

ERROR EN ESTADO ESTACIONARIO. TIPOS DE SISTEMAS. COEFICIENTES DE ERROR.

Objetivo: Analizar el error en estado estacionario para sistemas con realimentación unitaria y no unitaria. Como así también definir el tipo de sistema, es decir a que señal de referencia es capaz de seguir, con error nulo en régimen permanente.

Introducción.

Antes de emprender el análisis del error en estado estable, se debe clarificar cuál es el significado de error del sistema. En general el error se puede ver como una señal que rápidamente debe ser minimizada y si es posible reducida a cero.- Considérese un sistema de control SISO, como el indicado en la figura 1

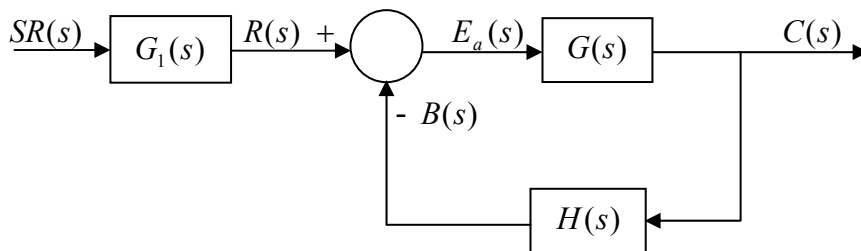


Fig. 1 Esquema de bloques para un control SISO

El error verdadero se define como la diferencia entre la señal de referencia $Sr(t)$ y la señal de salida $c(t)$, mientras que el error actuante, o señal activa, es la entrada al bloque $G(s)$, que se denominara en adelante $e_a(t)$, (si está en las unidades de $r(t)$) y $e'a(t)$ si la dimensión es la misma que tiene la señal de referencia $Sr(t)$.-

$E(s) = SR(s) - C(s)$ (*Error Verdadero*); la unidad es la misma que la de $Sr(t)$.-

$E_a(s) = R(s) - B(s) = R(s) - H(s)C(s) = SR(s)G_1(s) - H(s)C(s)$: (*Error Actuante, o Señal Activa*)

La dimensión de la $ea(t)$ es igual a la de $r(t)$, generalmente en [Volt], **pero también** suele expresarse en la misma unidad que la referencia, $e'a(t)$, por ejemplo: [°C, rad., rad/seg., m/seg.,...etc.], con su **valor equivalente** como se verá mas adelante.

La función de transferencia $H(s)$, se supondrá de acá en más que no tiene polos ni ceros en el origen y representa al sistema de **medición**, que generalmente realiza la medición de la variable controlada $c(t)$ y la convierte en otra variable, $b(t)$, más conveniente de procesar y transmitir como ser, tensión, corriente, presión, etc.

Por lo tanto $H(0) = K_H = cte$.-

Como se puede apreciar la **relación** entre la **dimensión** de la señal de salida, por ejemplo, °C, metros, rad/seg. etc., y la **señal de realimentación**, o la señal de entrada que es por lo general Volts, **estará dada por la ganancia estática de la función de transferencia del elemento de medición $H(s)$ o sea K_H** .

Por lo tanto deberá ser la **misma relación** entre la señal de referencia y la señal de entrada, o sea, la ganancia estática de $G_1(s)$ deberá ser también **K_H** .

Como la función de transferencia $G_1(s)$, del llamado selector de referencia, (usualmente una ganancia y siempre tiene una dimensión, por ejemplo [Volt/rad, Volt/°C, Volt/m etc.]), representa al elemento que convierte la señal de referencia $Sr(t)$ en una variable adecuada, la de entrada $r(t)$, para poder ser comparada con la medición de la salida, $b(t)$, por ende, $G_1(s) = K_{SR} = K_H$

Si se supone que $G_1(s) = K_{SR}$, la ganancia estática de la función de transferencia del sistema será: $M'(0) = \frac{C(0)}{SR(0)} = K_{SR} M(0) = \frac{K_{SR} G(0)}{1 + G(0)H(0)} = \frac{K_{SR}}{\frac{1}{G(0)} + H(0)}$

Como se puede ver solo si $G(0) \rightarrow \infty$, $K_{SR} = K_H$, en consecuencia si $G(s)$ no tiene polos en el origen y se hace $K_{SR} = K_H$ el sistema tendrá un error de estado estacionario a una entrada escalón, (el sistema será **Tipo cero**).-

Si el **error verdadero fuera siempre nulo** para una referencia escalón, K_{SR} deberá tener en el valor: $K_{SR} = \frac{1}{G(0)} + H(0) = \frac{1}{G(0)} + K_H$, pero ya **no se respetaría la**

relación comentada entre $Sr(t)$ y la de entrada $r(t)$.

Si $G(0) \rightarrow \infty$, (tiene un polo en el origen), y K_{SR} se hace igual a la ganancia estática de $H(s)$, en estos casos se tendrá dicho error nulo, sistema **Tipo uno**.-

Por lo tanto la señal de referencia sería:

$$Sr(t) = \frac{r(t)}{K_{SR}} \quad \text{que se empleará así:}$$

$$Sr(t) = \frac{r(t)}{K_H}$$

En consecuencia la señal del error verdadero será:

$$e(t) = \frac{r(t)}{K_{SR}} - c(t) \quad \text{que se tomará así:}$$

$$e(t) = \frac{r(t)}{K_H} - c(t)$$

Para el tiempo tendiendo a infinito será el error de estado estacionario en estudio.

Cuando $H(s)$ y $G_1(s)$ **valen 1**, se dice que el sistema es de **realimentación unitaria** y, para este caso los **dos errores** coinciden y además $Sr(t) = r(t) \Rightarrow SR(s) = R(s)$.-

Sistemas con realimentación unitaria

Estos sistemas tienen un diagrama en bloques como el indicado en la figura 2. En ellos la señal de referencia y la de entrada coinciden o sea: $SR(s) = R(s)$

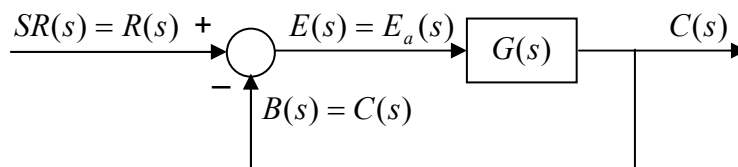


Fig. 2. Diagrama en bloques para un sistema de realimentación unitaria.

En general cualquier función transferencia puede ser escrita como:

$$G(s) = \frac{K'_n (s + z_1) \dots (s + z_m)}{s^n (s + p_1) \dots (s + p_k)} = \frac{K'_n \prod_{j=1}^m (s + z_j)}{s^n \prod_{i=1}^k (s + p_i)} \quad \text{donde } n + k \geq m$$

Para los sistemas de **realimentación unitaria** el “**tipo de sistema**” se define según sea el valor de “**n**” en la expresión anterior. Es decir según el número de integraciones puras en la cadena directa.

Ejemplo:

$$G(s) = \frac{(s+1)}{s^2(s^2+3s+4)} \quad \text{es de tipo 2}$$

El tipo de sistema indica que orden de señales de referencia puede “seguir” un sistema con error nulo en régimen estacionario. Aquí “el orden” se refiere a la potencia de s en la transformada de Laplace de la referencia. Para ver esto, investigaremos el error en estacionario para varios tipos de sistemas, debido a las señales de referencia: impulso $R(s)=1$, escalón $R(s)=1/s$, rampa $R(s)=1/s^2$ y parábola $R(s)=1/s^3$.

El error para el sistema de realimentación unitaria, se obtiene como:

$$E(s) = E_a(s) = R(s) - C(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

En régimen permanente, el error se obtiene aplicando el teorema del valor final, de la transformada de Laplace:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

1.- Entrada Impulso: $R(s)=1$

Sistema Tipo “0”

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_0 \prod (s + z_j)}{s^0 \prod (s + p_i)}} 1 = 0$$

Sistema tipo “1”

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_1 \prod (s + z_j)}{s^1 \prod (s + p_i)}} 1 = 0 \frac{1}{1 + \frac{K'_1 \prod z_j}{0 \prod p_i}} 1 = 0$$

Sistema tipo “2” y superiores

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_2 \prod (s + z_j)}{s^2 \prod (s + p_i)}} \frac{1}{s} = 0 \frac{1}{1 + \frac{K'_2 \prod z_j}{0 \prod p_i}} \frac{1}{s} = 0$$

Resumen: Un impulso puede ser seguido en régimen permanente, sin error, por todos los tipos de sistemas.

2.-Entrada escalón R(s)=1/s

Sistema Tipo "0"

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_0 \prod (s + z_j)}{s^0 \prod (s + p_i)}} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{1}{1 + K_0}$$

Sistemas Tipo "1" y mayores

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_1 \prod (s + z_j)}{s^1 \prod (s + p_i)}} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

Resumen: Un escalón puede ser seguido sin error, en régimen permanente, por los sistemas tipo uno y superiores.

3.- Entrada rampa R(s)=1/s^2

Sistema tipo "0"

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_0 \prod (s + z_j)}{s^0 \prod (s + p_i)}} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{1}{0} = \infty$$

Sistema Tipo "1"

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_1 \prod (s + z_j)}{s^1 \prod (s + p_i)}} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{1}{K_1}$$

Sistema Tipo "2" y superiores

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_2 \prod(s + z_j)}{s^2 \prod(s + p_i)}} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

Resumen: Una rampa puede ser seguida en régimen permanente por sistemas tipo “2” y superiores.

4.-Entrada parábola R(s)=1/s^3

Sistema Tipo “0”,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_0 \prod(s + z_j)}{s^0 \prod(s + p_i)}} \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} = \frac{1}{0} = \infty$$

Sistema Tipo “1”,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_1 \prod(s + z_j)}{s^1 \prod(s + p_i)}} \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} = \frac{1}{0} = \infty$$

Sistema tipo “2”,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_2 \prod(s + z_j)}{s^2 \prod(s + p_i)}} \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} = \frac{1}{K_2}$$

Sistema tipo “3” y superiores

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{K'_3 \prod(s + z_j)}{s^3 \prod(s + p_i)}} \frac{1}{s^3} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Resumen: Una entrada parábola puede ser seguida sin error en estacionario por los sistemas tipo tres y superiores.

Coefficientes de error.

Se definen los coeficientes de error como:

Coeficiente de error al escalón:

$c.e.e. = Kp \equiv K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$, como $E(s)$ y $C(s)$ tienen las mismas unidades, por tanto

K_0 es adimensional.-

Coeficiente de error a la rampa:

$c.e.r. = Kv \equiv K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)$, K_1 tiene las dimensiones de segundo⁻¹.-

Coeficiente de error a la parábola:

$c.e.p. = Ka \equiv K_2 = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$, K_2 tiene las dimensiones de segundo⁻².-

Luego los errores en estado estacionario para las señales de prueba unitarias son:

Para el escalón unitario en la entrada: $e(\infty) = \frac{1}{1 + K_0}$

Para la rampa unitaria en la entrada: $e(\infty) = \frac{1}{K_1}$

Para la parábola unitaria en la entrada: $e(\infty) = \frac{1}{K_2}$

Resumiendo los resultados obtenidos en un cuadro de valores, para las diferentes señales de referencia unitarias se tendrá, (recordar que $SR(s) = R(s)$):

Error en estado estacionario para sistemas de realimentación unitaria				
Tipo de Sistema	Impulso $[R(s)=1]$	Escalón unitario $[R(s) = 1/s]$	Rampa unitaria $[R(s) = 1/s^2]$	Parábola unitaria $[R(s) = 1/s^3]$
0	0	$\frac{1}{1 + K_0}$	∞	∞
1	0	0	$\frac{1}{K_1}$	∞
2	0	0	0	$\frac{1}{K_2}$

Ejemplo.

a) Dado el error calcular el rango de la ganancia del lazo (problema inverso).

Sea el sistema de realimentación unitaria, cuya planta tiene la transferencia:

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$$

Hallar el valor de **K** de manera que el error en estacionario sea $e(\infty) < 0.1$

Solución:

El sistema es tipo cero, de manera que el error es:

$$e(\infty) = \frac{1}{1+K_0}, \quad \text{donde} \quad K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$$

$$\frac{1}{1+K/2} = \frac{2}{2+K} \leq 0.1 \Rightarrow K \geq 18$$

b) Dado el sistema calcular los errores (Problema directo)

Considere el sistema con realimentación unitaria, cuya planta es:

$$G(s) = \frac{K(s+3.15)}{s(s+1.5)(s+0.5)}$$

El rango de K para la estabilidad del sistema es: $0 < K < 1.304$.-

Determine el error en estacionario cuando el sistema es excitado con diferentes tipos de señales de referencia, con la ganancia variando entre: $0 < K < 1.304$.-

- Entrada escalón $\Rightarrow e(\infty) = 0$: pues el sistema es tipo 1.
- Entrada rampa:

$$e(\infty) = \frac{1}{K_1} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{1}{K \frac{(3.15)}{(1.5)(0.5)}} = \frac{1}{4.2K}$$

En este caso $e(\infty)$, puede regularse, ajustando **K dentro del rango ya mencionado.**

- Entrada parábola $\Rightarrow e(\infty) = \infty$

Error en estacionario debido a perturbaciones.

Cuando sobre el sistema actúa una perturbación, además de la referencia, por ejemplo el sistema de control de posición de una antena como se indica la figura 3.

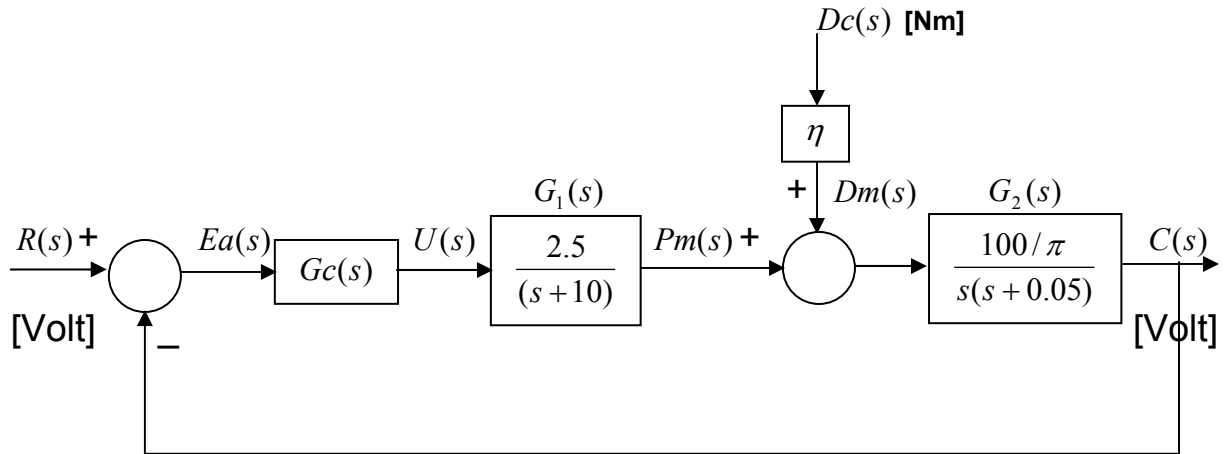


Figura 3. Sistema con perturbación

El error debido a la perturbación está dado por.

$$E(s) = -C(s) = \frac{-\eta G_2(s)}{1 + G_c(s) G_1(s) G_2(s)} Dc(s)$$

Si la perturbación del par perturbador en la carga es de forma escalón **unitario** el error en estacionario se determina mediante:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-\eta G_2(s)}{1 + G_c(s) G_1(s) G_2(s)} \frac{1}{s}$$

$$e(\infty) = \frac{-\eta}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_2(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) G_1(s)}$$

La perturbación es usualmente una carga que actúa sobre el sistema fuera del modelo normal. Nosotros debemos esperar que no haya error de posición, debido al polo del origen creado por el motor. **¡Perfecto!**

Ahora, supongamos que se levanta viento, dando lugar a la aparición de una cupla sobre la antena de **1Nm**, desplazando la antena de su set-point. Esta cupla se conoce como “**cupla de perturbación**”, la cual impactará sobre el error en estado estacionario. En este caso la cupla de perturbación reducida por la relación de engranajes $\eta = 0.10$, aparece sobre el eje del motor, generando una corriente de perturbación, que a su vez genera un par de reacción a la perturbación, en el eje del motor. Si el controlador es uno proporcional, $G_c(s) = Kc$, el diagrama en bloques acondicionado tiene el aspecto indicado en la figura 4:

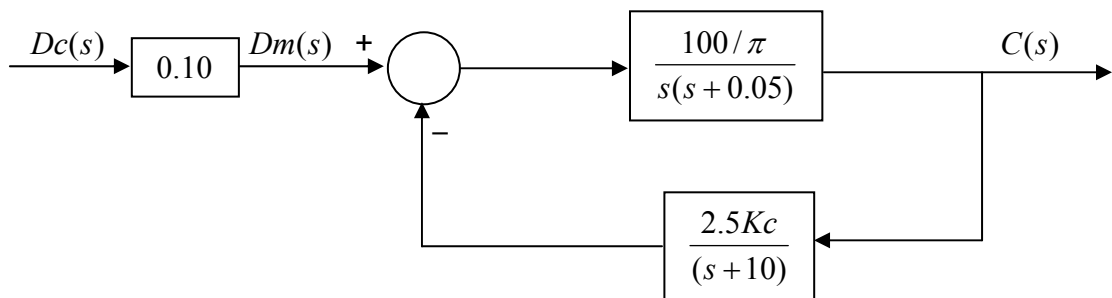


Figura 4. Diagrama en bloques del control de posición modificado.

