

**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN**

Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik

Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie

STUDIENARBEIT

zum Thema

Bewegungsplanung und Folgeregelung für einen einachsigen
mobilen Roboter

vorgelegt von Richard Schroedter
im Studiengang Mechatronik, Jg. 2007
geboren am 19.02.1987 in Neubrandenburg

Betreuer: Dr.-Ing. F. Woittennek
Dipl.-Ing. T. Knüppel
Verantwortlicher Hochschullehrer: Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. K. Röbenack
Tag der Einreichung: 30.09.2011

Bewegungsplanung und Folgeregelung für einen einachsigen mobilen Roboter

Diese Studienarbeit behandelt die Bewegungsplanung und Folgeregelung eines einachsigen mobilen Roboters. Sie beinhaltet die Trajektorienplanung um bekannte Hindernisse, sowie die Berücksichtigung der dynamischen Begrenzungen des Fahrzeuges. Es werden zwei flachheitsbasierte Ansätze und der Ljapunov-stabile Ansatz nach KANAYAMA et al. [1990] in einer MATLAB-Simulation und auf einer Referenzplattform untersucht und miteinander verglichen.

Betreuer:	Dr.-Ing. F. Woittennek Dipl.-Ing. T. Knüppel
Hochschullehrer:	Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. K. Röbenack
Tag der Einreichung:	30.09.2011

STUDIENARBEIT

Bearbeiter: Richard Schroedter

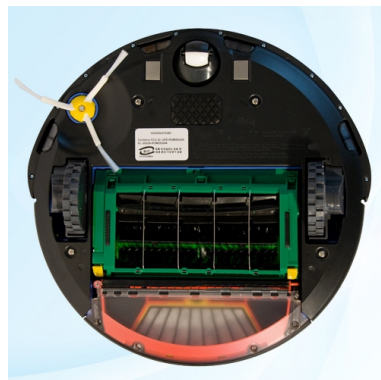
Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Stand der Technik	2
1.2	Inhalt und Gliederung der Arbeit	2
2	Bahnplanung und Trajektorienplanung	5
2.1	Wegfindung und Hindernisumfahrung	5
2.1.1	Zellzerlegung	5
2.1.2	A-Star	6
2.2	Bahnplanung	7
2.2.1	Geradenstücke	7
2.2.2	Catmull-Rom Spline 3. Ordnung	7
2.2.3	Hermite-Splines 5. Ordnung	8
2.3	Zeitverläufe	10
2.3.1	Geschwindigkeitsbegrenzung durch die Bahn	10
2.3.2	Trapezförmiger Geschwindigkeitsverlauf	12
2.3.3	Zusammenfügen mehrerer trapezförmiger Geschwindigkeitsverläufe	15
3	Steuerung und Regelung des Fahrzeugs	17
3.1	Kinematisches Modell	17
3.2	Flachheitsbasierte Folgeregelung	18
3.2.1	Flachheit	19
3.2.2	Analyse der Ruhelagen	20
3.2.3	Umparametrierung mit Bogenlänge	20
3.2.4	Quasi-statische Zustandsrückführung	22
3.2.5	Dynamische Zustandsrückführung	25
3.3	Methode zur stabilen Folgeregelung nach KANAYAMA et al. [1990]	28
3.3.1	Ljapunov-Stabilität	30
3.3.2	Wahl der Reglerkoeffizienten	31
4	Simulation und Implementierung	33
4.1	MATLAB-Simulation	33

5 Experimentelle Untersuchung auf einer Referenzplattform	41
5.1 TURAG-Roboter	41
5.2 Ergebnisse	42
6 Zusammenfassung und Ausblick	49
Literaturverzeichnis	51

1 Einleitung

In der Industrie und zunehmend auch im Haushaltbereich (z. B. Serviceroboter) werden heutzutage autonome mobile Robotersysteme (AMRS) zur Bewältigung von Alltagsaufgaben eingesetzt. Häufig sollen diese ihre Arbeiten an verschiedenen Orten erfüllen. Zur Deplatzierung werden für solche Systeme häufig Antriebe mit Rädern verwendet, die oftmals die Bewegungsfreiheit nichtholonom einschränken. Um diese dennoch im ebenen Raum von einem Zustand in einen anderen zu überführen, sind meist nichtlineare Regelungsansätze erforderlich, die sich mit der klassischen linearen Regelungstheorie nicht mehr beschreiben lassen. In dieser Arbeit werden verschiedene Ansätze für einen mobilen einachsigen Roboter untersucht und verglichen. Einachsige Fahrzeuge zeichnen sich durch ihr einfaches Modell sowie durch die leichte konstruktive Realisierung aus und werden daher oft verwendet. Man findet Beispiele (siehe Abbildung 1.1) bei Staubsaugerrobotern, Forschungsrobotern und diversen anderen Servicerobotern. Ein weiterer Vorteil ergibt sich bei runden Robotern und mittiger Lage der Antriebsachse. So kann das kollisionsfreie Wenden auf der Stelle garantiert werden. Zur Kippstabilität des Roboters werden in der Regel lose Rollen angebracht.



(a) Staubsaugerroboter Roomba von iRobot



(b) Roboterplattform Pioneer P3-DX

Abbildung 1.1: Beispiele¹

¹Bildquellen: www.irobot.com, www.mobilerobots.com/researchrobots/researchrobots/pioneerp3dx.aspx

1.1 Stand der Technik

Die Regelung mobiler Roboter ist schon seit einiger Zeit das Thema vieler Forschungsarbeiten. Insbesondere die nichtholonomen Beschränkungen sorgen dafür, dass nichtlineare Regelungsmethoden angewandt werden müssen. Einachsige und Fahrzeuge mit Ackermann-Lenkung, die im KFZ-Bereich häufig eingesetzt wird, sind zwar einerseits lokal steuerbar, jedoch wurde in SAMSON und AIT-ABDERRAHIM [1991], CAMPION et al. [1990] basierend auf BROCKETT [1983] gezeigt, dass eine statische Zustandsrückführung diese Klasse von Systemen nicht stabilisieren kann. In der Literatur finden sich mehrere verschiedene Strategien zur Steuerung und Regelung solcher mobiler Fahrzeuge (KOLMANOVSKY und H. [1995]). Neben stückweise glatten, analytischen Stabilisierungen in BLOCH et al. [1992], DE WIT und SØRDALEN [1992] und glatten zeitvarianten Rückführungen in SAMSON [1991], M'CLOSKEY und MURRAY [1997], gibt es auch Ansätze mit Gleitregime-Reglern (engl. *sliding-mode control*) (BENALIA et al. [2003], YANG und KIM [1999], JIANGZHOU et al. [2000]), die das System auf einer sogenannten Gleitfläche zur Ruhelage zwingt.

Eine wichtige Eigenschaft solcher Systeme ist die Flachheit (RUDOLPH [2009], ROUCHON et al. [1993] und BENALIA et al. [2003]) mit der sich eine flachheitsbasierte Folgeregelung realisieren lässt. Außerdem gibt es zahlreiche Ansätze, die den Reglerentwurf mit der Ljapunov-Theorie zur Folgeregelung eines virtuellen Referenzfahrzeuges verwendet (KANAYAMA et al. [1990]).

