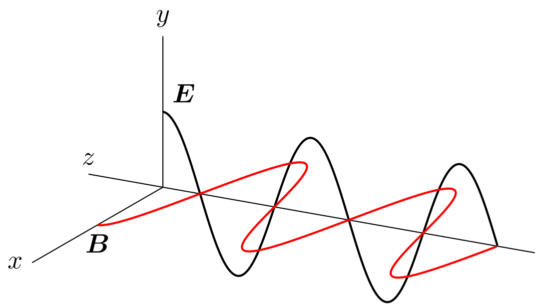
Apuntes Acústica y Óptica

Pablo Vivar Colina

Enero 2021

Índice

Índice de figuras



1. Campos Onda Electromagnética

Sean:

$$\hat{E}(z,t) = E_0\hat{i}e^{i(kz-\omega t)} \tag{1}$$

$$\hat{B}(z,t) = B_0\hat{j}e^{i(kz-\omega t)} \tag{2}$$

Nota:

$$k = \frac{2\Pi}{\lambda} \tag{3}$$

$$\omega = 2\Pi f \tag{4}$$

$$\frac{\omega}{k} = \lambda f = c \tag{5}$$

Expresiones de los campos en polarización lineal:

1.1. Propagación de Ondas Electromagnéticas

1.2. Ley de Faraday

El resultado de la matriz anterior es

$$\nabla \times \hat{E} = E_0 ik\hat{j}e + -\frac{\partial}{\partial t}(B_0\hat{j}e^{i(kz-\omega t)}) = B_0\omega i\hat{j}e^{i(kt-\omega t)} \tag{6}$$

1.3. Anexo

$$\hat{E} = \frac{\hat{F}}{q} \tag{7}$$

$$\hat{F}_q = q\hat{v} = \hat{B} \tag{8}$$

$$E_E = \frac{1}{2} = cv^2 \tag{9}$$

$$c = \frac{f_0 A}{z} \tag{10}$$

Si $|\hat{E}|$ es constante entonces:

$$|\hat{E}|_t = v \tag{11}$$

$$w_b = \frac{1}{2} L i^2 \tag{12}$$

$$|\hat{B}| = \frac{\mu_0 i N}{t} \tag{13}$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{t} \tag{14}$$

1.4. Cálculo de la energía

$$W_{EB} = W_E + W_B = \frac{1}{2}(\frac{f_0 A}{z})(Ez)^2 + \frac{1}{2}(\frac{\mu_0 N^2 A}{z})(\frac{Bz}{\mu_0 N})^2 \tag{15}$$

$$dW_{EB} = dW_e + dW_b \tag{16}$$

$$dW_{EB} = \frac{1}{2} = f_0 AEdt + \frac{1}{2\mu_0} AB^2 dz \tag{17}$$

1.4.1. Potencia Electromagnética

$$P_{EB} = \frac{dW_{EB}}{dt} = \frac{1}{2} f_0 AEc + \frac{1}{2\mu_0} AB^2 dz \tag{18}$$

1.5. Relación del campo eléctrico y magnético

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c \tag{19}$$

$$s = \frac{P_{EB}}{A} = \frac{1}{2} f_0 E^2 c + \frac{1}{2_{m_0}} B^2 c \tag{20}$$

O también si $\frac{E}{B} = c$

$$s = \frac{1}{2} f_0 EBc^2 + \frac{1}{2\mu_0} EB = \frac{1}{2\mu_0}[1 + f_0 \mu_0 c^2] \tag{21}$$

1.6. Módulo de vector de Poynting

$$s = \frac{EB}{\mu_0} \tag{22}$$

Al final:

$$\hat{s} = \frac{\hat{E} \times \hat{B}}{\mu_0} \tag{23}$$

1.6.1. Irradiancia promedio

$$|\hat{s}|_{r.m.s.} = \frac{1}{\mu_0}\frac{E_0}{\sqrt{2}} \times \frac{B_0}{\sqrt{2}} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}[\frac{W}{m^2}] \tag{24}$$

1.7. Valor RMS

$$f(t) = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt} \tag{25}$$

T es el periodo total de la función a la cual se le quiere sacar su valor RMS.

2. Ecuación de Onda

Una ecuación diferencial en derivadas parciales es una ecuación que contiene una o más derivadas parciales de la función indicada. Verifique, por sustitución, que la función:

$$F(x,t) = cos(3x)e^{-2t} \tag{26}$$

Satisface la ecuación:

$$F_t = \frac{2}{9}F_{xx} \tag{27}$$

Si F_t y F_{tt} denotan las derivadas parciales primera y segunda de $F(x,t)$ con respecto de t y x, respectivamente se tiene que:

$$F_t = \tag{28}$$

Compruebe directamente, usando la regla de la cadena, que la función:

$$f(x,t) = f(x \pm v_p t) \tag{29}$$

Donde v_p = constante.

