una posición de equilibrio estable; cuando el sistema se ve alejado de dicha posición, actúa una fuerza que tiende a devolverlo al equilibrio.

En la parte III se va a estudiar la dinámica de sistemas mecánicos oscilantes. Se comenzará por el Movimiento Armónico Simple (MAS, oscilaciones armónicas), para pasar a analizar en los capítulos siguientes el movimiento de los sistemas oscilantes sometidos a fuerzas disipativas (oscilaciones amortiguadas) o a fuerzas externas periódicas (oscilaciones forzadas).

Capítulo 7

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Comenzamos con este capítulo el estudio de la dinámica de sistemas mecánicos oscilantes. Nos centraremos en el análisis de la dinámica de las oscilaciones armónicas, analizando algunos de los ejemplos paradigmáticos. La metodología común será plantear la ecuación de movimiento del sistema (segunda ley de Newton) y resolverla (o al menos comprobar la solución propuesta).

7.1. Ecuaciones básicas y ejemplos

Existen múltiples ejemplos de sistemas oscilantes. Se caracterizan por una magnitud física (posición, velocidad, aceleración...) cuyos valores se repiten a intervalos regulares de tiempo.

Un ejemplo interesante es el movimiento armónico simple que encontramos, por ejemplo, cuando se tiene una masa sujeta a un muelle y se estudia su movimiento respecto a la posición de equilibrio.

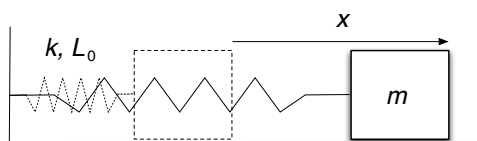


Figura 7.1: Si se estira el muelle una cierta longitud x respecto a su longitud natural L_0 , cuando se suelta la masa m comienza a oscilar.

Sea x la distancia de m respecto a su posición de equilibrio; corresponde al cambio de longitud que experimenta el muelle respecto a L_0 (ver Fig. 7.1). Al

estirar el muelle, este ejerce sobre m una fuerza proporcional a dicha distancia, siendo la constante de proporcionalidad (k), la *constante elástica del muelle* :

$$F = -k x$$

Escribiendo la segunda Ley de Newton:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

Para indicar derivada con respecto al tiempo en lo que sigue colocaremos un punto sobre la variable que se deriva, y si la derivada es doble dos puntos. Con esta notación, la ecuación¹ correspondiente al movimiento de m será:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x$$

Es inmediato comprobar que si, como ocurre en este caso, la aceleración es proporcional al desplazamiento y con signo opuesto, la solución del movimiento es una oscilación armónica:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \delta)$$

siendo $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. En esta expresión A es la amplitud de la oscilación, ω_0 es la frecuencia angular natural ($\omega_0 = 2 \pi \nu = 2 \pi / \mathcal{T}$, expresada en el SI en rad/s) y δ es el desfase que viene dado por la posición a $t = 0$. ν es la frecuencia, medida en hertzios ($\text{Hz} = \text{ciclos/s} = \text{s}^{-1}$) y \mathcal{T} el periodo medido en segundos. La figura 7.2 ilustra la interpretación gráfica de estos parámetros para el caso $\delta = \pi/2$, es decir $x = A \cos(\omega_0 t + \pi/2) = A \sin(\omega_0 t)$.

Hemos de destacar que las características de la solución se extienden a cualquier sistema cuya ecuación dinámica se pueda expresar como:

$$\ddot{\xi} = -\omega_0^2 \xi$$

siendo ξ una magnitud física cualquiera (mecánica, térmica, eléctricas, etc).

¹Este tipo de ecuación, que ha surgido al aplicar la segunda ley de Newton, se denomina ecuación diferencial. Para entender su significado pensemos que la función $x(t)$ que satisfaga dicha relación entre derivadas nos proporcionará el movimiento del sistema (es la solución de la ecuación diferencial). Existen métodos de resolución sistemáticos, pero aquí operaremos de modo empírico.

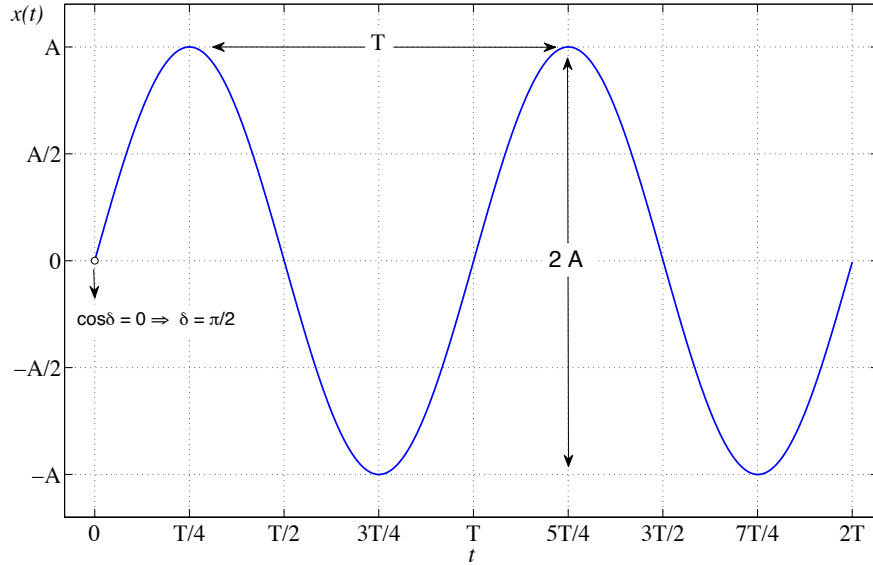


Figura 7.2: Ilustración de los parámetros que caracterizan un movimiento armónico simple del tipo $x = A \cos(\omega_0 t + \delta)$.

