

# Elementos de ecuaciones diferenciales ordinarias

Ricardo Maurizio Paul

Pablo Castellanos García

Curso 2020/2021

# Índice general

<b>0. Introducción</b>	<b>3</b>
0.1. Primeras definiciones . . . . .	3
0.2. Ejemplos de modelado . . . . .	3
0.2.1. Desintegración de sustancias radiactivas . . . . .	3
0.2.2. Movimiento armónico simple . . . . .	4
0.2.3. Problema del valor inicial (PVI) . . . . .	5
0.2.4. Datación por carbono-14 (Premio Nobel de Química 1960) . . . . .	5
<b>1. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden</b>	<b>7</b>
1.1. Ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden . . . . .	7
1.1.1. Problema del valor inicial . . . . .	8
1.1.2. Estructura del espacio de soluciones . . . . .	9
1.2. El operador diferencial . . . . .	9
1.3. Ecuación diferencial lineal de primer orden . . . . .	10
1.3.1. Método de variación de constantes . . . . .	10
1.3.2. Problema del valor inicial . . . . .	11
1.4. Propagación de enfermedades . . . . .	12
1.4.1. Modelos simples para propagación de enfermedades . . . . .	12
1.4.2. El modelo más simple . . . . .	13
1.4.3. Modelo SIS . . . . .	14
1.5. Método de cambio de variable . . . . .	14
1.5.1. Caída libre con rozamiento . . . . .	15
<b>2. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden</b>	<b>16</b>
2.1. Problema del valor inicial . . . . .	17
2.2. Estructura del espacio de soluciones . . . . .	19
2.2.1. Caso homogéneo . . . . .	19
2.2.2. Caso no homogéneo . . . . .	20
2.3. Método de variación de constantes . . . . .	21
<b>3. Ecuación diferencial escalar de orden superior</b>	<b>22</b>
3.1. Matriz fundamental . . . . .	23
3.2. Exponencial de una matriz . . . . .	24
3.2.1. Métodos de cómputo . . . . .	25
<b>Apéndices</b>	<b>27</b>

<b>A. Problemas resueltos</b>	<b>27</b>
A.1. Problemas del capítulo 1 . . . . .	27
A.2. Problemas del capítulo 2 . . . . .	30

# Capítulo 0

## Introducción

### 0.1. Primeras definiciones

**Definición 0.1.1** Una ecuación diferencial es una ecuación de la forma

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0$$

donde  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+2}$  abierto.

**Definición 0.1.2** Se dice que  $x(t)$  es solución de una ecuación diferencial en el intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  si  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  y

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Se cumple además que:

- I) La función  $x$  tiene todas las derivadas hasta orden  $n$  y son continuas.
- II) El punto  $(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(n)}(t)) \in \Omega$  para todo  $t$  en  $I$ .

Supondremos que la ecuación diferencial está dada en forma normal,

$$x^{(n)} = f(t, x', x'', \dots, x^{(n-1)})$$

llamamos  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  al dominio de  $f$ , esto se puede hacer localmente sin pérdida de generalidad gracias al teorema de la función implícita.

**Nota 0.1.1** Llamaremos  $n$  al orden de la ecuación diferencial.

**Definición 0.1.3** Una ecuación diferencial es lineal si  $f$  es de la forma

$$f(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x + b(t)$$

### 0.2. Ejemplos de modelado

#### 0.2.1. Desintegración de sustancias radiactivas

En este caso tenemos que  $x(t)$  es la masa en un tiempo  $t$  de un elemento radiactivo. La clave que nos permite modelar este fenómeno es que la probabilidad de desintegración de un átomo es la misma para todos los átomos de la muestra, independientemente de la masa del material.

Nos interesa la masa en función del tiempo relativa, esto es

$$\frac{\Delta x}{x\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{x(t)\Delta t} = -\lambda, \quad \lambda > 0$$

la última igualdad se deduce de lo dicho anteriormente. Llamaremos a  $\Delta t$  la tasa de crecimiento media. Tomando el límite  $\Delta t \rightarrow 0$  nos queda  $x'(t)/x(t) = -\lambda$  para todo  $t$ . Esto nos da una ecuación diferencial lineal de primer orden (de coeficientes constantes).

En este caso,  $x$  es una masa, por lo que no puede ser negativa, por tanto

$$f(t, x) = -\lambda x$$

con  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\Omega = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ .

Esta ecuación diferencial es resoluble, para ello tomamos primitivas en

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -\lambda \implies \log(x) = -\lambda t + c \implies x = e^c e^{-\lambda t} = k e^{-\lambda t}$$

con lo que nos queda  $x = k e^{-\lambda t}$ . Llamamos a esta fórmula solución general de la ecuación, y nos da todo el conjunto de soluciones variando  $k$ . En particular, el conjunto de soluciones es un subespacio vectorial de dimensión uno del espacio vectorial  $C^1(\mathbb{R})$ , que tiene dimensión infinita.

### 0.2.2. Movimiento armónico simple

Vemos ahora otro ejemplo de modelado más complicado, el movimiento del péndulo. El punto de masa  $m$  es el peso del péndulo y llamaremos  $\theta$  al ángulo formado entre la recta perpendicular al plano sobre el que esta apoyado el péndulo y que parte de su punto de apoyo y la cuerda. Denotaremos la longitud de la cuerda por  $l$ . Recordamos que  $F = ma$  donde  $a$  es la aceleración. Tenemos entonces que

$$-mg \sin \theta = ml\theta''$$

por tanto

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

puesto que  $\theta$  aparece dentro del seno, esta ecuación es no lineal y de orden 2, puesto que aparece la derivada segunda de  $\theta$ . En este caso  $f(t, \theta, \theta') = -\frac{g}{l} \sin \theta$  y  $\Omega = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ . Si  $\theta$  es suficientemente próximo a 0 podemos aproximar  $\sin \theta$  a  $\theta$  con lo que tenemos la ecuación lineal de segundo orden

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \theta.$$

Esta es la ecuación del movimiento armónico simple. Su solución general, que, recordamos, es el conjunto de todas las soluciones es

$$\Theta(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

donde  $\omega^2 = g/l$ , demostraremos esto más adelante. Este conjunto de soluciones forma un espacio vectorial de dimensión 2. Demostraremos también que el conjunto de soluciones de una ecuación lineal de orden  $n$  es un espacio vectorial, o aún si existe un término independiente, de orden  $n$ .

### 0.2.3. Problema del valor inicial (PVI)

Dada una ecuación diferencial en forma normal

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)})$$

nos dan los valores de la función y sus derivadas en un tiempo determinado  $t_0$ ,

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Estas condiciones determinan una única solución para la ecuación diferencial original.

### 0.2.4. Datación por carbono-14 (Premio Nobel de Química 1960)

Existen diversos isótopos del carbono, entre ellos el carbono-12 el cual es estable y el carbono-14, que es el isótopo radiactivo más común. Podemos entonces usar el primer ejemplo con  $\lambda \sim \log 2/5730$  medido en años. La proporción de carbono-12 y carbono-14 es constante en la atmósfera. El carbono-14 al ser radiactivo debería desintegrarse y disminuir su concentración en la atmósfera pero este equilibrio se mantiene gracias a los rayos cósmicos que alcanzan la tierra. Debido a la fotosíntesis y a la cadena alimenticia esta proporción se mantiene constante en los seres vivos, énfasis en vivos. Al morir un ser vivo el carbono-12 se mantiene mientras que el carbono-14 disminuye en concentración, debido a su naturaleza radioactiva, aun ritmo que depende de  $\lambda$ . Debido a esto analizando la proporción entre carbono-12 y 14 en material orgánico (madera, hueso, etc.) y comparándolo con uno vivo es posible determinar la edad del resto orgánico analizado. Veamos algunos ejemplos concretos.

**Ejemplo 0.2.1** Si la cantidad de carbono-14 en un microorganismo es de  $10^{-6}$  gramos ¿Qué cantidad habrá 3000 años después?