Donde la perturbación $D_c(s)$ es un escalón de 1Nm.-

¿Cómo afecta esto al error en estacionario? Como se sabe el error en estacionario está dado por.

$$e(\infty) = e_R(\infty) + e_{D_c}(\infty) ;$$

El error debido a la entrada de referencia escalón será nulo pues el sistema es tipo 1. El error debido a la perturbación lo calculamos con la relación ya deducida:

$$e_{D_c}(\infty) = \frac{-\eta}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{G_2(s)} + \lim_{s \rightarrow 0} G_c(s) G_1(s)}$$

Para nuestro caso será:

$$e_{D_c}(\infty) = \frac{-0.1}{\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+0.05)}{100/\pi} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2.5 K_c}{(s+10)}} = \frac{-1}{2.5 K_c}$$

Por lo tanto:

$$e(\infty) = \frac{-0.40}{K_c}$$

El cálculo realizado muestra que aumentando la ganancia del controlador, K_c se disminuye el efecto de la perturbación sobre nuestro sistema de control automático.

Sistemas con realimentación no unitaria

a) error verdadero.

El caso general se indica en la figura 5, llamaremos $G(s) = G_c(s) G_p(s)$, donde $G_c(s)$ y $G_p(s)$ son las funciones de transferencia del controlador y de la planta.-

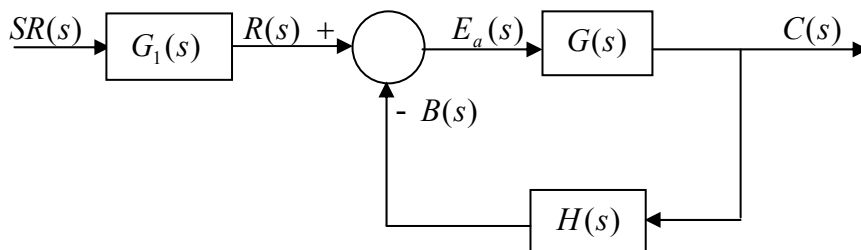


Figura 5. Sistema SISO con realimentación no unitaria

Se considerará en este estudio en principio que la ganancia del selector de referencia tiene un valor cualquiera, como se dijo por anteriormente es igual a la ganancia estática de la función de transferencia del camino de realimentación.-
El error verdadero es:

$$E(s) = SR(s) - C(s) = SR(s) - G_1(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} SR(s)$$

$$E(s) = \left[\frac{1 + G(s)[H(s) - G_1(s)]}{1 + G(s)H(s)} \right] SR(s)$$

El cálculo efectuado con el error verdadero, es similar a considerar una adecuación del diagrama en bloques indicado en la figura 5, tal como se muestra en la figura 6.

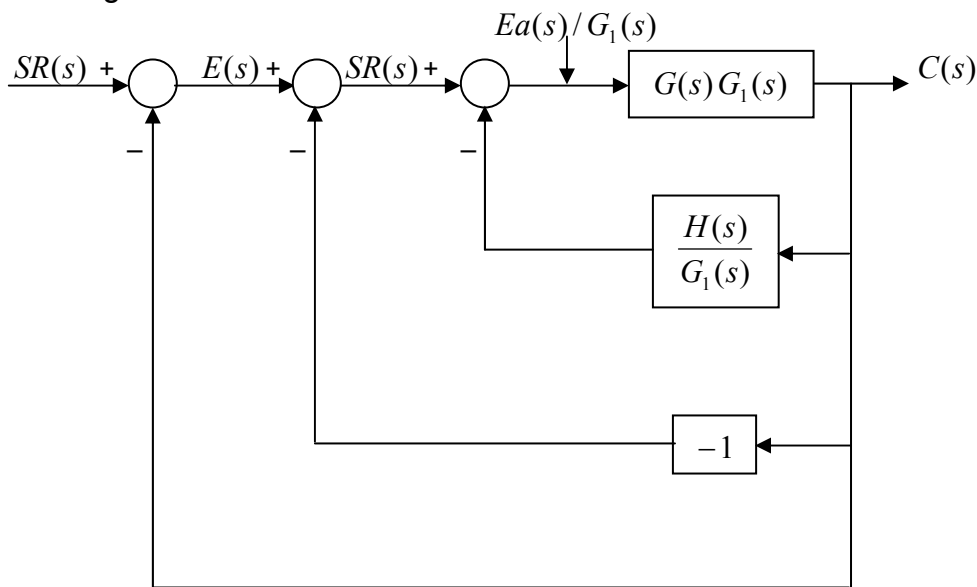


Figura 6. Diagrama en bloque equivalente.

Reduciendo el diagrama en bloque equivalente precedente, obtenemos el indicado en la figura 7.

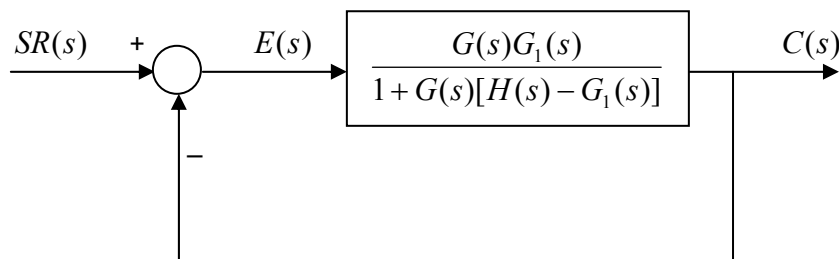


Figura 7. Diagrama en bloques reducido de realimentación unitaria.

Calculando el error verdadero, en el diagrama de la figura 7, obtenemos el mismo resultado que el ya obtenido precedentemente.

$$E(s) = \left[\frac{1 + G(s)[H(s) - G_1(s)]}{1 + G(s)H(s)} \right] SR(s)$$

Al sistema de realimentación unitaria de la figura 7 le aplicamos todo lo ya dicho respecto al error verdadero en régimen estacionario, tipo de sistemas y coeficientes de error de los sistemas con realimentación unitaria.

El diagrama se puede simplificar así:

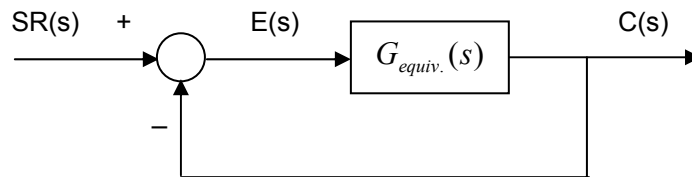


Figura 7 a.

Donde la $G_{equiv.}(s)$ es:

$$G_{equiv.}(s) = \frac{G_1(s)G(s)}{1 + G(s)[H(s) - G_1(s)]}$$

si $G_1(s) = K_H$:

$$G_{equiv.}(s) = \frac{K_H G(s)}{1 + G(s)[H(s) - K_H]}$$

- Como se puede apreciar si $H(s) = Cte = K_H$, la función equivalente del camino directo del sistema con realimentación unitaria será $G_{equiv.}(s) = K_H G(s)$, por lo tanto el Tipo del sistema coincidirá siempre con los polos en el origen que tenga la función de transferencia real del camino directo $G(s)$. –
- Si $H(s)$ es una función con polos y ceros, (recordar que no pueden estar el origen como se ha supuesto), el Tipo del sistema quedará determinado por los integradores de la función $G(s)$, solo en los casos que la misma tenga uno o ningún polo en el origen.
- Si $G(s)$ tiene dos o más integradores, el Tipo del sistema será el indicado por los integradores de la función $G(s)$, solamente en el caso que la función de transferencia $H(s)$ sea una constante, $H(s) = Cte = K_H$. –

Comentario: Considerar como error del sistema al “error verdadero”, significa tomar como salida del mismo la variable **controlada verdadera**, es decir **C(s)**, la cual se compara con la **señal de referencia SR(s)**.

Otra forma de calcular el error verdadero es con los coeficientes de los polinomios de la función de transferencia del sistema $M'(s)$. –

Se seguirá suponiendo que: $\lim_{s \rightarrow 0} H(s) = K_H$ y además que: $Sr(t) = \frac{r(t)}{K_{SR}}$ con: $K_{SR} = K_H$

El error verdadero será:

$$e(t) = \frac{r(t)}{K_H} - c(t)$$

Aplicando el teorema del valor final se tendrá:

$$e_{EE} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [s E(s)]$$

$[sE(s)]$ debe tener todos sus polos en el semiplano izquierdo del plano s , esto equivale a decir que el sistema sea estable. Transformado por Laplace la primera ecuación:

$$E(s) = \frac{R(s)}{K_H} - C(s) = \frac{R(s)}{K_H} - M(s)R(s) = \frac{1}{K_H} [1 - K_H M(s)] R(s)$$

Como $K_H M(s) = M'(s)$, se tendrá:

$$e_{EE} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{K_H} [1 - M'(s)] R(s) s$$

Si, $Sr(t) = \mu_s(t) = \frac{r(t)}{K_H} \Rightarrow r(t) = K_H \mu_s(t) \Rightarrow r(t) = R \mu_s(t) \Rightarrow R = K_H$.

Como $R(s) = \frac{R}{s} = \frac{K_H}{s}$, se tendrá:

$$e_{EE} \text{ (referencia escalón unitario)} = \lim_{s \rightarrow 0} (1 - M'(s))$$

Si, $Sr(t) = t\mu_s(t) = \frac{r(t)}{K_H} \Rightarrow r(t) = K_H t\mu_s(t) \Rightarrow r(t) = R t \mu_s(t) \Rightarrow R = K_H$.

Como $R(s) = \frac{R}{s^2} = \frac{K_H}{s^2}$, se tendrá:

$$e_{EE} \text{ (referencia rampa unitaria)} = \lim_{s \rightarrow 0} (1 - M'(s)) \frac{1}{s}$$

Si, $Sr(t) = \frac{1}{2} t^2 \mu_s(t) = \frac{r(t)}{K_H} \Rightarrow r(t) = \frac{1}{2} K_H t^2 \mu_s(t) \Rightarrow r(t) = \frac{R}{2} t^2 \mu_s(t) \Rightarrow R = K_H$.

Como $R(s) = \frac{R}{s^3} = \frac{K_H}{s^3}$, se tendrá:

$$e_{EE} \text{ (referencia parabólica)} = \lim_{s \rightarrow 0} (1 - M'(s)) \frac{1}{s^2}$$

Se supondrá que la función de transferencia del sistema $M(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$, no tiene polos en el origen y es de la forma:

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}; \quad \text{donde: } n > m \text{ y } \alpha_0 \neq 0$$

Por lo tanto $M'(s)$ será:

$$M'(s) = \frac{C(s)}{SR(s)} = \frac{K_H b_m s^m + K_H b_{m-1} s^{m-1} + \dots + K_H b_2 s^2 + K_H b_1 s + K_H b_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Si llamamos:

$$K_H b_0 = b'_0; K_H b_1 = b'_1; K_H b_2 = b'_2 \text{ etc.} -$$

$$M'(s) = \frac{C(s)}{SR(s)} = \frac{b'_m s^m + b'_{m-1} s^{m-1} + \dots + b'_2 s^2 + b'_1 s + b'_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Por ende se tendrá:

$$[1 - M'(s)] = \frac{s^n + \dots + (\alpha_2 - b'_2) s^2 + (\alpha_1 - b'_1) s + (\alpha_0 - b'_0)}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

Reemplazando en las tres expresiones del error verdadero de estado estacionario, para las tres señales de referencia unitarias se llega al valor de los mismos, en función de los coeficientes de la función de transferencia $M'(s)$ y se resumen de la tabla siguiente:

Si la magnitud de los escalones o pendientes de las rampas de las señales de referencias, **no son unitarias**, los errores aquí indicados se deberán **multiplicar** por el valor de esas magnitudes.

$\begin{array}{c} M'(s) \rightarrow \\ \downarrow Sr(t) \end{array}$		$\alpha_0 \neq b'_0$	$\alpha_0 = b'_0$ $\alpha_1 \neq b'_1$	$\alpha_0 = b'_0$ $\alpha_1 = b'_1$ $\alpha_2 \neq b'_2$	$\alpha_0 = b'_0$ $\alpha_1 = b'_1$ $\alpha_2 = b'_2$
$Sr(t) = \mu_s(t)$		$\frac{\alpha_0 - b'_0}{\alpha_0}$	0	0	0
$Sr(t) = t\mu_s(t)$		∞	$\frac{\alpha_1 - b'_1}{\alpha_0}$	0	0
$Sr(t) = \frac{1}{2}t^2\mu_s(t)$		∞	∞	$\frac{\alpha_2 - b'_2}{\alpha_0}$	0

b) Error actuante.

El error actuante se puede determinar en la **misma dimensión o unidad que sale del comparador**, generalmente en Volts, o en la **misma unidad de la señal de referencia o de la de salida**, por ejemplo °C, rad/seg., metros, radianes, etc. Como se sabe:

$$Ea(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)}; \text{ (en Volts generalmente), por lo tanto:}$$

$$Ea(s) = \frac{1}{1 + L(s)} K_H SR(s); \text{ aplicando el teorema del valor final:}$$

$$ea(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} ea(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Ea(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_H}{1 + L(s)} SR(s) s$$

$$\text{Si } Sr(t) = \mu_s(t) \Rightarrow SR(s) = \frac{1}{s}$$

Por lo tanto se tendrá:

$$ea(\infty)(\text{escalón de referencia}) = \frac{K_H}{1 + L(0)}; \text{ Generalmente en Volts. -}$$

$$\text{Si } Sr(t) = t\mu_s(t) \Rightarrow SR(s) = \frac{1}{s^2}$$

Por ende el error actuante será:

$$ea(\infty)(\text{rampa de referencia}) = \frac{K_H}{\lim_{s \rightarrow 0} s L(s)}; \text{ Generalmente en Volts. -}$$

$$\text{Si } Sr(t) = \frac{1}{2}t^2\mu_s(t) \Rightarrow SR(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$ea(\infty)(\text{parábola de referencia}) = \frac{K_H}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 L(s)}; \text{ Generalmente en Volts. -}$$

Para considerar el error actuante, **en la misma unidad que SR(s)**, como ya se menciona, el diagrama en bloques de la figura 5, conviene dibujarlo como indica la figura 8.

