

Elementos de ecuaciones diferenciales ordinarias

Ricardo Maurizio Paul

Curso 2020/2021

Índice general

1. Introducción	2
1.1. Primeras definiciones	2
1.2. Ejemplos de modelado	2
1.2.1. Desintegración de sustancias radiactivas	2
1.2.2. Movimiento armónico simple	3
1.2.3. Problema del valor inicial (PVI)	4
1.2.4. Datación por carbono-14 (Premio Nobel de Química 1960)	4
2. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden	6
2.1. Ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden	6
2.1.1. Problema del valor inicial	7
2.1.2. Estructura del espacio de soluciones	8
2.2. El operador diferencial	8
2.3. Ecuación diferencial lineal de primer orden	9
2.3.1. Método de variación de constantes	9
2.3.2. Problema del valor inicial	10

Capítulo 1

Introducción

1.1. Primeras definiciones

Definición 1.1.1 Una ecuación diferencial es una ecuación de la forma

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$$

donde $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$ abierto.

Definición 1.1.2 Se dice que $x(t)$ es solución de una ecuación diferencial en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ si $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ y

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Se cumple además que:

- I) La función x tiene todas las derivadas hasta orden n y son continuas.
- II) El punto $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) \in \Omega$ para todo t en I .

Supondremos que la ecuación diferencial está dada en forma normal,

$$x^{(n)} = f(t, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$$

llamamos $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ al dominio de f , esto se puede hacer localmente sin pérdida de generalidad gracias al teorema de la función implícita.

Nota 1.1.1 Llamaremos n al orden de la ecuación diferencial.

Definición 1.1.3 Una ecuación diferencial es lineal si f es de la forma

$$f(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x + b(t)$$

1.2. Ejemplos de modelado

1.2.1. Desintegración de sustancias radiactivas

En este caso tenemos que $x(t)$ es la masa en un tiempo t de un elemento radiactivo. La clave que nos permite modelar este fenómeno es que la probabilidad de desintegración de un átomo es la misma para todos los átomos de la muestra, independientemente de la masa del material.

Nos interesa la masa en función del tiempo relativa, esto es

$$\frac{\Delta x}{x\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{x(t)\Delta t} = -\lambda, \quad \lambda > 0$$

la última igualdad se deduce de lo dicho anteriormente. Llamaremos a Δt la tasa de crecimiento media. Tomando el límite $\Delta t \rightarrow 0$ nos queda $x'(t)/x(t) = -\lambda$ para todo t . Esto nos da una ecuación diferencial lineal de primer orden (de coeficientes constantes).

En este caso, x es una masa, por lo que no puede ser negativa, por tanto

$$f(t, x) = -\lambda x$$

con $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $\Omega = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$.

Esta ecuación diferencial es resoluble, para ello tomamos primitivas en

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -\lambda \implies \log(x) = -\lambda t + c \implies x = e^c e^{-\lambda t} = k e^{-\lambda t}$$

con lo que nos queda $x = k e^{-\lambda t}$. Llamamos a esta fórmula solución general de la ecuación, y nos da todo el conjunto de soluciones variando k . En particular, el conjunto de soluciones es un subespacio vectorial de dimensión uno del espacio vectorial $C^1(\mathbb{R})$, que tiene dimensión infinita.

1.2.2. Movimiento armónico simple

Vemos ahora otro ejemplo de modelado más complicado, el movimiento del péndulo. El punto de masa m es el peso del péndulo y llamaremos θ al ángulo formado entre la recta perpendicular al plano sobre el que está apoyado el péndulo y que parte de su punto de apoyo y la cuerda. Denotaremos la longitud de la cuerda por l . Recordamos que $F = ma$ donde a es la aceleración. Tenemos entonces que

$$-mg \sin \theta = ml\theta''$$

por tanto

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

puesto que θ aparece dentro del seno, esta ecuación es no lineal y de orden 2, puesto que aparece la derivada segunda de θ . En este caso $f(t, \theta, \theta') = -\frac{g}{l} \sin \theta$ y $\Omega = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$. Si θ es suficientemente próximo a 0 podemos aproximar $\sin \theta$ a θ con lo que tenemos la ecuación lineal de segundo orden

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \theta.$$

Esta es la ecuación del movimiento armónico simple. Su solución general, que, recordamos, es el conjunto de todas las soluciones es

$$\Theta(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

donde $\omega^2 = g/l$, demostraremos esto más adelante. Este conjunto de soluciones forma un espacio vectorial de dimensión 2. Demostraremos también que el conjunto de soluciones de una ecuación lineal de orden n es un espacio vectorial, o aún si existe un término independiente, de orden n .