7.2. Trabajo y energía en el movimiento armónico simple

Veamos algunas consideraciones energéticas del M.A.S.

- **Energía total:** Para calcular la energía mecánica del oscilador evaluaremos su energía cinética y potencial. Como vimos en el capítulo anterior, para la fuerza elástica se define la energía potencial de acuerdo con:

$$\mathcal{U}(x) - \mathcal{U}(0) = - \int_{x'=0}^x \vec{F} \cdot d\vec{x}' = - \int_0^x (-k x') dx' = \frac{1}{2} k x^2$$

Con lo que la energía será, tomando $\mathcal{U}(0)=0$ y desarrollando ambos términos:

$$\begin{aligned} E &= T + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \\ T &= \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta) \\ U &= \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t + \delta) \end{aligned}$$

Entonces, sumando las dos expresiones se tiene:

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

Puede verse que es constante. Es inmediato ver que podemos tomar el punto de velocidad nula (puntos de retroceso en el lenguaje del capítulo 6) como referencia sencilla para calcular la energía del sistema oscilante.

Veamos en este caso qué información puede extraerse del análisis de la curvas de energía potencial, siguiendo el estudio planteado en el capítulo 6.

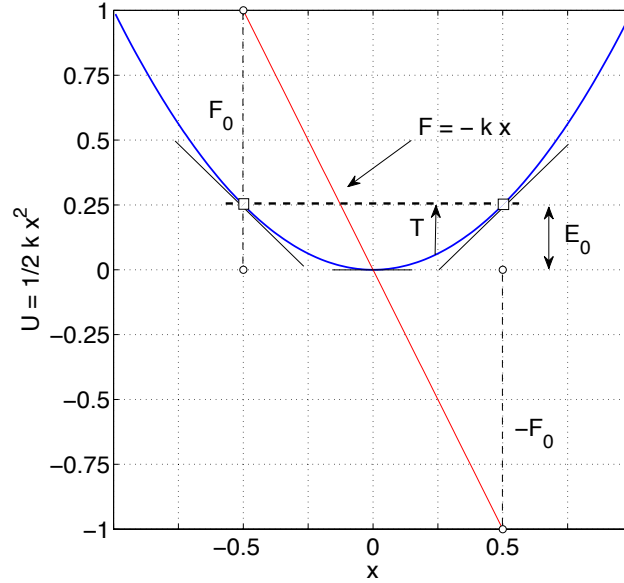


Figura 7.3: Representación gráfica de la energía potencial elástica asociada a la fuerza $F = -kx$ frente a x .

Se muestra en la figura la parábola que representa a la energía potencial elástica en función de la posición. Para un valor dado de energía total (llamémoslo E_0), la oscilación tendrá lugar en torno al equilibrio y con una cierta amplitud. En nuestro ejemplo, si tomamos en particular $E_0 = 0.25$, dado que $E = T + U$ y T sólo puede ser positiva o nula, los valores admisibles de U son los que pertenecen al intervalo $0 \leq U \leq 0.25$. Dicho de otro modo, la partícula realiza oscilaciones entre los puntos $x = -0.5$ y $x = 0.5$, que serían los “puntos de retorno” como indica el gráfico. En dichos extremos tenemos $E = U$, es decir, la partícula se detiene ($v = 0$) y sólo tiene energía potencial. Tras detenerse, y debido a la fuerza $F = -kx$, “acelera” hacia la posición de equilibrio, donde la energía

potencial es nula y la total coincide con la cinética $E = T \Leftrightarrow \mathcal{U} = 0$. Las propiedades del movimiento de la partícula sometida a la fuerza elástica del ejemplo analizado son, en realidad, aplicables a situaciones mucho más generales. En realidad, lo dicho puede aplicarse a cualquier sistema sometido a una “fuerza recuperadora”, que definiremos como aquella que produce el retorno a la posición de equilibrio de la partícula sobre la que actúa.

■ **Energías cinética y potencial medias:**

Vamos a evaluar $\langle T \rangle$ y $\langle \mathcal{U} \rangle$, valores promedio de las energías cinética y potencial, respectivamente, tomando como referencia un intervalo temporal igual al periodo \mathcal{T} .

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \delta)$$

$$\langle T \rangle \equiv \frac{1}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} T dt = \frac{m A^2 \omega_0^2}{2 \mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \sin^2(\omega_0 t + \delta) dt$$

Calculando la integral se obtiene:

$$\langle T \rangle = \frac{m A^2 \omega_0^2}{2 \mathcal{T}} \frac{\mathcal{T}}{2} = \frac{1}{4} k A^2$$

De forma análoga puede calcularse el valor medio de la energía potencial:

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \frac{k A^2}{2 \mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} \cos^2(\omega_0 t + \delta) dt = \frac{1}{4} k A^2$$

Se tiene por tanto que los valores medios corresponden en ambos casos a la mitad del valor de la energía mecánica E .

