Estimation of Probability of Defaults (PD) for Low-Default Portfolios: An Actuarial Approach

Cristian Pacheco Granados

15 de mayo de 2025

Resumen

Este estudio replica el marco de estimación de la probabilidad de incumplimiento (PD) de Iqbal Ali (2012), empleando convoluciones de distribuciones binomial y de Poisson y regresiones exponenciales para asegurar PDs estrictamente crecientes. Las PDs iniciales se re-estiman utilizando el teorema de Bayes con las probabilidades empíricas del portafolio. Se realizan convoluciones, restringiendo la distribución binomial a un único incumplimiento para facilitar la re-estimación bayesiana y la regresión exponencial subsiguiente. Una segunda convolución evalúa la alineación de las PDs ajustadas con la distribución real de incumplimientos del portafolio en cada calificación. Las PDs finales se derivan de una combinación ponderada de PDs regresionadas exponencialmente y ratios de incumplimiento empíricos, refinadas a través de una regresión exponencial final, con el objetivo de lograr resultados comparables al artículo original a pesar de su metodología no divulgada para el cálculo de las PDs.

1. Introducción

En el panorama actual de la gestión de riesgos, las instituciones financieras de todo el mundo reconocen la necesidad crítica de una gestión mejorada del riesgo de crédito. Los marcos de Basilea II y III del Comité de Supervisión Bancaria de Basilea han impulsado a muchas instituciones a adoptar el enfoque de calificaciones internas (IRB), siendo la determinación precisa de la probabilidad de incumplimiento (PD) un componente central. Este artículo aborda el desafío de la estimación de PD, particularmente para portafolios con baja tasa de incumplimiento (LDP), donde los métodos tradicionales que se basan en las tasas de incumplimiento realizadas a largo plazo a menudo resultan inadecuados.

Iqbal Ali (2012) proponen un mecanismo dinámico que emplea técnicas actuariales, específicamente la convolución, para derivar las PD implícitas mediante la combinación de distribuciones de probabilidad. Este estudio replica su marco utilizando Python para todos los análisis. Sin embargo, dada la falta de detalle explícito del artículo original con respecto a la metodología precisa para obtener las PD, nuestra implementación incorpora varias adaptaciones clave. Específicamente, utilizamos regresiones exponenciales para asegurar PDs estrictamente crecientes, y re-estimamos las PDs iniciales utilizando el teorema de Bayes con las probabilidades empíricas del portafolio. Para facilitar la re-estimación bayesiana, se realizan convoluciones donde la distribución binomial se restringe a un único incumplimiento. Se utilizan convoluciones adicionales para validar las PDs ajustadas con la distribución real de incumplimientos de la cartera. Finalmente, las PDs se calculan como un promedio ponderado de las PDs obtenidas mediante regresión exponencial y los ratios de incumplimiento empíricos, refinados con una regresión exponencial final, para lograr resultados comparables al artículo original.

2. Modelo

Nuestro modelo utilizará información sencilla del portafolio. Como se explicó en la sección anterior, el modelo solo emplea el número total de clientes y el número total de incumplimientos en cada calificación. Una de nuestras principales preocupaciones es utilizar el peso del incumplimiento de cada calificación dentro del portafolio de incumplimientos, lo cual se obtendrá simplemente aplicando el teorema de Bayes. Esto producirá la probabilidad de incumplimiento en cada calificación para el próximo cliente que forme parte del portafolio. A partir del siguiente portafolio, podemos descubrir la estimación bayesiana.

Grade	Number of Obligors	Number of Defaults
AAA	34	1
AA	56	1
A	119	3
BBB	257	2
BB	191	2
B	102	6
CCC	50	3
CC	34	1
C	12	2
Sum of	855	21

Cuadro 1: Table 1.1

Teorema de Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \text{Probabilidad de estar en la calificación } i \text{ dado que ha ocurrido un incumplimiento}$$

$$P(B|A) = \text{Probabilidad de incumplimiento dado que el cliente está en calificación } i$$

$$P(A) = \text{Probabilidad de un cliente de estar en una calificación específica}$$

$$P(B) = \text{Probabilidad de un Default}$$

Despejando Queda:

$$P(A|B) = \frac{\frac{ND_i}{NO_i} \cdot \frac{NO_i}{855}}{\frac{21}{855}} = \frac{ND_i}{21}$$

Grade	Number of Obligors	Number of Defaults	Bayesian Estimates
AAA	34	1	4.76 %
AA	56	1	4.76 %
A	119	3	14.29 %
BBB	257	2	9.52 %
BB	191	2	9.52 %
B	102	6	28.57 %
CCC	50	3	14.29 %
CC	34	1	4.76 %
C	12	2	9.52 %
Sum of	855	21	