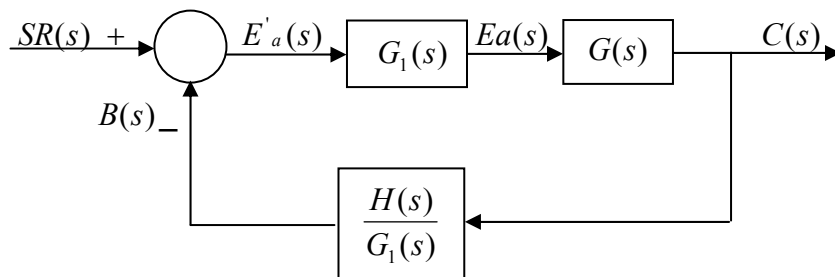


Figura 8. Indicación del error actuante.

Llamaremos $e'_a(t)$ al error actuante en la misma dimensión que la $Sr(t)$.-

Como se puede apreciar la relación entre $ea(t)$ y $e'_a(t)$, si $G_1(s) = K_{SR} = K_H$ será.

$$e'a(t) = \frac{ea(t)}{K_H}$$

El error actuante está dado por:

$$E'_a(s) = SR(s) - \frac{H(s)}{G_1(s)} C(s)$$

Reemplazando la salida $C(s)$ en función de $SR(s)$ obtenemos, la expresión para el cálculo del error actuante, en las mismas unidades que la señal de referencia:

$$E'_a(s) = \left[\frac{1}{1 + G(s)H(s)} \right] SR(s)$$

Este error actuante, podría considerarse como el que se obtendría de un sistema de realimentación unitaria como el indicado en la figura 9.

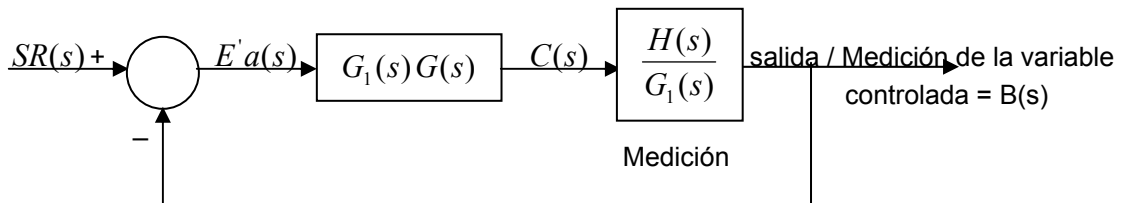


Fig. 9. Sistema equivalente de realimentación unitaria mostrando $E'_a(s)$.

Al sistema representado por el diagrama en bloques de la figura 9, se le puede aplicar todo lo dicho respecto de los sistemas de realimentación unitaria, en cuanto al cálculo del error, tipos de sistemas y coeficientes de error.-

Llamando: $G'(s) = G_1(s)G(s) = K_H G(s)$ y $H'(s) = H(s)/G_1(s) = H(s)/K_H$,

$G'(s)H'(s) = G(s)H(s)$, la función del lazo es igual a la real.-

La ganancia estática de la función de transferencia $H'(s)$ es siempre uno $H'(0) = 1$.

Recordar que el error actuante está en la **misma unidad** que la señal de referencia.-

Comentario: Considerar como error del sistema al “**error actuante**”, significa tomar como salida del sistema la **medición de la variable controlada verdadera**, es decir

$B(s) = \frac{H(s)}{G_1(s)} C(s)$, la cual se compara con la **señal de referencia** $SR(s)$.

Conclusión:

Desde el punto de vista teórico cualquiera de los dos errores definidos como “**verdadero**” o “**actuante**”, pueden considerarse como correctos. No obstante hay que tener bien presente cuáles son las variables que se toman como “**salida**” del sistema, ya que si se pierde de vista este concepto pueden presentarse dificultades en la interpretación del “error en estado estacionario”, tipos de sistema y coeficientes de error, como así también sobre la interpretación y análisis de los resultados obtenidos con sistemas **reales** en la práctica.

Análisis del error verdadero y actuante para algunos sistemas reales.

Ejemplo1. Control de posición angular con motor de CC.

Sea un sistema de control de posición basado en un motor de CC, como el indicado en la figura 10.- En la misma se ha hecho $K_{SR} = Kp_1$ y $H(s) = K_H = Kp_2$.

Se tomarán tres valores de Kp_1 , menor, igual y mayor que $Kp_2 = K_H$.

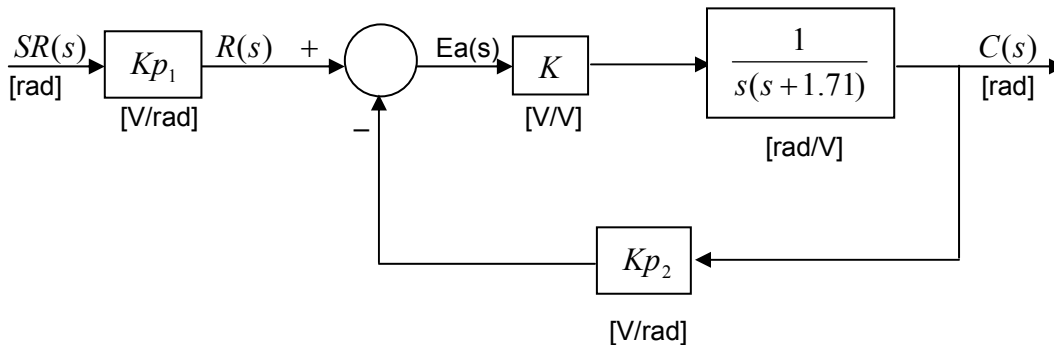


Figura10. Diagrama en bloques del control de posición.

A los fines de determinar el comportamiento en estacionario, adoptaremos los siguientes valores para los parámetros:

K :Ganancia del Amplificador : $10[V/V]$

$Kp_1 = K_{SR} = G_1(s) = \text{Cte del potenciómetro de entrada}$: tres valores: 0.5; 0.8; y 1.0 $[V/rad]$

$K_H = H(0) = Kp_2$: Cte. del potenciómetro de salida : 0.80 $[V/rad]$

1 a) Error verdadero.

En este caso el diagrama en bloques equivalente será el indicado en la figura 11, donde se explicitan el error verdadero y la salida verdadera.

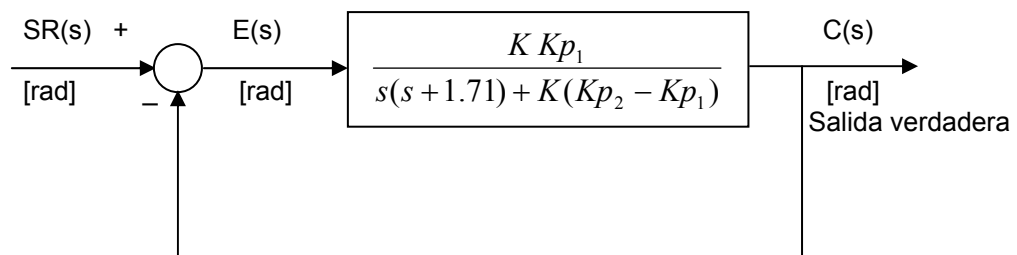


Fig. 11. Diagrama equivalente de realimentación unitaria con la salida verdadera.

De acuerdo a la figura 11, el sistema desde la salida verdadera a la señal de referencia, es de "**Tipo cero**" si $Kp_1 \neq Kp_2$ y **Tipo uno** si $Kp_1 = Kp_2$ pues $G(0) = \infty$, esto último **sería lo correcto** y está de acuerdo con lo ya comentado anteriormente.- Con lo cual podemos afirmar que el sistema tiene error verdadero constante al escalón unitario en la señal de referencia, e infinito a la unitaria si $Kp_1 \neq Kp_2$.

En cambio si $Kp_1 = Kp_2$ el sistema sería **Tipo uno** y el error verdadero al escalón sería nulo, situación mas real ya que $G(s)$ tiene un polo en el origen.-

Los coeficientes de error son respectivamente, para los tres valores de Kp_1 :

$$c.e.escalón. = Ko = \lim_{s \rightarrow 0} G_{equiv.}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{Kp_1}{Kp_2 - Kp_1} = 1,67 ; \infty \text{ y } -5$$

$$c.e.rampa. = K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{equiv.}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = 0 ; 4.67836 \text{ y } 0$$

Luego los “errores verdaderos” en estacionario serian:

$$e(\infty)_{escalón} = \frac{1}{1 + Ko} = 0,375 ; 0 \text{ y } -0.25$$

$$e(\infty)_{rampa} = \frac{1}{K_1} = \infty ; 0.21375 \text{ e } \infty$$

Conclusión:

Aplicando un escalón de amplitud 1rad. en la señal de referencia, la salida (posición verdadera del eje del motor) en estado estacionario termina en un escalón de amplitud igual a 0.625 rad, (si $Kp_1 < Kp_2$, $Kp_1 = 0.50$), por ende con un error verdadero de 0.375 rad.-.

Aplicando una rampa unitaria en la señal de referencia, la salida (posición verdadera del eje del motor) en estado estacionario, termina en una rampa de menor pendiente, (si $Kp_1 \neq Kp_2$), por eso el error verdadero es infinito.

Si $Kp_1 = Kp_2$ el error al escalón unitario en $Sr(t)$ será nulo y a la rampa unitaria la pendiente es igual y el error será finito, sistema será tipo uno como sabemos-

Si $Kp_1 > Kp_2$ el error al escalón unitario en $Sr(t)$ será negativo, por lo tanto la posición final será mayor que la deseada. A una rampa el mismo será infinito.

El sistema de control considerado, tomando como salida verdadera a la variable $C(t)$, se comporta como de tipo cero, (si $Kp_1 \neq Kp_2$), y puede decirse que el mismo: sigue a un escalón con error verdadero constante y no sigue a una rampa.-

Si $Kp_1 = Kp_2$, el sistema se comporta como de tipo uno y puede decirse que el mismo sigue a un escalón con error verdadero nulo y tiene un error finito para una señal de referencia rampa unitaria.-

Si $Kp_1 > Kp_2$ el error será negativo para el escalón de referencia, la salida será mayor que la deseada, y además no sigue a una rampa.-

Como en este sistema tiene la $G(s)$ con un polo en el origen, ya se dijo que si la $H(s) = Cte.$, y la ganancia del selector de referencia es: $Kp_1 = K_H = 0.8$, el error verdadero al escalón de regencia será nulo pues el sistema sería de Tipo uno.-

Empleando Simulink puede obtenerse el error verdadero en función del tiempo, y en especial del referido error para comportamiento en régimen estacionario. En las graficas de la figura 12 se puede ver todo lo comentado para los tres valores de la ganancia del selector de referencia, Kp_1 .

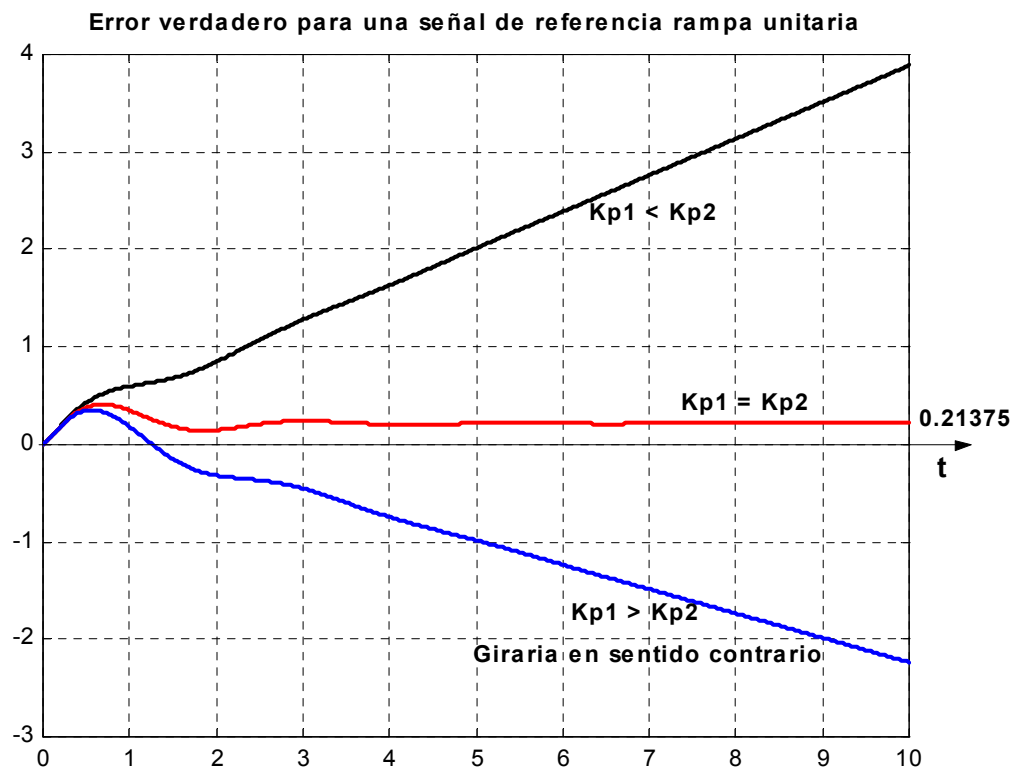
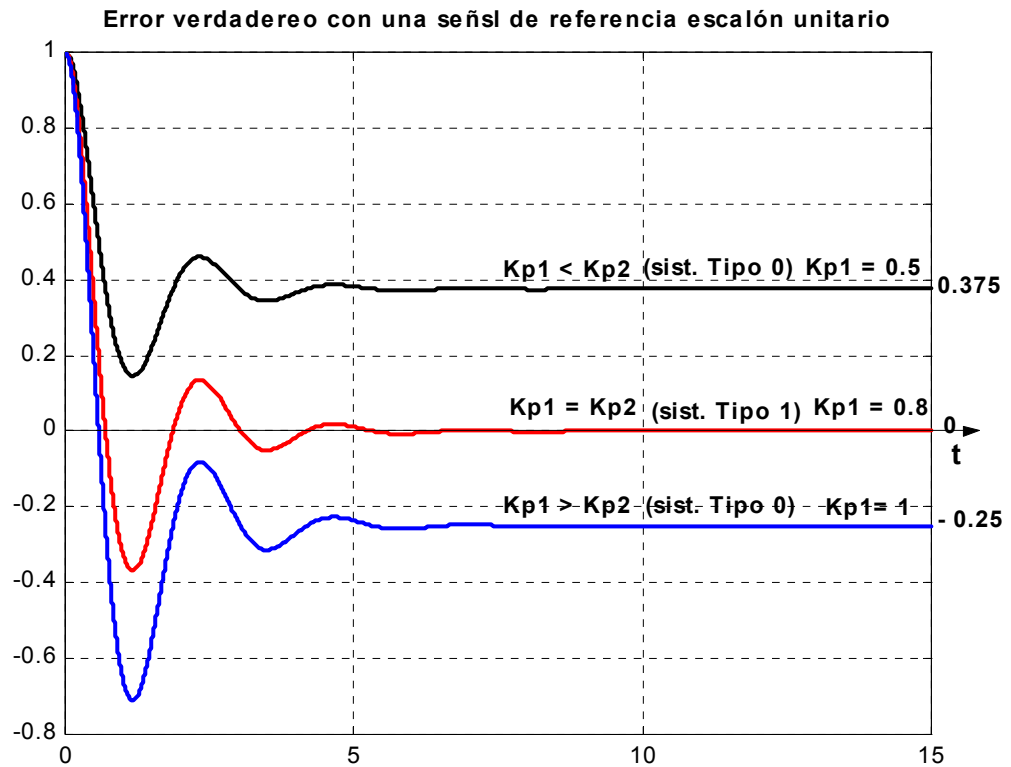


Fig. 12. Error verdadero para $S_r(t)$ escalón y rampa unitarios.

