

GEOMETRÍA
SIMPLÉCTICA
SISTEMAS HAMILTONIANOS
Y SUS APLICACIONES EN
FÍSICA

Autor *Pablo Vezanzones Parellada*



*Dedicado al maravilloso pueblo de Suriya,
resistiendo impávido a la guerra más injusta,
y a quien deseo décadas de paz y prosperidad.*

*Y gracias, de corazón, a mi familia y amigos,
por su cariño y compañía.*

Contenidos

Introducción: ¿Por qué geometría simpléctica?	4
Objetivos	4
De Newton a Hamilton	5
Estructura y contenidos	8
1 Geometría diferencial	10
1.1 Variedades y aplicaciones	10
1.2 Espacio tangente	14
1.3 Espacio cotangente	20
1.4 Subvariedades	21
1.5 Grupos de Lie	22
1.6 Campos vectoriales y álgebras de Lie	25
1.7 Flujos	28
1.8 Tensores y formas diferenciales	32
1.9 Mucha más geometría	37
2 Geometría simpléctica	38
2.1 Variedades simpléticas	38
2.2 Teorema de Darboux	41
2.3 Campos Hamiltonianos	44
2.4 Teorema de Liouville	50
3 Sistemas Hamiltonianos y simetrías	54
3.1 Partícula en un campo magnético	55
3.2 Aplicaciones momento	59
3.3 Reducción simpléctica	66
3.4 El problema de Kepler	72
Epílogo: Una invitación a las variedades de Poisson	77
Referencias	82
Índice	85

Introducción

¿Por qué geometría simpléctica?

Objetivos

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas es formular geométicamente la mecánica clásica según la imaginó Hamilton. Estudiaremos cómo se describe un sistema mecánico, por ejemplo una partícula en un campo electromagnético, como una variedad diferenciable con una estructura simpléctica, que nos da las ecuaciones de evolución del sistema. Analizaremos las transformaciones de estos sistemas observando cómo se modifican a su vez las ecuaciones de evolución, dándoles un sentido que normalmente se omite en los cursos de física. Más adelante, centraremos nuestra atención en aquellas transformaciones que dejan inalterados estos sistemas: las simetrías. Demostraremos el célebre teorema de Noether en su versión Hamiltoniana, que asocia a cada simetría una cantidad conservada en la evolución de los sistemas físicos. Se ofrecerán demostraciones rigurosas de los métodos empleados comúnmente en física para reducir las ecuaciones de evolución a partir de estas simetrías, es lo que llamaremos reducción simpléctica. A lo largo del trabajo, la teoría se ilustra con el estudio detallado de algunos ejemplos, como el sólido rígido, una partícula con carga en un campo electromagnético o el problema de Kepler de dos cuerpos celestes atraídos por una fuerza central.

Además del interés que tiene el trabajo en sí mismo, las ideas presentes sentarán la base del Trabajo de Fin de Grado en Física, donde estudiaremos la *cuantización geométrica*, un método para transformar sistemas clásicos en sus contrapartidas cuánticas utilizando las herramientas de la geometría simpléctica. El origen de este método de cuantización se debe a Dirac, que estableció una conexión entre los corchetes de Poisson y los conmutadores cuánticos (ver por ejemplo [Dirac, 1964]). Como tendremos la oportunidad de ver, los corchetes de Poisson aparecen de manera natural en la geometría simpléctica. La cuantización geométrica toma como espacio de partida el espacio de fases clásico descrito con geometría simpléctica. A partir de diversas estructuras geométricas como los fibrados se construye un espacio de Hilbert sobre la variedad simpléctica. Los operadores en este espacio de Hilbert cumplirán las reglas de conmutación y por ello será un candidato a espacio de estados en mecánica cuántica.

Antes de dar respuesta al título de la introducción, veamos qué queremos decir exactamente con mecánica Hamiltoniana y cómo surge históricamente a partir de las formulaciones de Newton, Euler y Lagrange.

De Newton a Hamilton

DEFINICIÓN I.

La cantidad de materia es la medida de la misma, surgiendo de su densidad y bulto conjuntamente.

Así comienza Sir Isaac Newton su lúcida obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [Newton, 1687], definiendo el concepto de masa como aquello que es proporcional a su densidad y al espacio que ocupa. Así, nos dice Newton, el aire doble en densidad, ocupando el doble de espacio, será cuádruple en cantidad.

DEFINICIÓN II.

La cantidad de movimiento es la medida de la misma, surgiendo de su velocidad y cantidad de materia conjuntamente.

Newton prosigue definiendo un concepto central en la física moderna, el de cantidad de movimiento, hoy conocido como momento. Así, asegura, el movimiento del conjunto es la suma del movimiento de todas las partes: el doble de materia moviéndose a la misma velocidad tendrá el doble de movimiento.¹ Es decir, el momento lleva la expresión de masa por velocidad $p = mv$. Continúa la obra definiendo los conceptos de inercia (a la que llama *fuerza de inactividad*), fuerza, aceleración... y enuncia sus tres leyes:

LEY I. *Un cuerpo permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme a menos que su estado sea alterado por una fuerza.*

LEY II. *La alteración del movimiento es proporcional a la fuerza y en la dirección de esta.*

LEY III. *A toda acción le corresponde una reacción opuesta: las acciones mutuas de dos cuerpos entre ellos son iguales y dirigidas hacia el contrario.*

La primera ley, conocida como *ley de inercia*, es un caso particular de la segunda, que escribimos

$$\sum F = \frac{dp}{dt},$$

la fuerza es igual a la variación del momento. A pesar de lo que se suele creer, Newton no escribió esta fórmula explícitamente,² sus demostraciones seguían procedimientos geométricos en vez de analíticos. La tercera ley es simplemente la conservación del momento lineal: si la suma de fuerzas es siempre igual a cero, la derivada del momento se anula. El interés por las cantidades conservadas en física ha tenido una importancia creciente y como veremos más adelante es central en la física moderna.

¹ Como vemos, Newton tiene una concepción clásica de la física que contrasta con los descubrimientos de la física moderna. En la mecánica cuántica no es equivalente conocer el estado de un sistema a conocer el estado de sus partes. Por ejemplo, en el caso de dos espines entrelazados, a pesar de tener un estado perfectamente definido para la mezcla nos es imposible saber la orientación de cada spin.

² El primer uso de $F = ma$ se debe a Jacob Hermann en su obra *Phoronomia* de 1716 [Smith, 2008]. Una traducción de esta obra puede encontrarse en [Bruce, 2021]

Johann Bernoulli y su renombrado discípulo, Leonard Euler, continuaron tras los pasos de Newton y formularon la mecánica como un sistema de ecuaciones diferenciales.³ Euler heredó tanto las herramientas de cálculo de Leibniz y los Bernoullis como los conceptos y leyes de Newton, fusionándolas en unas versátiles herramientas analíticas presentadas en su obra *Mechanica* de 1736 (una traducción de los dos volúmenes se encuentra en [Bruce, 2021]) dando origen a la llamada mecánica analítica. Euler abandonó el enfoque geométrico de Newton por uno más moderno, basado en los diferenciales y las funciones, aunque siempre con un trasfondo geométrico, integrando las ecuaciones para hallar la trayectoria que sigue una partícula sometida a ciertas fuerzas y ligaduras.

En su opus de 1744, *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Gaudentes* (traducción en [Bruce, 2021]), Euler introduce las ecuaciones que hoy conocemos como de Euler-Lagrange y las usa para calcular máximos y mínimos de un funcional $\int Z$. En una adenda al final de la obra enuncia el *principio de mínima acción*⁴, central en la física desde el siglo XVIII y que enunciaremos más adelante según la formulación de Hamilton, estudiada hoy en día en los libros de mecánica clásica. Euler continuó aplicando sus novedosos métodos al movimiento de los sólidos rígidos en *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, definiendo el concepto de momento de inercia y derivando las ecuaciones de Euler

$$\begin{aligned} M_1 &= I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3, \\ M_2 &= I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1, \\ M_3 &= I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2, \end{aligned}$$

para un sólido con momentos principales de inercia I_1, I_2, I_3 , velocidad angular ω y sobre el que se está aplicando un momento M .

En 1755, un joven Joseph-Louis Lagrange enviaba a Euler una carta en la que deducía las ecuaciones de Euler por un método más general y sencillo, introduciendo la notación δ para la derivada variacional y dando origen al cálculo de variaciones. Publicó su tratado principal de mecánica en 1788, *Mécanique analytique* [Lagrange, 1997], continuando el desarrollo de la mecánica clásica de Euler. Uno de los mayores avances de Lagrange fue deducir de su formulación, usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, la conservación de la energía (*vis viva*) y el principio de mínima acción. Usando la notación actual podemos resumir como sigue el método de Lagrange. Tenemos una función $L(t, x, \dot{x})$ llamada Lagrangiano, que en el caso más simple es la energía cinética menos la potencial,

$$L = \frac{1}{2} m \|\dot{x}\|^2 - V(x).$$

Tomando este Lagrangiano y resolviendo las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

³ Para un recuento breve y muy iluminador de la historia de la mecánica, no dejar de consultar los artículos [Truesdell, 1976a; Truesdell, 1976b]. Para una historia más extensa se sugiere la referencia [Dugas, 1988].

⁴ A pesar de que Maupertuis suele llevarse el crédito de enunciar por primera vez este principio, Euler se le adelantó un año. Sobre la historia del cálculo de variaciones consultar [Goldstine, 1980].

obtenemos la trayectoria $x(t)$ que seguiría el sistema. Estas ecuaciones son formalmente equivalentes a las de Newton, pero tienen una ventaja crucial: si efectuamos un cambio de coordenadas $x \mapsto y$, $\dot{x} \mapsto \dot{y}$ en el Lagrangiano, las ecuaciones de Euler-Lagrange no varían y por ello nos permiten describir fácilmente movimientos en coordenadas curvilíneas.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange dan una condición necesaria para los extremos del funcional llamado acción,

$$S = \int_{\gamma} L(t, x, \dot{x}) dt ,$$

evaluado en cierto espacio de curvas de extremos fijos. Este es el principio de mínima acción (o más correctamente, el *principio de acción estacionaria*), que nos dice que la trayectoria del sistema debe ser tal que la acción sea mínima o máxima (a veces también un punto de silla).

En 1834 y 1835 William Rowan Hamilton publica las dos partes de *On a general method in dynamics* [Hamilton, 1834; Hamilton, 1835], Hamilton generaliza su formulación variacional de la óptica dando lugar a lo que hoy conocemos como formulación Hamiltoniana de la mecánica clásica. En estos artículos, Hamilton deriva tanto las ecuaciones de Euler-Lagrange como las ecuaciones de Hamilton para $H = T - U$

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} , \quad \dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} , \quad i = 1, \dots, n ,$$

siendo T la energía cinética y $-U$ la energía potencial, es decir, H es la energía del sistema.

Finalmente, introduce la acción, a la que llama *función principal*,

$$S = \int_0^t (T + U) dt ,$$

y deduce la conocida ecuación de Hamilton-Jacobi, $\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0$, por el método variacional (realmente Hamilton dedujo dos ecuaciones y Jacobi posteriormente demostró que una era redundante). La curiosidad de esta ecuación es que los extremos de integración de la acción dejan de ser fijos como pasaba en la acción $S = \int_{\gamma} L dt$.

Por supuesto, estos son solo unos pocos nombres de las personas que hicieron posible el desarrollo de la mecánica clásica. A lo largo del trabajo hablaremos de figuras como Emmy Noether, Henri Poincaré, Joseph Liouville, Sophus Lie, Sofya Kovalevskaya, Siméon Poisson, Johannes Kepler... Desgraciadamente, la historia no siempre es justa y muchos nombres caen en el olvido, ignorando los importantes avances en la física antes de Newton. Nombres como Ibn Sina, Jordanus de Nemore, Nicole Oresme o Simón Stevin, que impulsaron la estática, estudiaron las tensiones, los planos inclinados y los proyectiles, entre diversos temas que guiaron el camino hacia la construcción de esta nueva ciencia.

Estructura y contenidos

En el primer capítulo nos encontramos un resumen de la geometría diferencial básica necesaria para el estudio posterior de la geometría simpléctica. Para no alargar en exceso el trabajo, en este primer capítulo se presentan las proposiciones sin demostración, salvo casos puntuales que sirven para ilustrar el uso de coordenadas en geometría. Introduciremos los espacios fundamentales en los que trabajar en geometría diferencial y simpléctica: las variedades diferenciables y los fibrados tangente y cotangente. Serán estos los espacios abstractos en los que posteriormente situaremos los sistemas físicos. Daremos especial importancia a los grupos de Lie, variedades diferenciables con estructura de grupo que jugarán un papel fundamental en la segunda parte del trabajo. Así mismo, estudiaremos los campos vectoriales y sus flujos, culminando el capítulo en el estudio de los campos de tensores. A lo largo del capítulo se han iluminado las definiciones y teoremas con ejemplos de motivación física que resultarán útiles en el desarrollo del estudio.

En el segundo capítulo comenzamos a desarrollar la geometría simpléctica, en la que los campos de tensores jugarán un papel fundamental. Como veremos, una forma simpléctica es un campo de tensores antisimétricos, no degenerados y cerrado. El motivo de escoger la geometría simpléctica para describir sistemas físicos es que nos permite recuperar de forma inmediata resultados conocidos en física. La antisimetría de la forma simpléctica nos permitirá rescatar la conservación de la energía (Hamiltoniano) y por ser cerrada concluiremos que las ecuaciones que rigen el movimiento de los sistemas no cambian con el tiempo. Tras introducir las formas simplécticas demostraremos el teorema de Darboux, que nos caracteriza la geometría simpléctica como una geometría localmente plana, diferenciándola de otro tipo de geometrías. Definiremos los principales objetos de estudio dentro de esta geometría, los sistemas Hamiltonianos, variedades simplécticas con una función de energía que resultarán idóneas para representar sistemas físicos. Aprovechando que la forma simpléctica es no degenerada, definiremos unos campos Hamiltonianos asociados a estas funciones de energía, cuyas líneas de flujo nos darán la evolución temporal de dichos sistemas físicos. Esta evolución de los sistemas vendrá dada por la ecuación de Hamilton, generalizada usando la tecnología de los sistemas Hamiltonianos. Cerraremos el capítulo demostrando el teorema de Liouville, de conocida utilidad en física.

Damos paso al tercer capítulo del trabajo, en el que nos centraremos propiamente en la descripción de la física desde la óptica geométrica de los precedentes capítulos. Comenzaremos ilustrando esta descripción geométrica con el ejemplo de una partícula moviéndose en un campo magnético. Haremos una elección adecuada de forma simpléctica y Hamiltoniano que recuperen la conocida ecuación de la fuerza de Lorentz. Proseguiremos con el desarrollo teórico hablando de aplicaciones momento y el teorema de Noether, estudiando el papel de los grupos de Lie de simetrías actuando sobre sistemas Hamiltonianos. Demostraremos el teorema de reducción simpléctica, que nos permite simplificar un sistema Hamiltoniano en base a estas simetrías. Para terminar el capítulo, aplicamos este procedimiento de reducción al problema de Kepler en mecánica celeste.

Finalizamos el trabajo con una breve invitación a las variedades de Poisson. La geometría de Poisson generaliza la geometría simpléctica y goza de importantes aplicaciones en la descripción de sistemas de dimensión infinita como plasmas o fluidos. Daremos unas nociones introductorias sobre este tema y estudiaremos un ejemplo paradigmático: el sólido rígido.

Capítulo 1

Geometría diferencial

En este capítulo se presenta una introducción sucinta a la geometría diferencial moderna, un breve repaso de las poderosas herramientas que nos permitirán en los sucesivos capítulos dar una descripción precisa, elegante y geométrica de la física más fundamental de todas, la mecánica clásica.

Para esta exposición resumida he seguido el libro [John Lee, 2013] (muy recomendable) así como los textos [Abraham, Marsden y Ratiu, 1988; Lang, 1999; Jeffrey Lee, 2009], que en general son más avanzados. Una fantástica introducción a las variedades topológicas y la topología diferencial, base de la geometría diferencial, puede encontrarse en [Guillemin y Pollack, 1974].

Explicaremos algunas nociones básicas sobre las variedades diferenciables y los tensores, que serán la base para el posterior desarrollo del trabajo. Nos centraremos principalmente en definir los conceptos necesarios y explicar ciertas propiedades y teoremas relacionados con estos conceptos, que aparecerán por lo general sin demostración (se pueden consultar en las referencias mencionadas antes). El objetivo es que sea de fácil consulta aún intentando preservar la lógica detrás de las definiciones y construcciones que aquí se suscitan.

1.1. Variedades y aplicaciones

La geometría diferencial se desarrolla en torno al concepto de variedad diferenciable⁵ (en inglés *smooth manifold*), que nos permite extender las herramientas del cálculo y el álgebra ya conocidas para un determinado espacio de Banach⁶, como pueden ser los números reales, complejos o espacios de funciones de dimensión infinita, a espacios topológicos mucho más generales, como podría ser la esfera. Por simplicidad, trataremos con variedades reales de dimensión finita, en particular aquellas que son *suaves*.

Una variedad diferenciable es en primer lugar un espacio topológico⁷, es decir, un conjunto dispuesto con una colección de subconjuntos llamados abiertos. Estos abiertos nos

⁵ La historia y evolución del concepto de variedad se puede encontrar en [Scholz, 1999].

⁶ Un espacio de Banach es un espacio vectorial, normado, que es completo para la métrica de la norma. En lo que sigue no daremos mucho uso a esta definición.

⁷ Un breve repaso de espacios topológicos y cálculo diferencial puede encontrarse en [Abraham, Marsden y Ratiu, 1988, Cap. 1 y 2] y en los apéndices de [John Lee, 2013].

permitirán hablar de entornos de puntos, aplicaciones continuas y diferenciables, compacidad, conexión, etc. Normalmente se exigen dos condiciones a estos espacios topológicos: ser Hausdorff y cumplir el segundo axioma de numerabilidad. La condición de Hausdorff significa que dados dos puntos se pueden separar por abiertos disjuntos. Nos permite, por ejemplo, hablar de límites únicos de sucesiones convergentes. Aunque no trataremos aquí este tema, la condición también es importante cuando trabajamos con métricas en el ámbito de la geometría Riemanniana. El segundo axioma de numerabilidad nos dice que existe una base numerable de abiertos para esa topología. Cobra relevancia en demostraciones técnicas, pero muy importantes en el desarrollo de las variedades suaves, por ejemplo en la existencia de funciones *partición de la unidad*.

Una vez que tenemos nuestro espacio topológico, hemos de proveerlo con una *estructura diferenciable* que nos permita extrapolar el cálculo diferencial ya conocido a estos espacios. Damos para ello la primera definición:

Definición 1.1. Sean M un espacio topológico y U un abierto. Una *carta* es un par (U, φ) , con $\varphi : U \rightarrow \hat{U}$ un homeomorfismo de U en un abierto \hat{U} de un espacio de Banach.

La idea de las cartas es usarlas para recubrir el espacio M de forma que se solapen de forma continua o en nuestro caso diferenciable. Esto es lo que llamaremos un atlas.

Definición 1.2. Dado un espacio topológico M , un *atlas suave* $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ es una colección de cartas que cumplen:

- (i) $M = \bigcup_{i \in I} U_i$.
- (ii) Dadas dos cartas cualesquiera (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, la aplicación $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ es un difeomorfismo.

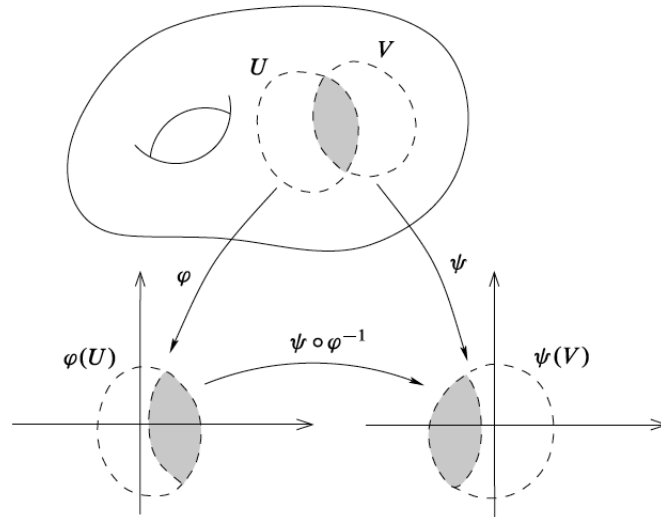


Figura 1: Cartas en una variedad [John Lee, 2013, p. 12].

A las aplicaciones $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^∞ se las llama **diferenciables**, y entenderemos por **difeomorfismo** una aplicación biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable. Igualmente se podrían haber definido los atlas C^k -diferenciables sustituyendo la condición de difeomorfismo por la de C^k -difeomorfismo, aunque nosotros no le daremos uso en este trabajo.

Solo queda un último detalle antes de dar la definición de variedad suave. Dos atlas suaves se dicen **equivalentes** si su unión es también un atlas suave. Un atlas se dice **maximal** si no está contenido estrictamente en ningún otro atlas. La unión de una familia de atlas equivalentes constituye un atlas maximal. Es este atlas maximal el que usaremos para definir la estructura diferenciable de una variedad, que será única para cada atlas maximal.

Definición 1.3. Una **variedad diferenciable suave** es un par (M, \mathcal{A}) formado por un espacio topológico de Hausdorff y que cumple el segundo axioma de numerabilidad M y un atlas maximal \mathcal{A} . A este atlas maximal se le llama **estructura diferenciable**.

A partir de ahora se podría escoger nuestro espacio de Banach, por ejemplo \mathbb{C}^n para estudiar las variedades complejas o espacios de funciones para estudiar algunas variedades de dimensión infinita, en nuestro caso vamos a tomar \mathbb{R}^n (con la topología usual) para desarrollar la teoría de variedades suaves reales. A partir de ahora se entenderá **variedad suave** o simplemente **variedad** por una variedad real suave a menos que se especifique lo contrario. La **dimensión** de la variedad será aquella de \mathbb{R}^n .

Un concepto fundamental en geometría diferencial y que nos servirá para facilitar las demostraciones a lo largo del trabajo es el de coordenadas. Si tenemos una variedad n -dimensional y una carta (U, φ) , entonces $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ y podemos definir unas coordenadas locales (locales porque están definidas en un abierto U).

Definición 1.4. Dada una carta (U, φ) , se tiene $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$ para cada $p \in U$. Decimos que x^1, \dots, x^n son las funciones **componentes** y $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ unas **coordenadas locales** de p en U . Conocidas las coordenadas también denotaremos la carta por (U, x^i) .

Ahora que tenemos las primeras definiciones vamos a ilustrarlas con algún ejemplo.

Ejemplo 1.5. Uno de los ejemplos más conocidos de variedad suave es la **n -esfera unidad** \mathbb{S}^n . Por ser un subespacio de \mathbb{R}^{n+1} es un espacio topológico de Hausdorff y verifica el segundo axioma de numerabilidad. Si $N = (1, \dots, 0)$ y $S = (-1, \dots, 0)$ son los polos norte y sur de la esfera se puede dotar de una estructura diferenciable a la esfera con un atlas formado por las proyecciones estereográficas

$$\varphi_1 : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_1(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_2}{1 - x_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{1 - x_1} \right)$$

y

$$\varphi_2 : \mathbb{S}^n \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_2(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_2}{1 + x_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{1 + x_1} \right),$$

siendo $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ y $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ abiertos en la topología de subespacio de \mathbb{S}^n . El atlas es suave porque

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$$

es un difeomorfismo. Por tanto la n -esfera es una variedad suave. \diamond

En ejemplos prácticos cuando se trabaja con esferas de baja dimensión es usual describirla en coordenadas polares. Por ejemplo, en \mathbb{S}^2 podemos parametrizar un abierto U de la esfera con la aplicación $\psi : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \rightarrow U \subset \mathbb{S}^2$ dada por $\psi(\theta, \phi) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, lo que nos da una carta $(\psi)^{-1} = \varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$.

Otros ejemplos muy importantes de variedades suaves son los *grafos de funciones continuas*, los *subconjuntos abiertos* de variedades, los *espacios proyectivos*, el *espacio producto de variedades* (por ejemplo el toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$). . . Y por supuesto \mathbb{R}^n , que es trivialmente una variedad suave con la carta siendo la identidad.

Ejemplo 1.6. Los *grupos de Lie* son otro ejemplo notable de variedad suave, que además tienen estructura de grupo⁸. Un ejemplo es el **grupo general lineal** $GL(n, \mathbb{R})$ de matrices $n \times n$ invertibles con elementos reales. Puesto que el espacio de matrices $n \times n$, $M(n, \mathbb{R})$, es isomorfo a $\mathbb{R}^{n \times n}$, es también una variedad. Además, el determinante $\det : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua por ser polinómica y por tanto el espacio de matrices con determinante no nulo $GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ es un subespacio abierto de $M(n, \mathbb{R})$ y será también una variedad suave. \diamond

Una vez que sabemos lo que es una variedad podemos proceder a estudiar las transformaciones entre ellas, las aplicaciones diferenciables.

Definición 1.7. Sean M, N dos variedades suaves y $F : M \rightarrow N$ una aplicación. Se dice que F es una aplicación **diferenciable** si para cada $p \in M$ existen dos cartas suaves (U, φ) con $p \in U$ y (V, ψ) con $F(p) \in V$ tal que $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ es de clase C^∞ . Se dice que $\hat{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ es la **representación en coordenadas** de F .

Dado que las cartas se solapan como difeomorfismos y la diferenciabilidad de una aplicación depende solo de un entorno de cada punto, si F es diferenciable en una carta, lo será en todas las cartas de un mismo atlas. A través de las cartas hemos pasado de aplicaciones entre unos espacios topológicos abstractos a aplicaciones entre los espacios euclídeos $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ y $\psi(V) \subset \mathbb{R}^n$, donde las herramientas de cálculo son conocidas y nos permiten determinar si una aplicación es diferenciable. Como cabría esperar, las aplicaciones constantes, la identidad, las proyecciones y la composición de aplicaciones diferenciables son diferenciables.

Un caso particular y muy interesante de aplicación entre variedades son los **difeomorfismos**, aplicaciones biyectivas, diferenciables y con inversa diferenciable. En tal caso se dice que las variedades son difeomorfas. Una consecuencia inmediata del cálculo en varias variables es que si dos variedades son difeomorfas (y de dimensión finita) entonces

⁸ Recordemos que un grupo es un conjunto G con una aplicación $m : G \times G \rightarrow G$ que cumple la propiedad asociativa, existencia de neutro y existencia de un inverso para cada $g \in G$.

sus dimensiones coinciden: si \hat{F} es un difeomorfismo entonces su matriz Jacobiana es un isomorfismo, esto no podría suceder si las dimensiones no coincidieran.

Para finalizar este apartado, vamos a dar un ejemplo de aplicación diferenciable que nos vendrá bien más adelante: una carta de una variedad suave M . Si (U, φ) es una carta, también es una aplicación entre variedades $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Para comprobar que es diferenciable tenemos que componerla con φ^{-1} por la derecha y con la identidad (carta de \mathbb{R}^n) por la izquierda, el resultado es la identidad y por tanto φ es diferenciable.

1.2. Espacio tangente

Las variedades suaves reales se comportan localmente como \mathbb{R}^n , es decir, se pueden aproximar en un entorno de cada punto por un espacio vectorial, que llamaremos espacio tangente. Siguiendo la línea del cálculo en varias variables podremos aproximar localmente las aplicaciones entre variedades por isomorfismos entre estos espacios. Comenzaremos por una definición abstracta y veremos que es equivalente a la idea intuitiva de vectores tangentes como elementos que nos permiten tomar derivadas direccionales de una función.

Definición 1.8. Sea $C^\infty(M)$ el espacio de funciones diferenciables reales $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Si $p \in M$, una **derivación en p** es una aplicación lineal $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface la regla del producto

$$v(fg) = f(p)v g + g(p)v f.$$

Al conjunto de todas las derivaciones de $C^\infty(M)$ en p se le llama **espacio tangente** de M en p y se denota por $T_p M$.

Si v y w son dos derivaciones en p , $v + w$ es también una aplicación lineal y cumple la regla del producto

$$v(fg) + w(fg) = f(p)v g + g(p)v f + f(p)w g + g(p)w f = f(p)(w + v)g + g(p)(w + v)f,$$

por tanto $v + w$ es una derivación. De igual modo se comprueba que si $c \in \mathbb{R}$, cv es una derivación, por tanto el espacio tangente tiene estructura de espacio vectorial. Dos propiedades inmediatas de las derivaciones son

Proposición 1.9. Si $v \in T_p M$ y $f, g \in C^\infty(M)$ entonces

- (i) Si f es constante, $v f = 0$.
- (ii) Si $f(p) = g(p) = 0$, entonces $v(fg) = 0$.

Los espacios tangentes nos permiten extrapolar el cálculo a variedades suaves, en particular, nos permite generalizar la idea de diferencial de una aplicación.