Cuadro 2: Table 1.2

Con la función de densidad de probabilidad de la distribución binomial definida:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n = número total de defaults en el portafolio.
k = número de defaults en una calificación específica.
p = probabilidad estimada mediante el teorema de Bayes.

nos proporciona las herramientas para modelar la probabilidad de cómo se distribuyen los 21 defaults totales de nuestro portafolio entre las diferentes calificaciones crediticias. Al considerar cada calificación como un grupo de ensayos (donde un 'éxito' es un default), y conociendo la probabilidad de default individual para pertenecer a cada calificación (p), podemos utilizar esta fórmula para calcular la probabilidad de observar una cantidad específica de defaults (k) dentro de cada grupo, contribuyendo así a la distribución total de los 21 defaults en el portafolio como se ve en la tabla.

k	**AAA**	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**CCC**	**CC**	**C**
0	0.35894	0.35894	0.03927	0.12224	0.12224	0.00085	0.03927	0.35894	0.12224
1	0.37688	0.37688	0.13746	0.27021	0.27021	0.00717	0.13746	0.37688	0.27021
2	0.18844	0.18844	0.22910	0.28444	0.28444	0.02868	0.22910	0.18844	0.28444
3	0.05967	0.05967	0.24183	0.18962	0.18962	0.07266	0.24183	0.05967	0.18962
4	0.01342	0.01342	0.18137	0.08982	0.08982	0.13080	0.18137	0.01342	0.08982
5	0.00228	0.00228	0.10277	0.03214	0.03214	0.17789	0.10277	0.00228	0.03214
6	0.00030	0.00030	0.04568	0.00902	0.00902	0.18975	0.04568	0.00030	0.00902
7	0.00003	0.00003	0.01631	0.00203	0.00203	0.16264	0.01631	0.00003	0.00203
8	0.00000	0.00000	0.00475	0.00037	0.00037	0.11385	0.00475	0.00000	0.00037
9	0.00000	0.00000	0.00114	0.00005	0.00005	0.06578	0.00114	0.00000	0.00005
10	0.00000	0.00000	0.00022	0.00000	0.00000	0.03157	0.00022	0.00000	0.00000

Cuadro 3: Probabilidades Binomiales por Calificación Crediticia

En los cálculos previos de probabilidades de default, nos enfocamos en la proporción de defaults observados en el portafolio total, sin distinguir entre las diferentes calificaciones crediticias ni la cantidad de clientes en cada una. Ahora, vamos a refinar nuestro análisis incorporando la composición del portafolio por calificación y las tasas de default inherentes a cada grupo. Para modelar la distribución de la frecuencia de estos eventos de default, la distribución de Poisson se presenta como la herramienta estadística más apropiada con funciónÑ

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

λ = frecuencia de default en cada calificación.
x = número de defaults incrementales en la calificación específica.

n	**AAA**	**AA**	**A**	**BBB**	**BB**	**B**	**CCC**	**CC**	**C**
0	0.97102	0.98230	0.97511	0.99225	0.98958	0.94287	0.94176	0.97102	0.84648
1	0.02856	0.01754	0.02458	0.00772	0.01036	0.05546	0.05651	0.02856	0.14108
2	0.00042	0.00016	0.00031	0.00003	0.00005	0.00163	0.00170	0.00042	0.01176
3	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00003	0.00003	0.00000	0.00065
4	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00003
5	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
6	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
7	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
8	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
10	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Cuadro 4: Probabilidades de Poisson por Calificación Crediticia

Metodología para el Cálculo de Probabilidades de Incumplimiento (PDs)

1. **Ajuste de Probabilidades Iniciales:**

   - Debido a que los pesos de cada calificación se incorporan en las probabilidades de la distribución de Poisson (λ), se considera un cliente por cada λ de incumplimiento.
   - En la aplicación del *teorema de Bayes*:
     - Se modifica la probabilidad previa $P(A)$ (probabilidad de pertenecer a una calificación) a una distribución equitativa, ya que la influencia de los pesos de cada calificación se considera mediante las probabilidades de Poisson (λ).
     - Se ajustan dos probabilidades de $P(B)$ (probabilidad general de incumplimiento) al promedio de los λ de cada calificación, para representar mejor el riesgo global del portafolio, de igual forma usamos la probabilidad general de incumplimiento del portafolio.

$$P(B)_1 = \frac{\sum \lambda_i}{n} = 0{,}04507$$

$$P(B)_2 = \frac{\text{total incumplimientos}}{\text{total clientes}} = {,}02456$$

2. **Convolución Binomial-Poisson con Incumplimiento Unitario:**

   - Se realiza la convolución de las distribuciones binomial y Poisson, fijando el número de incumplimientos en la distribución binomial a 1.
   - El resultado de esta convolución representa la distribución de probabilidad de que ese único incumplimiento ocurra en cada una de las calificaciones, lo que equivale a $P(A|B)$ en Bayes.