1 b) Error actuante.

Cuando consideramos el error actuante, **en las mismas unidades que SR(s)**, la salida del sistema es la señal de salida medida B(s), y la entrada la señal de referencia SR(s), como se indica en el diagrama en bloques de la figura 13. Como $G_1(s) = Kp_1$ y $H(s) = Kp_2$, se tendrá el diagrama de bloques siguiente:

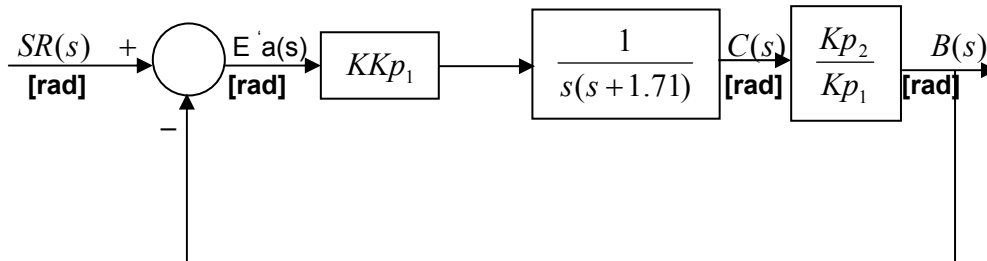


Figura 13. Diagrama en bloques indicando como salida la medición.

De acuerdo a la figura 13 desde la “salida” medida en radianes, a la entrada de referencia, el “sistema” es de **“Tipo 1”**, **siempre** con lo cual podemos afirmar que en estas condiciones el sistema tendrá **error actuante nulo al escalón y constante a la rampa**.

Además si $Kp_1 = Kp_2$, $c(t)\{rad\} = b(t)\{rad\}$, **serian iguales**, y no proporcionales.-

Los coeficientes de error que **son independientes del valor de Kp_1** y serán:

$$c.e.e.(escalón) = K_o = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \frac{1}{0} = \infty$$

$$c.e.r.(rampa) = K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \frac{KKp_2}{1.71} = 4.68$$

$$c.e.p.(parábola) = K_2 = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s) = 0$$

Los errores actuantes en estado estacionario también serán **independientes del valor de Kp_1** y sus valores son:

$$e'a(\infty)(escalón) = \frac{1}{1 + K_o} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

$$e'a(\infty)(rampa) = \frac{1}{K_1} = \frac{1}{4.68} = 0.21(rad.)$$

$$e'a(\infty)(parábola) = \frac{1}{K_2} = \frac{1}{0} = \infty$$

Conclusión.

Considerando como “salida del sistema a la medición”, puede decirse que el mismo se comporta como **de tipo uno** y, que en este caso el mismo sigue a un escalón con error actuante nulo, y a una rampa con error actuante constante y no sigue a una parábola.

En forma gráfica (empleando Simulink), se obtiene la respuesta temporal para entrada escalón y rampa, donde se puede observar el error actuante en función del tiempo y, en especial para régimen estacionario. Ver figura 13.

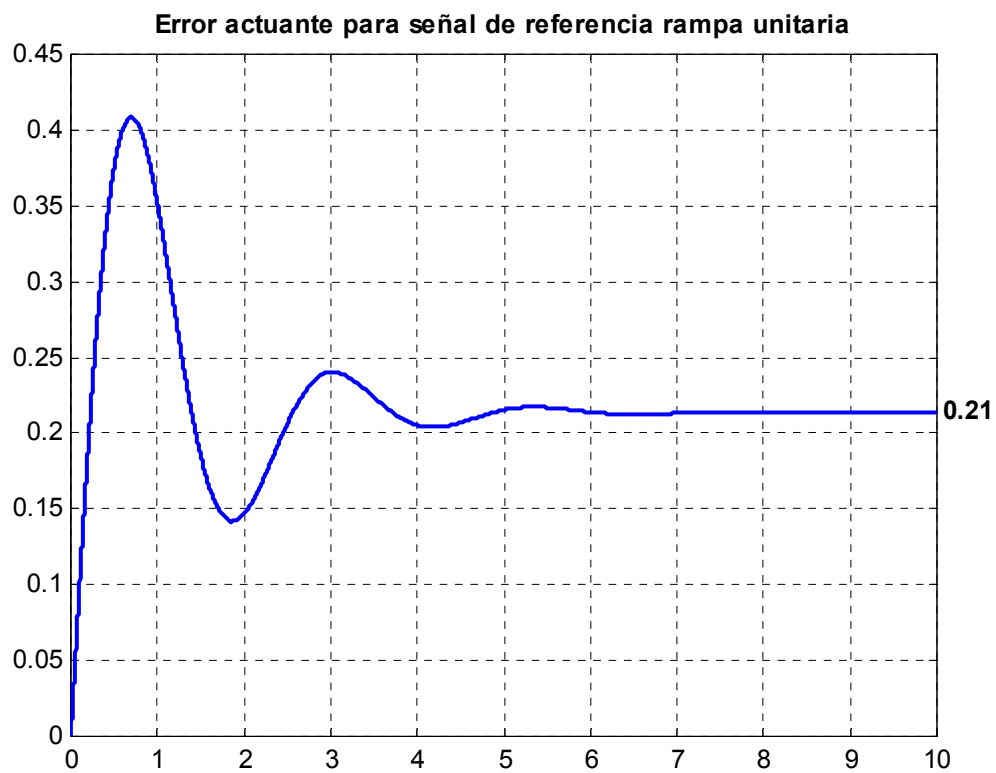
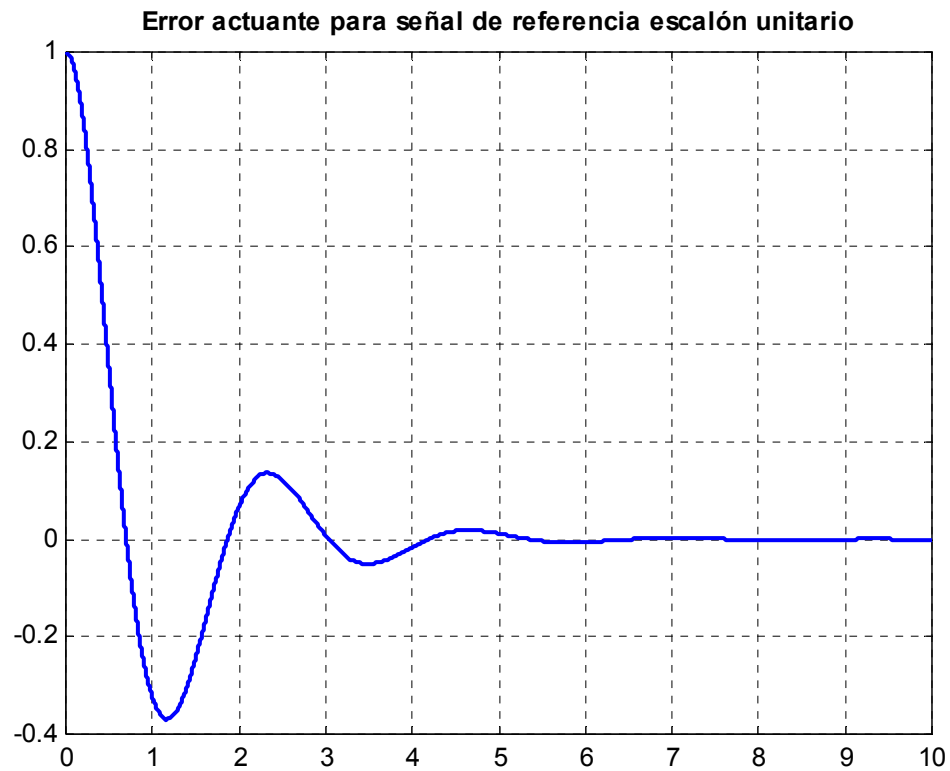


Figura 14. Error actuante al escalón y rampa unitarios.

Ejemplo 2. Control de temperatura.

Sea el sistema de control de temperatura indicado en la figura 15.

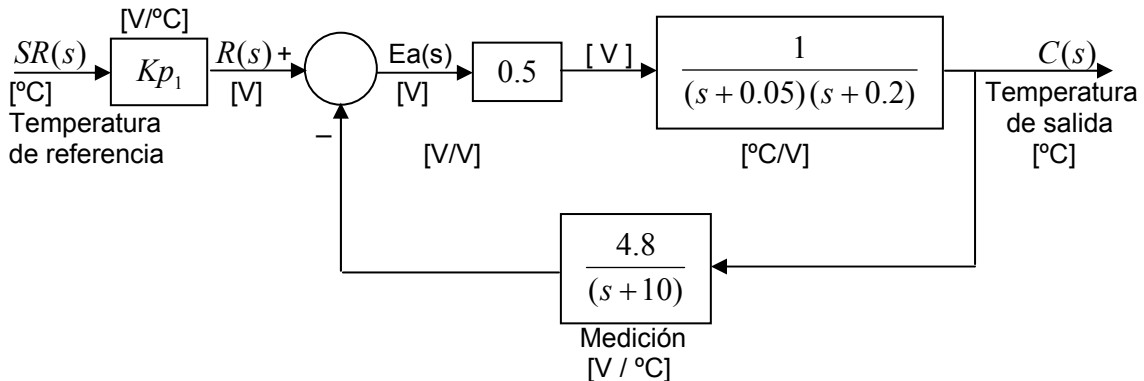


Figura 15. Control de temperatura

Se tomarán tres valores de la ganancia del selector de referencia Kp_1 , uno menor, igual y el otro mayor a la $H(0)$.-

$Kp_1 = 0.4 V [V/°C]$; $Kp_1 = 0.48 V [V/°C]$ y $Kp_1 = 0.50 V [V/°C]$ con $Kp_2 = 0.48 V [V/°C]$.

Para los dos valores primeros el sistema será **Tipo cero**, lo **correcto** sería tomar $Kp_1 = 0.48 V [V/°C]$, **como ya se mencionó al principio**.-

Si $Kp_1 = 0.5 V [V/°C] \neq K_H$, **el error verdadero al escalón de referencia sería nulo, pues el "sistema" sería Tipo uno:** $Kp_1 = 1/G(0) + H(0) = 0.02 + 0.48 = 0.50$..

2 a) Error verdadero.

En este caso el diagrama de bloques conviene expresarlo como indica la figura 16, donde se explicitan el error verdadero y la salida verdadera, en el diagrama equivalente con realimentación unitaria:

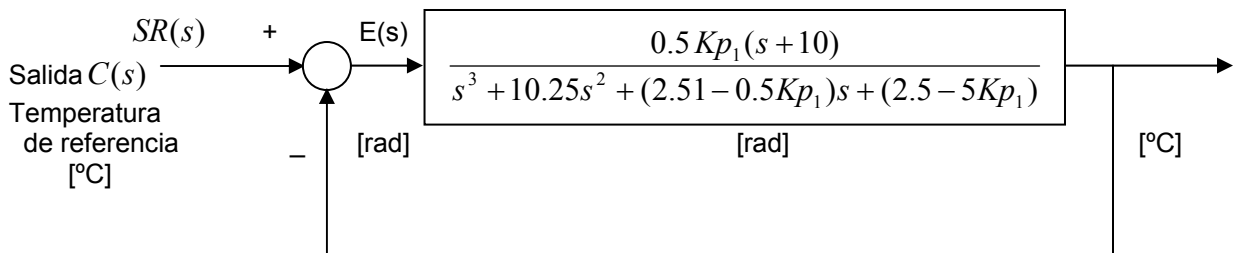


Figura 16. Diagrama equivalente de realimentación unitaria con la salida verdadera.

Tomando como salida la variable verdadera $c(t)$ y como entrada la de referencia $Sr(t)$, en $°C$, el sistema resulta ser de "**Tipo cero**" si $Kp_1 = 0.40$, o para cualquier valor distinto de 0.50 , es decir que seguirá con error verdadero constante a una señal de referencia escalón y no seguirá a una entrada rampa.

Si se hace $Kp_1 = 0.50$, el sistema es de "**Tipo uno**". Sería como aumentar la señal de entrada hasta que la salida coincida con el valor deseado, pero como se ve la

relación entre la salida $c(t)$ y la señal de realimentación $b(t)$ **no sería igual** a la relación entre la señal de referencia $S_r(t)$ y la señal de entrada $r(t)$.

Volviendo al ejemplo los coeficientes de error son para $Kp_1 = 0.40$; 0.48 y 0.50 :

$$c.e.e.(escalón) = K_0 = \lim_{s \rightarrow 0} Geq.(s) = \frac{0.2 \times 10}{0.05 \times 0.2 \times 10 \times + 0.2 \times 2} = 4 \quad ; \quad 24 \quad y \quad \infty. -$$

$$c.e.r.(rampa) = K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s Geq.(s) = 0 \quad ; \quad 0 \quad y \quad \frac{2.5}{2.26}. -$$

Los errores verdaderos en estacionario están dados por:

$$e(\infty)(escalón) = \frac{1}{1 + K_0} = \frac{1}{1 + 4} = 0.20 \quad ; \quad 0.04 \quad y \quad 0. -$$

$$e(\infty)(rampa) = \frac{1}{K_1} = \frac{1}{0} = \infty \quad ; \quad \infty \quad y \quad 0.904. -$$

Cuando $Kp_1 = Kp_2 = 0.48$, el coeficiente de error es $K_0 = 24$ y en consecuencia el error en estado estacionario sería : $e(\infty) = 0.04^\circ C$, el cual sería el más lógico de acuerdo a lo comentado con anterioridad.-

Conclusión:

*Los cálculos precedentes indican que al excitar en la referencia con un escalón unitario de **1 °C**, con $Kp_1 = 0.4$, el sistema se comporta como de " **Tipo cero**" y, la salida verdadera del sistema se posiciona aproximadamente en **0.8 °C**. Esto da lugar a un error verdadero de **0.2 °C**.*

Si $Kp_1 = Kp_2 = 0.48$ al excitar en la referencia con un escalón unitario de 1 °C, el sistema se comporta como de " Tipo cero" y, la salida verdadera del sistema se posiciona aproximadamente en 0.96°C. Esto da lugar a un error verdadero de 0.04°C. Esto sería lo adecuado por todo lo ya estudiado en los párrafos anteriores.