Satisface la ecuación de uonda unidimensional $f_{tt} = v^2 f_{tt}$

Sea $s(x,t) = x \pm v_p t$, entonces:

$$f_t = \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial s}{\partial t} = \pm v_p \frac{\partial f}{\partial s} \tag{30}$$

$$f_u = \frac{\partial}{\partial t}(\pm v_p \frac{\partial f}{\partial s}) = \pm v_p \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial f}{\partial t}) = v_p^2 \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial f}{\partial s}) = v_p^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \tag{31}$$

Por otro lado:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial x} \tag{32}$$

2.1. Ejercicio

Emplear el métdodo de Fourier para resolver el problema de vibración de una cuerda elástica de longitud L, con extremos fijos sujera a una tensión T, que inicie su movimiento desde el reposo y cuyo perfil en $t = 0$ sea $g(x)$

Sua $f(x,t)$ el desplazamiento vertical de un elemento diferencial de cuerda tal que satisfaga la ecuación $f_{tt} = v_p^2 f_{xx}$, con las condiciones iniciales de contorno:

$$f(0,t) = f(L,t) = 0(t > 0) \tag{33}$$

$$f(x,0) = g(x)(0 < x < L) \tag{34}$$

$$f_t(x,0) = 0(0 < x < T) \tag{35}$$

Se propone que la solución $f(x,t) = G(x)H(t)$, que al sustituir en la ecuación resulta:

2.2. Funciones armónicas

2.2.1. Número de onda

$$k = \frac{2\Pi}{\lambda}[\frac{1}{m}] \tag{36}$$

2.2.2. Frecuencia angular

$$\omega = 2\Pi f = \frac{2\Pi}{T}[\frac{1}{s}] \tag{37}$$

Nota:

$$\frac{\omega}{k} = \lambda * f = v \tag{38}$$

donde v es la velocidad de propagación de la onda

2.2.3. Onda senoidal

$$f(x,t) = Asin(x \pm t) \tag{39}$$

- A amplitud

$$f(x,t) = Asin(kx \pm \omega t) \tag{40}$$

$$f(x,t) = Asin\frac{2\Pi}{\lambda}(x \pm \lambda f t) \tag{41}$$

$$f(x,t) = Asin\frac{2\Pi}{\lambda}(x \pm t) \tag{42}$$

Nota, la expresión 39 es equivalente con las expresiones 40, 41 y 42
La expresión 40 es solución a $f_{tt} = v^2 f_{tt}$ por lo tanto podemos escribir:

$$f_t = A\omega sin(kx + \omega t) \tag{43}$$

$$f_{tt} = -A\omega^2 sin(kx + \omega t) \tag{44}$$

$$f_x = Aksin(kx + \omega t) \tag{45}$$

$$f_{xx} = -Ak^2 sin(kx + \omega t) \tag{46}$$

Al final:

$$\frac{f_{tt}}{f_{xx}} = \frac{\omega^2}{k^2} = v^2 \tag{47}$$

La rapidez de una onda en una cuerda se puede obtener mediante la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{48}$$

La expresión que nos proporciona los modos de vibración es:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \tag{49}$$

Donde L es la longitud de la cuerda, $\lambda eslalongituddeonda$ y n son números naturales correspondientes a los modos de vibración.

Asimismo se puede obtener la n-ésima frecuencia a ptravés de la fórmula:

$$f_n = n(\frac{v_p}{2L}) \tag{50}$$

2.3. Ejercicio

Verifique esprimentalmente que la función armónica:

$$g(x,t) = Ae^{i(kx+\omega t)} + Ae^{i(kx-\omega t+\Pi)} \tag{51}$$

Con $k = \frac{2\Pi}{\lambda}$ y $\omega = 2\Pi f$, satisface la ecuación de onda unidimensional.

