

# Elementos de ecuaciones diferenciales ordinarias

Ricardo Maurizio Paul

Pablo Castellanos García

Curso 2020–2021



*Duc, o parens celsique dominator poli,  
Quocumque placuit; nulla parendi mora est.  
Adsum inpiger. Fac nolle, comitabor gemens  
Maiusque patiar, facere quod licuit bono.  
Ducunt volentem fata, nolentem trahunt.*

— *Seneca*



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>VII</b>
0.1. Primeras definiciones . . . . .	VII
0.2. Ejemplos de modelado . . . . .	VII
0.2.1. Desintegración de sustancias radiactivas . . . . .	VII
0.2.2. Movimiento armónico simple . . . . .	VIII
0.2.3. Problema del valor inicial (PVI) . . . . .	VIII
0.2.4. Datación por carbono-14 (Premio Nobel de Química 1960) . . . . .	IX
<b>1. Ecuaciones lineales de primer orden</b>	<b>1</b>
1.1. Ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden . . . . .	1
1.1.1. Problema del valor inicial . . . . .	2
1.1.2. Estructura del espacio de soluciones . . . . .	3
1.2. El operador diferencial . . . . .	3
1.3. Ecuación diferencial lineal de primer orden . . . . .	4
1.3.1. Método de variación de constantes . . . . .	4
1.3.2. Problema del valor inicial . . . . .	5
1.4. Propagación de enfermedades . . . . .	6
1.4.1. Modelos simples para propagación de enfermedades . . . . .	6
1.4.2. Modelo SIS . . . . .	7
1.5. Ecuación de Bernoulli . . . . .	8
1.5.1. Método de cambio de variable . . . . .	8
1.5.2. Caída libre con rozamiento . . . . .	9
<b>2. Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden</b>	<b>11</b>
2.1. Problema del valor inicial . . . . .	12
2.2. Estructura del espacio de soluciones . . . . .	15
2.2.1. Caso homogéneo . . . . .	15
2.2.2. Caso no homogéneo . . . . .	17
2.3. Método de variación de constantes . . . . .	17
<b>3. Ecuación escalar de orden superior</b>	<b>19</b>
3.1. Matriz fundamental . . . . .	20
3.2. Exponencial de una matriz . . . . .	21
3.3. Métodos de cómputo . . . . .	22
3.3.1. Matrices diagonales . . . . .	22
3.3.2. Matrices diagonalizables con autovalores reales . . . . .	23
3.3.3. Problema del valor inicial . . . . .	23

3.3.4. Matrices diagonalizables con autovalores complejos . . . . .	24
<b>4. Análisis cualitativo de sistemas planos</b>	<b>33</b>
4.1. Interpretación geométrica de las trayectorias . . . . .	35
4.2. Representación gráfica de los sistemas planos . . . . .	35
4.2.1. Diagonalizable (dos autovalores distintos) . . . . .	35
4.2.2. Diagonalizable (un autovalor) . . . . .	37
4.2.3. No diagonalizable (autovalor real) . . . . .	37
4.2.4. No diagonalizable (autovalores complejos) . . . . .	38
4.2.5. Deshacer el cambio . . . . .	39
4.3. Oscilaciones mecánicas . . . . .	40
4.3.1. Movimiento oscilatorio armónico . . . . .	41
4.3.2. Movimiento oscilatorio amortiguado . . . . .	42
4.3.3. Caso general . . . . .	44
<b>5. Series de potencias</b>	<b>45</b>
<b>6. Transformada de Laplace</b>	<b>49</b>
6.1. Transformadas de Laplace de funciones elementales . . . . .	50
6.2. Transformada de Laplace inversa . . . . .	51
6.3. Transformada de Laplace y derivadas . . . . .	51
6.4. Propiedades de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^{-1}$ . . . . .	53
<b>Apéndices</b>	<b>57</b>
<b>A. Problemas resueltos</b>	<b>57</b>
A.1. Problemas del capítulo 1 . . . . .	57
A.2. Problemas del capítulo 2 . . . . .	60

# Introducción

## 0.1. Primeras definiciones

**Definición 0.1.1** Una ecuación diferencial es una ecuación de la forma

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$$

donde  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$  abierto.

**Definición 0.1.2** Se dice que  $x(t)$  es solución de una ecuación diferencial en el intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  si  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  y

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Se cumple además que:

- I) La función  $x$  tiene todas las derivadas hasta orden  $n$  y son continuas.
- II) El punto  $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) \in \Omega$  para todo  $t$  en  $I$ .

Supondremos que la ecuación diferencial está dada en forma normal,

$$x^{(n)} = f(t, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$$

llamamos  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  al dominio de  $f$ , esto se puede hacer localmente sin pérdida de generalidad gracias al teorema de la función implícita.

**Nota 0.1.1** Llamaremos orden de la ecuación diferencial al número  $n$ .

**Definición 0.1.3** Una ecuación diferencial es lineal si  $f$  es de la forma

$$f(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x + b(t)$$

## 0.2. Ejemplos de modelado

### 0.2.1. Desintegración de sustancias radiactivas

En este caso tenemos que  $x(t)$  es la masa en un tiempo  $t$  de un elemento radiactivo. La clave que nos permite modelar este fenómeno es que la probabilidad de desintegración de un átomo es la misma para todos los átomos de la muestra, independientemente de la masa del material.

Nos interesa la masa en función del tiempo relativa, esto es

$$\frac{\Delta x}{x \Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{x(t) \Delta t} = -\lambda, \quad \lambda > 0$$

la última igualdad se deduce de lo dicho anteriormente. Llamaremos al término  $\frac{\Delta x}{x \Delta t}$  la tasa de (de)crecimiento media. Tomando el límite  $\Delta t \rightarrow 0$  nos queda  $x'(t)/x(t) = -\lambda$  para todo  $t$ . Esto nos da una ecuación diferencial lineal de primer orden (de coeficientes constantes).

En este caso,  $x$  es una masa, por lo que no puede ser negativa, por tanto

$$f(t, x) = -\lambda x$$

con  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\Omega = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ .

Esta ecuación diferencial es resoluble, para ello tomamos primitivas en

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -\lambda \implies \log(x) = -\lambda t + c \implies x = e^c e^{-\lambda t} = k e^{-\lambda t}$$

con lo que nos queda  $x = k e^{-\lambda t}$ . Llamamos a esta familia de funciones *solución general* de la ecuación, y nos da todo el conjunto de soluciones variando  $k$ . En particular, el conjunto de soluciones es un subespacio vectorial de dimensión uno del espacio vectorial  $C^1(\mathbb{R})$ , que tiene dimensión infinita.

### 0.2.2. Movimiento armónico simple

Vemos ahora otro ejemplo de modelado más complicado, el movimiento del péndulo. El punto de masa  $m$  es el peso del péndulo y llamaremos  $\theta$  al ángulo formado entre la recta perpendicular al plano sobre el que esta apoyado el péndulo y que parte de su punto de apoyo y la cuerda. Denotaremos la longitud de la cuerda por  $l$ . Recordamos que  $F = ma$  donde  $a$  es la aceleración. Tenemos entonces que

$$-mg \sin \theta = ml\theta''$$

por tanto

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

puesto que  $\theta$  aparece dentro del seno, esta ecuación es no lineal y de orden 2, puesto que aparece la derivada segunda de  $\theta$ . En este caso  $f(t, \theta, \theta') = -\frac{g}{l} \sin \theta$  y  $\Omega = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ . Si  $\theta$  es suficientemente próximo a 0 podemos aproximar  $\sin \theta$  a  $\theta$  con lo que tenemos la ecuación lineal de segundo orden

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \theta.$$

Esta es la ecuación del movimiento armónico simple. Su solución general, que, recordamos, es el conjunto de todas las soluciones es

$$\theta(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

donde  $\omega^2 = g/l$ , demostraremos esto más adelante. Este conjunto de soluciones forma un espacio vectorial de dimensión 2. Demostraremos también que el conjunto de soluciones de una ecuación lineal de orden  $n$  es un espacio vectorial, o afín si existe un término independiente, de orden  $n$ .

### 0.2.3. Problema del valor inicial (PVI)

Dada una ecuación diferencial en forma normal

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$



nos dan los valores de la función y sus derivadas en un tiempo determinado  $t_0$ ,

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Estas condiciones determinan una única solución para la ecuación diferencial original.

#### 0.2.4. Datación por carbono-14 (Premio Nobel de Química 1960)

Existen diversos isótopos del carbono, entre ellos el carbono-12 el cual es estable y el carbono-14, que es el isótopo radiactivo más común. Podemos entonces usar el primer ejemplo con  $\lambda \sim \log 2/5730$  medido en años. La proporción de carbono-12 y carbono-14 es constante en la atmósfera. El carbono-14 al ser radiactivo debería desintegrarse y disminuir su concentración en la atmósfera pero este equilibrio se mantiene gracias a los rayos cósmicos que alcanzan la tierra. Debido a la fotosíntesis y a la cadena alimenticia esta proporción se mantiene constante en los seres vivos, énfasis en vivos. Al morir un ser vivo el carbono-12 se mantiene mientras que el carbono-14 disminuye en concentración, debido a su naturaleza radioactiva, a un ritmo que depende de  $\lambda$ . Debido a esto, analizando la proporción entre carbono-12 y 14 en material orgánico (madera, hueso, etc.) y comparándolo con uno vivo es posible determinar la edad del resto orgánico analizado. Veamos algunos ejemplos concretos.

**Ejemplo 0.2.1** Si la cantidad de carbono-14 en un microorganismo es de  $10^{-6}$  gramos ¿Qué cantidad habrá 3000 años después?

*Solución 0.2.1.1.* — Se entiende que el ciclo de vida del organismo es despreciable respecto a la edad que debemos datar. Tenemos que  $x' = -\lambda x$ , a tiempo 0, cuando el organismo muere, tenemos que  $x(0) = 10^{-6}$ . Se trata de un problema de valor inicial, ahora solo tenemos que encontrar  $x(3000)$ . Empezamos resolviendo la ecuación diferencial

$$x(t) = ke^{-\lambda t} = ke^{-\frac{\log 2}{5730}t}$$

por lo que hemos visto antes  $k = x(0) = 10^{-6}$  con lo que

$$x(t) = 10^{-6}e^{-\frac{\log 2}{5730}t}$$

podemos obtener ahora el resultado  $x(3000) = 6,95 \cdot 10^{-7}$  gramos.  $\square$

Normalmente no sabemos la cantidad total de carbono presente en un organismo antes de su muerte, ni el tiempo transcurrido desde entonces. Veamos ahora un ejemplo más cercano a la realidad.

**Ejemplo 0.2.2** En una excavación en Nippur, Babilonia, en 1950 el carbón vegetal de la viga de un techo dio 4,09 desintegraciones por minuto y gramo, mientras que la madera viva da 6,68 desintegraciones, también por minuto y gramo. Nos preguntamos en qué año se construyó en edificio.

*Solución 0.2.2.1.* — Llamaremos  $R(t)$  a la tasa de desintegración total

$$R(t) = \lambda x(t) = \lambda x(0)e^{-\lambda t},$$

donde  $x(0)$  es la cantidad de carbono-14 en el trozo de madera cuando fue cortada y  $t$  el tiempo transcurrido desde que se corta el árbol hasta 1950. Buscamos entonces el año de construcción, para ello observamos que  $R(0) = \lambda x(0)$ , de donde el cociente  $\frac{R(t)}{R(0)} = e^{-\lambda t}$  no depende de la cantidad de carbono-14 presente en el organismo vivo  $x_0$ . Sustituyendo los datos y despejando

$$\frac{4,09}{6,68} = \frac{R(t)}{R(0)} = e^{-\frac{\log 2}{5730}t} \implies t \approx 4055,$$

medido en años. Así, concluimos que el edificio se construyó en el 2105 a.C.

□

# Capítulo 1

## Ecuaciones lineales de primer orden

Comenzamos estudiando las ecuaciones diferenciales más sencillas, las ecuaciones lineales de primer orden, que, como veremos, son siempre resolubles; esto es, existe una fórmula explícita (aunque no necesariamente elemental<sup>1</sup>) que proporciona todo el conjunto de soluciones.

**Definición 1.0.1** *Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden son aquellas de la forma*

$$x' = a(t)x + b(t)$$

donde  $a$  y  $b$  son continuas en  $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$ .

Antes de resolver estas ecuaciones, centraremos nuestra atención en un problema más simple, la obtención de soluciones de una ecuación lineal homogénea de primer orden asociada a la ecuación original.

### 1.1. Ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden

**Definición 1.1.1** *Una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden es una ecuación de la forma*

$$x' = a(t)x.$$

con  $a$  continua en  $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$ .

Buscamos ahora las soluciones de la ecuación homogénea. Supongamos que la solución no se anula en ningún punto, entonces por el teorema de Bolzano  $x > 0$  o  $x < 0$  en  $(\alpha, \omega)$ . En este caso recurrimos a un método que llamaremos separación de variables, por el teorema fundamental del cálculo podemos escribir

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = a(t) \iff \log|x(t)| = \int_{\beta}^t a(s) ds + c, \quad \beta \in (\alpha, \omega).$$

---

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Elementary\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Elementary_function)

Para aligerar la notación escribiremos  $\int^t a(s) ds$  para referirnos a cualquier primitiva de  $a$ . Por lo anterior

$$x(t) = ke^{\int^t a(s) ds} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Vamos a demostrar ahora que la solución obtenida es la solución general de la ecuación homogénea.

**Teorema 1.1.1** *Todas las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea,  $x' = a(t)x$ , son de la forma*

$$x(t) = ke^{\int^t a(s) ds}. \quad (1.1)$$

*Demostración 1.1.1.1.* — Primero probamos que  $ke^{\int^t a(s) ds}$  es solución de la ecuación homogénea, para ello basta derivar en (1.1)

$$x'(t) = ka(t)e^{\int^t a(s) ds} = a(t)x(t).$$

Probamos ahora que no existen más soluciones, para ello, sea  $u(t)$  una solución arbitraria de la ecuación, consideramos la función

$$\Phi(t) = u(t)e^{-\int^t a(s) ds}$$

y calculamos su derivada obteniendo

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= u'(t)e^{-\int^t a(s) ds} - u(t)a(t)e^{-\int^t a(s) ds} \\ &= a(t)u(t)e^{-\int^t a(s) ds} - u(t)a(t)e^{-\int^t a(s) ds} = 0. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que la función  $\Phi$  es constante, por lo que  $u(t) = ke^{\int^t a(s) ds}$ . □

**Ejemplo 1.1.1** Obtener la solución general de la ecuación  $y' + 2ty = 0$ .

*Solución 1.1.1.1.* — Utilizando la técnica de separación de variables vista anteriormente

$$\frac{y'}{y} = -2t \iff \log|y| = -t^2 + c \iff y = ke^{-t^2} \quad \square$$

### 1.1.1. Problema del valor inicial

Vemos cómo se plantea el problema del valor inicial en el caso de ecuaciones homogéneas. Tenemos una ecuación lineal homogénea de primer orden, esto es  $x' = a(t)x$  y además queremos que  $x(t_0) = x_0$  para algún  $t_0 \in (\alpha, \omega)$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Sabemos que la solución general de la ecuación es de la forma (1.1) y podemos usar la libertad que tenemos para elegir la primitiva para ponerla como

$$x(t) = ke^{\int_{t_0}^t a(s) ds},$$

ahora queremos que  $x(t_0) = x_0$ , para ello notamos que

$$x_0 = x(t_0) = ke^{\int_{t_0}^{t_0} a(s) ds} = ke^0 = k,$$

hemos probado así que el problema del valor inicial tiene solución única, dada por

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \quad (1.1)$$

y además la solución está bien definida en el intervalo  $(\alpha, \omega)$ .

### 1.1.2. Estructura del espacio de soluciones

Observamos que el conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea de primer orden es un espacio vectorial de dimensión 1, o más precisamente un subespacio vectorial de dimensión 1 de  $C^1(\alpha, \omega)$ , es decir, el espacio vectorial de funciones de clase  $C^1$  en el intervalo  $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$ .

Vamos a ver cómo esto se deduce de la linealidad de la ecuación. Para ello definimos el operador diferencial

$$L : C^1(\alpha, \omega) \rightarrow C(\alpha, \omega)$$

$$x \mapsto \frac{dx}{dt} - a(t)x$$

Recordamos que decimos que una función es lineal cuando cumple

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y), \quad a, b \in \mathbb{K},$$

entonces la linealidad de  $L$  se deduce de la linealidad de todas las operaciones dentro de su definición.

**Nota 1.1.2** La linealidad de la ecuación diferencial equivale a la linealidad de  $L$  y, además,  $x$  es solución de  $x' = a(t)x$  si y solo si  $x \in \ker(L)$ . Sabemos del álgebra lineal que el núcleo de un homomorfismo vectorial es siempre un subespacio vectorial del espacio de dominio y, por tanto, el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea es un espacio vectorial.

## 1.2. El operador diferencial

Dada una ecuación diferencial lineal homogénea de la forma

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t),$$

podemos asociarle un operador diferencial

$$L = \frac{d^n}{dt^n} - a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} - \cdots - a_1(t)\frac{d}{dt} - a_0(t)$$

donde el término  $k$ -ésimo  $a_k(t)d^k/dt^k$  actúa sobre una función  $u(t)$  como

$$\left(a_k(t)\frac{d^k}{dt^k}\right)(u(t)) = a_k(t)\frac{d^k u}{dt^k}(t) = a_k(t)u^{(k)}(t).$$

Como derivar es lineal:

$$\frac{d}{dt}(\alpha u(t) + \beta v(t)) = \alpha \frac{d}{dt}u(t) + \beta \frac{d}{dt}v(t)$$

y multiplicar por una función fija también es lineal

$$a(t)(\alpha u(t) + \beta v(t)) = \alpha a(t)u(t) + \beta a(t)v(t),$$

el operador composición de las anteriores  $a_k(t)d^k/dt^k$  es lineal. Tenemos así que  $L$  es lineal como operador de tipo  $L : C^n(\alpha, \omega) \rightarrow C(\alpha, \omega)$ , asumiendo que  $a_k(t) \in C(\alpha, \omega)$  para todo  $k = 0, \dots, n-1$ .

