



UNIVERSIDAD
POLITÉCNICA
DE MADRID



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA

AERONÁUTICA Y DEL ESPACIO

GRADO EN INGENIERÍA AEROESPACIAL

TRABAJO FIN DE GRADO

Modelización y simulación del crecimiento de hielo en superficies.

AUTOR: Rodrigo Fernández Matilla

ESPECIALIDAD: Ciencias y Tecnologías Aeroespaciales

TUTOR PROFESIONAL: Mariola Gómez López

TUTOR ACADÉMICO: Marta Cordero Gracia

Junio 2020

Agradecimientos.

Personalmente, este trabajo lo he vivido como una de esas montañas, que te impone al principio, que se escalan paso a paso sin mirar dónde está la cima, y que cuando estás cerca, y parece que ya ha terminado, aparece la última subida. Es un desafío que disfrutas simplemente dejando la mente en blanco y confiando paso a paso en que llegarás, y que, en el momento de llegar arriba, su inmensidad te hace dudar de que lo hayas conseguido, y te hace apreciar ese momento en el que decidiste comenzarla, con más ganas y fe que conocimiento de lo que te esperaba. Y el orgullo que sientes en ese momento sólo es comparable al agradecimiento que sientes por haber compartido el camino y haber sido guiado por ciertas personas.

En primer lugar, quiero dar las gracias a Mariola por el infinito apoyo, consejos, motivación y pasión que ha mostrado por mí, no sólo durante este TFG, que es lo más apreciable, sino también desde las clases de Estadística y de Ampliación de Matemáticas. Me decidí por el trabajo gracias a ella, y no me he arrepentido en ningún momento de la decisión. Ha sembrado en mí la semilla de la investigación, y espero poder devolvérselo de alguna manera algún día. Quiero agradecer también al Departamento de Matemáticas (Mancebo, Ignacio Delgado) de la ETSIAE por los excelentes docentes que me han educado desde el primer curso al último, demostrando un gran apoyo y un gran interés por el alumnado. No me puedo olvidar de todos los profesores que me han educado, todos ellos de la escuela pública, desde los tres años hasta el bachillerato. Cada vez que reflexiono sobre ello, siento un profundo orgullo del camino por el que he llegado hasta aquí.

A nivel personal, quiero agradecer infinitamente el apoyo de mis padres, Ángeles y Gonzalo, desde pequeño, cuando quería ser diseñador de coches, hasta que entré en la escuela y, como si nada, acabé la carrera. Es obvio que sin la educación y los valores que me han enseñado, ni una miga de todo lo que conseguido habría sido posible. Por supuesto, quiero también agradecer al resto de mi familia, en particular a mi hermano, por todo el apoyo y los consejos, especialmente en mi vida universitaria. También a mi abuela, aunque piense que ahora soy piloto. A Paula, por traerme esa pizca de calma, alegría y felicidad que hace que todo funcione a las mil maravillas, más en esta época que nos tocó vivir. No me olvido de mis amigos, los de Bembibre y los de Madrid, que de más de uno y de dos aprietos me han sacado a rastras, y sin los cuales, a saber donde estaría.

Rodrigo Fernández

10 de julio de 2020

Resumen.

Son numerosos los incidentes y accidentes que, año tras año, están asociados a la formación de hielo en las aeronaves durante su vuelo. Este fenómeno, conocido como engelamiento, se produce por el impacto de gotas de agua en estado subenfriado (a una temperatura inferior al punto de fusión) sobre la aeronave, ya sea por precipitación, como es el caso de la lluvia engelante, o por atravesar una nube con una cantidad suficiente de estas gotas. Sea como fuere, los efectos sobre la aeronave son críticos, y pueden aparecer en cuestión de pocos minutos. Esto obliga a adquirir la capacidad de (a) preveer, (b) detectar y (c) proteger o remediar la formación de hielo.

A fin de comprender y cuantificar los efectos plasmados sobre el desempeño de la aeronave de este fenómeno, es necesario contar con un modelo físico que represente correctamente los mecanismos que lo producen. Pese a los numerosos esfuerzos, a día de hoy la precisión de los resultados no es la que cabría desear, distando de una manera apreciable de los resultados obtenidos mediante experimentación. Un aspecto común a todos los modelos es el enfoque modular, interaccionando tres modelos: la obtención del campo fluido por el flujo del aire sobre la aeronave (a través de métodos CFD), la predicción de las trayectorias de las gotas de agua, y el análisis termodinámico del propio fenómeno de la formación y crecimiento de hielo. Una correcta compenetración entre ambos es imprescindible para simular de manera precisa el engelamiento en aeronaves.

En este proyecto, el principal objeto de interés es el desarrollo de un modelo termodinámico de la formación de hielo basado en ecuaciones diferenciales, partiendo desde la misma modelización de cada fenómeno físico que tiene lugar, pasando por la discretización del modelo mediante el método de volúmenes finitos, y acabando con una simulación del engelamiento bajo unas condiciones dadas.

Abstract.