In der Praxis soll das mobile Fahrzeug mit seinen nichtholonomen Einschränkungen meist in einer komplexen Umgebung mit Hindernissen fahren. Daher sind Kombinationen aus Algorithmen der Pfadplanung mit Hindernisumfahrung, Geschwindigkeitsplanung und Trajektorienverfolgung notwendig.

1.2 Inhalt und Gliederung der Arbeit

In dieser Arbeit steht die Realisierung anhand einer einachsigen mobilen Referenzplattform im Vordergrund. Dabei sollen flachheitsbasierte Methoden zur Folgeregelung mit dem Ansatz nach KANAYAMA et al. [1990] verglichen werden. Zunächst werden in Kapitel 2 Algorithmen zur Trajektorienplanung unter Berücksichtigung von Hindernissen vorgestellt. Hierbei muss beachtet werden, dass das Fahrzeug dynamischen Begrenzungen unterliegt. Auf der einen Seite werden sie durch mechanische Komponenten definiert, wie z. B. die Maximalgeschwindigkeit und maximale Normalbeschleunigung wegen der

Trägheitseigenschaften. Auf der anderen Seite ergeben sich Beschränkungen durch die Umgebung, wie z. B. die Maximalbeschleunigung aufgrund der Reibung der Räder auf dem Untergrund. Auf der Referenzplattform wurde bereits eine Kaskadenregelung mit Methoden der linearen Regelungstheorie realisiert. Bisher wurden die geplanten Punkte stets mit der Kombination aus geradeaus Fahren, Drehen und einer Stabilisierung mit zeitdiskreten PID-Reglern erreicht. Weil polynomiale Kurven höherer Ordnung aber oft die Fahrzeit reduzieren, da an den Stützpunkten die Geschwindigkeit nicht Null sein muss, soll eine Möglichkeit gefunden werden eine solche Bahn optimal und unter Beachtung der Hindernisse zu planen. Im Allgemeinen können sich die Hindernisse in der Ebene bewegen. Dadurch muss die Trajektorie stets neu berechnet werden, sofern die ursprüngliche Bahn nicht mehr befahrbar ist. Beim Entwurf muss deshalb auf die Rechenzeit geachtet werden, sodass die Berechnung der Trajektorien auf dem in der Referenzplattform verwendeten Atmel AT91SAM7X-Controller in Echtzeit realisierbar ist.

Anschließend soll die Steuerung und Regelung des einachsigen Fahrzeugs theoretisch untersucht werden. Dazu wird zunächst das Modell des einachsigen Fahrzeugs in Abschnitt 3.1 hergeleitet. In Abschnitt 3.2 wird die flachheitsbasierte Folgeregelung des einachsigen Fahrzeugs behandelt. Einer der Vorteile des flachheitsbasierten Regelungsansatzes liegt darin, dass er eine geschlossene analytische Berechnung des Regelgesetzes ermöglicht. Weiterhin ist es möglich durch geeignete Parametrierung das Fahrzeug aus der Ruhelage in eine andere zu überführen. Ein weiterer Vorteil ist die Trennung von Planung und Stabilisierung des Fahrzeugs entlang der Solltrajektorie. Die Trajektorioplanung kann z. B. offline und außerhalb des Fahrzeuges geschehen.

Neben der flachheitsbasierten Methode wird in Abschnitt 3.3 die Folgeregelung nach KANAYAMA et al. [1990] untersucht, weil sie mit einer einfachen und anschaulich erklärbaren Regelungsvorschrift auskommt, deren Parametrierung vorgestellt wird. Außerdem wird in KANAYAMA et al. [1990] auch auf die dynamischen Begrenzungen eingegangen, sodass eine Implementierung auf der mobilen Referenzplattform sinnvoll ist.

Anschließend werden in Kapitel 4 die theoretischen Untersuchungen zunächst in einer MATLAB-Simulationsumgebung geprüft und die Ergebnisse dargestellt.

Das 5. Kapitel behandelt schließlich die Ergebnisse der Realisierung auf der mobilen Referenzplattform.

2 Bahnplanung und Trajektorienplanung

In vielen Anwendungen soll das Fahrzeug von einer Ruhelage in eine andere überführt werden und dabei statische und dynamische, also sich bewegende, Hindernisse beachten. Die Steuerung übernimmt die Aufgaben der Planung einer solchen Trajektorie die das Fahrzeug um das Hindernis herum an sein Ziel führt. Dabei sind Algorithmen zur Wegfindung, Bahnplanung und zugehörige Zeitverläufe nötig. Im Folgenden wird ein mögliches Verfahren zur Lösung dieser Aufgabe vorgestellt.

2.1 Wegfindung und Hindernisumfahrung

Es sind bereits viele Wegfindungsalgorithmen untersucht worden. In KRASCHL [2005] werden einige wichtige vorgestellt. Sie können in globale und lokale Planungsalgorithmen unterschieden werden, je nachdem ob alle Hindernisse zum Planungsbeginn bekannt sind. Die hier verwendete Referenzplattform hat einen Laserscanner, mit der es möglich ist eine aktuelle Karte der Umgebung zu erstellen, weshalb die Lage und Orientierung der Hindernisse bereits bekannt ist.

Typische Verfahren sind der Sichtbarkeitsgraph, die Zellzerlegung und die Potentialfeldmethode (siehe auch GRAF [2008] und Abbildung 2.1). Da der Sichtbarkeitsgraph für runde Objekte ungeeignet ist und die Potentialfeldmethode durch lokale Minima eine schlechte Parametrierbarkeit der Bahn zugrunde legt, wird in dieser Arbeit die Zellzerlegung als günstiges Verfahren gewählt. Dabei wird der befahrbare Raum in kleine Teilräume (Zellen) zerlegt und anschließend ein Verbindungsgraph zwischen benachbarten Zellen erstellt. Mit Suchalgorithmen für Graphen kann dann der Pfad vom Start zum Zielpunkt gefunden werden.

2.1.1 Zellzerlegung

Bei der Zellzerlegung (Abbildung 2.2) sind die einzelnen Zellen entweder *belegt*, *teilweise belegt* oder *frei*. Wird der Raum in exakt gleich große Zellen zerlegt, so steigt die Anzahl der Zellen und damit die Komplexität des Problems mit der Größe der Umgebung. Dieser Nachteil kann mit der approximativen

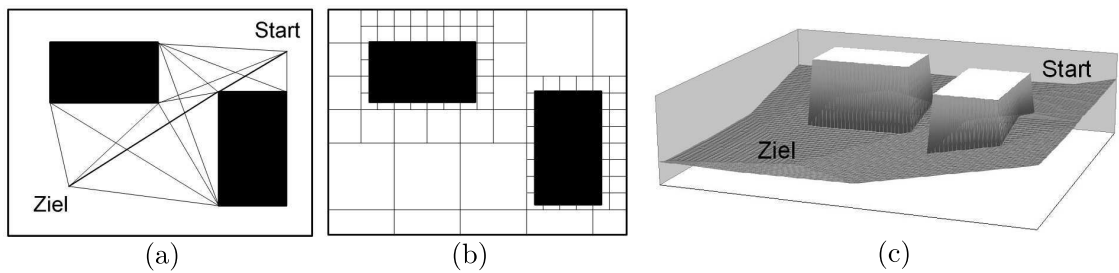


Abbildung 2.1: Bahnplanungsalgorithmen: (a) Sichtbarkeitsgraph, (b) Zellzerlegung, (c) Potentialfeldmethode (Quelle: GRAF [2008])

Zellzerlegung reduziert werden. Hierbei werden die Zellen geteilt und neu ausgewertet. Ist eine Zelle *teilweise belegt*, wird sie weiter in Unterzellen zerlegt. Die Zellteilung wird solange durchgeführt, bis die gewünschte Genauigkeit oder Zelltiefe erreicht ist. Nur wenn eine Zelle *frei* ist, kann sie befahren und für die Bahnplanung in Betracht gezogen werden. Anhand dieses Graphen kann man nun mit geeigneten Graphenalgorithmen vom Start- zum Zielpunkt finden.