*Si $Kp_1 = 0.50$ al excitar en la referencia con un escalón unitario de 1 °C, el sistema se comportaría como de " **Tipo uno**" y, la salida verdadera del sistema se posiciona en **1°C**. Esto da lugar a un error verdadero nulo.-*

Empleando Simulink puede obtenerse el **error verdadero** en función del tiempo, y en especial el referido error para comportamiento en régimen estacionario, para $Kp_1 = 0.40$; $Kp_1 = 0.48$ y $Kp_1 = 0.50$. Ver figura 17:

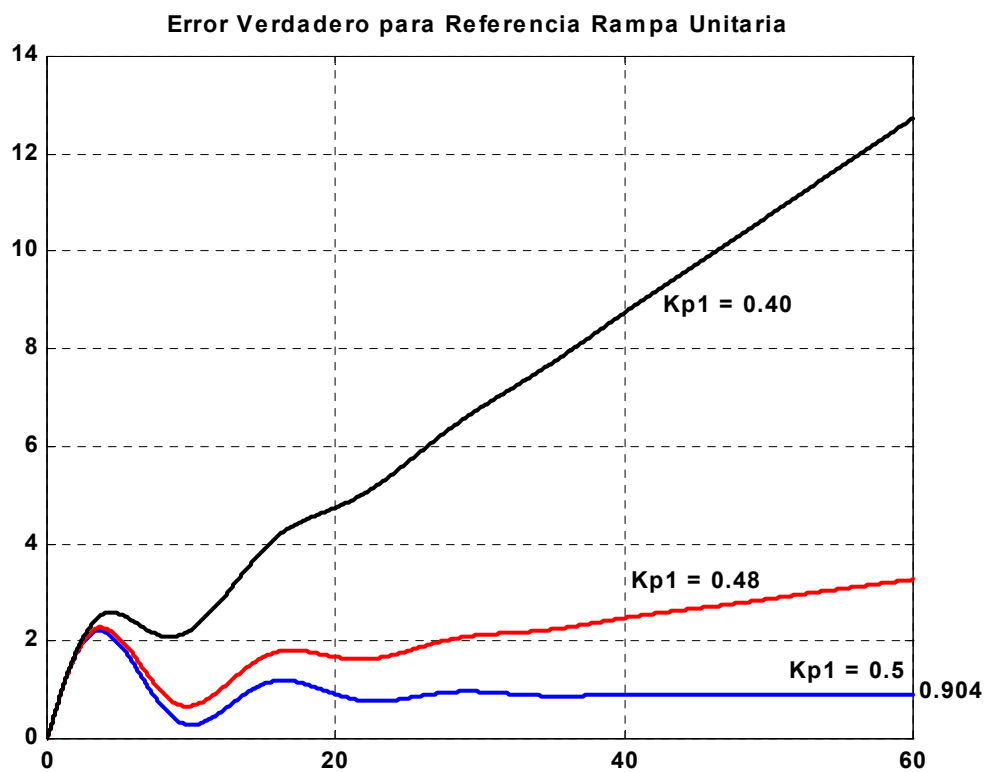
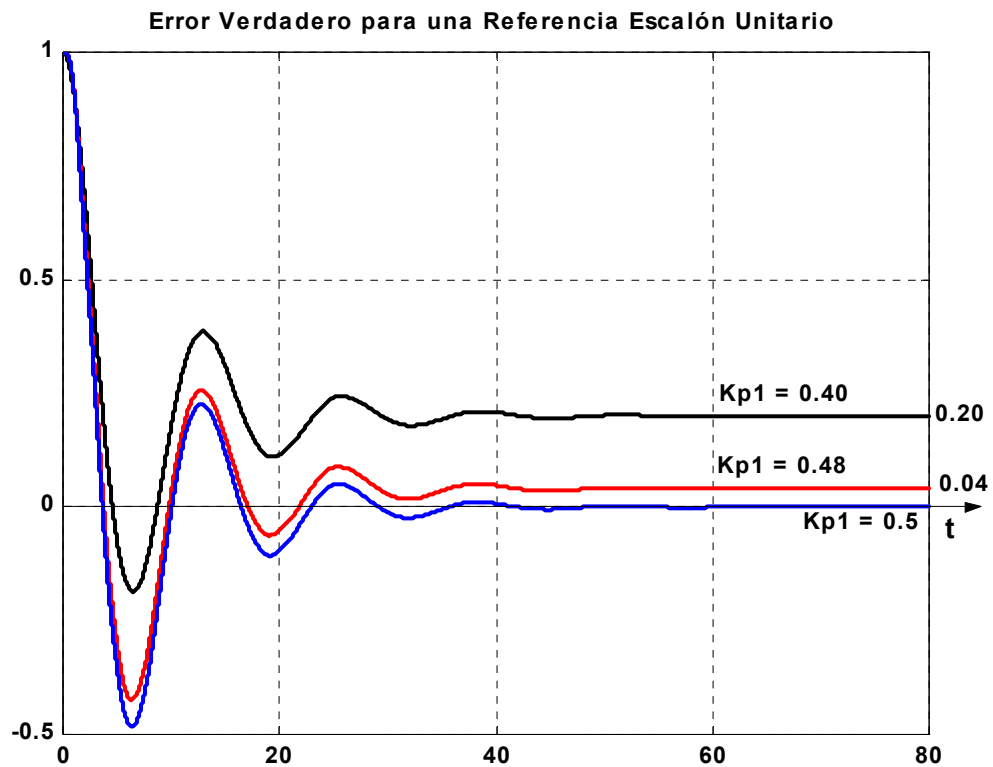


Figura 17. Error verdadero para escalón y rampa unitarios

2 b) Error actuante

Cuando consideramos el error actuante, la salida del sistema es la señal de medición, como se indica en el diagrama en bloques de la figura 18. Previamente se introduce dentro del esquema de bloques la transferencia del acondicionador de referencia, en este caso la constante K_{p1} [V/°C], para tener la $E'(s)$ en [°C].-

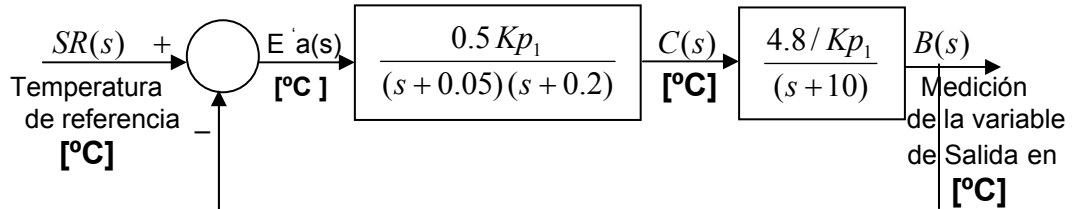


Figura 18. Diagrama en bloques indicando como salida la medición.

De acuerdo a la figura 18 desde la salida de medición a la entrada de referencia el sistema es de “**Tipo cero**” con lo cual se puede afirmar que en estas condiciones el sistema tendrá error actuante constante al escalón.

Los coeficientes de error, serán todos iguales para los diferentes K_{p1} , (pues son independientes del valor de K_{p1}):

$$c.e.e.(escalón) = K_o = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \frac{0.2 \times 12}{0.2 \times 0.05 \times 10} = 24$$

$$c.e.r.(rampa) = K_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s)H(s) = 0$$

Los errores actuantes en estacionario son:

$$e'a(\infty) = (escalón) = \frac{1}{1 + K_o} = \frac{1}{1 + 24} = 0.04$$

$$e'a(\infty)(rampa) = \frac{1}{K_1} = \frac{1}{0} = \infty$$

Como se puede ver si $K_{p1} = K_{p2} = 0.48$, en general si $K_{SR} = K_H$, el error actuante de estado estable, en la unidad de la señal de referencia coincide con el error verdadero de estado estacionario en la misma dimensión siempre que los sistemas equivalentes con realimentación unitaria sean Tipo cero.-

Pues en estos casos es $C(\infty) \equiv B(\infty)$, ya que $\frac{H(0)}{K_{SR}} = \frac{K_H}{K_H} = 1$.-

Esto es una conclusión general y justifica también por que $K_{SR} = K_H$.

Conclusión:

Los cálculos precedentes indican que al excitar en la referencia con un escalón unitario de **1°C**, la salida de **medición** del sistema se posiciona en **0.96 °C**. Esto da lugar a un error actuante de **0.04 °C**.

Empleando Simulink puede obtenerse el error actuante en función del tiempo, y en especial el referido error para comportamiento en régimen estacionario.

Ver figura 19:

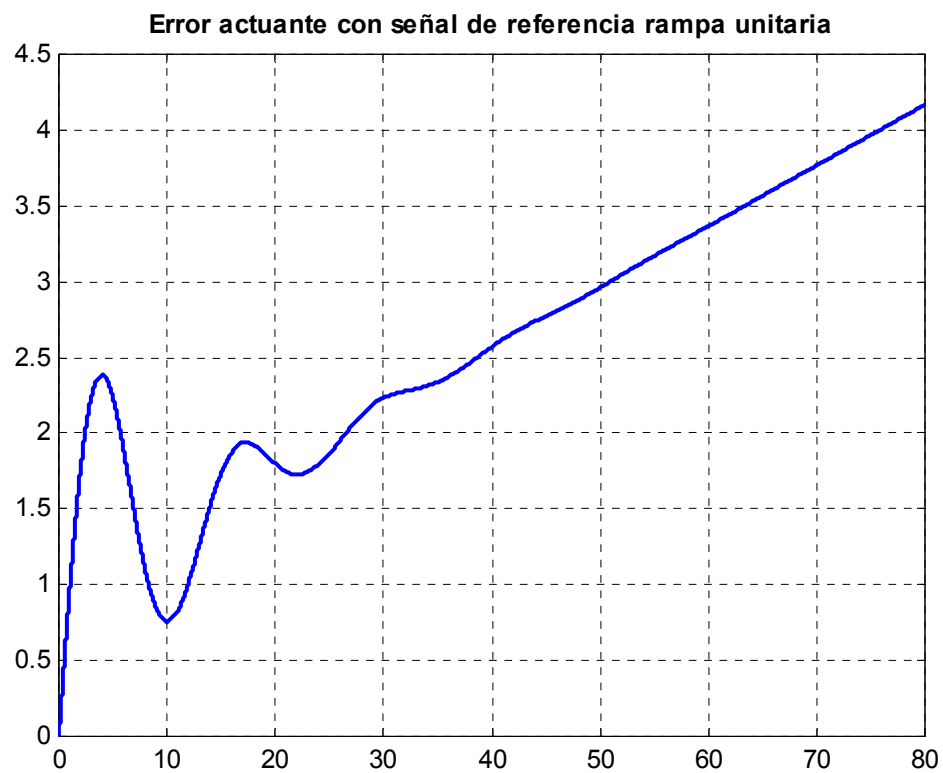
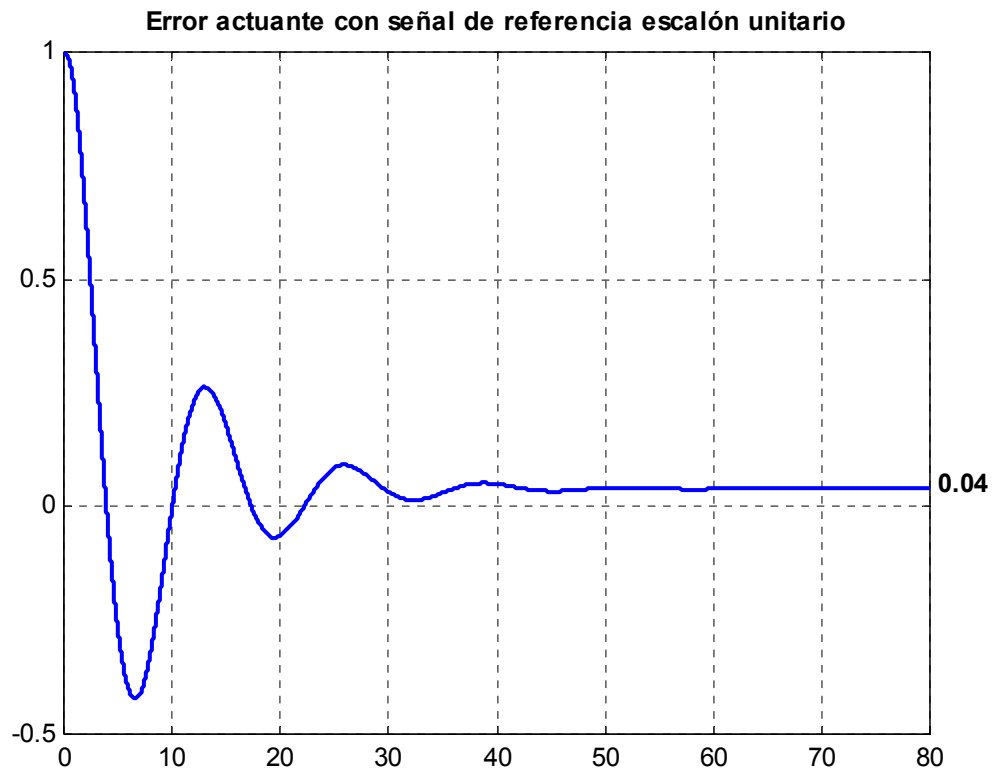


Figura 19. Error actuante para entrada escalón y rampa unitarios

Ejemplo 3. Planta de segundo orden con inercia pura.

Sea la planta de segundo orden con inercia pura indicado en la figura 20.
La ganancia del selector de entrada la llamaremos $K_{SR} = Kp_1$ y la función de transferencia del elemento de medición una ganancia $H(s) = Cte = K_H = Kp_2$.

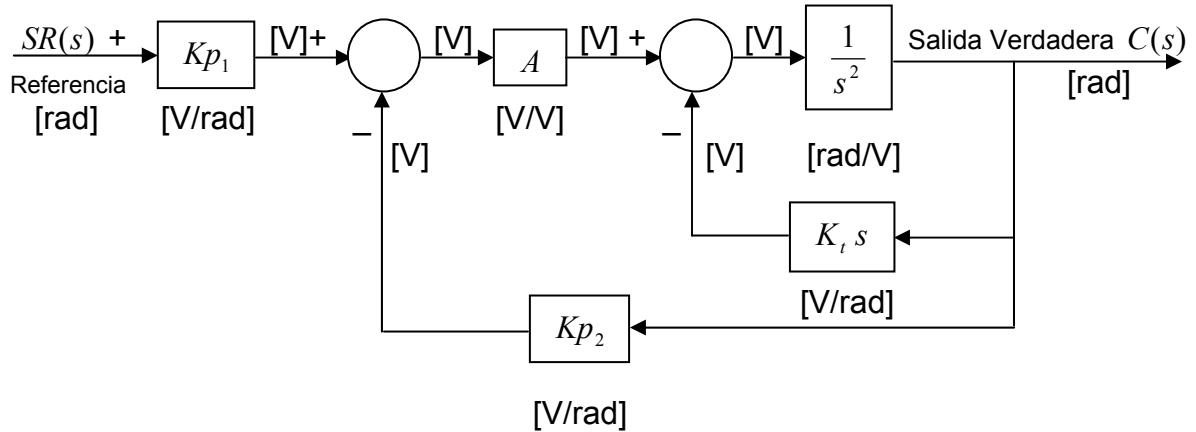


Figura 20. Planta de 2º orden con inercia pura.

A los fines de analizar el comportamiento de los errores, sintonizaremos el lazo con los siguientes valores de los parámetros :

$A = 10 \text{ [V/V]}$
 $Kp1 = 0.5 \text{ [V/rad]}$ y $Kp1 = Kp2 = 0.7 \text{ [V/rad]}$
 $Kp2 = 0.7 \text{ [V/rad]}$
 $Kt = 1 \text{ [V/rad/seg.]}$

3 a) Error Verdadero.