1.2.3. Problema del valor inicial (PVI)

Dada una ecuación diferencial en forma normal

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

nos dan los valores de la función y sus derivadas en un tiempo determinado t_0 ,

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Estas condiciones determinan una única solución para la ecuación diferencial original.

1.2.4. Datación por carbono-14 (Premio Nobel de Química 1960)

Existen diversos isótopos del carbono, entre ellos el carbono-12 el cual es estable y el carbono-14, que es el isótopo radiactivo más común. Podemos entonces usar el primer ejemplo con $\lambda \sim \log 2/5730$ medido en años. La proporción de carbono-12 y carbono-14 es constante en la atmósfera. El carbono-14 al ser radiactivo debería desintegrarse y disminuir su concentración en la atmósfera pero este equilibrio se mantiene gracias a los rayos cósmicos que alcanzan la tierra. Debido a la fotosíntesis y a la cadena alimenticia esta proporción se mantiene constante en los seres vivos, énfasis en vivos. Al morir un ser vivo el carbono-12 se mantiene mientras que el carbono-14 disminuye en concentración, debido a su naturaleza radioactiva, aun ritmo que depende de λ . Debido a esto analizando la proporción entre carbono-12 y 14 en material orgánico (madera, hueso, etc.) y comparándolo con uno vivo es posible determinar la edad del resto orgánico analizado. Veamos algunos ejemplos concretos.

Ejemplo 1.2.1 Si la cantidad de carbono-14 en un microorganismo es de 10^{-6} gramos ¿Qué cantidad habrá 3000 años después?

Solución 1.2.1.1. — Se entiende que el ciclo de vida del organismo es despreciable respecto a la edad que debemos datar. Tenemos que $x' = -\lambda x$, a tiempo 0, cuando el organismo muere, tenemos que $x(0) = 10^{-6}$. Se trata de un problema de valor inicial, ahora solo tenemos que encontrar $x(3000)$. Empezamos resolviendo la ecuación diferencial

$$x(t) = ke^{-\lambda t} = ke^{-\frac{\log 2}{5730}t}$$

por lo que hemos visto antes $k = x(0) = 10^{-6}$ con lo que

$$x(t) = 10^{-6}e^{-\frac{\log 2}{5730}t}$$

podemos obtener ahora el resultado $x(3000) = 6,95 \cdot 10^{-7}$ gramos. □

Normalmente no sabemos la cantidad de carbono presente en un organismo antes de su muerte, veamos ahora un ejemplo más cercano a la realidad.

Ejemplo 1.2.2 En una excavación en Nippur, Babilonia, en 1950 el carbón vegetal de la viga de un techo dio 4,09 desintegraciones por minuto y gramo, mientras que la madera viva da 6,68 desintegraciones, también por minuto y gramo. Nos preguntamos en qué año se construyó en edificio.

Solución 1.2.2.1. — Llamaremos $R(t)$ a la tasa de desintegración total $R(t) = \lambda x(t) = \lambda x(0)e^{-\lambda t}$, donde $x(0)$ es la cantidad de carbono-14 en el trozo de madera cuando fue cortada y t el tiempo

transcurrido desde que se corta el árbol hasta 1950. Buscamos entonces el año de construcción $R(0) = \lambda x(0)$, tenemos que

$$\frac{R(t)}{R(0)} = 10^{-6} e^{-\frac{\log 2}{5730} t}$$

sustituimos $R(t) = 4,09$ y $R(0) = 6,68$ con lo que $t = 4055$ años. Así concluimos que el edificio se construyó en el 2105 a.C. \square

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Comenzamos estudiando las ecuaciones diferenciales mas sencillas, las ecuaciones lineales de primer orden, como veremos, son siempre resolubles, esto es existe una fórmula dependiente de un solo parámetro que proporciona todo el conjunto de soluciones.