Definición 1.10. Sea $F : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades. Si $p \in M$, la **diferencial de F en p** es la aplicación entre espacios tangentes $dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ dada por

$$dF_p(v)(g) = v(g \circ F) \quad \text{para cada } g \in C^\infty(N)$$

Tomemos un momento para explicar esto, dF_p es una aplicación que toma una derivación en $C^\infty(M)$ y nos da otra derivación en $C^\infty(N)$. ¿Cómo se relacionan estas derivaciones? Si sabemos como actúa v para cada $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, lo sabremos para $g \circ F : M \rightarrow \mathbb{R}$ y entonces tiene sentido definir $dF_p(v)$ como una derivación en $C^\infty(N)$.

Algunas propiedades de la diferencial se resumen en la proposición siguiente:

Proposición 1.11. Si L, M, N son variedades y $F : L \rightarrow M$, $G : M \rightarrow N$ son aplicaciones diferenciables,

- (i) La diferencial es lineal.
- (ii) Cumple la regla de la cadena $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$.
- (iii) Si Id_M es la identidad en M , $d(Id_M)$ es la identidad en $T_p M$.
- (iv) Si F es un difeomorfismo, dF_p es isomorfismo y $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

Anotamos dos ideas importantes sobre los espacios tangentes que nos señalan que es una estructura local, es decir, el espacio tangente en un punto solo depende de cómo sea la variedad en un entorno. La primera es que dado $v \in T_p M$, si $f, g \in C^\infty(M)$ coinciden en un entorno de p , entonces $vf = vg$. La segunda es que si nos restringimos a un entorno abierto U que contiene a p los espacios tangentes $T_p U$ y $T_p M$ son isomorfos. Las demostraciones se pueden encontrar en [John Lee, 2013, pp. 45, 56] y utilizan dos teoremas muy importantes en la teoría de variedades: la existencia de particiones de la unidad y funciones salto (*bump function* en inglés).

A partir de la segunda propiedad de 1.11 podemos demostrar que el espacio tangente en cualquier punto a una variedad n -dimensional es un espacio vectorial de dimensión n . Para ello damos antes el siguiente lema:

Lema 1.12. Los espacios \mathbb{R}^n y $T_a(\mathbb{R}^n)$ son isomorfos.

Demostración. Sabemos del cálculo de varias variables que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, podemos definir, en coordenadas usuales, la siguiente derivación en a , conocida como derivada direccional en la dirección v ,

$$D_v|_a f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) \equiv v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$$

usando el **convenio de sumación** de Einstein sobre índices repetidos en el último paso, que usaremos a partir de ahora para agilizar la notación. Con esto en mente, veamos que la aplicación $v \mapsto D_v|_a$ es un isomorfismo entre \mathbb{R}^n y $T_a(\mathbb{R}^n)$. Es claro que es una aplicación lineal, como se puede comprobar de la definición de $D_v|_a$ en términos de las derivadas parciales. Para probar la inyectividad supongamos que v es la derivación nula, entonces para cada coordenada x^j ,

$$0 = D_v(x^j) = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} x^j = v^j \quad j = 1 \dots n$$

por tanto v es el vector nulo y la aplicación es inyectiva. Para la sobreyectividad, tomamos $w \in T_a \mathbb{R}^n$ y definimos el vector de coordenadas $v^i = w(x^i)$. Para ver que efectivamente ese vector nos da la derivación w usamos el teorema de Taylor en su versión de resto integral. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable, podemos desarrollarla en torno a a

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(x^i - a^i) + \sum_{i,j=1}^n (x^i - a^i)(x^j - a^j)h_{ij}(x)$$

siendo h_{ij} funciones diferenciables. Por la linealidad y la proposición 1.9, se obtiene $w(f(a)) = 0$ y que los términos de grado 2 tienen derivación nula:

$$wf = w\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(x^i - a^i)\right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)(w(x^i) - w(a^i)) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)v^i = D_v|_a f$$

que demuestra la sobreyectividad (de nuevo, hemos usado el convenio de sumación de Einstein). □

Recordando que dada una carta (U, φ) de M , $\varphi : U \rightarrow \hat{U} \subset \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo, por la proposición 1.11(iv) $d\varphi_p$ es un isomorfismo. Si $\varphi(p) = \hat{p}$, los espacios tangentes son isomorfos $T_p U \cong T_{\hat{p}} \hat{U}$. Pero como se ha mencionado antes, los espacios tangentes solo dependen de un entorno del punto y se deduce la cadena de isomorfismos

$$T_p M \cong T_p U \cong T_{\hat{p}} \hat{U} \cong T_{\hat{p}} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n.$$

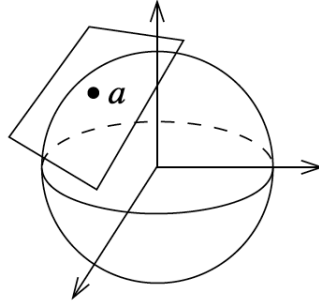


Figura 2: Espacio tangente a la esfera \mathbb{S}^2 [John Lee, 2013, p. 52].

Una vez que sabemos que $T_p M$ es un espacio vectorial de dimensión n vamos a dar una base en la carta $\varphi = (x^1 \dots x^n)$. Si $\hat{x}^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la representación en coordenadas de x^i , sigue de la demostración anterior que

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}^i} \Big|_{\varphi(p)} \quad i = 1 \dots n$$

forma una base de $T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$ y sus imágenes inversas por $d\varphi_p$ serán una base de $T_p M$.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \equiv (d\varphi_p)^{-1} \frac{\partial}{\partial \hat{x}^i} \Big|_{\varphi(p)} = d(\varphi^{-1})_{\varphi(p)} \frac{\partial}{\partial \hat{x}^i} \Big|_{\varphi(p)}$$

Estos elementos de la base actúan sobre una función diferenciable f

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f = \frac{\partial}{\partial \hat{x}^i} \Big|_{\varphi(p)} (f \circ \varphi^{-1}) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}^i}(\hat{p}) \quad (1.1)$$

donde $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ y $\hat{p} = \varphi(p)$ son la representación en coordenadas de f y p . Notemos además, que tenemos por un lado las derivadas parciales como vector (lado izquierdo de (1.1)) y por otro como operador diferencial en \mathbb{R}^n (lado derecho). Los vectores $\partial/\partial x^i|_p$ se denominan **vectores coordenados en p** y dependen del sistema de coordenadas, es decir, de la carta. Dado un vector v de $T_p M$ sus componentes en la base anterior son

$$v(x^i) = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} x^i = v^j \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial \hat{x}^j} = v^i$$

Ahora que tenemos unas bases de los espacios tangentes, podemos describir la diferencial de una aplicación en términos de estas bases. Si $F : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable y \hat{F} es su representación en coordenadas en ciertas cartas de M y N ,

$$dF_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial \hat{x}^i}(\hat{p}) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_{F(p)} \quad (1.2)$$

es decir, en las bases $\partial/\partial x^i|_p$ y $\partial/\partial y^j|_{F(p)}$, se representa dF_p por la matriz Jacobiana de \hat{F} . **Nota:** Es común confundir \hat{x}^i con x^i , \hat{p} con p y $F(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$ con $F(x^1, \dots, x^n)$, a partir de ahora seguiremos esta convención para no sobrecargar la notación.

A partir de (1.2) podemos deducir la fórmula para el cambio de coordenadas de una carta $\varphi = (x^1 \dots x^n)$ a otra $\psi = (y^1 \dots y^n)$ tomando la aplicación $\text{Id} : M \rightarrow M$. Su diferencial es ella misma, por tanto $\hat{F} = \psi \circ \varphi^{-1}$ y el cambio de base resulta

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p$$

(de nuevo, x^i e y^j deberían ser las representaciones en coordenadas). Si tenemos un vector escrito en ambas bases $v = v^i \partial/\partial x^i = w^j \partial/\partial y^j$, la relación entre sus componentes viene dada por

$$w^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}(p) v^i.$$

Hasta ahora hemos trabajado con uno de los múltiples enfoques equivalentes bajo los que abordar el espacio tangente. Otro muy común es definir los vectores tangentes como ciertas clases de equivalencias de curvas. Trabajar con velocidades de curvas parametrizadas nos será útil en el estudio de flujos y convendrá tener en mente esta otra caracterización.

Definición 1.13. Sea M una variedad, una **curva** (suave) en M es una aplicación diferenciable $\gamma : J \rightarrow M$ de un intervalo abierto $J \subset \mathbb{R}$ en M .

El intervalo J es abierto, por tanto es en sí mismo una variedad suave y podemos hablar de la diferencial de γ . En este caso, la identidad $t \mapsto t$ es una carta de J y $\frac{d}{dt}\big|_{t_0}$ una base de $T_{t_0}J$. La **velocidad** de γ en t_0 es el vector

$$\gamma'(t_0) \equiv d\gamma\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0}\right) \in T_{\gamma(t_0)}M \quad (1.3)$$

Este vector actúa sobre una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ según la definición (1.10)

$$\gamma'(t_0)f = d\gamma\left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t_0}\right)f = \frac{d}{dt}\bigg|_{t_0}(f \circ \gamma)(t) = (f \circ \gamma)'(t_0)$$

esto es, la derivada de f a lo largo de la curva γ en el punto $\gamma(t_0)$. Se puede demostrar que todo vector tangente es el vector velocidad de alguna curva suave, lo que nos da otra forma de interpretar el espacio tangente.

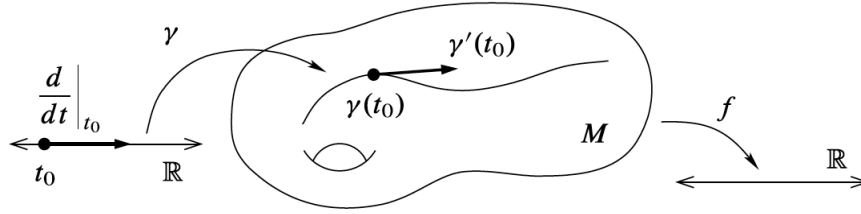


Figura 3: Velocidad de una curva [John Lee, 2013, p. 69].

Terminamos definiendo el concepto de fibrado tangente (*tangent bundle* en inglés). La idea es sencilla, juntar los espacios tangentes en cada punto para formar una nueva variedad suave de la que podamos recuperar tanto la variedad original como cada espacio tangente.

Definición 1.14. Sea M una variedad suave, definimos el **fibrado tangente** de M , TM , como la unión disjunta de los espacios tangentes T_pM para cada $p \in M$. Si $v \in T_pM$, se denota al correspondiente elemento de TM por (p, v) .

Viene equipada con una **proyección natural** $\pi : TM \rightarrow M$, $\pi(p, v) = p$, que nos devuelve el punto de M asociado a cada elemento. A cada conjunto $\pi^{-1}(p) = T_pM$ se le denomina **fibra**. Lo peculiar de esta construcción es que se puede dotar a TM de una estructura diferenciable para que sea una variedad $2n$ -dimensional y la proyección natural sea una aplicación diferenciable.

Dada una carta (U, φ) de M con funciones coordenadas $\varphi = (x^1 \dots x^n)$, definimos $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ por

$$\psi\left(v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p\right) = (x^1(p), \dots, x^n(p), v^1, \dots, v^n) \quad (1.4)$$

Los conjuntos del tipo $(\pi^{-1}(U), \psi)$ forman un atlas suave y las coordenadas (x^i, v^i) se denominan **coordenadas naturales**.

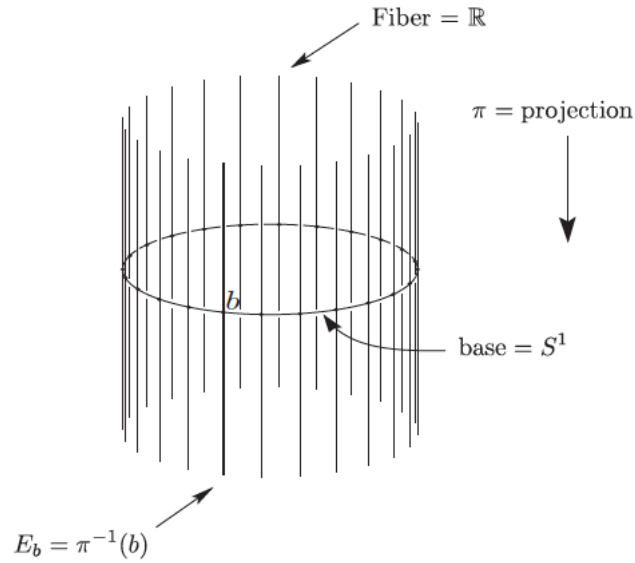


Figura 4: Fibrado tangente de la circunferencia [Abraham, Marsden y Ratiu, 1988, p. 157].

Definición 1.15. Dada $F : M \rightarrow N$, definimos la **diferencial global** de F como la aplicación $dF : TM \rightarrow TN$ tal que su restricción a cada fibra $T_p M$ es dF_p .

En las coordenadas naturales, la diferencial global es una aplicación diferenciable.

Proposición 1.16. Si $F : M \rightarrow N$ es diferenciable, entonces $dF : TM \rightarrow TN$ es también diferenciable.

Demostración. De la expresión del Jacobiano (1.2) deducimos que en coordenadas naturales

$$dF(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = (F^1(x), \dots, F^n(x), \frac{\partial F^1}{\partial x^i}(x) v^i, \dots, \frac{\partial F^n}{\partial x^i}(x) v^i)$$

Sus componentes son diferenciables y por tanto dF también.

□

1.3. Espacio cotangente

Para todo espacio vectorial V , podemos definir su dual, el espacio vectorial de funcionales lineales⁹ $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$, que se denota V^* . El espacio tangente no es ninguna excepción, así que definiremos el espacio cotangente como su dual.

Definición 1.17. Sea M una variedad. Definimos el **espacio cotangente** en p como el dual de $T_p M$. Se denota $T_p^* M$ y está formado por las aplicaciones lineales $\phi : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, también llamadas **covectores**.

El espacio cotangente tiene la misma dimensión que el espacio tangente: si tenemos las coordenadas (x^1, \dots, x^n) , podemos definir la siguiente base de $T_p^* M$

$$dx_p^i \left(\frac{d}{dx^j} \Big|_p \right) = \delta_{ij} \quad i, j = 1 \dots n$$

es decir, tenemos la base $\{dx_p^1, \dots, dx_p^n\}$ tal que cada dx_p^i envía el correspondiente i -ésimo vector de la base de $T_p M$ al 1 y el resto al 0. Es fácil comprobar que es una base de $T_p^* M$ y por tanto tiene la misma dimensión que la variedad.

El porqué hemos usado la notación familiar dx es la siguiente: si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación entre variedades, su diferencial en p es la aplicación $df_p : T_p M \rightarrow T_p \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ dada por $df_p(v) = (vf)(p)$ (ver (1.2)). Es decir, df_p es un elemento de $T_p^* M$ y se puede reescribir¹⁰

$$df_p = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) dx_p^i \quad (1.5)$$

La notación para la base del espacio cotangente está bien escogida porque si tomamos la diferencial de la función coordenada x^i tenemos precisamente

$$dx_p^i \left(\frac{d}{dx^j} \Big|_p \right) = \frac{dx^i}{dx^j}(p) = \delta_{ij}$$

lo que nos da una nueva interpretación de la base dual. Como veremos más adelante, los covectores nos dan una interpretación independiente de coordenadas del gradiente de una función.

La regla de transformación de las componentes de los covectores tras un cambio de coordenadas es inversa a la regla de transformación de vectores. Si $v = v_i dx^i|_p = \omega_i dy^i|_p$

$$\omega_i = v \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p \right) = v \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) = \frac{\partial x^j}{\partial y^i}(p) v_j \quad (1.6)$$

Siguiendo el mismo método que para el espacio tangente, podemos definir el fibrado cotangente y dotarlo de una estructura que lo convierta en una variedad $2n$ -dimensional.

⁹ En nuestro caso V será de dimensión finita y por tanto los funcionales serán también continuos en cualesquiera normas de V y \mathbb{R} .

¹⁰ De nuevo, debería ser de \hat{f} y \hat{p} , las representaciones en coordenadas.

Definición 1.18. Sea M una variedad, definimos el **fibrado cotangente** T^*M , como la unión disjunta de los espacios cotangentes T_p^*M para cada $p \in M$. Si $\omega \in T_p^*M$, se denota al correspondiente elemento de T^*M por (p, ω) .

Igual que el fibrado tangente, viene equipado con una proyección natural $\pi(p, \omega) = p$ con la que podemos definir cartas del tipo $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$

$$\psi \left(\omega_i dx_p^i \right) = (x^1(p), \dots, x^n(p), \omega_1, \dots, \omega_n) \quad (1.7)$$

para cada carta (U, φ) de M con coordenadas locales (x^1, \dots, x^n) . Estas cartas forman un atlas suave de T^*M y por tanto es una variedad suave. Las coordenadas (x^i, ω_i) se llaman de nuevo coordenadas naturales.

Hay, sin embargo, una diferencia notable con el fibrado tangente. Si tenemos $F : M \rightarrow N$ diferenciable, aunque tiene sentido definir la aplicación dual $(dF_p)^* : T_{F(p)}^*N \rightarrow T_p^*M$ en cada punto, en general no tienen por qué juntarse en una aplicación entre fibrados cotangentes (por ejemplo si F es constante no tendría sentido hablar de $F^{-1}(q)$). En el caso de que F sea un difeomorfismo, esta aplicación sí estará bien definida. Así pues, definimos la **aplicación cotangente** (también llamado *cotangent lift*) $d^*F : T^*N \rightarrow T^*M$ dada por

$$d^*F(\alpha_q) \cdot v = \alpha_q \cdot dF(v), \quad \alpha_q \in T_q^*N, \quad v \in T_{F^{-1}(q)}M \quad (1.8)$$

y su matriz asociada en cada punto es la traspuesta de la Jacobiana (1.2).

1.4. Subvariedades

Comenzamos caracterizando las aplicaciones entre variedades según sea su diferencial, lo que nos permitirá caracterizar una variedad contenida en otra por medio de la inclusión.

Definición 1.19. Sean M, N variedades suaves y $F : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable entre ellas. Se dice que F es:

- (i) una **inmersión** si dF_p es inyectiva en cada punto.
- (ii) un **encaje** (*embedding* en inglés) si es una inmersión y un homeomorfismo sobre su imagen, $F(M) \subset N$ (con la topología de subespacio de N).
- (iii) es una **subinmersión** si dF_p es sobreyectiva en cada punto.

Algunos ejemplos de inmersiones y subinmersiones vienen proporcionadas por el llamado *teorema del rango*, que hace referencia a las aplicaciones $F : M \rightarrow N$ diferenciables de **rango** constante, i.e. aquellas en las que el rango de dF_p (como aplicación lineal) es igual en cada punto p . En este caso, el teorema nos asegura que si F es inyectiva es una inmersión, si es sobre es una subinmersión y si es biyectiva es un difeomorfismo.

Ejemplo 1.20. Un ejemplo de inmersión entre dos variedades es la curva densa en el toro $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{S} \times \mathbb{S}$ dada por

$$\gamma(t) = (e^{i2\pi t}, e^{i2\pi at}), \quad a \text{ irracional.}$$

Es diferenciable porque sus componentes son C^∞ e inyectiva porque su matriz Jacobiana es $\gamma'(t) = (i2\pi e^{i2\pi t}, i2\pi a e^{i2\pi at}) \neq (0, 0)$ para todo t , esto es, solo la imagen del 0 es $(0, 0)$. La curva es también inyectiva porque $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ implica que $t_1 - t_2$ y $at_1 - at_2$ son enteros, que no puede suceder a menos que $t_1 = t_2$. Sin embargo, esta inmersión no es un encaje, se puede probar que $\gamma(0)$ es un punto de acumulación de $\gamma(\mathbb{Z})$, pero \mathbb{Z} no tiene puntos de acumulación, por lo que \mathbb{R} no es homeomorfo a su imagen. \diamond

A partir de las inmersiones y encajes podemos definir los tipos más comunes de subvariedades

Definición 1.21. Sean M y S variedades tal que $S \subset M$

- (i) Si S es suave y tal que la inclusión $i : S \hookrightarrow M$ es una inmersión, se dice que S es una **subvariedad inmersa** de M .
- (ii) Si S es una variedad con la topología de subespacio de M y la inclusión $i : S \hookrightarrow M$ es un encaje, se dice que S es una **subvariedad encajada**.

Siguiendo con el ejemplo anterior, la curva densa en el toro es una subvariedad inmersa de \mathbb{T}^2 , pero no encajada. Las subvariedades que más nos van a interesar son las encajadas, pues al tener una topología de subespacio son las que más se parecen a la variedad que la contiene. El teorema siguiente nos proporciona un ejemplo de subvariedad encajada, los *conjuntos de nivel*. Dada una aplicación $F : M \rightarrow N$, se dice que $n \in N$ es un **valor regular** si para cada $m \in F^{-1}(n)$ se tiene que dF_m es sobreyectiva (F restringida a $F^{-1}(n)$ es una subinmersión).

Teorema 1.22. Sean $F : M \rightarrow N$ una aplicación entre dos variedades y n un valor regular, entonces $F^{-1}(n) = \{m \in M \mid f(m) = n\}$ es una subvariedad encajada de M con dimensión $\dim M - \dim N$. Además, cada espacio tangente viene dado por $T_m F^{-1}(n) = \ker(dF_m)$.

1.5. Grupos de Lie

Los grupos de Lie son una herramienta indispensable en la física moderna ya que representan grupos de simetrías actuando sobre sistemas físicos. Un ejemplo es el grupo de Poincaré en relatividad especial, de traslaciones y transformaciones de Lorentz en el espacio de Minkowski (un modelo de espacio-tiempo con curvatura plana). Otro ejemplo de aplicación, a través de la teoría de representación de grupos, es el llamado *eightfold way*, una forma de organizar ciertas partículas, llamadas mesones, atendiendo a sus simetrías respecto de la interacción fuerte. Estas simetrías se describen con el grupo $SU(3)$ o grupo especial unitario [Schwartz, 2013, pp. 109, 573].

Estos grupos deben su nombre a Sophus Lie, el matemático Noruego que estudió las simetrías en ecuaciones diferenciales usando grupos de transformaciones continuas inspirado por el estudio de simetrías en ecuaciones polinómicas usando grupos finitos que inició Galois.¹¹ Sus trabajos fueron continuados por Élie Cartan, que elevó la teoría de Lie a la relevancia actual, relacionándola con la física matemática y la geometría diferencial [Stillwell, 2010, cap. 23].

Definición 1.23. Un **grupo de Lie** G es un grupo y una variedad suave con la propiedad de que la operación de grupo $m : G \times G \rightarrow G$ y la inversión $i : G \rightarrow G$ dadas por

$$m(g, h) = gh, \quad i(g) = g^{-1}$$

son aplicaciones diferenciables.


Ya vimos en el ejemplo 1.6 que el grupo $GL(n, \mathbb{R})$ es una variedad. Es también un grupo de Lie con la multiplicación de matrices, porque la multiplicación es una aplicación polinómica y la inversión, dada por la regla de Cramer, también es diferenciable. Otro ejemplo sencillo de grupo de Lie es \mathbb{S}^1 : si tomamos unas coordenadas locales angulares, la multiplicación $(\theta_1, \theta_2) \mapsto \theta_1 + \theta_2$ y la inversión $\theta \mapsto -\theta$ son diferenciables.¹²

Las aplicaciones entre grupos de Lie que conservan su estructura son los llamados homomorfismos de grupos de Lie:

Definición 1.24. Si G y L son grupos de Lie, se dice que $F : G \rightarrow L$ es un **homomorfismo de grupos Lie** si es una aplicación diferenciable y un homomorfismo de grupos, esto es, una aplicación tal que $F(gh) = F(g)F(h)$ para cada $g, h \in G$. Si F es además un difeomorfismo, se llama **isomorfismo de grupos de Lie**.

Veamos algunos ejemplos de estos homomorfismos.

Ejemplo 1.25. Si consideramos $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ como grupo con el producto, el determinante $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$ es diferenciable porque es polinómica y un homomorfismo porque $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, por tanto es un homomorfismo de Lie.

Otro ejemplo es la exponencial $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ dada por $\exp(t) = e^t$, considerando \mathbb{R} como grupo aditivo. Ya sabemos que es diferenciable y también un homomorfismo porque $\exp(t + s) = e^t e^s$. 

Definición 1.26. Sea G un grupo de Lie. Se dice que un subgrupo de G es un **subgrupo de Lie** si tiene una estructura diferenciable que lo hace un grupo de Lie y una subvariedad inmersa de G .

Los conjuntos de nivel de un homomorfismo de Lie son subgrupos de Lie además de subvariedades encajadas. Por ejemplo, el grupo especial lineal $SL(n, \mathbb{R})$, formado por las

¹¹ Wilhelm Killing también estudió simultánea e independientemente los grupos de Lie y sus álgebras asociadas, las álgebras de Lie.

¹² Curiosamente solo hay otros dos grupo de Lie del tipo \mathbb{S}^n : $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ y el grupo de los cuaterniones unidad \mathbb{S}^3 [Stillwell, 2008, p. 32].

matrices $n \times n$ con determinante igual a 1, es un subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ y también un subgrupo de Lie encajado, ya que es el núcleo del homomorfismo de Lie descrito en el ejemplo 1.25. Otro ejemplo de subgrupos de Lie encajados son los subgrupos cerrados (en la topología del grupo).

El interés principal de los grupos de Lie en geometría es estudiar cómo actúan sobre otras variedades, esto son, las acciones de grupos.

Definición 1.27. Sea G un grupo de Lie y M una variedad. Una **acción izquierda** (diferenciable) es una aplicación diferenciable $\phi : G \times M \rightarrow M$, denotada $(g, m) \mapsto \phi_g(m)$, que cumple dos propiedades:

- (i) $\phi_g(\phi_h(m)) = \phi_{gh}(m)$ para cada $g, h \in G$ y $m \in M$.
- (ii) Si e es la identidad de G , $\phi_e(m) = m$ para todo $m \in M$.

De las dos condiciones se deduce que cada ϕ_g es un difeomorfismo con inversa $\phi_{g^{-1}}$. Un ejemplo muy importante de acción de un grupo de Lie sobre sí mismo es la **traslación izquierda** $L_g : G \rightarrow G$, que para cada elemento $g \in G$, se define como $L_g(h) = gh$. Es diferenciable porque es la composición de dos aplicaciones diferenciables, la inclusión $i_g : h \mapsto (g, h)$ y la multiplicación de grupo. Las dos propiedades de la definición se comprueban inmediatamente y por tanto es una acción izquierda. Terminamos esta breve introducción a los grupos de Lie con un ejemplo de acción muy usual en física y geometría lineal.

Ejemplo 1.28. El grupo ortogonal $O(n)$ es el grupo de Lie de matrices ortogonales de dimensión n , es decir, aquellas que cumplen $Q^T Q = Q Q^T = Id_n$. Estas matrices tienen la propiedad de que preservan la norma euclídea. Otro ejemplo de grupo de Lie es el grupo euclídeo $E(n)$, formado por las matrices

$$E(n) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & Q \end{bmatrix} : v \in \mathbb{R}^n \text{ y } Q \in O(n) \right\},$$

y que representa las transformaciones que preservan distancias y ángulos. Se puede definir la siguiente acción de $E(n)$ sobre \mathbb{R}^n

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & Q \end{bmatrix} \cdot x = Qx + v$$

que representa una rotación o reflexión de x más una traslación (nótese que la acción no es el producto de matrices). ◇

1.6. Campos vectoriales y álgebras de Lie

La geometría diferencial generaliza el estudio de campos vectoriales a espacios más generales que \mathbb{R}^n , como pueden ser campos vectoriales en una esfera, que sentarán la base del estudio de ecuaciones diferenciales en variedades suaves.

Recordamos que $\pi : TM \rightarrow M$ es la proyección natural del fibrado tangente y viene dada por $\pi(p, v) = p$. Definiremos un campo vectorial como una aplicación que asigna a cada punto de una variedad un vector tangente.

Definición 1.29. Sea M una variedad suave, un **campo vectorial** sobre M es una aplicación $X : M \rightarrow TM$ que cumple $\pi \circ X = Id_M$, es decir, $X(p) \in T_p M$ para cada $p \in M$. Si además X es diferenciable, se dice que X es un **campo vectorial diferenciable**.

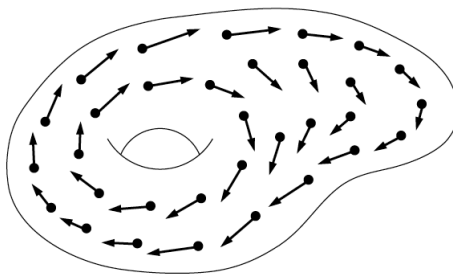


Figura 5: Campo vectorial sobre una variedad [John Lee, 2013, p. 175].

Si (U, φ) es una carta de M con componentes (x^i) , podemos escribir $X(p)$ (que denotaremos X_p a partir de ahora) en la base asociada de $T_p M$

$$X_p = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

y llamaremos **componentes** de X (en la carta dada) a las funciones $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$. La siguiente proposición caracteriza los campos vectoriales en términos de sus componentes.

Proposición 1.30. Sea X un campo vectorial sobre M y (U, x^i) una carta. La restricción de X a U es diferenciable si y solo si lo son sus componentes en la carta.