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \langle T \rangle = \frac{1}{2} E$$

■ **Deducción de la ecuación de movimiento a partir de la expresión de la energía:**

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

Al ser la energía mecánica constante, su derivada respecto al tiempo debe ser cero.

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} m 2 \dot{x} \ddot{x} + \frac{1}{2} k 2 x \dot{x} \Rightarrow m \ddot{x} + k x = 0$$

Despejando encontramos la ecuación diferencial de movimiento:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x \text{ siendo } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

7.3. Ejemplos

Ejemplo 1: Objeto colgado de un muelle vertical (Fig. 7.4)

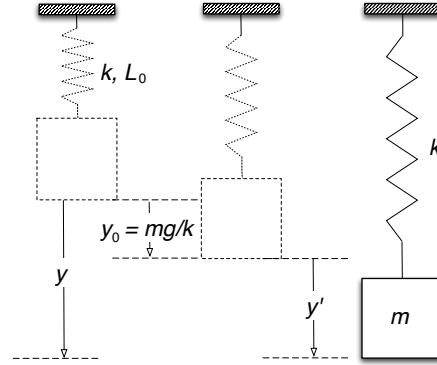


Figura 7.4: Objeto de masa m colgado de un muelle vertical.

Ahora, la ecuación de movimiento es:

$$\begin{aligned} m \ddot{y} &= -k y + m g = -k y' \Rightarrow m \ddot{y}' = -k y' \\ \Rightarrow \ddot{y}' &= -\frac{k}{m} y' \end{aligned}$$

De modo que si referimos el movimiento a la posición de equilibrio (dibujo central en la figura) podemos “olvidarnos” de la gravedad, ya que recuperamos la ecuación del movimiento armónico simple.

Por otra parte, podemos verificar que la expresión de la energía potencial total (elástica más gravitatoria) tomando como referencia la posición de equilibrio es:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} k y'^2$$

Ejemplo 2: El péndulo simple.(Fig. 7.5)

En un péndulo simple (partícula de masa m en el extremo de un hilo inextensible de longitud L ; movimiento restringido a un plano) el movimiento cuando se ve apartado del equilibrio y se le deja evolucionar libremente es oscilatorio, pero como veremos a continuación sólo es armónico (M.A.S.) para pequeños desplazamientos fuera del equilibrio.

En la dirección del hilo (radial), la tensión menos la componente radial del peso proporciona una aceleración centrípeta.

$$T - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{L}$$

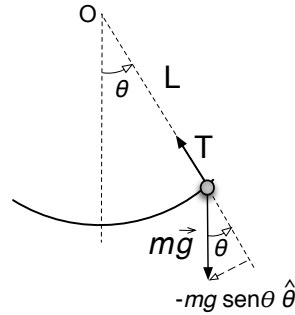


Figura 7.5: Esquema de un péndulo simple, mostrando las fuerzas que actúan sobre la partícula de masa m . Se muestra la componente tangencial del peso. $\theta > 0 \Rightarrow F_\theta = -mg \sin \theta < 0$.

En cuanto a la dirección tangencial, la segunda ley de Newton nos proporciona información del movimiento (incluida la modificación del módulo de \vec{v}):

$$F_T = m a_T, \text{ donde}$$

$$a_T = \dot{v} = L \dot{\omega} = L \ddot{\theta} \equiv L \alpha$$

Sustituyendo a_T en la expresión anterior:

$$-m g \sin \theta = m L \ddot{\theta}$$

La ecuación anterior no corresponde en general a un M.A.S., pero para $\theta < 10^\circ$ podemos utilizar la aproximación $\sin \theta \approx \theta$, y obtenemos la ecuación de un M.A.S.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \theta$$

Por analogía con lo visto al analizar el sistema masa-muelle,² se tiene que en el caso de las oscilaciones de baja amplitud del péndulo simple la frecuencia angular natural de la oscilación libre viene dada por:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Y la posición de la partícula vendrá dada por: $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$

En la siguiente sección se profundizará en el hecho de que la aparición de oscilaciones armónicas para pequeñas amplitudes es una propiedad muy general, como ya se indicó en el capítulo 6 al analizar las curvas de energía potencial.

²La frecuencia se calcula como la raíz cuadrada de la constante que acompaña al desplazamiento en la ecuación de movimiento.

Ejercicios propuestos:

1. Análogamente a lo que se acaba de mostrar, se propone al lector que obtenga la ecuación de movimiento para las oscilaciones del péndulo simple a partir de la ecuación de su energía; teniendo en cuenta que $E = T + U = \text{constante} \Rightarrow dE/dt = 0$.
2. Se plantea igualmente la siguiente pregunta: ¿cuál es el valor medio - en un periodo- de la potencia suministrada por el muelle en el caso de la figura 7.1? Recordad que $\mathcal{P}_{ins} = Fv$ y que habrá que evaluar $\langle \mathcal{P}_{ins} \rangle$ en un periodo.

7.4. *Pequeñas oscilaciones. Aproximación armónica*

En esta sección se va a ver que, en general, los sistemas oscilantes no armónicos pueden ser descritos como si lo fuesen en tanto en cuanto nos limitemos a oscilaciones de pequeña amplitud (“pequeñas oscilaciones”).³ Cuando no se cumpla dicha condición, el comportamiento se hace sumamente complejo.