Definición 2.0.1 Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden son aquellas de la forma

$$x' = a(t)x + b(t)$$

donde a y b son continuas en $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$.

Antes de resolver estas ecuaciones, centraremos nuestra atención en un problema más simple, la obtención de soluciones de una ecuación lineal homogénea de primer orden asociada a la ecuación original.

2.1. Ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden

Definición 2.1.1 Una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden es una ecuación de la forma

$$x' = a(t)x.$$

con a continua en $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$.

Buscamos ahora las soluciones de la ecuación homogénea. Supongamos que la solución no se anula en ningún punto, entonces por el teorema de Bolzano $x > 0$ o $x < 0$ en (α, ω) . En este caso recurrimos a un método que llamaremos separación de variables, por el teorema fundamental del cálculo podemos escribir

$$\frac{x'}{x} = a(t) \iff \log|x(t)| = \int_{\beta}^t a(s) ds + c, \quad \beta \in (\alpha, \omega).$$

Para aligerar la notación escribiremos $\int^t a(s) ds$, para referirnos a cualquier primitiva de a . Por lo anterior

$$x(t) = ke^{\int^t a(s) ds}.$$

Vamos a demostrar ahora que la solución obtenida es la solución general de la ecuación homogénea.

Teorema 2.1.1 *Todas las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea, $x' = a(t)x$, son de la forma*

$$x(t) = ke^{\int^t a(s) ds}. \quad (2.1)$$

Demostración 2.1.1.1. — Primero probamos que $ke^{\int^t a(s) ds}$ es solución de la ecuación homogénea, para ello basta derivar en (2.1)

$$x'(t) = ka(t)e^{\int^t a(s) ds} = a(t)x(t).$$

Probamos ahora que no existen más soluciones, para ello, sea $u(t)$ una solución arbitraria de la ecuación, consideramos la función

$$\Phi(t) = u(t)e^{-\int^t a(s) ds}$$

y calculamos su derivada obteniendo

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= u'(t)e^{-\int^t a(s) ds} - u(t)a(t)e^{-\int^t a(s) ds} \\ &= a(t)u(t)e^{-\int^t a(s) ds} - u(t)a(t)e^{-\int^t a(s) ds} = 0. \end{aligned}$$

Luego la función Φ es constante, por lo que $u(t) = ke^{\int^t a(s) ds}$. □

Ejemplo 2.1.1 Obtener la solución general de la ecuación $y' + 2ty = 0$.

Solución 2.1.1.1. — Utilizando la técnica de separación de variables vista anteriormente

$$\frac{y'}{y} = -2t \iff \log|y| = -t^2 + c \iff y = ke^{-t^2} \quad \square$$

2.1.1. Problema del valor inicial

Vemos cómo se plantea el problema del valor inicial en el caso de ecuaciones homogéneas. Tenemos una ecuación lineal homogénea de primer orden, esto es $x' = a(t)x$ y además queremos que $x(t_0) = x_0$ para algún $t_0 \in (\alpha, \omega)$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Sabemos que la solución general de la ecuación es de la forma (2.1) y podemos usar la libertad que tenemos para elegir la primitiva para ponerla como

$$x(t) = ke^{\int_{t_0}^t a(s) ds},$$

ahora queremos que $x(t_0) = x_0$, para ello notamos que

$$x_0 = x(t_0) = ke^{\int_{t_0}^{t_0} a(s) ds} = k,$$

hemos probado así que el problema del valor inicial tiene solución única, dada por

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \quad (2.1)$$

y además la solución está bien definida en el intervalo (α, ω) .

2.1.2. Estructura del espacio de soluciones

Observamos que el conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea de primer orden es un espacio vectorial de dimensión 1, o más precisamente un subespacio vectorial de dimensión 1 de $C^1(\alpha, \omega)$, es decir, el espacio vectorial de funciones de clase C^1 en el intervalo $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$.