Demostración. En las coordenadas naturales de $\pi^{-1}(U)$ definidas en (1.4), la representación en coordenadas de X resulta

$$\hat{X}(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p), X^1(p), \dots, X^n(p))$$

donde se sobreentiende que p, x^i y X^i son realmente sus representaciones en coordenadas. Por tanto, X es diferenciable en U si lo son sus componentes. □

El ejemplo más sencillo de campo vectorial sobre U es el dado por $p \mapsto \partial/\partial x^1|_p$ y llamado primer campo coordenado. Análogamente se puede definir el i -ésimo campo coordenado

$$\frac{\partial}{\partial x^i} : p \mapsto \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad i = 1, \dots, n \quad (1.9)$$

Estos n campos coordenados tienen la propiedad de que para cada $p \in U$, sus valores en p forman una base de $T_p M$. Un campo vectorial con esta propiedad se conoce como **marco local** (*local frame* en inglés), y los campos coordenados se conocen como **marco coordenado**. Un campo vectorial será diferenciable si sus componentes en un marco local son diferenciables.

Los campos vectoriales diferenciables sobre M forman un espacio vectorial sobre \mathbb{R} si definimos la suma y producto por un escalar como $(aX + bY)_p = aX_p + bY_p$, este espacio se denota $\mathfrak{X}(M)$. También podemos definir el producto de una función $f \in C^\infty(M)$ por un campo vectorial, $(fX)_p = f(p)X_p$, que será de nuevo un campo vectorial diferenciable.¹³

Otra operación que podemos definir es la siguiente. Si F es un difeomorfismo, por la proposición 1.16, la diferencial dF es también un difeomorfismo y tiene sentido definir el **pushforward** de un campo X en M ,

$$(F_*X)_q = dF_{F^{-1}(q)}(X_{F^{-1}(q)}), \quad q \in N \quad (1.10)$$

que será un campo diferenciable en N por ser composición de aplicaciones diferenciables. La operación inversa, llamada **pullback**, se define como $F^* = (F^{-1})_* : \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$.

Los campos vectoriales actúan sobre funciones de $C^\infty(M)$ para darnos otra función $C^\infty(M)$,

$$(Xf)(p) = X_p f \quad \Rightarrow \quad (Xf)(\hat{p}) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(\hat{p}),$$

donde la expresión en coordenadas nos dice que $Xf \in C^\infty(M)$. Además, de la regla de producto para las derivaciones en p , deducimos que $X(fg) = fX(g) + gX(f)$ para cada $f, g \in C^\infty(M)$. Veremos que todas las aplicaciones que cumplen estas propiedades son de hecho campos vectoriales diferenciables, y tendremos pues, dos formas alternativas de caracterizar estos campos vectoriales.

Definición 1.31. Una aplicación $X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ es una **derivación** si es lineal y satisface $X(fg) = fX(g) + gX(f)$ para todo $f, g \in C^\infty(M)$.

Proposición 1.32. Una aplicación $D : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ es una derivación si y solo si existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $Df = Xf$ para todo $f \in C^\infty(M)$.

Llegados a este punto es natural preguntarse, si X, Y son derivaciones, ¿es XY una derivación? La respuesta es que no, porque al probar con la regla del producto vemos que quedan más términos de los que debieran. Sin embargo, tiene solución, podemos definir

¹³ El conjunto $\mathfrak{X}(M)$ forma un $C^\infty(M)$ -módulo.

la operación **corchete de Lie**,¹⁴ $[X, Y] = XY - YX$, que sí será una derivación por ser lineal y satisfacer la regla del producto

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &= XY(fg) - YX(fg) = X(fYg + gYf) - Y(fXg + gXf) = \dots \\ &\dots = fXYg + gXYf - fYXg - gYXf = f[X, Y]g + g[X, Y]f. \end{aligned}$$

En una carta (U, x^i) , podemos escribir el corchete con una fórmula en coordenadas que nos sea más útil a la hora de hacer cálculos

$$[X, Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} = (XY^j - YX^j) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Resulta que el espacio de campos vectoriales diferenciables $\mathfrak{X}(M)$ junto con el corchete de Lie forman lo que se llama un álgebra de Lie.

Definición 1.33. Un **álgebra de Lie** es un espacio vectorial \mathfrak{g} junto con una aplicación $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ llamada **corchete** que cumple las siguientes propiedades para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

- (i) Bilinealidad: dados $a, b \in \mathbb{R}$, $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ y $[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$.
- (ii) Antisimetría: $[X, Y] = -[Y, X]$.
- (iii) Identidad de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Un par de apuntes: las álgebras de Lie, en general, no son asociativas y la identidad de Jacobi será lo más cercano a esta propiedad; y segundo, $\mathfrak{X}(M)$ es un álgebra de dimensión infinita.

Un ejemplo muy socorrido de álgebras de Lie, de dimensión finita además, son aquellas asociadas a un grupo de Lie G de dimensión finita. El **álgebra de Lie de G** ¹⁵ es el conjunto de campos vectoriales diferenciables **invariantes por la izquierda**, es decir, los $X \in \mathfrak{X}(M)$ que cumplen

$$d(L_g)_h(X_h) = X_{gh} \quad \text{para todo } g, h \in G$$

siendo L_g la traslación izquierda. Esto nos dice que dL_g no cambia los vectores del mismo campo vectorial: para todo vector X_a existe otro, $X_{g^{-1}a}$, tal que $d(L_g)_{g^{-1}a}(X_{g^{-1}a}) = X_a$. La suma y producto por un escalar de campos invariantes es de nuevo invariante, y como L_g es un difeomorfismo, se puede deducir que $[X, Y]$ es también invariante por la izquierda. Este álgebra de Lie se denota **Lie(G)**.

La invarianza por la izquierda permite que cualquier campo vectorial de Lie(G) se pueda reconstruir a partir de su valor en la identidad: $X_g = d(L_g)_e(X_e)$.

¹⁴ También se conoce como corchete de Jacobi-Lie.

¹⁵ No se debe confundir un álgebra de Lie, que puede ser uno cualquiera, con el álgebra de Lie del grupo de Lie G .

Teorema 1.34. Sea G un grupo de Lie con e su elemento neutro. La aplicación $\varepsilon : \text{Lie}(G) \rightarrow T_e G$ evaluación $\varepsilon(X) = X_e$ es un isomorfismo.

Tenemos por tanto una forma sencilla de caracterizar $\text{Lie}(G)$, que será un álgebra de la misma dimensión que G . Veamos un par de ejemplos de estas álgebras.

Ejemplo 1.35. El espacio de matrices cuadradas $M(n, \mathbb{R})$ forma un álgebra de Lie con el conmutador de matrices $[A, B] = AB - BA$. Este álgebra se llama $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ y es de hecho el álgebra de Lie del grupo $\text{GL}(n, \mathbb{R})$.

Otro ejemplo de álgebra de Lie es $\mathfrak{so}(n)$, el álgebra de las matrices antisimétricas de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, es decir, aquellas que satisfacen $A^T = -A$, junto con el conmutador de matrices. Es el álgebra de Lie del grupo ortogonal $O(n)$ y del grupo especial lineal $\text{SO}(n)$,¹⁶ formado por las matrices ortogonales de determinante 1 (por ser un subconjunto abierto de $O(n)$ tienen el mismo álgebra). \diamond

Para finalizar esta sección mencionamos la relación entre los homomorfismos de grupos de Lie y los **homomorfismos de álgebras de Lie**, i.e. aplicaciones lineales $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ entre álgebras de Lie que conservan el corchete, $A[X, Y] = [AX, AY]$.

Teorema 1.36. Sean G, H grupos de Lie y $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ sus álgebras de Lie. Si $F : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos de Lie y e el elemento neutro de G , $dF_e : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.

1.7. Flujos

Los flujos son la confluencia de las ecuaciones diferenciales y la geometría diferencial. Hemos visto en (1.3) que la velocidad de una curva suave en cualquier punto es un vector tangente, por lo que es natural preguntarse si a partir de un campo de vectores se puede obtener una curva tangente a dicho campo. Pongamos un ejemplo:

Ejemplo 1.37. Supongamos que tenemos en \mathbb{R}^2 con las coordenadas usuales (x, y) el siguiente campo, $V = x \partial/\partial y - y \partial/\partial x$, dado en el marco coordenado. ¿Existe alguna curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\dot{\gamma}(t) = V_{\gamma(t)}$? Podemos reescribir el problema como un sistema de ecuaciones diferenciales. Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, debe cumplirse

$$\dot{x}(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\gamma(t)} + \dot{y}(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\gamma(t)} = -y(t) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\gamma(t)} + x(t) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\gamma(t)} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) \end{cases}$$

Este problema tiene por solución

$$x(t) = a \cos t - b \sin t, \quad y(t) = a \sin t + b \cos t,$$

donde las constante dependerán como es habitual de las condiciones iniciales que imponamos al problema, habiendo una curva única para cada condición $\gamma(0) = (a, b)$. Estas curvas son disjuntas, si no idénticas, y forman circunferencias salvo en el caso $\gamma(0) = (0, 0)$, que será una curva constante. \diamond

¹⁶ Normalmente se visualiza como el grupo de rotaciones en \mathbb{R}^n .

En el ejemplo anterior hemos encontrado las llamadas curvas integrales del campo.

Definición 1.38. Sea X un campo vectorial diferenciable sobre M e $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Una curva suave $\gamma : I \rightarrow M$ que cumple $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ para todo $t \in I$ se llama **curva integral** de X . Si además $0 \in I$, $\gamma(0)$ se llama **condición inicial**.

Como en el ejemplo, encontrar una curva integral en un entorno $U \subset M$ con coordenadas (x^i) se reduce a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{\gamma}^i(t) = X^i(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.11)$$

a las que podemos aplicar los teoremas usuales de existencia y unicidad de soluciones diferenciables. En particular, si dos curvas integrales coinciden en la condición inicial, coincidirán en la intersección de sus dominios.

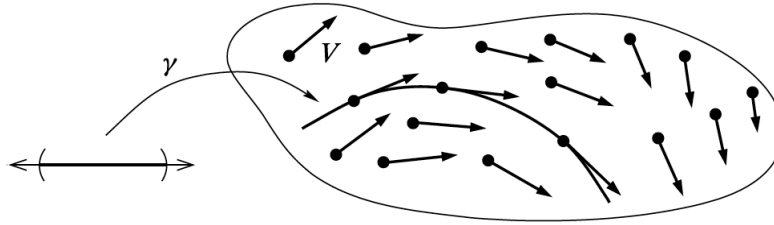


Figura 6: Curva integral de un campo [John Lee, 2013, p. 206].

Si existe el pushforward entre dos campos vectoriales, la proposición siguiente nos relaciona sus curvas integrales.

Proposición 1.39. Si $F : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo entre dos variedades y $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ son dos campos vectoriales, entonces $F_*X = Y$ si y solo si para cada curva integral γ de X se tiene que $F \circ \gamma$ es una curva integral de Y .

Motivados por la definición de curvas integrales, podemos definir unas aplicaciones, llamadas flujos, que nos den las curvas integrales en cada punto de la variedad.

Definición 1.40. Un **flujo global** es una acción izquierda diferenciable de \mathbb{R} sobre M , $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$. También se denomina **acción de grupo uniparamétrico**.

Si llamamos $\Phi_t(p) := \Phi(t, p)$ para un t fijo, podemos reescribir las propiedades de la acción izquierda 1.27 como $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$ y $\Phi_0 = Id_M$. Para cada p podemos construir una curva que comienza (en $t = 0$) en p , $\Phi^p(t) := \Phi(t, p)$, de forma que

$$X_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi^p(t) \quad p \in M \quad (1.12)$$

X es un campo vectorial diferenciable y Φ^p es una curva integral de X . La aplicación $p \mapsto X_p$ se conoce como **generador infinitesimal** del flujo Φ .

Retomando el ejemplo anterior, $\Phi(t, (x, y)) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t)$, sería un flujo global. Podemos reconstruir tanto el campo vectorial $d\Phi^p/dt|_0 = (-y, x)$ como las curvas integrales $\Phi^p(t)$, para cada condición inicial $\Phi^p(0) = (x, y)$. Sin embargo, no siempre existen flujos definidos en todo \mathbb{R} , por lo que a veces tenemos que conformarnos con su alternativa local.

Definición 1.41. Sea \mathcal{D} un abierto de $\mathbb{R} \times M$ tal que para cada $p \in M$, $\mathcal{D}^p = \{t \in \mathbb{R} : (t, p) \in \mathcal{D}\}$ es un intervalo abierto que contiene el 0. Un **flujo** en M es una aplicación diferenciable $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow M$ que satisface

- (i) $\Phi(0, p) = p$ para todo $p \in M$.
- (ii) $\Phi_t \circ \Phi_s(p) = \Phi_{s+t}(p)$ para cada $s \in \mathcal{D}^p$ y $t \in \mathcal{D}^{\Phi_s(p)}$ tal que $s+t \in \mathcal{D}^p$.

Igual que antes, se define el generador infinitesimal de Φ , que será un campo vectorial diferenciable con $\Phi^p(t)$ curvas integrales suyas. Diremos que un flujo es **maximal** si no se puede extender a un flujo en un dominio mayor (análogamente para curva integral maximal) y enunciamos el teorema fundamental sobre flujos.

Teorema 1.42. Sea X un campo vectorial diferenciable sobre M . Existe un único flujo maximal $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow M$ cuyo generador infinitesimal es X , llamado **flujo de X** . En este caso $\Phi^p : \mathcal{D}^p \rightarrow M$ son las curvas integrales maximales únicas de X comenzando en p .

Los flujos nos permiten definir la derivada de un campo vectorial W (y posteriormente de un campo tensorial) a lo largo del flujo Φ de otro campo vectorial V , la **derivada de Lie** de W respecto a V

$$(\mathcal{L}_V W)_p := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d(\Phi_{-t})_{\Phi_t(p)}(W_{\Phi_t(p)}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(\Phi_{-t})_{\Phi_t(p)}(W_{\Phi_t(p)}) - W_p}{t}$$

Es decir, nos da el cambio instantáneo de W_p cuando es trasladado a lo largo de la curva integral de V que pasa por p . Si V y W son diferenciables, la derivada de Lie existe para cada p y es un campo vectorial diferenciable. De hecho, se demuestra que en este caso $\mathcal{L}_V W = [V, W]$.

Otra utilidad de los flujos surge a la hora de relacionar las álgebras con los grupos de Lie. Dado un vector $\xi \in T_e G \cong \mathfrak{g}$ (el álgebra de Lie de G) conocemos el campo X invariante por la izquierda tal que $X_e = \xi$ (teorema 1.34), y por tanto conocemos la curva integral maximal $\gamma(t)$ con velocidad inicial X_e . En base a esto, definimos la aplicación **exponencial** $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ que envía cada elemento $\xi \in \mathfrak{g}$ en $\exp(\xi) \equiv \gamma(1) \in G$. Por ser la variedad un grupo de Lie, estas curvas integrales están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ y podemos reescribir la curva integral como $\gamma(t) = \exp(t\xi)$. De hecho, $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ es un homomorfismo de grupos de Lie y la imagen se puede dotar de una estructura diferenciable para que sea un subgrupo de Lie de G . Un ejemplo de exponencial es $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$, dada por la exponencial de matrices $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} A^k/k!$.

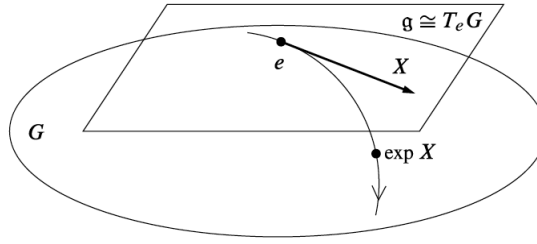


Figura 7: Velocidad de una curva [John Lee, 2013, p. 519].

Ejemplo 1.43. Otro ejemplo es la exponencial de un elemento de \mathbb{R}^n , visto como el álgebra de Lie de \mathbb{R}^n . Dado un vector ξ , el campo vectorial invariante por la izquierda con valor de ξ en la identidad (en este caso el 0) se obtiene mediante la diferencial de la traslación izquierda

$$\xi_x = d(L_x)_0 \xi.$$

En coordenadas usuales, la traslación izquierda por x es simplemente $L_x(y) = x + y$, y como x es una constante, la diferencial en $y = 0$ es la identidad. Por tanto, el campo invariante por la izquierda es el campo constante $\xi_x = \xi$. La aplicación exponencial es entonces la curva solución de

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = \xi \\ \gamma(0) = 0 \end{cases}$$

es decir, $\exp(t\xi) \equiv \gamma(t) = t\xi$. ◇

A continuación damos algunas propiedades útiles de la exponencial.

Proposición 1.44. Sea $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ la exponencial del álgebra de Lie \mathfrak{g} en el grupo G . Tenemos:

- (i) \exp es diferenciable y un difeomorfismo local entre un entorno de 0 en \mathfrak{g} y un entorno de e en G .
- (ii) Si $F : G \rightarrow H$ es un homomorfismo de grupos de Lie, $F \circ \exp_G = \exp_H \circ (dF)_e$.
- (iii) Si H es un subgrupo de Lie de G , su álgebra de Lie es $\mathfrak{h} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \exp(t\xi) \in H, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

La exponencial cobra una importante relevancia cuando el grupo de Lie es compacto y conexo, en este caso todo elemento de G se puede escribir como la exponencial de un elemento del álgebra de Lie \mathfrak{g} [Stillwell, 2008, p. 92]. El ejemplo más común es quizá el grupo de rotaciones $SO(n)$, compacto y conexo, y por tanto sus elementos se pueden escribir como e^{tL} , siendo L una matriz de $\mathfrak{so}(n)$, antisimétrica como vimos en 1.35. La interpretación física de $\mathfrak{so}(n)$ es la de matrices de velocidad angular (que son antisimétricas, ver [Holm, 2011, p. 94]) como generadores infinitesimales de las rotaciones.

1.8. Tensores y formas diferenciales

Introduciremos los tensores como aplicaciones multilineales. Una aplicación multilineal sobre \mathbb{R} es una aplicación lineal en cada componente, es decir, si V_1, \dots, V_n son espacios vectoriales y $T : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación, debe cumplirse para cada i ,

$$T(v_1, \dots, av_i + bv'_i, \dots, v_n) = aT(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + bT(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n).$$

Por ejemplo, podemos construir un tensor $T : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ de manera sencilla con dos covectores ω, η de V^* mediante el llamado **producto tensorial** de covectores, que definiremos como $\omega \otimes \eta(v_1, v_2) := \omega(v_1)\eta(v_2)$. La ventaja de trabajar con espacios de dimensión finita es que el dual de V^* es V , y podremos construir productos tensoriales de elementos de V y V^* siguiendo el ejemplo anterior.

Definición 1.45. Un **tensor** de rango (r, k) es un elemento del espacio vectorial $T^{(r,k)}(V)$ de aplicaciones multilineales $T : V \times \dots \times V \times V^* \times \dots \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$, con r copias de V y k copias de V^* .

Nos interesaremos principalmente por los tensores de rango $(0, k)$, o **covariantes** de rango k , y denotaremos al correspondiente espacio por $T^k(V^*)$. Si tenemos una base $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ de V^* , podemos dar la siguiente base de $T^k(V^*)$

$$\mathcal{B} = \left\{ dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k} : 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \right\}$$

y se definiría análogamente para tensores de rango (k, l) . Utilizando el convenio de suma para índices repetidos, esta vez para múltiples índices, podemos escribir cualquier elemento de $T^k(V^*)$ como $F = F_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}$.

Destacan dos clases de tensores por su interés central en geometría, los simétricos y los antisimétricos. Los simétricos son aquellos que para cada par de vectores que intercambiamos cumplen $T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$. De forma similar, los antisimétricos o **alternantes** cambian de signo si intercambiamos dos vectores. El conjunto de tensores alternantes covariantes de rango k forma un espacio vectorial denotado $\Lambda^k(V^*)$ y sus elementos se llaman **k -covectores**.

Definimos el **producto exterior** de $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ y $\eta \in \Lambda^l(V^*)$ por

$$\omega \wedge \eta = \frac{1}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta) \in \Lambda^{k+l}(V^*) \quad (1.13)$$

siendo Alt una aplicación que toma un tensor y nos devuelve un tensor alternante del mismo rango. Esta operación es *bilineal*, *asociativa* y *anticonmutativa*, es decir, $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$. El factor numérico es una convención que nos permite dar la siguiente base de $\Lambda^k(V^*)$ a partir de la base $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ de V^* ,

$$\mathcal{C} = \left\{ dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \right\}$$

Estos elementos de la base actúan sobre k vectores v_1, \dots, v_k mediante el determinante, el ejemplo paradigmático de tensor alternante,

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{bmatrix} dx^{i_1}(v_1) & \dots & dx^{i_1}(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ dx^{i_k}(v_1) & \dots & dx^{i_k}(v_k) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} v_1^{i_1} & \dots & v_k^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{i_k} & \dots & v_k^{i_k} \end{bmatrix}.$$

A partir de ahora, principalmente nos vamos a interesar por los campos de tensores. Para asociar a cada punto de una variedad un tensor seguimos los mismos pasos que cuando definimos los campos vectoriales.

Definición 1.46. Sea M una variedad, definimos el **fibrado tensorial** covariante de rango k , $T^k(M)$, como la unión disjunta de los espacios $T_p^*(M)$ para cada p . Un **campo tensorial** de rango k diferenciable es una aplicación diferenciable, $T : M \rightarrow T^k(M)$, tal que su composición con la proyección natural es la identidad $\pi \circ T = Id_M$.

Podemos decir que T es diferenciable porque $T^k(M)$ es una variedad suave si lo dotamos de una estructura diferenciable similar a la del fibrado tangente. El espacio de campos tensoriales diferenciables de rango $(0, k)$ sobre M se denota $\Gamma^k(M)$. Al fibrado tensorial de tensores alternantes covariantes de rango k lo denotamos $\Lambda^k(M)$ y al espacio de campos diferenciables de éstos por $\Omega^k(M)$. Los elementos de $\Omega^k(M)$ se denominan **k -formas**. Un campo será diferenciable si y solo si lo son sus componentes en una carta.

Un ejemplo de estos campos de tensores son las 0-formas, las funciones diferenciables $f \in C^\infty(M)$. Otro ejemplo son las diferenciales de funciones $C^\infty(M)$, un ejemplo de 1-forma que se expresa en una carta (U, x^i) por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad (1.14)$$

es decir, en cada $p \in M$ vale (1.5). No todos los campos de covectores se pueden escribir como diferenciales de alguna función, aquellos que sí se llaman 1-formas **exactas**.

A continuación vamos a definir una serie de operaciones sobre los campos de tensores. La primera nos permitirá relacionar campos tensoriales diferenciables en dos variedades. Si

$F : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable, definimos el **pullback** $F^* : \Gamma^k(N) \rightarrow \Gamma^k(M)$ del campo T ,

$$(F^*T)_p(v_1, \dots, v_n) = T_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_n)) \quad (1.15)$$

para cada $p \in M$. La siguiente fórmula nos será útil al trabajar con k -formas.

Proposición 1.47. Si $F : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable entre variedades de dimensión n , y $\omega \in \Omega^k(N)$, $\eta \in \Omega^l(N)$ son dos formas, entonces $F^*(\omega \wedge \eta) = (F^*\omega) \wedge (F^*\eta)$. Si además (y^i) es una carta de N ,

$$F^* \left(\sum_{i_1 < \dots < i_n} \omega_{i_1 \dots i_n} dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_n} \right) = \sum_{i_1 < \dots < i_n} (\omega_{i_1 \dots i_n} \circ F) d(y^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(y^{i_n} \circ F).$$

La segunda operación que vamos a definir es la derivada de Lie, similar a la vista para campos vectoriales. Si $V \in \mathfrak{X}(M)$ y Φ es su flujo, la **derivada de Lie** de T a lo largo del flujo de V , es la aplicación $\mathcal{L}_V T : \Gamma^k(M) \rightarrow \Gamma^k(M)$ dada por

$$(\mathcal{L}_V T)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Phi_t^* T)_p. \quad (1.16)$$

Si tomamos una función diferenciable $f \in C^\infty(M)$, la derivada de Lie actúa simplemente como una derivación de f , $\mathcal{L}_V f = Vf$. Veamos algunas propiedades de la derivada de Lie.

Proposición 1.48. Sea $V \in \mathfrak{X}(M)$, la derivada de Lie guarda estas propiedades,

- (i) $\mathcal{L}_V f = Vf$, si $f \in C^\infty(M)$.
- (ii) Si ω es una 2-forma y X e Y dos campos diferenciables,
 $(\mathcal{L}_V \omega)(X, Y) = V(\omega(X, Y)) - \omega([V, X], Y) - \omega(X, [V, Y]).$
- (iii) Si Φ es el flujo de V y ω una k -forma, $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (\Phi_t^* \omega)_p = (\Phi_{t_0}^* (\mathcal{L}_V \omega))_p$.
- (iv) Si F es un difeomorfismo, $F^* \mathcal{L}_X \omega = \mathcal{L}_{F^* X} F^* \omega$, $\omega \in \Omega^k(N)$.

Proseguimos con las operaciones, esta vez sobre las k -formas. Podemos definir de nuevo el producto exterior, que se puede generalizar a k -formas sin más que aplicar la definición en cada punto del campo tensorial. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo vectorial diferenciable, definimos la **multiplicación interior** $i_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$, definida en cada punto $p \in M$ por

$$(i_X \omega)_p(v_1, \dots, v_{k-1}) = (i_{X_p} \omega)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(X_p, v_1, \dots, v_{k-1})$$

si $k \geq 1$, e igual a 0 si $k = 0$. Enunciamos un par de propiedades.

Proposición 1.49. La multiplicación interior cumple las siguientes propiedades

- (i) $i_X \circ i_X = 0$.
- (ii) $i_X(\omega \wedge \eta) = (i_X \omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge (i_X \eta)$ si $\omega \in \Omega^k(M)$ y $\eta \in \Omega^l(M)$.
- (iii) Si $f \in C^\infty(M)$ y ω es una 1-forma, entonces $\omega \wedge f = f \wedge \omega = f \omega$.
- (iv) Si $F : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, $\omega \in \Omega^k(N)$ y $X \in \mathfrak{X}(N)$, entonces
 $i_{F^* X}(F^* \omega) = F^*(i_X \omega)$.

La última aplicación que vamos a definir aumenta el rango de las k -formas, definimos la **derivada exterior** $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ de una k -forma,

$$d \left(\sum_{i_1 < \dots < i_n} \omega_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n} \right) = \sum_{i_1 < \dots < i_n} d(\omega_{i_1 \dots i_n}) \wedge (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n})$$

donde $d\omega_{i_1 \dots i_n}$ es la diferencial (1.14). Por ejemplo, si $\omega = \omega_i dx^i$ es una 1-forma,

$$d(\omega_i dx^i) = \sum_{i,j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j. \quad (1.17)$$

La última igualdad se obtiene teniendo en cuenta que $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ y $dx^i \wedge dx^i = 0$. Resumimos algunas propiedades de la derivada exterior:

Proposición 1.50. *La derivada exterior satisface las siguientes propiedades:*

- (i) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$ si $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)$.
- (ii) $d \circ d = 0$.
- (iii) Para $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, df es la diferencial de f .
- (iv) Si $F : M \rightarrow N$ es diferenciable, el pullback $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ conmuta con d , $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$ para toda $\omega \in \Omega^k(N)$.
- (v) Si $V \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \Omega^k(M)$, entonces $\mathcal{L}_V(d\omega) = d(\mathcal{L}_V\omega)$.
- (vi) La fórmula mágica de Cartan: $\mathcal{L}_V\omega = i_V(d\omega) + d(i_V\omega)$, $\omega \in \Omega^k(M)$.

Para finalizar la sección, damos un par de ejemplos de tensores con aplicaciones en física.

Ejemplo 1.51. Una métrica Riemanniana¹⁷ es un campo tensorial $g \in \Gamma^2(M)$ simétrico y definido positivo, es decir, en cada punto, g_p es un tensor simétrico que cumple $g_p(v, v) > 0$ para todo $v \in T_p M$ no nulo. La métrica define en cada espacio $T_p M$ un producto interno, y por el teorema de representación de Riesz¹⁸ podemos definir para cada 1-forma ω un campo vectorial ω^\sharp tal que

$$\omega_p(Y_p) = g_p(\omega_p^\sharp, Y_p) \quad \text{para todo } Y \in \mathfrak{X}(M).$$

También podemos definir para cada campo vectorial X un campo de covectores X^\flat ,

$$X_p^\flat(Y_p) = g_p(X_p, Y_p) \quad \text{para todo } Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Estas aplicaciones se conocen como **isomorfismos musicales**, y nos permiten describir el gradiente, rotacional y divergencia en términos de la derivada exterior. Por ejemplo, el gradiente sería $\nabla f = (df)^\sharp$, o en coordenadas locales (x^i) ,

$$\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j},$$

siendo g^{ij} la matriz inversa de g_{ij} , la matriz de la métrica en coordenadas $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$.