2.3.1. Resolución

Ya que $e^{i\Pi} = -1$,$g(x,t)$ se escribe de la forma:

$$g(x,t) = Ae^{ikt}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \tag{52}$$

Así que, si:

2.4. Apéndice

$$sinx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{53}$$

3. Ondas Electromagnéticas

3.1. Interfaz plana, incidencia oblicua

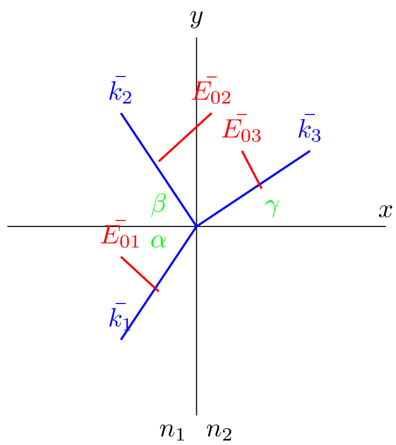


Figura 1: Onda 2D

$$\bar{k_1} = k_1[cos\alpha\hat{i} + sin\alpha\hat{j}] \tag{54}$$
$$\bar{k_2} = k_2[-cos\beta\hat{i} + sin\beta\hat{j}] \tag{55}$$
$$\bar{k_3} = k_3[cos\gamma\hat{i} + sin\gamma\hat{j}] \tag{56}$$

$$\bar{E_{01}} = E_{01}[-sin\alpha\hat{i} + cos\alpha\hat{j}] \tag{57}$$
$$\bar{E_{02}} = E_{02}[sin\beta\hat{i} + cos\beta\hat{j}] \tag{58}$$
$$\bar{E_{03}} = E_{03}[-sin\gamma\hat{j} + cos\gamma\hat{j}] \tag{59}$$

$r = x\hat{j} + y\hat{j}$ Entonces:

$$\bar{E_1} = \bar{E_{01}}e^{i(\bar{k_1}\bar{r}-\omega t)} = E_{01}[-sin\alpha\hat{i} + cos\alpha\hat{j}]e^{i[k_1(xcos\alpha+ysin\alpha)-\omega t]} \tag{60}$$
$$\bar{E_2} = \bar{E_{02}}e^{i(\bar{k_2}\bar{r}-\omega t)} = E_{02}[sin\beta\hat{i} + cos\beta\hat{j}]e^{i[k_2(xcos\beta+ysin\beta)-\omega t]} \tag{61}$$
$$\bar{E_3} = \bar{E_{03}}e^{i(\bar{k_3}\bar{r}-\omega t)} = E_{03}[-sin\gamma\hat{i} + cos\gamma\hat{j}]e^{i[k_3(xcos\gamma+ysin\gamma)-\omega t]} \tag{62}$$

Así: $\bar{E_1} = \bar{E_2} + \bar{E_3}$ Condición de frontera $E_{1y} + E_{2y} = E_{3y}$

Componente tangencial de $\bar{E}$ Entonces:

$$E_{01}cos\alpha e^{ik_1ysin\alpha-i\omega t} * e^{-i\omega t} \tag{63}$$
$$E_{02}cos\alpha e^{ik_2ysin\beta-i\omega t} * e^{-i\omega t} \tag{64}$$
$$E_{03}cos\alpha e^{ik_3ysin\gamma-i\omega t} * e^{-i\omega t} \tag{65}$$

Nota importante para la simplificación $e^a + e^b = e^c$ implica que $a = b$ y $b = c$

$$E_{01}cos\alpha e^{ik_1ysin\alpha-i\omega t} \tag{66}$$
$$E_{02}cos\alpha e^{ik_2ysin\beta-i\omega t} \tag{67}$$
$$E_{03}cos\alpha e^{ik_3ysin\gamma-i\omega t} \tag{68}$$

Al final: $k_1ysin\alpha = k_2ysin\beta$ implicando que k_1 y k_2 están en el mismo medio por lo tanto son iguales obteniendo que: $sin\alpha = sin\beta$ y por tanto $\alpha = \beta$ y éste resultado es la *Ley de la* $reflexi\acute{o}n$. Además $k_1ysin\alpha = k_3sin\gamma$ sustituyendo podemos llegar a *La Ley de snell*: $n_1sin\alpha = n_2sin\gamma$

4. Ecuaciones de Maxwell

4.1. Ecuaciones de Maxwell con fuentes

$$\nabla\hat{E} = \frac{\rho}{f_0} \tag{69}$$

$$\nabla\hat{B} = 0 \tag{70}$$

$$\nabla x\hat{E} = -\frac{\partial\hat{B}}{\partial t} \tag{71}$$

$$\nabla x\hat{B} = \mu_0(\hat{J} + \frac{\partial \hat{D}}{\partial t}) \tag{72}$$

Las ecuaciones 69 y 70 son llamadas ecuaciones de gauss
La ecuación 71 tiene el nombre de ecuación de Faraday.

La ecuación 72 tiene el nombre de ecuación de Ampere Maxwell.

