Elementos de ecuaciones diferenciales ordinarias

Ricardo Maurizio Paul

18 de febrero de 2021

Capítulo 1

Introducción

1.1 Primeras definiciones

Definición 1.1.1 *Una ecuación diferencial es una ecuación de la forma*

$$F(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)}) = 0$$

donde $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *con* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$ *abierto.*

Se dice que $x(t)$ es solución de una ecuación diferencial en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ si $x : I \to \mathbb{R}$ y

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad \forall t \in I$$

y se cumple además que

i) x tiene todas las derivadas hasta orden n y son continuas.

ii) $(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) \in \Omega, \quad \forall t \in I.$

Supondremos que la ecuación diferencial está dada en forma normal,

$$x^{(n)} = f(t, x', x'', \ldots, x^{(n-1)})$$

llamamos $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ al dominio de f, esto se puede hacer localmente sin pérdida de generalidad gracias al teorema de la función implícita.

Definición 1.1.2 *Llamaremos a* n *el orden de la ecuación diferencial.*

Definición 1.1.3 *La ecuación es lineal si* f *es de la forma*

$$f(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x + b(t)$$

1.2 Ejemplos de modelado

1.2.1 Desintegración de sustancias radiactivas

En este caso tenemos que $x(t)$ es la masa en un tiempo t de un elemento radiactivo. La clave que nos permite modelar este fenómeno es que la probabilidad de desintegración de

un átomo es la misma para todos los átomos de la muestra, independientemente de la masa del material.
Nos interesa la masa en función del tiempo relativa, esto es

$$\frac{\Delta x}{x\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{x(t)\Delta t} = -\lambda, \quad \lambda > 0$$

la última igualdad se deduce de lo dicho anteriormente. Llamaremos a Δt la tasa de crecimiento media. Tomando el límite $\Delta t \to 0$ nos queda $x'(t)/x(t) = -\lambda$ para todo t. Esto nos da una ecuación diferencial lineal de primer orden (de coeficientes constantes). En este caso, x es una masa, por lo que no puede ser negativa, por tanto

$$f(t,x) = -\lambda x$$

con $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y $\Omega = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$.
Esta ecuación diferencial es resoluble, para ello tomamos primitivas en

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -\lambda \implies \log(x) = -\lambda t + c \implies x = e^c e^{-\lambda t} = ke^{-\lambda t}$$

con lo que nos queda $x = ke^{-\lambda t}$, llamamos a esta fórmula solución general de la ecuación, ya que nos da todo el conjunto de soluciones variando k.
Observamos que el conjunto de soluciones en un espacio vectorial de dimensión 1, esto se debe a que la ecuación es lineal y de dimensión 1. Esto intuitivamente se debe a que hemos acotado el espacio vectorial de dimensión infinita de todas las derivadas de la función a uno de dimensión finita.

1.2.2 Movimiento armónico simple

Vemos ahora otro ejemplo de modelado más complicado, el movimiento del péndulo. El punto de masa m es el peso del péndulo y llamaremos θ al ángulo formado entre la recta perpendicular al plano sobre el que esta apoyado el péndulo y que parte de su punto de apoyo y la cuerda. Denotaremos la longitud de la cuerda por l Recordamos que $F = ma$ donde a es la aceleración. Tenemos entonces que

$$-mg\sin\theta = ml\theta''$$

por tanto

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

puesto que θ aparece dentro del seno, esta ecuación es no lineal y de orden 2, puesto que aparece la derivada segunda de θ. En este caso $f(t,\theta,\theta') = -\frac{g}{l}\sin\theta$ y $\Omega = \mathbb{R}\times(-\pi,\pi)\times\mathbb{R}$. Si θ es suficientemente próximo a 0 podemos aproximar $\sin\theta$ a θ con lo que tenemos la ecuación lineal de segundo orden

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\theta.$$

Esta es la ecuación del movimiento armónico simple. Su solución general, que, recordamos, es el conjunto de todas las soluciones es

$$\Theta(t) = C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t$$

donde $\omega^2 = g/l$, demostraremos esto más adelante. Este conjunto de soluciones forma un espacio vectorial de dimensión 2. Demostraremos también que el conjunto de soluciones de una ecuación lineal de orden n es un espacio vectorial, o afín si existe un término independiente, de orden n.

