
EJERCICIO 211: ECUACION DE KEPLER

OBJETIVOS

- **Familiarizarse** con los conceptos de **Ecuación de Kepler, y ecuación transcendente**
- **Familiarizarse con el Método Iterativo, MI,** para resolver ecuaciones
- **Escribir un programa** en Basic, Pascal, Fortran, C, o Phyton, que resuelva la ecuación por ese método
- Interpretar un **diagrama de flujo de un programa**

1. Introducción

Este ejercicio se enmarca dentro de la **Astronomía Matemática**. Presenta un problema clásico de la Astronomía, la resolución de la **Ecuación de Kepler** (Portilla, 2009). Esta ecuación surge en la **Mecánica Celeste** y su solución es necesaria para poder calcular la posición de un planeta en su órbita.

La Ecuación de Kepler es

$$E - e \text{ sen } E = M$$

donde E es la anomalía excéntrica, M, la anomalía media, e la excentricidad de la órbita, y θ la anomalía verdadera que proporciona la posición verdadera del objeto sobre su órbita (ver Figura 1).

Una manera de resolver esta ecuación es por el **Método Iterativo** el cual es muy utilizado en programas más sofisticados. El MI es una herramienta matemática cuyo uso es frecuente en la escritura de programas de cálculo científico, de ahí nuestro énfasis en familiarizarse con ella. El objetivo de este trabajo es escribir un programa de computadora en su lenguaje favorito para resolver esta ecuación por el método iterativo.

2. La Ecuación de Kepler

En la Figura 1 θ nos da la posición angular correcta del objeto sobre la órbita, media a partir del perihelio, en la dirección del movimiento y desde el foco F. E nos da información sobre un objeto ficticio situado en el punto S’ sobre el círculo auxiliar, tal que la línea S`S es perpendicular al eje mayor de la elipse. Por otra parte M nos da la posición sobre la órbita, pero de un objeto que se moviese uniformemente sobre ella con una velocidad angular constante 2 π /P, donde P es el período orbital.

Recordando la ley de las áreas, el área FS’P es cubierta en un tiempo

$$\text{area (FS'P)} = \pi\, a^2 \; (t - T\,) / P$$

pero esta área verifica

$$\text{área (FS'P)} = \text{área (SÒP)} - \text{área (OS'F)}$$

Esas áreas valen

$$\pi\, a^2 \; (t - T\,) / P = \pi\, a^2 \; E / 2\, \pi - a^2\, e \operatorname{sen} E / 2$$

Simplificando,

$$2\, \pi\, (t - T\,) / P = E - e \operatorname{sen} E = M$$

El término de la izquierda es la anomalía media, y es conocido pues se conoce el período de la órbita y el tiempo transcurrido desde el paso por el perihelio. La ecuación

$$E - e \operatorname{sen} E = M$$

es la Ecuación de Kepler. Hay dos variables conocidas en este ecuación, e y M. Pero como E aparecen también dentro del seno no se puede despejar y por eso se le llama una **ecuación transcendente**.

Para cualquier par de valores, e, M, esta ecuación puede ser resuelta con el grado de precisión que se desee si se adopta el método correcto.