A remarkable number of aircraft incidents and accidents are related each year with in-flight ice accretion. This phenomenon, called in short icing, is due to the impact of supercooled water droplets (i. e. which temperature is below the dew point) on a certain part of the aircraft, in particular aerodynamic surfaces. This causes an almost instant performance decline, severely damaging aerodynamic attributes such as stability or drag, but also jeopardizing the operation of the engines. In order to reduce the potential danger of this meteorological hazard, it is necessary to (a) predict, (b) detect and (c) protect and mend.

So as to understand and evaluate the effects regarding the aircraft performance as a consequence of icing, it is vital to develop a physical model which accurately portrays the procedures that ice accretion involves. Although huge and numerous efforts have been made, the correlation between the numerical results and experimentation is not as close as wished, and more work is necessary to crack the code of this phenomenon. One thing in common of all models is their modular approach, as there are three major blocks which interact with almost no exclusion. Those are (a) the numerical solution of the aerodynamic airflow around the aircraft, (b) the prediction of the water droplets' trajectories and (c) the thermodynamic ice accretion process simulation. A proper rapport between the three of them is mandatory in order to obtain realistic results.

The main focus of this project is to develop a PDE (partial differential equation) based thermodynamic module, involving the physical modeling of the process, its discretization and its simulation under a certain set of conditions.

Contents

Agradecimientos.	iii
Resumen.	v
Abstract.	vii
Nomenclature	xi
Introducción.	xxi
A Absolute and relative orbital element sets.	1
A.1 Introduction.	1
A.2 Absolute element sets.	2
A.2.1 Workflow for transformations between absolute element sets.	2
A.2.2 Element sets.	2
A.3 Relative sets.	6
A.3.1 Workflow for transformations between ROEs.	6
A.3.2 Element sets.	9

Nomenclature

Physical constants

γ Coeficiente de dilatación adiabática de un gas $[-]$

T_C Temperatura del punto triple $[K]$

\mathbf{A} Matriz de autovalores de un sistema de ecuaciones diferenciales

λ_i Autovalor i -ésimo de la matriz del sistema

\mathbf{A} Matriz del sistema de una ecuación diferencial

$\mathbf{F}(\mathbf{U})$ Vector de flujos de una ecuación diferencial

\mathbf{I} Matriz identidad

$\mathbf{K}^{(i)}$ Autovector i -ésimo de la matriz del sistema

\mathbf{n} Vector normal exterior a una superficie

\mathbf{R} Vector de términos fuente de una ecuación diferencial

\mathbf{U} Vector de variables dependientes de un sistema de ecuaciones diferenciales

\mathbf{U} Vector de variables dependientes de una ecuación diferencial

\mathbf{W} Vector de variables dependientes canónicas de un sistema de ecuaciones diferenciales

\mathbb{I} Unidad imaginaria

$\mathcal{L}(\mathbf{U})$ Operador diferencial espacial de una ecuación diferencial en derivadas parciales

Ω Volumen geométrico

$\partial\Omega$ Frontera del volumen Ω

ϕ Superficie característica de una ecuación diferencial en derivadas parciales

Σ Superficie geométrica

$d\gamma, d\sigma, d\omega$ Diferenciales de arco, superficie y volumen

s Parámetro de longitud de arco

Cartesian coordinates

\bar{u}_i^n Solución exacta de un esquema numérico

$F_{i+1/2}$ Flujos numéricos en el extremo superior del volumen finito i -ésimo

Q Vector de parámetros del método de Roe

$U_{i+1/2}$ Solución computada en el extremo superior del volumen finito i -ésimo

$\Delta x, \Delta t$ Pasos espacial y temporal

ϵ_T Error de truncamiento de un esquema numérico

λ_j Longitud de onda del armónico j -ésimo

ω Relación de dispersión numérica

Ω_i Volumen de control i -ésimo

ϕ_j Fase del armónico j -ésimo

σ Número CFL

$\tilde{\mathbf{A}}$ Matriz promediada del sistema

$\tilde{\lambda}_i$ Autovalor i -ésimo de la matriz promediada del sistema

$\tilde{\omega}$ Relación de dispersión

$\tilde{K}^{(i)}$ Autovector i -ésimo de la matriz promediada del sistema

\tilde{u}_i^n Solución exacta de un modelo matemático

G_j Factor de amplificación o ganancia del armónico j -ésimo

I_i Centroides del volumen finito i -ésimo

k_j Número de onda del armónico j -ésimo

$N(\bullet)$ Esquema numérico

S	Velocidad de propagación de una discontinuidad
S_{max}^n	Velocidad máxima de propagación de información en un problema de evolución discretizado
u_i^n	Solución computada de un esquema numérico
V_j^n	Amplitud del armónico j -ésimo en el instante n -ésimo
$x_{i+1/2}$	Extremo superior del volumen finito i -ésimo

Characteristic numbers

Fr	Número de Froude	$Fr = \frac{U_c}{\sqrt{g_0 L_c}}$
Nu	Número de Nusselt	$Nu = \frac{h_c L_c}{k}$
Pr	Número de Prandtl	$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$
Re	Número de Reynolds	$Re = \frac{\rho_c U_c L_c}{\mu_c}$

Suffixes

∞	Variable en el infinito sin perturbar
c	Característica
d	Gota (<i>droplet</i>)
e	Borde de la capa límite (<i>edge</i>)
f	Película de agua (<i>water film</i>)
w	Agua (<i>water</i>)