1.2.3 Problema del valor inicial (PVI)

Dada una ecuación diferencial en forma normal

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)})$$

nos dan los valores de la función y sus derivadas en un tiempo determinado t_0,

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Estas condiciones determinan una única solución para la ecuación diferencial original.

1.2.4 Datación por carbono 14 (Premio Nobel de Química 1960)

Existen diversos isótopos del carbono, entre ellos el carbono 12 el cual es estable y el carbono 14, que es el isótopo radiactivo más común. Podemos entonces usar el primer ejemplo con $\lambda \sim \log 2/5730$ medido en años. La proporción de carbono 12 y carbono 14 es constante en la atmósfera. El carbono 14 al ser radiactivo debería desintegrarse y disminuir su concentración en la atmósfera pero este equilibrio se mantiene gracias a los rayos cósmicos que alcanzan la tierra. Debido a la fotosíntesis y a la cadena alimenticia esta proporción se mantiene constante en los seres vivos, énfasis en vivos. Al morir un ser vivo el carbono 12 se mantiene mientras que el carbono 14 disminuye en concentración, debido a su naturaleza radioactiva, aun ritmo que depende de λ. Debido a esto analizando la proporción entre carbono 12 y 14 en material orgánico (madera, hueso, etc.) y comparándolo con uno vivo es posible determinar la edad del resto orgánico analizado. Vemos algunos ejemplos concretos.

Ejemplo 1.2.1 Si la cantidad de carbono 14 en un microorganismo es de 10^{-6} gramos ¿Qué cantidad habrá 3000 años después?

Solución 1.2.1.1. — Se entiende que el ciclo de vida del organismo es despreciable respecto a la edad que debemos datar. Tenemos que $x' = -\lambda x$, a tiempo 0, cuando el organismo muere, tenemos que $x(0) = 10^{-6}$. Se trata de un problema de valor inicial, ahora solo tenemos que encontrar $x(3000)$. Empezamos resolviendo la ecuación diferencial

$$x(t) = ke^{-\lambda t} = ke^{-\frac{\log 2}{5730}t}$$

por lo que hemos visto antes $k = x(0) = 10^{-6}$ con lo que

$$x(t) = 10^{-6}e^{-\frac{\log 2}{5730}t}$$

podemos obtener ahora el resultado $x(3000) = 6,95 \cdot 10^{-7}$ gramos. □

Normalmente no sabemos la cantidad de carbono presente en un organismo antes de su muerte, vemos ahora un ejemplo más cercano a la realidad.

Ejemplo 1.2.2 En una excavación en Nippur, Babilonia, en 1950 el carbón vegetal de la viga de un techo dio $4,09$ desintegraciones por minuto y gramo, mientras que la madera viva da $6,68$ desintegraciones, también por minuto y gramo. Nos preguntamos en qué año se construyó en edificio.

Solución 1.2.2.1. — Llamaremos $R(t)$ a la tasa de desintegración total $R(t) = \lambda x(t) = \lambda x(0)e^{-\lambda t}$, donde $x(0)$ es la cantidad de carbono 14 en el trozo de madera cuando fue cortada y t el tiempo transcurrido desde que se corta el árbol hasta 1950. Buscamos entonces el año de construcción $R(0) = \lambda x(0)$, tenemos que

$$\frac{R(t)}{R(0)} = 10^{-6}e^{-\frac{\log 2}{5730}t}$$

sustituimos $R(t) = 4,09$ y $R(0) = 6,68$ con lo que $t = 4055$ años. Así concluimos que el edificio se construyó en el 2105 a.C. $\square$

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Definición 2.0.1 *Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden son aquellas de la forma*

$$x' = a(t)x + b(t)$$

donde $a(t)$ *y* $b(t)$ *son continuas en* $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$.