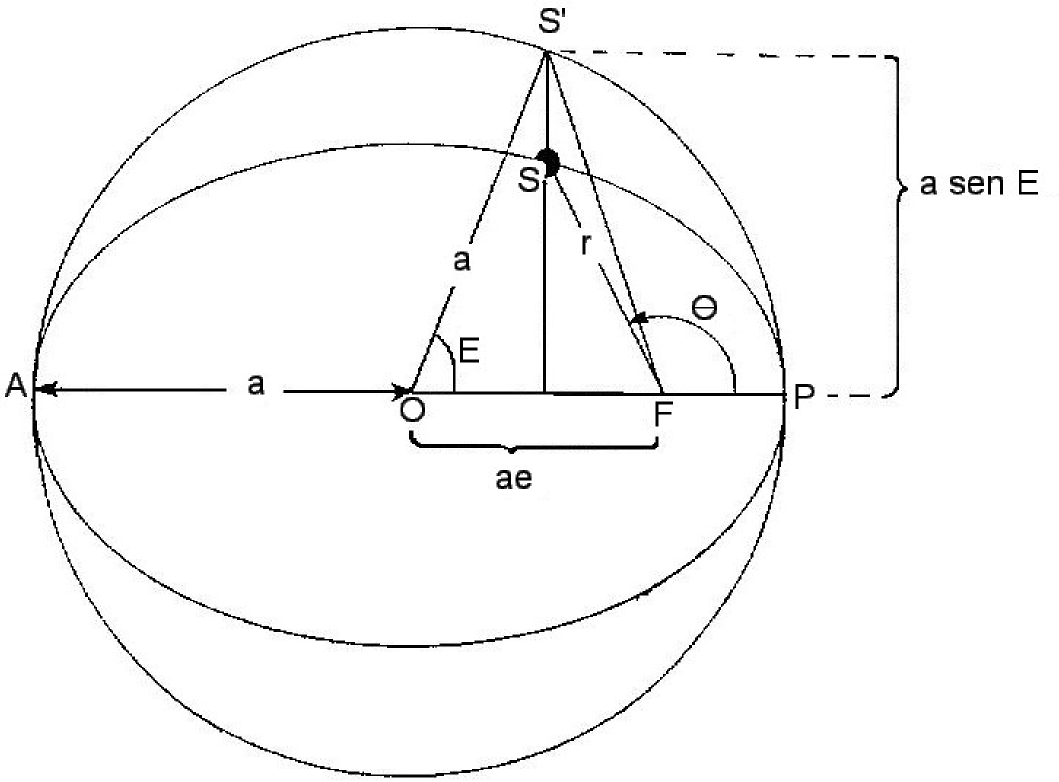


__Figura 1. Problema de Kepler.__ El círculo circunscrito sobre la elipse, tiene el mismo diámetro 2a que el eje mayor de la elipse. Se trata de determinar el valor de θ, la anomalía verdadera, dados el período, la excentricidad y el tiempo transcurrido desde el perihelio.

3. Soluciónes

Hay tres maneras de resolver la ecuación, el primero de los cuales es para excentricidades pequeñas, el segundo es un método gráfico, y el tercero es el **método iterativo**.

3a. Solución para excentricidades pequeñas

Si e<<1 entonces en primera aproximación

$$E \sim M$$

y por tanto

$$E_0 = M + e \text{ sen } M$$

En la siguientes aproximaciones

$$E_1 = M + e \text{ sen } E_0 =$$

$$E_2 = M + e \text{ sen } E_1$$

. . . .

$$E_N = M + e \text{ sen } E_{N-1}$$

Este procedimiento de reemplazar el valor obtenido para E en la ecuación original, puede llevarse a cabo tantas veces como se desee, y así alcanzar el grado de precisión necesario, C :

$$E_N - E_{N-1} < C \sim 10^{-6}$$

3b. Solución gráfica

Waterson en 1850 fue el primero que propuso una solución gráfica de esta ecuación. En efecto el notó que

$$e \text{ sen } E = E - M$$

Llamemos

$$Y1 = e \text{ sen } E$$

$$Y2 = E - M$$

Si graficamos estas dos funciones como función de E, encontraremos que la primera de ellas es un seno atenuado por el factor $e < 1$. La segunda función es una línea recta de pendiente 1 que corta al eje Y2 en –M (Figura 2). El punto de corte de ambas funciones da el lugar donde Y1 = Y2 y por tanto la solución es Es.