*Solución 0.2.1.1.* — Se entiende que el ciclo de vida del organismo es despreciable respecto a la edad que debemos datar. Tenemos que  $x' = -\lambda x$ , a tiempo 0, cuando el organismo muere, tenemos que  $x(0) = 10^{-6}$ . Se trata de un problema de valor inicial, ahora solo tenemos que encontrar  $x(3000)$ . Empezamos resolviendo la ecuación diferencial

$$x(t) = ke^{-\lambda t} = ke^{-\frac{\log 2}{5730} t}$$

por lo que hemos visto antes  $k = x(0) = 10^{-6}$  con lo que

$$x(t) = 10^{-6} e^{-\frac{\log 2}{5730} t}$$

podemos obtener ahora el resultado  $x(3000) = 6,95 \cdot 10^{-7}$  gramos.  $\square$

Normalmente no sabemos la cantidad de carbono presente en un organismo antes de su muerte, veamos ahora un ejemplo más cercano a la realidad.

**Ejemplo 0.2.2** En una excavación en Nippur, Babilonia, en 1950 el carbón vegetal de la viga de un techo dio 4,09 desintegraciones por minuto y gramo, mientras que la madera viva da 6,68 desintegraciones, también por minuto y gramo. Nos preguntamos en qué año se construyó en edificio.

*Solución 0.2.2.1.* — Llamaremos  $R(t)$  a la tasa de desintegración total  $R(t) = \lambda x(t) = \lambda x(0)e^{-\lambda t}$ , donde  $x(0)$  es la cantidad de carbono-14 en el trozo de madera cuando fue cortada y  $t$  el tiempo

transcurrido desde que se corta el árbol hasta 1950. Buscamos entonces el año de construcción  $R(0) = \lambda x(0)$ , tenemos que

$$\frac{R(t)}{R(0)} = 10^{-6} e^{-\frac{\log 2}{5730} t}$$

sustituimos  $R(t) = 4,09$  y  $R(0) = 6,68$  con lo que  $t = 4055$  años. Así concluimos que el edificio se construyó en el 2105 a.C.  $\square$

# Capítulo 1

## Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Comenzamos estudiando las ecuaciones diferenciales mas sencillas, las ecuaciones lineales de primer orden, como veremos, son siempre resolubles, esto es existe una fórmula dependiente de un solo parámetro que proporciona todo el conjunto de soluciones.

**Definición 1.0.1** Las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden son aquellas de la forma

$$x' = a(t)x + b(t)$$

donde  $a$  y  $b$  son continuas en  $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$ .

Antes de resolver estas ecuaciones, centraremos nuestra atención en un problema más simple, la obtención de soluciones de una ecuación lineal homogénea de primer orden asociada a la ecuación original.

### 1.1. Ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden

**Definición 1.1.1** Una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden es una ecuación de la forma

$$x' = a(t)x.$$

con  $a$  continua en  $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$ .

Buscamos ahora las soluciones de la ecuación homogénea. Supongamos que la solución no se anula en ningún punto, entonces por el teorema de Bolzano  $x > 0$  o  $x < 0$  en  $(\alpha, \omega)$ . En este caso recurrimos a un método que llamaremos separación de variables, por el teorema fundamental del cálculo podemos escribir

$$\frac{x'}{x} = a(t) \iff \log|x(t)| = \int_{\beta}^t a(s) ds + c, \quad \beta \in (\alpha, \omega).$$

Para aligerar la notación escribiremos  $\int^t a(s) ds$ , para referirnos a cualquier primitiva de  $a$ . Por lo anterior

$$x(t) = ke^{\int^t a(s) ds}.$$



Vamos a demostrar ahora que la solución obtenida es la solución general de la ecuación homogénea.

**Teorema 1.1.1** *Todas las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea,  $x' = a(t)x$ , son de la forma*

$$x(t) = ke^{\int^t a(s) ds}. \quad (1.1)$$

*Demostración 1.1.1.1.* — Primero probamos que  $ke^{\int^t a(s) ds}$  es solución de la ecuación homogénea, para ello basta derivar en (1.1)

$$x'(t) = ka(t)e^{\int^t a(s) ds} = a(t)x(t).$$

Probamos ahora que no existen más soluciones, para ello, sea  $u(t)$  una solución arbitraria de la ecuación, consideramos la función

$$\Phi(t) = u(t)e^{-\int^t a(s) ds}$$

y calculamos su derivada obteniendo

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= u'(t)e^{-\int^t a(s) ds} - u(t)a(t)e^{-\int^t a(s) ds} \\ &= a(t)u(t)e^{-\int^t a(s) ds} - u(t)a(t)e^{-\int^t a(s) ds} = 0. \end{aligned}$$

Luego la función  $\Phi$  es constante, por lo que  $u(t) = ke^{\int^t a(s) ds}$ . □

**Ejemplo 1.1.1** Obtener la solución general de la ecuación  $y' + 2ty = 0$ .

*Solución 1.1.1.1.* — Utilizando la técnica de separación de variables vista anteriormente

$$\frac{y'}{y} = -2t \iff \log|y| = -t^2 + c \iff y = ke^{-t^2} \quad \square$$

### 1.1.1. Problema del valor inicial

Vemos cómo se plantea el problema del valor inicial en el caso de ecuaciones homogéneas. Tenemos una ecuación lineal homogénea de primer orden, esto es  $x' = a(t)x$  y además queremos que  $x(t_0) = x_0$  para algún  $t_0 \in (\alpha, \omega)$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Sabemos que la solución general de la ecuación es de la forma (1.1) y podemos usar la libertad que tenemos para elegir la primitiva para ponerla como

$$x(t) = ke^{\int_{t_0}^t a(s) ds},$$

ahora queremos que  $x(t_0) = x_0$ , para ello notamos que

$$x_0 = x(t_0) = ke^{\int_{t_0}^{t_0} a(s) ds} = k,$$

hemos probado así que el problema del valor inicial tiene solución única, dada por

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \quad (1.1)$$

y además la solución está bien definida en el intervalo  $(\alpha, \omega)$ .

### 1.1.2. Estructura del espacio de soluciones

Observamos que el conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea de primer orden es un espacio vectorial de dimensión 1, o más precisamente un subespacio vectorial de dimensión 1 de  $C^1(\alpha, \omega)$ , es decir, el espacio vectorial de funciones de clase  $C^1$  en el intervalo  $(\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$ .

Vamos a ver cómo esto se deduce de la linealidad de la ecuación. Para ello definimos el operador diferencial:

$$L : C^1(\alpha, \omega) \rightarrow C(\alpha, \omega)$$

$$x \mapsto \frac{dx}{dt} - a(t)x$$

Recordamos que decimos que una función es lineal cuando cumple

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y), \quad a, b \in \mathbb{K},$$

entonces la linealidad de  $L$  se deduce de la linealidad de todas las operaciones dentro de su definición.

**Nota 1.1.2** La linealidad de la ecuación diferencial equivale a la linealidad de  $L$  y, además,  $x$  es solución de  $x' = a(t)x$  si y solo si  $x \in \ker(L)$ . Sabemos del álgebra lineal que el núcleo de un homomorfismo vectorial es siempre un subespacio vectorial del espacio de dominio y, por tanto, el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea es un espacio vectorial.

## 1.2. El operador diferencial

Dada una ecuación diferencial lineal homogénea de la forma

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t).$$

Podemos asociar a esta ecuación un operador diferencial

$$L = \frac{d^n}{dt^n} - a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} - \cdots - a_1(t)\frac{d}{dt} - a_0(t)$$

donde el término  $k$ -ésimo  $a_k(t)d^k/dt^k$  actúa sobre una función  $u(t)$  como

$$L(u(t)) = a_k(t)\frac{d^k}{dt^k}u(t) = a_k(t)u^{(k)}(t).$$

Como derivar es lineal:

$$\frac{d}{dt}(\alpha u(t) + \beta v(t)) = \alpha \frac{d}{dt}u(t) + \beta \frac{d}{dt}v(t)$$

y multiplicar por una función fija también es lineal

$$a(t)(\alpha u(t) + \beta v(t)) = \alpha a(t)u(t) + \beta a(t)v(t),$$

el operador composición de las anteriores  $a_k(t)d^k/dt^k$  es lineal. Tenemos así que  $L$  es lineal como operador de tipo  $L : C^n(\alpha, \omega) \rightarrow C(\alpha, \omega)$ , asumiendo que  $a_k(t) \in C(\alpha, \omega)$  para todo  $k = 0, \dots, n-1$ .