Orbital elements

α	Difusividad térmica	$\left[\frac{m^2}{s} \right]$
α_w	Fracción volumétrica de agua en aire	$[- - -]$
\bar{U}	Vector velocidad de un cuerpo o fluido	$\left[\frac{m}{s} \right]$
\bar{u}	Vector velocidad adimensional de un cuerpo o fluido	$[- - -]$

β	Coeficiente de captación	$[- - -]$
\dot{m}	Flujo másico	$\left[\frac{kg}{s} \right]$
\dot{m}'	Flujo másico por unidad de área	$\left[\frac{kg}{s} \frac{1}{m^2} \right]$
\dot{Q}	Flujo de calor $[W]$	
\dot{q}	Flujo de calor por unidad de área	$\left[\frac{W}{m^2} \right]$
μ	Viscosidad dinámica de un fluido	$[Pa \cdot s]$
ν	Viscosidad cinemática de un fluido	$\left[\frac{m^2}{s} \right]$
$\bar{\tau}_{wall}$	Esfuerzo viscoso de un fluido sobre una pared	$[Pa]$
\bar{c}_f	Coeficiente de fricción viscosa sobre una pared	$[- - -]$
ρ	Densidad de un fluido	$\left[\frac{kg}{m^3} \right]$
θ	Temperatura absoluta adimensionalizada con la del punto triple	$[- - -]$
\tilde{T}	Temperatura	$[C]$
C_D	Coeficiente de resistencia de un cuerpo	$[- - -]$
C_p	Calor específico a presión constante	$\left[\frac{J}{kg K} \right]$
d	Diámetro de las gotas	$[\mu m]$
f	Fracción de agua congelada	$[- - -]$
h	Espesor de una película de agua	$[m]$
h_c	Coeficiente de transferencia de calor por convección	$\left[\frac{W}{m^2 K} \right]$
k	Conductividad térmica de un fluido	$\left[\frac{W}{m K} \right]$
L	Calor latente de un fluido	$\left[\frac{J}{kg} \right]$
LWC	Contenido en agua líquida, <i>liquid water content</i>	$\left[\frac{kg}{m^3} \right]$
MVD	Tamaño volumétrico medio de las gotas, <i>median volumetric diameter</i>	$[\mu m]$

p	Presión de un fluido	$[Pa]$
$p_{v,sat}$	Presión de vapor de saturación	$[Pa]$
r	Factor de recuperación adiabática	$[- - -]$
T	Temperatura absoluta	$[K]$

List of Figures

A.1 aaaa 9

List of Tables

Introducción.

El engelamiento es un fenómeno meteorológico causado esencialmente por el impacto de gotas en estado subenfriado, es decir, a una temperatura inferior al punto de fusión. Se trata de un estado metaestable, en el que una perturbación en la presión (por ejemplo mediante el impacto sobre una aeronave) es suficiente para inducir su cambio de fase, abocando a la formación de hielo sobre la aeronave. Los efectos causados por este fenómeno pueden ser críticos, al dañar seriamente el comportamiento aerodinámico del avión, el funcionamiento de los motores y de ciertos instrumentos. Es un fenómeno que causa un gran número de incidentes y accidentes aéreos al año, con una mayor incidencia en la aviación general, debido a su mayor precariedad en términos de equipamiento en relación a las aeronaves comerciales.

A fin de reducir los perjuicios del engelamiento, es necesario afrontarlo desde varios puntos. En primer lugar, la detección del hielo formado, lo cual puede realizarse *in situ* por el propio piloto o mediante instrumentos de detección. El segundo frente por el que avanzar es la predicción de las condiciones meteorológicas que inducen el engelamiento, lo cual parte de la base de que, actualmente, no existen datos explícitos acerca de ello, sino más bien correlaciones empíricas con variables con otros fines. El desarrollo de modelos numéricos meteorológicos junto a la reinterpretación de datos de satélites son la punta de lanza de esta táctica contra el engelamiento.

No obstante, las técnicas más pragmáticas contra la formación de hielo son las defensas anti-hielo. Estas se dividen en dos tipos generales: las meteorológicas, centradas en cómo evitar las condiciones que lo propicien y cómo actuar en caso de encontrarse en ellas, y las técnicas, centradas en la eliminación o prevención de hielo mediante dispositivos que actúen *in situ*. Estas últimas son numerosas y variadas, distinguiéndose las siguientes:

- Medidas mecánicas: Mediante la modificación de la forma del perfil, aprovechan la fragilidad del hielo para desprenderlo. Requieren de un espesor mínimo de hielo formado, lo que supone una desventaja frente al resto.
- Medidas térmicas: Funden el hielo mediante la utilización de diversos sistemas calefactores. Funcionan como prevención y como remedio.

- Medidas químicas: Basadas en rociar las superficies expuestas a la formación de hielo con líquidos anticongelantes.

Todo lo relativo al engelamiento como fenómeno meteorológico, así como las formas de proteger una aeronave ante él, se encuentra desarrollado en el capítulo 1.