**Nota 1.2.1** Evidentemente tenemos que las soluciones de una ecuación diferencial homogénea corresponden a las funciones  $x$  tales que  $L(x(t)) = 0$ , por lo que el conjunto de soluciones es el núcleo del operador  $L$  así definido.

**Nota 1.2.2** En general tenemos que  $x(t)$  es solución de una ecuación diferencial general si y solo si  $L(x(t)) = b(t)$ , donde hemos definido  $L$  mediante la ecuación homogénea asociada, por lo que el espacio de soluciones de una ecuación general lineal es un espacio afín de dimensión  $n$ .

### 1.3. Ecuación diferencial lineal de primer orden

Ahora que ya hemos obtenido la solución general §1.1 para ecuaciones lineales homogéneas de primer orden y también su solución única en el caso del problema del valor inicial §1.1.1, podemos afrontar el problema de obtener las soluciones de una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea

$$x' = a(t)x + b(t).$$

Consideramos para ello el operador diferencial asociado a su ecuación homogénea  $L = \frac{d}{dt} - a(t)$ .

**Lema 1.3.1** Si  $x_p$  es solución de una ecuación diferencial lineal y  $x_0$  es solución de la ecuación homogénea asociada, entonces

$$x_0 + x_p$$

también es solución.

*Demostración 1.3.1.1.* — Por la linealidad del operador diferencial

$$L(x_0(t) + x_p(t)) = L(x_0(t)) + L(x_p(t)) = b(t). \quad \square$$

**Lema 1.3.2** Si  $x_1$  y  $x_2$  son soluciones de una ecuación diferencial lineal, entonces  $x_1 - x_2$  es solución de la ecuación homogénea asociada.

*Demostración 1.3.2.1.* — Por la linealidad del operador diferencial

$$L(x_1 - x_2) = L(x_1) - L(x_2) = b(t) - b(t) = 0. \quad \square$$

**Corolario 1.3.2.1** La solución general de una ecuación diferencial lineal de primer orden es

$$x_p(t) + x_h(t)$$

donde  $x_p(t)$  es una solución particular de la ecuación y  $x_h(t)$  es la solución general de la ecuación homogénea asociada.

Nos proponemos ahora obtener una solución de forma explícita, haremos esto mediante el método de variación de constantes.

#### 1.3.1. Método de variación de constantes

Conocemos una forma explícita de calcular una solución de la ecuación homogénea asociada a una ecuación lineal §1.1. Conjeturamos que hay una solución particular de la ecuación lineal de la forma

$$x_p(t) = k(t)e^{\int^t a(s) ds} \quad (1.2)$$

e intentamos obtener  $k(t)$ . Buscamos entonces que se cumpla la igualdad

$$x'_p(t) = a(t)x_p(t) + b(t) = a(t)k(t)e^{\int^t a(s) ds} + b(t),$$

podemos derivar en (1.2) obteniendo

$$x'_p(t) = k'(t)e^{\int^t a(s) ds} + k(t)a(t)e^{\int^t a(s) ds}$$

y simplemente igualando y despejando hallamos la derivada  $k'$ :

$$k'(t) = b(t)e^{-\int^t a(s) ds}.$$

Tenemos así que la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = \left( k + \int^t b(s)e^{-\int^s a(u) du} ds \right) e^{\int^t a(s) ds}.$$

**Nota 1.3.3** No es necesario aprender esta ecuación de memoria, se utiliza el método de variación de constantes para obtener formas explícitas para cada problema en particular.

### 1.3.2. Problema del valor inicial

Como de costumbre consideramos la ecuación diferencial lineal junto a una condición  $x(t_0) = x_0$ , con  $t_0 \in (\alpha, \omega)$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Consideramos la solución general fijando el límite inferior a  $t_0$ ,

$$x(t) = \left( k + \int_{t_0}^t b(s)e^{-\int_{t_0}^s a(u) du} ds \right) e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

Sin más que sustituir  $t = t_0$  obtenemos que  $k = x_0$ , por lo que nuestra ecuación tiene solución única.

**Teorema 1.3.4** *El problema del valor inicial*

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t), & a, b \in C(\alpha, \omega) \\ x(t_0) = x_0, & t_0 \in (\alpha, \omega), \quad x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

*tiene solución única dada por*

$$x(t) = \left( x_0 + \int_{t_0}^t b(s)e^{-\int_{t_0}^s a(u) du} ds \right) e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}.$$

Las gráficas de las soluciones “rellenan” la franja  $(\alpha, \omega) \times \mathbb{R}$  sin cortarse. La rellenan porque para cualquier punto  $(t_0, x_0) \in (\alpha, \omega) \times \mathbb{R}$  hay una solución que pasa por él, y no se cortan entre sí porque sólo hay una solución que pase por cada punto, como consecuencia del teorema anterior.

**Ejemplo 1.3.1** Resuélvase el problema del valor inicial:

$$\begin{cases} x' + \frac{x}{t} = \cos t \\ x(\pi) = 1 \end{cases}$$

*Solución 1.3.1.1.* — Observamos que el intervalo donde vamos a resolver el problema es  $(0, +\infty)$ . Como estamos dividiendo por  $t$ , el origen no puede estar en el intervalo, y puesto que  $\pi$  sí ha de pertenecer escogemos  $(0, +\infty)$ . La ecuación homogénea asociada es  $x' + x/t = 0$ , separando variables y calculando primitivas a ambos lados obtenemos

$$\frac{x'}{x} = -\frac{1}{t} \iff \log|x| = -\log|t| + c \iff x = \frac{k}{t}.$$

Utilizamos ahora la técnica de variación de constantes, consideramos  $x_p(t) = k(t)/t$  e imponemos que es solución de la ecuación diferencial, por tanto

$$x'_p(t) = \frac{k'(t)}{t} - \frac{k(t)}{t^2}$$

asimismo

$$\cos t - \frac{x_p(t)}{t} = \cos t - \frac{k(t)}{t^2}$$

por lo que  $k'(t)/t = \cos t$ . Basta elegir entonces  $k(t)$  igual a una primitiva de  $t \cos t$ , integrando por partes  $k(t) = t \sin t + \cos t$ . Recordamos que la solución general de la ecuación diferencial es la suma de la solución general de la homogénea más la solución particular obtenida

$$x(t) = \frac{k}{t} + \frac{t \sin t + \cos t}{t} = \frac{1}{t}(k + t \sin t + \cos t).$$

Calculamos  $k$  usando la condición inicial  $x(\pi) = 1$ ,

$$\frac{1}{\pi}(k - 1) = 1 \iff k = \pi + 1.$$

Sustituimos en la solución general obteniendo así la solución única a nuestro problema

$$x(t) = \frac{1}{t}(\pi + 1 + t \sin t + \cos t).$$

□

## 1.4. Propagación de enfermedades

El pionero en la modelización de la propagación de enfermedades mediante ecuaciones diferenciales fue Ronald Ross (Premio Nobel de Medicina 1915). Los grandes avances en esta disciplina comenzaron cuando Kermack y McKendrick propusieron el modelo SIR en 1927, lo que se conoce como el inicio de la epidemiología moderna.

### 1.4.1. Modelos simples para propagación de enfermedades

Una enfermedad contagiosa se propaga a través de la interacción entre personas enfermas y sanas. Denotaremos  $x(t)$  al número de persona enfermas a tiempo  $t$ , asumiendo  $x(t) \in \mathbb{R}$ , y denotaremos  $y(t)$  al número de personas sanas. Asumiremos que solo existen personas sanas o enfermas, el SIR también incluye personas inmunizadas y muertos, que hacen variar el total de personas en nuestro modelo. Haremos un par de hipótesis para simplificar el modelo:

- i)  $x'$  depende del número de interacciones entre personas sanas y enfermas.
- ii) El susodicho número de interacciones es proporcional a  $xy$ .



La última hipótesis es debida a Hamer, quién la usó con éxito para modelar la propagación del sarampión en Inglaterra en 1905. Tenemos así un primer modelo sencillo, en una población de  $n$  individuos:

$$x' = kx(n - x).$$

Veremos que dependiendo de  $k$  la enfermedad desaparecerá o se hará endémica. Otra observación es que la ecuación es no lineal, por lo que se escapa de nuestra “zona de confort”, pero podremos resolverla fácilmente separando variables.

**Nota 1.4.1** La misma ecuación, conocida como ecuación logística, aparece también en modelos poblacionales.

Tal como hemos planteado la ecuación modela solo enfermedades sin cura, por ejemplo el SIDA, ya que no contemplamos que un paciente pueda pasar de enfermo a sano. Se puede incluir en el modelo una tasa de recuperación, quedaría entonces:

$$x' = kx(n - x) - \beta x,$$

donde  $\beta$  es la probabilidad de recuperación, independiente de factores poblacionales. Este es el modelo más simple con nombre, el modelo SIS, el cual modela enfermedades que no generan inmunidad. Este modelo posee una cualidad importante del modelo SIR, el teorema del umbral, que enuncia que en función de los parámetros la enfermedad desaparece o se hace endémica.

### 1.4.2. Modelo SIS

Nos proponemos resolver la ecuación:

$$x' = kx(n - x),$$

lo haremos mediante la técnica de las variables separadas. Para ello notamos que el número de personas infectadas y sanas es siempre mayor o igual que 0, en caso de que alguno sea cero no hay evolución, por lo que asumimos que  $0 < x < n$ . Separando las variables nos queda

$$\frac{x'}{x(n - x)} = k.$$

Para poder continuar debemos obtener una primitiva del término a la izquierda, separamos en fracciones parciales

$$\frac{1}{y(n - y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{n - y} = \frac{y(B - A) + nA}{y(n - y)} \implies A = B = \frac{1}{n}.$$

La primitiva que buscamos es pues:

$$\frac{1}{n}(\log(y) - \log(n - y)) = \frac{1}{n} \log \frac{y}{n - y}.$$

Sustituyendo y tomando primitivas a ambos lados de la ecuación original obtenemos

$$\frac{1}{n} \log \frac{x}{n - x} = kt + c \implies x = \frac{ne^{nc}e^{nkt}}{1 + e^{nc}e^{nkt}} \implies x = \frac{n}{1 + c'e^{-nkt}},$$

donde  $c'$  es una constante positiva. Observamos que en este caso el conjunto de soluciones no es un espacio vectorial. Según este modelo la pandemia infecta a toda la población,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = n$ . En la práctica, la evolución de una pandemia depende de las medidas que se tomen para evitar la infección, por lo que modelos más refinados modelan la probabilidad de contagio en función del tiempo.

## 1.5. Ecuación de Bernoulli

Recordamos que la ecuación del modelo SIS, donde  $\beta$  es la probabilidad de recuperación, es

$$x' = kx(n - x) - \beta x = (kn - \beta)x - kx^2.$$

Como hemos visto, por diversas razones, nos interesa que tanto la población como la probabilidad de recuperación varíen con respecto al tiempo, haciendo esto obtenemos la ecuación

$$x' = a(t)x + b(t)x^2.$$

Este es un caso particular de la ecuación de Bernoulli, planteada en 1695 y resuelta por Leibniz en 1696.

**Definición 1.5.1 (Ecuación de Bernoulli)** Una ecuación diferencial de Bernoulli es una ecuación de la forma:

$$x' = a(t)x + b(t)x^n.$$

Esta ecuación es de primer grado pero, evidentemente, no es lineal. Para poder resolverla necesitaremos una nueva técnica, el cambio de variable.

### 1.5.1. Método de cambio de variable

Asumiendo que  $x \neq 0$ , consideramos el cambio de variable  $y = x^{1-n}$ , de donde obtenemos  $y' = (1-n)x^{-n}x' = (1-n)x'/x^n$ . Dividiendo ahora por  $x^n$  y multiplicando por  $(1-n)$  en la ecuación de Bernoulli obtenemos la ecuación lineal

$$\begin{aligned} (1-n)\frac{x'}{x^n} &= (1-n)a(t)x^{1-n} + (1-n)b(t) \\ \iff y' &= (1-n)a(t)y + (1-n)b(t) \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.5.1** Resuélvase el problema del valor inicial:

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{t} + x^3 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

*Solución 1.5.1.1.* — Hacemos el cambio  $y = x^{-2}$ , entonces  $y' = (-2/x^3)x'$  siempre que  $x \neq 0$ , y así tenemos

$$y' = -\frac{2}{x^3}x' = -\frac{2}{x^3}\left(\frac{x}{t} + x^3\right) = -\frac{2}{t}y - 2.$$

Resolvemos ahora la ecuación homogénea asociada obteniendo la solución general  $y = k/t^2$ . Para calcular una solución particular de la ecuación, en vez de hacerlo mediante variación de constantes la obtenemos mediante el método de la *conjetura razonable*. Conjeturamos, por la forma de la ecuación, que  $y_p(t) = ct$ , ergo

$$c = y'_p(t) = -\frac{2}{t}y_p(t) - 2 = -2c - 2 \rightsquigarrow c = -\frac{2}{3}.$$

La solución general de la ecuación es

$$y(t) = -\frac{2}{3}t + \frac{k}{t^2}.$$

Deshacemos el cambio,  $y = 1/x^2$  o lo que es lo mismo  $x = \pm\sqrt{y^{-1}}$ , nos quedamos con la rama positiva, ya que  $x(1) = 1$ ,

$$x = \sqrt{\frac{1}{-\frac{2}{3}t + \frac{k}{t^2}}} = \frac{|t|}{\sqrt{k - \frac{2}{3}t^3}} = \frac{t}{\sqrt{k - \frac{2}{3}t^3}},$$

la última igualdad se debe a que necesitamos que  $x$  sea derivable, lo que nos fuerza a restringirnos a algún intervalo contenido en  $(-\infty, 0)$  ó  $(0, \infty)$ , y elegimos el segundo porque contiene al valor inicial 1. Sustituyendo en la condición inicial,

$$1 = x(1) = \frac{1}{\sqrt{k - \frac{2}{3}}} \rightsquigarrow k = \frac{5}{3},$$

la solución de nuestro problema del valor inicial es pues

$$\frac{t}{\sqrt{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}t^3}}.$$

□

**Nota 1.5.1** Si la ecuación del ejemplo 1.5.1 fuera lineal su espacio de soluciones sería un espacio vectorial. Puesto que el dominio de la ecuación  $x' = \frac{x}{t} + x^3$  es  $(0, \infty)$  en el caso lineal esperaríamos que el dominio de la solución sea el mismo, pero computando obtenemos que el dominio de  $x$  es  $(0, \sqrt[3]{5/2})$ , por lo que vemos que en ocasiones las ecuaciones no lineales poseen singularidades, “explotan”, en tiempo finito.

### 1.5.2. Caída libre con rozamiento

Tenemos un objeto que cae con rozamiento, es decir, la fuerza que lo tira hacia abajo es de  $mg$ , masa por aceleración de gravedad, mientras que la que la tira hacia arriba es una función de la velocidad  $kv^n$ , con  $n = 1, 2$ . Sabemos que  $mv' = mg - kv^n$ , obtenemos así la ecuación diferencial  $v' = -\frac{k}{m}v^n + g$ , lineal para  $n = 1$ , no lineal en caso contrario. En algunos casos, como la caída de un meteorito que pierde masa debido al rozamiento, los parámetros  $k$  y  $m$  dependen del tiempo. El caso con coeficientes constantes es resoluble, en el otro tenemos una ecuación de Riccati.

**Definición 1.5.2 (Ecuación de Riccati)** Una ecuación diferencial de Riccati es una ecuación de la forma:

$$x' = p(t)x^2 + q(t)x + r(t).$$

Notamos que en caso de no tener término independiente se trata de la ecuación de Bernoulli que, como ya hemos visto, se puede resolver mediante cambio de variable. De hecho, esta ecuación también se puede resolver mediante cambio de variable, pero solo si conocemos de antemano una solución particular: si  $x_p(t)$  es una solución particular, el cambio de variable  $x = x_p(t) + 1/y$  reduce la ecuación de Riccati a una lineal. No se conoce ningún algoritmo general para obtener una solución particular.



## Capítulo 2

# Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n \in C^1(\alpha, \omega)$  variables, que son funciones de clase  $C^1$  sobre un intervalo de  $\mathbb{R}$ .

**Definición 2.0.1** *Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es un sistema de la forma:*

$$\begin{cases} x'_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x'_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

**Definición 2.0.2** *Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden es de la forma:*

$$\begin{cases} x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

donde  $a_{ij}, b_i$  son funciones continuas en un intervalo  $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$  para  $i, j = 1, \dots, n$ . Podemos expresar un sistema de este tipo en forma matricial como

$$x' = Ax + b$$

donde

$$x = x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n, \quad b = b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

y las derivadas e integrales se aplican “coordenada a coordenada”, v.g.

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad A' = (a'_{ij}(t))_{i,j=1}^n, \quad \int A(s) ds = (\int a_{ij} ds)_{i,j=1}^n.$$

## 2.1. Problema del valor inicial

**Definición 2.1.1** Sean  $t_0 \in (\alpha, \omega)$  y  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^t \in \mathbb{R}^n$ , el problema del valor inicial asociado a 2.0.2 es de la forma

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

Probaremos que el problema de valor inicial tiene solución única en todo el dominio  $(\alpha, \omega)$ , para ello representaremos el problema del valor inicial como una ecuación integral, es una estrategia general en análisis intentar representar las funciones como integrales debido a su buen comportamiento. Ser solución del problema del valor inicial equivale a

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t A(s)x(s) + b(s) ds.$$

Denotaremos por  $C(I, \mathbb{R}^n)$  el espacio vectorial de las funciones continuas del intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^n$ .

A raíz del sistema 2.0.2 definimos el operador

$$T : C((\alpha, \omega), \mathbb{R}^n) \rightarrow C((\alpha, \omega), \mathbb{R}^n) \\ \varphi \mapsto x^0 + \int_{t_0}^t A(s)\varphi(s) + b(s) ds$$

Evidentemente  $x$  es solución del sistema si y solo si  $T(x) = x$ , por lo que si demostramos que el operador  $T$  tiene un único punto fijo habremos terminado.