Comenzaremos recordando algunos aspectos tratados en el análisis de sistemas oscilantes mediante argumentos de fuerza/energía, a los que aquí se dará una fundamentación matemática general.⁴ Hasta el momento se han establecido de modo muy genérico las condiciones que cumple un sistema que oscila en torno a un punto de equilibrio. Limitándonos a casos unidimensionales y tomando $x_{eq} = 0$, la fuerza recuperadora F y su energía potencial asociada $U = -\int F dx$ deben ser tales que

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} > 0, \quad x < 0$$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = 0, \quad x = 0$$

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} < 0, \quad x > 0$$

Nótese que la energía potencial asociada presenta un mínimo en $x = 0$, posición de equilibrio estable.

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, muy generales, vamos a concretar la forma de F y U apoyándonos en razonamientos basados en la interpre-

³Salvo en situaciones muy excepcionales que no vamos a analizar aquí.

⁴Se recomienda releer la sección 6.6, además de la 7.2 que se acaba de ver.

tación del concepto de derivada (Cap. 3). Asumiendo continuidad en la función F y sus derivadas (algo natural desde el punto de vista físico), podemos decir que en puntos x suficientemente próximos al origen, la fuerza F sería reemplazable por una aproximación lineal, f , cuya pendiente es la derivada $F'(x=0)$. De acuerdo con esto, se puede aproximar F como

$$F(x) \approx f(x) = -\mathcal{K}x \quad , \quad x \rightarrow 0 \quad (7.1)$$

donde $\mathcal{K} = -F'(x=0)$. Vemos en la figura 7.6 que $F(x)$ se aproxima por una recta de pendiente negativa y que pasa por el punto $x=0$.⁵ Integrando esa fuerza se encuentra la energía potencial asociada:

$$\mathcal{U}(x) \approx u(x) = \frac{1}{2}\mathcal{K}x^2 \quad , \quad x \rightarrow 0 \quad (7.2)$$

La expresión de la energía con dependencia cuadrática en x se conoce como **aproximación armónica** de la energía potencia, y corresponde a la función parabólica de la figura. Nótese que $\mathcal{K} = -F'(x=0) = d^2\mathcal{U}/dx^2|_{x=0}$.

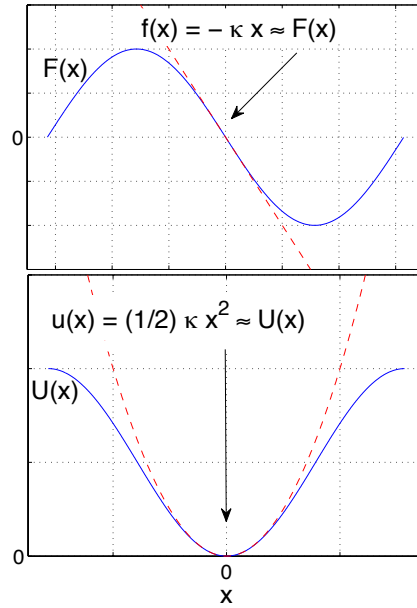


Figura 7.6: Representación gráfica de la fuerza recuperadora $F = -a \sin(bx)$ y su energía potencial asociada $\mathcal{U} = (a/b) - (a/b) \cos(bx)$, junto con las aproximaciones lineal/cuadrática.

⁵ Esto implica reconocer simplemente que, en un entorno suficientemente pequeño, una curva y su recta tangente son muy parecidas.

En otras palabras, cualquier movimiento oscilatorio” provocado por una fuerza $F(x)$, puede aproximarse por una oscilación armónica. La constante \mathcal{K} representa la de un “muelle equivalente”, cuyo efecto sería indistinguible del de la fuerza propiamente dicha, para oscilaciones de pequeña amplitud. En la figura 7.6 la fuerza recuperadora es de la forma $F(x) = -a \sin(bx)$ con a y b constantes positivas. En este caso tendríamos por tanto que $\mathcal{K} = a \cdot b$. Nótese que esa fuerza es la del péndulo simple estudiado en el apartado anterior, para el que hemos visto que la fuerza “recuperadora” es $F_T = -mg \sin \theta$.

Evidentemente, el rango de validez de la aproximación armónica dependerá de cada problema concreto. De modo genérico, lo que puede asegurarse es que en el entorno de la posición de equilibrio la oscilación es “casi armónica”, con una constante recuperadora dada por la ecuación anterior.

LLegados a este punto, vamos a ver que las condiciones de que la posición de equilibrio sea $x=0$ y que la energía potencial en el equilibrio sea cero se pueden obviar sin que las conclusiones extraídas pierdan validez. Para ilustrarlo, vamos a suponer una energía potencial como la analizada en la sección 6.6 cuya dependencia con la posición es algo más complicada.