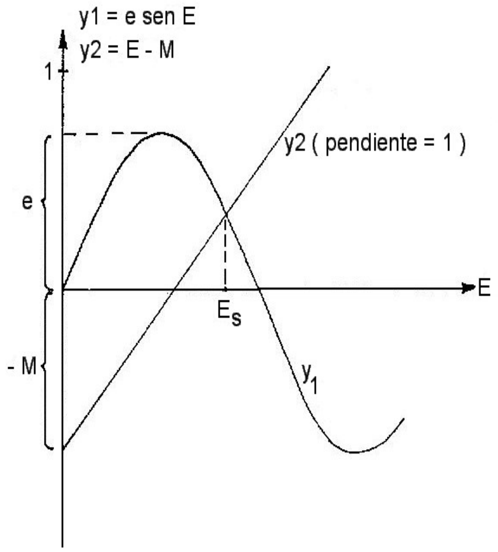


Figura 2. Solución gráfica.
El valor de E_S se obtiene a partir del punto de corte de Y1 con Y2.

3c. Método Iterativo

Hoy en día las computadoras son capaces de hacer miles de cálculos por segundo y permiten obtener soluciones numéricas a prácticamente toda clase de problemas. Para ello hay que escribir un programa de computadora y de esta manera se resuelven complejos problemas matemáticos. Este es un ejemplo que puede ser aplicado a otras situaciones. Calcularemos valores sucesivos de la expresión

$$M - E + e \operatorname{sen} E = y(E)$$

a fin de encontrar el cero de esa función. Para ello se van incrementando los valores de E a intervalos de ΔE, hasta que la función y(E) cambie de signo. Ello significa que se ha pasado por un cero. Se vuelve atrás un paso ΔE y se divide el intervalo por un factor de 10. Se incrementan los valores hasta que se encuentra el cero de nuevo, pero esta vez con una resolución 10 veces mayor, un orden de magnitud. Para cada iteración se avanza un orden de magnitud. Para la iteración 6 se debe alcanzar error $<10^{-6}$.

Se siguen los siguientes pasos:

(A) Si M = 0, evidentemente la solución es E = 0. Igualmente si $M = \pi = 180º$, $E = \pi = 180º$. Si $0 < M < \pi$, $0 < E < \pi$ y del mismo modo si $\pi < M < 2\pi$. En el primer caso el objeto está entre el perihelio y el afelio, y en el segundo caso ha pasado el afelio y va camino al perihelio. Esto es, se verifica si la solución es trivial.

(B) Tomemos como ejemplo el caso M = 1.15, e = 0.8, ΔE = 0.5. Hagamos una Tabla así:

TABLA 1

E(rad)	E(°)	sen E	e sen E	M−E+e senE
0	0	0	0	+1.15
0.50	28.7	0.48	0.38	+1.03
1.00	57.3	0.84	0.67	+0.82
1.50	85.9	1.00	0.80	+0.45
2.00	114.6	0.91	0.73	−0.12

Por tanto el cero de la función está entre 85.9º y 114.6º. Se repite el procedimiento pero reduciendo el intervalo en un factor de 10.

TABLA 2

E(rad)	E(°)	sen E	e sen E	M−E+e senE
1.50	85.9	1.00	0.80	+0.45
1.55	88.8	1.00	0.80	+0.40
1.60	91.7	1.00	0.80	+0.35
1.65	94.7	1.00	0.80	+0.30
1.70	97.4	0.99	0.79	+0.24
1.75	100.3	0.98	0.78	+0.19
1.80	103.1	0.97	0.78	+0.13
1.85	106.0	0.96	0.77	+0.07
1.90	108.9	0.95	0.76	+0.01
1.95	111.7	0.93	0.74	−0.06

Ahora el cero de la función está entre 108.9º y 111.7º. Reduciendo una vez más el intervalo.