**Nota 2.1.1** En realidad,  $T(\varphi) \in C^1((\alpha, \omega), \mathbb{R}^n)$  para  $\varphi \in C((\alpha, \omega), \mathbb{R}^n)$ ; hemos definido  $T$  con espacio de llegada  $C((\alpha, \omega), \mathbb{R}^n)$ , del que  $C^1((\alpha, \omega), \mathbb{R}^n)$  es subespacio vectorial, para poder aplicar el teorema del punto fijo de Banach, que requiere espacios de salida y llegada iguales.

Consideraremos  $\alpha < \tilde{\alpha} < t_0 < \tilde{\omega} < \omega$ , y demostraremos que  $T$  tiene un único punto fijo como operador en  $C([\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}], \mathbb{R}^n)$ . Haciendo tender  $\tilde{\alpha} \rightarrow \alpha$ ,  $\tilde{\omega} \rightarrow \omega$ , tendremos el resultado deseado.

Antes de seguir necesitamos algunos recordatorios:

**Definición 2.1.2** Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

**Teorema 2.1.2 (Punto fijo de Banach)** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $T : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva (es decir, Lipschitz con constante  $\alpha \in [0, 1)$ ), entonces  $T$  tiene un único punto fijo.

Este teorema tiene una consecuencia que nos será muy útil.

**Corolario 2.1.2.1** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $T : X \rightarrow X$  tal que  $T^m = T \circ \dots \circ T$  es contractiva para algún  $m \in \mathbb{N}$ , entonces  $T$  tiene un único punto fijo.

Definimos en  $C([\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}], \mathbb{R}^n)$  la distancia

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty = \max_{t \in [\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}]} \|f(t) - g(t)\|_2,$$

donde  $\|\cdot\|_2$  es la norma euclídea en  $\mathbb{R}^n$ . Así  $C([\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}], \mathbb{R}^n)$  es completo, como queríamos:

**Proposición 2.1.3**  $(C([\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}], \mathbb{R}^n), d)$  es un espacio métrico completo.

*Demostración 2.1.3.1.* — Para comprobar que  $d$  es una distancia, basta ver que

$$\|f\|_\infty := \max_{t \in [\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}]} \|f(t)\|_2$$

es una norma (basta usar que  $\|\cdot\|_2$  es una norma y las propiedades del máximo).

Para ver que es completo, consideramos  $(f_n)_n$  una sucesión de Cauchy arbitraria en  $C([\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}], \mathbb{R}^n)$ , lo que quiere decir que para cualquier  $\varepsilon > 0$  existe un natural  $N_0$  tal que si  $n, m \geq N_0$  entonces  $\|f_n - f_m\|_\infty = d(f_n, f_m) < \varepsilon$ . Fijamos ahora  $t \in [\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}]$  y consideramos la sucesión  $(f_n(t))_n \subset \mathbb{R}^n$ , que es de Cauchy porque  $\|f_n(t) - f_m(t)\|_2 \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ . Usamos la completitud de  $\mathbb{R}^n$  para obtener un límite  $f(t) = \lim_n f_n(t)$ , lo que nos proporciona una función  $f : [\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}] \rightarrow \mathbb{R}^n$  que será la candidata a límite. Lo único que nos queda por ver es que  $f \in C([\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}], \mathbb{R}^n)$  y  $f_n \xrightarrow{d} f$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n, m \geq N_0$  entonces  $\|f_n(t) - f_m(t)\|_2 \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$  para todo  $t \in [\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}]$ , y haciendo tender  $m \rightarrow \infty$ , se tiene  $\|f_n(t) - f(t)\|_2 \leq \varepsilon$  para todo  $t \in [\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}]$ , de donde  $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ .

Queda así demostrado que  $f_n \rightarrow f$  uniformemente; por un lado, esto implica que  $f_n \xrightarrow{d} f$  y, por otro, que  $f$  es continua (por serlo las  $f_n$ ).  $\square$

**Nota 2.1.4** La estrategia de esta demostración para probar la completitud es frecuente en espacios de funciones.

Para demostrar el teorema de existencia y unicidad de la solución, únicamente nos queda por ver que existe un  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $T^m$  es contractiva.

Sean  $f, g \in C([\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}], \mathbb{R}^n)$  y  $t \in [\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}]$ , entonces

$$\|T(f)(t) - T(g)(t)\|_2 = \left\| \int_{t_0}^t A(s)(f(s) - g(s)) ds \right\|_2 \leq \int_{t_0}^t \|A(s)(f(s) - g(s))\|_2 ds. \quad (2.1)$$

**Definición 2.1.3** Dada una matriz  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}$ , definimos su norma como operador como

$$\|M\|_{op} = \max_{\|x\|_2 \leq 1} \|Mx\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2}$$

**Nota 2.1.5** Para toda matriz  $M \in \mathcal{M}_{n \times n}$  y todo  $x \in \mathbb{R}^n$  se cumple  $\|Mx\|_2 \leq \|M\|_{op} \|x\|_2$ .

**Definición 2.1.4** Si  $A : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}$ , definimos su norma infinito como

$$\|A\|_\infty = \max_{x \in X} \|A(x)\|_{op}$$

Con esta notación, de (2.1) se deduce

$$\begin{aligned} \|T(f)(t) - T(g)(t)\|_2 &\leq \int_{t_0}^t \|A(s)\|_{op} \|f(s) - g(s)\|_2 ds \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A\|_\infty \|f - g\|_\infty ds \\ &= \|A\|_\infty \|f - g\|_\infty (t - t_0) \end{aligned}$$

Como  $t, t_0 \in [\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}]$ , se tiene  $\|T(f)(t) - T(g)(t)\|_2 \leq \|A\|_\infty \|f - g\|_2 (\tilde{\omega} - \tilde{\alpha})$  y, tomando supremos,  $\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq \|A\|_\infty (\tilde{\omega} - \tilde{\alpha}) \cdot \|f - g\|_\infty$ , es decir,  $T$  es Lipschitz de constante  $\|A\|_\infty (\tilde{\omega} - \tilde{\alpha})$ . Habríamos acabado en el caso de que  $\|A\|_\infty (\tilde{\omega} - \tilde{\alpha}) < 1$ ; si no, aún nos queda un poco de trabajo:

**Lema 2.1.6** *Para todo  $m \in \mathbb{N}$  se da la desigualdad:*

$$\|T^m(f)(t) - T^m(g)(t)\|_2 \leq \frac{\|A\|_\infty^m}{m!} |t - t_0|^m \|f - g\|_\infty.$$

*Demostración 2.1.6.1.* — El caso base  $m = 1$  está probado; suponemos el resultado cierto para  $m$  y para  $m + 1$  se tiene:

$$\begin{aligned} \|T^{m+1}(f)(t) - T^{m+1}(g)(t)\|_2 &= \|T(T^m(f))(t) - T(T^m(g))(t)\|_2 \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(s)\|_{op} \|T^m(f)(s) - T^m(g)(s)\|_2 ds, \end{aligned}$$

por la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \|A(s)\|_{op} \|T^m(f)(s) - T^m(g)(s)\|_2 ds &\leq \int_{t_0}^t \|A\|_\infty \frac{\|A\|_\infty^m}{m!} |s - t_0|^m \|f - g\|_\infty ds \\ &\leq \frac{\|A\|_\infty^{m+1}}{m!} \|f - g\|_\infty \int_{t_0}^t |s - t_0|^m ds, \end{aligned}$$

ahora sin más que integrar:

$$\begin{aligned} \|T^{m+1}(f)(t) - T^{m+1}(g)(t)\|_2 &\leq \frac{\|A\|_\infty^{m+1}}{m!} \|f - g\|_\infty \frac{|t - t_0|^{m+1}}{m+1} \\ &= \frac{\|A\|_\infty^{m+1}}{(m+1)!} |t - t_0|^{m+1} \|f - g\|_\infty, \end{aligned}$$

con lo que obtenemos el resultado. □

**Nota 2.1.7**  $\|A(s)(f(s) - g(s))\|_2 \leq \|A\|_\infty \|f - g\|_\infty$  no es más que la propiedad de Lipschitz para  $A$  (no hace falta la linealidad).

**Corolario 2.1.7.1** *Se da la desigualdad*

$$\|T^m(f) - T^m(g)\|_\infty \leq \frac{\|A\|_\infty^m}{m!} (\tilde{\omega} - \tilde{\alpha})^m \|f - g\|_\infty.$$

*Demostración 2.1.7.1.* — Tomamos supremos en  $t$  en el lema 2.1.6. □



En particular, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $T^m$  es contractiva, y queda así demostrado el teorema de Picard:

**Teorema 2.1.8 (Picard)** *Si  $A(t)$ ,  $b(t)$  son continuas en  $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ , entonces el problema del valor inicial:*

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

*tiene solución única en  $(\alpha, \omega)$ .*

**Nota 2.1.9** La misma demostración prueba existencia y unicidad para el caso no lineal bajo hipótesis de Lipschitzianidad en el “operador diferencial”.

Observamos que  $T^m(f_0)$ , donde  $f_0$  es un punto inicial cualquiera, converge exponencialmente rápido al punto fijo de  $T$ . Esto nos da un método numérico para aproximar la solución del PVI escogiendo un punto inicial simple (constante). También nos proporciona el desarrollo en serie (analítico) de la solución del PVI, este método se conoce como método de las iteraciones de Picard.

**Ejemplo 2.1.1** Consideramos el PVI:

$$\begin{cases} x' = ax & (\text{ecuación escalar}) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Iniciamos el proceso con la solución constante  $x_0$ ,

$$x_1 = T(x_0) = x_0 + \int_0^t ax_0 ds = x_0 + x_0 at,$$

reiterando tenemos que

$$x_n = T(x_{n-1}) = x_0 \sum_{k=0}^n \frac{(at)^k}{k!},$$

cuando  $n$  tiende a infinito nos queda  $x_\infty := \lim_n x_n = x_0 e^{at}$ .

**Nota 2.1.10** Este procedimiento también vale, con las modificaciones obvias, para el caso matricial, a diferencia de la separación de variables que ya vimos.

## 2.2. Estructura del espacio de soluciones

### 2.2.1. Caso homogéneo

Consideramos el sistema homogéneo  $x' = A(t)x$  y definimos la función:

$$\begin{aligned} T : C^1((\alpha, \omega), \mathbb{R}^n) &\rightarrow C \\ x &\mapsto x' - A(t)x, \end{aligned}$$

claramente  $x$  es solución de la ecuación si y solo si  $x \in \ker(T)$ . Puesto que  $T$  es lineal el conjunto de soluciones es un espacio vectorial, más propiamente un subespacio vectorial de  $C^1((\alpha, \omega), \mathbb{R}^n)$ .

**Teorema 2.2.1** *El espacio de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas es un subespacio vectorial de  $C^1((\alpha, \omega), \mathbb{R}^n)$  de dimensión  $n$ . Además, si  $\varphi_j$  es la solución del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T \end{cases}$$

*siendo  $t_0 \in (\alpha, \omega)$  arbitrario, tenemos que  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  es base del susodicho espacio de soluciones.*

*Demostración 2.2.1.1.* — Demostramos primero que los  $\varphi_j$  son linealmente independientes. Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  son tales que  $\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j \equiv 0$ , evaluando en  $t_0$  se obtiene

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j = 0 \implies \alpha_j = 0,$$

para todo  $j = 1, \dots, n$  como queríamos, por ser  $e_1, \dots, e_n$  base. Demostramos ahora que es sistema de generadores. Sea  $y$  solución de la ecuación lineal y sea  $y(t_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t$ , definimos  $z = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j$  y observamos que tanto  $y$  como  $z$  son soluciones de

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t \end{cases}$$

de donde deducimos que  $y = z$  en virtud del Teorema de Picard.  $\square$

**Definición 2.2.1** *Llamaremos matriz fundamental del sistema  $x' = A(t)x$  y la denotaremos  $\Phi(t)$  a cualquier matriz cuyas columnas formen base del espacio de soluciones del sistema.*

Con las definiciones anteriores tenemos que  $\Phi(t) := (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  es una matriz fundamental. Por la propia definición tenemos que si  $\Phi$  es una matriz fundamental de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas entonces la solución general del sistema es  $\Phi(t)c$  con  $c \in \mathbb{R}^n$ :

$$x(t) = \Phi(t)c = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n.$$

**Corolario 2.2.1.1** *Sea  $\Phi(t)$  una matriz cuyas columnas son solución del sistema  $x' = A(t)x$ , entonces son equivalentes:*

- I)  $\Phi(t)$  es matriz fundamental.
- II)  $\det(\Phi(t)) \neq 0 \forall t \in (\alpha, \omega)$ .
- III)  $\exists t_0 \in (\alpha, \omega) \det(\Phi(t_0)) \neq 0$ .

Las columnas de  $\Phi(t)$  son soluciones de  $x' = A(t)x$  si y solo si  $\Phi(t)$  es solución de la ecuación matricial  $X' = A(t)X$ , donde

$$\begin{aligned} X : (\alpha, \omega) &\rightarrow \mathcal{M}_{n \times n} \\ t &\mapsto x(t) \end{aligned}$$

Asimismo, que  $\Phi(t)$  sea matriz fundamental equivale a que sea solución de un problema de valor inicial de la forma:

$$\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(t_0) = X^0 \end{cases}$$

donde ambas ecuaciones son matriciales y  $\det(X_0) \neq 0$ . Notamos que la matriz fundamental  $\Phi(t) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  que definimos anteriormente es la única solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(0) = Id \end{cases}$$

### 2.2.2. Caso no homogéneo

La misma demostración del caso escalar prueba que la solución general de  $x' = A(t)x + b(t)$  es  $x_p(t) + x_h(t)$ , donde  $x_p(t)$  es una solución particular arbitraria del sistema y  $x_h(t)$  es la solución general del sistema homogéneo asociado  $x' = A(t)x$ . Por lo visto arriba,  $x_h(t) = \Phi(t)c$  con  $c \in \mathbb{R}^n$ , y como veremos más adelante existen diversos métodos para obtener  $x_p(t)$ .

## 2.3. Método de variación de constantes

Un método para obtener una solución particular  $x_p(t)$  de un sistema  $x' = A(t)x + b(t)$  es la variación de constantes, que como veremos es muy similar al al caso de una variable. Sabemos que la solución general de la ecuación homogénea asociada es  $x_h(t) = \Phi(t)c$ , conjeturamos la existencia de  $x_p(t) = \Phi(t)c(t)$ :

$$x'_p(t) = \Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) = A(t)\Phi(t)c(t) + \Phi(t)c'(t).$$

Además, puesto que es solución del sistema homogéneo

$$x'_p(t) = A(t)x_p(t) + b(t) = [A(t)\Phi(t)c(t)] + b(t),$$

igualando ambas expresiones

$$c'(t) = \Phi^{-1}(t)b(t).$$

Basta por tanto elegir  $c(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s) ds$ , hemos demostrado el siguiente teorema:

**Teorema 2.3.1** Sea  $\Phi(t)$  una matriz fundamental del sistema  $x' = A(t)x$ , entonces

$$x_p(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s) ds$$

con  $t_0 \in (\alpha, \omega)$  es una solución particular de  $x' = A(t)x + b(t)$  que satisface  $x_p(t_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$ .



## Capítulo 3

# Ecuación escalar de orden superior

**Definición 3.0.1** Una ecuación diferencial escalar de orden superior es una ecuación de la forma:

$$x^{(n)} = a_n(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x + a_0(t).$$

Definiendo las variables  $x_n = x^{(n-1)}$ , o lo que es lo mismo,  $x_n = x'_{n-1}$ , el sistema 3.0.1 es equivalente a:

$$\begin{cases} x_2 &= x'_1 \\ x_3 &= x'_2 \\ &\vdots \\ x_n &= x'_{n-1} \\ x'_n &= a_n(t)x_n + \cdots + a_1(t)x_1 + a_0(t) \end{cases}$$

donde la última ecuación es de primer orden, podemos también expresar este sistema matricialmente como  $x' = A(t)x + b(t)$  con:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) & \cdots & a_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0(t) \end{pmatrix}.$$

En el caso del sistema el problema del valor inicial consiste en fijar  $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ , lo que equivale aquí a fijar  $x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0)$ . Aplicando lo visto anteriormente el sistema tiene solución general dada por  $x_p(t) + x_h(t)$  donde, como de costumbre,  $x_p(t)$  es una solución particular y  $x_h(t)$  es la solución general de la ecuación homogénea asociada, la cual es un espacio vectorial de dimensión  $n$ .

Si  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  son soluciones linealmente independientes de 3.0.1 la matriz fundamental asociada al sistema equivalente es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

**Definición 3.0.2** Llamaremos Wronskiano de  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  al determinante

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (\alpha, \omega).$$

### 3.1. Matriz fundamental

Hemos dejado pendiente cómo obtener una matriz fundamental  $\Phi(t)$  asociada al sistema homogéneo  $x' = A(t)x$ , por ahora nos restringiremos al caso de coeficientes constantes, es decir,  $x' = Ax$  donde  $A$  es una matriz constante, no depende de  $t$  y nos centraremos en particular en funciones de dominio  $\mathbb{R}$ .

En el caso escalar,  $x' = ax$ , sabemos que la solución es  $x = ke^{at}$ , donde podemos interpretar  $e^{at}$  como una “matriz fundamental  $1 \times 1$ ”. En el caso matricial veremos que una matriz fundamental es  $\Phi(t) = e^{At}$ , aunque primero tendremos que definir la exponencial de una matriz y obtener métodos para computarla.

**Lema 3.1.1** Sea  $\Phi(t)$  la matriz fundamental asociada a las soluciones de

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = e_j \end{cases}$$

o, equivalentemente, la única solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = Id \end{cases}$$

Se dan las siguientes igualdades:

$$I) \Phi(0) = Id \qquad II) \Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s) \qquad III) \Phi(-t) = \Phi^{-1}(t)$$

*Demostración 3.1.1.1.* — I) La primera igualdad se sigue directamente de la definición.