La simulación de la formación de hielo requiere de la correcta interacción de tres módulos: un solver CFD, que proporcione la solución del flujo aerodinámico, un calculador de trayectorias de las gotas de agua, y un modelo termodinámico de la formación de hielo. La bibliografía es amplia en lo relativo a los códigos CFD, con muy diversas aproximaciones de la mecánica de fluidos, pero en este proyecto en particular se trabaja con datos obtenidos del solver TAU-Code [**TAU**code], desarrollado por la agencia aeroespacial alemana *DLR*. En cuanto a la simulación de las trayectorias de las gotas de agua, existen dos enfoques físicos bastante distintos: el lagrangiano, centrado en la dinámica de cada gota, y el euleriano, que analiza en su lugar volúmenes de control y variables fluidas. El módulo utilizado en este proyecto es el módulo GOTA, desarrollado en la misma ETSIAE en años anteriores. Como se puede prever, la tarea principal es por tanto desarrollar un módulo termodinámico, basado en un enfoque diferencial mediante la aplicación de las ecuaciones de conservación de la mecánica de fluidos. La información relativa a esta estructura de resolución se introduce en el capítulo 2.

Dado el enfoque planteado para el módulo termodinámico, es conveniente realizar una pequeña introducción al modelado y discretización de sistemas físicos mediante ecuaciones diferenciales. Se tratan temas como las leyes de conservación, los tipos de problemas físicos, los métodos más habituales para la discretización de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, todo ello en el capítulo 3. Se trata de una introducción que introduce los conceptos básicos tratados a la hora de resolver en la práctica cualquier ecuación diferencial, y en particular las ecuaciones de la formación de hielo. La discretización espacial y temporal de las ecuaciones toma un papel importante, como no podía ser de otra manera. Como complemento, el capítulo 4 reúne una colección de casos crecientes en dificultad de aplicaciones del método de los volúmenes finitos, en especial del método de Godunov. Se comienza por las ecuaciones de la advección y de Burgers, de las cuales es conocida la solución analítica, para pasar a la implementación del esquema de Roe para la resolución numérica de las ecuaciones de Euler de la mecánica de fluidos. Adicionalmente, se puede encontrar un escueto desarrollo de la solución analítica de estas ecuaciones en el apéndice B. En conclusión, los capítulos 3 y 4 actúan como la base del análisis desarrollado en el capítulo 5.

En el último capítulo del trabajo se afronta la difícil tarea de la modelización, discretización e implementación de las ecuaciones de la formación de hielo. En primer lugar, se realiza un riguroso

análisis de las ecuaciones integrales de la mecánica de fluidos, particularizando para las condiciones que distinguen al problema. Una vez se han alcanzado unas ecuaciones manejables y adecuadas para la discretización mediante volúmenes finitos, se procede a ello, consiguiendo una base para el esquema numérico final. A continuación, se pormenorizan los modelos de cada uno de los fenómenos termodinámicos que aparecen en las ecuaciones, y se procede a su discretización. En última instancia, se plantea la resolución numérica de las ecuaciones con ayuda de ciertas restricciones termodinámicas, acabando en unas ecuaciones discretizadas explícitas que permiten resolver el problema, dado un conjunto de datos proveniente del solver CFD TAU y del módulo GOTA. Para los test de validación desarrollados a posteriori, se utilizan en su lugar estimaciones de estos valores, en virtud de resultados ya existentes en la bibliografía.

Adicionalmente, el anexo A presenta una visión general sobre la consistencia, estabilidad y precisión de esquemas numéricos, algo que resulta muy interesante ya que al fin y al cabo se confía constantemente en que los esquemas y la discretización permitan obtener unos resultados cercanos a la realidad. Cada uno de los tres aspectos es presentado, caracterizado y ejemplificado de manera sencilla, de modo que se pueda obtener una visión general de ellos.

A modo de resumen, los objetivos principales de este proyecto son:

- Establecer una visión general del fenómeno del englamiento, a nivel físico y matemático.
- Plantear los conceptos básicos de la discretización de ecuaciones diferenciales y sus características.
- Desarrollar un modelo discreto de la termodinámica de la formación de hielo.

Absolute and relative orbital element sets.

A.1 Introduction.

The description of a spacecraft's state is done via a **state vector**. While it can include several variables with other purposes (*e.g.* filtering), its only information throughout this thesis is the position and velocity. There are two main ways to describe them:

A. Through cartesian coordinates

B. Through orbital elements

While the first option yields a very explicit and graphic-ready description, the second one usually has two advantages over it. Firstly, orbital elements are generally more intuitive about both the orbit and the position on it. Secondly, as orbital elements are generally slow-varying, they allow for a bigger integration timestep without losing accuracy. This is quite clear when studying keplerian motion, as most of the elements remain constant. Variational formulation and Hamilton-Jacobi theory (with the notion of changing variables as the full solution of a problem) relate to this fact.

Throughout this thesis, several sets of orbital elements have been used. The goal of this appendix is to clarify on the definition and differences between them. Absolute orbital elements (OEs) will be described first, followed by relative OEs (ROEs).

A.2 Absolute element sets.

A.2.1 Workflow for transformations between absolute element sets.