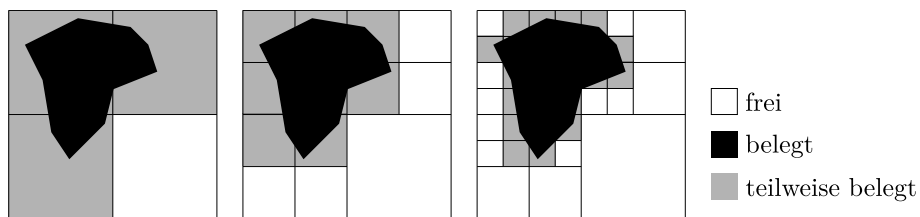


Abbildung 2.2: adaptive Zellzerlegung

2.1.2 A-Star

Die Mittelpunkte der Zellen entsprechen nun den Knoten und die Entfernung zwischen diesen den Kantengewichten. Ein geeigneter Algorithmus zur Findung des kürzesten Weges vom Start- zum Zielknoten ist der A*-Algorithmus. Er basiert auf dem Dijkstra-Algorithmus, wobei er den Rechenaufwand mit einer Schätzfunktion (Heuristik) zur zielgerichteten Suche in einigen Fällen verringert. Für die Schätzfunktion werden die Kosten zwischen Start- und Zielknoten ohne Hindernisse verwendet. Die Knoten des optimalen Weges bilden schließlich die Stützpunkte für die Bahnberechnung. Der A*-Algorithmus wurde bereits in vielen Arbeiten (u. a. KRASCHL [2005]) erläutert und soll hier nicht näher beschrieben werden.

2.2 Bahnplanung

Aus den vom A*-Algorithmus erhaltenen Stützpunkten kann nun eine Bahn geplant werden, die den Glattheitsanforderungen des Modells entspricht. Je nach Anforderung an die Komplexität der Bahnplanung ist es möglich die Bahn aus Geradenstücken zusammzusetzen oder polynomiale Kurven höherer Ordnung zu verwenden.

2.2.1 Geradenstücke

Der Planungs- und der Rechenaufwand für Geradenstücke ist gering. Jede mögliche Bahn lässt sich aus endlich kleinen Geradenstücken, also der Aneinanderreihung der Bewegungen Drehen und Fahren, annähern. Außerdem gibt es den Vorteil, dass keine Beschränkungen an die Geschwindigkeit durch die aus der Masse des System herrührenden Fliehkraft bestehen, insofern der Schwerpunkt mittig auf der Achse liegt. Somit sind Überführungen vom Start zum Zielpunkt relativ einfach realisierbar. Diese Variante wurde bereits auf der Referenzplattform realisiert.

2.2.2 Catmull-Rom Spline 3. Ordnung

Eine weitere Möglichkeit bieten Funktionen die aus stückweisen Polynomen, sogenannten Splines, n -ten Grades zusammengesetzt sind. Sie sind in der Regel $(n - 1)$ -mal stetig differenzierbar. In diesem Fall wird eine Stetigkeit bis zur zweiten Ableitung benötigt (siehe Gleichung (3.22)). Hierfür eignen sich kubische Hermite-Splines nach (CATMULL und ROM [1974]), wobei die Tangenten aus der Verbindung des letzten und nächsten Stützpunktes gewählt werden. Um Schleifen im Bahnverlauf zu verhindern kann der Abstand zwischen den Stützpunkten als Parameter dienen. Der Ansatz lautet allgemein:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{c}_3 s^3 + \mathbf{c}_2 s^2 + \mathbf{c}_1 s + \mathbf{c}_0 \quad (2.1)$$

mit dem normierten Ortsparameter $s \in [0, 1]$ und den unbekannten Koeffizienten \mathbf{c}_i . Als Randbedingungen sind bereits die Stützpunkte bekannt. Außerdem werden die Tangenten an den Stützpunkten so gewählt, dass sie parallel zur Verbindungslinie aus dem vorherigen und nachfolgenden Stützpunkt verläuft. Die Länge der Tangente wird anschließend auf den euklidischen Abstand zwischen den Stützpunkten des Splines normiert.

In Abbildung 2.3 wird ein Spline zwischen dem \mathbf{x}_i -ten und \mathbf{x}_{i+1} -ten Stützpunkt berechnet. Für die Ausrichtung der Tangenten am Anfang und am

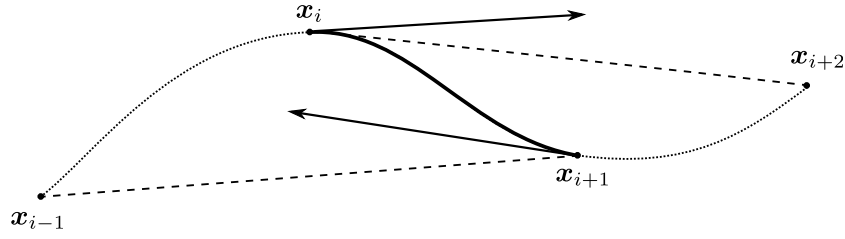


Abbildung 2.3: Catmull-Rom Spline

Ende werden die Stützpunkte \mathbf{x}_{i-1} und \mathbf{x}_{i+2} benötigt.
Die Randbedingungen lauten somit:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}_0 = \mathbf{x}_i \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_0 = \mathbf{x}_{i+1} \quad (2.2b)$$

$$\mathbf{x}'(0) = \mathbf{c}_1 = k_0(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1}) \quad (2.2c)$$

$$\mathbf{x}'(1) = 3\mathbf{c}_3 + 2\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1 = k_1(\mathbf{x}_{i+2} - \mathbf{x}_i). \quad (2.2d)$$

Der Faktor k parametrisiert die Länge der Stützpunkte nach dem euklidischen Abstand vom i -ten zum $(i+1)$ -ten Stützpunkt. Es gilt:

$$k_0 = \frac{|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i|}{|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1}|} \quad k_1 = \frac{|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i|}{|\mathbf{x}_{i+2} - \mathbf{x}_i|} \quad (2.3)$$

In Matrixform lässt sich der Ausdruck aufschreiben als

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 3\mathbf{I} & 2\mathbf{I} & \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_3 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_{i+1} \\ k_0(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1}) \\ k_1(\mathbf{x}_{i+2} - \mathbf{x}_i) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

mit der zweidimensionalen Einheitsmatrix \mathbf{I} . Durch Invertieren der Matrix erhält man die gesuchten Koeffizienten \mathbf{c}_i