II) Fijamos  $s$  y consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = \Phi(s) \end{cases}$$

Vamos a ver que tanto  $\Phi(t+s)$  como  $\Phi(t)\Phi(s)$  (como funciones en  $t$ ) son soluciones de ese problema. Consideramos primero  $X(t) := \Phi(t+s)$ , tenemos que  $X(0) = \Phi(s)$  y

$$X'(t) = \Phi'(t+s) = A\Phi(t+s) = AX(t),$$

similarmente para  $Y(t) := \Phi(t)\Phi(s)$ , aplicando la primera igualdad  $Y(0) = \Phi(0)\Phi(s) = \Phi(s)$  y

$$Y'(t) = \Phi'(t)\Phi(s) = A\Phi(t)\Phi(s) = AY(t).$$

III) Aplicando la primera y segunda igualdad en los respectivos miembros:

$$Id = \Phi(t + (-t)) = \Phi(t)\Phi(-t).$$

□

Para la matriz fundamental  $\Phi$  así definida,  $x(t) = \Phi(t)x^0$  es la solución del sistema

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

## 3.2. Exponencial de una matriz

Notamos que la matriz que acabamos de definir  $\Phi$  tiene muchas de las propiedades de la función exponencial, de hecho más adelante demostraremos que  $\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (tA)^k/k!$ , por ahora nos contentamos con la siguiente definición:

**Definición 3.2.1** Dada una matriz  $B$  se define  $\exp(B)$ , o con la notación habitual  $e^B$ , como

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}.$$

Presentamos ahora algunas propiedades típicas de la función exponencial que también cumple esta versión matricial, la mayoría son corolario de lo visto arriba.

**Proposición 3.2.1** Se cumplen las siguientes igualdades.

$$I) e^0 = Id$$

$$III) (e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$$

$$II) e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$$

$$IV) \frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$$

**Nota 3.2.2** No es cierto en general que  $e^{A+B} = e^Ae^B$ , solo se cumple si las matrices  $A$  y  $B$  conmutan.

**Teorema 3.2.3** La matriz  $\Phi(t)$  definida en 3.1.1 es igual a  $e^{At}$ , dicho de otro modo:

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}.$$

*Demostración 3.2.3.1.* — Haremos uso de las iteraciones de Picard, para ello definimos

$$T : C((\alpha, \omega), \mathcal{M}_{n \times n}) \rightarrow C((\alpha, \omega), \mathcal{M}_{n \times n})$$

$$\Psi \mapsto Id + \int_0^t A\Psi(s) ds.$$

Comenzamos la iteración con  $X_0(t) = Id$  y proseguimos:

$$\begin{aligned} X_1 &= T(X_0) = Id + \int_0^t A Id \, ds = Id + At \\ X_2 &= T(X_1) = Id + \int_0^t A(Id + As) \, ds = Id + At + \frac{A^2 t^2}{2} \\ &\vdots \\ X_n &= T(X_{n-1}) = Id + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \cdots + \frac{A^n t^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{A^k t^k}{k!}, \end{aligned}$$

tomando el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$  obtenemos el resultado.  $\square$

### 3.3. Métodos de cómputo

#### 3.3.1. Matrices diagonales

Podemos pasar ahora a ver cómo computar  $e^{At}$  para una matriz  $A$ . Comenzamos presentando un método para matrices diagonalizables. Sea  $A$  una matriz diagonal, entonces:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad y \quad x' = Ax \iff \begin{cases} x'_1 &= \lambda_1 x_1 \\ &\vdots \\ x'_n &= \lambda_n x_n \end{cases}$$

La solución general de este sistema viene dada por  $x_1(t) = k_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, x_n(t) = k_n e^{\lambda_n t}$  o lo que es lo mismo:

$$x = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Puesto que es solución del problema de valor inicial  $\{X' = AX \wedge X(0) = Id\}$  hemos comprobado a posteriori, por la unicidad de la solución, que la matriz de la izquierda es  $e^{At}$ . Para convencernos lo comprobamos también directamente, tenemos que

$$e^{At} = \exp \begin{pmatrix} \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t \end{pmatrix}^k,$$

ahora, explotando la diagonalidad

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t \end{pmatrix}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} (\lambda_1 t)^k & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda_n t)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

Hemos demostrado así de dos formas distintas el siguiente teorema:

**Proposición 3.3.1** *Sea  $A$  una matriz diagonal, podemos expresar  $e^{At}$  como:*

$$e^{At} = \exp \begin{pmatrix} \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$



### 3.3.2. Matrices diagonalizables con autovalores reales

Sea  $A$  una matriz diagonalizable con autovalores reales, sabemos, por álgebra lineal, que existe una matriz  $P$  tal que si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los autovalores de  $A$  y  $v_1, \dots, v_n$  son sus autovectores;

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{siendo } P = (v_1, \dots, v_n).$$

Con esto tenemos que la ecuación  $x' = Ax$  se puede escribir  $x' = PDP^{-1}x$ , con el cambio de variable  $y = P^{-1}x$  nos queda:

$$x' = Ax \iff x' = PDP^{-1}x \iff P^{-1}x' = DP^{-1}x \iff y' = Dy,$$

donde es fundamental que  $P$  (y por tanto  $P^{-1}$ ) sea una matriz constante para poder afirmar  $y' = (P^{-1}x)' = P^{-1}x'$ , con este cambio de variable podemos expresar la ecuación como

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} y \iff y = e^{Dt}k \iff y = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

con  $k = (k_1, \dots, k_n)^t \in \mathbb{R}^n$ . Tras estos preámbulos podemos obtener una expresión explícita del espacio de soluciones

$$\begin{aligned} x = Py &= (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = k_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + k_n e^{\lambda_n t} v_n \\ &= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = P e^{Dt} P^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notamos que  $e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_n t} v_n$  es base del espacio de soluciones. Con esto estamos preparados para afrontar el problema del valor inicial.

### 3.3.3. Problema del valor inicial

Consideramos el problema del valor inicial dado por el sistema con matriz  $A$  diagonalizable

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x^0 \end{cases} \iff \begin{cases} y' = Dy \\ y(0) = P^{-1}x^0 \end{cases}$$

considerando el mismo cambio de referencia de antes. La solución única de este sistema viene dada por  $y(t) = e^{Dt} P^{-1} x^0$ , volviendo a la base original  $x(t) = e^{At} x^0$ , donde hemos utilizado la unicidad de la solución. Igual que en el caso diagonal se puede ver directamente que si  $A = PDP^{-1}$  entonces  $e^{At} = P e^{Dt} P^{-1}$ , aquí lo hemos visto indirectamente, utilizando la unicidad de la solución.

De esta forma, la solución de la ecuación transformada es

$$y = e^{Dt}k = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n k_i e^{\lambda_i t} e_i,$$

siendo  $k^t = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Por tanto,

$$x = Py = (v_1, \dots, v_n) \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n k_i e^{\lambda_i t} v_i$$

**Nota 3.3.2** Una base del espacio de soluciones de  $x' = Ax$  es  $\{e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_n t} v_n\}$ .

Para el PVI

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x^0 \end{cases} \iff \begin{cases} y' = Dy \\ y(0) = P^{-1}x^0 \end{cases}$$

la solución única es  $y(t) = e^{Dt}P^{-1}x^0 \iff x(t) = Pe^{Dt}P^{-1}x^0 = e^{At}x^0$ . Por la unicidad de la solución al PVI, esto equivale a  $e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}$ .

### 3.3.4. Matrices diagonalizables con autovalores complejos

Consideramos ahora el caso diagonalizable general ( $A$  puede tener autovalores complejos).

**Proposición 3.3.3** Si  $A$  tiene coeficientes reales y  $\lambda$  es autovalor de  $A$ , entonces su conjugado  $\bar{\lambda}$  también lo es.

*Demostración 3.3.3.1.* — El polinomio característico de  $A$ ,  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  tiene coeficientes reales, es decir,  $p(\lambda) = \sum_{i=1}^n a_i \lambda^i$  con  $a_i \in \mathbb{R}$ .

Si  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  es raíz del polinomio, es decir,  $\sum_{i=1}^n a_i \lambda_0^i = 0$ , entonces

$$0 = \bar{0} = \overline{\sum_{i=1}^n a_i \lambda_0^i} = \sum_{i=1}^n \overline{a_i \lambda_0^i} = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} (\overline{\lambda_0})^i = \sum_{i=1}^n a_i (\overline{\lambda_0})^i = p(\overline{\lambda_0})$$

□

**Nota 3.3.4** Esto quiere decir que los autovalores no reales siempre vienen por pares, por lo que nos restringiremos de momento a subespacios de dimensión 2.

**Nota 3.3.5** En estas condiciones, ya sabemos resolver  $x' = Ax$  en  $\mathbb{C}$ , es decir, si permitimos como solución  $z(t) = x(t) + iy(t)$  porque todo lo que hemos visto funciona igual para números complejos. Vamos a ver cómo aprovechar esto para transformar una solución con números complejos en otra equivalente que sólo involucre números reales.

**Proposición 3.3.6** Si  $\lambda = a + ib$  es un autovalor complejo de  $A$  y  $w = u + iv$  un autovector asociado, entonces  $\bar{\lambda} = a - ib$  es también autovalor y  $\bar{w} = u - iv$  es un autovector asociado.

*Demostración 3.3.6.1.* — Como  $\lambda$  es un autovalor con autovector  $w$ , se cumple  $Aw = \lambda w$ , por lo que  $\overline{Aw} = \overline{\lambda w} = \bar{\lambda}\bar{w}$ ; por otro lado,  $\overline{Aw} = A\bar{w} = A\bar{w}$ , luego  $A\bar{w} = \bar{\lambda}\bar{w}$ .  $\square$

Sabemos, por lo visto anteriormente, que  $z(t) = e^{\lambda t}w$  y  $\bar{z}(t) = e^{\bar{\lambda}t}\bar{w}$  son soluciones de  $x' = Ax$  y son linealmente independientes. Sin más que desarrollar los productos, se llega a:

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{(a+ib)t}(u + iv) = e^{at}((u \cos bt - v \sin bt) + i(v \cos bt + u \sin bt)) \\ \bar{z}(t) &= e^{(a-ib)t}(u - iv) = e^{at}((u \cos bt - v \sin bt) - i(v \cos bt + u \sin bt)) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{pmatrix} \Re z(t) \\ \Im z(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z(t) + \bar{z}(t) \\ z(t) - \bar{z}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ \bar{z}(t) \end{pmatrix}$$

y  $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$ , se cumple que  $\Re z(t)$  y  $\Im z(t)$  siguen siendo soluciones y linealmente independientes, que además generan el mismo espacio de soluciones. Tenemos entonces las soluciones reales

$$\begin{cases} x(t) = \Re z(t) = e^{at}(u \cos bt - v \sin bt) \\ y(t) = \Im z(t) = e^{at}(v \cos bt + u \sin bt) \end{cases}$$

Consideramos  $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  con autovalores  $\lambda = a + ib, \bar{\lambda} = a - ib \in \mathbb{C}$ , con autovectores asociados  $w = u + iv, \bar{w} = u - iv$ . Se tiene

$$Au + iAv = Aw = \lambda w = (a + ib)(u + iv) = (au - bv) + i(av + bu),$$

de donde, igualando partes real e imaginaria,

$$\begin{cases} Au = au - bv \\ Av = bu + av \end{cases}$$

Ya hemos visto que  $u$  y  $v$  son linealmente independientes, lo que nos permite definir una matriz de paso  $P = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}$ . Entonces,

$$\begin{pmatrix} Au & Av \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au - bv & bu + av \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \implies P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Nos centramos ahora en sistemas de la forma  $x' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}x$ , que tienen por solución general  $x(t) = \exp \begin{pmatrix} at & bt \\ -bt & at \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Nos falta ahora calcular esta exponencial.

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} at & bt \\ -bt & at \end{pmatrix} &= \exp \left( a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} t + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t \right) = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix} \exp \left( b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t \right) \\ &= e^{at} \exp \left( b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t \right), \end{aligned}$$

por lo que nos basta analizar el caso  $y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}y$ , es decir, calcular  $\exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$ . Para ello, diagonalizamos la matriz  $M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ :

Su polinomio característico es  $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ , luego sus autovalores son  $\pm i$ . Los espacios invariantes son, respectivamente,

$$\ker(M - iI) = L \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right] \quad \text{y} \quad \ker(M + iI) = L \left[ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

con lo que una posible matriz de paso es  $P := \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ , con inversa  $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ . Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}^{-1} \implies \\ \exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{it} + e^{-it} & -ie^{it} + ie^{-it} \\ ie^{it} - ie^{-it} & e^{it} + e^{-it} \end{pmatrix} \implies \\ &\exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Volviendo al sistema que queríamos resolver, es decir,  $x' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} x$ , se tiene

$$A = P \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} P^{-1} \implies e^{At} = P \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt & e^{at} \sin bt \\ -e^{at} \sin bt & e^{at} \cos bt \end{pmatrix} P^{-1}$$

y, así, la solución general del problema es

$$x(t) = P \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt & e^{at} \sin bt \\ -e^{at} \sin bt & e^{at} \cos bt \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt & e^{at} \sin bt \\ -e^{at} \sin bt & e^{at} \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

En el caso diagonalizable más general, es decir, con autovalores reales y complejos, basta combinar todo lo que hemos visto: si  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  son los autovalores reales de  $A$  y  $a_1 \pm ib_1, \dots, a_s \pm ib_s$  ( $b_j > 0$ ) son sus autovalores complejos (en ambos casos se admiten repeticiones), se considera la matriz de paso

$$P = (v_1 \quad \dots \quad v_r \quad \Re w_1 \quad \Im w_1 \quad \dots \quad \Re w_s \quad \Im w_s)$$

siendo  $v_j$  y  $w_j$  autovectores asociados a  $\lambda_j$  y  $a_j + ib_j$ , respectivamente, de forma que se tiene la descomposición

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & \\ & & & a_1 & b_1 & & & \\ & & & -b_1 & a_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & a_s & b_s \\ & & & & & & -b_s & a_s \end{pmatrix},$$

así llamando  $R_k(t) = \begin{pmatrix} e^{a_k t} \cos b_k t & e^{a_k t} \sin b_k t \\ -e^{a_k t} \sin b_k t & e^{a_k t} \cos b_k t \end{pmatrix}$  la solución general del sistema es:

$$x(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & e^{\lambda_r t} & & \\ & & & R_1(t) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & R_s(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_{2s-1} \\ k_{2s} \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 3.3.1** Resolver el sistema  $x' = Ax$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

En primer lugar hay que diagonalizar la matriz: sus autovalores son  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2 + 3i$  y  $\lambda_3 = 2 - 3i$ , con espacios propios asociados

$$\ker(A - \lambda_1 I) = L \left[ \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -19 \end{pmatrix} \right], \quad \ker(A - \lambda_2 I) = L \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right], \quad \ker(A - \lambda_3 I) = L \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right],$$

con lo que podemos tomar

$$v_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -19 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \Re \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \Im \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Así, la matriz de paso  $P = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -19 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  es tal que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 3 \\ & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

que no es diagonal pero sí *diagonal por bloques*, lo que nos permite tomar la exponencial (por bloques) igual que en el caso diagonal:

Como  $A = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & 3 \\ & -3 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$ , su exponencial es

$$e^{At} = P \begin{pmatrix} e^t & & \\ & e^{2t} \cos 3t & e^{2t} \sin 3t \\ & -e^{2t} \sin 3t & e^{2t} \cos 3t \end{pmatrix} P^{-1},$$

con lo que la solución general del sistema es

$$x(t) = P \begin{pmatrix} e^t & & \\ & e^{2t} \cos 3t & e^{2t} \sin 3t \\ & -e^{2t} \sin 3t & e^{2t} \cos 3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Para terminar con el análisis de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, únicamente nos falta estudiar qué ocurre cuando la matriz que define el sistema no es diagonalizable.

**Teorema 3.3.7 (forma canónica de Jordan compleja)** Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  con  $s$  autovectores linealmente independientes. Entonces, existe una matriz no singular  $P$  tal que  $P^{-1}AP = B$ , donde  $B$  es una matriz diagonal por bloques, es decir,

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_s \end{pmatrix},$$

donde cada bloque de Jordan  $B_j$  ( $j = 1, \dots, s$ ) es una matriz de la forma

$$B_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix},$$

siendo  $\lambda$  autovalor de  $A$ .

**Nota 3.3.8** Cada autovalor de  $A$  aparece en  $B$  tantas veces como su multiplicidad algebraica. El número de bloques asociados a un mismo autovalor se corresponde con su multiplicidad geométrica.

**Nota 3.3.9** El caso diagonalizable corresponde al caso en que todos los bloques son  $1 \times 1$ .

Veamos cómo calcular la exponencial de un bloque de Jordan arbitrario:

$$B_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}}_D + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_N$$

Ya sabemos calcular  $e^{Dt}$ , y hallar  $e^{Nt}$  tampoco es complicado. Sus potencias sucesivas son

$$N^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad N^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad N^{n_j-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

y, en particular,  $N$  es nilpotente de orden  $n_j$ , por lo que basta aplicar la definición para obtener

$$e^{Nt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k = \sum_{k=0}^{n_j-1} \frac{t^k}{k!} N^k = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, como  $D = \lambda I$  y  $N$  conmutan, se tiene

$$e^{B_j t} = e^{Dt+Nt} = e^{Dt} e^{Nt} = (e^{\lambda t} I) e^{Nt} = e^{\lambda t} e^{Nt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} e^{\lambda t} \\ & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ & & e^{\lambda t} & \ddots & \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} \\ & & & \ddots & te^{\lambda t} \\ & & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Esto es suficiente en el caso de que  $A$  sólo tenga autovalores reales. Si hay alguno complejo, hay que trabajar un poco más:

**Teorema 3.3.10 (forma canónica de Jordan real)** Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Existe una matriz no singular  $P$  tal que  $P^{-1}AP = B$ , donde  $B$  es una matriz diagonal por bloques, cada uno de ellos de la forma:

- $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$ , si  $\lambda$  es un autovalor real de  $A$ ,
- $\begin{pmatrix} D & I_2 \\ & D \end{pmatrix}$ , con  $D = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  e  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , si  $a + ib$  ( $b > 0$ ) es un autovalor complejo de  $A$ .