Calificación	Probabilidad
AAA	0,14194273565254403
AA	0,10767392690454687
A	0,20729745215059067
BBB	0,1196197572455968
BB	0,1276727609684301
B	0,35864093782353706
CCC	0,2741959972860557
CC	0,14194273565254403
C	0,3585770355148263

Cuadro 5: Nuevas $P(A|B)$

   - La distribución de probabilidad generada por la convolución refleja la influencia de los λ de Poisson, que modelan el comportamiento de incumplimiento específico de cada calificación.

3. **Actualización de PDs mediante el Teorema de Bayes:**

   - Se actualizan las probabilidades de incumplimiento (PDs $= P(B|A)$) utilizando el *teorema de Bayes*:

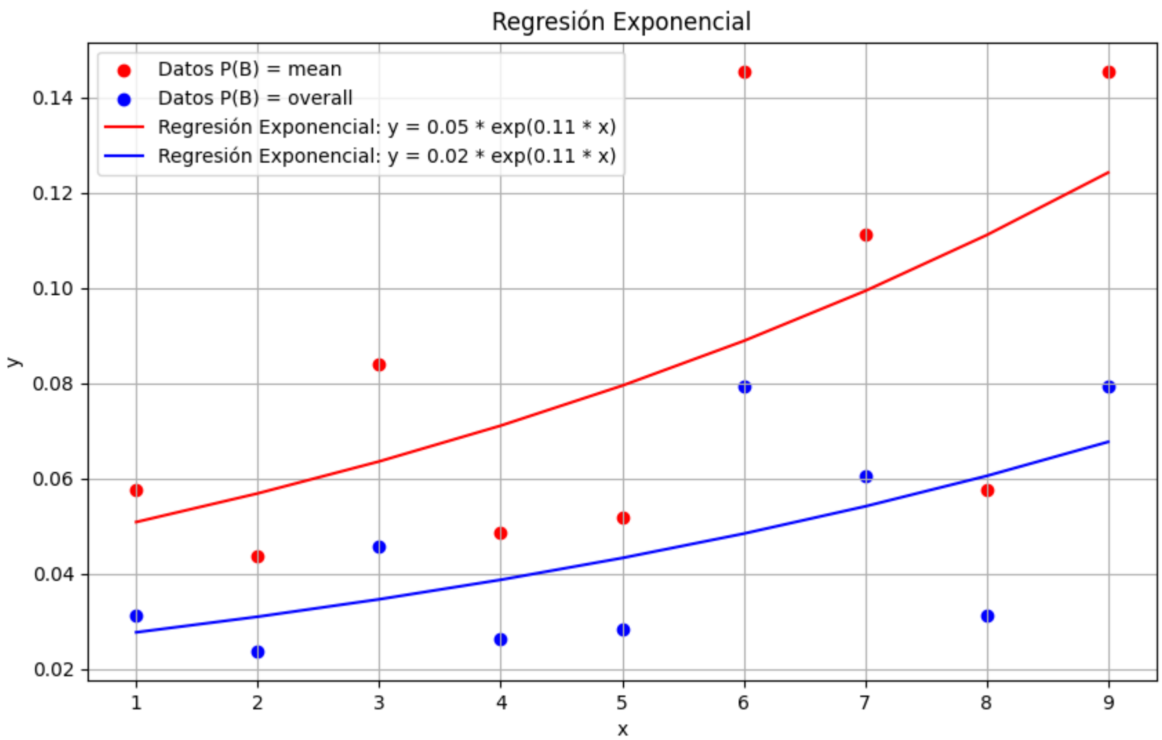
$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

   - Esta actualización incorpora la información sobre la distribución de incumplimientos capturada por la convolución.

new_pds_2	new_pds
0,031376815249509735	0,05757683621754331
0,02380160489468931	0,04367623341752687
0,045823647317498994	0,08408694813382414
0,026442262127974032	0,04852187144096779
0,028222399793021397	0,05178844562863056
0,07927852309783452	0,1454770506080621
0,060611746768496524	0,11122328983351691
0,031376815249509735	0,05757683621754331
0,07926439732433002	0,14545112964250054

Cuadro 6: Comparación $P(B|A)$ con $P(B)_1$ y $P(B)_2$

4. **Suavizado de PDs Actualizadas:**
   - Las PDs actualizadas se suavizan mediante una regresión exponencial.
   - Estas PDs suavizadas se guardan como "PDs exponenciales".