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_3 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{I} & -2\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -3\mathbf{I} & 3\mathbf{I} & -2\mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_{i+1} \\ k_0(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1}) \\ k_1(\mathbf{x}_{i+2} - \mathbf{x}_i) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

2.2.3 Hermite-Splines 5. Ordnung

Die Catmull-Rom-Splines sind zwar zwischen den Stützstellen bis zur zweiten Ableitung nach der Bogenlänge stetig differenzierbar, jedoch nicht an den

Stützstellen selbst. Das bedeutet anschaulich, dass dort die Winkelgeschwindigkeit springt. Dies ist nicht zulässig, wenn das Fahrzeug ohne Anhalten mehrere Splineabschnitte durchfahren soll. Deshalb muss ein neuer Spline hergeleitet werden, der also Stetigkeit bis zur zweiten Ableitung auch an den Stützstellen gewährleistet (siehe 2.4). Da nun zwei weitere Randbedingungen, eine am Anfang und eine am Ende, hinzukommen, muss das Polynom ebenfalls um Grad 2 auf $n = 5$ erhöht werden. Der Ansatz lautet allgemein:

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{c}_5 s^5 + \mathbf{c}_4 s^4 + \mathbf{c}_3 s^3 + \mathbf{c}_2 s^2 + \mathbf{c}_1 s + \mathbf{c}_0. \quad (2.6)$$

Die zweiten Ableitungen an den Stützstellen sollen gleich sein, sodass die Winkelgeschwindigkeit dort nicht springt. Die ersten Ableitungen an den Stützstellen werden wie beim Catmull-Rom Spline parametrisiert. Die Rand-

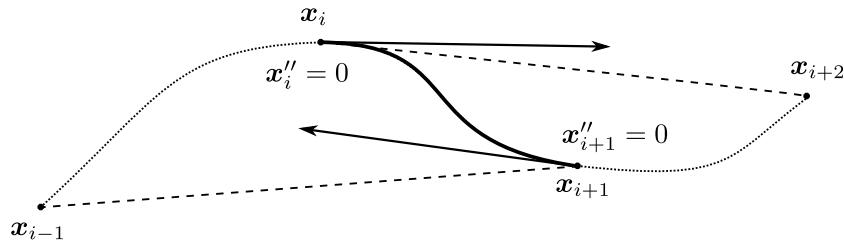


Abbildung 2.4: Hermite-Splines 5. Ordnung

bedingungen lauten jetzt:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}_0 = \mathbf{x}_i \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{x}(1) = \mathbf{c}_5 + \mathbf{c}_4 + \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_0 = \mathbf{x}_{i+1} \quad (2.7b)$$

$$\mathbf{x}'(0) = \mathbf{c}_1 = k_0(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1}) \quad (2.7c)$$

$$\mathbf{x}'(1) = 5\mathbf{c}_5 + 4\mathbf{c}_4 + 3\mathbf{c}_3 + 2\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1 = k_1(\mathbf{x}_{i+2} - \mathbf{x}_i) \quad (2.7d)$$

$$\mathbf{x}''(0) = \mathbf{c}_2 = k_2 \quad (2.7e)$$

$$\mathbf{x}''(1) = 20\mathbf{c}_5 + 12\mathbf{c}_4 + 6\mathbf{c}_3 + 2\mathbf{c}_2 = k_3. \quad (2.7f)$$

Dies führt durch Umstellen wieder auf die gesuchten Koeffizienten \mathbf{c}_i des Polynoms:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{c}_5 \\ \mathbf{c}_4 \\ \mathbf{c}_3 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\mathbf{I} & -3\mathbf{I} & -1\mathbf{I} & 6\mathbf{I} & -3\mathbf{I} & 0.5\mathbf{I} \\ 15\mathbf{I} & 8\mathbf{I} & 3\mathbf{I} & -15\mathbf{I} & 7\mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -10\mathbf{I} & -6\mathbf{I} & -3\mathbf{I} & 10\mathbf{I} & -4\mathbf{I} & 0.5\mathbf{I} \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ k_0(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_{i-1}) \\ k_2 \\ \mathbf{x}_{i+1} \\ k_1(\mathbf{x}_{i+2} - \mathbf{x}_i) \\ k_3 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Die Faktoren k_0 und k_1 berechnen sich analog zu (2.3). Die Faktoren k_2 und k_3 sind nicht näher spezifiziert und wurden in der Realisierung Null gesetzt.

2.3 Zeitverläufe

Nun fehlt mit der fertig geplanten Bahn bis zur Trajektorie noch der Zeitverlauf in dem die Bahn abgefahren werden soll. Spätestens hier wird klar, dass die Trennung von Bahn- und Zeitverlaufsplanung die Berechnungen übersichtlicher macht, denn einerseits muss die Bahn um die Hindernisse herum geplant und andererseits sollen die Beschränkungen des Systems bezüglich Geschwindigkeit und Beschleunigung eingehalten werden. Aufgrund der Trägheiten des Systems ist das gewünschte Geschwindigkeitsprofil, also die Geschwindigkeitsvorgabe über die Bahn, abhängig von der Bahnkrümmung. Das heißt enge Kurven müssen mit geringerer Geschwindigkeit durchfahren werden als weite. Ansonsten könnte es zum Rutschen in Querrichtung kommen, wodurch die Modellannahme des Rollens ohne Gleiten verletzt würde (Vergleich Abschnitt 3.1).

2.3.1 Geschwindigkeitsbegrenzung durch die Bahn

Zunächst wird eine Beziehung zwischen den Geschwindigkeitsmaxima und der Krümmung gesucht. Die Krümmung κ beschreibt allgemein das Verhältnis aus rotatorischer Geschwindigkeit ω und translatorischer Geschwindigkeit v in der Form

$$\kappa = \frac{\omega}{v}. \quad (2.9)$$

Aufgrund der Reibung der Räder auf dem Untergrund und den maximalen Radgeschwindigkeiten erhält man für die Spezialfälle reiner Translation v und reiner Rotation ω die auf ihr Maximum bezogenen Geschwindigkeiten

$$u_v = \frac{v}{v_{max}} \Big|_{\omega=0} \quad \text{und} \quad u_\omega = \frac{\omega}{\omega_{max}} \Big|_{v=0}. \quad (2.10)$$

Die jeweils andere Geschwindigkeit ist dabei Null.