Un ejemplo más explícito de campo tensorial, es la métrica Lorentziana, simétrica pero no definida positiva, que describe la curvatura del espacio-tiempo en presencia de, por ejemplo, un agujero negro estático sin carga [Wheeler et al., 1973, p. 820],

$$g = -c^2 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dt \otimes dt + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 (d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\phi \otimes d\phi)$$

se conoce como métrica de Schwarzschild y está dada en coordenadas esféricas. ◇

¹⁷ Toda variedad suave admite una métrica Riemanniana [John Lee, 2013, p. 329].

¹⁸ $T_p M$ con el producto interno g_p forma un espacio de Hilbert, ya que por ser de dimensión finita será completo para la norma $\sqrt{g_p(v, v)}$.

Ejemplo 1.52. Es común en física describir los campos electromagnéticos en términos de un potencial¹⁹, el cuadripotencial vector $A = (\phi/c, A_x, A_y, A_z)$, del que podemos deducir los campos eléctrico $E = -\nabla\phi - \partial_t \vec{A}$ y magnético $B = \nabla \times \vec{A}$.

Mediante este potencial podemos describir las ecuaciones de Maxwell en su espacio natural, una variedad de dimensión 4 con carta (ct, x, y, z) y métrica de Minkowski

$$\eta = -d(ct) \otimes d(ct) + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$$

Transformando el cuadripotencial en una 1-forma²⁰ $A^b = -\frac{\phi}{c}d(ct) + A_x dx + A_y dy + A_z dz$ y teniendo en cuenta que $\{\partial_t/c, \partial_x, \partial_y, \partial_z\}$ es el marco coordenado (1.9), podemos aplicar (1.17) para obtener el tensor de Faraday

$$F = dA^b = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

y podemos reescribir las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, $\nabla \cdot B = 0$ y $\nabla \times E + \partial_t B = 0$, como $d(dA^b) = dF = 0$. Las otras dos ecuaciones se pueden escribir usando el dual de Hodge²¹ y el cuadvectores corriente $J = (c\rho, j_x, j_y, j_z)$,

$$*d * F = \mu_0 J^b$$

(ver [Wheeler *et al.*, 1973, cap. 4; Abraham, Marsden y Ratiu, 1988, cap. 8] para el caso $c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$). La ventaja de estas ecuaciones es que se pueden generalizar fácilmente a espacio-tiempo curvo, es decir, electromagnetismo en presencia de gravedad. \diamond

¹⁹ La descripción es equivalente, salvo en mecánica cuántica, donde en algunos sentidos este potencial es más fundamental que los campos, véase el efecto Aharonov-Bohm.

²⁰ Aunque no es Riemanniana, por ser no degenerada los isomorfismos musicales están bien definidos.

²¹ Basta saber que transforma k -formas en $(n - k)$ -formas.

1.9. Mucha más geometría

La geometría diferencial aúna diferentes ramas de las matemáticas en una elegante (y amplia) teoría. Hemos hablado de derivaciones, pero la teoría integral también tiene su generalización a variedades abstractas. Así, las integrales en línea se convierten en integrales de 1-formas, los volúmenes en integrales de n -formas, etc., de forma que los cambios de variable surgen de forma natural al cambiar las formas de base. Destaca el célebre *Teorema de Stokes*, o más bien su generalización a variedades con borde, que incluye como casos particulares los teoremas clásicos de la divergencia, Stokes y Green:

$$\int_{\partial M} i^* \omega = \int_M d\omega .$$

También podríamos preguntarnos cuándo una k -forma ω con $d\omega = 0$ es exacta, esto es, que exista una $(k-1)$ -forma η tal que $d\eta = \omega$. La teoría de Rham, íntimamente ligada con la topología algebraica, nos da la respuesta mediante los grupos de cohomología de Rham. Otro camino sería continuar estudiando las variedades Riemannianas, introduciendo el concepto de conexión, que permite estudiar las geodésicas, la curvatura... centrales en la teoría de la relatividad general.

Aunque de momento hemos hablado de geometría diferencial para referirnos al estudio de variedades suaves, normalmente se suele reservar el término *geometría* para variedades con una estructura adicional, por ejemplo una métrica, conexión o estructura compleja. Nosotros seguiremos la senda de la geometría simpléctica...

Capítulo 2

Geometría simpléctica

En este capítulo introducimos las herramientas fundamentales para describir sistemas físicos, en concreto sistemas Hamiltonianos, especializando la teoría vista en el capítulo anterior a la rama de la geometría simpléctica. Serán de vital importancia los campos de tensores, que nos permitirán definir la forma simpléctica. Intuitivamente, podemos imaginarnos la forma simpléctica como una aplicación capaz de medir “áreas” (con signo), similar al determinante de dos vectores en \mathbb{R}^2 . Tras introducir las variedades simplécticas añadiremos una nueva capa de complejidad, una función llamada Hamiltoniano que podemos visualizar como el Hamiltoniano usual de la física. La forma simpléctica combinada con este Hamiltoniano nos dará unas ecuaciones diferenciales que generalizan las ecuaciones de Hamilton de la física, equivalentes a las ecuaciones de Newton, y que dictan la evolución de un sistema.

El estudio de los sistemas Hamiltonianos ha suscitado gran interés durante el siglo XX y existen gran variedad de libros que tratan esta temática. Una introducción puede encontrarse en [Berndt, 2000], [John Lee, 2013, cap. 22], [Rudolph y Schmidt, 2017, cap. 8], [da Silva, 2000], [Marsden y Ratiu, 2011, cap. 2, 5] y [Abraham y Marsden, 1987, cap. 3] para un tratamiento más avanzado. Un enfoque alternativo puede encontrarse en el clásico de Vladimir Arnold [Arnold, 1989], en el que podemos encontrar una demostración alternativa del teorema de Gibbs-Liouville a la que se da en este capítulo. La geometría simpléctica y los sistemas Hamiltonianos ha permeado en áreas de las matemáticas muy variadas como la teoría de control, la teoría de representación o el análisis numérico. En esta última, mencionamos el desarrollo de integradores numéricos que conserven la forma simpléctica y son más eficientes a la hora de resolver sistemas Hamiltonianos [Calvo y Sanz-Serna, 2018, cap. 6]. Y sin más dilación, comencemos con las primeras definiciones.

2.1. Variedades simplécticas

Comenzaremos definiendo la estructura simpléctica en un espacio vectorial, y posteriormente la extendaremos a variedades suaves a través del espacio tangente. Un **tensor simpléctico** en un espacio vectorial V , es una aplicación bilineal $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple

- (i) Es antisimétrica, $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$.
- (ii) Es no degenerada, es decir, la aplicación $\hat{\omega} : V \rightarrow V^*$ es biyectiva,

$$\hat{\omega}(v) = i_v \omega = \omega(v, \cdot) \quad \leftrightarrow \quad \hat{\omega}(v)(w) = \omega(v, w) \quad w \in V. \quad (2.1)$$

Igual que los productos escalares se pueden escribir como una matriz identidad en una base ortonormal, un tensor simpléctico siempre se puede representar por

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

en cierta base. Lo demostraremos adaptando el algoritmo de Gram-Schmidt para el tensor simpléctico. Si S es un subespacio de V , definimos el **subespacio ortogonal** a S por,

$$S^\perp = \{v \in V : \omega(v, s) = 0 \text{ para todo } s \in S\}. \quad (2.3)$$

Lema 2.1. Si (V, ω) es un espacio vectorial simpléctico y $S \subset V$ es un subespacio, entonces $\dim S + \dim S^\perp = \dim V$.

Demostración. Definimos $\phi : V \rightarrow S^*$ por $\phi(v)(s) = \omega(v, s)$, para $v \in V$ y $s \in S$. Dado un elemento $\psi \in S^*$, podemos extenderlo a un funcional en todo V , $\psi' \in V^*$, y como $\hat{\omega} : V \rightarrow V^*$ es un isomorfismo, debe existir $v \in V$ tal que $\psi' = \hat{\omega}(v)$. Hemos encontrado un v tal que $\phi(v) = \psi$, entonces ϕ es sobreyectiva y la dimensión de la imagen de ϕ es $\dim S^*$. Teniendo en cuenta que $S^\perp = \text{Ker } \phi$, concluimos que $\dim V = \dim S^* + \dim S^\perp = \dim S + \dim S^\perp$. □

Como consecuencia de este lema tenemos que $(S^\perp)^\perp = S$, pero a diferencia de los subespacios ortogonales respecto a productos escalares, puede suceder que $S = S^\perp$, $S \subset S^\perp$, $S^\perp \subset S$ o $S^\perp \cap S = \{0\}$.

Proposición 2.2. Sea V un espacio vectorial y ω un tensor simpléctico, entonces V tiene dimensión par y existe una base en la que ω tiene matriz J_n .

Demostración. Lo demostraremos por inducción sobre la dimensión del espacio vectorial. Si $n \geq 1$, como ω es no degenerada, podemos tomar dos vectores tal que $\omega(v, u) = 1$, que deberán ser linealmente independientes y por tanto $\dim V \geq 2$. Si $n = 2$, está demostrado. Si no, tomamos el subespacio S generado por u y v , su complemento S^\perp tendrá dimensión $n - 2$. Como $\omega|_S$ es no degenerada, ni u ni v pueden pertenecer a S^\perp ya que si u fuese ortogonal a S entonces tendríamos $\omega(u, v) = 0$.

Por otro lado, la restricción $\omega|_{S^\perp}$ es no degenerada, ya que si existiera $v \in S^\perp$ no nulo ortogonal a S^\perp , como también sería ortogonal a $u, v \notin S^\perp$, v debería ser ortogonal a todo V por la fórmula de las dimensiones. Por tanto, $(S^\perp, \omega|_{S^\perp})$ es un espacio vectorial simpléctico de dimensión par y podemos aplicar el principio de inducción para concluir que hay una base en la que la matriz de $\omega|_{S^\perp}$ es J_{n-2} . Si añadimos u, v a esta base, obtenemos la matriz J_n de ω . □

Normalmente se denota por ω_0 el tensor simpléctico con matriz J_n . Ya estamos en situación de extender de manera natural los tensores simplécticos a toda la variedad mediante los campos de tensores. Se dice que una forma es **cerrada** si su derivada exterior es nula y **no degenerada** si lo es en cada punto.

Definición 2.3. Una **variedad simpléctica** es un par (M, ω) formado por una variedad suave M y una 2-forma cerrada ($d\omega = 0$) no degenerada, llamada **forma simpléctica**.

A las aplicaciones entre variedades simplécticas $F : (M, \omega) \rightarrow (N, \rho)$ que conservan su estructura, esto es $F^*\rho = \omega$, las denominamos **aplicaciones simplécticas**. Si además F es un difeomorfismo, se denomina **simplectomorfismo**.

El ejemplo más sencillo de forma simpléctica en \mathbb{R}^{2n} con coordenadas estándar $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ es

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i$$

y se puede representar por la matriz J_n . Inmediatamente comprobamos que es no degenerada, ya que la matriz J_n tiene determinante no nulo. También es cerrada, porque sus coeficientes son constantes, resultando en que su derivada exterior se anula. Otro ejemplo, que nos servirá más adelante para describir la mecánica Hamiltoniana, es la forma canónica en el fibrado cotangente de una variedad M . Si (q^i) es una carta de M y (q^i, p_i) son las coordenadas naturales (1.7) de T^*M , la forma simpléctica

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i \equiv dq^i \wedge dp_i \quad (2.4)$$

se llama **forma canónica**. Veamos en detalle cómo actúa sobre vectores de $T(T^*M)$. Si (a, ξ) es un punto de T^*M , los vectores $\{\partial/\partial q^i|_{(a, \xi)}, \partial/\partial p_i|_{(a, \xi)}\}$ forman una base de $T_{(a, \xi)}(T^*M)$ y podremos escribir dos vectores de este espacio tangente como (obviando la restricción al punto (a, ξ))

$$\left(u^i \frac{\partial}{\partial q^i}, \beta_i \frac{\partial}{\partial p_i}\right) \equiv (u, \beta), \quad \left(v^i \frac{\partial}{\partial q^i}, \gamma_i \frac{\partial}{\partial p_i}\right) \equiv (v, \gamma).$$

Aplicando la definición del antisimetrizador Alt en (1.13),

$$dq^i \wedge dp_i = \text{Alt}(dq^i \otimes dp_i) = dq^i \otimes dp_i - dp_i \otimes dq^i,$$

deducimos que esta forma simpléctica actúa así,

$$\begin{aligned} (dq^i \wedge dp_i)|_{(a, \xi)}((u, \beta), (v, \gamma)) &= (dq^i \otimes dp_i - dp_i \otimes dq^i)((u, \beta), (v, \gamma)) \\ &= dq^i(u, \beta) dp_i(v, \gamma) - dp_i(u, \beta) dq^i(v, \gamma) = u^i \gamma_i - \beta_i v^i. \end{aligned} \quad (2.5)$$

La forma canónica puede escribir como la derivada exterior de la 1-forma $\theta \in \Omega^1(T^*M)$

$$\theta = \sum_{i=1}^n p_i dq^i \equiv p_i dq^i \quad \Rightarrow \quad \omega = -d\theta,$$

llamada **1-forma canónica**. Igual que antes, podemos ver como actúa sobre un vector (u, β) de $T_{(a, \xi)}(T^*M)$:

$$\theta_{(a, \xi)}(u, \beta) = (p_i(\xi) dq^i(u, \beta))_{(a, \xi)} = (\xi_i)_a u^i$$

y la última igualdad se puede reescribir, denotando por “ \cdot ” la acción de un covector sobre un vector,

$$\theta_{(a,\xi)}(u, \beta) = \xi_a \cdot u = \xi_a \cdot d\pi(u, \beta), \quad (2.6)$$

teniendo en cuenta que $u = d\pi(u, \beta)$, siendo $\pi : T^*M \rightarrow M$ la proyección natural. Lo interesante de estas formas es que su definición es independiente de las coordenadas. Si tenemos dos cartas (U, q^i, p_i) y (U', q'^i, p'_i) , en $U \cap U'$ las coordenadas están relacionadas por (1.6) y (1.10),

$$p'_j = \frac{\partial q^i}{\partial q'^j} p_i \quad dq'^j = \frac{\partial q'^j}{\partial q^i} dq^i$$

por tanto $\theta = p_i dq^i = p'_i dq'^i$ y ω será (2.4) en cualquier carta.

2.2. Teorema de Darboux

Damos paso al primer teorema importante de la geometría simpléctica y para demostrarlo, vamos a ampliar la noción de campos vectoriales y flujos que dimos en las secciones 1.6 y 1.7 para incluir la posibilidad de que los campos dependan del tiempo.

Definición 2.4. Sea M una variedad suave e I un intervalo de \mathbb{R} , un **campo vectorial dependiente del tiempo** es una aplicación diferenciable $X : I \times M \rightarrow TM$ tal que $X(t, p) \in T_p M$ para cada $(t, p) \in I \times M$.

Visto de otra forma, el campo $X_t(p) := X(t, p)$ para cada t fijo, es un campo vectorial diferenciable sobre M . Una **curva integral** de X es una curva suave $\gamma : I_0 \rightarrow M$ tal que $\gamma'(t) = X(t, \gamma(t))$ para cada $t \in I_0 \subset I$. De forma similar al teorema 1.42, tenemos un teorema de existencia de flujos dependientes del tiempo,

Teorema 2.5. Sea $V : I \times M \rightarrow TM$ un campo dependiente del tiempo, existe un subconjunto abierto $\mathcal{D} \subset I \times I \times M$ y una aplicación diferenciable $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow M$ llamada **flujo dependiente del tiempo** de V , con las siguientes propiedades

- (i) Para cada $t_0 \in I$ y $p \in M$, el conjunto $\mathcal{D}^{(t_0, p)} = \{t \in I : (t, t_0, p) \in \mathcal{D}\}$ es un intervalo abierto que contiene a t_0 , y la curva suave $\Phi^{(t_0, p)} : \mathcal{D}^{(t_0, p)} \rightarrow M$ dada por $\Phi^{(t_0, p)}(t) := \Phi(t, t_0, p)$ es la única curva integral maximal de V con condición inicial $\Phi^{(t_0, p)}(t_0) = p$.
- (ii) Para cada $(t_1, t_0) \in I \times I$, el conjunto $M_{t_1, t_0} = \{p \in M : (t_1, t_0, p) \in \mathcal{D}\}$ es abierto en M y la aplicación $\Phi_{t_1, t_0} : M_{t_1, t_0} \rightarrow M_{t_0, t_1}$ definida por $\Phi_{t_1, t_0}(p) := \Phi(t_1, t_0, p)$ es un difeomorfismo con inversa Φ_{t_0, t_1} .
- (iii) Si $p \in M_{t_1, t_0}$ y $\Phi_{t_1, t_0}(p) \in M_{t_2, t_1}$, entonces $p \in M_{t_2, t_0}$ y $\Phi_{t_2, t_1} \circ \Phi_{t_1, t_0} = \Phi_{t_2, t_0}$.

Ejemplo 2.6. Ilustramos las definiciones anteriores con un ejemplo, de utilidad en el lema siguiente. Tenemos el campo vectorial dependiente del tiempo sobre \mathbb{R}^n

$$V(t, x) = \frac{x^i}{t} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n.$$

Una curva integral $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ con condición inicial $\gamma(t_0) = x_0$, viene dada por la solución, del sistema de ecuaciones no autónomas

$$\dot{x}^i(t) = \frac{x^i(t)}{t}, \quad x^i(t_0) = x_0^i,$$

cuya solución es $x^i(t) = tx_0^i/t_0$ y resulta en el flujo $\Phi(t, t_0, x) = tx/t_0$ para $(t, t_0, x) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. \diamond

Los campos tensoriales dependientes del tiempo se definen análogamente, y podemos actualizar la la proposición 1.48(iii) para incluir la dependencia temporal

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_1} (\Phi_{t,t_0}^* \omega_t) = \Phi_{t_1,t_0}^* (\mathcal{L}_{V_{t_1}} \omega_{t_1}) + \Phi_{t_1,t_0}^* \left. \frac{d\omega_t}{dt} \right|_{t=t_1} \quad (2.7)$$

siendo ω_t una k -forma, V_t un campo vectorial y Φ_{t,t_0} su flujo, todos dependientes del tiempo.

El lema de Poincaré, que demostraremos seguidamente, generaliza los teoremas de cálculo vectorial que nos dicen que en un conjunto estrellado²² si $\nabla \times V = 0$, entonces V es el gradiente de una función, y si $\nabla \cdot V = 0$, entonces V es el rotacional de un campo.²³ Recordemos que una k -forma diferencial ω es **exacta** si existe una $(k-1)$ -forma η tal que $d\eta = \omega$.

Lema 2.7 (Poincaré). *Si ω es una k -forma cerrada en M , existe para cada $p \in M$ un entorno U tal que ω es exacta en U , es decir, $\omega|_U \in \Omega^k(U)$ es exacta.*

Demostración. Si M es una variedad de dimensión n , un entorno U de M es difeomorfo a un entorno abierto V de \mathbb{R}^n . De este entorno V extraemos una bola abierta. Si la forma es exacta en esta bola, puesto que el pullback conmuta con la derivada exterior 1.50, también será exacta en la imagen inversa de la bola. En la bola en \mathbb{R}^n tenemos la carta x , y podemos definir para $t \in (0, \infty)$ la familia de difeomorfismos $\Phi_t(x) = tx$, que es el flujo del campo V del ejemplo 2.6 para $t_0 = 1$. Aplicamos (2.7), seguida de la fórmula mágica de Cartan 1.50(vi), y tenemos en cuenta que $d\omega = 0$ y la derivada exterior conmuta con el pullback,

$$\frac{d}{dt} \Phi_t^* \omega = \Phi_t^* \mathcal{L}_X \omega = \Phi_t^* (d i_X \omega + i_X d\omega) = d(\Phi_t^* i_X \omega).$$

El siguiente paso es integrar ambos lados respecto de t . Aunque hablaremos brevemente de integración de formas en la sección 2.4, en este caso al integrar respecto del tiempo y no de las coordenadas de la carta lo que hacemos es simplemente integrar cada componente. Integrando pues los lados derecho e izquierdo entre t_0 y 1,

$$\omega - \Phi_{t_0}^* \omega = d \int_{t_0}^1 \Phi_t^* i_X \omega dt$$

²² Es importante que sea simplemente conexo, para más información ver la cohomología de Rham.

²³ Para la relación entre operadores vectoriales y la derivada exterior ver la tabla [Marsden y Ratiu, 2011, p. 131].

ya que d conmuta con la integral (d deriva respecto a x e integramos sobre t). Si tomamos el límite $t_0 \rightarrow 0$ llegamos a que $\omega = d\alpha$, con $\alpha = \int_0^1 \Phi_t^* i_X \omega dt$ dada por

$$\alpha_x(v_1, \dots, v_{k-1}) = \int_0^1 t^{k-1} \omega_{tx}(x, v_1, \dots, v_{k-1}) dt$$

□

El lema de Poincaré es una herramienta esencial en geometría y nos aparecerá repetidamente. Por de pronto, lo usaremos para demostrar el teorema de Darboux siguiendo la demostración de Alan Weinstein basada en el teorema de Moser, a veces llamado el *truco de Moser*.

Teorema 2.8 (Darboux-Weinstein). *Sea (M, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$, para cada $p \in M$ existe un simplectomorfismo de un entorno abierto de p a un subconjunto abierto de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.*

Demostración. Igual que en el lema de Poincaré, podemos trabajar en una bola abierta de \mathbb{R}^n . Por 2.2, existe una base en la que $\omega(0) = \omega_0$, es decir, tiene matriz J_n . Sea I un intervalo abierto que contiene a $[0, 1]$, definimos la forma simpléctica dependiente del tiempo

$$\omega_t = \omega_0 + t(\omega - \omega_0), \quad t \in I$$

cerrada porque ω_0 es constante. La aplicación $\det : [0, 1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por el determinante $\det \omega_t(x)$ (en cualquier base) es continua, y como $\omega_t(0)$ es no degenerada para todo t , en un entorno W de $[0, 1] \times \{0\}$ será no degenerada también. Dado que $[0, 1]$ es compacto y \mathbb{R}^{2n} es localmente compacto, podemos aplicar el lema del tubo de topología y deducir que existe un entorno abierto U de 0 y un intervalo abierto J que contiene a $[0, 1]$ tales que $J \times U \subset W$.

Aplicamos el lema de Poincaré 2.7 a la forma cerrada $\eta = \omega - \omega_0$, que nos garantiza que en un entorno $U_1 \subset U$ de 0 existe una 1-forma α tal que $\eta = d\alpha$. Añadiendo una forma constante podemos conseguir que $\alpha(0) = 0$. Como ω_t es no degenerada en U_1 , la aplicación $\hat{\omega}_t(p) : T_p U_1 \rightarrow T_p^* U_1$ es un isomorfismo para cada $p \in U_1$. Debe existir un campo vectorial dependiente del tiempo X_t sobre U_1 tal que

$$i_{X_t} \omega_t = -\alpha, \quad t \in J.$$

Sea Φ el flujo de X y $\mathcal{D} \subset J \times J \times U_1$ su dominio. Como $\alpha(0) = 0$, se tiene que $X_t(0) = 0$ para todo $t \in J$. Aplicamos de nuevo el lema del tubo a $[0, 1] \times \{0\} \times \{0\} \subset \mathcal{D}$ y encontramos un entorno $U_2 \subset U_1$ de 0 tal que $[0, 1] \times \{0\} \times U_2 \subset \mathcal{D}$. Aplicando (2.7) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Phi_{t,0}^* \omega_t) &= \Phi_{t,0}^* (\mathcal{L}_{X_t} \omega_t) + \Phi_{t,0}^* \frac{d\omega_t}{dt} = \\ \Phi_{t,0}^* (i_{X_t} d\omega_t + d(i_{X_t} \omega_t) + \eta) &= \Phi_{t,0}^* (0 - d\alpha + \eta) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto $\Phi_{t,0}^* \omega_t$ es constante y $\Phi_{1,0}^* \omega = \Phi_{0,0}^* \omega_0 = \omega_0$. Por el teorema 2.5, $\Phi_{1,0}$ es un difeomorfismo sobre su imagen y su inversa es el simplectomorfismo que buscábamos.

□

Las coordenadas locales en las que ω tiene la forma J_n se llaman **coordenadas de Darboux**. Las consecuencias de este teorema son inmediatas, todas las variedades simplécticas son localmente idénticas y no podremos definir invariantes locales. Esta peculiaridad contrasta con otras geometrías como la Riemanniana, en la que se puede distinguir entre variedades planas (localmente isométricas al espacio euclídeo) y aquellas que no.

Igual que en geometría Riemanniana, en geometría simpléctica también se pueden estudiar propiedades globales, por ejemplo la capacidad. La introducción de este concepto viene motivado por el teorema de Gromov (*no-squeezing theorem*), que nos dice que solo existe un encaje simpléctico de una bola de radio r en un cilindro de radio R si $r \leq R$. No estudiaremos este tipo de propiedades en este trabajo, pero pueden encontrarse en libros de topología simpléctica como [McDuff y Salamon, 2010, cap. 12].

2.3. Campos Hamiltonianos

Seguimos enriqueciendo la estructura de las variedades simplécticas añadiendo un nuevo elemento, el Hamiltoniano, una función sobre la variedad que como veremos más adelante nos permitirá describir un sistema físico con una energía así como sus ecuaciones de movimiento. Generalizamos pues el sencillo movimiento de una partícula en \mathbb{R}^3 a variedades mucho más complicadas, como una superficie. Ni siquiera será necesario que sea una partícula, podremos describir la rotación de una peonza, el movimiento de los planetas e incluso líquidos y plasmas.

Definición 2.9. Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ . El campo vectorial X_H determinado por la condición $i_{X_H} \omega = dH$, es decir,

$$\omega(X_H, Y) = dH(Y) = YH \quad \text{para todo } Y \in \mathfrak{X}(M)$$

se denomina **campo Hamiltoniano** con función de energía o **Hamiltoniano** H . La terna (M, ω, X_H) se llama **sistema Hamiltoniano**.

Como la aplicación $\hat{\omega} : TM \rightarrow T^*M$ dada en cada punto por (2.1), es un difeomorfismo y biyectiva en cada fibra $T_p M$, se puede escribir el campo Hamiltoniano como

$$X_H = \hat{\omega}^{-1}(dH).$$

Esta definición, que a priori parece arbitraria, está tomada de forma que nos permita recuperar las ecuaciones de Hamilton a partir de las curvas integrales del campo. Estas curvas representan el movimiento que seguiría una partícula si la posásemos sobre el campo Hamiltoniano y se viera arrastrada por este.

Proposición 2.10. Sean $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ unas coordenadas de (M, ω, X_H) en las que $\omega = \sum dq^i \wedge dp_i$. En estas coordenadas,

$$X_H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \quad (2.8)$$

y por tanto, $(q(t), p(t))$ es una curva integral de X_H si y solo si se cumplen las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}^i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Demostración. Si $X_H = \sum \left(a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$, aplicando la definición de multiplicación interior y producto exterior vista en (2.5) tenemos que

$$i_{X_H} \omega = i_{X_H} \left(\sum_{i=1}^n dq^i \otimes dp_i - dp_i \otimes dq^i \right) = \sum_{i=1}^n (a^i dp_i - b_i dq^i)$$

Por otro lado, a partir de la definición de diferencial,

$$dH = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right).$$

Igualando $i_{X_H} \omega = dH$ obtenemos (2.8). Para la segunda parte, si $(q(t), p(t))$ es una curva integral de X_H , igual que en el ejemplo 1.37, deben cumplirse las ecuaciones (2.9). □

Si los sistemas físicos siguen las ecuaciones de Hamilton, deben evolucionar siguiendo las curvas integrales del campo Hamiltoniano y podemos recuperar fácilmente la conservación de la energía, tan fundamental en física.

Proposición 2.11. Sea (M, ω, X_H) un sistema Hamiltoniano y $\gamma(t)$ una curva integral de X_H , entonces $H(\gamma(t))$ es constante en t .

Demostración. Por la regla de la cadena para aplicaciones diferenciables

$$\frac{d}{dt} H(\gamma(t)) = dH(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = dH(\gamma(t)) \cdot X_H(\gamma(t)) = \omega(X_H(\gamma(t)), X_H(\gamma(t))) = 0$$

siendo la penúltima igualdad la definición de campo Hamiltoniano. □

Dado un campo vectorial sobre una variedad simpléctica, no siempre existe una función Hamiltoniana, por lo que a veces nos tenemos que conformar con la alternativa local.

Definición 2.12. Sea (M, ω) una variedad simpléctica y X un campo diferenciable, se dice que X es un **campo Hamiltoniano** si existe una función $f \in C^\infty(M)$ tal que $i_{X_f} \omega = df$. Se dice que X es **localmente Hamiltoniano** si cada punto $p \in M$ tiene un entorno en el que X es Hamiltoniano.

Los campos vectoriales que cumplen $\mathcal{L}_X \omega = 0$ se llaman simplécticos, y como nos dice la siguiente proposición, es equivalente a que el campo sea localmente Hamiltoniano.

Proposición 2.13. Sea (M, ω) una variedad simpléctica, un campo X es localmente Hamiltoniano si y solo si $\mathcal{L}_X \omega = 0$.