4.2. Ecuaciones de Maxwell sin fuentes

$$\nabla \hat{E} = 0 \tag{73}$$

$$\nabla \hat{B} = 0 \tag{74}$$

$$\nabla x\hat{E} = -\frac{\partial \hat{B}}{\partial t} \tag{75}$$

$$\nabla x\hat{B} = \mu_0 \hat{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \hat{E}}{\partial t} \tag{76}$$

4.3. Ecuación de Onda

$$\nabla x \nabla x \hat{A} = \nabla(\nabla \hat{A}) - \nabla^2 \hat{A} \tag{77}$$

$$\nabla x(\frac{\partial \hat{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla x\hat{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}[\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \hat{E}}{\partial t}] \tag{78}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \hat{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \hat{E} \tag{79}$$

$$\hat{E}_{tt} = c^2 \partial^2 \hat{E} \tag{80}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2{,}99792x10^8[\frac{m}{s}] \tag{81}$$

4.4. Ecuaciones de maxwell en medio materiales

4.4.1. Ecuaciones de Maxwell con fuentes

$$\nabla \hat{E} = \frac{\rho}{f_0} \tag{82}$$

$$\nabla \hat{B} = 0 \tag{83}$$

$$\nabla x\hat{E} = -\frac{\partial \hat{B}}{\partial t} \tag{84}$$

$$\nabla x\hat{B} = \mu(\hat{J} + \frac{\partial\hat{D}}{\partial t}) \tag{85}$$

4.4.2. Ecuaciones de Maxwell sin fuentes

$$\nabla\hat{E} = 0 \tag{86}$$

$$\nabla\hat{B} = 0 \tag{87}$$

$$\nabla x\hat{E} = -\frac{\partial\hat{B}}{\partial t} \tag{88}$$

$$\nabla x\hat{B} = \mu\hat{J} + \epsilon\mu\frac{\partial\hat{E}}{\partial t} \tag{89}$$

4.4.3. Ecuación de onda

$$\nabla x\nabla x\hat{A} = \nabla(\nabla\hat{A}) - \nabla^2\hat{A} \tag{90}$$

$$\nabla x(\frac{\partial\hat{B}}{\partial t}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla x\hat{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}[\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\hat{E}}{\partial t}] \tag{91}$$

$$\epsilon\mu\frac{\partial^2\hat{E}}{\partial t^2} = \nabla^2\hat{E} \tag{92}$$

$$\hat{E}_{tt} = c^2\partial^2\hat{E} \tag{93}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = 2{,}99792x10^8[\frac{m}{s}] \tag{94}$$

5. Índice de refracción

6. Teoría de las Ondas Electromagnéticas

6.1. Construcción de la ecuación diferencial

Una ecuación diferencial en derivadas parciales es una aquella que contiene una o más derivadas parciales de la función indicada. Verifique, por sustitución, que la función:

$$F(x,t) = cos(3x)e^{-2t} \tag{95}$$

Satisface la ecuación:

$$F_t = \frac{2}{9}F_{xx} \tag{96}$$

Si F_t y F_{tt} denotan las derivadas parciales primera y segunda de $F(x,t)$ con respecto de t y x, respectivamente se tiene que:

$$F_t = \tag{97}$$

Compruebe directamente, usando la regla de la cadena, que la función:

$$f(x,t) = f(x \pm v_p t) \tag{98}$$

Donde v_p = constante.

Satisface la ecuación de onda unidimensional $f_{tt} = v^2 f_{tt}$
Sea $s(x,t) = x \pm v_p t$, entonces:

$$f_t = \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial s}{\partial t} = \pm v_p \frac{\partial f}{\partial s} \tag{99}$$

$$f_u = \frac{\partial}{\partial t}(\pm v_p \frac{\partial f}{\partial s}) = \pm v_p \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial f}{\partial t}) = v_p^2 \frac{\partial}{\partial s}(\frac{\partial f}{\partial s}) = v_p^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \tag{100}$$

Por otro lado:

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial x} \tag{101}$$

6.2. Ejercicio

Emplear el métdodo de Fourier para resolver el problema de vibración de una cuerda elástica de longitud L, con extremos fijos sujeta a una tensión T, que inicie su movimiento desde el reposo y cuyo perfil en $t = 0$ sea $g(x)$

Sea $f(x,t)$ el desplazamiento vertical de un elemento diferencial de cuerda tal que satisfaga la ecuación $f_{tt} = v_p^2 f_{xx}$, con las condiciones iniciales de contorno:

$$f(0,t) = f(L,t) = 0(t > 0) \tag{102}$$

$$f(x,0) = g(x)(0 < x < L) \tag{103}$$

$$f_t(x,0) = 0(0 < x < T) \tag{104}$$

Se propone que la solución $f(x,t) = G(x)H(t)$, que al sustituir en la ecuación resulta:

6.3. Funciones armónicas

6.3.1. Número de onda

$$k = \frac{2\Pi}{\lambda}[\frac{1}{m}] \tag{105}$$

6.3.2. Frecuencia angular

$$\omega = 2\Pi f = \frac{2\Pi}{T}[\frac{1}{s}] \tag{106}$$

Nota:

$$\frac{\omega}{k} = \lambda * f = v \tag{107}$$

donde v es la velocidad de propagación de la onda

La rapidez de una onda en una cuerda se puede obtener mediante la siguiente expresión:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{108}$$

La expresión que nos proporciona los modos de vibración es:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \tag{109}$$

Donde L es la longitud de la cuerda, $\lambda eslalongituddeonda$ y n son números naturales correspondientes a los modos de vibración.

Asimismo se puede obtener la n-ésima frecuencia a ptravés de la fórmula:

$$f_n = n(\frac{v_p}{2L}) \tag{110}$$

6.4. Ejercicio

Verifique experimentalmente que la función armónica:

$$g(x,t) = Ae^{i(kx+\omega t)} + Ae^{i(kx-\omega t+\Pi)} \tag{111}$$

Con $k = \frac{2\Pi}{\lambda}$ y $\omega = 2\Pi f$, satisface la ecuación de onda unidimensional.

6.5. Resolución

Ya que $e^{i\Pi} = -1$,$g(x,t)$ se escribe de la forma:

$$g(x,t) = Ae^{ikt}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \tag{112}$$

Así que, si:

$$sinx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{113}$$

Ecuaciones de ondas www.vaxasoftware.com

Ecuación de onda	$y(x,t) = A\cos(\omega t \pm k x)$, $k = 2\pi/\lambda$ $y(x,t) = A\cos\left(2\pi f t \pm \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$
Velocidad de ondas transversales en cuerdas	$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, T = Tensión (N)
Velocidad de ondas longitudinales en muelles	$v = L\sqrt{\frac{k}{m}}$, k = Constante elástica (N/m)
Atenuación de Amplitud por absorción	$A = A_0\, e^{-\alpha x}$
Atenuación de Intensidad por absorción	$I = I_0\, e^{-2\alpha x}$
Otras relaciones	$T = \frac{1}{f}$; $\omega = 2\pi f$; $v = \lambda f$

Símbolo	Magnitud	Unidad S.I.
y	Estado de vibración	
x	Posición, distancia recorrida en el medio absorbente	m
t	Tiempo	s
A	Amplitud	
I	Intensidad	W/m^2
α	Coeficiente de absorción	
ω	Pulsación, velocidad angular, frecuencia angular	rad / s
k	Número de ondas	rad / m
	Constante elástica o recuperadora del muelle	N / m
T	Periodo	s
	Tensión de la cuerda (en ondas transversales)	N
v	Velocidad de propagación	m / s
μ	Densidad lineal de masa de la cuerda	kg / m
L	Longitud del muelle	m
m	Masa del muelle	kg
f	Frecuencia	Hz
λ	Longitud de onda	m

Figura 2: Ecuación de onda

Sean:

$$\hat{E}(z,t) = E_0\hat{i}e^{i(kz-\omega t)} \tag{114}$$

$$\hat{B}(z,t) = B_0\hat{j}e^{i(kz-\omega t)} \tag{115}$$

Nota:

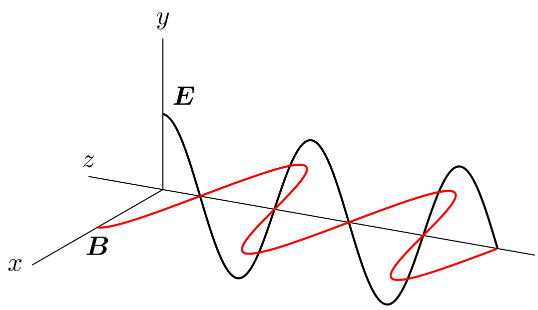
$$k = \frac{2\Pi}{\lambda} \tag{116}$$

$$\omega = 2\Pi f \tag{117}$$

$$\frac{\omega}{k} = \lambda f = c \tag{118}$$

Expresiones de los campos en polarización lineal:

6.6. Propagación de Ondas Electromagnéticas



6.7. Ley de Faraday

El resultado de la matriz anterior es:

$$\nabla \times \hat{E} = E_0 ik\hat{j}e + -\frac{\partial}{\partial t}(B_0\hat{j}e^{i(kz-\omega t)}) = B_0\omega i\hat{j}e^{i(kt-\omega t)} \tag{119}$$