Consider two different sets of OEs, denoted by \underline{OE} and \widetilde{OE} . The transformation function $\mathbf{G}_{OE \rightarrow \widetilde{OE}}$ between them is defined by:

$$\widetilde{OE} = \mathbf{G}_{OE \rightarrow \widetilde{OE}}(\underline{OE}) \quad (\text{A.1})$$

A numerous amount of element sets have been historically defined. Nevertheless, some of them are much more commonly used than others. Although we will restrain ourselves to a short number of sets (say n), the number of transformations becomes arduously large as n increases ($n(n-1)$).

In order to reduce the number of transformation functions \mathbf{G} , let us use the later defined Keplerian OEs (KOE) as a pivot, that is, building only transformations to and from KOEs. This will in turn reduce the number of required functions to $2n$. The Keplerian set also has a further advantage: as it is the classical element set, almost every other set is defined explicitly in terms of it, so that transformations to and from them can easily be derived.

A.2.2 Element sets.

A.2.2.1 Keplerian orbital elements (KOE).

The Keplerian set of OEs (KOE) is one of the most widely used and classic options. While the last element may change from author to author, an usual definition is the following:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a & \equiv \text{Semimajor axis} \\ e & \equiv \text{Eccentricity} \\ i & \equiv \text{Inclination} \\ \Omega \text{ or } RAAN & \equiv \text{Right ascension of the ascending node} \\ \omega & \equiv \text{Argument of periapsis} \\ M & \equiv \text{Mean anomaly} \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

The last element commonly varies across literature, being substituted by the true anomaly θ , or when tackling the variation of orbital parameters, the mean anomaly at $t = 0$ (M_0) or the perigee time T_0 [3]. Mean anomaly is used due to the simplicity of its unperturbed variational equation, as

it has a constant rate (denoted by n). The geometrical meaning and definition of these elements is out from the scope of this thesis. Figure PUT FIGURE shows a simple geometrical drawing of the involved angles.

As it is seen in the figure before, the Keplerian elements become singular in two cases:

- A. If the inclination is null, the orbital plane is coincident with the inertial reference (ECI x-y) plane. The ascending node is hence undefined in this case.
- B. If the eccentricity is null, the periapsis is not defined, as it is the nearest point of the orbit around the central body. Thus, there is no angle defining its position, making the argument of periapsis nonsingular.

These singularities are unfortunately quite common in orbit design. They correspond respectively with equatorial and circular orbits. In order to avoid this behaviour, many different elements sets have been defined. Wiesel [3] shows an intuitive approach in chapter 2.10, solving either problem with a graphic approach.

A.2.2.2 Eccentricity/inclination vectors orbital elements (EIOE).

This set, originally defined for geostationary orbits in absolute terms [4], is used mainly as a relative OE set. Though it is actually not used along this thesis, its definition is helpful for introducing the common relative counterpart. In any case, let us proceed with the eccentricity and inclination vectors concept.

Eccentricity vector

Mathematically, the eccentricity vector is defined as [2]:

$$\underline{e} = \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \end{Bmatrix} = e \begin{Bmatrix} \cos \varpi \\ \sin \varpi \end{Bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

where the argument of perigee ω might be substituted with the sum $\omega + \Omega$ [4, as in]. A graphical representation can be seen later in the relative definition PUT FIGURE. As it arises from (A.3), it

substitutes the eccentricity and argument of perigee from the Keplerian OE set.

Inclination vector

The inclination vector is perpendicular to the orbital plane, similarly to the angular momentum, but inclination-sized. It is defined by its components as [4]:

$$\underline{i} = \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \cos \Omega \\ \sin \Omega \end{pmatrix}$$

The graphical interpretation is not as straightforward as for the eccentricity vector. Nonetheless, we are only interested in the definition itself. It is clear that this components substitute the out-of-plane related elements i and Ω .

Element set

The EI orbital element set is then composed of:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a & \equiv \text{Semimajor axis} \\ e_x = e \cos \omega & \equiv \text{x-projection of } \underline{e} \\ e_y = e \sin \omega & \equiv \text{y-projection of } \underline{e} \\ i_x & \equiv \text{x-component of } \underline{i} \\ i_y & \equiv \text{y-component of } \underline{i} \\ \lambda = \omega + M & \equiv \text{Mean argument of latitude} \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

A.2.2.3 Quasi-nonsingular orbital elements (QNSOE).

The quasi-nonsingular (QNS) orbital element set tackles the singularity existing in circular orbits [6], [1] [7]. It is quite similar to the formerly defined EI set, as it uses again the components of the eccentricity vector to substitute e and ω . The set is then defined as:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a & \equiv \text{Semimajor axis} \\ q_1 = e \cos \omega & \equiv \text{x-projection of } \underline{e} \\ q_2 = e \sin \omega & \equiv \text{y-projection of } \underline{e} \\ i & \equiv \text{Inclination} \\ \Omega & \equiv \text{Right ascension of the ascending node} \\ u = \omega + \theta & \equiv \text{True argument of latitude} \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

Though some authors use a different order, this is the one used in this thesis, so as to keep the time-varying element on the last place.

A.2.2.4 Equinoctial orbital elements (EOE).