In FRÖHLICH [2008] wurde nun die allgemeine bezogene Geschwindigkeit für gemischte Geschwindigkeiten hergeleitet, die sich prinzipiell aus den Spezialfällen zusammensetzt:

$$u = \text{sign}(v) \left(\left| \frac{v}{v_{max}} \right| + \left| \frac{\omega}{\omega_{max}} \right| \right) \in [-1, 1]. \quad (2.11)$$

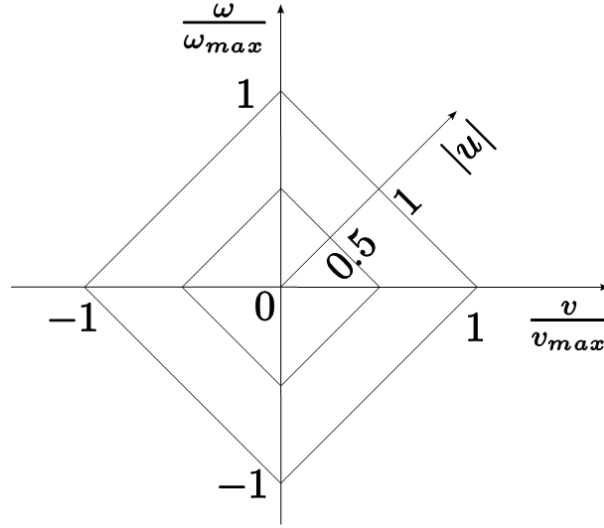


Abbildung 2.5: Bezogene Geschwindigkeit nach FRÖHLICH [2008]

Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 2.5 veranschaulicht. Die Geschwindigkeit, die das Fahrzeug in der Kurve hat, lässt sich aus den zwei beschränkten Bewegungen, der Translation $-v_{max} \leq v \leq v_{max}$ und der Rotation $-\omega_{max} \leq \omega \leq \omega_{max}$ zusammensetzen. Daher kommt auch der Wertebereich von $u \in [-1, 1]$. Wenn beispielsweise beide Räder mit ihrer Maximalgeschwindigkeit in die gleiche Richtung fahren, so bewegt sich das Fahrzeug mit maximaler Translationsgeschwindigkeit v_{max} . Wechselt nun das linke Rad seine Radgeschwindigkeit kontinuierlich in die maximale negative Drehrichtung, so bewegt man sich im Graphen auf einer Geraden von 1 auf der $\frac{v}{v_{max}}$ -Achse nach 1 auf der $\frac{\omega}{\omega_{max}}$ -Achse.

Mit der Gleichung (2.9) kann man die Beziehung für die bezogene Geschwindigkeit nach der Translationsgeschwindigkeit umstellen

$$v = \frac{u}{\left| \frac{\kappa}{\omega_{max}} \right| + \left| \frac{1}{v_{max}} \right|} \quad (2.12)$$

und erhält analog dazu die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \kappa v. \quad (2.13)$$

Anhand dieser Gleichungen (2.12), (2.13) ist es also möglich den Geschwindigkeitsverlauf in Abhängigkeit von der Krümmung zu berechnen. Nun wäre

es theoretisch möglich die Kurve immer mit maximaler Geschwindigkeit, also $u = 1$ (Vergleich 2.14) zu durchfahren. Es müssten lediglich noch die Beschleunigungs- bzw. Bremsphasen berücksichtigt werden.

$$v = \frac{1}{\left| \frac{\kappa}{\omega_{max}} \right| + \left| \frac{1}{v_{max}} \right|} \quad (2.14)$$

Das Problem hierbei ist jedoch die Begrenzung der Winkelbeschleunigung durch das System, die mit der Krümmungsänderung zusammenhängt, denn durch Ableiten der Gleichung (2.13) und Anwenden der Kettenregel der Differentiation, tritt die Ableitung der Krümmung auf. Da diese im Allgemeinen mit der Bahnplanung aus Abschnitt 2.2 nicht vorgegeben werden kann, wäre eine gesonderte Behandlung nötig. Im Rahmen dieser Arbeit soll stattdessen eine einfachere Lösung ausreichen. Dafür wird die maximale Krümmung für einen Splineabschnitt berechnet (siehe Gleichung (3.20)) und als Maximalgeschwindigkeit für diesen vorgegeben. Sie lautet:

$$v_{lim} = \frac{1}{\left| \frac{\kappa_{max}}{\omega_{max}} \right| + \left| \frac{1}{v_{max}} \right|}. \quad (2.15)$$

Je kürzer diese Splineabschnitte für eine Bahn gewählt werden, desto geringer sollte der Einfluss dieser Quantisierung des Geschwindigkeitsmaximums sein.

2.3.2 Trapezförmiger Geschwindigkeitsverlauf

Es sollen nun die Zeitverläufe für den Ortsparameter s der Sollbahn und deren Ableitungen \dot{s} , \ddot{s} berechnet werden. Hinsichtlich des Systems sollten diese mindestens bis zur ersten Ableitung stetig sein. Je glatter der Verlauf, desto größer ist die Gesamtfahrzeit. Darum wird der Geschwindigkeitsverlauf für Stetigkeit bis zur ersten Ableitung, also trapezförmige Rampen, untersucht. Für die Rampen ergeben sich konstante Beschleunigungen, lineare Geschwindigkeitsverläufe und eine quadratische Funktion für den Weg.

Es wird also eine Rampe für die Bedingungen

- Gesamtstrecke d_1
- Maximalgeschwindigkeit v_{max}
- Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \leq v_{max}$
- Endgeschwindigkeit $v_1 \leq v_{max}$

- Startbeschleunigung a_1
- Bremsbeschleunigung $a_2 < 0$

gesucht.

Die folgenden Gleichungen (2.16), (2.17), (2.18) beschreiben die Zeitverläufe von d, v und a . Die Richtung, ob vorwärts oder rückwärts gefahren werden soll, sei im Vorzeichen des Gesamtweges d_1 enthalten.

Weg (vgl. Abbildung 2.6):

$$d(t) = \text{sign}(d_1) \begin{cases} v_0 t + \frac{a_1}{2} t^2 & \text{für } t < t_1 \\ v_0 t_1 + \frac{a_1}{2} t_1^2 + v_{\max}(t - t_1) & \text{für } t_1 < t < t_2 \\ v_0 t_1 + \frac{a_1}{2} t_1^2 + v_{\max}(t - t_1) + \frac{a_2}{2} (t - t_2)^2 & \text{für } t_2 < t < t_3 \end{cases} \quad (2.16)$$

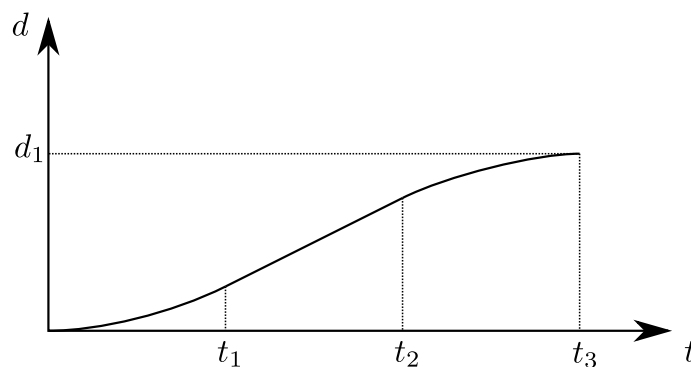


Abbildung 2.6: Wegverlauf

Geschwindigkeit (vgl. Abbildung 2.7):

$$v(t) = \text{sign}(d_1) \begin{cases} v_0 + a_1 t & \text{für } t < t_1 \\ v_{\max} & \text{für } t_1 < t < t_2 \\ v_{\max} + a_2 (t - t_2) & \text{für } t_2 < t < t_3 \end{cases} \quad (2.17)$$

Beschleunigung (vgl. Abbildung 2.8):

$$a(t) = \text{sign}(d_1) \begin{cases} a_1 & \text{für } t < t_1 \\ 0 & \text{für } t_1 < t < t_2 \\ a_2 & \text{für } t_2 < t < t_3 \end{cases} \quad (2.18)$$