A la vista de este teorema, sólo nos falta saber calcular la exponencial de matrices de la forma

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} D & I_2 & & \\ & D & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ & & & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & & & \\ & D & & \\ & & \ddots & \\ & & & D \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I_2 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ & & & 0 \end{pmatrix}}_N.$$

Observamos que estas dos matrices conmutan:

$$\begin{pmatrix} D & & & \\ & D & & \\ & & \ddots & \\ & & & D \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 0 & D & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & D \\ & & & 0 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} D & & & \\ & D & & \\ & & \ddots & \\ & & & D \end{pmatrix},$$

luego la exponencial de su suma es

$$\exp(\tilde{D})t = \exp \begin{pmatrix} Dt & & \\ & Dt & \\ & & \ddots \\ & & & Dt \end{pmatrix} \cdot \exp(Nt) = \begin{pmatrix} e^{at}R & & \\ & e^{at}R & \\ & & \ddots \\ & & & e^{at}R \end{pmatrix} \cdot \exp(Nt),$$

puesto que  $\exp \begin{pmatrix} Dt & & \\ & Dt & \\ & & \ddots \\ & & & Dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{Dt} & & \\ & e^{Dt} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{Dt} \end{pmatrix}$  y  $e^{Dt} = e^{at} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix}}_R$ . Por otro lado, igual que antes es fácil ver que

$$e^{Nt} = \sum_{k=0}^{n_j-1} \frac{t^k}{k!} N^k = \begin{pmatrix} I_2 & tI_2 & \frac{t^2}{2!}I_2 & \cdots & \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}I_2 \\ & i_2 & tI_2 & \ddots & \vdots \\ & & I_2 & \ddots & \frac{t^2}{2!}I_2 \\ & & & \ddots & tI_2 \\ & & & & I_2 \end{pmatrix}.$$

Juntándolo todo, llegamos a

$$\exp(\tilde{D})t = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}R & te^{\lambda t}R & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}R & \cdots & \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}e^{\lambda t}R \\ & e^{\lambda t}R & te^{\lambda t}R & \ddots & \vdots \\ & & e^{\lambda t}R & \ddots & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}R \\ & & & \ddots & te^{\lambda t}R \\ & & & & e^{\lambda t}R \end{pmatrix}$$

Ahora que ya sabemos resolver cualquier sistema con coeficientes constantes, centrémonos en cómo calcular la forma canónica de Jordan. La clave será encontrar propiedades de  $B$  que caractericen su estructura de bloques y que sean invariantes por semejanza, para poder hallarlas a partir de  $A$ .

Por ser  $P$  no singular, se cumple  $\dim \ker(B - \lambda I) = \dim \ker(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \dim \ker(A - \lambda I)$  o, equivalentemente,  $\text{ran}(A - \lambda I) = \text{ran}(B - \lambda I)$ .

Recordando la estructura de  $B$ , es fácil ver que  $\dim \ker(B - \lambda I) = \sum_{i=1}^r \nu_i(\lambda)$ , siendo  $\nu_i(\lambda)$  el número de bloques de tamaño  $i \times i$  del autovalor  $\lambda$ .

Consideramos ahora potencias sucesivas de la matriz  $B - \lambda I$ . Al elevar al cuadrado, la dimensión del núcleo aumenta en una unidad por cada bloque de tamaño mayor que 1:

$$B_j - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (B_j - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & \ddots & 0 \end{pmatrix},$$



por lo que  $\dim \ker(B - \lambda I)^2 = \nu_1(\lambda) + 2 \sum_{i=2}^r \nu_i(\lambda)$ . Análogamente, para las terceras potencias se tiene  $\dim \ker(B - \lambda I)^3 = \nu_1(\lambda) + 2\nu_2(\lambda) + 3 \sum_{i=3}^r \nu_i(\lambda)$  y, en general, para  $k = 1, \dots, r$ :

$$\begin{aligned} \dim \ker(B - \lambda I)^k &= \sum_{i=1}^{k-1} i\nu_i(\lambda) + k \sum_{i=k}^r \nu_i(\lambda) \\ &= \nu_1(\lambda) + \dots + (k-1)\nu_{k-1}(\lambda) + k[\nu_k(\lambda) + \dots + \nu_r(\lambda)] \end{aligned}$$

**Nota 3.3.11**  $P(B - \lambda I)^k P^{-1} = (A - \lambda I)^k$  y, como el rango es invariante por semejanza,  $\dim \ker(A - \lambda I)^k = \dim \ker(B - \lambda I)^k$ .

**Nota 3.3.12** Los números  $\nu_i(\lambda)$  caracterizan  $B$ , salvo permutación de bloques.

Denotamos  $\delta_i(\lambda) = \dim \ker(A - \lambda I)^i$ . De esta forma,  $r$  es el menor número natural tal que  $\delta_r(\lambda) = \delta_{r+1}(\lambda)$  y se verifica

$$\begin{cases} \delta_1(\lambda) &= \nu_1(\lambda) + \nu_2(\lambda) + \dots + \nu_r(\lambda) \\ \delta_2(\lambda) &= \nu_1(\lambda) + 2[\nu_2(\lambda) + \dots + \nu_r(\lambda)] \\ &\vdots \\ \delta_r(\lambda) &= \nu_1(\lambda) + 2\nu_2(\lambda) + \dots + r\nu_r(\lambda) \end{cases}$$

Restando a cada ecuación la anterior, queda un sistema triangular

$$\begin{cases} \delta_1(\lambda) &= \nu_1(\lambda) + \nu_2(\lambda) + \dots + \nu_r(\lambda) \\ -\delta_1 + \delta_2(\lambda) &= \nu_2(\lambda) + \dots + \nu_r(\lambda) \\ &\vdots \\ -\delta_{r-1} + \delta_r(\lambda) &= \nu_r(\lambda) \end{cases}$$

que tiene por solución

$$\begin{cases} \nu_1(\lambda) &= 2\delta_1(\lambda) - \delta_2(\lambda) \\ \nu_k(\lambda) &= -\delta_{k-1}(\lambda) + 2\delta_k(\lambda) - \delta_{k+1}(\lambda) \end{cases}$$

Pasar de la forma de Jordan compleja a la real se hace como uno podría esperar:

$$B_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & a+bi & 1 & & & \\ & 0 & a+bi & & & \\ & & & a-bi & 1 & \\ & & & 0 & a-bi & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} \rightsquigarrow B_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & a & b & 1 & 0 & \\ & -b & a & 0 & 1 & \\ & & & a & b & \\ & & & -b & a & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

pero esto requiere modificar también la matriz de paso compleja:

$$P_{\mathbb{C}} = (\dots \quad v_i \quad v_{i+1} \quad \dots) \rightsquigarrow P_{\mathbb{R}} = (\dots \quad \Re v_i \quad \Im v_i \quad \dots)$$

Falta únicamente ver cómo calcular  $P_{\mathbb{C}} = (v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n)$ . Para ello, es suficiente estudiar cómo afecta  $B$  a los vectores de la base canónica, puesto que  $A$  y la base  $\{v_i : i = 1, \dots, n\}$  se obtienen con el cambio de base dado por  $P_{\mathbb{C}}$ . Si el bloque  $j$ -ésimo de la matriz  $B$  (de tamaño  $n_j \times n_j$ ) empieza en el índice  $l + 1$ , se tiene

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Av_{l+1} & = & \lambda v_{l+1} \\ Av_{l+2} & = & \lambda v_{l+2} + v_{l+1} \\ & \vdots & \\ Av_{l+n_j} & = & \lambda v_{l+n_j} + v_{l+n_j-1} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} Av_{l+1} & = & \lambda v_{l+1} \\ Av_{l+k} & = & \lambda v_{l+k} + v_{l+k-1}, \ 1 < k \leq n_j \end{array} \right.$$

Estas ecuaciones (junto con el hecho de que  $P$  es invertible) caracterizan  $P$ .

## Capítulo 4

# Análisis cualitativo de sistemas planos

Hasta ahora nos hemos preocupado de *resolver* los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Ahora queremos entender el comportamiento *cualitativo* de sus soluciones.

Haciendo una analogía con el análisis real, un planteamiento cuantitativo es tener una fórmula explícita para una función y uno cualitativo es dar la forma global de su gráfica (crecimiento, convexidad, asíntotas...)

Si sabemos resolver explícitamente los sistemas, ¿por qué interesa hacer un análisis cualitativo?

- 1) En muchos casos, nos da información relevante del modelo estudiado. Por ejemplo, es importante saber si una enfermedad desaparece o se hace endémica, si una población oscila, se estabiliza o desaparece, si un tumor crece sin control o su crecimiento se termina estabilizando, si las oscilaciones de un puente acabarán pasando el umbral de rotura, etc.
- 2) En el caso no lineal, esto es esencialmente lo único que se puede decir (aparte de dar aproximaciones numéricas de la solución).

Nos centraremos exclusivamente en *sistemas planos* (matrices  $2 \times 2$ ) y en el caso homogéneo de coeficientes constantes, es decir, en sistemas de la forma

$$x' = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Estamos interesados en pintar las trayectorias u órbitas:

**Definición 4.0.1** Dada una solución  $(x_1(t), x_2(t))$  de un sistema  $x' = Ax$ , su trayectoria u órbita es el conjunto  $\{(x_1(t), x_2(t)) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ .

**Definición 4.0.2** El conjunto de todas las trayectorias de  $x' = Ax$  se llama diagrama de fases del sistema.

**Ejemplo 4.0.1** Dibujar el diagrama de fases del sistema  $x' = Ax$  siendo  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Como ya vimos, la solución general viene dada por

$$\begin{cases} x_1(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t \\ x_2(t) = -k_1 \sin t + k_2 \cos t \end{cases}$$

Nuestro objetivo es eliminar  $t$  de estas ecuaciones para obtener la relación entre  $x_1$  y  $x_2$  que define la trayectoria.

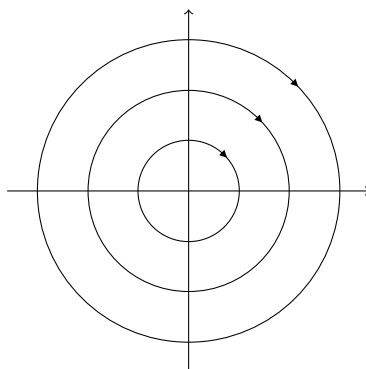
La solución se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}}_{\text{matriz de rotación}} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix},$$

así que, intuitivamente, la trayectoria es una circunferencia que pasa por  $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ . Analíticamente,

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (k_1^2 \cos^2 t + k_2^2 \sin^2 t + 2k_1 k_2 \cos t \sin t) + (k_1^2 \sin^2 t + k_2^2 \cos^2 t - 2k_1 k_2 \cos t \sin t) \\ &= k_1^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) + k_2^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = k_1^2 + k_2^2. \end{aligned}$$

Efectivamente, la trayectoria que pasa por  $\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$  es la circunferencia centrada en el origen de radio  $\sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ . Además, conforme  $t$  aumenta, la trayectoria se recorre en sentido horario.



**Teorema 4.0.1** *Las trayectorias no se cortan.*

*Demostración 4.0.1.1.* — Supongamos que las trayectorias asociadas a las soluciones  $x(t), y(t)$  de  $x' = Ax$  se cortan o, en otras palabras, que existen  $t_1, t_2$  tales que  $x(t_1) = y(t_2)$ . Lo que ocurre es que  $y(t) = x(t + (t_1 - t_2))$ , luego la trayectoria que definen ambas soluciones resulta ser la misma.

Para ver esto, definimos  $z(t) = x(t + (t_1 - t_2))$ . Se cumple que  $z' = Az$  y  $z(t_2) = x(t_1) = y(t_2)$ , luego, en virtud del teorema de existencia y unicidad, debe ser  $z(t) = y(t)$ .  $\square$

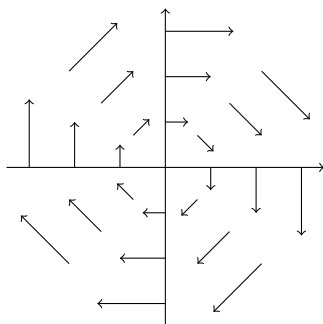
**Nota 4.0.2** Ya vimos que las gráficas de  $x(t), y(t)$  no se cortan (como subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$ ). Este resultado, más fuerte, quiere decir que no se cortan *sus proyecciones*, y se cumple porque  $A$  tiene coeficientes constantes (en caso contrario, no sería necesariamente cierto que  $z' = Az$ ).

## 4.1. Interpretación geométrica de las trayectorias

Una matriz  $A$ , o más precisamente su aplicación lineal asociada  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto Ax$ , es un *campo vectorial*. Una solución del sistema  $x' = Ax$  no es más que una curva  $t \mapsto x(t)$  tal que su velocidad  $x'(t)$  coincide con el valor del campo en  $x(t)$ , es decir, una *curva integral* del campo.

**Ejemplo 4.1.1** Sea la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Esbozar el campo vectorial que define.

La matriz  $A$  actúa sobre un vector genérico  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  como  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ . Observamos que  $\langle x, Ax \rangle = 0$ , es decir, la velocidad es ortogonal a la posición en todo punto, y además  $\|x\| = \|Ax\|$ , es decir,  $A$  no cambia la norma de los vectores. El campo vectorial que define esta matriz es, entonces,



## 4.2. Representación gráfica de los sistemas planos

Nos centramos ahora en esbozar el diagrama de fases de un sistema plano general  $x' = Ax$ , siendo  $B = P^{-1}AP$  su forma de Jordan. El cambio de variable  $y = P^{-1}x$  transforma el sistema  $x' = Ax$  en  $y' = By$ , mucho más manejable. Las formas de Jordan posibles son

- a)  $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- b)  $B = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}$
- c)  $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$
- d)  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ,  $b > 0$

Haremos los diagramas de fase para las formas de Jordan, y luego desharemos el cambio de variable para obtener el diagrama final.

### 4.2.1. Diagonalizable (dos autovalores distintos)

Consideramos el sistema  $y' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} y$ , con  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Como hemos visto, la solución general del sistema es

$$\begin{cases} y_1 = k_1 e^{\lambda_1 t} \\ y_2 = k_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Vamos a fijar distintos valores de  $k_1, k_2$  (i.e. distintos valores iniciales) para ver cómo evoluciona el sistema a partir de ellos.

Empezamos por fijar valores sencillos, en los que algún valor inicial es 0 (valores iniciales en algún eje de coordenadas):

- $k_1 = 0, k_2 = 0$ : en este caso, la trayectoria es  $\{(0, 0)\}$ . Como consiste en un único punto, que permanece estable a lo largo del tiempo, se llama *punto de equilibrio*.
- $k_1 > 0, k_2 = 0$ : la trayectoria es  $\{(k_1 e^{\lambda_1 t}, 0) : t \in \mathbb{R}\} = \{(y_1, 0) : y_1 > 0\}$
- $k_1 < 0, k_2 = 0$ : la trayectoria es  $\{(k_1 e^{\lambda_1 t}, 0) : t \in \mathbb{R}\} = \{(y_1, 0) : y_1 < 0\}$
- $k_1 = 0, k_2 > 0$ : la trayectoria es  $\{(0, k_2 e^{\lambda_2 t}) : t \in \mathbb{R}\} = \{(0, y_2) : y_2 > 0\}$
- $k_1 = 0, k_2 < 0$ : la trayectoria es  $\{(0, k_2 e^{\lambda_2 t}) : t \in \mathbb{R}\} = \{(0, y_2) : y_2 < 0\}$

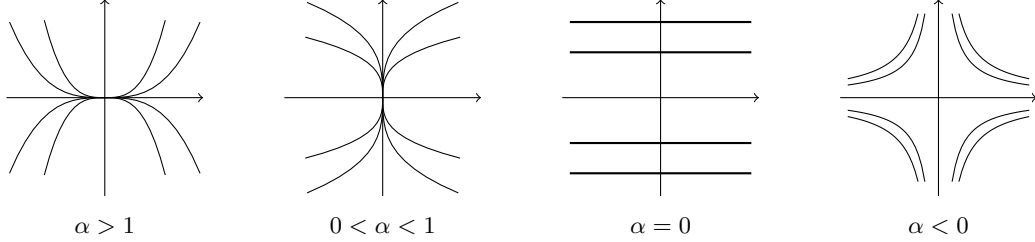
En general, la trayectoria que pasa por el punto  $(\frac{k_1}{k_2}) \in \mathbb{R}^2$ , no necesariamente en algún eje, es  $\{(k_1 e^{\lambda_1 t}, k_2 e^{\lambda_2 t}) : t \in \mathbb{R}\}$ . Si el punto no está sobre ninguno de los ejes, se cumple  $k_1 \neq 0 \neq k_2$ , con lo que se puede dividir entre ellos. Elevando la primera coordenada a  $\lambda_2$  y la segunda a  $\lambda_1$ , se tiene

$$\begin{cases} y_1^{\lambda_2} = k_1^{\lambda_2} e^{\lambda_1 \lambda_2 t} \\ y_2^{\lambda_1} = k_2^{\lambda_1} e^{\lambda_1 \lambda_2 t} \end{cases} \implies \left(\frac{y_1}{k_1}\right)^{\lambda_2} = e^{\lambda_1 \lambda_2 t} = \left(\frac{y_2}{k_2}\right)^{\lambda_1}. \quad (4.1)$$

Como  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , alguno de los dos tiene que ser distinto de 0; podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que es  $\lambda_1$ . Despejando en (4.1), llegamos a

$$y_2 = k_2 \left(\frac{y_1}{k_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}$$

es decir, una relación de la forma  $y_2 = c y_1^\alpha$ . Distinguimos casos en función del valor de  $\alpha$ :



- Si  $\alpha < 0$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tienen necesariamente signos opuestos. En este caso, el diagrama de fases (o más específicamente, el punto de equilibrio) recibe el nombre de *punto de silla* (piénsese en las curvas de nivel de la función “silla de montar”  $z = x^2 - y^2$ ).
- Si  $\alpha > 0$ ,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tienen el mismo signo.
  - Si es positivo, al aumentar  $t$  aumenta también la magnitud de la solución, es decir, se aleja (exponencialmente) del origen. Por esto, el diagrama (o el punto de equilibrio) recibe el nombre de *nodo inestable*.
  - Si es negativo, al aumentar  $t$  disminuye la magnitud de la solución, es decir, se acerca (exponencialmente) al origen. Por esto, el diagrama (o el punto de equilibrio) recibe el nombre de *nodo estable*.