The QNS set of elements only solved half of the singularity problem. To solve both, allowing the description of equatorial and polar orbits, the equinoctial set of elements is defined as:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a & \equiv \text{Semimajor axis} \\ P_1 = e \cos \varpi & \equiv \text{unclear physical meaning, similar to } e_x \\ P_2 = e \sin \varpi & \equiv \text{unclear physical meaning, similar to } e_y \\ Q_1 = \tan \frac{i}{2} \cos \Omega & \equiv \text{unclear physical meaning, similar to x-projection of inclination vector} \\ Q_2 = \tan \frac{i}{2} \sin \Omega & \equiv \text{unclear physical meaning, similar to x-projection of inclination vector} \\ L = \Omega + \omega + \theta & \equiv \text{True longitude} \end{array} \right. \quad (\text{A.6})$$

Not only does the order does change depending on the author, but also the symbols to refer to them.

A.2.2.5 Delaunay orbital elements (DOE).

Delaunay elements arise when formulating the two-body problem through analytic mechanics. All of the previous element sets are clearly non-canonical (*i.e.* they do not satisfy Hamilton's equations). Starting from the canonical set of elements (see appendix **PUT APPENDIX**), Delaunay elements

are reached after performing a canonical transformation, leading to the following definition:

$$\left\{ \begin{array}{ll} L = \sqrt{\mu a} & \equiv \text{unclear physical meaning} \\ G = L\sqrt{1 - e^2} & \equiv \text{Angular momentum} \\ H = G \cos i & \equiv \text{Polar component of angular momentum} \\ l = M & \equiv \text{Mean anomaly} \\ g = \omega & \equiv \text{Argument of perigee} \\ h = \Omega & \equiv \text{Right ascension of ascending node} \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

This set is mainly used in the context of perturbations, as it yields a very convenient expression for the perturbed Hamiltonian (see section **PUT SECTION HERE**).

A.3 Relative sets.

Relative elements are at the deepest roots of spacecraft relative motion, offering several advantages over cartesian relative states. First and foremost, they are more intuitive, but they also lead to a reduction of linearisation errors when expanding the deputy's movement around the chief's orbit [5]. In general, relative elements are defined as:

$$\delta \underline{OE} = \underline{f}(\underline{OE}_C, \underline{OE}_D) \quad (\text{A.8})$$

which is usually simplified by just taking the arithmetic difference between them, namely

$$\delta \underline{OE} = \underline{OE}_D - \underline{OE}_C \quad (\text{A.9})$$

where the subscripts denote respectively the deputy and chief spacecraft. The question now is, how do transformations between ROEs work. While The general workflow is described as follows:

A.3.1 Workflow for transformations between ROEs.

As for the absolute elements, Keplerian elements will be used as a pivot point. That means that only the transformations from and to RKOE's must be implemented. There are then two types of transformations:

A) From any ROE set to RKOE

While authors provide with scenarios expressed in their own ROE set, the element choice for our simulator is the Keplerian set. That leads us to the need of implementing a transformation from the former set to the latter. Let us assume then the following inputs and outputs:

- **Inputs:**

- $\widetilde{ROE} = \delta\widetilde{OE}$: Different type of ROEs, whose absolute equivalents are known as a function of the KOEs ($\widetilde{OE} = f(\underline{KOE})$)
- \underline{KOE}_C : Chief spacecraft/reference orbit KOEs

- **Output:**

- $\underline{RKOE} = \delta\underline{KOE}$: Keplerian ROEs

Taking equation (A.9) and particularizing it for KOEs:

$$\delta\underline{KOE} = \underline{KOE}_D - \underline{KOE}_C \quad (\text{A.10})$$

while the second term is known (input), the second one must be calculated through a certain process:

1. Calculate chief's OEs in the source phase space (*i.e.* \widetilde{OE}_C)

$$\widetilde{OE}_C = \mathbf{G}_{KOE \rightarrow \widetilde{OE}}(\underline{KOE}_C)$$

2. Compute deputy's OEs by direct addition

$$\widetilde{OE}_D = \widetilde{OE}_C + \delta\widetilde{OE}$$

3. Compute deputy's KOEs by back-transformation

$$\underline{KOE}_D = \mathbf{G}_{\widetilde{OE} \rightarrow KOE}(\widetilde{OE}_D)$$

4. Subtract chief's KOEs from deputy's

$$\delta\underline{KOE} = \underline{KOE}_D - \underline{KOE}_C$$

See graphic ?? for a more visual explanation.

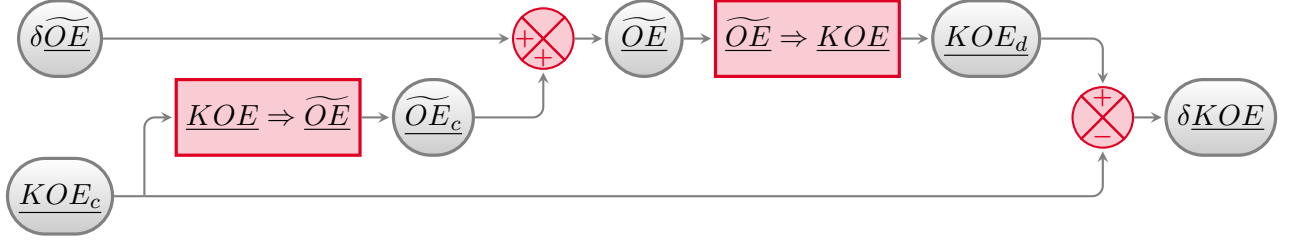


Figure A.1: Workflow for transforming any relative set into KOE.