Demostración. Por la fórmula mágica de Cartan 1.50,

$$\mathcal{L}_X \omega = d(i_X \omega) + i_X(d\omega) = d(i_X \omega)$$

vemos que X es simpléctico si y solo si $i_X \omega$ es una forma cerrada. Si es localmente Hamiltoniano claramente será cerrada. Si es cerrada, por el lema de Poincaré 2.7 para cada punto existe un entorno U en el que es exacta, $i_X \omega = df$, y como ω es no degenerada, $X = X_f$ es Hamiltoniano en U . □

Hay situaciones en las que todo campo localmente Hamiltoniano es Hamiltoniano, por ejemplo en el caso de una variedad simplemente conexa o con grupo fundamental finito.²⁴

Damos paso a otra de las herramientas fundamentales de la física clásica, los corchetes de Poisson, que nos permitirán determinar fácilmente magnitudes constantes en nuestro sistema Hamiltoniano.

Definición 2.14. Dada (M, ω) y dos funciones $f, g \in C^\infty(M)$, definimos su **corchete de Poisson** de las siguientes formas equivalentes,

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g) = df(X_g) = X_g f = \mathcal{L}_{X_g} f. \quad (2.10)$$

El corchete nos da una medida del cambio de g a lo largo del flujo de f y será 0 si y solo si el corchete de ambas funciones conmuta. En las coordenadas de Darboux, podemos recurrir a la fórmula (2.8) de X_f y dar el corchete de f y g en coordenadas

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right). \quad (2.11)$$

Las siguientes propiedades del corchete definen lo que llamaremos un **álgebra de Poisson**, un álgebra de Lie que además cumple la regla de Leibniz. Además, el corchete de Poisson está relacionado con el álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$ mediante la aplicación $f \mapsto X_f$, que normalmente se denomina *anti-homomorfismo*²⁵ de álgebras de Lie, ya que tiene las propiedades de un homomorfismo de álgebras salvo por la peculiaridad de que invierte el signo al corchete.

Proposición 2.15. Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $f, g, h \in C^\infty(M)$, se cumplen las siguientes propiedades.

- (i) *Bilinealidad:* $\{f, g\}$ es lineal sobre \mathbb{R} en f y g .
- (ii) *Antisimetría:* $\{f, g\} = -\{g, f\}$.
- (iii) *Identidad de Jacobi:* $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$.

²⁴ Para estudiar el caso general debemos recurrir a la cohomología de Rham, ver [John Lee, 2013, p. 575].

²⁵ Si hubiésemos definido X_H por $i_{X_H} \omega = -dH$, la aplicación hubiese resultado un homomorfismo de álgebras.

(iv) *Regla de Leibniz:* $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$.

(v) $X_{\{f, g\}} = -[X_f, X_g]$, por tanto la aplicación $f \mapsto X_f$ es un anti-homomorfismo de álgebras.

Demostración. Las propiedades (i) y (ii) son inmediatas ya que ω las cumple. Para probar (v) basta probar que

$$\omega(X_{\{f, g\}}, Y) + \omega([X_f, X_g], Y) = 0$$

para cualquier campo diferenciable Y ya que ω es no degenerada. Por el lado izquierdo,

$$\omega(X_{\{f, g\}}, Y) = d(\{f, g\})(Y) = Y\{f, g\} = YX_g f$$

y por el derecho, teniendo en cuenta que un campo Hamiltoniano es simpléctico y la propiedad 1.48(iii)

$$0 = \mathcal{L}_{X_g} \omega(X_f, Y) = X_g(\omega(X_f, Y)) - \omega([X_g, X_f], Y) - \omega(X_f, [X_g, Y]). \quad (2.12)$$

Por otro lado,

$$X_g(\omega(X_f, Y)) = X_g(df(Y)) = X_g Y f$$

y

$$\omega(X_f, [X_g, Y]) = df([X_g, Y]) = [X_g, Y]f = X_g Y f - Y X_g f$$

por lo que (2.12) resulta

$$0 = Y X_g f - \omega([X_g, X_f], Y) = \omega(X_{\{f, g\}}, Y) + \omega([X_f, X_g], Y).$$

De aquí podemos deducir la identidad de Jacobi (iii)

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} &= X_{\{g, h\}} f = -[X_g, X_h] f = -X_g X_h f + X_h X_g f = \\ &= -X_g \{f, h\} + X_h \{f, g\} = \{\{f, h\}, g\} + \{\{f, g\}, h\} = -\{g, \{h, f\}\} - \{h, \{f, g\}\}. \end{aligned}$$

Por último, la regla de Leibniz (iv) es una consecuencia de que los campos vectoriales sean derivaciones sobre $C^\infty(M)$,

$$\{f, gh\} = -X_f(gh) = -hX_f(g) - gX_f(h) = h\{f, g\} + g\{f, h\}.$$

□

La propiedad (v) también nos dice que los campos Hamiltonianos forman una subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$ con el corchete, denotado $\mathfrak{X}_H(M)$.

La siguiente proposición nos permite describir de forma compacta y elegante la variación de funciones a lo largo del flujo Hamiltoniano. Las funciones que cumplan $\{f, H\} = 0$ se llamarán **constantes del movimiento**.

Proposición 2.16. *Sea (M, ω, X_H) un sistema Hamiltoniano, F_t el flujo de X_H y $f \in C^\infty(M)$ una función. Entonces,*

$$\frac{d}{dt}(f \circ F_t) = \{f, H\} \circ F_t \quad (2.13)$$

Demostración. Para funciones, el pullback es simplemente $\Phi_t^* f = f \circ \Phi_t$ y por 1.48(iii),

$$\frac{d}{dt}(f \circ F_t) = \frac{d}{dt}(F_t^* f) = F_t^*(\mathcal{L}_{X_H} f) = F_t^*(X_H f) = (X_H f) \circ F_t = \{f, H\} \circ F_t$$

□

Si escogemos $f = q^i$ y $f = p_i$, recuperamos las ecuaciones de Hamilton en la sencilla expresión

$$\dot{q}^i = \{q^i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}. \quad (2.14)$$

El siguiente teorema nos relaciona los campos Hamiltonianos entre variedades simplécticas a través de los symplectomorfismos, es decir, nos da la regla de transformación de los sistemas Hamiltonianos. Junto con la proposición 1.39, que nos relaciona las curvas integrales en dos variedades, deducimos que si conocemos las curvas integrales de X'_H en (M', ω') automáticamente conocemos las curvas integrales de $X_{H \circ F}$ en (M, ω) .

Teorema 2.17 (Jacobi). Sean (M, ω) y (M', ω') dos variedades simplécticas y $F : M \rightarrow M'$ un difeomorfismo entre ellas. F es simpléctica si y solo si para todo $H \in C^\infty(M')$ tenemos

$$F_* X_{H \circ F} = X'_H \quad \left(\leftrightarrow \quad X_{H \circ F} = F^* X'_H \right).$$

Demostración. Recordemos las definiciones de campos Hamiltonianos,

$$X_{H \circ F} = \hat{\omega}^{-1}(d(H \circ F)) \quad \text{y} \quad X'_H = \hat{\omega}'^{-1}(dH).$$

5 Si F es simpléctica, recordando la fórmula para el pullback (1.15), para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned} F^* \omega'(X_{H \circ F}, Y) &= \omega'(F_* X_{H \circ F}, F_* Y) = \omega(X_{H \circ F}, Y) = d(H \circ F)(Y) \\ &= dH \circ dF(Y) = dH(F_* Y) = \omega'(X'_H, F_* Y). \end{aligned}$$

Por la bilinealidad y porque ω' es no degenerada, concluimos que $F_* X_{H \circ F} = X'_H$.

Si ahora suponemos $X_{H \circ F} = F^* X'_H$ para cada $H \in C^\infty(M')$,

$$i_{X_{H \circ F}} \omega = d(H \circ F) = F^* dH = F^*(i_{X'_H} \omega').$$

Aplicando la propiedad 1.49(iv) y la hipótesis,

$$F^*(i_{X'_H} \omega') = i_{F^* X'_H} (F^* \omega') = i_{X_{H \circ F}} (F^* \omega').$$

Como F es un difeomorfismo, cualquier vector de $T_p M$ es de la forma $X_{H \circ F}$ para un H adecuado y por tanto $\omega = F^* \omega'$.

□

Del teorema de Jacobi podemos deducir que los symplectomorfismos conservan también los corchetes.

Corolario 2.18. Un difeomorfismo $F : M \rightarrow M'$ es simpléctico si y solo si $F^* \{g, h\} = \{F^* g, F^* h\}$ (es decir, $\{g, h\} \circ F = \{g \circ F, h \circ F\}$) para todas $g, h \in C^\infty(M')$.

Demostración. Recordando la propiedad para el pullback y la derivada de Lie 1.48(iv)

$$F^*\{g, h\} = F^*\mathcal{L}_{X_h}(g) = \mathcal{L}_{F^*X_h}F^*g$$

es decir, F preserva los corchetes si y solo si

$$\mathcal{L}_{F^*X_h}F^*g = \mathcal{L}_{X_{F^*h}}F^*g = \{F^*g, F^*h\}$$

si y solo si $F^*X_h = X_{F^*h}$, y por el teorema anterior equivalente a que F sea simpléctica.

□

Combinando el corolario con la siguiente proposición encontramos una herramienta recurrente en la física clásica.

Proposición 2.19. Si (M, ω) es una variedad simpléctica y $(U, (q^i, p_i))$ una carta, entonces ω está en coordenadas de Darboux, $\sum dq^i \wedge dp_i$, si y solo si $\{q^i, q^j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$ y $\{q^i, p_j\} = \delta_j^i$ en U .

Demostración. Si tenemos una carta coordenadas de Darboux, de (2.11) se deducen las relaciones de los corchetes.

Para probar el recíproco, notemos que si (ω_{ij}) denota la matriz de ω y (α^{ij}) su matriz inversa (la matriz de $\hat{\omega}^{-1}$) entonces

$$\{q^i, q^j\} = dq^i X_{q^j} = dq^i \hat{\omega}^{-1}(dq^j) = \alpha^{ij},$$

y de forma similar

$$\{q^i, p_j\} = \alpha^{j+n, i} = -\alpha^{i, j+n}, \quad \{p_i, p_j\} = \alpha^{j+n, i+n}$$

Es decir, en nuestro caso la matriz de α es

$$\begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} = J_n^{-1}$$

y por tanto ω tiene matriz J_n .

□

Como conclusión, tenemos en física una forma sencilla de caracterizar los simplectomorfismos (*transformaciones canónicas* en el argot físico²⁶). Por ejemplo, si en \mathbb{R}^2 con coordenadas (p, q) tenemos la forma $\omega = dq \wedge dp$ y hacemos el cambio de coordenadas $F : (q, p) \mapsto (Q(q, p), P(q, p))$, podemos saber si la transformación es simpléctica calculando $\{Q, P\}$. Recordando el corchete de Poisson en coordenadas de Darboux (2.11), sería

$$\{Q, P\} \circ F = \{Q(q, p), P(q, p)\} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q}.$$

Si el corchete vale 1 estaríamos ante una transformación simpléctica. Algunos ejemplos de estas transformaciones y sus corchetes pueden encontrarse en [José y Saletan, 1998, Cap. 5.3].

²⁶ Es conveniente mirar la definición de cada libro ya que algunos llaman transformaciones canónicas simplemente a las simplécticas, por ejemplo [Abraham, Marsden y Ratiu, 1988].

Ejemplo 2.20. Consideramos un oscilador armónico en una dimensión como un sistema Hamiltoniano en $T^*\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ con forma simpléctica $\omega = dq \wedge dp$ y Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{mv^2 q^2}{2},$$

donde interpretamos q como la posición y p como el momento (masa por velocidad) del oscilador. Para resolver de forma más sencilla las ecuaciones de Hamilton podemos hacer la transformación

$$q = \sqrt{\frac{2P}{mv}} \sin(Q), \quad p = \sqrt{2mvP} \cos(Q), \quad (2.15)$$

que es efectivamente una transformación canónica por el argumento anterior:

$$\begin{aligned} \{q, p\} &= \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P} \frac{\partial p}{\partial Q} = \\ &= \sqrt{\frac{2P}{mv}} \cos(Q) \sqrt{\frac{mv}{2P}} \cos(Q) - \frac{1}{\sqrt{2mvP}} \sin(Q) \sqrt{2mvP} (-\sin(Q)) = 1. \end{aligned}$$

El Hamiltoniano transformado toma una forma muy simple,

$$H' = vP,$$

y como la transformación es un simplectomorfismo, las ecuaciones para las curvas integrales del campo Hamiltoniano $X_{H'}$ siguen siendo las ecuaciones de Hamilton (2.9),

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = v, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = 0,$$

es decir, $Q = vt + \delta$ y $P = P_0$ con δ y P_0 constantes. Estas nuevas coordenadas se conocen como *variables de acción-ángulo* y para saber cómo se construyen se puede consultar la teoría en [Arnold, 1989, pp. 279-284]. Una vez resuelto el sistema en estas coordenadas podemos volver a las coordenadas originales simplemente con la transformación (2.15). Como podemos observar, las variables (q, p) evolucionan describiendo una elipse en \mathbb{R}^2 . \diamond

2.4. Teorema de Liouville

Cerramos este capítulo presentando el teorema de Liouville y para ello vamos a establecer la relación entre las formas diferenciales y la integración, ampliando la idea que se mencionó en la sección 1.9. La forma de volumen por excelencia en un espacio vectorial es el determinante, que nos permite medir el volumen encerrado por el paralelepípedo generado por n vectores. Ya vimos que los tensores alternantes se pueden interpretar como determinantes, así que las formas diferenciales son una herramienta sugerente para realizar medidas en variedades. Aproximaremos el volumen en un entorno pequeño por el volumen de su espacio tangente, que localmente aproxima a la variedad. Es aún más interesante si se trabaja con variedades Riemannianas, donde se puede definir una forma de volumen que dependa de la métrica.

Definición 2.21. Una **forma de volumen** en una variedad M de dimensión n , es una n -forma $\mu \in \Omega^n(M)$ tal que $\mu(p) \neq 0$ para todo p en M . Si existe tal forma se dice que M es **orientable**.

Como μ nunca se anula y $\Omega^n(M)$ es un espacio 1-dimensional, cualquier n -forma ν se puede escribir como $\nu = f\mu$, siendo $f \in C^\infty(M)$. Dos formas se dicen equivalentes si existe $f > 0$ tal que $\mu_1 = f\mu_2$. Esta relación de equivalencia permite definir la **orientación** en una variedad como una clase de equivalencia de formas de volumen. Si por ejemplo M es conexa y $\mu_1 = f\mu_2$ son dos formas de volumen, como f nunca se anula, o bien $f > 0$ o $f < 0$ en todo M , es decir, hay exactamente dos orientaciones.

El motivo de que estas formas se llamen de volumen es que permiten, a través de la integración, asignar un volumen n -dimensional a una región de una variedad suave orientada. Si $\omega = f(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ es una n -forma de soporte compacto en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, con coordenadas usuales, definimos la integral de ω en U ,

$$\int_U \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx^1 \cdots dx^n \quad (2.16)$$

donde el lado derecho es la integral de Lebesgue conocida en \mathbb{R}^n . Por la fórmula 1.47, al cambiar de coordenadas la n -forma nos aparece de manera natural el Jacobiano, por lo que las formas diferenciales nos permiten dar una definición natural de integración en variedades.

Si (U, φ) es una carta orientada positivamente, (ver la definición en [Abraham, Marsden y Ratiu, 1988, p. 436]) y ω tiene soporte compacto en U , definimos la integral

$$\int_U \omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega$$

siendo el lado derecho la integral (2.16). Para definir la integral en toda la variedad, lo haríamos mediante las particiones de la unidad. Análogamente se pueden definir integrales en línea como integrales de 1-formas, en superficie como integrales de 2-formas, etc.

Veremos que toda variedad simpléctica admite una forma de volumen, y lo usaremos para sacar conclusiones sobre el volumen del **espacio de fases** y para demostrar el teorema de recurrencia de Poincaré, cuyas consecuencias físicas son sorprendentes.

Proposición 2.22. (V, ω) es un espacio vectorial simpléctico si y solo si $\omega^n \neq 0$.

Demostración. Si $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ es una base de V tal que ω tiene la forma $\omega = \sum_i^n dx^i \wedge dp^i$ entonces

$$\omega^n = \sum_{i_1, \dots, i_n} dx^{i_1} \wedge dp^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} \wedge dp^{i_n}$$

Los términos con índices repetidos son 0 y teniendo en cuenta que cada 2-forma $dx^{i_i} \wedge dp^{i_i}$ conmuta con el resto (se invierte dos veces el signo) tenemos que

$$\omega^n = n! dx^1 \wedge dp^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge dp^n \neq 0$$

Si por el contrario ω fuera degenerada, existiría un vector no nulo $v \in V$ tal que $\hat{\omega}(v) = i_v \omega = 0$ es la aplicación nula. Aplicando sucesivamente 1.49(ii) llegamos a $i_v \omega^n = n(i_v \omega) \wedge \omega^{n-1} = 0$. Extendiendo v a una base $\{v, E_2, \dots, E_{2n}\}$ de V concluimos que $\omega^n(v, E_2, \dots, E_{2n}) = 0$ y por tanto $\omega^n = 0$. □

Como corolario tenemos que toda variedad simpléctica es orientable. Definimos la forma de volumen de Liouville,

$$\Omega_\omega = \frac{1}{n!} \omega \wedge \overset{(n)}{\cdots} \wedge \omega \quad \Rightarrow \quad \Omega_\omega = dx^1 \wedge dp^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge dp^n \quad (2.17)$$

Por la fórmula para el pullback 1.47, si $F : (M, \omega) \rightarrow (N, \rho)$ es una aplicación simpléctica entre variedades $2n$ -dimensionales, tenemos que F preserva el volumen de Liouville, $F^* \Omega_\rho = \Omega_\omega$. Además, si F preserva el volumen, su Jacobiano no se anula en ningún punto, y por el teorema de la función inversa tenemos que F es un difeomorfismo local.

Damos paso al teorema de Gibbs-Liouville²⁷. Intuitivamente, nos dice que la información de un sistema conservativo no se pierde cuando evoluciona con el tiempo, entendiendo como información el volumen del espacio de fases del sistema.

Teorema 2.23 (Gibbs-Liouville). *Sea (M, ω, X_H) un sistema Hamiltoniano y F_t el flujo de X_H . En el dominio de F_t , tenemos que $F_t^* \omega = \omega$ para todo t , y por tanto F_t también preserva el volumen Ω_ω .*

Demostración. La demostración es muy sencilla y se basa en la proposición 1.48:

$$\frac{d}{dt} F_t^* \omega = F_t^* \mathcal{L}_{X_H} \omega = F_t^* (i_{X_H} d\omega + d i_{X_H} \omega) = F_t^* (0 + d \circ dH) = 0,$$

ya que $i_{X_H} \omega = dH$ y $d\omega = 0$. Por lo visto antes, si preserva ω , también Ω_ω . □

El teorema anterior se puede refinar para incluir los campos localmente Hamiltonianos.

Proposición 2.24. *Sea X un campo diferenciable sobre (M, ω) y F_t su flujo. X es localmente Hamiltoniano si y solo si F_t es simpléctica ($F_t^* \omega = \omega$) para cada t .*

Demostración. Si F_t es simpléctica, por la propiedad 1.48,

$$0 = \frac{d}{dt} F_t^* \omega = F_t^* \mathcal{L}_X \omega.$$

Y tomando $t = 0$, F_t es la identidad (ver teorema 2.5), por lo que $\mathcal{L}_X \omega = 0$ y por 2.13, X es localmente Hamiltoniano. Igualmente, vemos que si $\mathcal{L}_X \omega = 0$, F_t es simpléctica. □

²⁷ Aunque normalmente se llama *teorema de Liouville*, la demostración se debe a Josiah Willard Gibbs, mientras desarrollaba la mecánica estadística [Gibbs, 1902, p. 9].

Finalmente probaremos el teorema de recurrencia de Poincaré, que nos dice que si dejamos evolucionar un sistema conservativo durante suficiente tiempo, terminará volviendo a un estado próximo al inicial. Por ejemplo, si tenemos una caja con dos compartimentos, uno lleno de un gas y otro vacío, y los conectamos entre sí, tras un tiempo finito – aunque posiblemente muy largo – el gas volverá al compartimento inicial [Arnold, 1989, p. 71].

Teorema 2.25 (Poincaré). *Sea (M, ω, X_H) un sistema Hamiltoniano y F_t el flujo de X_H . Si V es una región de volumen finito, para cualquier abierto $U \subset V$ existe un tiempo T tal que $U \cap F_T(U)$ tiene volumen positivo.*

Demostración. Si consideramos las imágenes de U por F_1 sucesivas veces,

$$U, F_1(U), F_2(U), \dots, F_n(U), \dots$$

todas ellas tienen el mismo volumen, y si fueran disjuntas tendríamos que V tiene volumen infinito. Por tanto existen k y l , $k > l$, tal que $F_k(U) \cap F_l(U)$ tiene volumen positivo, y por tanto $F_{k-l}(U) \cap U$ también. \square

El teorema se puede mejorar, demostrando que para casi todo x en U existen infinitos T tales que $F_T(x) \in U$. Para consultar esta demostración y más consecuencias de las transformaciones que preservan el volumen, se recomienda ver las lecciones de Paul Halmos de teoría ergódica [Halmos, 2013].

Capítulo 3

Sistemas Hamiltonianos y simetrías

En el capítulo anterior hemos visto los rudimentos de la teoría de sistemas Hamiltonianos y lo que haremos a partir de ahora será dar el paso a la mecánica clásica, fusionando los elementos teóricos con problemas prácticos de utilidad en física.

Utilizaremos una variedad suave Q para describir la configuración de un sistema, es el llamado *espacio de configuración*. Debemos entender la configuración en un sentido amplio. Puede ser, por ejemplo, la posición de una canica sobre una superficie o la orientación angular de un sólido rígido. Normalmente no incluiremos en la configuración las velocidades (o momentos) del sistema, pues estas irán ligadas a cambios en la configuración y nos vendrá mejor describirlas con el *espacio de fases*. En la mayoría de casos nos bastará describir el espacio de fases como el fibrado cotangente T^*Q , que será interpretado como el espacio de posiciones y momentos.²⁸ Por ejemplo, el espacio de configuración de un péndulo sería la esfera \mathbb{S}^2 , mientras que su espacio de fases sería $T^*\mathbb{S}^2$, que a cada punto de la esfera le asigna un abanico de posibles velocidades para la partícula tangentes a la esfera. Otro ejemplo ilustrativo sería el vagón de una montaña rusa: su espacio de configuración serían los raíles y el espacio de fases los raíles junto con su momento (masa por velocidad).

El siguiente elemento que necesitaremos es la energía del sistema, encapsulada en una función $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$. Siguiendo el ejemplo del péndulo de longitud l , el Hamiltoniano es la energía cinética más potencial

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta ,$$

siendo $(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi)$ una carta de $T^*\mathbb{S}^2$ (θ y ϕ coordenadas de \mathbb{S}^2).

El tercer elemento que necesitamos es algún tipo de ecuaciones que nos digan cómo evoluciona el sistema. Este papel lo juegan las **ecuaciones de Hamilton**, que generalizamos usando una forma simpléctica ω a las ecuaciones

$$i_{x_H} \omega = dH ,$$

que hemos estudiado en el capítulo anterior. La evolución del sistema viene dada por las curvas integrales del campo Hamiltoniano X_H . En el ejemplo del péndulo, nos dictan cómo

²⁸ El espacio de configuración y velocidades, en vez de momentos, se describe usando el fibrado tangente. En el caso más simple en el que el momento es $p = mv$, la masa hace la función de una métrica Riemanniana y nos da el isomorfismo entre el fibrado tangente y el cotangente.

mo se mueve en la esfera y con qué momento (y por tanto con qué velocidad).

Con todo ello, describiremos un sistema físico como un sistema Hamiltoniano, es decir, la terna (T^*Q, ω, H) que encapsula todo el sistema: su estado, su energía y sus ecuaciones. Las funciones reales sobre la variedad constituirán los observables, aquellas magnitudes físicas que podemos medir, y que tendrán particular relevancia cuando estudiemos las aplicaciones momento, aquellas magnitudes físicas que por estar asociadas a una simetría se conservarán en la evolución del sistema. Podemos aplicar a nuestro sistema Hamiltoniano el teorema de Gibbs-Liouville 2.23, que nos garantiza que el volumen del espacio de fases que ocupa un sistema es constante al evolucionar de acuerdo con las ecuaciones de Hamilton. Este principio fundamental en física (y a menudo obviado) se conoce como el *principio de conservación de la información*, y nos garantiza que si conocemos el estado de un sistema en cualquier instante y sus ecuaciones del movimiento, podemos predecir tanto su movimiento pasado como el futuro.

En la siguiente sección daremos un ejemplo detallado de sistema Hamiltoniano, una partícula en un campo magnético, que puede encontrarse en las referencias [Guillemin y Sternberg, 1986, cap. 1; Marsden y Ratiu, 2011, cap. 6]. A continuación retomaremos el desarrollo teórico introduciendo las aplicaciones momento y la técnica de reducción simpléctica. Destacamos las referencias [Abraham y Marsden, 1987, cap. 4], [Rudolph y Schmidt, 2017, cap. 9-10] y [Putz, 1993, cap. 3]. Para cerrar el capítulo aplicaremos la teoría al problema de Kepler. El tratamiento está inspirado en [Singer, 2004, cap. 8], pero usando las técnicas desarrolladas en este capítulo. Como introducción matemática a la mecánica clásica, incluida la Lagrangiana, cabe recomendar la sucinta introducción en [Folland, 2013, cap. 2].

3.1. Partícula en un campo magnético

Una partícula en un campo magnético se puede describir como un sistema Hamiltoniano en el que la forma simpléctica incluye un término magnético. De hecho, recordando el ejemplo 1.52, el campo magnético se puede describir de manera natural como una 2-forma²⁹ en \mathbb{R}^3 con coordenadas usuales

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow B = B_x dy \wedge dz - B_y dx \wedge dz + B_z dx \wedge dy$$

cuyas componentes dependen de la posición. Estudiaremos una partícula moviéndose sin restricciones por todo el espacio euclídeo, así que el espacio de configuración será \mathbb{R}^3 y su

²⁹ Un modo de ver que el campo magnético tiene que ser una 2-forma es el siguiente. La ley de inducción de Faraday nos dice que si un campo magnético B atraviesa la superficie S encerrada por un circuito de curva γ , el campo eléctrico E inducido es tal que

$$\frac{d}{dt} \int_S B = - \int_\gamma E$$

por lo que la integración de un campo magnético en una variedad se hace de manera natural integrando una 2-forma y el eléctrico integrando una 1-forma [Guillemin y Sternberg, 1986, p. 134].

espacio de fases $T^*\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, con coordenadas de posición y momento

$$(q^i, p_i) = (x, y, z, p_x, p_y, p_z) .$$

La forma canónica del fibrado cotangente

$$\omega = dx \wedge dp_x + dy \wedge dp_y + dz \wedge dp_z ,$$

junto con el Hamiltoniano dado por la energía cinética

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) ,$$

nos da las ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Hamilton 2.9) de una partícula moviéndose en línea recta,

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i}{m} , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = 0 .$$

El momento es por tanto la conocida expresión $p = mv$. Si añadimos el término magnético

$$\pi^*B = B_x dy \wedge dz - B_y dx \wedge dz + B_z dx \wedge dy$$

a la forma canónica, obtenemos una nueva 2-forma

$$\omega_B = dx \wedge dp_x + dy \wedge dp_y + dz \wedge dp_z - eB .$$

Escribiéndola en forma matricial se comprueba que es no degenerada. Para probar que es cerrada, recordemos que si

$$A = A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

es el potencial vector del ejemplo 1.52, entonces el campo magnético es el tensor $B = dA$.³⁰ Y, como $d \circ d = 0$ (propiedad 1.50(ii)), se deduce que $d\omega_B = 0$. Así, ω_B es de nuevo una forma simpléctica.