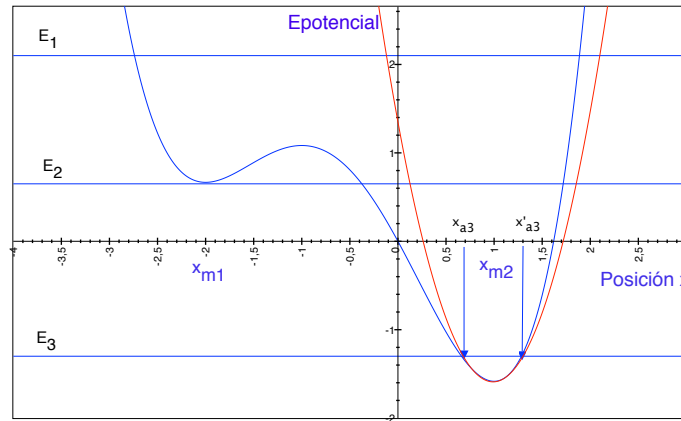


Figura 7.7: Curva de energía potencial frente a la posición de la partícula. Se indican los dos puntos de equilibrio estable: x_{m1} y x_{m2} . Se muestra asimismo la parábola que corresponde a la aproximación armónica, válida en el entorno del mínimo x_{m2} .

La función de la figura 7.7 presenta dos mínimos, x_{m1} y x_{m2} , que corresponden con las dos posiciones de equilibrio estable. Dependiendo del valor de la energía mecánica E_i de la partícula, esta va a poder describir distintos movimientos. Vamos a centrarnos en un nivel de energía como el etiquetado como E_3 en la gráfica. Con esa energía la partícula va a describir una oscilación en torno a x_{m2} y acotada entre x_{a3} y x'_{a3} (puntos de retorno). De acuerdo con

lo que se acaba de ver, la energía de la partícula podrá describirse, de forma aproximada pero esencialmente correcta,⁶ como:

$$\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(x_{m2}) + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathcal{U}}{dx^2} \Big|_{x=x_{m2}} (x - x_{m2})^2 \quad (7.3)$$

donde simplemente se ha sustituido la distancia respecto al equilibrio (x) de la expresión 7.2, por la actual $(x - x_{m2})$, y donde se ha tenido en cuenta que la energía potencial toma un valor no nulo en la posición de equilibrio, $\mathcal{U}(x_{m2}) \neq 0$. Se interpreta por tanto que la partícula describirá una oscilación, esencialmente armónica, de frecuencia $\omega_0 = \sqrt{\mathcal{K}/m}$, siendo $\mathcal{K} = d^2\mathcal{U}/dx^2|_{x=x_{m2}}$ y amplitud $A = x'_{a3} - x_{m2} = x_{m2} - x_{a3}$.

Explicación alternativa opcional

Hay un modo alternativo de justificar las ecuaciones 7.1 y 7.2 basado en el desarrollo en serie de Taylor. Recordemos que para una función $f(x)$, en torno a $x = 0$, este desarrollo proporciona una representación polinómica dada por la serie:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} \Big|_{x=0} x^n \quad (7.4)$$

Respecto a la fuerza, dado que se anula en la posición de equilibrio (tomada aquí en $x = 0$), tendría como primer término no nulo el de orden lineal. Podemos decir

$$F(x) = \frac{dF}{dx} \Big|_{x=0} x + O(x)^2 \quad (7.5)$$

En cuanto a la energía potencial, puede expresarse como

$$\mathcal{U}(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2\mathcal{U}}{dx^2} \Big|_{x=0} x^2 + O(x)^3 \quad (7.6)$$

donde hemos usado $\mathcal{U}(x=0) = 0$ y $\mathcal{U}'(x=0) = 0$. Cuando el desplazamiento respecto al equilibrio está restringido (=valores de x pequeños), la expresión de la energía que resulta de despreciar $O(x)^3$ es una buena aproximación para la energía del oscilador:

$$\mathcal{U}(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2\mathcal{U}}{dx^2} \Big|_{x=0} x^2 \quad (7.7)$$

⁶Los valores de x compatibles con la energía E_3 son cercanos a x_{m2} , con lo que las distancias al mínimo siempre serán pequeñas. Al calcular las potencias sucesivas de la diferencia $(x - x_{m2})$ cada vez la contribución es menos importante, por lo que se desprecian los términos para $n > 2$ sin cometer grandes errores.

Y se encuentra de nuevo la expresión de la **aproximación armónica** para la energía potencial. A la vista de esta ecuación y de la 7.2, se puede ver que la *constante de muelle* equivalente para cualquier problema de pequeñas oscilaciones puede obtenerse como

$$\mathcal{K} = -\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{d^2\mathcal{U}}{dx^2}\right|_{x=0} \quad (7.8)$$

Capítulo 8

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

Vamos a estudiar la dinámica de un oscilador sometido además a la acción de una fuerza de fricción de tipo viscoso como la introducida en la sección 5.5.1. Comenzaremos planteando la ecuación diferencial de movimiento; analizaremos a continuación el comportamiento del sistema en función del valor de la constante de amortiguamiento en relación a la frecuencia angular natural del oscilador.

8.1. *Ecuaciones básicas.*

En los movimientos oscilatorios reales se disipa energía debido a la presencia inevitable de fuerzas de fricción. Eso da lugar a una disminución paulatina de la amplitud de oscilación.