En este caso el diagrama en bloques conviene expresarlo como indica la figura 21, donde se explicitan el error verdadero y la salida verdadera.

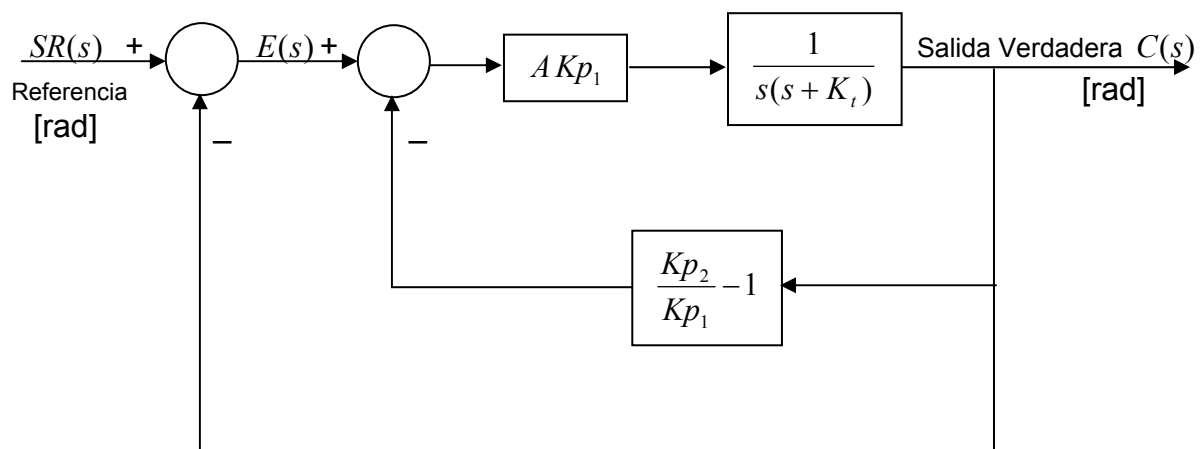


Figura 21. Sistema equivalente indicando salida y error verdadero

Resolviendo el lazo interno, obtenemos el diagrama de la figura 22:

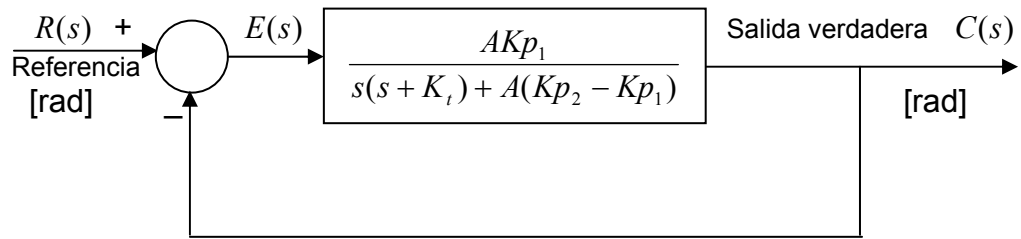


Figura 22. Diagrama equivalente indicando la salida y el error verdadero.

El sistema, considerando como “variable de salida la verdadera” es de “**tipo 0**”, cuando $Kp_1 \neq Kp_2$, (si $Kp_1 = Kp_2$, **sería tipo uno**), con lo cual los coeficientes de error para $Kp_1 = 0.5$ serán:

$$c.e.e = \lim_{s \rightarrow 0} G_{equiv.}(s) = \frac{Kp_1}{Kp_2 - Kp_1} = \frac{0.50}{0.7 - 0.5} = 2.5$$

$$c.e.r. = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{equiv.}(s) = 0$$

y para $Kp_1 = 0.7$ son:

$$c.e.e = \lim_{s \rightarrow 0} G_{equiv.}(s) = \infty$$

$$c.e.r. = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{equiv.}(s) = \frac{AKp_1}{K_t} = \frac{10 \times 0.7}{1} = 7$$

Los errores verdaderos en régimen permanente serán para $Kp_1 = 0.5$:

$$e(\infty)_{escalón} = \frac{1}{1 + c.e.e.} = \frac{1}{3.5} = 0.286$$

$$e(\infty)_{rampa} = \frac{1}{c.e.r.} = \infty$$

y para $Kp_1 = 0.70$:

$$e(\infty)_{escalón} = \frac{1}{1 + c.e.e.} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

$$e(\infty)_{rampa} = \frac{1}{7} = 0.143$$

Si $Kp_1 = Kp_2 = 0.7$ **el sistema sería Tipo uno**, y el **error verdadero** en estado estable al escalón unitario en la $Sr(t)$ será nulo y a la rampa aproximadamente 0.143.

Conclusión:

*Los cálculos precedentes indican que al excitar en la referencia con un escalón unitario de **1rad**, el sistema, tomando como salida la verdadera se comporta como de “**Tipo cero**” si $Kp_1 \neq Kp_2$ y, la salida verdadera del sistema se posiciona en **0.714 rad**. Esto da lugar a un error verdadero de **0.286 rad**.*

Si $Kp_1 = Kp_2$ y este error es nulo y a la rampa es finito.-

Empleando Simulink puede obtenerse el error verdadero en función del tiempo, y en especial el referido error para comportamiento en régimen estacionario. Ver figura 23:

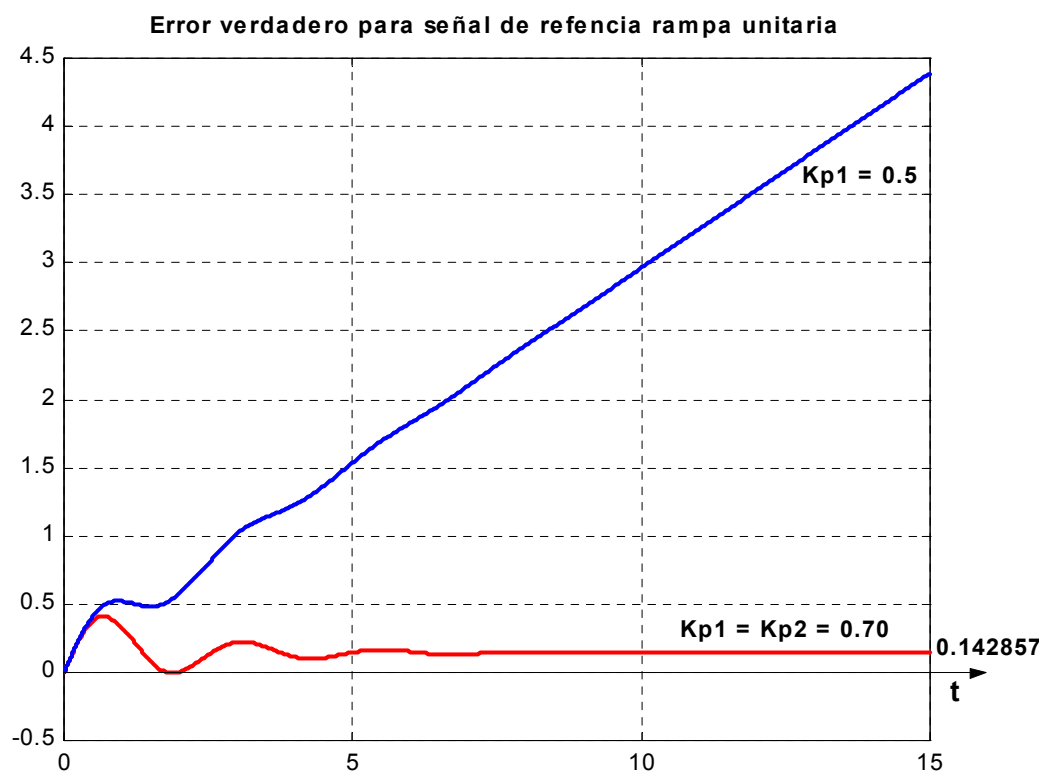
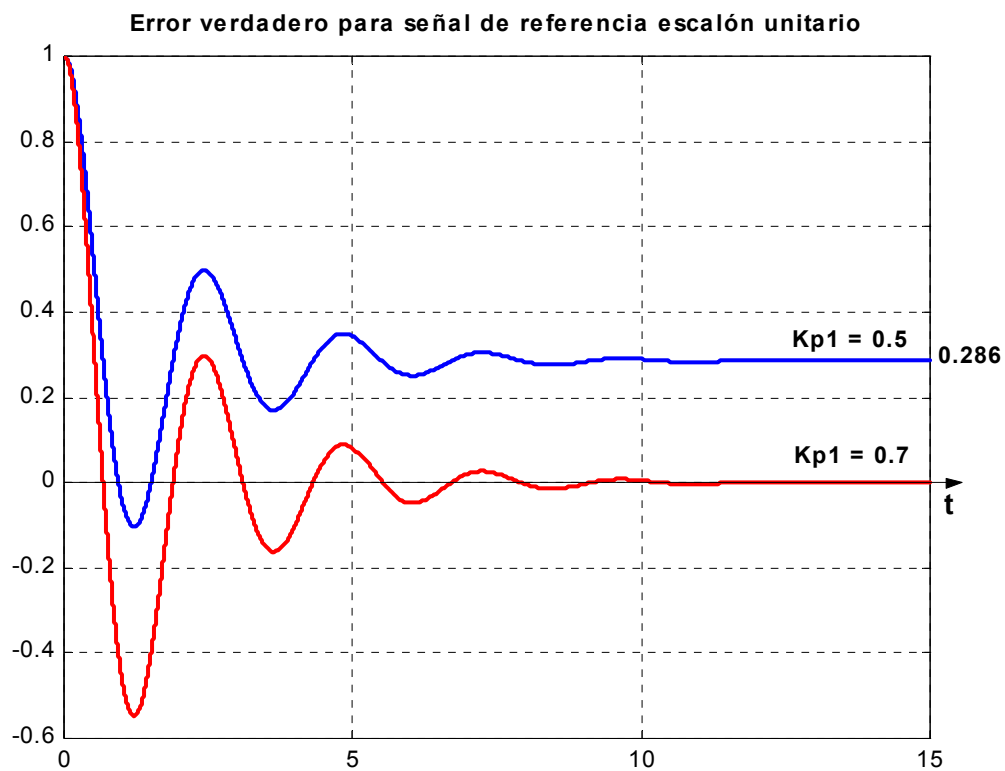


Figura 23. Error verdadero con entradas escalón y rampa unitaria con $K_{p1} = 0.50$ y 0.70

3 b) Error actuante.

Cuando consideramos el error actuante, la salida del sistema es la señal de medición, como se indica en el diagrama en bloques de la figura 24. Previamente se introduce dentro del esquema de bloques la transferencia del acondicionador de referencia, en este caso la constante K_{p1} [V/rad].-

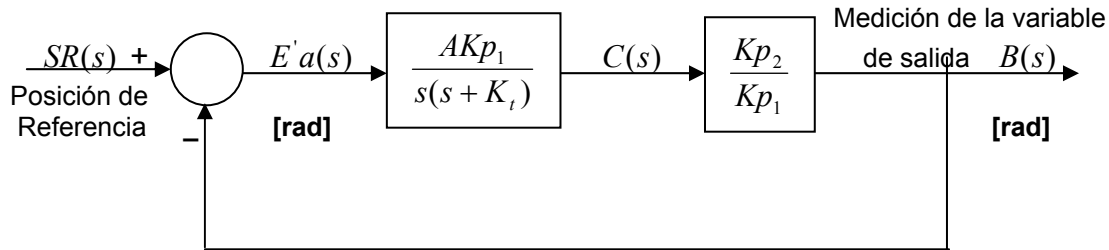


Figura 24. Diagrama en bloques indicando como salida la medición.

De acuerdo a la figura 24 desde la salida de medición a la entrada de referencia el sistema es de “**Tipo uno**”, sea cualquiera el valor de K_{p1} , con lo cual podemos afirmar que en estas condiciones el sistema tiene el error actuante nulo al escalón y constante a la rampa.

Sobre la base de lo indicado los coeficientes de error son:

$$c.e.e. = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \infty$$

$$c.e.r. = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) = \frac{AK_{p2}}{K_t} = \frac{10 \times 0.7}{1} = 7$$

El error actuante en estacionario es.

$$e_a^{(\infty)}_{\text{escalón}} = \frac{1}{1 + c.e.e.} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$e_a^{(\infty)}_{\text{rampa}} = \frac{1}{c.e.r.} = \frac{1}{7} = 0.143$$

Conclusión:

*Los cálculos precedentes indican que al excitar en la referencia con un escalón unitario de **1 rad**, la salida de medición del sistema se posiciona en **1 rad**. Esto da lugar a un error actuante de **0 rad**. Cuando se excita con una rampa unitaria la salida de medición es una rampa paralela a la de referencia, de manera que el error actuante es de **0.143**, igual al error verdadero cuando $K_{SR} = K_H$, pues los sistemas equivalentes son del mismo Tipo, uno en este caso.-*

Empleando Simulink puede obtenerse el error actuante en función del tiempo, y en especial el referido error para comportamiento en régimen estacionario. Ver figura 25.

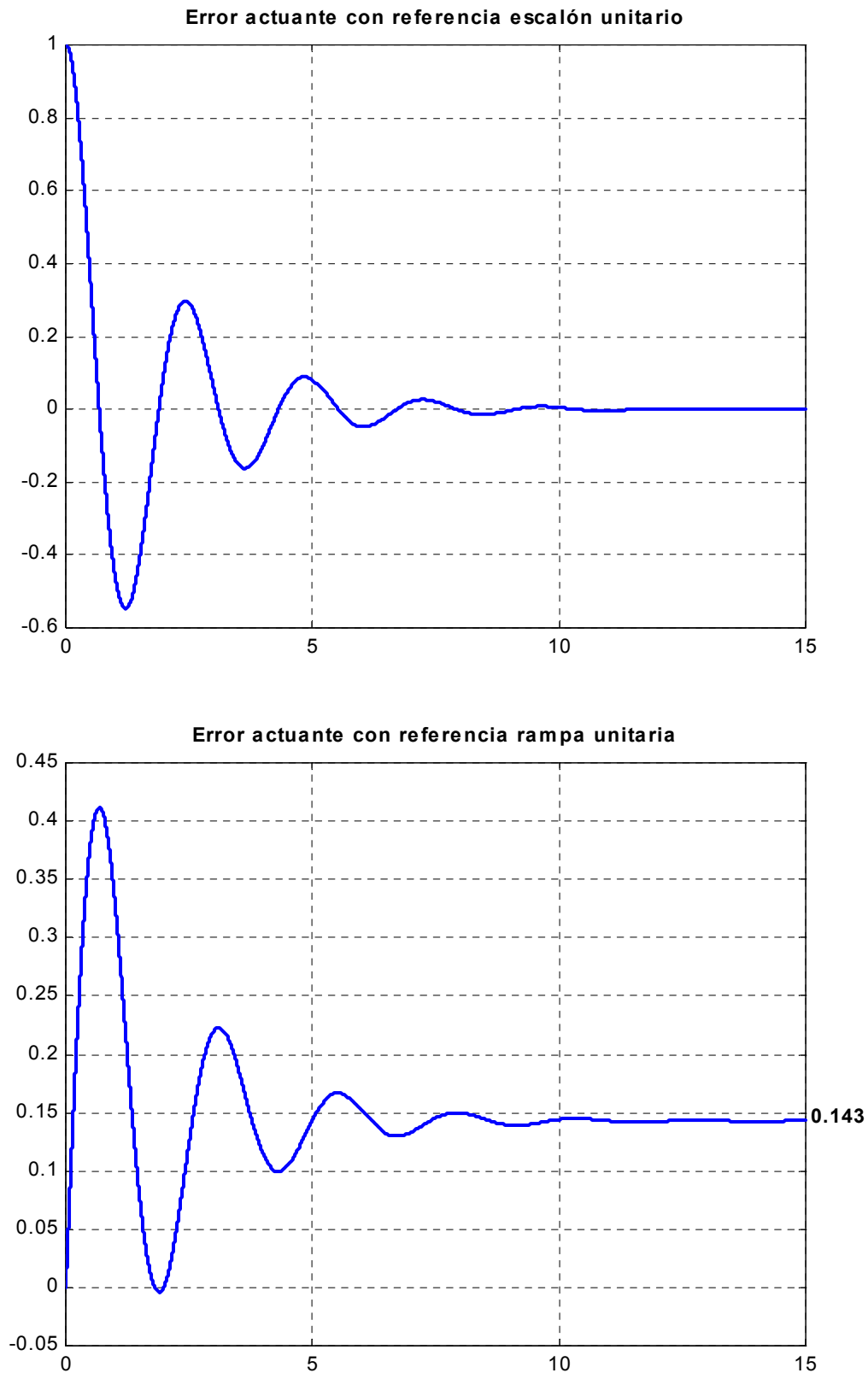


Fig. 25. Error actuante con entradas escalón y rampa unitario.