Las ecuaciones del movimiento con esta nueva forma y el Hamiltoniano H nos da la fuerza de Lorentz

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{e}{m} p \times B \quad (3.1)$$

sobre una partícula de masa m y carga e en el seno de un campo magnético B . En efecto, si $X_H = (a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z)$ es el campo Hamiltoniano que buscamos, la ecuación $dH = i_{X_H} \omega_B$ resulta

$$\begin{aligned} \frac{p_x}{m} dp_x + \frac{p_y}{m} dp_y + \frac{p_z}{m} dp_z &= a_x dp_x - b_x dx + a_y dp_y - b_y dy + a_z dp_z - b_z dz \\ &\quad - e(B_y a_z dx - B_z a_y dx + B_z a_x dy - B_x a_z dy + B_x a_y dz - B_y a_x dz) . \end{aligned}$$

Resolviendo los parámetros del campo encontramos

³⁰ Es simplemente por definición del potencial vector A , que al menos localmente está bien definido.

$$a_x = \frac{p_x}{m} , \quad b_x = eB_z \frac{p_y}{m} - eB_y \frac{p_z}{m}$$

y análogamente para el resto. Ahora, si $\gamma(t) = (x, y, z, p_x, p_y, p_z)(t)$ es una curva integral de X_H , debe cumplirse la ecuación (1.11), es decir, $\dot{q}^i(t) = a_i$, $\dot{p}_i(t) = b_i$. La primeras ecuaciones simplemente nos dicen que la velocidad es el momento entre la masa y las segundas nos dan la fuerza de Lorentz (3.1)

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= e(B_z \dot{y} - B_y \dot{z}) = \frac{e}{m}(B_z p_y - B_y p_z) , \\ \dot{p}_y &= e(B_x \dot{z} - B_z \dot{x}) = \frac{e}{m}(B_x p_z - B_z p_x) , \\ \dot{p}_z &= e(B_y \dot{x} - B_x \dot{y}) = \frac{e}{m}(B_y p_x - B_x p_y) . \end{aligned}$$

Normalmente en física se trabaja siempre con las ecuaciones de Hamilton en coordenadas de Darboux, así que resulta conveniente transformar este sistema en uno que nos de las mismas ecuaciones pero con la forma canónica. Podemos hacerlo mediante la transformación descrita a continuación. Si A es de nuevo el potencial vector, definimos el difeomorfismo $t_A : T^*\mathbb{R}^3 \rightarrow T^*\mathbb{R}^3$ dado por $\alpha_q \mapsto \alpha_q - eA(q)$ para cada $\alpha_q \in T_q\mathbb{R}^3$. El pullback de la forma ω_B es, por la proposición 1.47,

$$\begin{aligned} t_A^* (dq^i \wedge dp_i - eB) &= dq^i \wedge (dp_i - eA_i) - eB = dq^i \wedge dp_i - e dq^i \wedge dA_i - eB \\ &= dq^i \wedge dp_i + eB - eB = dq^i \wedge dp_i = \omega \end{aligned}$$

la forma canónica en $T^*\mathbb{R}^3$.

Por el teorema de Jacobi 2.17, el campo X_H en $(T^*\mathbb{R}^3, \omega_B)$ se transforma en el campo $t_A^* X_H = X_{H \circ t_A}$ en $(T^*\mathbb{R}^3, \omega)$, que tiene Hamiltoniano

$$H_A \equiv H \circ t_A = \frac{1}{2m} ((p_x - eA_x)^2 + (p_y - eA_y)^2 + (p_z - eA_z)^2) = \frac{1}{2m} \|p - eA\|^2 .$$

Si hallamos las curvas integrales de X_{H_A} obtenemos

$$\dot{x} = \frac{1}{m}(p_x - eA_x) , \quad \dot{p}_x = -e \left(\dot{x} \frac{A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{A_z}{\partial x} \right)$$

y análogamente para el resto. Como vemos, esta vez la velocidad de la partícula no es simplemente el momento entre la masa. Manipulando las ecuaciones y aplicando $B = dA$ obtenemos de nuevo la fuerza de Lorentz

$$m\dot{v} = ev \times B \quad \leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(p - eA) = \frac{e}{m}(p - eA) \times B ,$$

siendo $v = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. El resultado es el esperado. Ya sabíamos por la proposición 1.39 que si

$$\gamma(t) = (q(t), p(t))$$

es una curva integral de X_H entonces

$$t_A^{-1} \circ \gamma(t) = (q(t), p(t) + eA(q(t)))$$

es una curva integral de $X_{H_A} = t_A^* X_H = (t_A^{-1})_* X_H$ e inmediatamente vemos que cumple las ecuaciones de Hamilton para H_A . Como lo único que hemos hecho es un cambio de variable del momento (incluyendo el momento asociado al campo magnético), la posición de la partícula $q(t)$ permanece inalterada en ambas curvas integrales y la partícula describe la misma trayectoria en \mathbb{R}^3 .

Si además del campo magnético hubiera un campo eléctrico, añadiríamos un término de potencial eléctrico al Hamiltoniano,

$$H_{A,\phi} = \frac{1}{2m} \|p - eA\|^2 + e\phi(q)$$

y el sistema $(T^*\mathbb{R}^3, \omega, H_{A,\phi})$ nos da la ecuación de Lorentz

$$m\dot{v} = e(E + v \times B).$$

Aún podríamos seguir añadiendo términos que nos describan un sistema físico más complejo, por ejemplo una partícula con spin s . El spin se puede describir por un vector $S = su$, siendo s su módulo y $u(\theta, \varphi) \in \mathbb{S}^2$ un vector unitario que nos da la orientación. Ampliamos así el espacio de fases a $T^*\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$, modificando también la forma simpléctica. La forma de superficie en la esfera

$$\Omega = \sin\theta \, d\theta \wedge d\varphi$$

es cerrada por ser un tensor de rango 2 en una variedad de dimensión 2. Por tanto, si sumamos a ω_B la 2-forma $s\Omega$, obtenemos una forma simpléctica,³¹

$$\omega_{B,s} \equiv \omega - eB + s\Omega.$$

Solo queda añadir al Hamiltoniano el término $\gamma S \cdot B$,

$$H_{\phi,s}(q, p, \theta, \varphi) = \frac{1}{2m} \|p\|^2 + e\phi + \gamma S \cdot B,$$

siendo B el vector asociado al campo magnético y γ el factor giromagnético de la partícula. El resultado de buscar las curvas integrales son 8 ecuaciones diferenciales acopladas que describen la interacción de la partícula con spin y el campo electromagnético. A pesar de la dificultad, podemos atacar el problema en el caso de un campo magnético constante alineado con el eje z . Las curvas integrales para las variables angulares resultan

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = 0 \\ \dot{\varphi}(t) = \gamma B_z \end{cases}$$

³¹ En realidad hemos sumado el pullback $\pi^*(s\Omega)$, siendo π la proyección de $T^*\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ sobre \mathbb{S}^2 , pero la expresión de la 2-forma es la misma. De nuevo, el pullback conmuta con la derivada exterior y será cerrada.

que son las ecuaciones para la precesión de Larmor. El spin forma un ángulo θ constante con el eje z y gira a su alrededor con velocidad angular γB_z . Por otro lado tendríamos la ecuación de Lorentz mencionada anteriormente. En el caso en que B_z no fuera constante, sino que variara en cada punto, la precesión de Larmor ya no sería constante. Además, la fuerza de Lorentz pasaría a incluir un término adicional

$$F = e(E + v \times B) - \gamma s \cos \theta \nabla B_z,$$

que podemos interpretar como una fuerza que lleva la partícula en la dirección opuesta a la de máximo crecimiento de B_z , minimizando así la energía potencial asociada a la interacción entre S y B . Para finalizar, mencionar que el caso de una partícula relativista se puede consultar en [Guillemin y Sternberg, 1986, pp. 136-145]. En esta descripción tendríamos que incluir el tensor de Faraday completo en la forma simpléctica y sustituir el momento por el cuádrimomento en el Hamiltoniano.

3.2. Aplicaciones momento

En 1918, Emmy Noether revoluciona la física para siempre con su artículo [Noether, 1971]. En él, Noether demuestra cuatro enunciados sobre el papel de las simetrías en la física, el primero de ellos hoy conocido como el *teorema de Noether*. Este teorema nos dice que si tenemos un *Lagrangiano* (que encapsula todo lo que conocemos sobre un sistema) invariante bajo la acción de un grupo de simetrías continuas, entonces existe una cantidad conservada asociada a esta simetría. Así, el hecho de que las leyes de la física sean iguales en cada punto del espacio implica que podemos trasladar un sistema completo cualquier distancia y su comportamiento seguirá siendo el mismo. Esta simetría de traslación es la causa de que el momento lineal se conserve, es decir, que cada *acción* venga acompañada de una *reacción*. Similarmente, el hecho de que las leyes de la física sean iguales ayer, hoy o mañana, implica la conservación de la energía; y que sean las mismas independientemente de nuestra orientación implica la conservación del momento angular.

En esta sección estudiaremos tanto el teorema de Noether como las cantidades conservadas asociadas en el contexto de la geometría simpléctica y la mecánica Hamiltoniana. El análogo de las cantidades conservadas en este contexto son las *aplicaciones momento*, cuyo origen está en los trabajos de Lie, Kirillov, Kostant, Smale y Souriau, siendo este último el que las dio nombre (se puede encontrar una breve historia de las aplicaciones momento en [Marsden y Ratiu, 2011, p. 369]).

Retomaremos las acciones de grupos definidas en 1.27 y las usaremos para describir simetrías en sistemas Hamiltonianos. Dado un grupo de Lie actuando sobre M mediante la acción ϕ , podemos definir la siguiente acción de \mathbb{R} sobre M por medio de la aplicación exponencial. Para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ (el álgebra de Lie de G) $\exp(t\xi)$ es un elemento de G y por tanto

$$\begin{aligned}\phi^\xi &: \mathbb{R} \times M \rightarrow M \\ \phi^\xi(t, m) &= \phi(\exp(t\xi), m)\end{aligned}$$

es por la definición 1.40 un flujo (en particular una acción).

Definición 3.1. Sea $\phi : G \times M \rightarrow M$ una acción del grupo de Lie G sobre la variedad M . Para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ se define el **generador infinitesimal de la acción**, ξ_M , como el campo vectorial

$$\xi_M(m) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{\exp(t\xi)}(m). \quad (3.2)$$

La definición anterior se debe entender así: para cada $m \in M$, $\phi_{\exp(t\xi)}(m)$ nos da una curva parametrizada por t y al derivar esa curva en $t = 0$ obtenemos un vector; tenemos así un campo vectorial sobre M . Este campo coincide con el generador (1.12) del flujo ϕ^ξ y cada curva $\phi_{\exp t\xi}(m)$ es la curva integral de ξ_M que comienza en m .

Una acción sobre una variedad simpléctica (M, ω) se dice una **acción simpléctica** si para cada $g \in G$ la aplicación ϕ_g es un simplectomorfismo. Con estas definiciones ya podemos enunciar las aplicaciones momento.

Definición 3.2. Sea (M, ω) una variedad simpléctica conexa y $\phi : G \times M \rightarrow M$ una acción simpléctica del grupo de Lie G . Si para cada $\xi \in \mathfrak{g}$ existe una función $\hat{J}(\xi) : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\xi_M = X_{\hat{J}(\xi)} \quad (\leftrightarrow \quad d\hat{J}(\xi) = i_{\xi_M} \omega),$$

entonces la aplicación $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ dada por (\mathfrak{g}^* es el dual del espacio vectorial \mathfrak{g} ³²)

$$J(m)(\xi) = \hat{J}(\xi)(m) \quad (3.3)$$

se llama **aplicación momento** para la acción simpléctica ϕ .

Así, cada elemento ξ del álgebra de Lie genera un campo vectorial ξ_M a través de la acción ϕ^ξ y buscamos una función $\hat{J}(\xi)$ cuya ecuación de Hamilton nos de el campo ξ_M . A partir de esta función $\hat{J}(\xi)$ sobre M podemos definir la función J sobre M con llegada en el espacio vectorial \mathfrak{g}^* , esta es la llamada *corriente de Noether*.

El ejemplo de aplicación momento más sencilla que podemos dar es el propio Hamiltoniano. Si el flujo F_t de un campo Hamiltoniano está definido para todo $t \in \mathbb{R}$, describirá una \mathbb{R} -acción simpléctica (teorema 2.23) con aplicación momento $H : M \rightarrow \mathbb{R}^* \cong \mathbb{R}$.

Podríamos preguntarnos, ¿cuándo es posible encontrar una aplicación momento para cierta acción simpléctica? Teniendo en cuenta que ϕ_g son simplectomorfismos, $\phi_g^* \omega = \omega$, y tomando derivadas en $t = 0$, obtenemos $\mathcal{L}_{\xi_M} \omega = 0$, ya que ϕ^ξ nos da el flujo de ξ_M . Es decir, ξ_M es un campo localmente Hamiltoniano 2.13 y como mencionamos [aquí](#), podremos garantizar que existe una aplicación momento en el caso de una variedad simplemente conexa.

A continuación enunciamos el teorema de Noether en su versión Hamiltoniana, que da sentido y utilidad a las aplicaciones momento. Si la función que describe el sistema,

³² Aunque \mathfrak{g} es un álgebra con un corchete de Lie, no dotaremos a \mathfrak{g}^* de mayor estructura que la de espacio vectorial.

el Hamiltoniano, es invariante bajo la acción de un grupo (simetría del sistema) entonces la correspondiente aplicación momento permanecerá intacta en la evolución del sistema (invariante por el flujo de X_H). Diremos que una aplicación $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ es **invariante** respecto a una acción ϕ si $F \circ \phi_g = F$ para todo $g \in G$.

Teorema 3.3 (Noether). Sea $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación invariante respecto a la acción simplectica ϕ , entonces $\hat{J}(\xi)$ es una constante del movimiento (asociada a H) para cada ξ . Además J es invariante por F_t , el flujo de X_H ,

$$J \circ F_t = J.$$

Demostración. Para ver que $\hat{J}(\xi)$ es constante del movimiento tenemos que probar

$$\{H, \hat{J}(\xi)\} = 0.$$

Aplicando las definiciones en cada paso obtenemos

$$\begin{aligned} \{H, \hat{J}(\xi)\} &= X_{\hat{J}(\xi)}(H) = \xi_M(H) = \mathcal{L}_{\xi_M} H \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{\exp(t\xi)}^* H = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H(\phi_{\exp(t\xi)}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} H = 0, \end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado la hipótesis de invariancia. Para la segunda parte, por 2.16 tenemos que $\hat{J}(\xi) \circ F_t$ es constante, es decir, para cada $m \in M$ se tiene

$$\hat{J}(\xi)(F_t(m)) = \hat{J}(\xi)(m),$$

y por tanto, aplicando la definición de aplicación momento (3.3),

$$J(F_t(m))(\xi) = \hat{J}(\xi)(F_t(m)) = \hat{J}(\xi)(m) = J(m)(\xi)$$

para todo $\xi \in \mathfrak{g}$, probando que $J \circ F_t = J$. □

A continuación definiremos dos acciones muy importante en la teoría de sistemas Hamiltonianos: la adjunta y la co-adjunta. Para definir las partimos de la acción de un grupo G sobre sí mismo por conjugación, esto es, la aplicación $C_g : G \rightarrow G$ dada por $C_g(h) = ghg^{-1}$ para cada $g, h \in G$. Definimos entonces la **acción adjunta**³³ $\text{Ad} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, como la diferencial de cada C_g en la identidad,

$$\text{Ad}_g \xi = d(C_g)_e \xi, \quad \xi \in \mathfrak{g},$$

y la acción **co-adjunta** $\text{Ad}^* : G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ como la aplicación cotangente de $C_{g^{-1}}$ en la identidad,

$$\text{Ad}_g^* \mu = d^*(C_{g^{-1}})_e \mu, \quad \mu \in \mathfrak{g}^*.$$

Hemos tomado $C_{g^{-1}}$ para definir la co-adjunta de forma que la regla de composición de la acción sea correcta. Visto de otra forma, la acción co-adjunta es tal que

$$\text{Ad}_g^*(\mu) \cdot \xi = \mu \cdot \text{Ad}_{g^{-1}}(\xi), \quad (3.4)$$

³³ La acción adjunta se puede ver como una *representación* del grupo G sobre el espacio vectorial \mathfrak{g} , es decir, un homomorfismo de grupos $\rho : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$.

entendiendo “ \cdot ” como la acción de un covector de \mathfrak{g}^* sobre un vector de \mathfrak{g} .³⁴ Nos interesaremos principalmente por las aplicaciones momento Ad^* -equivariantes, que necesitaremos en la siguiente sección de reducción simpléctica.

Definición 3.4. Sean M, N dos variedades y $F : M \rightarrow N$ una aplicación entre ellas. Si ϕ, ψ son dos acciones de G sobre M y N , se dice que F es **equivariante** si

$$F \circ \phi_g = \psi_g \circ F \quad \text{para cada } g \in G.$$

Es decir, una aplicación momento J es Ad^* -equivariante respecto a una acción simpléctica ϕ si

$$J \circ \phi_g = \text{Ad}_g^* \circ J. \quad (3.5)$$

Una acción simpléctica junto con una aplicación momento Ad^* -equivariante se denomina una **acción Hamiltoniana**. Veremos cómo construir una acción Hamiltoniana a partir de una acción simpléctica, previa demostración del siguiente lema.

Lema 3.5. Sea $\phi : G \times M \rightarrow M$ una acción, para cada $g \in G$ y $\xi \in \mathfrak{g}$ se tiene

$$(\text{Ad}_g \xi)_M = \phi_{g*} \xi_M$$

Demostración. Partiendo de $(\text{Ad}_g \xi)_M$, aplicamos la definición de generador infinitesimal (3.2) y la linealidad de Ad_g respecto t (por ser una diferencial es una aplicación lineal),

$$\begin{aligned} (\text{Ad}_g \xi)_M &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{\exp(t \text{Ad}_g \xi)} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{\exp(\text{Ad}_g t \xi)} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{g \exp(t \xi) g^{-1}} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_g \circ \phi_{\exp(t \xi)} \circ \phi_{g^{-1}}, \end{aligned}$$

siendo el penúltimo paso la proposición 1.44(ii) aplicada a la conjugación $F = C_g$ y el último la composición de una acción 1.27. Especializando para un punto $m \in M$, aplicando la regla de la cadena y la definición de pushforward (1.10), se concluye como queríamos

$$((\text{Ad}_g \xi)_M)_m = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_g \circ \phi_{\exp(t \xi)}(g^{-1}m) = (d\phi_g)_{g^{-1}m} (\xi_M)_{g^{-1}m} = (\phi_{g*} \xi_M)_m$$

(hemos llamado $\phi_g(m) \equiv gm$ para no sobrecargar la notación). □

Teorema 3.6. Sea ϕ una acción simpléctica de G sobre (M, ω) . Suponemos que la forma simpléctica es exacta, i.e. $\omega = -d\theta$, y que la acción ϕ deja θ invariante. Entonces $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ dada por

$$J(m)(\xi) = i_{\xi_M} \theta(m) = \theta(\xi_M)$$

es una aplicación momento Ad^* -equivariante.

³⁴ En muchos libros se denota nuestro Ad_g^* por $\text{Ad}_{g^{-1}}^* := (\text{Ad}_{g^{-1}})^*$, entendiendo el segundo asterisco como la aplicación dual de $\text{Ad}_{g^{-1}}$.

Demostración. La acción ϕ_g deja θ invariante, en particular $\phi_{\exp t\xi}$ también, es decir, $\mathcal{L}_{\xi_M} \theta = 0$, y por la fórmula mágica de Cartan 1.50(vi),

$$\mathcal{L}_{\xi_M} \theta = i_{\xi_M}(d\theta) + d(i_{\xi_M} \theta) = -i_{\xi_M}(\omega) + d(i_{\xi_M} \theta) = 0.$$

Si definimos $\hat{J}(\xi) := i_{\xi_M} \theta = \theta(\xi_M)$, se cumple la definición de aplicación momento,

$$d\hat{J}(\xi) = i_{\xi_M} \omega \quad \Rightarrow \quad \xi_M = X_{\hat{J}(\xi)}.$$

Para la Ad^* -equivariancia probaremos

$$(J \circ \phi_g(m)) \cdot \xi = (\text{Ad}_g^* \circ J(m)) \cdot \xi$$

para todo $g \in G, m \in M, \xi \in \mathfrak{g}$. Por la caracterización (3.4), esto es equivalente a

$$(J \circ \phi_g(m)) \cdot \xi = J(m) \cdot \text{Ad}_{g^{-1}}(\xi) \quad \leftrightarrow \quad \hat{J}(\xi) \circ \phi_g = \hat{J}(\text{Ad}_{g^{-1}} \xi),$$

y por la definición que hemos dado de $\hat{J}(\xi)$, tenemos la expresión a demostrar

$$\theta(\xi_M) \circ \phi_g = \theta((\text{Ad}_{g^{-1}} \xi)_M). \quad (3.6)$$

Por el lema 3.5 se tiene $(\text{Ad}_{g^{-1}} \xi)_M = \phi_{g^{-1}*} \xi_M$, y aplicando las definiciones de pushforward de un campo vectorial (1.10) y pullback de una 1-forma (1.15),

$$\theta_m((\text{Ad}_g \xi)_M) = \theta_m(d\phi_{g^{-1}})_{gm}(\xi_M)_{gm} = (\phi_{g^{-1}}^* \theta)_{gm}(\xi_M)_{gm} = \theta_{gm}(\xi_M)_{gm},$$

siendo el último paso consecuencia de que la acción deja θ invariante. Hemos probado (3.6) y por tanto la Ad^* -equivariancia de J . □

Ya solo queda responder a la pregunta: ¿cómo obtenemos una acción simpléctica? Pues to que las mayoría de aplicaciones físicas se dan a través del fibrado cotangente, nos limitaremos a construir acciones simpléticas en este caso. Como se demuestra en este lema, nos bastará conocer una acción sobre una variedad para tener automáticamente una acción simpléctica sobre su fibrado cotangente.

Lema 3.7. Sea $F : Q \rightarrow Q$ un difeomorfismo. La aplicación cotangente de F preserva la 1-forma canónica en T^*Q , i.e. $(d^*F)^* \theta = \theta$, y por tanto d^*F es un symplectomorfismo.

Demostración. Antes de comenzar la demostración conviene recordar la sección 2.1 sobre la 1-forma canónica. Sean $\beta \in T^*Q$, $v \in T_\beta(T^*Q)$ y π_Q la proyección natural de T^*Q sobre Q . Denotaremos la aplicación cotangente por $G = d^*F$. Aplicando la definición de pullback, 1-forma canónica 2.6 y aplicación cotangente (1.8) (en este orden),

$$(G^* \theta)_\beta \cdot v = \theta_{G(\beta)} \cdot dG(v) = G(\beta) \cdot d\pi(dG(v)) = \beta \cdot dF \circ d\pi \circ dG(v) = \beta \cdot d\pi(v),$$

y la última igualdad se debe a que $F \circ \pi \circ d^*F = \pi$, que se deduce de la definición de aplicación cotangente. De nuevo, por (2.6) tenemos que $\beta \cdot d\pi = \theta$ y concluimos que d^*F preserva la 1-forma canónica. El pullback conmuta con la derivada exterior y por tanto también conserva la forma simpléctica canónica y la aplicación cotangente es un symplectomorfismo. □

Así, dada una acción ϕ , cada ϕ_g es un difeomorfismo sobre Q , y construimos una acción en el fibrado cotangente mediante la aplicación cotangente de $\phi_{g^{-1}}$,³⁵

$$\begin{aligned}\hat{\phi} : G \times T^*Q &\rightarrow T^*Q \\ (g, (q, \alpha_q)) &\mapsto (\phi_g(q), d^*\phi_{g^{-1}} \alpha_q)\end{aligned}$$

siendo $q \in Q$ y $\alpha_q \in T_q^*Q$. Como consecuencia del lema anterior, $\hat{\phi}$ será una acción simpléctica. El objetivo ahora es aplicar el teorema 3.6 a esta acción simpléctica y determinar la deseada aplicación momento.

Lema 3.8. Sea $F : M \rightarrow N$ una aplicación equivariante respecto a dos acciones ϕ y ψ de un grupo G en M y N . Entonces, para cualquier $\xi \in \mathfrak{g}$ se tiene

$$dF \circ \xi_M = \xi_N \circ F$$

Demostración. Por la definición de equivariancia

$$F \circ \phi_{\exp t\xi} = \psi_{\exp t\xi} \circ F ,$$

y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$dF \circ \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi_{\exp t\xi} \right) = \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \psi_{\exp t\xi} \right) \circ F ,$$

es decir, $dF \circ \xi_M = \xi_N \circ F$.

□

Aplicamos pues el teorema 3.6 a la acción $\hat{\phi}$,

$$\hat{J}(\xi)(q, \alpha_q) = (i_{\xi_M} \theta)_{(q, \alpha_q)} = (\theta \cdot \xi_M)_{(q, \alpha_q)} = \alpha_q \cdot d\pi_{(q, \alpha_q)}(\xi_M)_{(q, \alpha_q)} = \alpha_q \cdot (\xi_Q)_q \quad (3.7)$$

donde en el penúltimo paso hemos usado (2.6) y en el último el lema 3.8 aplicado a la proyección natural π y las acciones ϕ y $\hat{\phi}$. Lo podemos aplicar porque la proyección natural es equivariante por construcción,

$$\phi_g \circ \pi(q, \alpha_q) = \phi_g(q) = \pi \circ (\phi_g(q), d^*\phi_{g^{-1}}(\alpha_q)) = \pi \circ \hat{\phi}(q, \alpha_q) .$$

Ahora que conocemos la aplicación momento en el espacio cotangente podemos pasar a dar dos ejemplos de vital importancia en física: la conservación del momento lineal y del momento angular.

Ejemplo 3.9. Sea $Q = \mathbb{R}^n$ el espacio de configuración sobre el que actúa el grupo de simetrías de las traslaciones $G = \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, q) &\mapsto x + q .\end{aligned}$$

³⁵ El motivo de definirlo con g^{-1} y no con g es para que la regla de composición de la definición de acción 1.27 sea correcta.

Consideramos ahora como espacio de fases el espacio cotangente $T^*\mathbb{R}^n$ con coordenadas de posición q y momento lineal p . Las traslaciones son difeomorfismos, así que por el lema 3.7 también son difeomorfismos en $T^*\mathbb{R}^n$ que preservan la 1-forma canónica $\theta = p_i dq^i$. Es decir, la acción de \mathbb{R}^n sobre $T^*\mathbb{R}^n$ dada por

$$\hat{\phi}_x(q, p) = (q + x, p)$$

es una acción simpléctica. Por el resultado obtenido en (3.7), basta saber ξ_Q para conocer la aplicación momento asociada a $\hat{\phi}$. El álgebra de Lie de \mathbb{R}^n es ella misma, $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$, y el generador infinitesimal de $\xi \in \mathfrak{g}$ respecto a ϕ es el campo vectorial constante

$$\begin{aligned}\xi_{\mathbb{R}^n}(q) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{\exp t\xi}(q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (q + \exp t\xi) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp t\xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} t\xi = \xi ,\end{aligned}$$

siendo el penúltimo paso consecuencia del ejemplo 1.43 (o por definición de exponencial). Por el resultado (3.7), la aplicación momento Ad^* -equivariante asociada a la acción $\hat{\phi}$ es

$$\hat{J}(\xi)(q, p) = p \cdot \xi ,$$

esto es, $J(q, p) = p$ es el momento lineal. El teorema de Noether nos garantiza que si un Hamiltoniano es invariante bajo traslaciones, el momento lineal se conserva. \diamond

Ejemplo 3.10. Sea ahora $G = \text{SO}(3)$ el grupo de rotaciones actuando sobre el espacio de posiciones $Q = \mathbb{R}^3$ mediante la acción $\phi(A, q) = A \cdot q$, donde “ \cdot ” denota el producto de una matriz A por un vector columna q . Las rotaciones son difeomorfismos, así que podemos seguir el esquema del ejemplo anterior. Si interpretamos el momento lineal p como vector fila, la acción simpléctica inducida en $T^*\mathbb{R}^3$ con 1-forma canónica $\theta = p_i dq^i$ es

$$\hat{\phi}_A(q, p) = (Aq, d^* \phi_{A^{-1}}(p)) = (Aq, pA^{-1}) = (Aq, pA^\top) , \quad (3.8)$$

ya que A es una matriz ortogonal. Dado un elemento ξ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$, el generador infinitesimal de la acción es

$$\xi_{\mathbb{R}^3}(q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{\exp t\xi}(q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot q = \xi \cdot q ,$$

ya que la derivada en 0 de $\exp(t\xi)$ es ξ por definición de aplicación exponencial. Ahora bien, el álgebra $\mathfrak{so}(3)$, que en el ejemplo 1.35 dimos como las matrices antisimétricas 3×3 con el conmutador, es isomorfa como álgebra de Lie a \mathbb{R}^3 con el producto cruz \times a través del isomorfismo de álgebras

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \hat{\xi} = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3] .$$

Usando de nuevo (3.7), la aplicación momento resulta

$$\hat{J}(\xi)(q, p) = p \cdot \xi \cdot q = p \cdot (\hat{\xi} \times q) = (q \times p) \cdot \hat{\xi} ,$$

siendo la última igualdad una propiedad del producto escalar y vectorial. Así, la aplicación momento resulta el conocido momento angular $J = q \times p$. De nuevo, el teorema de Noether nos dice que si un Hamiltoniano es invariante por rotaciones, el momento angular se conserva. \diamond

Finalizamos la sección mencionando una utilidad importante de las aplicaciones momento en el estudio de la estabilidad de sistemas dinámicos. Si tenemos un sistema Hamiltoniano en un estado inicial con una constante del movimiento J , la curva integral de X_H que nos da la evolución del sistema está contenida en superficies de $H = cte$ y $J = cte$. La dinámica se reduce entonces a los conjuntos de nivel de la **aplicación energía-momento** $E : M \rightarrow \mathbb{R} \times \mathfrak{g}^*$ dada por

$$E(m) = (H(m), J(m)) .$$

Esta aplicación es el comienzo del estudio topológico de sistemas mecánicos (en el que no entraremos) y del que se puede encontrar una introducción en [Rudolph y Schmidt, 2017, p. 556-566; Abraham y Marsden, 1987, p. 338-359]

3.3. Reducción simpléctica

Resolver un sistema Hamiltoniano es en general complicado, así que debemos buscar estrategias que simplifiquen las ecuaciones diferenciales. En esta sección introduciremos la reducción simpléctica, que formaliza los conocidos procedimientos de la física de buscar simetrías en un sistema para reducir los grados de libertad de su configuración. El sistema reducido encapsula la esencia de la dinámica del sistema, que posteriormente podemos reconstruir para recuperar la solución en el sistema original. Antes de comenzar con los teoremas conviene repasar algunos conceptos de grupos de Lie.