B) From RKOE to any ROE set

In this case, let us assume the next inputs and outputs:

- **Inputs:**

- $\underline{RKOE} = \underline{\delta KOE}$: Keplerian ROEs
- $\underline{KOE_c}$: Chief KOEs

- **Output:**

- $\underline{ROE} = \underline{\delta OE}$: Different type of ROEs, whose absolute equivalents are known as a function of the KOEs ($\underline{OE} = f(\underline{KOE})$)

For this transformation, the equation A.8 particularized for this case acquires the following shape:

$$\underline{\delta OE} = \underline{OE_d} - \underline{OE_c} \quad (\text{A.11})$$

Equation A.11 can be tackled in two main ways:

- Using the pertinent transformations, compute the absolute elements for both spacecrafts $\underline{OE_d}$, $\underline{OE_c}$, and then calculate the arithmetic difference (in a A.3.1). See graphic ??.
- Expand the deputy absolute OEs (*i.e.* $\underline{OE_d}$) around the chief via a Taylor series expansion with respect to the Keplerian set of elements, retaining terms up to first order, achieving a linearised expression for the transformation. Mathematically:

$$\underline{OE_d} = \underline{OE}(\underline{KOE_d}) = \underline{OE}(\underline{KOE_c} + \underline{\delta KOE}) = \underline{OE_c} + \frac{\partial \underline{OE}}{\partial \underline{KOE}} \underline{\delta KOE} + \mathcal{O}(\underline{\delta KOE}^2)$$

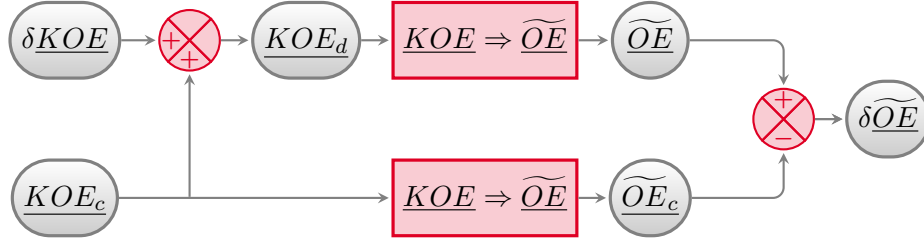


Figure A.2: Workflow for transforming RKOE into any other set.

hence,

$$\delta \widetilde{OE} \approx \widetilde{OE}_C + \frac{\partial \widetilde{OE}}{\partial \widetilde{KOE}} \delta \widetilde{KOE} - \widetilde{OE}_C = \frac{\partial \widetilde{OE}}{\partial \widetilde{KOE}} \delta \widetilde{KOE} \quad (\text{A.12})$$

where the Jacobian matrix is generally simple, as it usually only implies polynomial or trigonometric functions. Equation (A.12) is then a first order approximation of (A.11). Its validity is then reduced to a close proximity between both spacecrafts, which should be assessed. See figure PUT FIGURE for clarity.

A.3.2 Element sets.

Besides the ones derived directly from its absolute counterparts, a couple of additional ROE sets will be herewith defined and explained. This is due to one of two reasons. The first one is that some ROE sets are only defined in relative terms, lacking any absolute equivalent. The second one is that it might be interesting to dive in the meaning of the relative sets, deriving interesting relations that would otherwise be overlooked.

A.3.2.1 Eccentricity/inclination vectors relative orbital elements (REIOE).

This ROE set is the counterpart of the EI set (see A.2.2.2). It is nonetheless interesting to see the meaning and shape of it, as it is quite widely used in literature [1, 2, 7]. Let us first define its elements, to later analyze the meaning behind them:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta a & \equiv \text{Relative semimajor axis} \\ \delta e_x & \equiv \text{Relative x-component of } \underline{e} \\ \delta e_y & \equiv \text{Relative y-component of } \underline{e} \\ \delta i_x & \equiv \text{Relative x-component of } \underline{i} \\ \delta i_y & \equiv \text{Relative y-component of } \underline{i} \\ \delta \lambda & \equiv \text{Relative mean argument of latitude} \end{array} \right. \quad (\text{A.13})$$

Concept & meaning

The relative eccentricity vector components substitute the relative eccentricity and the relative argument of perigee. It is based on the eccentricity vector definition (A.3), and a graphical representation can be seen in figure **PUT FIGURE**:

$$\delta \underline{e} = \begin{Bmatrix} \delta e_x \\ \delta e_y \end{Bmatrix} = \delta e \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix}$$

which rules the in-plane relative motion (hand in hand with δa and $\delta \lambda$). As we know, there are two ways of tackling the transformation from RKOE to this set (see A.3.1). Though the nonlinear form is exact, let us analyze the linear version. If we assume that the difference in the eccentricity vector is due to that of the eccentricity and argument of perigee (δe , $\delta \omega$), we arrive to:

$$\delta \underline{e} \approx \begin{bmatrix} \cos \omega & -e \sin \omega \\ \sin \omega & e \cos \omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta e \\ \delta \omega \end{Bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