Hay que mencionar que el origen en sí siempre es una solución estable; estos nombres hacen referencia a lo que ocurre tras una desviación, por pequeña que sea, desde este punto.

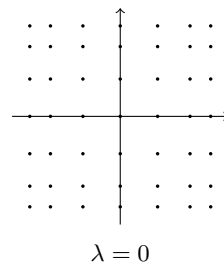
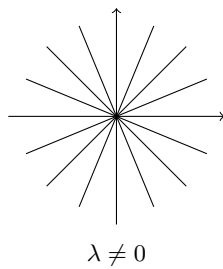
Los demás casos los veremos con menos detalle, porque las ideas generales son las mismas para todos y porque éste es el más delicado.

#### 4.2.2. Diagonalizable (un autovalor)

Consideramos el sistema  $y' = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix} y$ . La solución general es

$$\begin{cases} y_1 = k_1 e^{\lambda t} \\ y_2 = k_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

de donde  $y_1/k_1 = y_2/k_2 = e^{\lambda t}$ ; esta es la ecuación de una semirrecta que pasa por el origen (de hecho, coincide con el caso límite  $\alpha = 1$  en el apartado anterior).



- Si  $\lambda > 0$ , la solución se aleja (exponencialmente) del origen; el diagrama recibe el nombre de *punto de estrella inestable*. Es un nodo inestable degenerado.
- Si  $\lambda < 0$ , la solución se acerca (exponencialmente) al origen; el diagrama recibe el nombre de *punto de estrella estable*. Es un nodo estable degenerado.
- Si  $\lambda = 0$ , la solución es constante para cualquier valor inicial, es decir, el sistema no evoluciona con el tiempo.

#### 4.2.3. No diagonalizable (autovalor real)

Consideramos el sistema  $y' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix} y$ , cuya solución general es

$$\begin{cases} y_1 = (k_1 + k_2 t) e^{\lambda t} \\ y_2 = k_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

Si  $\lambda = 0$ , esta solución queda reducida a

$$\begin{cases} y_1 = k_1 + k_2 t \\ y_2 = k_2 \end{cases}$$

La segunda coordenada permanece constante a lo largo del tiempo, mientras que la primera varía desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$  (si  $k_2 > 0$ ) o desde  $+\infty$  hasta  $-\infty$  (si  $k_2 < 0$ ).

Si  $\lambda \neq 0$ , distinguimos casos en función del valor inicial:

- $k_1 = 0, k_2 = 0$ :  $\{(0, 0)\}$  es un punto de equilibrio

- $k_1 \neq 0, k_2 = 0$ : los dos semiejes de abscisas  $\{(y_1, 0) : y_1 > 0\}$  y  $\{(y_1, 0) : y_1 < 0\}$  son trayectorias
- Si  $k_2 \neq 0$ , podemos despejar  $t$  de  $y_2 = k_2 e^{\lambda t}$  como

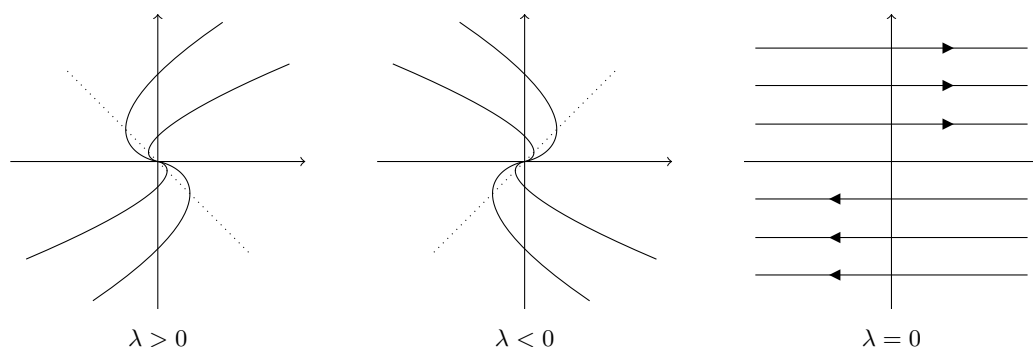
$$t = \frac{1}{\lambda} \log \frac{y_2}{k_2}.$$

Sustituyendo en  $y_1 = (k_1 + k_2 t)e^{\lambda t}$ , obtenemos una ecuación implícita para la trayectoria:

$$y_1 = y_2 \left( \frac{k_1}{k_2} + \frac{1}{\lambda} \log \frac{y_2}{k_2} \right).$$

Derivando implícitamente se obtiene  $\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{\lambda y_1 + y_2}{\lambda y_2}$ ; esto quiere decir que, a lo largo de la recta  $\{y_2 = -\lambda y_1\}$ , esta derivada se anula y, por tanto, las trayectorias tienen en esa recta tangente vertical.

Juntándolo todo, los diagramas de fase son



Como siempre, el comportamiento es distinto en función del signo de  $\lambda$ :

- Si  $\lambda > 0$ , la solución se aleja exponencialmente del origen. En este caso, el diagrama se llama *nodo impropio inestable*.
- Si  $\lambda < 0$ , la solución se acerca exponencialmente al origen. En este caso, el diagrama se llama *nodo impropio estable*.

#### 4.2.4. No diagonalizable (autovalores complejos)

Consideramos el sistema  $y' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} y$ , que tiene por solución general

$$\begin{cases} y_1 = e^{at}(k_1 \cos bt + k_2 \sin bt) \\ y_2 = e^{at}(-k_1 \sin bt + k_2 \cos bt) \end{cases}$$

Definimos  $r_0^2 = k_1^2 + k_2^2$  y  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$\cos \theta_0 = \frac{k_1}{r_0} \quad \text{y} \quad \sin \theta_0 = \frac{k_2}{r_0}.$$



Se puede comprobar que así la solución general toma la forma

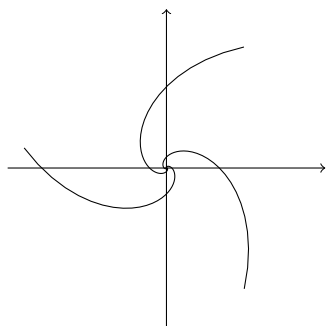
$$\begin{cases} y_1 = r_0 e^{at} \cos(\theta_0 - bt) \\ y_2 = r_0 e^{at} \sin(\theta_0 - bt) \end{cases}$$

y, definiendo  $r(t) = r_0 e^{at}$  y  $\theta(t) = \theta_0 - bt$ , se tiene

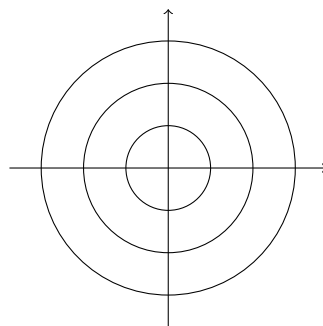
$$\begin{cases} y_1 = r(t) \cos \theta(t) \\ y_2 = r(t) \sin \theta(t) \end{cases}$$

con lo que queda descrito el camino  $t \mapsto \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$  en coordenadas polares.

- Si  $a = 0$ , entonces  $r(t) \equiv r_0$ , es decir, las trayectorias son circunferencias de radio  $r_0$ . El diagrama recibe el nombre de *centro*.
- Si  $a \neq 0$ , entonces las trayectorias son *espirales logarítmicas*
  - Si  $\lambda > 0$ , las soluciones se alejan exponencialmente del origen. En este caso, el diagrama recibe el nombre de *foco inestable*.
  - Si  $\lambda < 0$ , las soluciones se acercan exponencialmente al origen. En este caso, el diagrama recibe el nombre de *foco estable*.



$a \neq 0$



$a = 0$

#### 4.2.5. Deshacer el cambio

Habíamos hecho el cambio de variable  $y = P^{-1}x$  para resolver el sistema  $x' = Ax = (PBP^{-1})x$ . Ahora lo deshacemos:  $x = Py = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ .

Como ya sabemos de Álgebra Lineal, las transformaciones lineales  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  no singulares deforman, rotan o hacen reflexiones sobre el plano. Estas transformaciones quedan completamente determinadas por las imágenes de dos vectores linealmente independientes, que en nuestro caso son  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$P$  es la *única* transformación lineal que lleva  $e_1 \mapsto v_1$  y  $e_2 \mapsto v_2$ . Por tanto, para obtener el diagrama de fase de  $x' = Ax$ , basta transformar el de  $y' = By$  de forma que sea compatible con las transformaciones

$$e_1 \mapsto v_1 \quad e_2 \mapsto v_2.$$

### 4.3. Oscilaciones mecánicas

Para terminar con el capítulo, veamos cómo se puede aplicar lo que hemos visto a la modelización de las *oscilaciones mecánicas* y, de hecho, a muchos otros fenómenos.

Como vamos a ver, las oscilaciones mecánicas se pueden modelizar con ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes; además, cualquier ecuación diferencial tal modela un sistema físico que presenta “oscilaciones” en algún sentido, por lo que no perdemos generalidad al restringirnos a este caso. Esto ayuda a tener una intuición física de cómo se comporta el sistema.

Consideramos un objeto de masa  $m$  suspendido del techo mediante un muelle, como se muestra en la figura 4.5. El sistema de referencia está elegido de tal manera que  $x = 0$  corresponde con la posición de equilibrio de la masa.

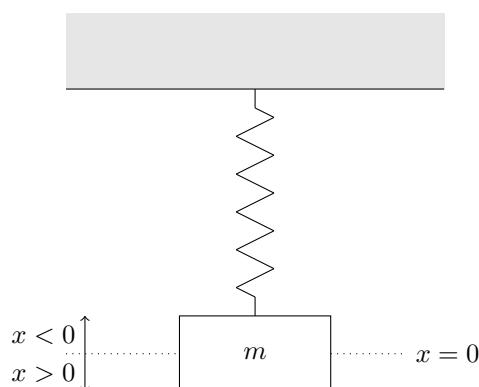


Figura 4.5: Masa colgada de un muelle

Según la segunda ley de Newton,  $\sum_i F_i = mx''$ . Las fuerzas que actúan sobre la masa son

- la gravedad, en sentido positivo, de módulo  $mg$
- la fuerza de recuperación del muelle, en sentido opuesto al desplazamiento, de módulo  $|kx|$ , siendo  $k \geq 0$  la *constante de recuperación del muelle*
- la fuerza de rozamiento o amortiguación, en sentido opuesto a la velocidad, de módulo  $|cx'|$ , siendo  $c \geq 0$  la *constante de rozamiento*
- una fuerza externa  $b(t)$

Por tanto, la ecuación diferencial que modela este sistema es

$$mx'' = mg - kx - cx' + b(t) \quad (4.2)$$

**Nota 4.3.1** La hipótesis de que  $k$  y  $c$  son constantes es razonable. La hipótesis de linealidad de la ecuación es algo más atrevida, pero observaciones empíricas justifican esta elección de las fuerzas de recuperación y rozamiento.

Para analizar la ecuación (4.2), suponemos que  $m = 1$  e incluimos la fuerza de la gravedad en la fuerza externa, de forma que queda

$$x'' = -kx - cx' + b(t) \quad (4.3)$$

**Nota 4.3.2** Esta es la ecuación diferencial lineal de orden 2 más general tal que su homogénea asociada tiene coeficientes constantes (e.d. la ecuación diferencial lineal de orden 2 más general que sabemos resolver).

La ecuación homogénea asociada a (4.3) es

$$x'' = -cx' - kx \iff x'' + cx' + kx = 0 \quad (4.4)$$

Introduciendo las variables  $x_1 = x$  y  $x_2 = x'$ , tenemos que el sistema  $2 \times 2$  asociado es

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1' = & x_2 \\ x_2' = & -kx_1 - cx_2 \end{cases}$$

La matriz del sistema tiene por polinomio característico

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k & -c - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + c) + k = \lambda^2 + c\lambda + k$$

**Nota 4.3.3** El polinomio característico (y por tanto los autovalores) se puede obtener directamente a partir de la ecuación homogénea (4.4):  $x'' + cx' + kx = 0 \leftrightarrow \lambda^2 + c\lambda + k = 0$ .

Tenemos entonces que los autovalores de la matriz del sistema son

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4k}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4k}}{2}$$

Vamos a empezar resolviendo casos particulares sencillos, para ir complicando el problema poco a poco hasta llegar al caso general.

### 4.3.1. Movimiento oscilatorio armónico

Este es el caso (mínimamente interesante) más sencillo, en el que no hay amortiguación ni fuerzas externas, es decir,  $c = 0, b(t) = 0$ .

Con estas simplificaciones, la ecuación queda reducida a  $x'' = -kx$ , y los autovalores son  $\pm i\sqrt{k}$ . El valor  $\omega_0 = \sqrt{k}$  recibe el nombre de *frecuencia fundamental* del sistema.

La matriz  $B$  asociada es, por tanto,  $B = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{pmatrix}$ , y su exponencial es  $e^{Bt} = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & \sin \omega_0 t \\ -\sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{pmatrix}$ . Así, la solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & \sin \omega_0 t \\ -\sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t \\ -c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t \end{pmatrix}$$

y la solución de la ecuación de orden 2 es

$$\begin{aligned} x = x_1 &= p_{11}c_1 \cos \omega_0 t + p_{11}c_2 \sin \omega_0 t - p_{12}c_1 \sin \omega_0 t + p_{12}c_2 \cos \omega_0 t \\ &= \underbrace{(p_{11}c_1 + p_{12}c_2)}_{k_1} \cos \omega_0 t + \underbrace{(p_{11}c_2 - p_{12}c_1)}_{k_2} \sin \omega_0 t = k_1 \cos \omega_0 t + k_2 \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

**Nota 4.3.4** En realidad, esto se podía haber deducido directamente de la solución general del sistema, porque sabemos de la teoría general que el conjunto de soluciones es un espacio vectorial de dimensión 2 y, en este caso, cada solución particular debe ser combinación lineal de  $\{\cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t\}$ , que son linealmente independientes, así que debe ser de la forma  $k_1 \cos \omega_0 t + k_2 \sin \omega_0 t$ .

Tomando  $r_0 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  y  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $r_0 \cos \theta_0 = k_1$  y  $r_0 \sin \theta_0 = k_2$ , nos queda

$$r_0 \cos(\omega_0 t - \theta_0) = r_0(\cos \omega_0 t \cos \theta_0 + \sin \omega_0 t \sin \theta_0) = k_1 \cos \omega_0 t + k_2 \sin \omega_0 t$$

En resumen, la masa oscilará sinusoidalmente con un periodo de  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  y el diagrama es el de un centro.

### 4.3.2. Movimiento oscilatorio amortiguado

Introducimos ahora una amortiguación, de forma que la ecuación queda  $x'' = -cx' - kx$ . Los autovalores son  $\frac{1}{2}(-c \pm \sqrt{c^2 - 4k})$ , así que distinguimos casos en función del valor de  $c^2 - 4k$ :

- $c^2 - 4k > 0$  (caso *sobreamortiguado*): se tienen dos autovalores reales distintos, ambos negativos:

$$\lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4k}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4k}}{2}.$$

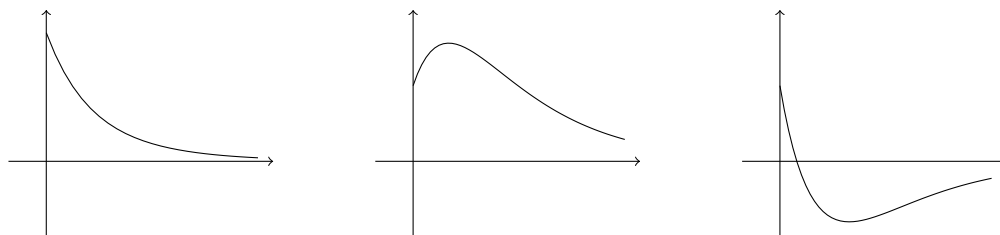
La solución general del sistema asociado es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix};$$

razonando como en la observación anterior, la solución de la ecuación de orden 2 es

$$x = x_1 = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$$

Como los autovalores son negativos, el diagrama de fases es el de un nodo estable. Además,  $x(t) \rightarrow 0$  exponencialmente rápido. La gráfica de la solución puede tomar tres formas distintas:



En particular, la amortiguación es demasiado grande para que haya oscilaciones. Si las condiciones iniciales son demasiado extremas (mucho desplazamiento o velocidad muy grande), puede parecer que la masa va a oscilar; sin embargo, rápidamente se estabiliza.

- $c^2 - 4k < 0$  (caso *subamortiguado*): se tienen dos autovalores complejos:

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2} + i\sqrt{k - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = a + bi, \quad \lambda_2 = -\frac{c}{2} - i\sqrt{k - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = a - bi$$

La solución general del sistema asociado es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e^{at} \cos bt & e^{at} \sin bt \\ -e^{at} \sin bt & e^{at} \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

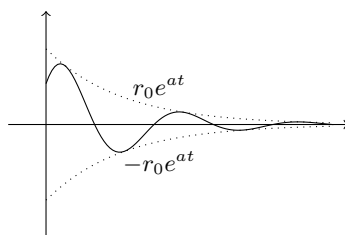
y, procediendo como antes, la solución de la ecuación de orden 2 es

$$x = x_1 = k_1 e^{at} \cos bt + k_2 e^{at} \sin bt.$$

Tomando  $r_0 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  y  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $r_0 \cos \theta_0 = k_1$  y  $r_0 \sin \theta_0 = k_2$ , nos queda

$$x = r_0 e^{at} \cos(bt - \theta_0),$$

siendo  $a = -c/2 < 0$ . El diagrama de fases es ahora el de un foco estable, y la gráfica de la solución tiene esta forma:



En este caso sí que hay oscilaciones, aunque decaen a 0 exponencialmente rápido.