Consideramos una variedad simpléctica (M, ω) sobre la que actúa un grupo de Lie G mediante la acción Hamiltoniana $\phi : G \times M \rightarrow M$ con aplicación momento Ad^* -equivariante $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Definimos el **grupo de isotropía** (asociado a la acción Ad^*) de $\mu \in \mathfrak{g}^*$ como el subgrupo

$$G_\mu = \{g \in G \mid \text{Ad}_g^* \mu = \mu\}$$

de los elementos que dejan fijo μ , que es un subgrupo cerrado y por tanto un subgrupo de Lie. Por el teorema 1.22, si μ es un valor regular, $J^{-1}(\mu)$ es una subvariedad de M . Definimos la acción de G_μ sobre $J^{-1}(\mu)$ restringiendo la acción ϕ_g a $g \in G_\mu$. Efectivamente, es una acción: si $m \in J^{-1}(\mu)$, por la Ad^* -equivariancia (3.5) de J tenemos

$$J(\phi_g(m)) = \text{Ad}_g^* J(m) = \text{Ad}_g^* \mu = \mu \quad \Rightarrow \quad \phi_g(m) \in J^{-1}(\mu) . \quad (3.9)$$

Otro ingrediente que necesitaremos para la reducción son las órbitas. Dada una acción de G sobre M , definimos para cada $m \in M$ la **órbita**

$$O_m = \{\phi_g(m) \mid g \in G\} ,$$

que es una subvariedad inmersa de M [Abraham y Marsden, 1987, p. 265]. Si definimos en M la relación equivalencia $m \sim p$ si y solo si existe g tal que $\phi_g(m) = p$, el espacio

cociente (de espacios topológicos) M/G es precisamente el espacio de órbitas O_m . El siguiente teorema nos garantiza que en el caso de una acción propia y libre este cociente es una variedad suave. Se dice que una acción es **propia** si dadas dos sucesiones convergentes en M , (m_n) y $(\phi_{g_n}(m_n))$, entonces g_n tiene una subsucesión convergente en G . En el caso de que G sea compacto, la acción es automáticamente propia. Se dice que una acción es **libre** si $\phi_g(m) = m$ implica que g es la identidad; dicho de otra manera, cada grupo de isotropía G_m es el grupo trivial $\{e\}$.

Teorema 3.11. *Si $\phi : G \times M \rightarrow M$ es una acción diferenciable, propia y libre, entonces M/G es una variedad suave y la aplicación cociente $\pi : M \rightarrow M/G$ es una subinmersión (ver definición 1.19).*

La demostración puede encontrarse en libros de geometría diferencial como [John Lee, 2013, pp. 544-547]. Tenemos pues que el espacio $M_\mu \equiv J^{-1}(\mu)/G_\mu$ de órbitas de G_μ en $J^{-1}(\mu)$ es una variedad suave de dimensión

$$\dim M_\mu = \dim J^{-1}(\mu) - \dim G_\mu = \dim M - \dim G - \dim G_\mu. \quad (3.10)$$

Llamaremos a esta variedad M_μ el **espacio reducido**. El objetivo es demostrar que M_μ es además una variedad simpléctica y para ello damos el siguiente lema.

Lema 3.12. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica, y O_m y O_m^μ las órbitas de m por G y G_μ . Para cada $m \in J^{-1}(\mu)$ tenemos:*

- (i) $T_x O_m = \{\xi_M(x) \mid \xi \in \mathfrak{g}\}$.
- (ii) $T_m O_m^\mu = T_m O_m \cap T_m(J^{-1}(\mu))$.
- (iii) $T_m(J^{-1}(\mu)) = (T_m O_m)^\perp$ (recordar el subespacio ortogonal (2.3)).

Demostración.

- (i) Recordemos que el espacio tangente en un punto coincide con el espacio de velocidades de curvas (1.3) que pasan por ese punto. Sea $\gamma_\xi(t)$ una curva en G tangente a $\xi \in \mathfrak{g}$ en e y $t = 0$ (por el teorema 1.34, $\mathfrak{g} = T_e G$). Cualquier curva en O_m vendrá dada por

$$\phi_x^\xi(t) = \phi_{\gamma_\xi(t)}(x),$$

que es una curva suave con $\phi_x^\xi(0) = x$. Así pues, se concluye que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_x^\xi(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{\gamma_\xi(t)}(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{\exp t\xi}(x) = \xi_M(x)$$

ya que $\gamma_\xi(t)$ coincide con $\exp(t\xi)$ en un entorno de $t = 0$.

- (ii) Por el teorema 1.22, $T_m(J^{-1}(\mu)) = \ker(dJ_m)$, y por tanto $v \in T_m(J^{-1}(\mu)) \cap T_m O_m$ si y solo si $v = \xi_M(m)$ para cierto $\xi \in \mathfrak{g}$ y $dJ_m(v) = 0$. Queremos demostrar que $\xi_M(m) \in \ker(dJ_m)$ si y solo si $\xi_M(m) \in T_m O_m^\mu$, y por el apartado anterior, si y solo

si ξ está en \mathfrak{g}_μ , el álgebra de Lie de G_μ . Dado que $J : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ es Ad^* -equivariante, podemos aplicar el lema 3.8

$$dJ_m(\xi_M(m)) = \xi_{\mathfrak{g}^*}(J(m)) = \xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu),$$

y por tanto $\xi_M(m) \in \ker(dJ_m)$ si y solo si $\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu) = 0$. El covector $\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu)$ viene dado por la acción Ad^*

$$\xi_{\mathfrak{g}^*}(\mu) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(t\xi)}^*(\mu)$$

y será 0 si y solo si la curva integral de $\xi_{\mathfrak{g}^*}$ que comienza en μ tiene velocidad 0 en $t = 0$. La curva constante μ cumple la condición y por la unicidad de las curvas integrales 1.42 se tiene que $\text{Ad}_{\exp(t\xi)}^*(\mu) = \mu$, esto es, $\exp(t\xi)$ pertenece al grupo de isotropía G_μ . Esto es equivalente a que $\xi \in \mathfrak{g}_\mu$, por la propiedad 1.44(iii), y concluimos la demostración.

(iii) Sea $\xi \in \mathfrak{g}$ y $v \in T_m M$. Tenemos por definición de aplicación momento 3.2

$$\omega(\xi_M(m), v) = (d\hat{J}(\xi))_m(v) = dJ_m(v) \cdot \xi.$$

Por tanto $v \in T_m(J^{-1}(\mu)) = \ker(dJ_m)$ si y solo si $\omega(\xi_M(m), v) = 0$ para todo $\xi \in \mathfrak{g}$, es decir, v está en el complemento ortogonal de $T_m O_m = \{\xi_M(m) \mid \xi \in \mathfrak{g}\}$.

□

Teorema 3.13 (Meyer-Weinstein-Marsden). *Sean ϕ una acción simpléctica sobre (M, ω) y J una aplicación momento Ad^* -equivariante que cumplen las condiciones dadas antes del lema. Entonces $M_\mu = J^{-1}(\mu)/G_\mu$ tiene una estructura simpléctica única ω_μ tal que*

$$\pi^* \omega_\mu = i^* \omega,$$

donde $\pi : J^{-1}(\mu) \rightarrow M_\mu$ es la aplicación cociente e $i : J^{-1}(\mu) \hookrightarrow M$ es la inclusión.

Demostración. Comenzaremos haciendo la identificación $T_m M_\mu \cong T_m(J^{-1}(\mu))/T_m O_m^\mu$, que razonaremos como sigue. Por el teorema 3.11, π es una subinmersión y por ello $d\pi$ es sobre, así que la aplicación lineal

$$d\pi_m : T_m J^{-1}(\mu) \rightarrow T_{\pi(m)}(J^{-1}(\mu)/G_\mu)$$

con núcleo $\ker d\pi_m = T_m O_m^\mu$ (teorema 1.22) induce el isomorfismo $T_{\pi(m)}(J^{-1}(\mu)/G_\mu) \cong T_m J^{-1}(\mu)/T_m O_m^\mu$.

Seguimos con la unicidad. Para $v \in T_m(J^{-1}(\mu))$, sea $[v] = d\pi_m(v)$ su clase de equivalencia asociada en $T_m M_\mu$, que identificamos con $T_m(J^{-1}(\mu))/T_m O_m^\mu$. Por la definición de pullback (1.15), la igualdad $\pi^* \omega_\mu = i^* \omega$ nos dice que

$$(\pi^* \omega_\mu)(v, w) = \omega_\mu([v], [w]) = \omega(v, w)$$

para todo $v, w \in T_m(J^{-1}(\mu))$. Tanto π como $d\pi$ son sobreyectivas y por ello ω_μ es única.

A continuación probaremos que ω_μ está bien definida. Sean $m, m' \in J^{-1}(\mu)$, $v, w \in T_m(J^{-1}(\mu))$, $v', w' \in T_{m'}(J^{-1}(\mu))$ tal que $\pi(m) = \pi(m')$, $[v] = [v']$, $[w] = [w']$. Así, m y m' están en la misma órbita de G_μ , es decir, $m' = \phi_g(m)$ para cierto $g \in G_\mu$ y se tiene que $d\phi_g(v) - v', d\phi_g(w) - w' \in T_{m'}O_{m'}^\mu$. Aplicando que ϕ_g es un simplectomorfismo,

$$\begin{aligned}\omega_m(v, w) &= \phi_g^* \omega_m(v, w) = \omega_{\phi_g(m)}(d\phi(v), d\phi(w)) \\ &= \omega_{m'}(v' + (d\phi(v) - v'), w' + (d\phi(w) - w')) = \omega_{m'}(v', w').\end{aligned}$$

Para concluir el último paso hemos usado el lema 3.12, que nos dice que $d\phi_g(v) - v', d\phi_g(w) - w' \in T_{m'}O_{m'}^\mu$, pertenecen a $T_{m'}O_{m'}$ y también a $J^{-1}(\mu) = (T_{m'}O_{m'})^\perp$. Por la bilinealidad de ω se concluye el resultado y por tanto ω_μ está bien definida.

Notemos que ω_μ es diferenciable porque $\pi^* \omega_\mu$ lo es. Veamos que también es cerrada:

$$\pi^* d\omega_\mu = d\pi^* \omega_\mu = d\iota^* \omega = \iota^* d\omega = 0,$$

ya que la derivada exterior conmuta con el pullback 1.50(iv). Como π es una subinmersión, concluimos que $d\omega_\mu = 0$.

Finalmente, para probar que ω_μ es no degenerada suponemos que $(\omega_\mu)_{\pi(m)}([v], [w]) = 0$ para todo $w \in T_m(J^{-1}(\mu))$, es decir, $v \in T_m(J^{-1}(\mu))^\perp = T_m O_m$ por el lema 3.12(iii). Como $v \in T_m(J^{-1}(\mu))$ y $v \in T_m O_m$, por 3.12(ii) tenemos que $v \in T_m O_m^\mu$, es decir, $[v] = 0$ y ω_μ es no degenerada. □

Una vez que hemos reducido la estructura simpléctica de (M, ω) a (M_μ, ω_μ) , nos interesa reducir también la dinámica del sistema, encapsulada en los campos Hamiltonianos y su flujo. Esto nos permitirá en la siguiente sección dar algunos ejemplos de esta herramienta imprescindible en física. El sentido de la hipótesis de invariancia de H es el siguiente: si la acción deja invariante el Hamiltoniano, por el teorema de Noether J es una constante del movimiento; por tanto, si comenzamos con un sistema en el punto m del espacio de fases tal que $J(m) = \mu$, el sistema evolucionará de forma que $J \equiv \mu$. Así, podremos limitarnos a estudiar la reducción de $J^{-1}(\mu)$ por el grupo G_μ , obteniendo la nueva forma simpléctica ω_μ y el Hamiltoniano H_μ .

Teorema 3.14 (Marsden-Weinstein). *Bajo las mismas hipótesis que el teorema 3.13, sea $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ invariante bajo la acción de G . Entonces, el flujo F_t de X_H deja $J^{-1}(\mu)$ invariante y conmuta con la acción de G_μ sobre $J^{-1}(\mu)$, de forma que induce un flujo f_t en M_μ tal que*

$$\pi \circ F_t = f_t \circ \pi. \quad (3.11)$$

Este flujo es Hamiltoniano en M_μ respecto al Hamiltoniano reducido H_μ , que cumple

$$H_\mu \circ \pi = H \circ i. \quad (3.12)$$

Demostración. Por el teorema de Noether 3.3 vemos que si $m \in J^{-1}(\mu)$,

$$J(m) = J(F_t(m)) = \mu$$

y por tanto $J^{-1}(\mu)$ es invariante por F_t . Definimos f_t por la relación $\pi \circ f_t = F_t \circ \pi$, ilustrada en el diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccccccc} J^{-1}(\mu) & \xrightarrow{F_t} & J^{-1}(\mu) & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{H} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi & & & \nearrow & \\ M_\mu & \xrightarrow{f_t} & M_\mu & & & H_\mu & \end{array}$$

de forma que, aplicando el teorema 3.13 y que F_t es simpléctica (teorema 2.23),

$$\pi^* f_t^* \omega_\mu = F_t^* \pi^* \omega_\mu = F_t^* i^* \omega = i^* \omega = \pi^* \omega_\mu .$$

Pero la aplicación cociente π es una subinmersión sobreyectiva, así que concluimos que $f_t^* \omega_\mu = \omega_\mu$ y el flujo f_t en M_μ es simpléctico.

El Hamiltoniano H es invariante por ϕ_g , por lo que una función H_μ en M_μ tal que $H_\mu \circ \pi = H \circ i$ existe. Además, como π es sobre, H_μ es única, y como π es una subinmersión, también es suave.

Solo falta probar que f_t es el flujo Hamiltoniano asociado a H_μ . Dado $[v] = d\pi_m(v) \in T_{\pi(m)}M_\mu$ se tiene

$$dH_\mu([v]) = i^* dH(v) = i^* \omega(X_H, v) ,$$

ya que la derivada exterior conmuta con el pullback. Por otro lado, si Y es el generador del flujo de f_t , podemos aplicar la regla de la cadena a (3.11),

$$d\pi \circ X_H = Y \circ \pi , \quad (3.13)$$

y concluimos que

$$dH_\mu([v]) = i^* \omega(X_H, v) = \pi^* \omega_\mu(X_H, v) = \omega_\mu(Y, [v]) ,$$

es decir, Y tiene función Hamiltoniana H_μ . □

Corolario 3.15. Las estructuras de Poisson en M y M_μ son compatibles, esto es,

$$\{f_\mu, g_\mu\} \circ \pi = \{f, g\} \circ i ,$$

para todas funciones G -invariantes $f, g \in C^\infty(M)$ y $f_\mu, g_\mu \in C^\infty(M_\mu)$ relacionadas por (3.12).

Demostración. Aplicando la definición de corchete de Poisson, la relación del campo $Y \equiv X_{H_\mu}$ en (3.13) y el teorema 3.13,

$$\begin{aligned} \{f_\mu, g_\mu\} \pi(m) &= (\omega_\mu)_{\pi(m)}(X_{f_\mu}, X_{g_\mu}) = (\pi^* \omega_\mu)_m(X_f, X_h) \\ &= (i^* \omega)_m(X_f, X_h) = \omega_{i(m)}(X_f, X_h) = \{f, g\}(i(m)) , \end{aligned}$$

concluyendo el corolario. □

Finalizamos esta sección estudiando cómo reconstruir la solución en el sistema original a partir de la del sistema reducido (un dibujo muy ilustrador puede encontrarse en [Abraham y Marsden, 1987, p. 305]).

Si conocemos el flujo f_t de X_{H_μ} en M_μ , podemos reconstruir el flujo F_t de X_H en $J^{-1}(\mu)$ como sigue. Sea $p_0 \in J^{-1}(\mu)$ un punto y $c(t)$ una curva integral de X_H con $c(0) = p_0$ y tal que $\pi(c(t)) \equiv [c(t)]$ es una curva integral de X_{H_μ} . Para expresar $c(t)$ en términos de $[c(t)]$, tomamos una curva $d(t)$ en $J^{-1}(\mu)$ con el mismo punto inicial $d(0) = p_0$ y tal que $[c(t)] = [d(t)]$. Si dos puntos están en la misma clase (misma órbita), deben estar relacionados por un elemento de G_μ , así que buscamos una curva $g(t)$ en G_μ tal que $c(t) = \phi_{g(t)} d(t)$. Sabiendo que $c(t)$ es una curva integral de X_H ,

$$X_H(c(t)) = \dot{c}(t) = \frac{d}{dt} \phi_{g(t)} d(t) = \frac{d}{dt} \phi(g(t), d(t)). \quad (3.14)$$

Si denotamos por $\phi^p(g) \equiv \phi(g, p)$ la restricción de la acción a un punto fijo, podemos desarrollar la expresión anterior:

$$\frac{d}{dt} \phi(g(t), d(t)) = (d\phi_{g(t)})_{d(t)} \dot{d}(t) + (d\phi^{d(t)})_{g(t)} \dot{g}(t).$$

Si L_g es la traslación izquierda 1.27 y $\xi(t) \equiv (dL_{g(t)^{-1}})_{g(t)} \dot{g}(t)$, podemos reescribir el segundo término de forma más manejable teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} d(\phi^d)_g \dot{g} &= d(\phi^d)_g \circ d(L_g)_e \xi = d(\phi^d \circ L_g)_e \xi = d(\phi_g \circ \phi^d)_e \xi \\ &= d(\phi_g)_d \circ d(\phi^d)_e \xi = d(\phi_g)_d \circ \xi_M(d), \end{aligned}$$

siendo el último paso porque

$$\xi_M(m) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(\exp(t\xi), m) = d(\phi^m)_e \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(t\xi) = d(\phi^m)_e \xi.$$

Así, llegamos por fin a

$$\frac{d}{dt} \phi(g(t), d(t)) = (d\phi_{g(t)})_{d(t)} \dot{d}(t) + (d\phi_{g(t)})_{d(t)} \circ ((dL_{g(t)^{-1}})_{g(t)} \dot{g}(t))_M(d(t)).$$

Por el teorema de Jacobi 2.17 y la invarianza de H por $\phi_{g(t)}^{-1}$, deducimos que

$$X_H(c(t)) = X_{H \circ \phi_g^{-1}}(c(t)) = ((\phi_{g(t)}^{-1})^* X_H) c(t) = (d\phi_{g(t)} X_H)_{\phi_g^{-1} c(t)} = (d\phi_{g(t)})_{d(t)} X_H(d(t))$$

Si juntamos esto con (3.14) obtenemos la ecuación

$$X_H(d(t)) = \dot{d}(t) + ((dL_{g(t)^{-1}})_{g(t)} \dot{g}(t))_M(d(t)),$$

que buscamos resolver para $g(t)$ en términos de $d(t)$. Para ello, resolvemos primero el problema algebraico

$$\xi(t)_M(d(t)) = X_H(d(t)) - \dot{d}(t)$$

para $\xi(t) \in \mathfrak{g}$ y después la ecuación

$$\dot{g}(t) = (dL_{g^{-1}}) \xi(t)$$

para $g(t)$. Conocido $g(t)$, ya podemos recuperar la solución reconstruida

$$c(t) = \phi_{g(t)} d(t).$$

3.4. El problema de Kepler

El ejemplo paradigmático de reducción simpléctica se aplica para resolver el problema de Kepler de dos cuerpos atraídos por un potencial central. La simetría traslacional y rotacional del sistema nos permitirá reducir un problema de 12 dimensiones a uno de 2.

Antes estudiar problemas conviene repasar las hipótesis que tenemos que comprobar antes de aplicar los teoremas de reducción:

1. Acción simpléctica sobre T^*Q con aplicación momento Ad^* -equivariante J .
2. Valor regular μ de J .
3. Acción libre y propia.
4. Hamiltoniano invariante bajo la acción.

Comenzamos con dos cuerpos puntuales³⁶ de masas m_1 y m_2 que pueden ser los centros de masas de dos planetas. Ambos cuerpos se pueden mover en todo el espacio \mathbb{R}^3 así que el espacio de configuración del sistema es $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Falta un pequeño detalle, las dos masas no pueden estar en el mismo punto, así que quitamos el conjunto

$$\Delta = \{(q, q) \mid q \in \mathbb{R}^3\}.$$

Por ser cerrado, $Q = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \setminus \Delta$ será abierto y por tanto una variedad suave. Por ser un abierto, su fibrado tangente será $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ y lo mismo su fibrado cotangente. Así, el espacio de fases es $M = T^*Q = Q \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ con coordenadas de posición y momento (r_1, r_2, p_1, p_2) . Tomaremos la forma simpléctica canónica

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^3 d(r_1)^i \wedge d(p_1)_i + d(r_2)^i \wedge d(p_2)_i \equiv dr_1 \wedge dp_1 + dr_2 \wedge dp_2,$$

que nos da las ecuaciones de Hamilton (2.9). Es decir, si tomamos el Hamiltoniano dado por la energía cinética más potencial

$$H_0 = \frac{|p_1|^2}{2m_1} + \frac{|p_2|^2}{2m_2} - \frac{Gm_1m_2}{|r_1 - r_2|},$$

las ecuaciones de Hamilton son simplemente las ecuaciones de Newton que conocemos para el problema gravitatorio (G es la constante de gravitación universal).

Una vez tenemos nuestro sistema Hamiltoniano podemos comenzar a estudiar las simetrías del sistema. Si la fuerza entre los cuerpos solo depende de su distancia relativa podemos pensar que debe haber algún tipo de simetría de traslación. Efectivamente, si tomamos el grupo $G = \mathbb{R}^3$ actuando sobre M tal que

$$\phi_g(r_1, r_2, p_1, p_2) = (r_1 + g, r_2 + g, p_1, p_2),$$

³⁶ El motivo de considerarlos puntuales es para evitar la rotación de los cuerpos y tener que estudiarlos como sólidos rígidos.

la acción es simpléctica:

$$\phi_g^* \omega_0 = d(r_1 + g) \wedge dp_1 + d(r_2 + g) \wedge dp_2 = dr_1 \wedge dp_1 + dr_2 \wedge dp_2 = \omega_0$$

(hemos aplicado la fórmula 1.47 y que $g \in G$ es una constante). La acción es también Hamiltoniana, pues igual que en el ejemplo 3.9,

$$\hat{J}(\xi)(q_1, q_2, p_1, p_2) = ((p_1)_i d(q_1)^i + (p_2)_i d(q_2)^i) \left(\xi^i \frac{\partial}{\partial q^i} \right) = (p_1 + p_2) \cdot \xi \quad (3.15)$$

y la aplicación momento $J(r_1, r_2, p_1, p_2) = p_1 + p_2$ es Ad^* -equivariante. Como vemos, la aplicación momento para la traslación de ambos cuerpos es simplemente el momento lineal total.

La acción es libre, ya que solo la traslación por 0 tiene puntos fijos, y propia porque si dos sucesiones $(r_1, r_2, p_1, p_2)_{n=1}^\infty$ y $(r_1 + g, r_2 + g, p_1, p_2)_{n=1}^\infty$ convergen entonces $(g)_{n=1}^\infty$ también.

También es fácil de ver que cualquier $p_1 + p_2 \in \mathfrak{g}^* \cong \mathbb{R}^3$ es un valor regular de J , ya que en cada punto $m \in \mathbb{R}^{12}$ el Jacobiano $dJ_m : \mathbb{R}^{12} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la matriz

$$dJ_m = (0, 0, 1, 1),$$

que es sobreyectiva (se entiende que 0 es la matriz 3×3 de ceros y 1 la matriz identidad 3×3).

Por último, el Hamiltoniano solo depende de las distancias entre las masas, así que si desplazamos ambas la misma distancia permanece invariante. Por el teorema de Noether 3.3, la invariancia por traslaciones implica la conservación del momento lineal total. Es más, si tomamos $\xi = (1, 0, 0)$, $\xi = (0, 1, 0)$ y $\xi = (0, 0, 1)$ en (3.15), comprobamos que se conserva cada componente x , y , z del momento lineal total.

Una vez que hemos comprobado las hipótesis podemos aplicar los teoremas. Suponemos que el sistema está en un estado de momento lineal total μ , así que el espacio de fases es la variedad $J^{-1}(\mu)$, formada por los puntos de $T^*\mathbb{R}^{12}$ tal que $p_1 + p_2 = \mu$. Como G es un grupo conmutativo, la conjugación C_g es la identidad para cada $g \in G$ y dC_g será también la identidad. Así, $\text{Ad}_g^* \mu = \mu$ para todo $\mu \in \mathfrak{g}^*$ y el grupo de isotropía G_μ es el propio G . Al tomar el cociente $\pi : J^{-1}(\mu) \rightarrow J^{-1}(\mu)/G \cong (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ estamos enviando cada punto a su órbita por G , es decir, las clases de equivalencia están compuestas por los puntos tal que $r_1 - r_2 = r$ fijo. Así,

$$\pi(r_1, r_2, p_1, \mu - p_1) = (r, p_1),$$

siendo $r = r_1 - r_2$ y podremos describir el espacio reducido con tan solo 6 grados de libertad. La forma simpléctica reducida es $\omega_1 = dr \wedge dp_1$, ya que

$$\begin{aligned} \pi^* \omega_1 &= d(r \circ \pi) \wedge d(p_1 \circ \pi) = d(r_1 - r_2) \wedge dp_1 \\ &= dr_1 \wedge dp_1 - dr_2 \wedge dp_1 = dr_1 \wedge dp_1 + dr_2 \wedge (\mu - dp_1) = i^* \omega_0, \end{aligned}$$

y por el teorema 3.13 la forma reducida debe ser única. El Hamiltoniano reducido es simplemente

$$H_1 = \frac{|p_1|^2}{2m_1} + \frac{|\mu - p_1|^2}{2m_2} - \frac{Gm_1m_2}{|r|}.$$

Podemos hacer un cambio de variable para escribir p_1 en términos de la velocidad del centro de masas $v_{CM} = \mu/(m_1 + m_2)$,

$$p \equiv p_1 - m_1 \frac{\mu}{m_1 + m_2}.$$

Este cambio permite reescribir los términos cinéticos de H_1 como suma de la energía cinética del centro de masas y la energía cinética relativa del cuerpo 1,

$$H_1 = \frac{|p|^2}{2m} + \frac{|\mu|^2}{2M} - \frac{GmM}{|r|},$$

siendo $m = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ y $M = m_1 + m_2$ las masas reducida y totales. En estas coordenadas la forma simpléctica sigue estando en forma canónica $\omega_1 = dr \wedge dp$.

Una vez que hemos explotado la simetría de traslación podemos pasar a estudiar la simetría rotacional que tendrá el sistema por estar en un potencial central. Describiremos una generalización del método de *eliminación de los nodos* de Jacobi usado en mecánica celeste [Jacobi, 1843]. Recordemos que tenemos el espacio de fases $M = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$, así que podemos considerar el grupo de rotaciones $G = \text{SO}(3)$ actuando sobre M igual que en (3.8). Identificamos su álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ con \mathbb{R}^3 y el producto cruz, de forma que el momento angular $L = r \times p$ define una aplicación momento Ad^* -equivariante. La diferencial de L es

$$dL = \begin{pmatrix} 0 & p_z & -p_y & 0 & -r_z & r_y \\ -p_z & 0 & p_x & r_z & 0 & -r_x \\ p_y & -p_x & 0 & -r_y & r_x & 0 \end{pmatrix}$$

Como $r \neq 0$, la diferencial tendrá rango máximo salvo en el caso $p = 0$ o p paralelo a r , en cuyos casos la masa no orbitaría sino que se movería en línea recta. Es decir, $\ell = r \times p$ es un valor regular de L si y solo si $\ell \neq 0$. La acción es libre, ya que solo la identidad tiene puntos fijos, y propia, pues el grupo es compacto. Además, el Hamiltoniano H_1 es invariante por rotaciones porque solo depende de los módulos de p , r y μ .

Una vez sabemos que se cumplen las hipótesis podemos empezar con la reducción. La acción adjunta de $A \in \text{SO}(3)$ sobre $\mathfrak{so}(3)$ viene dada por la acción usual de las rotaciones sobre \mathbb{R}^3 , la multiplicación de una matriz por un vector columna [Abraham y Marsden, 1987, p. 272]. Si identificamos $\ell \in \mathfrak{g}^*$ como un vector fila y $\xi \in \mathfrak{g}$ como un vector columna, la acción co-adjunta es tal que

$$\text{Ad}_A^* \ell \cdot \xi = \ell \cdot \text{Ad}_{A^\top} \xi = \ell \cdot A^\top \xi = (A\ell^\top)^\top \cdot \xi,$$

es decir, la acción co-adjunta también viene dada por la multiplicación de la matriz A por un vector columna. El grupo de isotropía de ℓ serán las rotaciones que lo dejen invariante.