**Nota 1.2.1** Evidentemente tenemos que las soluciones de una ecuación diferencial homogénea corresponden a las funciones tal que  $L(x(t)) = 0$ . Por lo que el conjunto de soluciones es el núcleo del operador  $L$  así definido.

**Nota 1.2.2** En general tenemos que  $x(t)$  es solución de una ecuación diferencial general si y solo si  $L(x(t)) = b(t)$ , donde hemos definido  $L$  mediante la ecuación homogénea asociada. Por lo que el espacio de soluciones de una ecuación general lineal es un espacio afín de dimensión  $n$ .

### 1.3. Ecuación diferencial lineal de primer orden

Ahora que ya hemos obtenido la solución general §1.1 para ecuaciones lineales homogéneas y también su solución única en el caso del problema del valor inicial §1.1.1, podemos afrontar el problema de obtener las soluciones de una ecuación diferencial lineal:

$$x' = a(t)x + b(t),$$

Consideramos el operador diferencial asociado a su ecuación homogénea  $L = \frac{d}{dt} - a(t)$ .

**Lema 1.3.1** *si  $x_0$  es solución de la ecuación homogénea asociada a una ecuación lineal y  $x_p$  es solución de la ecuación entonces*

$$x_0 + x_p$$

*es solución de la ecuación lineal.*

*Demostración 1.3.1.1.* — Por la linealidad del operador diferencial

$$L(x_0(t) + x_p(t)) = L(x_0(t)) + L(x_p(t)) = b(t). \quad \square$$

**Lema 1.3.2** *si  $x_1$  y  $x_2$  son soluciones de una ecuación diferencial lineal entonces  $x_1 - x_2$  es también solución.*

*Demostración 1.3.2.1.* — Por la linealidad del operador diferencial

$$L(x_1 - x_2) = L(x_1) - L(x_2) = b(t) - b(t) = 0. \quad \square$$

**Corolario 1.3.2.1** *La solución general de una ecuación diferencial lineal de primer orden es*

$$x_p(t) + x_n(t)$$

*donde  $x_p(t)$  es una solución arbitraria de la ecuación y  $x_n(t)$  es la solución general de la ecuación homogénea asociada.*

Nos proponemos ahora obtener una solución de forma explícita, haremos esto mediante el método de variación de constantes.

#### 1.3.1. Método de variación de constantes

Conocemos una forma explícita de calcular una solución de la ecuación homogénea asociada a una ecuación lineal §1.1. Conjeturamos que hay una solución de la ecuación lineal de la forma

$$x_p(t) = k(t)e^{\int^t a(s) ds} \quad (1.2)$$

e intentamos obtener  $k(t)$ . Buscamos entonces que se cumpla la igualdad

$$x'_p(t) = a(t)x_p(t) + b(t) = a(t)k(t)e^{\int^t a(s) ds} + b(t),$$

podemos derivar en (1.2) obteniendo

$$x'_p(t) = k'(t)e^{\int^t a(s) ds} + k(t)a(t)e^{\int^t a(s) ds}$$

y simplemente igualando y despejando hallamos la derivada  $k'$ :

$$k'(t) = b(t)e^{-\int^t a(s) ds}.$$

Tenemos así que la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = \left( k + \int^t b(s)e^{-\int^s a(u) du} ds \right) e^{\int^t a(s) ds}.$$

**Nota 1.3.3** No es necesario aprender esta ecuación de memoria, se utiliza el método de variación de constantes para obtener formas explícitas para cada problema en particular.

### 1.3.2. Problema del valor inicial

Como de costumbre consideramos la ecuación diferencial lineal junto a una condición  $x(t_0) = x_0$ , con  $t_0 \in (\alpha, \omega)$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Consideramos la solución general fijando el límite inferior a  $t_0$ ,

$$x(t) = \left( k + \int_{t_0}^t b(s)e^{-\int_{t_0}^s a(u) du} ds \right) e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

Sin más que sustituir obtenemos que  $k = x_0$ , por lo que nuestra ecuación tiene solución única.

**Teorema 1.3.4** *El problema del valor inicial*

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t), & a, b \in C(\alpha, \omega) \\ x(t_0) = x_0, & t_0 \in (\alpha, \omega), \quad x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

*tiene solución única dada por:*

$$x(t) = \left( x_0 + \int_{t_0}^t b(s)e^{-\int_{t_0}^s a(u) du} ds \right) e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

Las gráficas de las soluciones “rellenan” la franja  $(\alpha, \omega) \times \mathbb{R}$  sin cortarse. La rellenan porque para cualquier punto  $(t_0, x_0) \in (\alpha, \omega) \times \mathbb{R}$  hay una solución que pasa por él, y no se cortan entre sí porque sólo hay una solución que pase por cada punto, como consecuencia del teorema anterior.

**Ejemplo 1.3.1** Resuélvase el problema del valor inicial:

$$\begin{cases} x' + \frac{x}{t} = \cos t \\ x(\pi) = 1 \end{cases}$$

*Solución 1.3.1.1.* — Observamos que el intervalo donde vamos a resolver el problema es  $(0, +\infty)$ . Puesto que  $\pi$  ha de pertenecer al intervalo  $t \neq 0$ . La ecuación homogénea asociada es  $x' + x/t = 0$ , separando variables y calculando primitivas a ambos lados obtenemos

$$\frac{x'}{x} = -\frac{1}{t} \iff \log|x| = -\log|t| + c \iff x = \frac{k}{t}.$$

Utilizamos ahora la técnica de variación de constantes, consideramos  $x_p(t) = k(t)/t$  e imponemos que es solución de la ecuación diferencial, por tanto

$$x_p'(t) = \frac{k'(t)}{t} - \frac{k(t)}{t^2}$$

asimismo

$$\cos t - \frac{x_p(t)}{t} = \cos t - \frac{k(t)}{t^2}$$

por lo que  $k'(t)/t = \cos t$ . Basta elegir entonces  $k(t)$  igual a una primitiva de  $t \cos t$ , integrando por partes  $k(t) = t \sin t + \cos t$ . Recordamos que la solución general de la ecuación diferencial es la suma de la solución general de la homogénea más la solución particular obtenida

$$x(t) = \frac{1}{t}(k + t \sin t + \cos t).$$

Calculamos  $k$  usando la condición inicial  $x(\pi) = 1$ ,

$$(k - 1)\frac{1}{\pi} = 1 \iff k = \pi + 1.$$

Sustituimos en la solución general obteniendo así la solución única a nuestro problema

$$x(t) = \frac{1}{t}(\pi + 1 + t \sin t + \cos t).$$

□

## 1.4. Propagación de enfermedades

El pionero en la modelización de la propagación de enfermedades mediante ecuaciones diferenciales fue Ronald Ross (Premio Nobel de Medicina 1915). Los grandes avances en esta disciplina comienzan cuando Kermack y McKendrick proponen el modelo SIR, lo que se conoce como el inicio de la epidemiología moderna.

### 1.4.1. Modelos simples para propagación de enfermedades

Una enfermedad contagiosa se propaga a través de la interacción entre personas enfermas y sanas. Denotaremos  $x(t)$  al número de persona enfermas a tiempo  $t$ , asumimos  $x(t) \in \mathbb{R}$ , y denotaremos  $y(t)$  al número de personas sanas. Asumiremos que solo existen personas sanas o enfermas, el SIR también incluye personas inmunizadas y muertos, que hacen variar el total de personas en nuestro modelo. Haremos un par de hipótesis para simplificar el modelo:

- I)  $x'$  depende del número de interacciones entre personas sanas y enfermas.
- II) El susodicho número de interacciones es proporcional a  $xy$ .