6.8. Campos Magnético y Eléctrico

$$\hat{E} = \frac{\hat{F}}{q} \tag{120}$$

$$\hat{F}_q = q\hat{v} = \hat{B} \tag{121}$$

$$E_E = \frac{1}{2} = cv^2 \tag{122}$$

$$c = \frac{f_0 A}{z} \tag{123}$$

Si $|\hat{E}|$ es constante entonces:

$$|\hat{E}|_t = v \tag{124}$$

$$w_b = \frac{1}{2} L i^2 \tag{125}$$

$$|\hat{B}| = \frac{\mu_0 i N}{t} \tag{126}$$

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{t} \tag{127}$$

6.9. Cálculo de la energía

$$W_{EB} = W_E + W_B = \frac{1}{2}(\frac{f_0 A}{z})(Ez)^2 + \frac{1}{2}(\frac{\mu_0 N^2 A}{z})(\frac{Bz}{\mu_0 N})^2 \tag{128}$$

$$dW_{EB} = dW_e + dW_b \tag{129}$$

$$dW_{EB} = \frac{1}{2} = f_0 A E dt + \frac{1}{2\mu_0} A B^2 dz \tag{130}$$

6.10. Potencia Electromagnética

$$P_{EB} = \frac{dW_{EB}}{dt} = \frac{1}{2} f_0 A E c + \frac{1}{2\mu_0} A B^2 dz \tag{131}$$

6.11. Relación del campo eléctrico y magnético

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c \tag{132}$$

$$s = \frac{P_{EB}}{A} = \frac{1}{2} f_0 E^2 c + \frac{1}{2_{m_0}} B^2 c \tag{133}$$

O también si $\frac{E}{B} = c$

$$s = \frac{1}{2} f_0 E B c^2 + \frac{1}{2\mu_0} E B = \frac{1}{2\mu_0}[1 + f_0 \mu_0 c^2] \tag{134}$$

6.12. Módulo de vector de Poynting

$$s = \frac{EB}{\mu_0} \tag{135}$$

Al final:

$$\hat{s} = \frac{\hat{E} \times \hat{B}}{\mu_0} \tag{136}$$

6.13. Irradiancia promedio

$$|\hat{s}|_{r.m.s.} = \frac{1}{\mu_0}\frac{E_0}{\sqrt{2}} \times \frac{B_0}{\sqrt{2}} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}[\frac{W}{m^2}] \tag{137}$$

6.14. Valor RMS

$$f(t) = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt} \tag{138}$$

T es el periodo total de la función a la cual se le quiere sacar su valor RMS.

6.15. Interfaz plana, incidencia oblicua

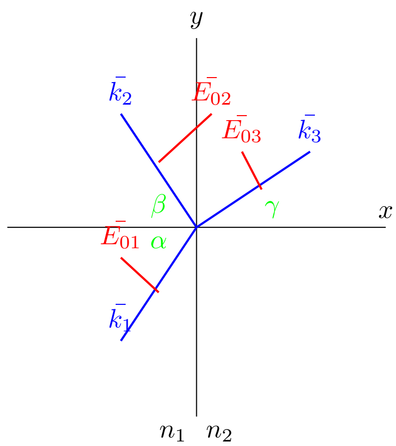


Figura 3: Onda 2D

$$\bar{k_1} = k_1[cos\alpha\hat{i} + sin\alpha\hat{j}] \tag{139}$$
$$\bar{k_2} = k_2[-cos\beta\hat{i} + sin\beta\hat{j}] \tag{140}$$
$$\bar{k_3} = k_3[cos\gamma\hat{i} + sin\gamma\hat{j}] \tag{141}$$

$$\bar{E_{01}} = E_{01}[-sin\alpha\hat{i} + cos\alpha\hat{j}] \quad (142)$$
$$\bar{E_{02}} = E_{02}[sin\beta\hat{i} + cos\beta\hat{j}] \quad (143)$$
$$\bar{E_{03}} = E_{03}[-sin\gamma\hat{j} + cos\gamma\hat{j}] \quad (144)$$