where we have neglected terms of second order and higher. The relative inclination vector is defined in an alternative way [2] (comparing with the absolute counterpart). Mathematically:

$$\delta \underline{i} = \sin \delta i \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix}$$

where θ is the angle seen in figure *PUTFIGURE*. Once again, let us analyze the linearized transformation from RKOE to this set, considering the differences δi and $\delta \Omega$. Applying the law of sines and the law of cosines for spherical trigonometry and assuming small values of δi and $\delta \Omega$, we arrive to:

$$\delta \underline{i} = \begin{Bmatrix} \delta i \\ \sin i \delta \Omega \end{Bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta i \\ \delta \Omega \end{Bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

where i is the inclination of the chief's orbit. Combining the results of (A.14) and (A.15) with the definitions of the remaining elements, we can easily arrive to an expression analog to (A.12):

$$\left\{ \begin{array}{c} \delta a \\ \delta e_x \\ \delta e_y \\ \delta i_x \\ \delta i_y \\ \delta \lambda \end{array} \right\} \approx \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & 0 & 0 & -e \sin \omega & 0 \\ 0 & \sin \omega & 0 & 0 & e \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \delta a \\ \delta e \\ \delta i \\ \delta \Omega \\ \delta \omega \\ \delta M \end{array} \right\} \quad (\text{A.16})$$

A.3.2.2 Peters-Noomen C set of relative orbital elements (CROE).

Defined by Peters & Noomen in [8], this set is also closely related with the orbit safety notion. It arises from the analysis of the Gauss Variational Equations (GVEs) applied to the relative dynamics between a deputy and a chief spacecraft, when the former performs a cotangential transfer. Without further ado, let us define them as:

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_1 = \delta p = \eta^2 \delta a - 2 a e \delta e & \equiv \text{Relative parameter of the orbit} \quad [L] \\ C_2 = e \delta p - p \delta e & [L] \\ C_3 = -e p (\delta \omega + \cos i \delta \Omega) & \\ C_4 = a (\delta \omega + \cos i \delta \Omega + \eta^{-1} \delta M) & \\ C_5 = -p (\cos \omega \delta i + \sin i \sin \omega \delta \Omega) & \\ C_6 = p (\sin \omega \delta i - \sin i \cos \omega \delta \Omega) & \end{array} \right. \quad (\text{A.17})$$

For a proper geometrical and conceptual description of the elements, please see [8]. As an introduction, the first four elements essentially determine the in-plane relative motion. C_1 , C_2 & C_3 arise from a very intelligent interpretation of the GVEs, with C_4 completing the element set. On the other hand, elements C_5 and C_6 describe the out-of-plane motion.

Bibliography

Bibliography

- [1] S. D’Amico. RELATIVE ORBITAL ELEMENTS AS INTEGRATION CONSTANTS OF HILL’S EQUATIONS. Tech. rep. TN 05-08. Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR), 2005 (cit. on pp. [4](#), [9](#)).
- [2] S. D’Amico and O. Montenbruck. PROXIMITY OPERATIONS OF FORMATION-FLYING SPACECRAFT USING AN ECCENTRICITY/INCLINATION VECTOR SEPARATION. In: *Journal of Guidance, Control & Dynamics* 29.3 (2006), pp. 554–563 (cit. on pp. [3](#), [9](#), [10](#)).
- [3] W. E. Wiesel. MODERN ASTRODYNAMICS. 2nd ed. Beavercreek, Ohio: Aphelion Press, 2010 (cit. on pp. [2](#), [3](#)).
- [4] M. Eckstein, C. Rajasingh, and P. Blumer. COLOCATION STRATEGY AND COLLISION AVOIDANCE FOR THE GEOSTATIONARY SATELLITES AT 19 DEGREES WEST. In: *CNES International Symposium on Space Dynamics*. Vol. 25. Oberpfaffenhofen, Germany: DLR GSOC, Nov. 1989, pp. 60–66 (cit. on pp. [3](#), [4](#)).
- [5] G. Gaias, C. Colombo, and M. Lara. ACCURATE OSCULATING/MEAN ORBITAL ELEMENTS CONVERSIONS FOR SPACEBORNE FORMATION FLYING. In: (Feb. 2018) (cit. on p. [6](#)).
- [6] D.-W. Gim and K. T. Alfriend. SATELLITE RELATIVE MOTION USING DIFFERENTIAL EQUINOCTIAL ELEMENTS. In: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 92.4 (2005), pp. 295–336 (cit. on p. [4](#)).
- [7] H. Schaub. RELATIVE ORBIT GEOMETRY THROUGH CLASSICAL ORBIT ELEMENT DIFFERENCES. In: *Journal of Guidance, Control & Dynamics* 27.5 (2004), pp. 839–848 (cit. on pp. [4](#), [9](#)).
- [8] T. Vincent Peters and R. Noomen. LINEAR COTANGENTIAL TRANSFERS AND SAFE ORBITS FOR ELLIPTIC ORBIT RENDEZVOUS. In: *Journal of Guidance, Control & Dynamics* 44.4 (2021), pp. 732–748 (cit. on p. [11](#)).