La última hipótesis es debida a Hamer, quién la usó con éxito para modelar la propagación del sarampión en Inglaterra en 1905. Tenemos así un primer modelo sencillo, en una población de  $n$  individuos:

$$x' = kx(n - x).$$

Veremos que dependiendo de  $k$  la enfermedad desaparecerá o se hará endémica. Otra observación es que la ecuación es no lineal, por lo que se escapa de nuestra “zona de confort”, pero podremos resolverla fácilmente separando variables.

**Nota 1.4.1** La misma ecuación, conocida como ecuación logística, aparece también en modelos poblacionales.

Tal como hemos planteado la ecuación modela solo enfermedades sin cura, por ejemplo el SIDA, ya que no contemplamos que un paciente pueda pasar de enfermo a sano. Se puede incluir en el modelo una tasa de recuperación, quedaría entonces:

$$x' = kx(n - x) - \beta x,$$

donde  $\beta$  es la probabilidad de recuperación, independiente de factores poblacionales. Este es el modelo más simple con nombre, el modelo SIS, el cual modela enfermedades que no generan inmunidad. Este modelo posee una cualidad importante del modelo SIS, el teorema del umbral, que enuncia que en función de los parámetros la enfermedad desaparece o se hace endémica.

### 1.4.2. El modelo más simple

Nos proponemos resolver la ecuación:

$$x' = kx(n - x),$$

lo haremos mediante la técnica de las variables separadas. Para ello notamos que el número de personas infectadas y sanas es siempre mayor o igual que 0, en caso de que alguno sea cero no hay evolución, por lo que asumimos que  $0 < x < n$ . Separando las variables nos queda

$$\frac{x'}{x(n - x)} = k.$$

Para poder continuar debemos obtener una primitiva del término a la izquierda, separamos en fracciones parciales

$$\frac{1}{y(n - y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{n - y} = \frac{y(B - A) + nA}{y(n - y)} \implies A = B = \frac{1}{n}.$$

La primitiva que buscamos es pues:

$$\frac{1}{n}(\log(y) - \log(n - y)) = \frac{1}{n} \log \frac{y}{n - y}.$$

Sustituyendo y tomando primitivas a ambos lados de la ecuación original

$$\frac{1}{n} \log \frac{x}{n - x} = kt + c \implies x = \frac{ne^{nc}e^{nkt}}{1 + e^{nc}e^{nkt}} \implies x = \frac{n}{1 + c'e^{-nkt}},$$

donde  $c'$  es una constante positiva. Observamos que en este caso el conjunto de soluciones no es un espacio vectorial. Según este modelo la pandemia infecta a toda la población,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = n$ . En la práctica, la evolución de una pandemia depende de las medidas que se tomen para evitar la infección, por lo que modelos más refinados modelan la probabilidad de contagio en función del tiempo.

### 1.4.3. Modelo SIS

Recordamos la ecuación del modelo SIS, donde  $\beta$  es la probabilidad de recuperación, es

$$x' = kx(n - x) - \beta x.$$

Como hemos visto, por diversas razones, nos interesa que tanto la población como la probabilidad de recuperación varíen con respecto al tiempo, haciendo esto obtenemos la ecuación

$$x' = a(t)x + b(t)x^2.$$

Este es un caso particular de la ecuación de Bernoulli, planteada en 1695 y resuelta por Leibniz en 1696

$$x' = a(t)x + b(t)x^n,$$

está ecuación es de primer grado pero, evidentemente, no es lineal. Para poder resolverla necesitaremos una nueva técnica, el cambio de variable.

## 1.5. Método de cambio de variable

Primero asumimos que  $x \neq 0$  y consideramos el cambio de variable  $y = x^{1-n}$ , por lo que  $y' = (1-n)x^{-n}$  y  $x' = (1-n)x'/x^n$ . Dividiendo ahora por  $x^n$  y multiplicando por en la ecuación de Bernoulli  $1-n$  obtenemos la ecuación lineal

$$\frac{x'}{x^n}(1-n) = a(t)(1-n)y + b(t)(1-n).$$

**Ejemplo 1.5.1** Resuélvase el problema del valor inicial:

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{t} + x^3 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

*Solución 1.5.1.1.* — Hacemos el cambio  $y = x^{-2}$ , entonces  $y' = (-2/x^3)x'$  siempre que  $x \neq 0$ , y así tenemos

$$y' = -\frac{2}{x^3}x' = -\frac{2}{x^3}\left(\frac{x}{t} + x^3\right) = -\frac{2}{t}y - 2.$$

Resolvemos ahora la ecuación homogénea asociada obteniendo la solución general  $y = k/t^2$ . Para calcular una solución particular de la ecuación, en vez de hacerlo mediante variación de constantes la obtenemos mediante el método de la *conjetura razonable*. Conjeturamos, por la forma de la ecuación, que  $y_p(t) = ct$ , ergo

$$c = y'_p(t) = -\frac{2}{t}y_p(t) - 2 = -2c - 2 \rightsquigarrow c = -\frac{2}{3}.$$

La solución general de la ecuación es

$$y(t) = -\frac{2}{3}t + \frac{k}{t^2}.$$

Deshacemos el cambio,  $y = 1/x^2$  o lo que es lo mismo  $x = \pm\sqrt{y^{-1}}$ , nos quedamos con la rama positiva, ya que  $x(1) = 1$ ,

$$x = \sqrt{\frac{1}{-\frac{2}{3}t + \frac{k}{t^2}}} = \frac{|t|}{\sqrt{k - \frac{2}{3}t^3}} = \frac{t}{\sqrt{k - \frac{2}{3}t^3}},$$

la última igualdad se debe a que necesitamos que  $x$  sea derivable, lo que nos fuerza a restringirnos a algún intervalo contenido en  $(-\infty, 0)$  ó  $(0, \infty)$ , y elegimos el segundo porque contiene al valor inicial 1. Sustituyendo en la condición inicial,

$$1 = x(1) = \frac{1}{\sqrt{k - \frac{2}{3}}} \rightsquigarrow k = \frac{5}{3},$$

la solución de nuestro problema del valor inicial es pues

$$\frac{t}{\sqrt{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}t^3}}.$$

□

**Nota 1.5.1** Si la ecuación del ejemplo 1.5.1 fuera lineal su espacio de soluciones sería un espacio vectorial. Puesto que el dominio de la ecuación  $x' = \frac{x}{t} + x^3$  es  $(0, \infty)$  en el caso lineal esperaríamos que el dominio de la solución sea el mismo, pero computando obtenemos que el dominio de  $x$  es  $(0, \sqrt[3]{5/2})$ , por lo que vemos que en ocasiones las ecuaciones no lineales poseen singularidades, “explotan”, en tiempo finito.

### 1.5.1. Caída libre con rozamiento

Tenemos un objeto que cae con rozamiento, es decir, la fuerza que lo tira hacia abajo es de  $mg$ , masa por aceleración de gravedad, mientras que la que la tira hacia arriba es una función de la velocidad  $kv^n$ , con  $n = 1, 2$ . Sabemos que  $mv' = mg - kv^n$ , obtenemos así la ecuación diferencial  $v' = -\frac{k}{m}v^n + g$ , lineal para  $n = 1$ , no lineal en caso contrario. En algunos casos, como la caída de un meteorito que pierde masa debido al rozamiento, los parámetros  $k$  y  $m$  dependen del tiempo. El caso con cocientes constantes es resoluble, en el otro tenemos la ecuación

$$x' = p(t)x^2 + q(t)x + r(t),$$

conocida como ecuación de Ricatti. Notamos que en caso de no tener término independiente se trata de la ecuación de Bernoulli que, como ya hemos visto, se puede resolver mediante cambio de variable. De hecho, esta ecuación también se puede resolver mediante cambio de variable, pero solo si conocemos de antemano una solución particular: si  $x_p(t)$  es una solución particular, el cambio de variable  $x = x_p(t) + 1/y$  reduce la ecuación de Ricatti a una lineal. No se conoce ningún algoritmo general para obtener una solución particular.