- $c^2 - 4k = 0$  (caso *críticamente amortiguado*): ahora hay un único autovalor real,  $\lambda = -c/2$ , de multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1, puesto que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c/2 & 1 \\ -k & -c/2 \end{pmatrix}$$

es una matriz de rango 1.

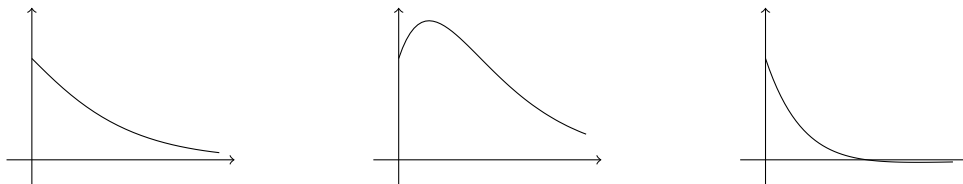
La solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} P \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

con lo que el diagrama de fases es el de un nodo impropio estable y la solución de la ecuación de orden 2 es de la forma

$$x = x_1 = e^{\lambda t} (k_1 + k_2 t).$$

La gráfica puede tomar tres formas distintas:



Como se puede apreciar, el caso críticamente amortiguado se comporta igual, cualitativamente, que el sobreamortiguado; en particular, ahora tampoco hay oscilaciones de ningún tipo.

### 4.3.3. Caso general

Consideramos, para finalizar, el caso en que existe una fuerza externa  $b(t) \neq 0$ . Como ya sabemos, la solución general del caso no homogéneo es  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ , siendo  $x_h(t)$  la solución general de la ecuación homogénea y  $x_p(t)$  una solución particular de la ecuación no homogénea. Como ya hemos visto, en cualquier caso con amortiguación  $x_h(t) \rightarrow 0$  exponencialmente rápido y, por tanto, el comportamiento a largo plazo del sistema es el de  $x_p(t)$ .

Vamos a estudiar dos casos de interés especial:

- $b(t) \equiv g$ , es decir, sólo existe la fuerza de la gravedad. En este caso, una solución particular es la solución constante  $x_p(t) \equiv \frac{g}{k}$  y, por tanto, la solución general es  $x(t) = x_h(t) + \frac{g}{k}$ . Esta solución es la misma que en el caso homogéneo, solo que la posición de equilibrio se desplaza de  $x = 0$  a  $x = \frac{g}{k}$  por efecto de la gravedad.
- La fuerza externa es periódica, de la forma  $b(t) = F_0 \cos \omega t$ .  $F_0$  es la *amplitud* de la fuerza y  $\omega$  es la *frecuencia* con la que se ejerce.

Es razonable conjeturar una solución particular de la forma  $x_p(t) = \alpha \cos(\omega t - \beta)$ . De hecho, se obtiene que  $x_p$  así definida es solución para los valores de los parámetros

$$\alpha = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2}} \quad \text{y} \quad \beta \in \mathbb{R} \text{ tal que } \begin{cases} \cos \beta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2}} \\ \sin \beta = \frac{c\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2}} \end{cases}$$

siendo  $\omega_0 = \sqrt{k}$  la frecuencia fundamental definida anteriormente.

En estas condiciones puede aparecer el fenómeno de *resonancia*, consistente en que las oscilaciones son mucho mayores de lo que serían en ausencia de una fuerza externa y mucho mayores que la amplitud de la fuerza externa  $F_0$ :

Si  $\omega \approx \omega_0$ , entonces  $\omega_0^2 - \omega^2 \approx 0$ , con lo que  $\alpha \approx \frac{F_0}{c\omega}$ . En particular, si  $c \approx 0$  (i.e. hay muy poca amortiguación), entonces  $\alpha$  (la amplitud de las *oscilaciones*) puede ser enorme aunque  $F_0$  (la amplitud de la *fuerza externa*) sea pequeña.

El fenómeno de resonancia es el responsable del colapso de numerosos puentes y estructuras similares, debido a fuerzas externas con una frecuencia peligrosamente cercana a la de la estructura. Esta fuerza puede ser debida al viento<sup>1</sup>, a los pasos sincronizados de gente caminando por encima<sup>2</sup>, etc.

<sup>1</sup><https://archive.org/details/CEP176>

<sup>2</sup><https://youtu.be/2cuXbpXRvJO>

## Capítulo 5

# Series de potencias

En este capítulo presentamos un método para obtener soluciones a ecuaciones diferenciales lineales en forma de series de potencias. Para ello, no queda otra opción que restringirnos a soluciones *analíticas*, es decir, funciones que se puedan expresar de esta manera.

El método se entiende mejor con un ejemplo:

**Ejemplo 5.0.1** Expresar las soluciones a la ecuación

$$x'' - 2tx' - 2x = 0 \quad (5.1)$$

como series de potencias.

Buscamos soluciones analíticas con radio de convergencia  $\geq \rho$  y estamos interesados en el rango de tiempos  $t$  tal que  $|t - t_0| < \rho$ . En este ejemplo tomamos  $t_0 = 0$ , por lo que las soluciones serán de la forma

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad |t| < \rho \quad (5.2)$$

Nuestro objetivo se reduce, entonces, a dar “ecuaciones” que caractericen la sucesión  $(a_n)_n$ , de forma que, al resolverlas, obtengamos la función  $x(t)$ .

Derivando en (5.2), llegamos a las series de potencias

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n, \\ x''(t) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n, \end{aligned}$$

donde ambas series de potencias tienen radio de convergencia  $\geq \rho$ .

Teniendo esto en cuenta y volviendo a (5.1), tenemos

$$x'' - 2tx' - 2x = 0 \iff \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n - 2t \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

o, equivalentemente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)a_{n+1}t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_nt^n = 0.$$

Escribimos esto como una única serie de potencias:

$$\underbrace{2a_2 - 2a_0}_{n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - 2na_n - 2a_n]t^n = 0$$

que, como es idénticamente nula, tiene todos sus coeficientes iguales a 0:

$$\begin{cases} a_2 = a_0 \\ (n+1)(n+2)a_{n+2} = 2(n+1)a_n, \quad n \geq 1 \end{cases} \iff a_{n+2} = \frac{2}{n+2}a_n, \quad n \geq 0 \quad (5.3)$$

En resumen, (5.2) es solución de (5.1) si y sólo si  $(a_n)_n$  verifica estas condiciones. Una solución queda unívocamente determinada al fijar  $x(0)$  y  $x'(0)$ , que en este caso corresponden, respectivamente, a  $a_0$  y  $a_1$ . Como ya sabemos, una base del espacio de soluciones de (5.1) se obtiene al resolver (5.3) para los casos

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

■ Caso  $a_0 = 1, a_1 = 0$ :

$$a_2 = 1, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{2}, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = \frac{1}{3}a_4 = \frac{1}{3!}, \quad a_7 = 0, \quad a_8 = \frac{1}{4}a_6 = \frac{1}{4!}, \quad \dots$$

Resulta evidente que

$$a_{2k} = \frac{1}{k!} \quad \text{y} \quad a_{2k+1} = 0,$$

y es inmediato probarlo por inducción.

En este caso la solución es

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!} = e^{t^2}, \quad \rho = +\infty$$

■ Caso  $a_0 = 0, a_1 = 1$ :

$$a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{2}{3}, \quad a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{2}{5}a_3 = \frac{2^2}{3 \cdot 5}, \quad a_6 = 0, \quad a_7 = \frac{2}{7}a_5 = \frac{2^3}{3 \cdot 5 \cdot 7}, \quad \dots$$

La fórmula general es ahora

$$a_{2k} = 0 \quad \text{y} \quad a_{2k+1} = \frac{2^k}{\prod_{i=1}^k (2i+1)},$$

e igual que antes es inmediato probarlo por inducción.

En este caso,  $\sum_{n=0}^{\infty} a_nt^n$  no es una función elemental, aunque es analítica con radio de convergencia  $\rho = +\infty$ .



Para terminar con el capítulo, recogemos las ideas generales en un teorema:

**Teorema 5.0.1** *Supongamos que  $Q(t)$ ,  $R(t)$  y  $P(t)$  se pueden escribir como series de potencias alrededor de  $t_0$  con radio de convergencia  $\rho$ :*

$$Q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t-t_0)^n, \quad R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(t-t_0)^n, \quad P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t-t_0)^n, \quad |t-t_0| < \rho$$

Entonces, todas las soluciones de la ecuación

$$x'' + Q(t)x' + R(t)x = P(t) \quad (5.4)$$

se pueden escribir también como series de potencias alrededor de  $t_0$  con radio de convergencia  $\rho$ , es decir,

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n, \quad |t-t_0| < \rho.$$

Además, en este caso, para obtener los coeficientes  $a_n$  se puede razonar como en el ejemplo: se asume  $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n$ , se escribe (5.4) como serie de potencias y se igualan sus coeficientes a 0. Esto da unas ecuaciones que caracterizan la sucesión  $(a_n)_n$ .

**Nota 5.0.2** Para expresar el producto de dos series de potencias como serie de potencias se usa el *producto de Cauchy* o *convolución*:

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t-t_0)^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} B_n(t-t_0)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t-t_0)^n,$$

siendo

$$C_n = \sum_{k=0}^n A_k B_{n-k}.$$



## Capítulo 6

# Transformada de Laplace

En este capítulo vamos a estudiar la transformada de Laplace y su utilidad a la hora de resolver ecuaciones diferenciales.

La transformada de Laplace es un ejemplo de transformada integral (en particular, lineal y continua). Para entender mejor este concepto, vamos a hacer un recordatorio de las transformaciones lineales discretas:

Cualquier transformación lineal  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  se corresponde con una matriz  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ . Cualquier vector  $v \in \mathbb{R}^n$  se puede ver como una aplicación  $v : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \mapsto v(i) = v_i$  y, en particular, una transformación lineal actuando sobre un vector,  $T(v)$ , es una aplicación

$$T(v) : \{1, \dots, m\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad j \mapsto T(v)(j) = \sum_i A(j, i)v(i).$$

Una *transformada integral* es el análogo continuo de esta idea. Es una aplicación que lleva una función  $f$  a otra función  $\hat{f}$  mediante una “fórmula” del tipo

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty \kappa(s, t)f(t) dt,$$

donde  $\kappa$  recibe el nombre de *kernel* o *núcleo integral*.

La transformada de Laplace viene dada por el núcleo  $\kappa(s, t) = e^{-st}$ . La transformada de Fourier, estrechamente relacionada, viene dada por  $\kappa(s, t) = e^{-ist}$ .

**Nota 6.0.1** Si  $s \in \mathbb{C}$  en la transformada de Laplace, la parte imaginaria de  $\hat{f}$  se corresponde con la  $\hat{f}$  de la transformada de Fourier. Aquí nos centraremos en  $s \in \mathbb{R}$ .

Entrando en más detalle:

**Definición 6.0.1** Sea  $f(t)$  una función continua a trozos en  $[0, +\infty)$ . Su transformada de Laplace es la función

$$\mathcal{L}\{f(t)\} : s \mapsto \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt.$$

El dominio de  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  es el conjunto de  $s$  para los que la integral converge.

**Nota 6.0.2** El dominio de  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  depende de  $f(t)$ .

**Nota 6.0.3** En general, la transformada de Laplace se puede definir en contextos más generales, pero aquí nos basta con continuidad a trozos.

**Nota 6.0.4** Se trata de un operador lineal, es decir,  $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$ .

**Notación.** Denotaremos a las funciones en  $t$  con letras minúsculas y a sus transformadas con la correspondiente letra mayúscula. Por ejemplo,  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$  y  $\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = G(s)$ .

**Notación.** Usaremos  $[\cdot]_{t=0}^{t=\infty}$  o simplemente  $[\cdot]_0^\infty$  para referirnos a  $\lim_{b \rightarrow \infty} [\cdot]_0^b$ .

**Notación.** Frecuentemente escribiremos  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  en lugar de  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$  por simplicidad.

## 6.1. Transformadas de Laplace de funciones elementales

- $f(t) = 1$ :

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s} [-e^{-st}]_0^\infty = \frac{1}{s} (0 - (-1)) = \frac{1}{s},$$

si  $s > 0$ , mientras que la integral diverge en caso contrario.

- $f(t) = t$ :

$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st} t dt = \left[ -\frac{te^{-st}}{s} \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} dt = 0 + \frac{1}{s} \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s^2},$$

si  $s > 0$ , mientras que la integral diverge en caso contrario.

- $f(t) = t^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s > 0).$$

Se prueba inmediatamente por inducción.

- $f(t) = e^{at}$ :

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a} [-e^{-(s-a)t}]_0^\infty = \frac{1}{s-a} \quad (s > a)$$

- $f(t) = \sin kt$ :

$$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \int_0^\infty \sin kte^{-st} dt = \dots = \frac{k}{s^2} - \frac{k^2}{s^2} \mathcal{L}\{\sin kt\} \implies \mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2} \quad (s > 0)$$

- $f(t) = \cos kt$ :

$$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \int_0^\infty \cos kte^{-st} dt = \dots = \frac{1}{s} - \frac{k^2}{s^2} \mathcal{L}\{\cos kt\} \implies \mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2 + k^2} \quad (s > 0)$$

Damos ahora una condición suficiente de existencia de la transformada de Laplace.

**Definición 6.1.1**  $f(t)$  es de orden exponencial con constante  $c$  si existen  $M, T > 0$  tales que

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \quad \forall t \geq T.$$

**Teorema 6.1.1** Si  $f(t)$  es continua a trozos y de orden exponencial con constante  $c$ , entonces su transformada de Laplace  $F(s)$  existe si  $s > c$  (i.e. la integral converge). Además, en este caso,  $F(s) \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow +\infty$ .

*Demostración 6.1.1.1.* — Por definición,

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

de donde

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b |f(t)|e^{-st} dt &\leq \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \int_0^T |f(t)|e^{-st} dt + \int_T^b Me^{ct}e^{-st} dt \right) \\ &= \int_0^T |f(t)|e^{-st} dt + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_T^b Me^{-(s-c)t} dt, \end{aligned}$$

y el último límite converge si  $s > c$ . Para terminar,  $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$  sale del teorema de intercambiar límites e integrales.  $\square$

## 6.2. Transformada de Laplace inversa

Si  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , diremos que  $f(t)$  es la *transformada de Laplace inversa* de  $F(s)$  y lo denotaremos como  $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ .

**Nota 6.2.1** Si  $f(t)$  es continua, la transformada inversa está bien definida (i.e.  $f(t)$  es la única función continua tal que su transformada es  $F(s)$ ).

**Nota 6.2.2**  $\mathcal{L}^{-1}$  también es lineal.

**Ejemplo 6.2.1** Hallar la transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{-2s + 6}{s^2 + 4}.$$

Usamos la linealidad del operador  $\mathcal{L}^{-1}$ , para lo que resulta útil descomponer  $F(s)$  en funciones cuya transformada inversa ya conozcamos:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s + 6}{s^2 + 4}\right\} = -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 2^2}\right\} + \frac{6}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 2^2}\right\} = -2 \cos 2t + 3 \sin 2t.$$

## 6.3. Transformada de Laplace y derivadas

A la hora de aplicar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales, es imprescindible saber cómo se comporta respecto a las derivadas sucesivas de una función. El siguiente teorema es fundamental para nuestro objetivo:

**Teorema 6.3.1** Si  $f, f', \dots, f^{(n-1)}$  son continuas en  $[0, +\infty)$  y de orden exponencial con constante  $c$  y  $f^{(n)}$  es continua a trozos en  $[0, +\infty)$  y de orden exponencial con constante  $c$ , entonces

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - s^0 f^{(n-1)}(0) \quad (s > c)$$

*Demostración 6.3.1.1.* — Procedemos por inducción sobre el orden de la derivada. Para el caso base  $n = 1$  desarrollamos la definición mediante integración por partes:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st} dt = [f(t)e^{-st}]_0^\infty - (-s) \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \\ &= (0 - f(0)) + sF(s) = sF(s) - f(0) \quad (s > c)\end{aligned}$$

Suponiendo el resultado cierto para  $n - 1$ , vamos a probar que se cumple para  $n$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\left(f^{(n-1)}\right)'(t)\right\} = s\mathcal{L}\{f^{(n-1)}(t)\} - f^{(n-1)}(0) \\ &= s\left(s^{n-1}F(s) - s^{n-2}f(0) - s^{n-3}f'(0) - \dots - s^0f^{(n-2)}(0)\right) - f^{(n-1)}(0) \\ &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - s^1f^{(n-2)}(0) - s^0f^{(n-1)}(0),\end{aligned}$$

con lo que queda probado el teorema.  $\square$

Después de este resultado, ya estamos listos para ver cómo se puede aplicar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales:

**Ejemplo 6.3.1** Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + 3y = 13 \sin 2t \\ y(0) = 6 \end{cases}$$

Vamos a hacerlo en tres pasos:

- 1) Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial y simplificamos aprovechando la linealidad:

$$\mathcal{L}\{y'\} + 3\mathcal{L}\{y\} = 13\mathcal{L}\{\sin 2t\}$$

- 2) Operamos, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 6, \\ \mathcal{L}\{\sin 2t\} &= \frac{2}{s^2 + 4}.\end{aligned}$$

Así, la ecuación transformada es

$$(sY(s) - 6) + 3Y(s) = \frac{26}{s^2 + 4}$$

o, despejando  $Y(s)$ ,

$$Y(s) = \frac{6}{s+3} + \frac{26}{(s+3)(s^2+4)} = \frac{6}{s+3} + \left(\frac{2}{s+3} + \frac{-2s+6}{s^2+4}\right) = \frac{8}{s+3} + \frac{-2s+6}{s^2+4}$$

- 3) Aplicamos la transformada inversa:

$$\begin{aligned}y(t) &= 8\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} \\ &= 8e^{-3t} + 3\sin 2t - 2\cos 2t.\end{aligned}$$

Como se aprecia en el ejemplo, la utilidad de la transformada de Laplace consiste en que transforma ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas, que son mucho más fáciles de resolver. Veamos otro ejemplo un poco más complicado:

**Ejemplo 6.3.2** Resolver el PVI

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^{-4t} \\ y(0) = 1, y'(0) = 5 \end{cases}$$

Seguimos los mismos pasos que antes:

1) Aplicamos  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{-4t}\}$$

2) Operamos, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s - 5, \\ \mathcal{L}\{y'\} &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 1, \end{aligned}$$

con lo que la ecuación queda

$$\begin{aligned} (s^2Y(s) - s - 5) - 3(sY(s) - 1) + 2Y(s) &= \frac{1}{s+4} \implies \\ Y(s) &= \frac{s+2}{s^2-3s+2} + \frac{1}{(s^2-3s+2)(s+4)} = \frac{-16/5}{s-1} + \frac{25/6}{s-2} + \frac{1/30}{s+4}. \end{aligned}$$

3) Aplicamos  $\mathcal{L}^{-1}$ :

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -\frac{16}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{25}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{30}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} \\ &= -\frac{16}{5}e^t + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}. \end{aligned}$$

**Nota 6.3.2** La transformada de Laplace es especialmente útil para problemas de valor inicial, aunque también sirve para encontrar la solución general de una ecuación diferencial. Si al aplicar el operador  $\mathcal{L}$  a las derivadas de la función no se sustituyen directamente los valores  $x(0), x'(0), \dots, x^{(n-1)}(0)$ , el resultado final queda en función de estos valores, que son precisamente los parámetros que permiten generar todo el espacio de soluciones.