5. **Convolución Binomial-Poisson con Incumplimientos Totales:**
   - Se realiza una nueva convolución de las distribuciones binomial y Poisson, esta vez utilizando el número total de incumplimientos reales del portafolio (21).
   - Se extrae la probabilidad correspondiente al número real de incumplimientos observado en cada calificación a partir del resultado de esta convolución.
   - Estas probabilidades se interpretan como "pesos"que indican la relevancia de las PDs exponenciales en comparación con las PDs empíricas, que tan bien se ajustan las probabilidades exponenciales a la realidad de nuestro portafolio.

Calificación	Proba ($P(B)_1$)	Proba ($P(B)_2$)	ND
aaa_conv	0,37555	0.37626	1
aa_conv	0,37533	0.37617	1
a_conv	0,24086	0.24134	3
bbb_conv	0,28310	0.28379	2
bb_conv	0,28290	0.28370	2
b_conv	0,18856	0.18913	6
ccc_conv	0,24019	0.24103	3
cc_conv	0,37294	0.37520	1
c_conv	0,28169	0.28318	2

Cuadro 7: Probabilidades en convolución por calificación

6. **Combinación Lineal de PDs:**

   - Se calcula una combinación lineal de las PDs exponenciales y las PDs empíricas de cada calificación, utilizando los "pesos.ºbtenidos en el paso anterior.

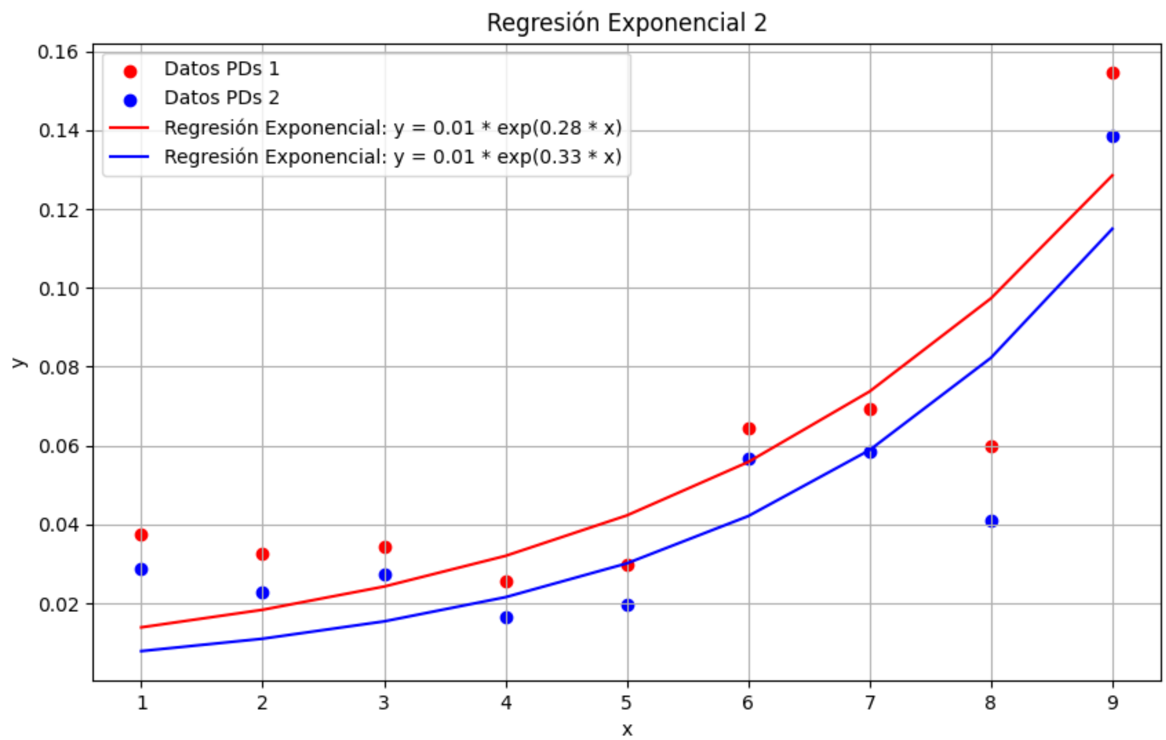
$$\text{PDs} = \alpha \cdot \text{new\_pds} + (1-\alpha) \cdot \text{original\_lambda}$$