Vamos a contemplar el caso de amortiguamiento de tipo viscoso (ver Fig.8.1) y estudiaremos sus características principales. No obstante, existen otros tipos de fricción que serán tratados como problemas de aplicación. Centrándonos en el que nos ocupa, una buena descripción para la fricción es:

$$\vec{F}_v = -b \vec{v} \quad (8.1)$$

siendo la fuerza de fricción proporcional y de sentido opuesto a la velocidad. b es un parámetro que depende del medio viscoso (en concreto, de su viscosidad η) y de la geometría del objeto sumergido en él. Entonces, la ecuación de movimiento queda:

$$m \ddot{x} = -k x - b \dot{x} \quad (8.2)$$

Dividiendo por m la ecuación anterior y agrupando en el primer miembro se llega a:

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (8.3)$$

A b/m lo denominaremos **constante de amortiguamiento**, γ .

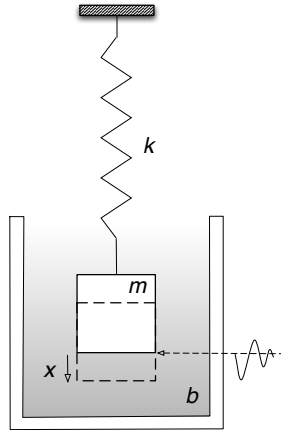


Figura 8.1: Esquema de un oscilador mecánico amortiguado. La masa m , sujeta a un muelle de constante k , se halla además sumergida en un líquido viscoso, lo que la somete a una fuerza adicional $-b\dot{x}$.

El análisis de la solución exacta de esta nueva ecuación diferencial se aplazará hasta el apartado siguiente. Aquí comenzaremos por proponer una solución aproximada, que nos permitirá ir conociendo las propiedades del sistema. Nos basaremos en una serie de consideraciones físicas razonables, que permitirán hacer una formulación matemática básica del problema:

1. Si b es muy pequeño es razonable suponer que el sistema oscilará con una frecuencia muy parecida a la frecuencia natural del sistema. En estas condiciones, la *frecuencia de las oscilaciones amortiguadas* será $\omega_1 \approx \omega_0$.
2. De la misma manera, si el amortiguamiento es débil, la pérdida de energía en cada ciclo (1 ciclo= 1 oscilación) debida a la fricción se puede suponer muy pequeña, y la energía puede tratarse de forma similar a la de un MAS. En el MAS el valor medio de la energía cinética y de la potencial coinciden: $\langle U \rangle = \langle T \rangle = \frac{1}{2} E$. Si expresamos la tasa de pérdida de energía con el tiempo (potencia instantánea= $\vec{F}\vec{v}$) asociada a la fricción como $F_v \dot{x}$, se tiene que:

$$\frac{dE}{dt} = F_v \dot{x} = -b \dot{x}^2 \quad (8.4)$$

Y como el cuadrado de la velocidad es proporcional a la energía:

$$\frac{dE}{dt} \sim -\frac{b}{m} E = -\gamma E \quad (8.5)$$

Se considera que el tiempo característico en el que la energía E varía de forma apreciable es muy grande comparado con el periodo de oscilación. En estas condiciones, podemos considerar que la energía "casi" se conserva en el intervalo de unos pocos ciclos. En la Fig. 8.2 se ha representado esa condición para la amplitud, de forma que no apreciamos cambios si nos fijamos en unas cuantas oscilaciones, aunque sí que se produce una disminución en escalas más largas de tiempo. La ecuación obtenida es fácil de resolver:

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma E \Rightarrow \frac{dE}{E} = -\gamma dt \Rightarrow E = E_0 e^{-\gamma t} \quad (8.6)$$

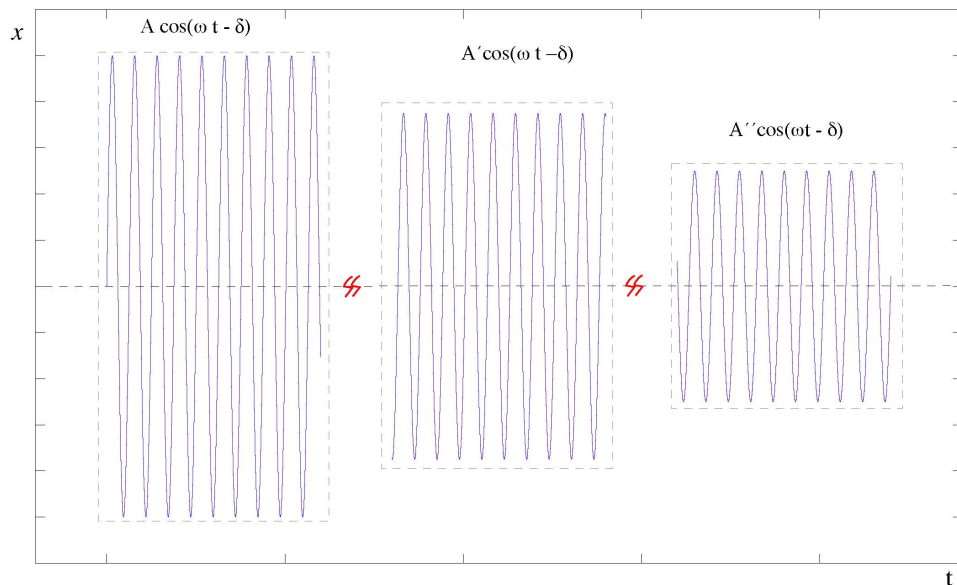


Figura 8.2: Representación de la hipótesis cuasi-estacionaria en las oscilaciones amortiguadas. La amplitud disminuye con el tiempo, pero, como lo hace lentamente, se mantiene prácticamente constante en intervalos de varias oscilaciones.