## Capítulo 2

# Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n \in C^1(\alpha, \omega)$  variables, las cuales son funciones de clase  $C^1$  sobre un intervalo de  $\mathbb{R}$  y  $a_{ij}, b_i$  funciones continuas en  $(\alpha, \omega)$  para todo  $i, j \in \mathbb{N}$ .

**Definición 2.0.1** *Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es un sistema de la forma:*

$$\begin{cases} x'_1 &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x'_n &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

**Definición 2.0.2** *Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden lineal es de la forma:*

$$\begin{cases} x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

Podemos expresar un sistema de este tipo en forma matricial como

$$x' = Ax + b$$

donde

$$x = x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n, \quad b = b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

y las derivadas e integrales se aplican “coordenada a coordenada”, v.g.

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad A' = (a'_{ij}(t))_{i,j=1}^n, \quad \int A(s) ds = (\int a_{ij} ds)_{i,j=1}^n.$$

## 2.1. Problema del valor inicial

**Definición 2.1.1** Sean  $t_0 \in (\alpha, \omega)$  y  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^t \in \mathbb{R}^n$ , el problema del valor inicial asociado a 2.0.2 es de la forma

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

Probaremos que el problema de valor inicial tiene solución única en todo el dominio  $(\alpha, \omega)$ , para ello representaremos el problema del valor inicial como una ecuación integral, es una estrategia general en análisis intentar representar las funciones como integrales debido a su buen comportamiento. Ser solución del problema del valor inicial equivale a

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^t A(s)x(s) + b(s) ds.$$

Denotaremos por  $C(I, \mathbb{R}^n)$  el espacio vectorial de las funciones continuas del intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^n$ .

A raíz del sistema 2.0.2 definimos el operador integral

$$T : C((\alpha, \omega), \mathbb{R}^n) \rightarrow C((\alpha, \omega), \mathbb{R}^n) \\ \varphi \mapsto x^0 + \int_{t_0}^t A(s)\varphi(s) + b(s) ds$$

Evidentemente si  $x$  es solución del sistema se tiene  $T(x) = x$ , por lo que si demostramos que el operador  $T$  tiene un único punto fijo habremos terminado. Hemos definido  $T$  con espacio de salida y llegada iguales para poder aplicar el teorema del punto fijo de Banach, visto en cálculo diferencial, para ello necesitaremos que el espacio sea también completo, recordamos la definición de espacio métrico completo:

**Definición 2.1.2** Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

De esto se deduce que necesitaremos aplicar el teorema sobre un espacio compacto, para ello sean  $\alpha < \tilde{\alpha}$  y  $\tilde{\omega} < \omega$ , probaremos que  $T$  tiene un único punto fijo como operador en  $[\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}]$  y haciendo tender  $\tilde{\alpha} \rightarrow \alpha$  y  $\tilde{\omega} \rightarrow \omega$  obtenemos el resultado deseado. Recordamos también el enunciado del teorema del punto fijo:

**Teorema 2.1.1 (Punto fijo de Banach)** Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $T : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva (es decir, Lipschitz de constante  $\alpha \in [0, 1)$ ), entonces  $T$  tiene un único punto fijo.

Este teorema tiene una consecuencia que nos será muy útil.

**Corolario 2.1.1.1** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $T : X \rightarrow X$  tal que  $T^n = T \circ \dots \circ T$  es contractiva para algún  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $T$  tiene un único punto fijo.

Definimos en  $C([\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}], \mathbb{R}^n)$  la distancia

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty = \max_{t \in [\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}]} \|f(t) - g(t)\|_2,$$

donde  $\|\cdot\|_2$  es la norma euclídea en  $\mathbb{R}^n$ . Así  $C([\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}], \mathbb{R}^n)$  completo como queríamos.

**Lema 2.1.2** El espacio  $C([\tilde{\alpha}, \tilde{\omega}], \mathbb{R}^n)$  con la distancia  $\|f - g\|_\infty$  es un espacio métrico completo.

**Lema 2.1.3** Para todo  $m \in \mathbb{N}$  se da la desigualdad:

$$\|T^{m+1}(f)(t) - T^{m+1}(g)(t)\|_2 \leq \frac{\|A\|_\infty^m}{m!} |t - t_0|^m \|f - g\|_\infty.$$

*Demostración 2.1.3.1.* — El caso base  $m = 1$  está probado, suponemos el resultado cierto para  $m$  entonces para  $m + 1$ :

$$\begin{aligned} \|T^{m+1}(f)(t) - T^{m+1}(g)(t)\|_2 &= \|T(T^m(f))(t) - T(T^m(g))(t)\|_2 \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(s)\|_2 \|T^m(f)(t) - T^m(g)(t)\|_2 ds, \end{aligned}$$

por la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \|A(s)\|_2 \|T^m(f)(t) - T^m(g)(t)\|_2 ds &\leq \int_{t_0}^t \|A\|_\infty \frac{\|A\|_\infty^m}{m!} |s - t_0|^m \|f - g\|_\infty ds \\ &\leq \frac{\|A\|_\infty^{m+1}}{m!} \|f - g\|_\infty \int_{t_0}^t |s - t_0|^m ds, \end{aligned}$$

ahora sin más que integrar:

$$\frac{\|A\|_\infty^{m+1}}{m!} \|f - g\|_\infty \frac{|t - t_0|^{m+1}}{m+1} = \frac{\|A\|_\infty^{m+1}}{(m+1)!} |t - t_0|^{m+1} \|f - g\|_\infty,$$

con lo que obtenemos el resultado. □

Esto implica que el operador  $T$  cumple la propiedad de Lipschitz.

**Corolario 2.1.3.1** Se da la desigualdad

$$\|T^m(f) - T^m(g)\|_\infty \leq \frac{\|A\|_\infty^m}{m!} (\tilde{\omega} - \tilde{\alpha})^m \|f - g\|_\infty.$$

*Demostración 2.1.3.2.* — Tomamos supremos en  $t$  en el lema 2.1.3. □

Hemos demostrado así el teorema de Picard:

**Teorema 2.1.4 (Picard)** Si  $A(t)$ ,  $b(t)$  son continuas en  $(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  el problema del valor inicial:

$$\begin{cases} x' = A(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

tiene solución única en  $(\alpha, \omega)$ .

**Nota 2.1.5** En realidad no es necesaria la linealidad del operador: la misma demostración prueba la existencia y unicidad de la solución bajo la hipótesis de Lipschitzianidad.

Observamos que  $T^m(f_0)$ , donde  $f_0$  es un punto inicial cualquiera, converge exponencialmente rápido al punto fijo de  $T$ . Esto nos da un método numérico para aproximar la solución del PVI escogiendo un punto inicial simple (constante). También nos proporciona el desarrollo en serie (analítico) de la solución del PVI, este método se conoce como método de las iteraciones de Picard.

**Ejemplo 2.1.1** Consideramos el PVI:

$$\begin{cases} x' = ax & (\text{ecuación escalar}) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Iniciamos el proceso con la solución constante  $x_0$ ,

$$x_1 = T(x_0) = x_0 + \int_0^t ax_0 ds = x_0 + x_0 at,$$

reiterando tenemos que

$$x_n = T(x_{n-1}) = x_0 \sum_{k=0}^n \frac{(at)^k}{k!},$$

cuando  $n$  tiende a infinito nos queda  $x_\infty := \lim_n x_n = x_0 e^{at}$ .

## 2.2. Estructura del espacio de soluciones

### 2.2.1. Caso homogéneo

Consideramos el sistema homogéneo  $x' = A(t)x$  y definimos la función:

$$\begin{aligned} T : C^1((\alpha, \omega), \mathbb{R}^n) &\rightarrow C \\ x &\mapsto x' - A(t)x, \end{aligned}$$

claramente  $x$  es solución de la ecuación si y solo si  $x \in \ker(T)$ . Puesto que  $T$  es lineal el conjunto de soluciones es un espacio vectorial, más propiamente un subespacio vectorial de  $C^1((\alpha, \omega), \mathbb{R}^n)$ .