Calificación	PDs con $P(B)_1$	PDs con $P(B)_2$
AAA	0,037466	0,028773
AA	0,032497	0,022796
A	0,034451	0,027487
BBB	0,025702	0,016567
BB	0,029992	0,019788
B	0,064487	0,056857
CCC	0,069451	0,058588
CC	0,059869	0,041089
C	0,154702	0,138636

Cuadro 8: Weigth PDs

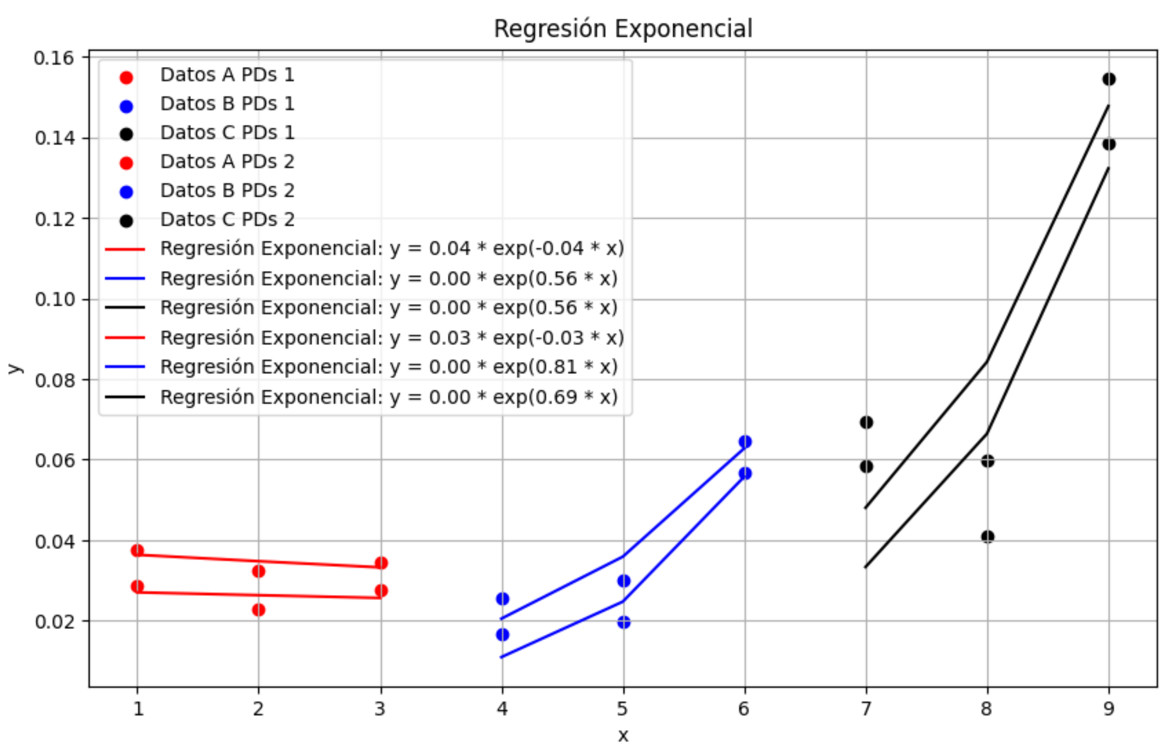
7. **Regresión Exponencial Final:**

   - Se aplica una regresión exponencial final a las PDs resultantes de la combinación lineal para asegurar que sean *estrictamente crecientes*.



8. **Ajuste por Correlación entre Calificaciones:**

   - Se realizan tres regresiones exponenciales separadas para las calificaciones agrupadas como A, B y C, con el fin de modelar la correlación entre calificaciones cercanas.



- Se asignan nuevos pesos para combinar las PDs de las calificaciones dentro de cada grupo y con las PDs exponenciales anteriores. con resultados en la tabla

Calificación	PDs 1 Finales	PDs 2 Finales
AAA	0,022310942	0,013508496
AA	0,024507195	0,015524661
A	0,027623678	0,018428933
BBB	0,027733863	0,018464987
BB	0,039905236	0,028558175
B	0,058437775	0,046113684
CCC	0,064130915	0,051391820
CC	0,092448793	0,077623459
C	0,135695455	0,120034013

Cuadro 9: Comparación de PDs Finales

9. **Resultados y Validación:**

   - La metodología produce PDs que son similares a las del artículo original, aunque no idénticas debido a la falta de especificidad en el artículo sobre su método de cálculo exacto.
   - Se considera que las PDs resultantes se ajustan adecuadamente a las características del portafolio analizado.