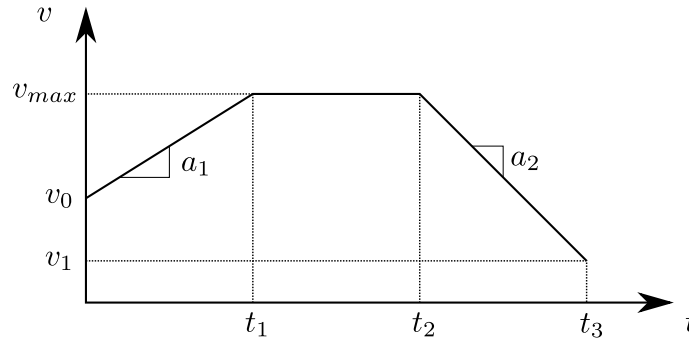


Abbildung 2.7: Trapezförmiger Geschwindigkeitsverlauf

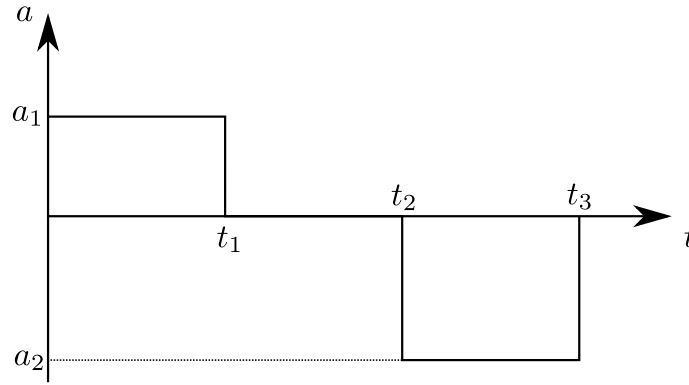


Abbildung 2.8: Beschleunigungsverlauf

In Spezialfällen, z. B. bei kurzen Strecken s , wird v_{max} nicht erreicht, sondern eine kleinere Geschwindigkeit

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{a_1 v_1^2 - a_2 v_0^2 - 2a_1 a_2 |d_1|}{a_1 - a_2}}. \quad (2.19)$$

Um zu vermeiden, dass es den großen Sprung in der Beschleunigung von a_1 auf a_2 gibt, ist es sinnvoll die Maximalgeschwindigkeit zu begrenzen mit

$$v_{max} = k_v v_{lim} \quad \text{mit} \quad k_v \in [0, 1]. \quad (2.20)$$

Dadurch erhält man einen Beschleunigungsverlauf wie in Abbildung 2.8 mit $a = 0$ für $t \in [t_1, t_2]$ und der Beschleunigungssprung ist maximal so groß wie die Vorgaben a_1 bzw. a_2 . Somit erhält man einen gleichmäßigeres Fahrverhalten. Der Faktor $k_v = 0,7$ hat sich bei der Realisierung als günstig erwiesen.

Zur Berechnung der Streckenzeiten t_1, t_2, t_3 werden die Gleichungen in einander eingesetzt.

$$t_1 = \frac{v_{max} - v_0}{a_1} \quad (2.21a)$$

$$t_2 = \frac{(a_2 + a_1)v_{max}^2 - 2a_2v_0v_{max} - a_1v_1^2 + a_2v_0^2 + 2a_1a_2|d_1|}{2a_1a_2v_{max}} \quad (2.21b)$$

$$t_3 = \frac{(a_2 - a_1)v_{max}^2 + 2(a_1v_1 - a_2v_0)v_{max} - a_1v_1^2 + a_2v_0^2 + 2a_1a_2|d_1|}{2a_1a_2v_{max}} \quad (2.21c)$$

Aus den nun erhaltenen Streckenzeiten können für die vorgegebenen Parameter $d_1, v_{max}, v_0, v_1, a_1, a_2$ die entsprechenden Sollwerte $d(t), v(t), a(t)$ für jeden Zeitpunkt von t berechnet werden.

Um daraus den Ortsparameter s der Sollbahn und deren Ableitungen \dot{s}, \ddot{s} zu erhalten, muss wegen $s \in [0, 1]$ die Strecke $d(t)$ auf die Zeit normiert werden. Man erhält

$$s(t) = \frac{d(t)}{d_1} \quad \dot{s}(t) = \frac{v(t)}{d_1} \quad \ddot{s}(t) = \frac{a(t)}{d_1} \quad (2.22)$$

Mit den hergeleiteten Gleichungen kann man nun die gesamte Trajektorie für ein Splinestück berechnen. Ist es aber aufgrund der Pfadplanung nötig die Bahn aus mehreren Splines zusammenzusetzen, so muss zwischen den Maximalgeschwindigkeiten der einzelnen Splinestücke beschleunigt und gebremst werden. Diese Aufgabe wird im nächsten Abschnitt behandelt.

2.3.3 Zusammenfügen mehrerer trapezförmiger Geschwindigkeitsverläufe

Für das Geschwindigkeitsprofil wird mit Gleichung (2.15) zunächst die Maximalgeschwindigkeit für das Spline-Stück ermittelt. Aus den Randbedingungen der Geschwindigkeit am Anfang und am Ende der Bahn und den einzelnen maximalen Geschwindigkeiten sowie der systemeigenen Maximalbeschleunigung kann nun das Geschwindigkeitsprofil für die gesamte Bahn berechnet werden. Dazu sucht man jeweils jene Geschwindigkeit, welche aufgrund der Begrenzungen erreicht werden kann. Für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 gilt für den zurückgelegten Weg

$$d = \frac{a}{2}t^2 + v_0t \quad (2.23)$$

sowie

$$t = \frac{v_1 - v_0}{a} \quad (2.24)$$

mit der Beschleunigung a und der Endgeschwindigkeit v_1 . Durch Einsetzen von Gleichung (2.24) in (2.23) und Umstellen erhält man die maximale Geschwindigkeit, die mit v_0 und a auf dem Weg d erreicht werden kann:

$$v_1 = \sqrt{2ad + v_0^2}. \quad (2.25)$$

Zunächst muss man für jeden Stützpunkt die kleinere Maximalgeschwindigkeit nach Gleichung (2.15) der benachbarten Splineabschnitte auswählen. Anschließend werden ausgehend von den Ruhelagen am Anfang und am Ende für alle Splinestücke die Anfangs- und Endgeschwindigkeiten berechnet. Dazu wird folgende Rechenvorschrift für m Splineabschnitte durchlaufen:

- Vorwärts mit $i = 1 \dots m - 1$:

$$v_{max,i+1} = \min(v_{max,i}, \sqrt{v_{0,i}^2 + |2a_1d_i|}) \quad (2.26)$$

und

- Rückwärts mit $j = m \dots 2$:

$$v_{max,j-1} = \min(v_{max,j}, \sqrt{v_{1,j}^2 + |2a_2d_j|}). \quad (2.27)$$

Dieses Verfahren lässt zwar zu, dass die Splines nicht immer mit ihrer maximal möglichen Geschwindigkeit durchfahren werden, jedoch wird dieses Maximum umso besser erreicht, je konstanter die Krümmung eines Spline-Stückes ist. Bei geeigneter Wahl der Stützpunkte sollte dieser Nachteil also nicht mehr wesentlich sein.