**Teorema 2.2.1** *El espacio de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas es un subespacio vectorial de  $C^1((\alpha, \omega), \mathbb{R}^n)$  de dimensión  $n$ . Además si  $\varphi_j$  es la solución del problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T \end{cases}$$

donde  $t_0 \in (\alpha, \omega)$  arbitrario, tenemos que  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  es base del susodicho espacio de soluciones.

*Demostración 2.2.1.1.* — Demostramos primero que los  $\varphi_j$  son linealmente independientes, evaluando  $\sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j$  en  $t_0$ :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j = 0 \implies \alpha_j = 0,$$

para todo  $j = 1, \dots, n$  como queríamos. Demostramos ahora que es sistema de generadores. Sea  $y$  solución de la ecuación lineal y sea  $y(t_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ , definimos  $z = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j$  y observamos que tanto  $y$  como  $z$  son soluciones de

$$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \end{cases}$$

por la unicidad de la solución concluimos que  $y = z$ .  $\square$

**Definición 2.2.1** Llamaremos *matriz fundamental del sistema*  $x' = A(t)x$  y la denotaremos  $\Phi(t)$  a cualquier matriz cuyas columnas formen base del espacio de soluciones del sistema.

Con las definiciones anteriores tenemos que  $\Phi(t) := (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  es una matriz fundamental. Por la propia definición tenemos que si  $\Phi$  matriz fundamental de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas entonces la solución general del sistema es  $\Phi(t)c$  con  $c \in \mathbb{R}^n$ :

$$x(t) = \Phi(t)c = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n.$$

**Corolario 2.2.1.1** Sea  $\Phi(t)$  una matriz cuyas columnas son solución de la ecuación  $x' = A(t)x$ , entonces  $\Phi(t)$  es matriz fundamental, o lo que es lo mismo:

$$\det(\Phi(t)) \neq 0 \quad \forall t \in (\alpha, \omega) \iff \exists t_0 \in (\alpha, \omega) \quad \det(\Phi(t_0)) \neq 0$$

La afirmación: las columnas de  $\Phi(t)$  son soluciones de  $x' = A(t)x$  es equivalente a:  $\Phi(t)$  es solución de la ecuación matricial  $X' = A(t)X$ , donde

$$\begin{aligned} X : (\alpha, \omega) &\rightarrow M_{n \times n} \\ t &\mapsto x(t) \end{aligned}$$

Asimismo  $\Phi(t)$  matriz fundamental equivale a que es solución de un problema de valor inicial de la forma:

$$\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(t_0) = X^0 \end{cases}$$

donde ambas ecuaciones son matriciales y  $\det(X_0) \neq 0$ . Notamos que la matriz fundamental  $\Phi(t) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  es la única solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(0) = Id \end{cases}$$

### 2.2.2. Caso no homogéneo

La misma demostración del caso escalar prueba que la solución general de  $x' = A(t)x + b(t)$  es  $x_p(t) + x_n(t)$  donde  $x_p(t)$  es una solución particular arbitraria del sistema y  $x_n(t)$  es solución del sistema homogéneo asociado:  $x' = A(t)x$ , por lo visto arriba,  $x_n(t) = \Phi(t)c$  con  $c \in \mathbb{R}^n$ . Cómo veremos existen diversos métodos para obtener  $x_p(t)$ .

## 2.3. Método de variación de constantes

Un método para obtener una solución particular  $x_p(t)$  de un sistema  $x' = A(t)x + b(t)$  es la variación de constantes, que como veremos es muy similar al caso de una variable. Sabemos que la solución general de la ecuación homogénea asociada es  $x_h(t) = \Phi(t)c$ , conjeturamos la existencia de  $x_p(t) = \Phi(t)c(t)$ :

$$x_p'(t) = \Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) = A(t)\Phi(t)c(t) + \Phi(t)c'(t).$$

Además, puesto que es solución del sistema homogéneo

$$x_p'(t) = A(t)x_p(t) + b(t) = [A(t)\Phi(t)c(t)] + b(t),$$

igualando ambas expresiones

$$c'(t) = \Phi^{-1}(t)b(t).$$

Basta por tanto elegir  $c(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s) ds$ , hemos demostrado el siguiente teorema:

**Teorema 2.3.1** *Sea  $\Phi(t)$  matriz fundamental del sistema  $x' = A(t)x$ , entonces*

$$x_p(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)b(s) ds$$

*con  $t_0 \in (\alpha, \omega)$  es una solución particular de  $x' = A(t)x + b(t)$  que satisface  $x_p(t_0) = \bar{0}$ .*

## Capítulo 3

# Ecuación diferencial escalar de orden superior

**Definición 3.0.1** Una ecuación diferencial escalar de orden superior es una ecuación de la forma:

$$x^{(n)} = a_n(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x + a_0(t).$$

Definiendo las variables  $x_n = x^{(n-1)}$ , o lo que es lo mismo,  $x_n = x'_{n-1}$ , así el sistema 3.0.1 es equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x_2 &= x'_1 \\ x_3 &= x'_2 \\ &\vdots \\ x_n &= x'_{n-1} \\ x'_n &= a_n(t)x_n + \cdots + a_1(t)x_1 + a_0(t) \end{cases}$$

donde la última ecuación es de primer orden, podemos también expresar este sistema vectorialmente como  $x' = A(t)x + b(t)$  con:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) & \cdots & a_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0(t) \end{pmatrix}.$$

En este caso el problema del valor inicial consiste en fijar  $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ . Aplicando lo visto anteriormente el sistema tiene solución general dada por  $x_p(t) + x_n(t)$  donde, como de costumbre,  $x_p(t)$  es una solución particular y  $x_n(t)$  es la solución general de la ecuación homogénea asociada, la cual es un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Si  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  son soluciones

linealmente independientes de 3.0.1 la matriz fundamental asociada al sistema equivalente es

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \cdots & \varphi'_n \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

**Definición 3.0.2** Llamaremos Wronskiano de  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  al determinante

$$W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi'_1(t) & \cdots & \varphi'_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in (\alpha, \omega).$$

### 3.1. Matriz fundamental

Hemos dejado pendiente cómo obtener una matriz fundamental  $\Phi(t)$  asociada al sistema homogéneo  $x' = A(t)x$ , por ahora nos restringiremos al caso de coeficientes constantes, es decir,  $x' = Ax$  donde  $A$  es una matriz constante, no depende de  $t$  y nos centraremos en particular en funciones de dominio  $\mathbb{R}$ . En el caso escalar,  $x' = ax$ , sabemos que la solución es  $x = e^{at}$ , en el caso matricial veremos que una matriz fundamental es  $\Phi(t) = e^{At}$ , aunque primero tendremos que definir la exponencial de una matriz y obtener métodos para computarla.

**Lema 3.1.1** Sea  $\Phi(t)$  la matriz fundamental asociada a las soluciones de

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = e_j \end{cases}$$

o, equivalentemente,  $\Phi(t)$  es la única solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = Id \end{cases}$$

Se dan las siguientes igualdades:

$$I) \quad \Phi(0) = Id \qquad II) \quad \Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s) \qquad III) \quad \Phi(-t) = \Phi^{-1}(t)$$

*Demostración 3.1.1.1.* — I) La primera igualdad se sigue directamente de la definición.

II) Fijamos  $s$  y consideramos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = \Phi(s) \end{cases}$$

Vamos a ver que tanto  $\Phi(t+s)$  como  $\Phi(t)\Phi(s)$  (como funciones en  $t$ ) son soluciones de ese problema. Consideramos primero  $X(t) := \Phi(t+s)$ , tenemos que  $X(0) = \Phi(s)$  y

$$X'(t) = \Phi'(t+s) = A\Phi(t+s) = AX(t),$$

similarmente para  $Y(t) := \Phi(t)\Phi(s)$ , aplicando la primera igualdad  $Y(0) = \Phi(0)\Phi(s) = \Phi(s)$  y

$$Y'(t) = \Phi'(t)\Phi(s) = A\Phi(t)\Phi(s) = AY(t).$$



III) Aplicando la primera y segunda igualdad en los respectivos miembros:

$$Id = \Phi(t + (-t)) = \Phi(t)\Phi(-t). \quad \square$$

Para la matriz fundamental  $\Phi$  así definida  $x(t) = \Phi(t)x^0$  es solución del sistema

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

## 3.2. Exponencial de una matriz

Notamos que la matriz que acabamos de definir  $\Phi$  cumple las mismas propiedades que la función exponencial, de hecho más adelante demostraremos que  $\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (tA)^k/k!$ , por ahora nos contentamos con la siguiente definición:

**Definición 3.2.1** Dada una matriz  $B$  se define  $\exp(B)$ , o con la notación habitual  $e^B$ , como

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}.$$

Presentamos ahora algunas propiedades típicas de la función exponencial que también cumple esta versión matricial, la mayoría son corolario de lo visto arriba.