Así, identificamos $G_\ell \cong \mathbb{S}^1$ con las rotaciones en el plano perpendicular a ℓ .

El espacio de fases $L^{-1}(\ell)$ de un sistema con momento angular constante se puede describir con 3 coordenadas como sigue. La ecuación $r \times p = \ell$ tiene solución

$$p = \frac{\ell \times \hat{r}}{|r|} + (p \cdot \hat{r})\hat{r}.$$

El vector \hat{r} es un vector de módulo unidad en la dirección de r . Como \hat{r} es perpendicular a ℓ , se puede describir \hat{r} solo con un ángulo $\varphi \in \mathbb{S}^1$. Las otras dos variables que necesitaremos para describir $L^{-1}(\ell)$ son el módulo de r , $\rho = |r| \in \mathbb{R}^+$, y la proyección del momento sobre la dirección radial $\sigma = p \cdot \hat{r} \in \mathbb{R}$. Así, un elemento de seis coordenadas (r, p) pasa a ser descrito con tres:

$$(\rho, \varphi, \sigma) \in L^{-1}(\ell).$$

La acción del grupo de isotropía G_ℓ sobre $L^{-1}(\ell)$ actúa modificando la variable angular φ y dejando invariantes ρ y σ :

$$|A\hat{r}| = |\hat{r}| = \rho, \quad pA^\top \cdot A\hat{r} = p \cdot \hat{r} = \sigma.$$

Así, las órbitas que forman el cociente $L^{-1}(\ell)/G_\ell$ son las clases de elementos de $L^{-1}(\ell)$ con cualquier dirección \hat{r} . El espacio reducido $M_I = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ está por tanto descrito por solo dos variables, $\rho = |r|$ y $\sigma = p \cdot r/|r|$. La forma simpléctica reducida es

$$\omega_2 = d\rho \wedge d\sigma,$$

que convenientemente está en forma canónica. Para comprobarlo basta hacer el cambio de variable y tener en cuenta que $dr \wedge dr = 0$,

$$\begin{aligned} \pi^* \omega_2 &= d(\rho \circ \pi) \wedge d(\sigma \circ \pi) = d(|r|) \wedge d\left(\frac{p \cdot r}{|r|}\right) \\ &= \left(\frac{r \cdot dr}{|r|}\right) \wedge \left(\frac{r \cdot dp}{|r|} + \frac{dr \cdot p}{|r|} - \frac{r \cdot dr}{|r|^3}\right) = \frac{|r|^2}{|r|^2} dr \wedge dp = i^* \omega_1, \end{aligned}$$

donde $\pi(r, p) = (\rho, \sigma)$ es la aplicación cociente y se entiende que $r \cdot dr = \sum r_i dr_i$.

Teniendo en cuenta que $|\ell \times \hat{r}| = |\ell|$ y que $(\ell \times \hat{r}) \cdot \hat{r} = 0$, encontramos el nuevo Hamiltoniano reducido

$$H_2 = \frac{|\mu|^2}{2M} + \frac{\sigma^2}{2m} + \frac{|\ell|^2}{2m\rho^2} - \frac{GmM}{\rho}.$$

El término de potencial

$$V(\rho) = \frac{|\ell|^2}{2m\rho^2} - \frac{GmM}{\rho}$$

se convierte en el potencial efectivo, esto es, pasa a incluir el término $|\ell|^2/(2m\rho^2)$ que nos da la fuerza centrípeta. Las ecuaciones de Hamilton obtenidas con la forma simpléctica ω_2

resultan

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{|\ell|^2}{m\rho^3} - \frac{GmM}{\rho^2},$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\sigma}{m},$$

que podemos juntar en la conocida ecuación radial del problema de 2 cuerpos

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{|\ell|^2}{m^2\rho^3} - \frac{GM}{\rho^2}.$$

Resolviendo esta ecuación se encuentra que las órbitas de ambos cuerpos son elípticas (o hiperbólicas si tienen una energía muy alta) respecto al centro de masas. También se puede demostrar la segunda y tercera ley de Kepler, como se puede consultar en [[Singer, 2004](#), cap. 1].

Epílogo

Una invitación a las variedades de Poisson

Hemos visto en el capítulo 2 que toda forma simpléctica nos proporciona un corchete de Poisson con el que podemos estudiar la dinámica de un sistema Hamiltoniano. ¿Qué pasa si nos despojamos de la forma simpléctica y nos quedamos solo con el corchete de Poisson? A esta pregunta responde el estudio de las variedades de Poisson, que se pueden ver como una generalización de las variedades simplécticas: toda variedad simpléctica es de Poisson y toda variedad de Poisson es unión de *hojas* simplécticas.³⁷ La clave de la diferencia está en que el corchete de Poisson, a diferencia de la forma simpléctica, puede ser degenerado. Una introducción a las variedades de Poisson con multitud de ejemplos prácticos en física se puede encontrar en [Marsden y Ratiu, 2011], [Holm *et al.*, 2009] o [Novikov y Taimanov, 2006, cap. 13].

Aunque hemos dado un enfoque moderno al trabajo, el origen de la geometría simpléctica se puede datar precisamente en los corchetes de Lagrange y de Poisson,³⁸ publicados en una serie de artículos entre 1808 y 1810. Lagrange introdujo su corchete para estudiar la mecánica celeste³⁹ y durante los dos años siguientes, tanto Poisson como Lagrange ampliaron los resultados precedentes, dando forma a lo que hoy llamamos *corchete de Poisson*. La propiedad de Jacobi, sin embargo, no era conocida para ninguno de ellos y fue Jacobi el primero en darse cuenta de esta propiedad tan fundamental y característica de las variedades de Poisson.

Una variedad de Poisson es una variedad suave M dotada de un álgebra de Poisson sobre $C^\infty(M)$, esto es, una operación corchete que cumple las propiedades 2.15, enunciadas de nuevo a continuación:

- (i) Bilinealidad: $\{f, g\}$ es lineal sobre \mathbb{R} en f y g .
- (ii) Antisimetría: $\{f, g\} = -\{g, f\}$.
- (iii) Identidad de Jacobi: $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$.
- (iv) Regla de Leibniz: $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$.

Al despojarnos de la forma simpléctica debemos reformular el campo Hamiltoniano que nos da las ecuaciones dinámicas. Recordando (2.10) podemos definir el campo Ha-

³⁷ No entraremos a hablar de hojas y foliaciones.

³⁸ Sobre la historia de estos corchetes se puede consultar [Marle, 2009].

³⁹ Para un tratamiento moderno del corchete de Lagrange consultar [Abraham y Marsden, 1987, cap. 9].

miltoniano X_H asociado al Hamiltoniano H como aquel que cumple

$$\{f, H\} = X_H(f) \quad \text{para todo } f \in C^\infty(M) .$$

Podemos actualizar las proposiciones 2.11 y 2.16 para deducir que si F_t es el flujo de X_H entonces

1. *Conservación de la energía:* $H \circ F_t = H$.
2. *Ecuaciones del movimiento:* $\frac{d}{dt}(f \circ F_t) = \{f \circ F_t, H\} = \{f, H\} \circ F_t$.

Se dice que una aplicación F conserva la estructura de Poisson de dos variedades $(M, \{\cdot, \cdot\}_1)$, $(N, \{\cdot, \cdot\}_2)$ si

$$F^*(\{f, g\}_2) = \{F^*f, F^*g\}_1$$

para todo $f, g \in C^\infty(N)$. Veamos que el flujo Hamiltoniano conserva la estructura de Poisson. Por un lado, aplicando la bilinealidad, la ecuación 2 precedente y la identidad de Jacobi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{f \circ F_t, g \circ F_t\} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\{f \circ F_{t+h}, g \circ F_{t+h}\} - \{f \circ F_t, g \circ F_t\}) = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\{f \circ F_{t+h}, g \circ F_{t+h}\} - \{f \circ F_{t+h}, g \circ F_t\} &+ \{f \circ F_{t+h}, g \circ F_t\} - \{f \circ F_t, g \circ F_t\}) \\ &= \{\{f \circ F_t, H\}, g \circ F_t\} + \{f \circ F_t, \{g \circ F_t, H\}\} = \{\{f \circ F_t, g \circ F_t\}, H\} . \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} \circ F_t = \{\{f, g\} \circ F_t, H\} .$$

Como $\{f, g\} \circ F_t$ y $\{f \circ F_t, g \circ F_t\}$ satisfacen la misma ecuación diferencial y coinciden en $t = 0$, por la unicidad de la solución deben ser iguales. Concluimos que el flujo Hamiltoniano conserva la estructura de Poisson, igual que conservaba la forma simpléctica.

Un ejemplo de corchete de Poisson con multitud de aplicaciones se construye sobre el álgebra dual de Lie \mathfrak{g}^* de un grupo de Lie G , es el llamado corchete de Lie-Poisson, que tiene origen en los trabajos de Lie de 1890 [Marsden y Ratiu, 2011, p. 14, 432]. Para construirlo seguiremos los siguientes pasos. Primero identificamos de forma natural $T_\mu \mathfrak{g}^*$ con \mathfrak{g}^* y $T_\mu^* \mathfrak{g}^*$ con el álgebra de Lie \mathfrak{g} . Así, dada una función $F \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, $F : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{R}$, su diferencial dF es un campo de vectores de \mathfrak{g} . Ahora, \mathfrak{g} es un espacio vectorial de dimensión finita, con base $\{e_1, \dots, e_n\}$, sobre el que tenemos un corchete de Lie $[\cdot, \cdot]$. Definimos las constantes de estructura C_{ij}^k ,

$$[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k e_k ,$$

para $i, j = 1, \dots, n$. Así, podemos definir el \pm corchete de Lie-Poisson

$$\{F, G\}_\pm(\mu) = \pm \mu \cdot [dF, dG] = \pm \sum_{i,j,k=1}^n C_{ij}^k \mu_k \frac{\partial F}{\partial \mu_i} \frac{\partial G}{\partial \mu_j}(\mu) ,$$

siendo $\mu = \mu_k e^k$ un elemento cualquiera de \mathfrak{g}^* ($\{e^k\}$ es la base dual de $\{e_k\}$). Por serlo el corchete de Lie, el corchete de Lie-Poisson también será bilineal y antisimétrico. De la definición en coordenadas se deduce inmediatamente que cumple la regla de Leibniz. La identidad de Jacobi es un cálculo largo, aunque directo, que se puede hacer usando dos veces la expresión en coordenadas del corchete y teniendo en cuenta la antisimetría de las constantes de estructura $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$.

Veamos algunos ejemplos cómo aplicar los corchetes de Poisson para encapsular la dinámica de sistemas físicos.

Ejemplo 4.1. Estudiaremos las **ecuaciones de Euler** para el sólido rígido vistas en la introducción. Comenzamos con nuestro espacio de configuración habitual, el grupo de rotaciones en tres dimensiones $\text{SO}(3)$, que representa las posibles orientaciones del sólido rígido con el centro de masas fijo. Recordando el ejemplo 3.10, el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ se puede identificar con \mathbb{R}^3 con el producto cruz. Si tomamos la base usual de \mathbb{R}^3 , $\{e_1, e_2, e_3\}$, las constantes de estructura C_{ij}^k representan el producto vectorial y por ello

$$\sum_{i,j,k=1}^n C_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial \ell_i} \frac{\partial G}{\partial \ell_j} e_k = \nabla F \times \nabla G .$$

Si $\ell \in \mathfrak{g}^*$, concluimos que el $-$ corchete de Lie-Poisson del sólido rígido es

$$\{F, G\}_-(\ell) = - \sum_{i,j,k=1}^n C_{ij}^k \frac{\partial F}{\partial \ell_i} \frac{\partial G}{\partial \ell_j} \ell_k = -\ell \cdot (\nabla F \times \nabla G)$$

entendiendo el producto \cdot como la acción de un covector sobre un vector. El vector $\ell \in \mathfrak{so}^*(3)$ se interpreta como el momento angular.

Tomamos como Hamiltoniano la energía cinética de rotación del sólido rígido, que en términos del momento angular y los momentos principales de inercia I_1, I_2, I_3 es

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{\ell_1^2}{I_1} + \frac{\ell_2^2}{I_2} + \frac{\ell_3^2}{I_3} \right] .$$

La ecuación del movimiento de una magnitud F con este Hamiltoniano y el corchete de Lie-Poisson anterior es

$$\dot{F} = \{F, H\}_-(\ell) = -\ell \cdot (\nabla F \times \nabla H) = \nabla F \cdot (\ell \times \nabla H) ,$$

siendo el último paso una propiedad del producto escalar y vectorial. Si particularizamos $F = \ell$ para conocer la evolución del momento angular, obtenemos $\dot{\ell} = \ell \times \nabla H$:

$$\dot{\ell}_1 = \ell_2 \ell_3 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) ,$$

$$\dot{\ell}_2 = \ell_1 \ell_3 \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3} \right) ,$$

$$\dot{\ell}_3 = \ell_1 \ell_2 \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) ,$$

(suponiendo $I_1 > I_2 > I_3 > 0$). Estas ecuaciones son las mismas que las ecuaciones de Euler de la introducción para $M = 0$ (fuerza externa cero), teniendo en cuenta que el momento angular es la velocidad angular ω por el momento de inercia, $\ell_j = I_j \omega_j$.

Una de las ventajas de estudiar el sólido rígido directamente con corchetes de Poisson es que nos permite calcular fácilmente magnitudes conservadas, que nos sirven para estudiar la estabilidad del sistema. Tanto el Hamiltoniano como el módulo del momento angular $|\ell|^2 = \ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2$ son constantes del movimiento, así que la evolución del sistema está restringida a curvas que son la intersección de la esfera $|\ell|^2 = \text{cte}$ y el elipsoide $H = \text{cte}$.

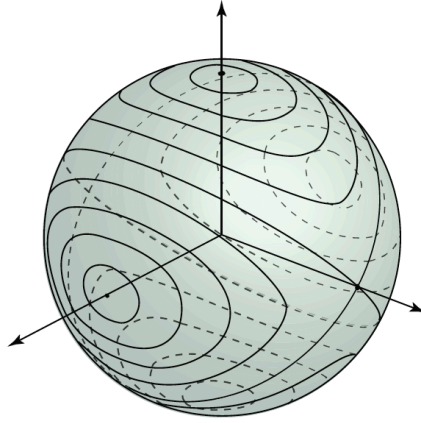


Figura 8: Flujo de un sólido rígido [Holm, 2011, p. 146]. Se puede observar que las rotaciones alrededor del eje intermedio son inestables mientras que respecto a los otros dos ejes son estables.

El sistema anterior se conoce como *peonza de Euler*. De forma similar, podemos analizar una peonza pesada, es decir, un sólido rígido con un punto fijo sometido a la fuerza gravitatoria con un centro de masas libre de moverse. Esta vez no solo tenemos una orientación marcada por el grupo $\text{SO}(3)$, sino también una posición del centro de masas, que podemos describir con el grupo \mathbb{R}^3 . El sistema completo se modela con el grupo de Lie $G = \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$ y la operación⁴⁰

$$(A, a) \cdot (B, b) = (AB, a + Ab) .$$

El álgebra de Lie es el producto de álgebras $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) \times \mathbb{R}^3$ con el corchete de Lie

$$[(\ell_1, x_1), (\ell_2, x_2)] = (\ell_1 \times \ell_2, \ell_1 \times x_2 - \ell_2 \times x_1) ,$$

para $\ell_1, \ell_2 \in \mathfrak{so}(3) = (\mathbb{R}^3, \times)$ y $x_1, x_2 \in (\mathbb{R}^3, +)$. Con esta estructura, el corchete de Lie-Poisson toma la forma

$$\{F, G\}_-(\ell, x) = -\ell \cdot (\nabla_\ell F \times \nabla_\ell G) - x \cdot (\nabla_\ell F \times \nabla_x G + \nabla_x F \times \nabla_\ell G) ,$$

⁴⁰ Un producto de grupos con esta estructura se llama producto semi-directo.

siendo ∇_ℓ y ∇_x los gradientes respecto las coordenadas ℓ y x respectivamente. Tomaremos como Hamiltoniano la energía cinética más la energía potencial gravitatoria

$$H = \frac{1}{2} \left[\frac{\ell_1^2}{I_1} + \frac{\ell_2^2}{I_2} + \frac{\ell_3^2}{I_3} \right] + mgrx_3 .$$

La constante g es la aceleración de la gravedad, m la masa, r la distancia del centro de masas al origen y x el vector que representa el movimiento del eje x_3 (dirección de la gravedad) visto desde el sistema de referencia en la peonza.⁴¹ Si suponemos $I_1 > I_2 > I_3 > 0$, las ecuaciones del movimiento para ℓ y x resultan

$$\begin{aligned} \dot{\ell}_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} \ell_2 \ell_3 - mglx_2 , & \dot{x}_1 &= \frac{\ell_3 x_2}{I_3} - \frac{\ell_2 x_3}{I_2} , \\ \dot{\ell}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3} \ell_1 \ell_3 - mglx_1 , & \dot{x}_2 &= \frac{\ell_1 x_3}{I_1} - \frac{\ell_3 x_1}{I_3} , \\ \dot{\ell}_3 &= \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} \ell_1 \ell_2 , & \dot{x}_3 &= \frac{\ell_2 x_1}{I_2} - \frac{\ell_1 x_2}{I_1} . \end{aligned}$$

Las ecuaciones del lado izquierdo para el momento angular son precisamente las ecuaciones de Euler cuando el momento que actúa sobre la peonza es la fuerza gravitatoria sobre el eje que une el centro de masas y el punto fijo.

Podríamos especificar las ecuaciones anteriores a diversas peonzas. Por ejemplo, la *peonza de Lagrange* se caracteriza por que los momentos principales de inercia I_1 e I_2 coinciden y por tanto $\dot{\ell}_3 = 0$. Un análisis de la estabilidad de la peonza de Lagrange se puede encontrar en [Marsden y Ratiu, 2011, p. 528], donde se deduce que si la velocidad es mayor que $2\sqrt{mgrI_1/I_3}$ entonces la peonza es estable. Otra peonza de gran interés en física es la *peonza de Kovalevskaya*,⁴² por ser otra de las escasas peonzas que resultan sistemas integrables (tiene 3 constantes del movimiento además de H). Este sistema se caracteriza por que sus momentos principales de inercia cumplen la relación $I_1 = I_2 = 2I_3$. \diamond

Ya para finalizar, mencionamos solamente algún ejemplo en la línea de las investigaciones que se realizan sobre variedades de Poisson: la descripción Hamiltoniana de sistemas de dimensión infinita. La primera descripción de un sistema de dimensión infinita en forma Hamiltoniana fue el fluido incompresible y vino de la mano de Vladimir Arnold en los años 60 usando geometría simpléctica. Durante los años 70 y 80 se lograron describir sistemas muy variados usando los corchetes de Lie-Poisson, como plasmas, el láser, las ecuaciones de Maxwell... Una gran variedad de ejemplos se pueden encontrar en [Holm, 2008; Holm, 2011; Marsden y Ratiu, 2011]. Y ahora sí, con esta invitación a conocer las variedades de Poisson de dimensión infinita, damos por finalizado este trabajo.

⁴¹ Es decir, si vemos la peonza rotar un ángulo $R(t) \in \text{SO}(3)$, el vector x es $R^{-1}(t)\hat{x}_3$.

⁴² Sofia Kovalevskaya (1850-1891) fue una matemática rusa que trabajó en ecuaciones diferenciales y mecánica, entre otros ámbitos. Su principal contribución a la mecánica fue el estudio de los sólidos rígidos [Kowalevski, 1889].

Referencias

Geometría diferencial y simpléctica

- Abraham, R., Marsden, J. E. y Ratiu, T. (1988). *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer-Verlag.
- da Silva, A. C. (2000). *Lectures on symplectic geometry*. Springer.
- Guillemin, V. y Pollack, A. (1974). *Differential topology*. Prentice-Hall.
- Lang, S. (1999). *Fundamentals of Differential Geometry*. Springer-Verlag.
- Lee, J. [Jeffrey]. (2009). *Manifolds and differential geometry*. American Mathematical Society.
- Lee, J. [John]. (2013). *Introduction to smooth manifolds*. Springer.
- McDuff, D. y Salamon, D. (2010). *Introduction to symplectic topology* (2. ed., reprint). Oxford: Oxford Univ. Press.
- Rudolph, G. y Schmidt, M. (2017). *Differential geometry and mathematical physics Part I: Manifolds, Lie Groups and Hamiltonian Systems*. Springer.

Geometría y mecánica clásica

- Abraham, R. y Marsden, J. E. (1987). *Foundations of mechanics*. Addison-Wesley.
- Arnold, V. I. (1989). *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer.
- Berndt, R. (2000). *An Introduction to Symplectic Geometry*. American Mathematical Society.
- Guillemin, V. y Sternberg, S. (1986). *Symplectic Techniques in Physics*. Cambridge University Press.
- Holm, D. D. (2008). *Geometric mechanics Part II: Rotating, Translating and Rolling*. Imperial College Press.
- Holm, D. D. (2011). *Geometric mechanics Part I: Dynamics and Symmetry*. Imperial College Press.
- Holm, D. D., Schmah, T. y Stoica, C. (2009). *Geometric mechanics and symmetry: from finite to infinite dimensions*. New York: Oxford University Press.
- José, J. V. y Saletan, E. J. (1998). *Classical Dynamics*.
- Marsden, J. E. y Ratiu, T. (2011). *Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems*. Springer.
- Novikov, S. y Taimanov, I. (2006). *Modern Geometric Structures and Fields*. American Mathematical Society.

Putra, M. (1993). *Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization*. Springer.

Singer, S. F. (2004). *Symmetry in mechanics: a gentle, modern introduction*. Birkhäuser.

Historia

Bruce, I. (2021). Some Mathematical Works of the 17th and 18th Centuries, including Newton's Principia, Euler's Mechanica, Introductio in Analysin, etc., translated mainly from Latin into English. Consultado desde <http://www.17centurymaths.com>

Dugas, R. (1988). *A history of mechanics* (Dover). New York: Dover Publications.

Gibbs, J. W. (1902). Elementary principles in statistical mechanics. doi:[10.5962/bhl.title.32624](https://doi.org/10.5962/bhl.title.32624)

Goldstine, H. H. (1980). *A History of the Calculus of Variations from the 17th through the 19th Century*. New York, NY: Springer New York. Consultado desde <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8106-8>

Hamilton, W. R. (1834). XV. On a general method in dynamics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 124, 247-308. doi:[10.1098/rstl.1834.0017](https://doi.org/10.1098/rstl.1834.0017)

Hamilton, W. R. (1835). VII. Second essay on a general method in dynamics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 125, 95-144. doi:[10.1098/rstl.1835.0009](https://doi.org/10.1098/rstl.1835.0009)

Jacobi, C. G. J. (1843). Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps. *Astronomische Nachrichten*, 20(6), 81-98. doi:<https://doi.org/10.1002/asna.18430200602>

Kowalevski, S. (1889). Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. *Acta Mathematica*, 12(0), 177-232. doi:[10.1007/BF02592182](https://doi.org/10.1007/BF02592182)

Lagrange, J.-L. (1997). *Analytical Mechanics*. Springer.

Marle, C.-M. (2009). The Inception of Symplectic Geometry: the Works of Lagrange and Poisson During the Years 1808–1810. *Letters in Mathematical Physics*, 90(1-3), 3-21. doi:[10.1007/s11005-009-0347-y](https://doi.org/10.1007/s11005-009-0347-y)

Newton, S. I. (1687). *The mathematical principles of natural philosophy* (First American Edition (1846)). Adee.

Noether, E. (1971). Invariant variation problems. *Transport Theory and Statistical Physics*, 1(3), 186-207. doi:[10.1080/00411457108231446](https://doi.org/10.1080/00411457108231446)

Scholz, E. (1999). Chapter 2 - The Concept of Manifold, 1850–1950. En I. James (Ed.), *History of Topology* (pp. 25-64). doi:<https://doi.org/10.1016/B978-044482375-5/50003-1>

Smith, G. (2008). Newton's Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. En E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2008). Metaphysics Research Lab, Stanford University. Consultado desde <https://plato.stanford.edu/archives/win2008/entries/newton-principia/>

- Stillwell, J. (2010). *Mathematics and his history*. Springer.
- Truesdell, C. (1976a). History of classical mechanics. Part I, to 1800. *Naturwissenschaften*, 63(2), 53-62. doi:[10.1007/BF00622403](https://doi.org/10.1007/BF00622403)
- Truesdell, C. (1976b). History of classical mechanics. Part II, the 19th and 20th Centuries. *Naturwissenschaften*, 63(3), 119-130. doi:[10.1007/BF00600486](https://doi.org/10.1007/BF00600486)

Otras lecturas

- Calvo, M. P. y Sanz-Serna, J. M. (2018). *Numerical Hamiltonian problems* (Dover edition). Mineola, New York: Dover Publications, Inc.
- Dirac, P. A. (1964). *Lectures on Quantum Mechanics*. Dover.
- Folland, G. B. (2013). *Quantum field theory: a tourist guide for mathematicians*. American Mathematical Soc.
- Halmos, R. P. (2013). *Lectures on Ergodic Theory*. Chelsea Publishing Company.
- Schwartz, D. M. (2013). *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press.
- Stillwell, J. (2008). *Naive Lie Theory*. Springer.
- Wheeler, J. A., Misner, C. W. y Thorne, K. S. (1973). *Gravitation*. W. H. Freeman y Company.

Enlaces de interés

- J. Osborne, T. (2017). Symplectic geometry and classical mechanics. Consultado desde <https://youtu.be/pXGTevGJ01o>
- Miller, J. (s.f.). Earliest Uses of Various Mathematical Symbols. Consultado desde <https://jeff560.tripod.com/mathsym.html>
- Susskind, L. (2011). Lectures on Classical Mechanics. Consultado desde <https://theoreticalminimum.com/courses/classical-mechanics/2011/fall>
- The Euler Archive. (s.f.). Consultado desde <http://eulerarchive.maa.org>

Índice

- Acción, 24, 29
 - adjunta, 61
 - co-adjunta, 61
 - Hamiltoniana, 62
 - libre, 67
 - propia, 67
 - simpléctica, 60
- Aplicación momento, 60
- Atlas, 11
- Campo
 - dependiente del tiempo, 41
 - tensorial, 33
 - vectorial, 25
- Canónica
 - 1-forma, 40
 - forma simpléctica, 40
- Carta, 11
 - componentes, 12
 - coordenadas, 12, 13
- Constantes del movimiento, 47
- Cotangente, 20
 - aplicación, 21, 63
- Covector, 20
- Curva integral, 29
- Darboux
 - coordenadas, 44
 - teorema, 43
- Derivada exterior, 34
- Difeomorfismo, 12, 14
- Diferencial, 14, 19
- Encaje, 21
- Equivariante, 62
- Espacio de fases, 54
- Euler, 6
 - ecuaciones, 80, 81
- Fibrado
 - cotangente, 21
 - tangente, 18
 - tensorial, 33
- Flujo, 30
 - global, 29
- Forma
 - de volumen, 51
 - k-forma, 33
- Fuerza de Lorentz, 56
- Generador infinitesimal
 - de un flujo, 29
 - de una acción, 60
- Grupo de isotropía, 66
- Hamilton, 7
 - ecuaciones, 7
 - ecuaciones, 45
- Hamiltoniano, 44
 - campo, 44, 45
 - sistema, 44
- Inmersión, 21
- Jacobi, 7
 - eliminación de los nodos, 74
 - teorema, 48
- Kepler, 72
- Kovalevskaya, 81
- Lagrange, 6, 77
 - peonza, 81
- Lie, 23
 - álgebra, 27
 - corchete, 26
 - derivada, 30, 34
 - grupo, 13, 23
 - homomorfismo de grupos, 23
 - homomorfismo de álgebras, 28
- Liouville
 - Teorema, 55
 - teorema, 52
 - volumen, 52
- Magnético, 55
- Momento, 5

- angular, 66, 74
- lineal, 65, 73
- Multiplicación interior, 34
- Métrica Riemanniana, 35
- Newton, 5
- Noether, 59
 - corriente, 60
 - teorema, 61
- Órbita, 66
- Poincaré
 - lema, 42
 - teorema de recurrencia, 53
- Poisson, 77
 - corchete, 46
- Potencial vector, 36, 56
- Producto exterior, 32
- Reducido
 - espacio, 67
- forma simpléctica, 69
- Hamiltoniano, 69
- Regular
 - valor, 22, 66
- Simpléctica
 - aplicación, 40
 - forma, 40
 - tensor, 38
 - variedad, 40
- Suave
 - variedad, 11
- Tangente
 - espacio, 14
 - vector, 14
- Tensor, 32
 - alternante, 32
 - producto tensorial, 32
- Teorema de Marsden-Weinstein, 68
- Velocidad de una curva, 18