Ejemplo 4:

Un sistema de control de velocidad tiene la configuración indicada en la figura 26:

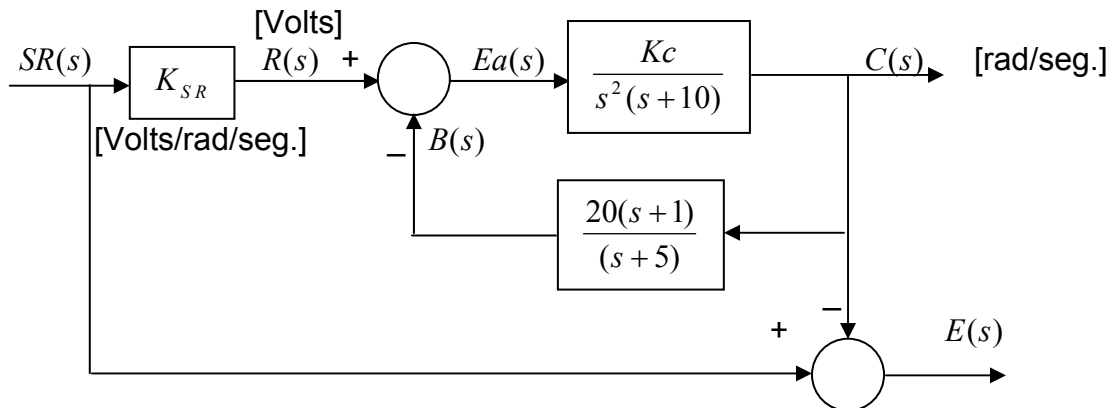


Figura 26:

Determinar:

1. El rango del parámetro Kc para que el sistema sea estable.-
2. La ganancia estática del elemento de medición.
3. El valor apropiado de la ganancia del selector de referencia.-
4. Con el valor de K_{Sr} determinado en 3), las señales de entrada $r(t)$ para las tres referencias típicas unitarias.
5. Si $Kc = 12.5$, siempre con K_{Sr} determinado en 3), la $G_{equiv.}(s)$ del sistema equivalente con realimentación unitaria y el tipo del sistema de control.
6. Usando la $G_{equiv.}(s)$ y la función de transferencia $M'(s)$, los errores verdaderos de estado estacionario para las tres señales de referencia típicas de prueba unitarias, $Sr(t) = \mu_s(t)$; $Sr(t) = t \mu_s(t)$ y $Sr(t) = \frac{1}{2} t^2 \mu_s(t)$.-.-
7. Los errores actuantes de estado estacionario en la misma dimensión que $Sr(t)$, para las referencias típicas de prueba unitarias.-

Solución:

1) La ecuación característica del sistema es:

$$s^2(s+5)(s+10) + 20Kc(s+1) = 0 ; \text{desarrollando quedará:}$$

$$s^4 + 15s^3 + 50s^2 + 20Kcs + 20Kc = 0$$

Por Hurwitz las restricciones serán las siguientes:

- $Kc > 0$ Condición Necesaria
- $15 \times 50 > 20Kc \rightarrow Kc < 37.5$
- $\frac{15 \times 50 \times 20Kc - (20Kc)^2}{(15)^2} > 20Kc \rightarrow Kc < 26.25$

El rango total será en consecuencia:

$$0 < Kc < 26.25$$

$$2) K_H = \lim_{s \rightarrow 0} H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{20(s+1)}{(s+5)} = 4 \Rightarrow K_H = 4$$

$$3) K_{SR} = K_H = 4$$

$$4) \text{ Si } Sr(t) = \mu_s(t) = \frac{r(t)}{K_H} = \frac{r(t)}{4} \Rightarrow r(t) = 4\mu_s(t) \Rightarrow R = 4. -$$

$$Sr(t) = t\mu_s(t) = \frac{r(t)}{K_H} = \frac{r(t)}{4} \Rightarrow r(t) = 4t\mu_s(t) \Rightarrow R = 4. -$$

$$Sr(t) = \frac{1}{2}t^2\mu_s(t) = \frac{r(t)}{K_H} = \frac{r(t)}{4} \Rightarrow r(t) = \frac{4}{2}t^2\mu_s(t) \Rightarrow R = 4. -$$

5) Usando:

$$Gequiv(s) = \frac{K_H G(s)}{1 + G(s)H(s) - K_H G(s)}, \text{ reemplazando los valores nos queda:}$$

$$Gequiv.(s) = \frac{4Kc(s+5)}{s(s^3 + 15s^2 + 50s + 16Kc)} \quad \text{para } Kc = 12.5:$$

$$Gequiv.(s) = \frac{50(s+5)}{s(s^3 + 15s^2 + 50s + 200)}$$

El sistema equivalente será **Tipo uno a pesar de los dos integradores de G(s)**, esto se debe a que la función de transferencia H(s) tiene dinámica y además **dos integradores.-**

6) Para el escalón unitario en la referencia:

$$Kp = \infty \Rightarrow e_{EE} = 0$$

Para una rampa unitaria en la referencia:

$$Kv = \lim_{s \rightarrow 0} s Gequiv.(s) = \frac{250}{200} = 1.25 \Rightarrow e_{EE} = \frac{1}{Kv} = 0.80 [rad / seg.]$$

Para la parábola unitaria en la referencia:

$$Ka = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 Gequiv.(s) = 0 \Rightarrow e_{EE} = \infty [rad / seg.]$$

Usando a la función de transferencia $M'(s)$:

$$M'(s) = \frac{C(s)}{SR(s)} = K_H M(s) = \frac{4Kc(s+5)}{s^4 + 15s^3 + 50s^2 + 20Kcs + 20Kc}; \text{ para } Kc = 12.5 < 26.25. -$$

$$M'(s) = \frac{50s + 250}{s^4 + 15s^3 + 50s^2 + 250s + 250}, \text{ por lo tanto:}$$

Al escalón unitario en la referencia: $e_{EE} = 0$; pues $\alpha_0 = b'_0. -$

A la rampa unitaria en la referencia: $e_{EE} = \frac{\alpha_1 - b'_1}{\alpha_0} = \frac{250 - 50}{200} = 0.80 [rad / seg.]$

A la parábola unitaria en la referencia: $e_{EE} = \infty$ pues $\alpha_0 = b'_0$ y $\alpha_1 \neq b'_1$.

7) Para el error actuante en la misma unidad que $Sr(t)$, como:

$$L(s) = G(s)H(s) = \frac{20Kc(s+1)}{s^2(s+5)(s+10)};$$

El sistema equivalente para determinar el error actuante será de “**Tipo dos**”, por ende el error actuante al escalón y la rampa serán nulos.

Los dos sistemas equivalentes para determinar el error verdadero y para el error actuante son de **diferente Tipo** esto es debido a que los integradores de $G(s)$ son dos y la $H(s)$ no es una constante.-.-

Ahora se tendrá que:

$$e'a(\infty); (\text{escalón en } Sr(t)) = 0$$

$$e'a(\infty); (\text{rampa en } Sr(t)) = 0$$

$$e'a(\infty); (\text{parábola unitaria en } Sr(t)) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 L(s)} = \frac{1}{0.4Kc} = \frac{2.5}{Kc} = \frac{2.5}{12.5} = 0.20 [\text{unidad de } Sr(t)]$$

Esto se puede ver con el diagrama de bloques de la figura 27.

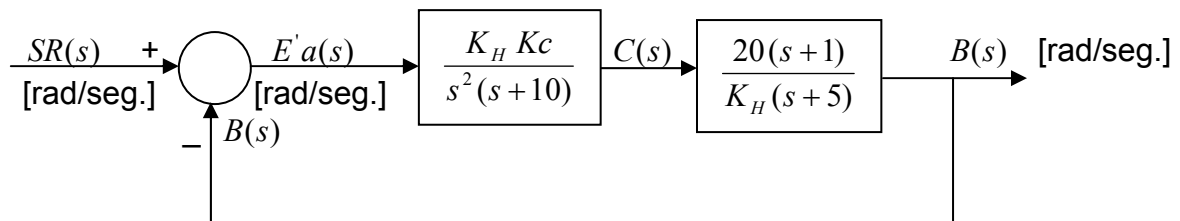


Figura 27:

Como se puede ver si $K_{SR} = K_H = 4$, la ganancia estática del función del último bloque es la unidad, por lo tanto $c(\infty) = b(\infty)$, o sea los valores finales de $c(t)$ y $b(t)$ serán iguales en rad/seg.

Por lo tanto, $e(\infty) = Sr(\infty) - c(\infty)$ y $e'a(\infty) = Sr(\infty) - B(\infty)$ serán iguales si los **sistemas equivalentes fueran del mismo tipo.-**

Al mismo resultado se llegaría si se emplea la relación:

$$e'a(\infty)(\text{parábola}) [\text{rad} / \text{seg.}] = \frac{ea(\infty)(\text{parábola}) [\text{Volts}]}{K_H} = \frac{0.80 [\text{Volts}]}{4 [\text{V} / \text{rad} / \text{seg}]} = 0.20 [\text{rad} / \text{seg.}]$$

En la figura 28 se muestran todas las señales obtenida con un esquema de Simulink para una señal de referencia rampa unitaria.

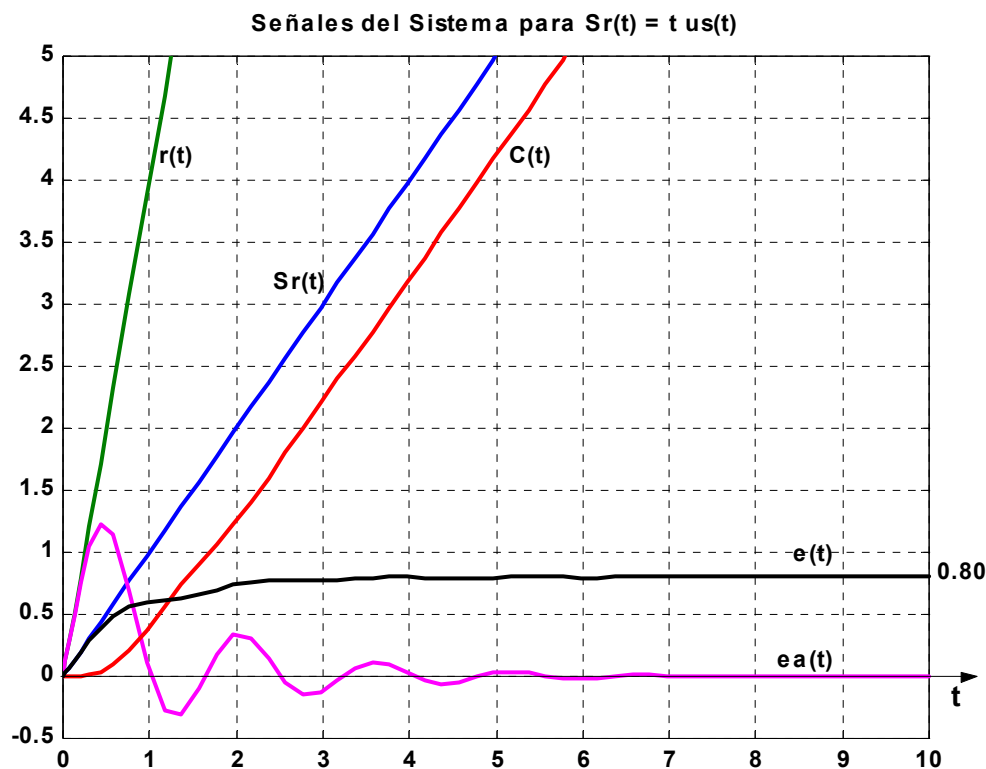


Figura 28.

Ejemplo 5:

Analizar los errores del sistema que tiene:

$$G(s) = \frac{5}{s^3 + 6s^2 + 8.5s + 6} \quad y \quad H(s) = 0.5(s + 4)$$

Determinar los errores verdadero y actuante en estado estacionario para señales de referencia escalón y rampa unitarios.-

Si se toma $K_{SR} = K_H = 2$, como se hace habitualmente, el sistema será **Tipo cero** y tendrá un error verdadero de estado estable finito para $Sr(t) = \mu_s(t)$, lo cual implica que: $r(t) = 2 \mu_s(t)$.-

$$\text{Si se elige, (cosa no común): } K_{SR} = \frac{1}{G(0)} + K_H = \frac{6}{5} + 2 = 3.2 \quad \Rightarrow \quad K_{SR} = 3.2$$

El sistema sería **al menos tipo uno**.-

Pero se elegirá $K_{SR} = K_H = 2$, por todo lo ya **comentado con anterioridad**.

Calculo de los errores verdaderos:

Como:

$$M'(s) = K_{SR} M(s) = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 16}$$
$$\text{o } Gequiv.(s) = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Como el sistema equivalente es **Tipo cero** el error verdadero al escalón unitario en la referencia será:

$$e_{EE}(\text{escalón}) = \frac{1}{1 + K_o} = \frac{1}{1 + 5/3} = \frac{3}{8} = 0.375$$

Para el error actuante en la misma unidad que $Sr(t)$ se tendrá:

$$L(s) = \frac{2.5(s + 4)}{s^3 + 6s^2 + 8.5s + 6},$$

También **Tipo cero** por lo tanto el error actuante deberá ser igual al verdadero como se comento.