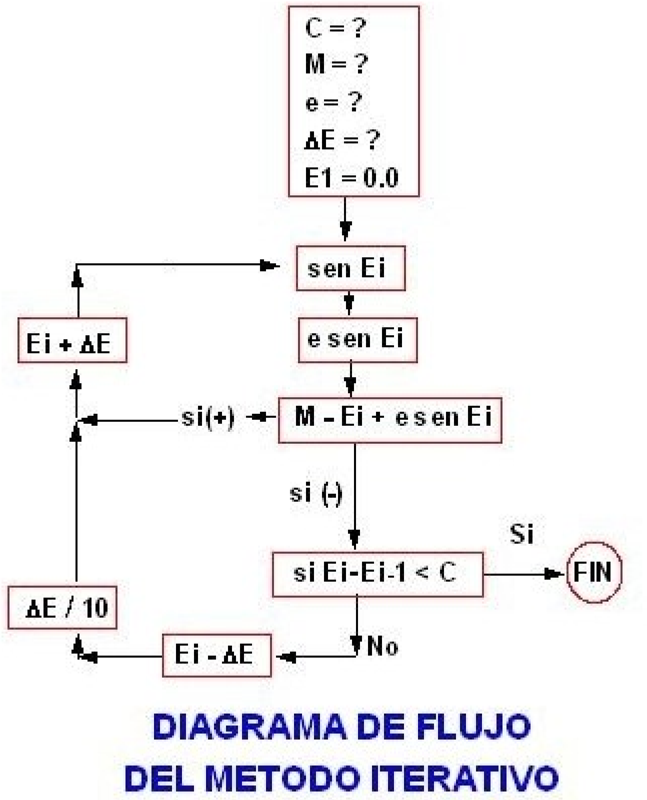
TABLA 3

E(rad)	E(º)	sen E	e sen E	M-E+e sen E
1.900	108.86	0.946	0.757	+0.007
1.905	109.15	0.945	0.756	+0.001
1.910	109.44	0.943	0.754	-0.006

Por tanto el cero de la función está entre 109.15º y 109.44º. Es más, viendo los últimos dos números de la última columna, +0.001 y -0.006 se sabe que el resultado está más cerca de 109.15º que de 109.44º. El procedimiento puede continuarse hasta que uno se canse o mejor, hasta que la precisión del resultado sea suficiente para nuestros propósitos, típicamente $<10^{-6}$.

Cada una de las Tablas representa una iteración. El procedimiento puede ser implementado muy rápidamente en un programa de ordenador. He aquí el **diagrama de flujo del programa**:

Figura 3. Diagrama de flujo de un cálculo iterativo. *Hay que fijar los valores iniciales, M, e, incluyendo la tolerancia del error, C, y el paso de la integración, ΔE.*



La constante C indica el valor máximo del error en E que se va a tolerar. Note que para determinar el error, se compara el valor de E con el que tenía en la iteración anterior.

Tarea 1. Escriba un programa de computadora que encuentre la solución de la ecuación de Kepler por el método iterativo. Utilice el diagrama de flujo de la Figura 3. Tome M = 1.11, e = 0.9, ΔE = 0.5, y como error C = 1×10^{-6}. , donde C es el error de la integración igual a la diferencia entre dos iteraciones consecutivas, y ΔE = paso de la iteración. Note que el valor de la excentricidad es enorme pero este método no tiene problema en trabajar con ese valor.

Su reporte debe explicar el procedimiento y suministrar el programa operacional con un listado de salida de tres columnas, y con tantas iteraciones como sea necesario para llegar al error de cálculo C.

Iteración #	E [º]	C = E(i) – E(i-1)

Note que no hemos resuelto completamente el problema. Lo que hemos obtenido es el ángulo E, pero la anomalía verdadera, θ, permanece desconocida. Se puede obtener de

$$\tan \theta/2 = \sqrt{(1+e)/1-e} \quad \tan E/2 \qquad (16)$$

Y el valor de r puede ahora ser obtenido de

$$r = a\,(1 - e \cos E) \qquad (17)$$

Tarea 2. Incluya la ecuación (16) y (17) en su programa, y determine la anomalía verdadera, θ, y el radio vector, r.

Iteración #	E [º]	C = E(i) – E(i-1)	θ [º]	r [AU]

REFERENCIAS

- Portilla, J. G, 2009. Elementos de Astronomía de Posición. Imprenta de la Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.