3 Steuerung und Regelung des Fahrzeugs

3.1 Kinematisches Modell

Im Folgenden wird das kinematische Modell des einachsigen Roboters hergeleitet. Die Pose des Roboters lässt sich durch die Koordinaten \mathbf{x} des Achsmittelpunktes zwischen den Antriebsrädern und dessen Orientierung θ beschreiben.

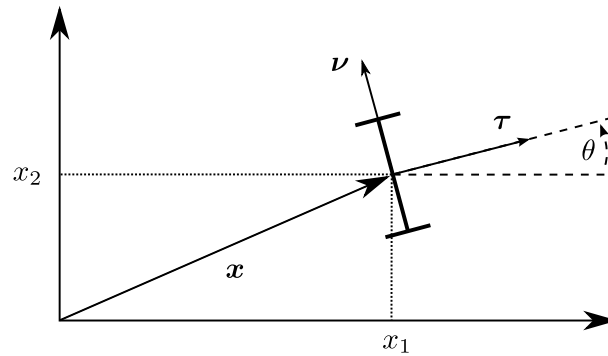


Abbildung 3.1: Robotermodell

Der Robotermittelpunkt liegt zwischen den Antriebsrädern:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Wird angenommen, dass die Räder Rollen ohne zu Gleiten, so kann die folgende Differentialgleichung hergeleitet werden:

$$\dot{x}_1 = v \cos \theta \quad (3.2)$$

$$\dot{x}_2 = v \sin \theta. \quad (3.3)$$

Bei Betrachtung des Modells mit dieser Annahme fällt auf, dass sich das Fahrzeug nur tangential zur Orientierung bewegen kann. Daher werden der

Tangentialvektor $\boldsymbol{\tau}$ und der Normalenvektor $\boldsymbol{\nu}$ eingeführt:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\nu} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

. Für deren Ableitungen gilt:

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\theta} \boldsymbol{\nu} \quad (3.6)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = -\dot{\theta} \boldsymbol{\tau}. \quad (3.7)$$

In Vektorschreibweise erhält man nun die Differentialgleichung

$$\dot{\boldsymbol{x}} = v \boldsymbol{\tau}. \quad (3.8)$$

Die Radgeschwindigkeiten des linken (v_l) und rechten (v_r) Rades berechnen sich mit

$$v_r = v + \frac{b}{2} \dot{\theta} \quad (3.9a)$$

$$v_l = v - \frac{b}{2} \dot{\theta}, \quad (3.9b)$$

wobei b dem Radabstand entspricht (Vergleich Abbildung 3.2).

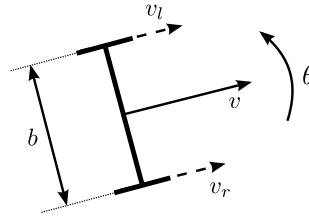


Abbildung 3.2: Radgeschwindigkeiten v_l und v_r

3.2 Flachheitsbasierte Folgeregelung

In diesem Abschnitt soll eine flachheitsbasierte Folgeregelung nach RUDOLPH [2009] für das einachsige Fahrzeug realisiert werden.

3.2.1 Flachheit

Dazu wird zunächst überprüft, ob das System flach ist. Bedingung für Flachheit ist, dass sich alle Systemgrößen aus dem flachen Ausgang und dessen Ableitungen berechnen lassen und dieser differentiell unabhängig ist. In RUDOLPH [2009] wurde bereits ein flacher Ausgang $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ gefunden.

$$\text{translatorische Geschwindigkeit: } v = |\dot{\mathbf{x}}| = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} \quad (3.10a)$$

$$\text{Lenkwinkel: } \theta = \text{atan2}(\dot{x}_2, \dot{x}_1) \quad (3.10b)$$

Die atan2-Funktion ist eine Variation der arctan-Funktion mit dem Wertebereich $[-\pi, \pi]$. Anhand der Gleichungen (3.10) wird klar, dass \mathbf{x} ein flacher Ausgang ist, da sich die Geschwindigkeit und der Lenkwinkel mit der 1. Ableitung $\dot{\mathbf{x}}$ berechnen lassen.

Nach Finden des flachen Ausgangs müssen nun die Eingangsgrößen des Systems gewählt werden. Die Eingangsgrößen sind Systemgrößen, die sich aus Komponenten von \mathbf{x} und deren Ableitungen berechnen lassen und differentiell unabhängig sind. Somit kann gewährleistet werden, dass die Zeitverläufe für die Komponenten der Eingangsgrößen \mathbf{u} voneinander unabhängig und frei gewählt werden können. Beim einachsigen Fahrzeug können translatorische und rotatorische Bewegung unabhängig voneinander vorgegeben und mit Gleichung (3.9) auf die Räder umgerechnet werden. Für das System liegt es also nahe, die Geschwindigkeit v und die Lenkwinkelgeschwindigkeit $\dot{\theta}$ als Eingang zu verwenden. Somit ergibt sich der Eingang

$$\mathbf{u} = (v, \dot{\theta}), \quad (3.11)$$

und das Fahrzeugmodell lautet

$$\dot{x}_1 = u_1 \sin \theta \quad (3.12a)$$

$$\dot{x}_2 = u_1 \cos \theta \quad (3.12b)$$

$$\dot{\theta} = u_2. \quad (3.12c)$$

Die Eingangsgrößen können mit Hilfe von

$$u_1 = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} \quad (3.13a)$$

$$u_2 = \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \dot{x}_2}{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} \quad (3.13b)$$

aus den Ableitungen des flachen Ausgangs \mathbf{x} berechnet werden.

3.2.2 Analyse der Ruhelagen

Im vorherigen Abschnitt wurde ein Eingang gefunden, der differentiell unabhängig ist und nur vom flachen Ausgang \mathbf{x} abhängt. Man erhält die allgemeine Systemdarstellung:

$$\mathbf{u} = A(\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}). \quad (3.14)$$

In RUDOLPH [2009] wird gezeigt, dass es eine Singularität bei $v = 0$ gibt. Dies wird auch mit den Gleichungen (3.10) deutlich, denn die atan2 -Funktion ist für die Argumente $\dot{x}_1 = 0$ und $\dot{x}_2 = 0$ nicht definiert. Deshalb kann das System bei $v = 0$ nicht mehr gesteuert oder geregelt werden. Möchte man jedoch das System ausgehend von einer Ruhelage in eine andere überführen, so muss man diese Singularität umgehen. Eine Möglichkeit ist die Umparametrierung mit der Bogenlänge.