Vamos a ver cómo esto se deduce de la linealidad de la ecuación. Para ello definimos el operador diferencial:

$$L : C^1(\alpha, \omega) \rightarrow C(\alpha, \omega)$$

$$x \mapsto \frac{dx}{dt} - a(t)x$$

Recordamos que decimos que una función es lineal cuando cumple

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y), \quad a, b \in \mathbb{K},$$

entonces la linealidad de L se deduce de la linealidad de todas las operaciones dentro de su definición.

Nota 2.1.2 La linealidad de la ecuación diferencial equivale a la linealidad de L y, además, x es solución de $x' = a(t)x$ si y solo si $x \in \ker(L)$. Sabemos del álgebra lineal que el núcleo de un homomorfismo vectorial es siempre un subespacio vectorial del espacio de dominio y, por tanto, el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea es un espacio vectorial.

2.2. El operador diferencial

Dada una ecuación diferencial lineal homogénea de la forma

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t).$$

Podemos asociar a esta ecuación un operador diferencial

$$L = \frac{d^n}{dt^n} - a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} - \cdots - a_1(t) \frac{d}{dt} - a_0(t)$$

donde el término k -ésimo $a_k(t)d^k/dt^k$ actúa sobre una función $u(t)$ como

$$L(u(t)) = a_k(t) \frac{d^k}{dt^k} u(t) = a_k(t) u^{(k)}(t).$$

Como derivar es lineal:

$$\frac{d}{dt}(\alpha u(t) + \beta v(t)) = \alpha \frac{d}{dt} u(t) + \beta \frac{d}{dt} v(t)$$

y multiplicar por una función fija también es lineal

$$a(t)(\alpha u(t) + \beta v(t)) = \alpha a(t)u(t) + \beta a(t)v(t),$$

el operador composición de las anteriores $a_k(t)d^k/dt^k$ es lineal. Tenemos así que L es lineal como operador de tipo $L : C^n(\alpha, \omega) \rightarrow C(\alpha, \omega)$, asumiendo que $a_k(t) \in C(\alpha, \omega)$ para todo $k = 0, \dots, n-1$.

Nota 2.2.1 Evidentemente tenemos que las soluciones de una ecuación diferencial homogénea corresponden a las funciones tal que $L(x(t)) = 0$. Por lo que el conjunto de soluciones es el núcleo del operador L así definido.

Nota 2.2.2 En general tenemos que $x(t)$ es solución de una ecuación diferencial general si y solo si $L(x(t)) = b(t)$, donde hemos definido L mediante la ecuación homogénea asociada. Por lo que el espacio de soluciones de una ecuación general lineal es un espacio afín de dimensión n .

2.3. Ecuación diferencial lineal de primer orden

Ahora que ya hemos obtenido la solución general §2.1 para ecuaciones lineales homogéneas y también su solución única en el caso del problema del valor inicial §2.1.1, podemos afrontar el problema de obtener las soluciones de una ecuación diferencial lineal:

$$x' = a(t)x + b(t),$$

Consideramos el operador diferencial asociado a su ecuación homogénea $L = \frac{d}{dt} - a(t)$.

Lema 2.3.1 *si x_0 es solución de la ecuación homogénea asociada a una ecuación lineal y x_p es solución de la ecuación entonces*

$$x_0 + x_p$$

es solución de la ecuación lineal.

Demostración 2.3.1.1. — Por la linealidad del operador diferencial

$$L(x_0(t) + x_p(t)) = L(x_0(t)) + L(x_p(t)) = b(t). \quad \square$$

Lema 2.3.2 *si x_1 y x_2 son soluciones de una ecuación diferencial lineal entonces $x_1 - x_2$ es también solución.*

Demostración 2.3.2.1. — Por la linealidad del operador diferencial

$$L(x_1 - x_2) = L(x_1) - L(x_2) = b(t) - b(t) = 0. \quad \square$$

Corolario 2.3.2.1 *La solución general de una ecuación diferencial lineal de primer orden es*

$$x_p(t) + x_n(t)$$

donde $x_p(t)$ es una solución arbitraria de la ecuación y $x_n(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada.

Nos proponemos ahora obtener una solución de forma explícita, haremos esto mediante el método de variación de constantes.