**Proposición 3.2.1** Se cumplen las siguientes igualdades.

$$\begin{array}{ll} I) e^0 = Id & III) (e^{tA})^{-1} = e^{-tA} \\ II) e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} & IV) \frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} \end{array}$$

**Nota 3.2.2** No es cierto en general que  $e^{A+B} = e^Ae^B$ , solo se cumple si las matrices  $A$  y  $B$  conmutan.

**Teorema 3.2.3** La matriz  $\Phi(t)$  definida en 3.1.1 es igual a  $e^{At}$ , dicho de otro modo:

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}.$$

*Demostración 3.2.3.1.* — Haremos uso de las iteraciones de Picard, para ello definimos

$$\begin{aligned} T : C((\alpha, \omega), M_{n \times n}) &\rightarrow C((\alpha, \omega), M_{n \times n}) \\ \Phi(t) &\mapsto Id + \int_0^t A\Phi(s) ds. \end{aligned}$$

Comenzamos la iteración con  $x_0(t) = Id$  y proseguimos:

$$\begin{aligned} x_1 &= T(x_0) = Id + \int_0^t A Id \, ds = Id + At \\ x_2 &= T(x_1) = Id + \int_0^t A(Id + As) \, ds = Id + At + \frac{A^2 t^2}{2} \\ &\vdots \\ x_n &= T(x_{n-1}) = Id + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \cdots + \frac{A^n t^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{A^k t^k}{k!}, \end{aligned}$$

tomando el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  obtenemos el resultado.  $\square$

### 3.2.1. Métodos de cómputo

Podemos pasar ahora a ver cómo computar  $e^{At}$  para una matriz  $A$ . Comenzamos presentando un método para matrices diagonalizables. Sea  $A$  una matriz diagonal, entonces:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad y \quad x' = Ax \iff \begin{cases} x'_1 &= \lambda_1 x_1 \\ &\vdots \\ x'_n &= \lambda_n x_n \end{cases}$$

La solución general de este sistema viene dada por  $x_1(t) = k_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, x_n(t) = k_n e^{\lambda_n t}$  o lo que es lo mismo:

$$x = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.$$

Puesto que es solución del problema de valor inicial  $\{X' = AX \wedge X(0) = Id\}$  hemos comprobado a posteriori, por la unicidad de la solución, que la matriz de la izquierda es  $e^{At}$ . Para convencernos lo comprobamos también directamente, tenemos que

$$e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t \end{pmatrix}^k}{k!},$$

ahora, explotando la diagonalidad

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t \end{pmatrix}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{pmatrix} (\lambda_1 t)^k & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda_n t)^k \end{pmatrix}}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n t)^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

Hemos demostrado así de dos formas distintas el siguiente teorema:

**Proposición 3.2.4** Sea  $A$  una matriz diagonal, podemos expresar  $e^{At}$  como:

$$e^{At} = e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Sea  $A$  una matriz diagonalizable con autovalores reales, sabemos, por álgebra lineal, que existe una matriz  $P$  tal que si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  son los autovalores de  $A$  y  $v_1, \dots, v_n$  son sus autovectores;

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = (v_1, \dots, v_n).$$

Con esto tenemos que la ecuación  $x' = Ax$  se puede escribir  $x' = PDP^{-1}x$ , con el cambio de variable  $y = P^{-1}x$  nos queda:

$$(x' = Ax \iff x' = PDP^{-1}x) \iff (P^{-1}x' = DP^{-1}x \iff y' = y)$$

## Apéndice A

# Problemas resueltos

### A.1. Problemas del capítulo 1

**Número A.1.1** Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales, indicando su intervalo de definición.

a)  $x' + x \cos t = 0$

c)  $x' + \frac{2t}{1+t^2}x = \frac{1}{1+t^2}$

b)  $x' + x\sqrt{t} \sin t = 0$

d)  $x' + x = te^t$

*Solución A.1.1.1.* — a) Se trata de una ecuación homogénea, puesto que  $\cos t \in C(\mathbb{R})$ , el intervalo de definición de la ecuación es  $\mathbb{R}$ . Separando variables:

$$\begin{aligned}\frac{x'}{x} = -\cos t &\iff \log|x(t)| = \int_0^t -\cos s \, ds + c = -(\sin t - \sin 0) + c \\ &\iff x(t) = ke^{-\sin t}.\end{aligned}$$

b) El intervalo de definición es  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , utilizando la fórmula obtenida en 1.1:

$$x(t) = ke^{\int_0^t \sqrt{s} \sin s \, ds},$$

la integral no posee una primitiva elemental, por lo que no podemos simplificar más la solución.

c) Tanto  $a(t)$  como  $b(t)$  son continuas en  $\mathbb{R}$ . Utilizamos el método de variación de constantes, resolvemos primero la ecuación homogénea asociada:

$$x_n(t) = ke^{\int_0^t \frac{-2s}{1+s^2} \, ds},$$

notamos que la derivada de  $-\log(1+s^2)$  coincide con el interior de nuestra integral, por tanto:

$$x_n(t) = ke^{-\log(1+t^2)} = \frac{k}{1+t^2}.$$

Ahora, sea  $x_p = \frac{k(t)}{1+t^2}$  solución de la ecuación diferencial, entonces

$$x_p'(t) = k'(t) \frac{1}{1+t^2} + k(t) \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$$

sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$x_p'(t) = \frac{-2t}{1+t^2} x_p(t) + \frac{1}{1+t^2} = k(t) \frac{-2t}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{1+t^2}.$$

Igualando hallamos que  $k'(t) = 1$  y, por ende,  $k(t) = t$ . La solución general es

$$x(t) = x_n(t) + x_p(t) = \frac{k+t}{1+t^2}.$$

d) Tanto  $a = 1$  como  $b$  son continuas en todo  $\mathbb{R}$  por lo que este es nuestro intervalo de definición. Resolvemos la ecuación homogénea asociada, obteniendo  $x_n(t) = ke^{-t}$ . Sea  $x_p(t) = k(t)e^{-t}$  solución de la ecuación, entonces:

$$\begin{cases} x_p'(t) = k'(t)e^{-t} - k(t)e^{-t} \\ x_p'(t) = te^t - x_p(t) = te^t - k(t)e^{-t} \end{cases} \rightsquigarrow k'(t) = te^{2t}.$$

Integrando por partes:

$$k(t) = \int te^{2t} dt = \frac{te^{2t}}{2} - \int \frac{e^{2t}}{2} dt = \frac{te^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4}.$$

La solución general de la ecuación es pues

$$x(t) = x_n(t) + x_p(t) = (k + k(t))e^{-t} = ke^{-t} + \frac{te^t}{2} - \frac{e^t}{4}. \quad \square$$

**Número A.1.2** Hallar las soluciones de los siguientes problemas de valor inicial, indicando su intervalo de definición.