Con esto tendríamos ya una información parcial sobre el movimiento del sistema. Para el caso de una leve fricción viscosa, la energía decrece de modo exponencial. Esta característica es muy importante y, entre otras cosas, nos permite definir el denominado *factor de calidad*, proporcional

al cociente entre la energía en un instante t : $E(t)$ y la pérdida de energía en un ciclo, $\Delta E = E(t + T) - E(t)$.¹

$$Q \equiv 2 \pi \frac{E}{|\Delta E|} \quad (8.7)$$

De acuerdo con (8.6), cuando el amortiguamiento es débil puede verse que $\Delta E \approx E\gamma T$, con lo que Q puede escribirse también como $Q = \omega_1/\gamma = \omega_0/\gamma$.

- De acuerdo con lo que se acaba de ver, la amplitud de oscilación puede también tratarse en la hipótesis "cuasi-estacionaria" de la figura 8.2 Recordemos que en el M.A.S. la energía se relaciona con la amplitud del modo:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \Rightarrow \frac{E}{E_0} = \frac{A^2}{A_0^2} \Rightarrow A^2 = A_0^2 e^{-\frac{b}{m} t} \Rightarrow A = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t} \quad (8.8)$$

donde $A_0 \equiv A(t = 0)$.

8.2. Discusión de la solución exacta de la oscilación amortiguada

En este apartado, vamos a estudiar la solución exacta de la ecuación de movimiento. No entraremos en el detalle de los métodos sistemáticos de resolución de ecuaciones diferenciales, limitándonos aquí a presentar una hipótesis plausible de la forma de la solución, y dando al lector las pautas para verificar su corrección. El argumento es el siguiente: como ya dijimos, para valores de b muy pequeños la solución de la ecuación de movimiento debe asemejarse a la del M.A.S., pero con una amplitud que en lugar de permanecer constante, decrece poco a poco. Puesto que en esta hipótesis "cuasiestacionaria" (válida si b es muy pequeño) se mostró que el decaimiento en amplitud sigue un patrón exponencial ecuación 8.8), supondremos que la solución exacta toma la forma

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2} t} \cos(\omega_1 t + \phi) \quad (8.9)$$

que corresponde a un M.A.S. de frecuencia angular ω_1 y amplitud decreciente.

¹En general podemos interpretar físicamente la magnitud física Q en términos de la pérdida relativa de energía.

Puede verificarse que la hipótesis anterior es correcta sin más que derivar y sustituir en la ecuación de la ley de Newton. De hecho, para que así sea, la frecuencia ω_1 debe tomar el valor:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (8.10)$$

Puede observarse que para que ω_1 tenga sentido como frecuencia de oscilación, debe verificarse que $\omega_0 > \gamma/2$. Denominaremos a esa condición como de “**Amortiguamiento débil**”. Diremos que la solución exacta del movimiento oscilatorio amortiguado viscoso en condiciones de amortiguamiento débil toma la forma:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - (\gamma^2/4)} t + \phi) \quad (8.11)$$

Es el momento de introducir una consideración importante: el movimiento de un oscilador amortiguado va a mostrar características muy diferentes en función del signo de la diferencia entre los parámetros ω_0^2 y $\gamma^2/4$.

Pueden distinguirse tres situaciones, que se detallan a continuación:

- (i) Amortiguamiento débil o subamortiguamiento: $\gamma/2 < \omega_0 \Rightarrow \omega_1 > 0$ es la frecuencia de la oscilación. Es el caso ya descrito, que se interpreta como una oscilación similar a un M.A.S. de frecuencia ω_1 , pero donde la amplitud presenta un decaimiento exponencial (tanto menos acusado cuanto menor sea el amortiguamiento)
- (ii) Amortiguamiento crítico: $\gamma/2 = \omega_0 \Rightarrow \omega_1 = 0$. Cuando se da esta situación **el sistema no va a oscilar**, siendo la solución de la forma:

$$x_{crit}(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad (8.12)$$

Los valores de A y B son característicos de cada movimiento, estando determinados por las condiciones iniciales (posición y velocidad en $t=0$): $A=x(0)$ y $B=\dot{x}(0) + (\gamma/2)x(0)$

- (iii) Sobreamortiguamiento: $\gamma/2 > \omega_0 \Rightarrow \omega_1 = i\sqrt{(\gamma/2)^2 - \omega_0^2}$. Aparece una frecuencia “imaginaria”, indicación de que el sistema tampoco oscila en estas condiciones. La forma que adquiere la solución del movimiento del oscilador sobreamortiguado es:

$$x_{sup}(t) = A_1 e^{-(\frac{\gamma}{2} + \beta)t} + A_2 e^{-(\frac{\gamma}{2} - \beta)t} \quad (8.13)$$

Nótese que hemos definido la constante (con dimensiones de $[T]^{-1}$) $\beta \equiv \sqrt{(\gamma/2)^2 - \omega_0^2}$ para simplificar la notación. A_1 y A_2 se determinarán igualmente a partir de las condiciones iniciales.