$r = x\hat{j} + y\hat{j}$ Entonces:

$$\bar{E_1} = \bar{E_{01}}e^{i(\bar{k_1}\bar{r}-\omega t)} = E_{01}[-sin\alpha\hat{i} + cos\alpha\hat{j}]e^{i[k_1(xcos\alpha+ysin\alpha)-\omega t]} \quad (145)$$
$$\bar{E_2} = \bar{E_{02}}e^{i(\bar{k_2}\bar{r}-\omega t)} = E_{02}[sin\beta\hat{i} + cos\beta\hat{j}]e^{i[k_2(xcos\beta+ysin\beta)-\omega t]} \quad (146)$$
$$\bar{E_3} = \bar{E_{03}}e^{i(\bar{k_3}\bar{r}-\omega t)} = E_{03}[-sin\gamma\hat{i} + cos\gamma\hat{j}]e^{i[k_3(xcos\gamma+ysin\gamma)-\omega t]} \quad (147)$$

Así: $\bar{E_1} = \bar{E_2} + \bar{E_3}$ Condición de frontera $E_{1y} + E_{2y} = E_{3y}$

Componente tangencial de $\bar{E}$ Entonces:

$$E_{01}cos\alpha e^{ik_1ysin\alpha - i\omega t} * e^{-i\omega t} \quad (148)$$
$$E_{02}cos\alpha e^{ik_2ysin\beta - i\omega t} * e^{-i\omega t} \quad (149)$$
$$E_{03}cos\alpha e^{ik_3ysin\gamma - i\omega t} * e^{-i\omega t} \quad (150)$$

Nota importante para la simplificación $e^a + e^b = e^c$ implica que $a = b$ y $b = c$

$$E_{01}cos\alpha e^{ik_1ysin\alpha - i\omega t} \quad (151)$$
$$E_{02}cos\alpha e^{ik_2ysin\beta - i\omega t} \quad (152)$$
$$E_{03}cos\alpha e^{ik_3ysin\gamma - i\omega t} \quad (153)$$

Al final: $k_1ysin\alpha = k_2ysin\beta$ implicando que k_1 y k_2 están en el mismo medio por lo tanto son iguales obteniendo que: $sin\alpha = sin\beta$ y por tanto $\alpha = \beta$ y éste resultado es la *Ley de la $reflexión$*. Además $k_1ysin\alpha = k_3sin\gamma$ sustituyendo podemos llegar a *La Ley de snell*: $n_1sin\alpha = n_2sin\gamma$

7. Formulario

7.1. Constantes

Velocidad del sonido: $v_{sonido} = 343[\frac{m}{s}]$
Velocidad de la luz: $c = 299792458[\frac{m}{s}]$
Constante de Planck: $h = 6{,}62606957 * 10^-34[\frac{J}{s}]$

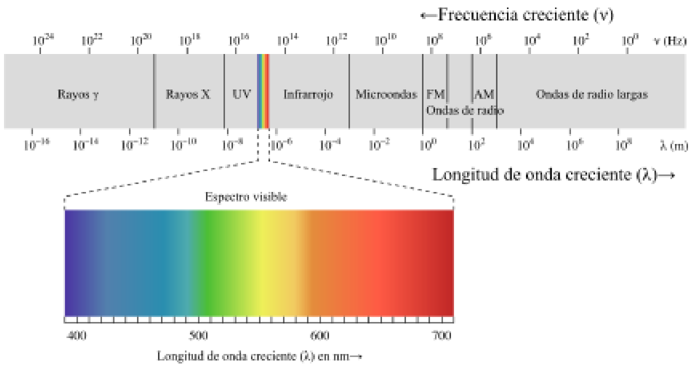


Figura 4: Espectro Electromagnético

7.2. Ondas

$$f = \frac{v}{\lambda} \tag{154}$$

$$f = \frac{\omega}{2\Pi} \tag{155}$$

$$y(x) = Asin(\omega x + \phi) \tag{156}$$

Donde:

- v es la velocidad de la onda.
- λ es la longitud de onda.
- f es la frecuencia.
- A es la Amplitud de la onda.
- ϕ es la fase inicial.
- $\omega x + \phi$ es la fase de oscilación.

7.3. Efecto Doppler

$$v' = v + v_0 \tag{157}$$

$$f' = (1 + \frac{v_0}{v}) \tag{158}$$

Donde:

- v' es la velocidad de las ondas respecto al observador.

- v es la velocidad de propagación del sonido.
- v_0 es la velocidad del observador.
- f' es la frecuencia captada por el observador.

El observador escuchará un sonido de mayor frecuencia debido que: $(1 + \frac{v_0}{v}) \geq 1$.

7.3.1. Observador alejándose de una fuente

$$f' = f * (1 - \frac{v_0}{v}) \tag{159}$$

7.3.2. Fuente acercándose a un observador

En este caso la frecuencia aparente percibida por el observador será mayor que la frecuencia real emitida por la fuente, lo que genera que el observador perciba un sonido más agudo.