- |  |  |
|--|--|
| a) $\begin{cases} x' + 5x = t^2 \\ x(0) = 3 \end{cases}$           | c) $\begin{cases} x' + 2tx = t^3 \\ x(0) = 1 \end{cases}$                    |
| b) $\begin{cases} x' = (\tan t)x + \cos t \\ x(0) = 1 \end{cases}$ | d) $\begin{cases} tx' + \frac{t}{\sqrt{1+t^3}}x = 1 \\ x(1) = 2 \end{cases}$ |

*Solución A.1.2.1.* — a) Resolvemos la ecuación homogénea asociada,  $x_n(t) = ke^{-5t}$ , y, mediante variación de constantes, obtenemos, integrando por partes dos veces,

$$k(t) = \left( \frac{t^2}{5} - \frac{2t}{25} + \frac{2}{125} \right) e^{-5t},$$

así una solución general es

$$x(t) = (k + k(t))e^{-5t} = ke^{-5t} + \frac{t^2}{5} - \frac{2t}{25} + \frac{2}{125}.$$

Evaluamos en la condición inicial

$$3 = x(0) = k + \frac{2}{125} \rightsquigarrow k = \frac{373}{125},$$

obtenemos así la solución del problema del valor inicial

$$x(t) = \frac{373}{125}e^{-5t} + \frac{t^2}{5} - \frac{2t}{25} + \frac{2}{125}.$$

b) TODO.

c) Resolvemos la ecuación homogénea asociada separando variables,  $x = ke^{-t^2}$ , por variación de constantes,  $k'(t) = t^3e^{t^2}$  y, por partes,  $k(t) = 1/2(e^{t^2}t^2 - e^{t^2})$ . La solución general es pues

$$x(t) = ke^{-t^2} + \frac{1}{2}(t^2 - 1).$$

Evaluando en la condición inicial,  $1 = x(0) = k - 1/2$ , por lo que  $k = 1/2$ .

d) El intervalo de definición es  $(0, \infty)$ , ya que es el intervalo más grande en el cual las funciones  $a$  y  $b$  son continuas. Separando y puesto que el integrando no posee primitiva elemental:

$$x = ke^{-\int^t \frac{1}{\sqrt{1+s^3}} ds}.$$

Por variación de constantes,

$$k(t) = \int^t \frac{1}{s} e^{\int^s \frac{1}{\sqrt{1+u^3}} du} ds,$$

con lo cual

$$x(t) = (k + k(t))e^{-\int^t \frac{1}{\sqrt{1+s^3}} ds}.$$

Obtenemos la solución del problema del valor inicial evaluando,  $x(1) = k = 2$ . □

**Número A.1.3** El nivel de carbón vegetal encontrado en las grutas de Lascaux, en Francia, dio una medida de 0,91 desintegraciones por minuto y gramo (la madera viva da 6,68 desintegraciones). Estimada la edad probable de las pinturas que se hallan en dichas cuevas.

*Solución A.1.3.1.* — Elegimos  $t = 0$  el momento en el que se corta el árbol, y denotamos por  $x(t)$  la cantidad de carbono-14 a tiempo  $t$ , por lo que  $x'(0) = -6,68q$ , donde  $q$  es la cantidad de carbono-14 en 1 gramo de madera. Utilizando la fórmula vista en clase,

$$x(t) = x(0)e^{-\lambda t},$$

donde  $\lambda = \frac{\log 2}{5730}$ , deducimos que

$$x'(t) = -\lambda x(0)e^{-\lambda t}.$$

Según los datos del enunciado,  $-6,68q = x'(0) = -\lambda x(0)$ . Si llamamos  $t_\alpha$  al momento en el que estamos, tenemos  $-0,91q = x'(t_\alpha) = -\lambda x(0)e^{-\lambda t_\alpha}$ , y dividiendo queda

$$\frac{0,91}{6,68} = \frac{x'(t_\alpha)}{x'(0)} = e^{-\lambda t_\alpha},$$

de donde se deduce que  $t_\alpha = 16479$ , es decir, las pinturas tienen una antigüedad de 16479 años. □

## A.2. Problemas del capítulo 2

**Número A.2.1** Resolver la ecuación diferencial asociada al modelo SIS:

$$x' = \kappa x(N - x) - \beta x.$$

Estudiar el problema del valor inicial asociado y obtener el teorema del umbral para este modelo.

*Solución A.2.1.1.* — Utilizamos el cambio de variable  $y = 1/x$ , donde  $x > 0$ , con lo que  $y' = -x'/x^2$ , sustituyendo

$$y' = \kappa + (\beta - \kappa N)\frac{1}{x} = \kappa + (\beta - \kappa N)y,$$

obtenemos así una ecuación lineal, cuya solución general es

$$y(t) = \frac{\kappa}{N\kappa - \beta} + x e^{(\beta - N\kappa)t},$$

en la variable original  $x(t) = 1/y(t)$ . Nos planteamos ahora el problema del valor inicial con  $x(t_0) = x_0$ , sustituyendo en la solución obtenida

$$x_0 = \frac{1}{\frac{\kappa}{N\kappa - \beta} + \left(\frac{1}{x_0} - \frac{\kappa}{N\kappa - \beta}\right)e^{(\beta - N\kappa)(t - t_0)}}.$$

Nos preguntamos ahora cuál es el límite cuando  $t$  tiende a infinito. Tenemos dos casos, si  $\beta > \kappa N$  entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ , por lo que la enfermedad desaparece. Si  $\beta < \kappa N$  el límite es  $N - \beta/\kappa$ , por lo que la enfermedad se hace endémica. En el caso  $\beta = \kappa N$  no podemos sustituir en la solución por lo que consideramos  $y' = \kappa$  e  $y = \kappa t + c$ , con esto  $x = 1/(\kappa t + c)$ , sustituyendo en la condición inicial

$$x(t) = \frac{1}{\kappa(t - t_0) + \frac{1}{x_0}},$$

con lo que la enfermedad también desaparece. La diferencia entre el caso uno y el tres es que en el primero la función tiende a 0 mucho más rápido (exponencialmente) que en el tercero.  $\square$

**Número A.2.2** Resolver los problemas lineal y cuadrático asociados al problema de caída libre con resistencia al aire. Es decir, la ecuación

$$v' = g - \frac{\kappa}{m}v^n, \quad n \in \{1, 2\}.$$

*Solución A.2.2.1.* — Esta ecuación es separable, puesto que se puede expresar como

$$\frac{v'}{g - \frac{\kappa}{m}v^n} = 1.$$

Para resolverla así, distinguimos casos en función del valor de  $n$ :

- Caso  $n = 1$ : Como las dos primitivas son elementales, integrando a ambos lados obtenemos sin mayor dificultad

$$-\frac{m}{\kappa} \log \left| g - \frac{\kappa}{m}v \right| = t + c_1$$

y ahora sin más que despejar  $v$  llegamos a la solución general:

$$v(t) = \frac{gm}{\kappa} - ce^{-\frac{\kappa}{m}t}.$$

Observamos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{gm}{\kappa}$ , es decir, la velocidad aumenta (o disminuye, en función del valor inicial) hasta una *velocidad terminal*; esto contrasta con lo que ocurre en un sistema sin rozamiento, en el que la velocidad aumenta sin restricción.

- Caso  $n = 2$ : Para hallar una primitiva del término de la izquierda, lo separamos primero en fracciones simples; denotaremos  $\alpha := \frac{\kappa}{m}$  para simplificar la notación.

$$\frac{1}{g - \alpha x^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{g}}}{\sqrt{g} + \sqrt{\alpha}x} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{g}}}{\sqrt{g} - \sqrt{\alpha}x}.$$

Así es inmediato hallar las primitivas:

$$t + c_1 = \frac{1}{2\sqrt{g}} \int \frac{v'(t)}{\sqrt{g} + \sqrt{\alpha}v(t)} + \frac{v'(t)}{\sqrt{g} - \sqrt{\alpha}v(t)} dt = \frac{1}{2\sqrt{g\alpha}} \log \left| \frac{\sqrt{g} + \sqrt{\alpha}v}{\sqrt{g} - \sqrt{\alpha}v} \right|$$

y ahora basta despejar  $v$ :

$$v = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\alpha}} \left( \frac{e^{2\sqrt{g\alpha}t+c_2} - 1}{e^{2\sqrt{g\alpha}t+c_2} + 1} \right) = \sqrt{\frac{gm}{\kappa}} \tanh \left( \sqrt{\frac{g\kappa}{m}} t + c \right).$$

Igual que antes, la velocidad se acaba estabilizando, aunque en este caso el límite es  $\sqrt{\frac{gm}{\kappa}}$ .

□