2.1 Ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden

Para resolver este tipo de ecuaciones primero consideraremos su ecuación homogénea asociada, esto es

$$x' = a(t)x.$$

Buscamos ahora las soluciones de la ecuación homogénea. Supongamos que la solución no se anula en ningún punto, entonces por el teorema de Bolzano $x > 0$ o $x < 0$ en (α, ω). En este caso recurrimos a un método que llamaremos separación de variables, por el teorema fundamental del cálculo podemos escribir

$$\frac{x'}{x} = a(t) \iff \log|x(t)| = \int_\beta^t a(s)\, ds + c, \quad \beta \in (\alpha, \omega).$$

Para aligerar la notación escribiremos

$$\int^t a(s)\, ds + c,$$

así obtenemos

$$x(t) = ke^{\int^t a(s)\, ds}.$$

Vamos a demostrar ahora que la solución así obtenida es la solución general de la ecuación homogénea. Primero probamos que $ke^{\int^t a(s)\, ds}$ es solución de la ecuación homogénea, para ello basta derivar en

$$x'(t) = ka(t)e^{\int^t a(s)\, ds} = a(t)x(t).$$

Probamos ahora que no existen más soluciones, para ello consideramos

$$\Phi(t) = u(t)e^{-\int^t a(s)\,ds}$$

entonces

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= u'(t)e^{-\int^t a(s)\,ds} - u(t)a(t)e^{-\int^t a(s)\,ds}\\ &= a(t)u(t)e^{-\int^t a(s)\,ds} - u(t)a(t)e^{-\int^t a(s)\,ds} = 0\end{aligned}$$

Luego es constante, por lo que $u(t) = ke^{\int^t a(s)\,ds}$.

Ejemplo 2.1.1 Obtener la solución general de

$$y' + 2ty = 0$$

Solución 2.1.1.1. — Tenemos entonces que

$$\frac{y'}{y} = -2t \iff \log|y| = -t^2 + c \iff y = ke^{-t^2}$$

2.1.1 Problema del valor inicial

Tenemos una ecuación lineal homogénea de primer orden, esto es

$$x' = a(t)x$$

y además sabemos que $x(t_0) = x_0$ para t_0 en (α, β) y x_0 en $\mathbb{R}$.
Sabemos que la solución general de la ecuación es

$$x(t) = ke^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds},$$

ahora queremos que $x(t_0) = x_0$ para ello notamos que

$$x(t_0) = ke^{\int_{t_0}^{t_0} a(s)\,ds} = k = x_0,$$

hemos probado así que el PVI tiene solución única, dada por

$$x(t) = x_0e^{\int_{t_0}^t a(s)\,ds}$$

y además la solución está definida en (α, ω).

2.1.2 Estructura del espacio de soluciones

Observamos que el conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea de primer orden es un espacio vectorial de dimensión 1, o más bien un subespacio vectorial de dimensión 1 de $C^1(\alpha, \omega)$ el espacio vectorial de funciones de clase C^1 en α, ω.
Vamos a ver cómo esto se deduce de la linealidad de la ecuación. Para ello definimos el siguiente operador diferencial.

Definición 2.1.1 *Un operador diferencial* $L : C^1(\alpha, \omega) \to C(\alpha, \omega)$ *es una función de que lleva funciones de clase 1 en funciones continuas, y se define como*

$$L(x) = \frac{dx}{dt} - a(t)x$$

Recordamos que decimos que una función es lineal cuando cumple

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y), \quad a, b \in \mathbb{K},$$

entonces la linealidad de L se deduce de la linealidad de todas las operaciones dentro de su definición.
Notamos que la linealidad de la ecuación diferencial equivale a la linealidad de L y, además, x es solución de $x' = a(t)x$ si y solo si $x \in \ker(L)$. Por álgebra lineal sabemos que el núcleo de un espacio vectorial es siempre un subespacio vectorial suyo, por tanto, el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea es un espacio vectorial.