## 6.4. Propiedades de $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^{-1}$

**Proposición 6.4.1** Si  $F(s)$  es la transformada de Laplace de  $f(t)$ , entonces

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a).$$

*Demostración 6.4.1.1.* — Basta aplicar la definición:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt = \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a)$$

□

**Ejemplo 6.4.1** Calcular la transformada de Laplace de  $e^{-2t} \cos 4t$ .

$$\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos 4t\}(s) = \mathcal{L}\{\cos 4t\}(s+2) = \frac{(s+2)}{(s+2)^2 + 16}$$

Normalmente este resultado se usa en sentido inverso: a menudo queremos encontrar transformadas inversas de funciones que son traslación de transformadas que conocemos.

**Ejemplo 6.4.2** Calcular la transformada inversa de  $(s-3)^{-2}$ .

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}_{s \rightarrow s-3} = te^{3t},$$

teniendo en cuenta que

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}.$$

**Notación** Cuando queramos decir explícitamente que una función es traslación de otra, lo denotaremos como en el ejemplo, es decir,

$$f(x)\big|_{x \rightarrow x+a} = f(x+a).$$

También es útil hacer traslaciones en  $t$ , para lo que introducimos el siguiente resultado.

**Definición 6.4.1** Se define la función escalón o función de Heaviside  $\mathcal{U}$  como

$$\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Aquí nos interesará considerar traslaciones de  $\mathcal{U}$  restringidas a  $[0, +\infty)$ :

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

La función de Heaviside permite definir fácilmente funciones a trozos.

**Ejemplo 6.4.3** Dada la función  $f$  definida como

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & \text{si } 0 \leq t < a \\ h(t) & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

se puede expresar de forma más concisa como  $f(t) = g(t) + (h(t) - g(t))\mathcal{U}(t-a)$ .

**Proposición 6.4.2** Si  $F(s)$  es la transformada de Laplace de  $f(t)$ , entonces

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$



*Demostración 6.4.2.1.* — Basta aplicar la definición:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} &= \int_0^\infty f(t-a)\mathcal{U}(t-a)e^{-st} dt = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty f(u)e^{-s(u+a)} du = e^{-sa} \int_0^\infty f(u)e^{-su} du \\ &= e^{-sa}F(s),\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable  $u = t - a$ . □

**Ejemplo 6.4.4** Hallar la transformada inversa de  $\frac{1}{s-4}e^{-2s}$ .

Teniendo en cuenta que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\} = e^{4t},$$

aplicando la proposición anterior con  $a = 2$  se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\right\} = e^{4(t-2)}\mathcal{U}(t-2).$$

**Teorema 6.4.3** Si  $n \in \mathbb{N}$  y  $f(t)$  es continua a trozos y de orden exponencial, entonces

$$(-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\} = \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

*Demostración 6.4.3.1.* — Partiendo de la definición

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt,$$

basta aplicar el teorema de derivación bajo el signo integral para obtener

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_0^\infty (-t)f(t)e^{-st} dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}.$$

El caso general se demuestra igual por inducción. □

**Definición 6.4.2** Si  $f$  y  $g$  son continuas a trozos en  $[0, +\infty)$ , se define su convolución como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du.$$

**Nota 6.4.4**  $f * g = g * f$ .

*Demostración 6.4.4.1.* — Es inmediato haciendo el cambio de variable  $u = t - v$  en la integral:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) du = \int_t^0 f(t-v)g(v)(-dv) = \int_0^t g(v)f(t-v) dv = (g * f)(t). \quad \square$$

**Teorema 6.4.5** Si  $f$  y  $g$  son continuas a trozos en  $[0, \infty)$  y de orden exponencial, y si  $F$  y  $G$  son sus transformadas de Laplace, entonces

$$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s) \cdot G(s).$$

*Demostración 6.4.5.1.* — Por definición,

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \int_0^\infty \left( \int_0^t f(u)g(t-u) du \right) e^{-st} dt.$$

Observamos que estamos integrando sobre la región  $R = \{t > u > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ; aplicando el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f * g\} &= \iint_R f(u)g(t-u) du dt = \int_0^\infty \int_u^\infty f(u)g(t-u)e^{-st} dt du \\ &= \int_0^\infty f(u) \left( \int_u^\infty g(t-u)e^{-st} dt \right) du = \int_0^\infty f(u) \left( \int_0^\infty g(v)e^{-s(v+u)} dv \right) du, \end{aligned}$$

donde hemos hecho el cambio de variable  $v = t - u$  en la integral interior. Desarrollando, esto se puede separar en dos integrales:

$$\int_0^\infty f(u)e^{-su} \left( \int_0^\infty g(v)e^{-sv} dv \right) du = \left( \int_0^\infty f(u)e^{-su} du \right) \left( \int_0^\infty g(v)e^{-sv} dv \right) = F(s)G(s),$$

como queríamos. □

A modo de resumen, incluimos en una tabla los resultados más relevantes del capítulo:

Transformada	Comentarios
$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$	$s > 0$
$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\mathcal{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2}$	$s > 0$
$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2 + k^2}$	$s > 0$
$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	—
$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$	—
$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s)$	—
$(-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\} = \frac{d^n}{ds^n} F(s)$	—
$\mathcal{L}\{f * g\} = F(s) \cdot G(s)$	—

## Apéndice A

# Problemas resueltos

### A.1. Problemas del capítulo 1

**Número A.1.1** Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales, indicando su intervalo de definición.

a)  $x' + x \cos t = 0$

c)  $x' + \frac{2t}{1+t^2}x = \frac{1}{1+t^2}$

b)  $x' + x\sqrt{t} \sin t = 0$

d)  $x' + x = te^t$

*Solución A.1.1.1.* — a) Se trata de una ecuación homogénea, puesto que  $\cos t \in C(\mathbb{R})$ , el intervalo de definición de la ecuación es  $\mathbb{R}$ . Separando variables:

$$\begin{aligned}\frac{x'}{x} = -\cos t &\iff \log|x(t)| = \int_0^t -\cos s \, ds + c = -(\sin t - \sin 0) + c \\ &\iff x(t) = ke^{-\sin t}.\end{aligned}$$

b) El intervalo de definición es  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , utilizando la fórmula obtenida en 1.1:

$$x(t) = ke^{\int_0^t \sqrt{s} \sin s \, ds},$$

la integral no posee una primitiva elemental, por lo que no podemos simplificar más la solución.

c) Tanto  $a(t)$  como  $b(t)$  son continuas en  $\mathbb{R}$ . Utilizamos el método de variación de constantes, resolvemos primero la ecuación homogénea asociada:

$$x_n(t) = ke^{\int_0^t \frac{-2s}{1+s^2} \, ds},$$

notamos que la derivada de  $-\log(1+s^2)$  coincide con el interior de nuestra integral, por tanto:

$$x_n(t) = ke^{-\log(1+t^2)} = \frac{k}{1+t^2}.$$

Ahora, sea  $x_p = \frac{k(t)}{1+t^2}$  solución de la ecuación diferencial, entonces

$$x'_p(t) = k'(t) \frac{1}{1+t^2} + k(t) \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$$

sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$x'_p(t) = \frac{-2t}{1+t^2} x_p(t) + \frac{1}{1+t^2} = k(t) \frac{-2t}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{1+t^2}.$$

Igualando hallamos que  $k'(t) = 1$  y, por ende,  $k(t) = t$ . La solución general es

$$x(t) = x_n(t) + x_p(t) = \frac{k+t}{1+t^2}.$$

d) Tanto  $a = 1$  como  $b$  son continuas en todo  $\mathbb{R}$  por lo que este es nuestro intervalo de definición. Resolvemos la ecuación homogénea asociada, obteniendo  $x_n(t) = ke^{-t}$ . Sea  $x_p(t) = k(t)e^{-t}$  solución de la ecuación, entonces:

$$\begin{cases} x'_p(t) = k'(t)e^{-t} - k(t)e^{-t} \\ x'_p(t) = te^t - x_p(t) = te^t - k(t)e^{-t} \end{cases} \rightsquigarrow k'(t) = te^{2t}.$$

Integrando por partes:

$$k(t) = \int te^{2t} dt = \frac{te^{2t}}{2} - \int \frac{e^{2t}}{2} dt = \frac{te^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4}.$$

La solución general de la ecuación es pues

$$x(t) = x_n(t) + x_p(t) = (k + k(t))e^{-t} = ke^{-t} + \frac{te^t}{2} - \frac{e^t}{4}.$$

□

**Número A.1.2** Hallar las soluciones de los siguientes problemas de valor inicial, indicando su intervalo de definición.

a)  $\begin{cases} x' + 5x = t^2 \\ x(0) = 3 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} x' + 2tx = t^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} x' = (\tan t)x + \cos t \\ x(0) = 1 \end{cases}$

d)  $\begin{cases} tx' + \frac{t}{\sqrt{1+t^3}}x = 1 \\ x(1) = 2 \end{cases}$

*Solución A.1.2.1.* — a) Resolvemos la ecuación homogénea asociada,  $x_n(t) = ke^{-5t}$ , y, mediante variación de constantes, obtenemos, integrando por partes dos veces,

$$k(t) = \left( \frac{t^2}{5} - \frac{2t}{25} + \frac{2}{125} \right) e^{-5t},$$

así una solución general es

$$x(t) = (k + k(t))e^{-5t} = ke^{-5t} + \frac{t^2}{5} - \frac{2t}{25} + \frac{2}{125}.$$

Evalúamos en la condición inicial

$$3 = x(0) = k + \frac{2}{125} \rightsquigarrow k = \frac{373}{125},$$

obtenemos así la solución del problema del valor inicial

$$x(t) = \frac{373}{125}e^{-5t} + \frac{t^2}{5} - \frac{2t}{25} + \frac{2}{125}.$$

b) TODO.

c) Resolvemos la ecuación homogénea asociada separando variables,  $x = ke^{-t^2}$ , por variación de constantes,  $k'(t) = t^3e^{t^2}$  y, por partes,  $k(t) = 1/2(e^{t^2}t^2 - e^{t^2})$ . La solución general es pues

$$x(t) = ke^{-t^2} + \frac{1}{2}(t^2 - 1).$$

Evalúando en la condición inicial,  $1 = x(0) = k - 1/2$ , por lo que  $k = 1/2$ .

d) El intervalo de definición es  $(0, \infty)$ , ya que es el intervalo más grande en el cual las funciones  $a$  y  $b$  son continuas. Separando y puesto que el integrando no posee primitiva elemental:

$$x = ke^{-\int^t \frac{1}{\sqrt{1+s^3}} ds}.$$

Por variación de constantes,

$$k(t) = \int^t \frac{1}{s} e^{\int^s \frac{1}{\sqrt{1+u^3}} du} ds,$$

con lo cual

$$x(t) = (k + k(t))e^{-\int^t \frac{1}{\sqrt{1+s^3}} ds}.$$

Obtenemos la solución del problema del valor inicial evaluando,  $x(1) = k = 2$ . □

**Número A.1.3** El nivel de carbón vegetal encontrado en las grutas de Lascaux, en Francia, dio una medida de 0,91 desintegraciones por minuto y gramo (la madera viva da 6,68 desintegraciones). Estimad la edad probable de las pinturas que se hallan en dichas cuevas.

*Solución A.1.3.1.* — Elegimos  $t = 0$  el momento en el que se corta el árbol, y denotamos por  $x(t)$  la cantidad de carbono-14 a tiempo  $t$ , por lo que  $x'(0) = -6,68q$ , donde  $q$  es la cantidad de carbono-14 en 1 gramo de madera. Utilizando la fórmula vista en clase,

$$x(t) = x(0)e^{-\lambda t},$$

donde  $\lambda = \frac{\log 2}{5730}$ , deducimos que

$$x'(t) = -\lambda x(0)e^{-\lambda t}.$$

Según los datos del enunciado,  $-6,68q = x'(0) = -\lambda x(0)$ . Si llamamos  $t_\alpha$  al momento en el que estamos, tenemos  $-0,91q = x'(t_\alpha) = -\lambda x(0)e^{-\lambda t_\alpha}$ , y dividiendo queda

$$\frac{0,91}{6,68} = \frac{x'(t_\alpha)}{x'(0)} = e^{-\lambda t_\alpha},$$

de donde se deduce que  $t_\alpha = 16479$ , es decir, las pinturas tienen una antigüedad de 16479 años. □

## A.2. Problemas del capítulo 2

**Número A.2.1** Resolver la ecuación diferencial asociada al modelo SIS:

$$x' = \kappa x(N - x) - \beta x.$$

Estudiar el problema del valor inicial asociado y obtener el teorema del umbral para este modelo.

*Solución A.2.1.1.* — Utilizamos el cambio de variable  $y = 1/x$ , donde  $x > 0$ , con lo que  $y' = -x'/x^2$ , sustituyendo

$$y' = \kappa + (\beta - \kappa N)\frac{1}{x} = \kappa + (\beta - \kappa N)y,$$

obtenemos así una ecuación lineal, cuya solución general es

$$y(t) = \frac{\kappa}{N\kappa - \beta} + x e^{(\beta - \kappa N)t},$$

en la variable original  $x(t) = 1/y(t)$ . Nos planteamos ahora el problema del valor inicial con  $x(t_0) = x_0$ , sustituyendo en la solución obtenida

$$x_0 = \frac{1}{\frac{\kappa}{N\kappa - \beta} + \left(\frac{1}{x_0} - \frac{\kappa}{N\kappa - \beta}\right)e^{(\beta - \kappa N)(t - t_0)}}.$$

Nos preguntamos ahora cuál es el límite cuando  $t$  tiende a infinito. Tenemos dos casos, si  $\beta > \kappa N$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , por lo que la enfermedad desaparece. Si  $\beta < \kappa N$  el límite es  $N - \beta/\kappa$ , por lo que la enfermedad se hace endémica. En el caso  $\beta = \kappa N$  no podemos sustituir en la solución por lo que consideramos  $y' = \kappa$  e  $y = \kappa t + c$ , con esto  $x = 1/(\kappa t + c)$ , sustituyendo en la condición inicial

$$x(t) = \frac{1}{\kappa(t - t_0) + \frac{1}{x_0}},$$

con lo que la enfermedad también desaparece. La diferencia entre el caso uno y el tres es que en el primero la función tiende a 0 mucho más rápido (exponencialmente) que en el tercero.  $\square$

**Número A.2.2** Resolver los problemas lineal y cuadrático asociados al problema de caída libre con resistencia al aire. Es decir, la ecuación

$$v' = g - \frac{\kappa}{m}v^n, \quad n \in \{1, 2\}.$$

*Solución A.2.2.1.* — Esta ecuación es separable, puesto que se puede expresar como

$$\frac{v'}{g - \frac{\kappa}{m}v^n} = 1.$$

Para resolverla así, distinguimos casos en función del valor de  $n$ :

- Caso  $n = 1$ : Como las dos primitivas son elementales, integrando a ambos lados obtenemos sin mayor dificultad

$$-\frac{m}{\kappa} \log \left| g - \frac{\kappa}{m}v \right| = t + c_1$$

y ahora sin más que despejar  $v$  llegamos a la solución general:

$$v(t) = \frac{gm}{\kappa} - ce^{-\frac{\kappa}{m}t}.$$

Observamos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{gm}{\kappa}$ , es decir, la velocidad aumenta (o disminuye, en función del valor inicial) hasta una *velocidad terminal*; esto contrasta con lo que ocurre en un sistema sin rozamiento, en el que la velocidad aumenta sin restricción.

- Caso  $n = 2$ : Para hallar una primitiva del término de la izquierda, lo separamos primero en fracciones simples; denotaremos  $\alpha := \frac{\kappa}{m}$  para simplificar la notación.

$$\frac{1}{g - \alpha x^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{g}}}{\sqrt{g} + \sqrt{\alpha}x} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{g}}}{\sqrt{g} - \sqrt{\alpha}x}.$$

Así es inmediato hallar las primitivas:

$$t + c_1 = \frac{1}{2\sqrt{g}} \int \frac{v'(t)}{\sqrt{g} + \sqrt{\alpha}v(t)} + \frac{v'(t)}{\sqrt{g} - \sqrt{\alpha}v(t)} dt = \frac{1}{2\sqrt{g\alpha}} \log \left| \frac{\sqrt{g} + \sqrt{\alpha}v}{\sqrt{g} - \sqrt{\alpha}v} \right|$$

y ahora basta despejar  $v$ :

$$v = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\alpha}} \left( \frac{e^{2\sqrt{g\alpha}t+c_2} - 1}{e^{2\sqrt{g\alpha}t+c_2} + 1} \right) = \sqrt{\frac{gm}{\kappa}} \tanh \left( \sqrt{\frac{g\kappa}{m}} t + c \right).$$

Igual que antes, la velocidad se acaba estabilizando, aunque en este caso el límite es  $\sqrt{\frac{gm}{\kappa}}$ .

□