Por lo tanto se tendrá para $Sr(t) = \mu_s(t)$, como $K_{sr} = K_h = 2$, que:

$$e'a(\infty)(\text{escalón}) = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} L(s)} = \frac{1}{1 + 5/3} = 0.375 \text{ [en la misma unidad que la } Sr(t)\text{]}$$

Para la rampa como $K_v = 0 \Rightarrow ea(\infty) = \infty$

Usando un diagrama de Simulink las señales se muestran en las figuras 29 y 30 para señales de referencia escalón unitario y rampa unitaria respectivamente:

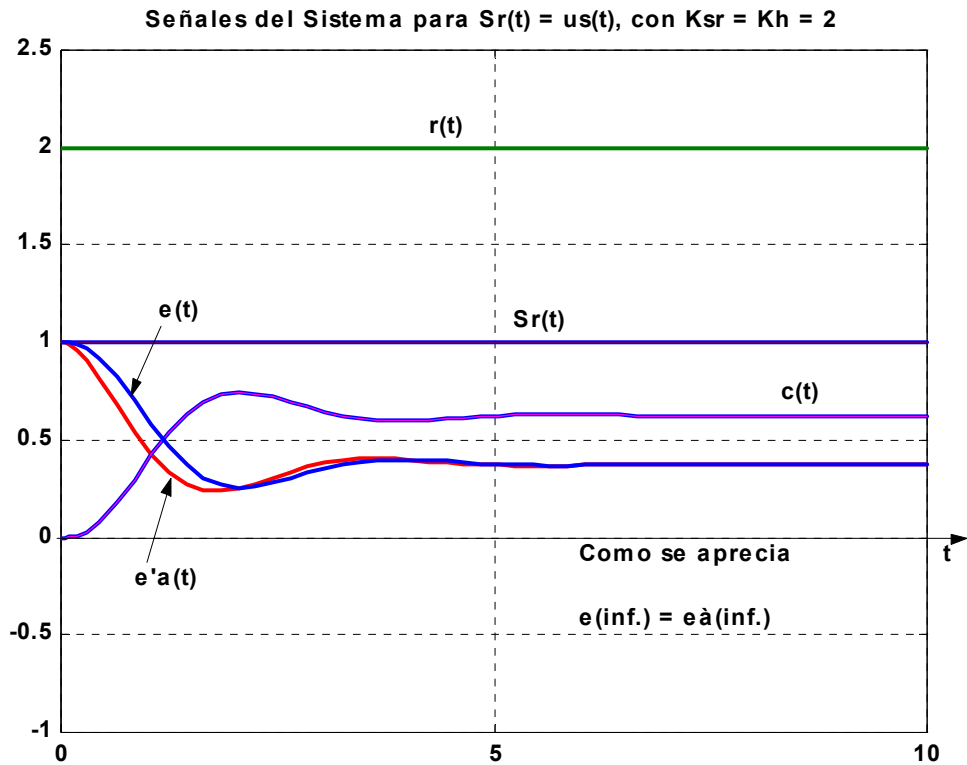


Figura 29.

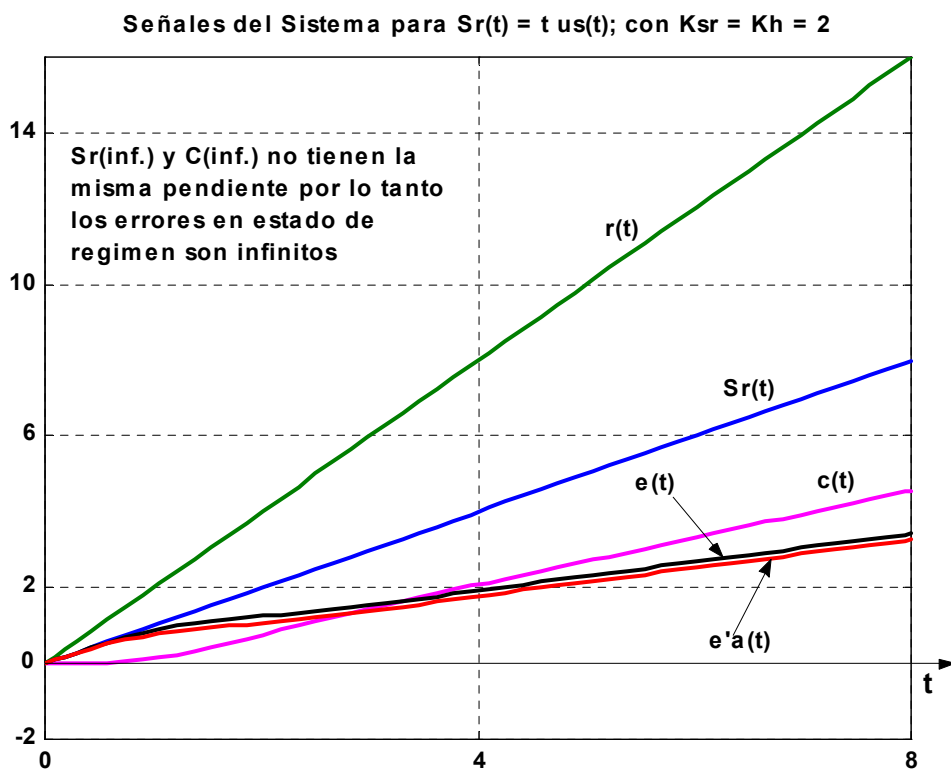
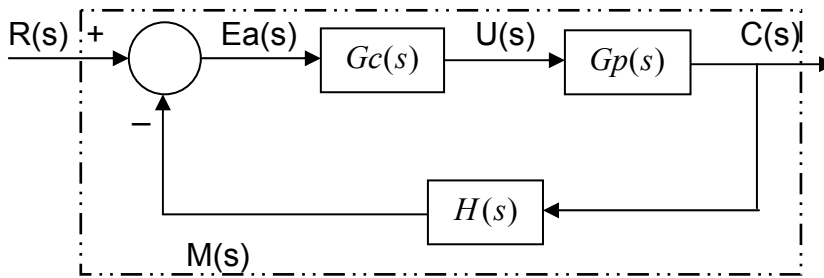


Figura 30.

Ejemplo 6:

En el sistema de la figura es un control de velocidad y las funciones de transferencia representadas tienen las siguientes características:

- $G_p(s)$ es un sistema de primer orden, sin ceros, con constante de tiempo $T = 10$ segundos y ganancia estática $K_o = 36$.
- $M(s)$ tiene entre otros elementos solo un cero en $s = -20$.
- $H(s)$ es un sistema de primer orden sin ceros.
- $G_c(s)$ es una función de transferencia con un único polo, ningún cero y la ganancia es un número entero positivo.



Construya uno de los posibles ejemplos para las funciones $G_c(s)$, $G_p(s)$ y $H(s)$ que bajo las condiciones anteriores cumpla con las siguientes especificaciones del sistema:

1. Evidentemente que el sistema sea estable.-
2. Que el sistema $M(s)$ tenga una ganancia estática de 5 (Rad/seg./ Volt), (por ejemplo que la señal de entrada $r(t)$ varíe entre ± 10 Volt para que $c(t)$ varíe entre ± 50 Rad/seg., es decir, cuando la entrada es 5 Volt la salida es 25 Rad/seg).-
3. Que el sistema tenga un error de posición nulo para una señal de referencia escalón y menor o igual a 0.625 radianes para una señal referencia rampa de pendiente 25rad/seg.-

Solución:

Se tiene que:

$$G_p(s) = \frac{K_c}{(1 + Ts)} \Rightarrow G_p(s) = \frac{36}{1 + 10s} \Rightarrow \boxed{G_p(s) = \frac{3.6}{(s + 0.1)}}$$

Como el sistema tiene un cero en -20 , y ni el controlador ni la planta tienen uno, por ende la $H(s)$ deberá tener un polo en -20 , o sea:

$$H(s) = \frac{K_2}{(s + 20)}$$

Además tendrá que cumplirse la expresión siguiente:

$$K_H (\text{volt}) \times 5 \left[\frac{\text{Rad / seg}}{\text{Volt}} \right] = 1 \text{ Rad / seg.} -$$

En consecuencia:

$$K_H = \frac{1}{5} = 0.20. -$$

Como $H(0) = \frac{K_2}{20} = K_H = 0.20 \Rightarrow K_2 = 4$

En consecuencia:
$$H(s) = \frac{4}{(s+20)}$$

La $G_c(s)$ deberá ser por los datos y especificaciones pedidas \Rightarrow
$$G_c(s) = \frac{Kc}{s}$$

Donde Kc es un número entero que deberá estar en el rango estable
Y cumplir con la especificación del error a la rampa de entrada.-

Encontrando la $G_{equiv.}(s)$, se tendrá:

$$G_{equiv.}(s) = \frac{K_H G_c(s) G_p(s)}{1 + G_c(s) G(s) [H(s) - K_H]} ; \text{reemplazando las funciones, nos queda:}$$

$$G_{equiv.}(s) = \frac{0.72 Kc (s+20)}{s [s^2 + 20.1s + (2 - 0.72Kc)]} ; \text{Tipo uno, como era de esperar.}$$

El error a la rampa unitaria será:

$$e(\infty)_{rampa} = \frac{25 \text{ Rad / seg.}}{Kv \text{ seg}^{-1}} = \frac{25(2 - 0.72Kc)}{14.4Kc} \leq 0.625 \Rightarrow Kc \geq 1.85$$

El rango de Kc para que el sistema sea estable, se puede determinar por cualquier criterio. La ecuación característica será:

$$s^3 + 20.1s^2 + 2s + 14.4Kc = 0,$$

Evidentemente Kc debe ser positivo y aplicando el criterio de Hurwitz, se tendrá:

$$20.1 \times 2 > 14.4Kc \Rightarrow Kc < 2.7916$$

Como el dato es que debe ser entero y además estar en el rango:

$$1.85 < Kc < 2.79, \text{ se elegirá } \Rightarrow Kc = 2 \Rightarrow G_c(s) = \frac{2}{s}$$

Con lo cual se determino las tres funciones pedidas.-

Las mismas cumplen con las especificaciones solicitadas.-

El error de estado estacionario a una rampa de referencia de pendiente 25rad/seg. será:

$$e(\infty)_{rampa} = 0.486 < 0.625. -$$

Resumen Final:

Tipo de un sistema: Es el número de polos en el origen, (o de integradores) que tiene la $G_{equiv.}(s)$ del sistema correspondiente con realimentación unitaria:

Llamaremos $G_c(s)$ y $G_p(s)$ a las Funciones de Transferencias del Controlador y la Planta respectivamente. El **Diagrama de Bloques del Sistema Real** es:

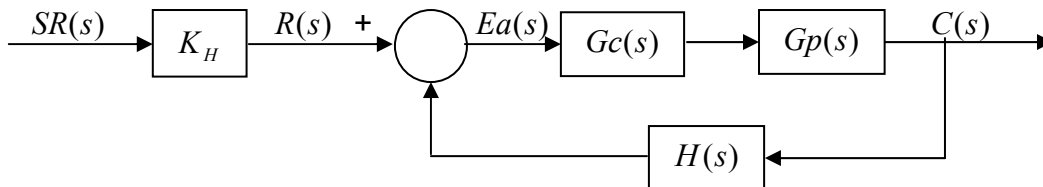


Figura 31:

El Diagrama de Bloques del Sistema Equivalente para Determinar el Error Verdadero es:

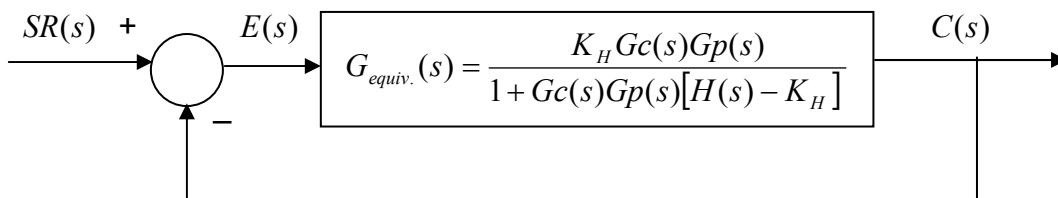


Figura 32:

Coefficientes de error:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_{equiv.}(s)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_{equiv.}(s)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_{equiv.}(s)$$

TIPO	0	1	2	3
ep	$1/(1+K_p)$	0	0	0
ev	Inf.	$1/K_v$	$0^{(1)}$	$0^{(1)}$
ea	Inf.	Inf.	$1/K_a^{(1)}$	$0^{(1)}$

Recordar que $H(s)$ no tiene polos ni ceros en el origen.-

- Si $G_{equiv.}(s)$ no tiene polos en el origen:

$$K_p = cte., K_v = K_a = 0 \Rightarrow ep = cte., ev = ea = inf.$$

- Si $G_{equiv.}(s)$ tiene un polo en el origen:

$$K_p = inf., K_v = cte., K_a = 0 \Rightarrow ep = 0, ev = cte., ea = inf.$$

- Si $G_{equiv.}(s)$ tiene dos polos en el origen⁽¹⁾:

$$K_p = inf., K_v = inf., K_a = cte. \Rightarrow ep = ev = 0, ea = cte.$$

- Si $G_{equiv.}(s)$ tiene tres o más polos en el origen:

Todos los errores son nulos⁽¹⁾.-

Nota: Si $H(s)$ es una constante, $H(s)=K_H$, entonces $G_{equiv.}(s) = K_H G_c(s) G_p(s)$.-

⁽¹⁾ Expresiones y afirmaciones **válidas sólo si $H(s) = Cte.$** -

Diagrama de Bloques del Sistema Equivalente para Determinar el Error Actuante en la Misma Dimensión que la Señal de Referencia:

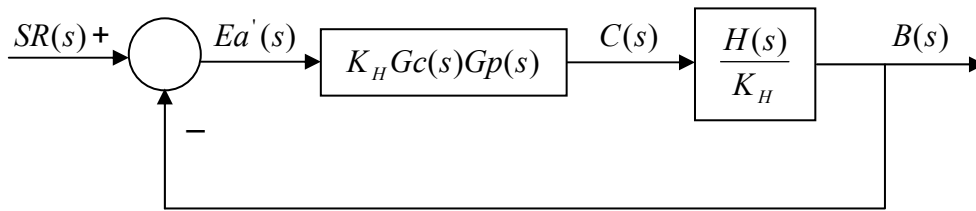


Figura 33

Como $H(s)$ no tiene polos en el origen, la función que define el “**Tipo del Sistema**” para el error actuante será $Gc(s)Gp(s)$, en lugar de la $G_{equiv.}(s)$.

La magnitud del error actuante estará en general dada por la función $L(s) = Gc(s)Gp(s)H(s)$.

Pero cuando $H(s)=K_H$, coincide con la $G_{equiv.}(s) = K_H Gc(s)Gp(s)$, en consecuencia la magnitud de los dos errores serán iguales o sea:

$$e(\infty) = e' a(\infty) .-$$

Conclusión:

Del estudio teórico realizado y de los ejemplos desarrollados, puede concluirse que el tratamiento del error en régimen permanente puede efectuarse con el **error verdadero o con el error actuante**. Ambos errores aportan informaciones equivalentes, debiendo tenerse presente que en un caso la salida del sistema es la “salida verdadera” $C(s)$ y en el otro la salida del sistema es “la medición” de la misma $B(s)$ en las mismas unidades que $C(s)$.

Desde el punto de vista del ingeniero en control o del instrumentista, quizá el error actuante sea más adecuado, ya que en la práctica la salida verdadera no se conoce, **salvo a través de su medición**, lo que representa considerar la misma como formando parte de la cadena directa, y al sistema como de realimentación unitaria.

Además si la función de transferencia $H(s)$ es una constante K_H , y la ganancia del selector de referencia se hace, $K_{sr} = K_H$, los sistemas equivalentes para determinar el error verdadero y el actuante tendrán el **mismo Tipo**, y será el indicado por los polos en el origen de la $G(s)$ real, ya que en estos casos la $G_{equiv}(s)=K_H.G(s)$.- Cuando la función $H(s)$ tiene dinámica esto generalmente no se cumple como se demostró en el ejemplo 4 en el mismo el sistema equivalente para determinar el error verdadero era Tipo uno y el sistema para determinar el error actuante era Tipo dos.-