2.3.1. Método de variación de constantes

Conocemos una forma explícita de calcular una solución de la ecuación homogénea asociada a una ecuación lineal §2.1. Conjeturamos que hay una solución de la ecuación lineal de la forma

$$x_p(t) = k(t)e^{\int^t a(s) ds} \quad (2.2)$$

e intentamos obtener $k(t)$. Buscamos entonces que se cumpla la igualdad

$$x'_p(t) = a(t)x_p(t) + b(t) = a(t)k(t)e^{\int^t a(s) ds} + b(t),$$

podemos derivar en (2.2) obteniendo

$$x'_p(t) = k'(t)e^{\int^t a(s) ds} + k(t)a(t)e^{\int^t a(s) ds}$$

y simplemente igualando y despejando hallamos la derivada k' :

$$k'(t) = b(t)e^{-\int^t a(s) ds}.$$

Tenemos así que la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = \left(k + \int^t b(s)e^{-\int^s a(u) du} ds \right) e^{\int^t a(s) ds}.$$

Nota 2.3.3 No es necesario aprender esta ecuación de memoria, se utiliza el método de variación de constantes para obtener formas explícitas para cada problema en particular.

2.3.2. Problema del valor inicial

Como de costumbre consideramos la ecuación diferencial lineal junto a una condición $x(t_0) = x_0$, con $t_0 \in (\alpha, \omega)$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Consideramos la solución general fijando el límite inferior a t_0 ,

$$x(t) = \left(k + \int_{t_0}^t b(s)e^{-\int_{t_0}^s a(u) du} ds \right) e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

Sin más que sustituir obtenemos que $k = x_0$, por lo que nuestra ecuación tiene solución única.

Teorema 2.3.4 *El problema del valor inicial*

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t), & a, b \in C(\alpha, \omega) \\ x(t_0) = x_0, & t_0 \in (\alpha, \omega), \quad x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

tiene solución única dada por:

$$x(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^t b(s)e^{-\int_{t_0}^s a(u) du} ds \right) e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

Las gráficas de las soluciones “rellenan” la franja $(\alpha, \omega) \times \mathbb{R}$ sin cortarse. La rellenan porque para cualquier punto $(t_0, x_0) \in (\alpha, \omega) \times \mathbb{R}$ hay una solución que pasa por él, y no se cortan entre sí porque sólo hay una solución que pase por cada punto, como consecuencia del teorema anterior.

Ejemplo 2.3.1 Resuélvase el problema del valor inicial:

$$\begin{cases} x' + \frac{x}{t} = \cos t \\ x(\pi) = 1 \end{cases}$$

Solución 2.3.1.1. — Observamos que el intervalo donde vamos a resolver el problema es $(0, +\infty)$. Puesto que π ha de pertenecer al intervalo $t \neq 0$. La ecuación homogénea asociada es $x' + x/t = 0$, separando variables y calculando primitivas a ambos lados obtenemos

$$\frac{x'}{x} = -\frac{1}{t} \iff \log|x| = -\log|t| + c \iff x = \frac{k}{t}.$$

Utilizamos ahora la técnica de variación de constantes, consideramos $x_p(t) = k(t)/t$ e imponemos que es solución de la ecuación diferencial, por tanto

$$x_p'(t) = \frac{k'(t)}{t} - \frac{k(t)}{t^2}$$

asimismo

$$\cos t - \frac{x_p(t)}{t} = \cos t - \frac{k(t)}{t^2}$$

por lo que $k'(t)/t = \cos t$. Basta elegir entonces $k(t)$ igual a una primitiva de $t \cos t$, integrando por partes $k(t) = t \sin t + \cos t$. Recordamos que la solución general de la ecuación diferencial es la suma de la solución general de la homogénea más la solución particular obtenida

$$x(t) = \frac{1}{t}(k + t \sin t + \cos t).$$

Calculamos k usando la condición inicial $x(\pi) = 1$,

$$(k - 1)\frac{1}{\pi} = 1 \iff k = \pi + 1.$$

Sustituimos en la solución general obteniendo así la solución única a nuestro problema

$$x(t) = \frac{1}{t}(\pi + 1 + t \sin t + \cos t).$$

□