Por tanto, la longitud de onda percibida para una fuente que se mueve con una velocidad v_s, será como se refiere en la ec 160.

$$f' = f * (\frac{v}{v - v_s}) \tag{160}$$

7.3.3. Fuente acercándose a un observador

$$f' = f * (\frac{1}{1 \pm \frac{v_s}{v}}) \tag{161}$$

Cuando la fuente se acerque al observador se pondrá un signo (-) en el denominador, y cuando la fuente se aleje se reemplazará por (+).
Si el observador y la fuente se mueven al mismo tiempo la ecuación se aprecia en 162.

$$f^{|} = f * (\frac{v \pm v_0}{v \pm v_s}) \tag{162}$$

7.4. Ley de Snell

$$n_1 * sin(\theta_1) = n_2 * sin(\theta_2) \tag{163}$$

$$n = \frac{c}{v} \tag{164}$$

Donde:

- n_1 es el índice de refracción del medio 1.
- n_2 es el índice de refracción del medio 2.

- θ_1 es el ángulo con el cual incide la luz.
- θ_2 es el ángulo con el cual se desvía la luz en el medio.

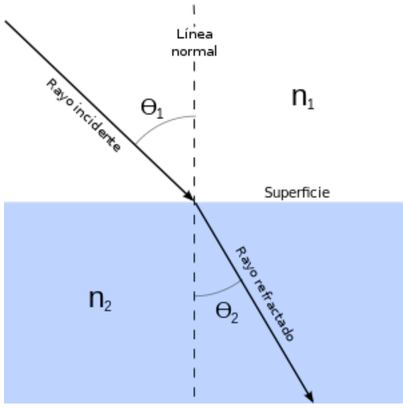


Figura 5: Ley de Snell

7.5. Ley de Brewster

$$tan(\theta_b) = \frac{n_2}{n_1} \tag{165}$$

Donde:

- θ_b es el ángulo de Brewster
- n_1 es el índice de refracción del medio 1
- n_2 es el índice de refracción del medio 2

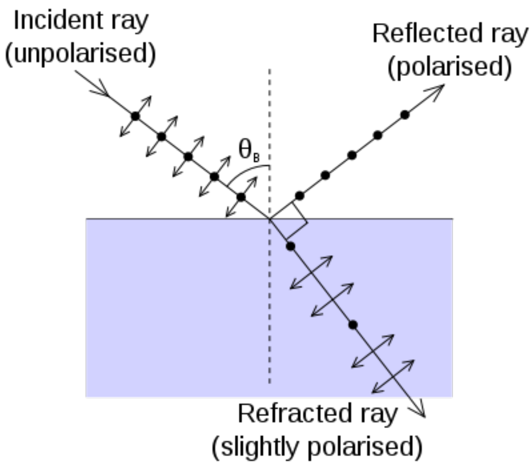


Figura 6: Ángulo de Brewster

7.6. Refracción

7.7. Ecuación de refracción de lentes

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \tag{166}$$

Donde:

- p es la distancia del objeto al lente
- q es la distancia de la imagen al lente
- R es el radio de curvatura del lente

Una variante de la ley de Snell para un caso particular es:

$$tan(\theta_i) = [\frac{sin(\theta_t) - \frac{d}{t}}{cos(\theta_t)}] \tag{167}$$

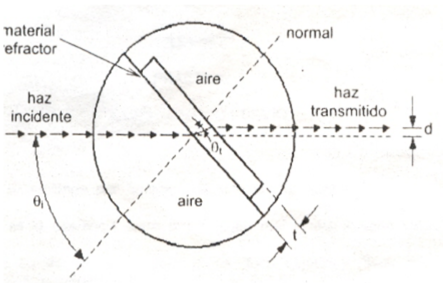


Figura 7: Refracción

8. Espejos

8.0.1. Ecuación de espejos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \tag{168}$$

8.0.2. Magnificación

$$M = -\frac{p}{q} \tag{169}$$

Donde:

- p es la distancia del objeto al espejo
- q es la distancia de la imagen al espejo

- f es la distancia del espejo a su foco

Para el espejo cóncavo la distancia focal es positiva y para el espejo convexo la distancia focal es negativa.

8.1. Lentes delgadas

$$\frac{1}{f} = (n-1) * (\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) \tag{170}$$

Donde:

- f es la distancia focal
- n es el índice de refrscción del material
- R_1 es el Radio de curvatura 1
- R_2 es el radio de curvatura 2

8.2. Planck

$$E = hf \tag{171}$$

$$E = \frac{hc}{\lambda} \tag{172}$$

Donde:

- E es la energía de un fotón