En la figura 8.3 se representa la solución del movimiento de un oscilador amortiguado para cada uno de los casos discutidos anteriormente. Deben destacarse varios aspectos: (i) la modulación de amplitud de la solución oscilante para el caso subamortiguado, que viene dada por el factor exponencial, (ii) en las soluciones crítica y sobreamortiguada no llega a producirse una oscilación y (iii) la solución sobreamortiguada se separa menos del equilibrio (para condiciones iniciales idénticas), pero regresa hacia este con más lentitud que la crítica.

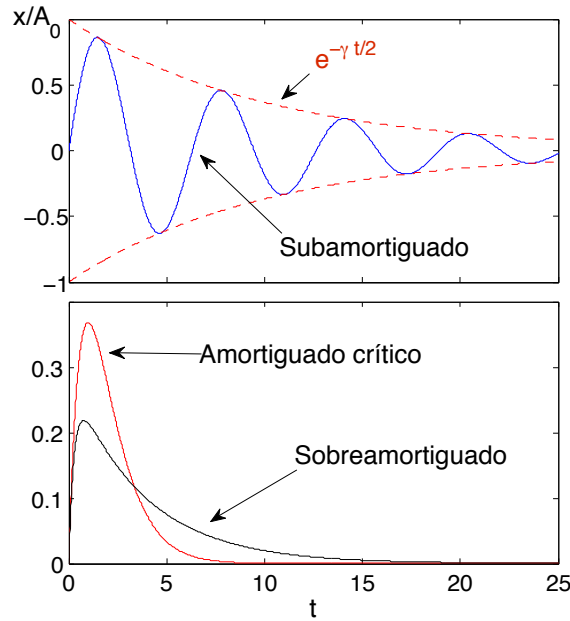


Figura 8.3: Soluciones subamortiguada, crítica y sobreamortiguada para un oscilador armónico sometido a una fuerza de fricción creciente ($\gamma/\omega_0 = 0.2, 2$ y 4 , respectivamente) y con las mismas condiciones iniciales.

Lectura opcional (hasta el final de la sección)

Para finalizar este capítulo, vamos a reconsiderar la evolución de la energía del sistema. Recordemos que bajo la hipótesis cuasiestacionaria obteníamos el decrecimiento exponencial de la energía, dado por la expresión 8.6. Realmente, puesto que se conoce ya la forma exacta de la solución $x(t)$ de la oscilación, se puede obtener la forma exacta para la energía que debería parecerse a la aproximada tanto más cuanto mejor pueda aplicarse la citada hipótesis, esto

es, cuando en un conjunto de varias oscilaciones la amplitud haya decaído muy poco. Es posible evaluar de manera exacta la energía del sistema para un caso subamortiguado partiendo de la ecuación (8.11), y teniendo en cuenta que:

$$E(t) = U + T = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (8.14)$$

A modo de ejemplo, se muestra en la figura 8.4 la evolución de la energía para un sistema con $m = 1 \text{ kg}$, $\omega_0 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$, $\gamma = 0,2 \text{ s}^{-1}$. Aunque puede apreciarse la diferencia entre la dependencia $E(t)$ exacta y la aproximada, esta proporciona una descripción aceptable. Se comprueba fácilmente que disminuyendo γ el acuerdo mejora notablemente. En general, para valores del factor de calidad superiores a 5 ($Q = \omega_0/\gamma > 5$), la fórmula exponencial $E = E_0 e^{-\gamma t}$ da resultados razonables, por lo que la usaremos para describir el decaimiento de la energía con el tiempo.

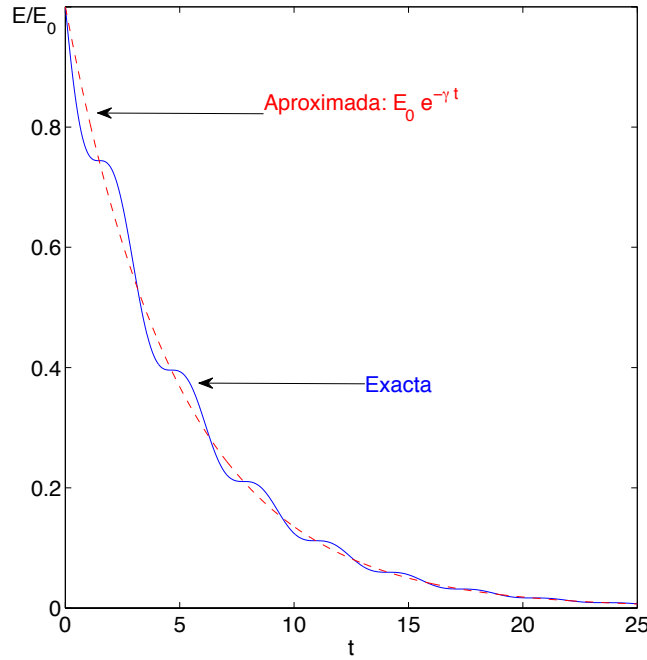


Figura 8.4: Evolución temporal de la energía mecánica de un oscilador subamortiguado. Se compara la expresión exacta, obtenida a partir de 8.14 con la solución aproximada dada por 8.6. Se ha tomado $m = 1, \omega_0 = 1, \gamma = 0.2$ como en el ejemplo anterior.