3.2.3 Umparametrierung mit Bogenlänge

Die Singularität bei Geschwindigkeit null kann durch Ersetzen der Zeit mit der Bogenlänge s_d der Solltrajektorie als Kurvenparameter umgangen werden. Der Index d , abgeleitet aus dem englischen „desired“, bedeutet, dass es sich um einen Sollwert handelt. Die Solltrajektorie ist wie folgt definiert:

$$[0, T] \ni t \mapsto (x_{1,d}(t), x_{2,d}(t)). \quad (3.15)$$

Das bestehende Modell

$$\dot{\mathbf{x}} = v\boldsymbol{\tau} \quad (3.16a)$$

$$\dot{\theta} = \kappa v \quad (3.16b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\theta}\boldsymbol{\nu} \quad (3.16c)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = -\dot{\theta}\boldsymbol{\tau} \quad (3.16d)$$

wird nun mit der Kettenregel für Differentiation

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{ds_d} \frac{ds_d}{dt} = \frac{d}{ds_d} \dot{s}_d \quad (3.17)$$

umgeformt zu

$$\mathbf{x}' \dot{s}_d = v\boldsymbol{\tau} \quad (3.18a)$$

$$\theta' \dot{s}_d = \kappa v \quad (3.18b)$$

$$\boldsymbol{\tau}' \dot{s}_d = \dot{\theta} \dot{s}_d \boldsymbol{\nu} \quad (3.18c)$$

$$\boldsymbol{\nu}' \dot{s}_d = -\dot{\theta} \dot{s}_d \boldsymbol{\tau}. \quad (3.18d)$$

Mit Einführung der bezogenen Geschwindigkeit $\bar{u} := \frac{v}{\dot{s}_d}$ lässt sich das Modell aufschreiben:

$$\mathbf{x}' = \bar{u} \boldsymbol{\tau} \quad (3.19a)$$

$$\theta' = \bar{u} \kappa \quad (3.19b)$$

$$\boldsymbol{\tau}' = \theta' \boldsymbol{\nu} \quad (3.19c)$$

$$\boldsymbol{\nu}' = -\theta' \boldsymbol{\tau}. \quad (3.19d)$$

Hierbei wurde die Krümmung κ zur einfacheren Notation eingeführt. Sie bleibt von der Upparametrierung unbeeinflusst.

$$\kappa = \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \dot{x}_2}{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x_1' x_2'' - x_1'' x_2'}{(x_1'^2 + x_2'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.20)$$

Analog gilt für die Solltrajektorie

$$\mathbf{x}'_d = \bar{u}_d \boldsymbol{\tau}_d \quad (3.21a)$$

$$\theta'_d = \bar{u}_d \kappa_d \quad (3.21b)$$

$$\boldsymbol{\tau}'_d = \theta'_d \boldsymbol{\nu}_d \quad (3.21c)$$

$$\boldsymbol{\nu}'_d = -\theta'_d \boldsymbol{\tau}_d. \quad (3.21d)$$

Der Stelleingang \mathbf{u} hängt jetzt nur noch von der zeitlichen Änderung der Bogenlänge ab:

$$u_1 = \dot{s}_d \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2} \quad (3.22a)$$

$$u_2 = \dot{s}_d \frac{x_1' x_2'' - x_1'' x_2'}{x_1'^2 + x_2'^2}. \quad (3.22b)$$

Mit der entwickelten flachheitsbasierten Steuerung wird das Fahrzeug nur dann der Solltrajektorie folgen, sofern das Modell das Fahrzeug exakt beschreibt und keine Störungen auf das System einwirken. Da das System in der Realität stets Störeinflüssen der Umgebung ausgesetzt ist, wird ein Regler entworfen, der den Roboter auf die Trajektorie zurückführt.

Nun versucht man den Reglerentwurf mit Komponenten des flachen Ausgangs \mathbf{x} . Damit der Regler nicht von den raumfesten Koordinaten (x_1, x_2) , also von der aktuellen Position im Raum, abhängt, bezieht man den flachen Ausgang \mathbf{x} auf die Solltrajektorie.

$$x_\tau = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\tau}_d \quad \text{und} \quad x_\nu = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\nu}_d \quad (3.23)$$

bzw.

$$\mathbf{x} = x_\tau \boldsymbol{\tau}_d + x_\nu \boldsymbol{\nu}_d. \quad (3.24)$$

Der Fehler des Roboters (vgl. Abbildung 3.3) bezüglich des Referenzfahrzeugs lautet

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_\tau \\ e_\nu \end{pmatrix} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d = \begin{pmatrix} x_\tau \\ x_\nu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{\tau,d} \\ x_{\nu,d} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

wobei e_τ die Tangentialkomponente, e_ν die Normalkomponente zwischen Referenztrajektorie und der aktuellen Roboterposition ist. Die Winkeldifferenz berechnet man mit

$$\delta = \theta - \theta_d. \quad (3.26)$$

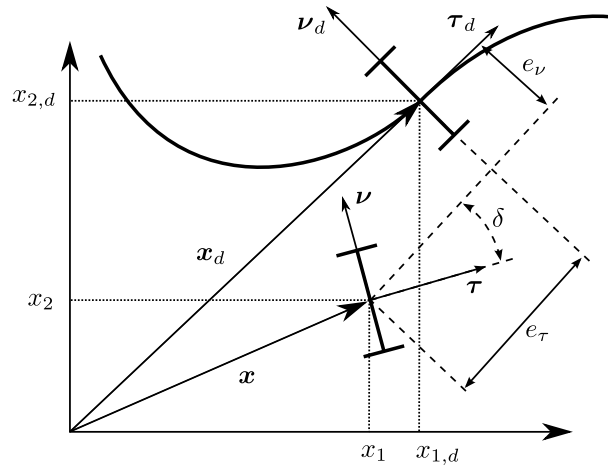


Abbildung 3.3: Fehler zum Referenzfahrzeug

3.2.4 Quasi-statische Zustandsrückführung

Für den Reglerentwurf wird zunächst die Regelungsnormform durch sukzessive Auswahl von Zeitableitungen der Komponenten des flachen Ausgangs aufgestellt. Es wird die Ableitung x'_ν ausgewählt und zum Zustand $\mathbf{z} = (z_{1,1}, z_{2,1}, z_{2,2}) = (x_\tau, x_\nu, x'_\nu)$ hinzugefügt. Die Ableitungen der ersten

beiden Zustände lauten

$$x'_\tau = (\mathbf{x}^T)' \boldsymbol{\tau}_d + \mathbf{x}^T \boldsymbol{\tau}'_d = \bar{u} \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\tau}_d + \mathbf{x}^T (\theta'_d \boldsymbol{\nu}_d) = \bar{u} \cos \delta + \theta'_d x_\nu \quad (3.27a)$$

$$x'_\nu = (\mathbf{x}^T)' \boldsymbol{\nu}_d + \mathbf{x}^T \boldsymbol{\nu}'_d = \bar{u} \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\nu}_d + \mathbf{x}^T (-\theta'_d \boldsymbol{\tau}_d) = \bar{u} \sin \delta - \theta'_d x_\tau \quad (3.27b)$$

mit dem Winkel $\delta = \theta - \theta_d$ zwischen $\boldsymbol{\tau}$ und $\boldsymbol{\tau}_d$ sowie $\boldsymbol{\nu}$ und $\boldsymbol{\nu}_d$. Dabei gelten die Beziehungen

$$\boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\tau}_d = \boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\nu}_d = \cos \delta \quad (3.28)$$

$$\boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\nu}_d = -\boldsymbol{\nu}^T \boldsymbol{\tau}_d = \sin \delta. \quad (3.29)$$

Durch Ableiten erhält man außerdem

$$\delta' = \theta' - \theta'_d. \quad (3.30)$$

Nun kann man auch den dritten Zustand ableiten und erhält

$$x''_\nu = \bar{u}' \sin \delta + \bar{u} \delta' \cos \delta - \theta''_d x_\tau - \theta'_d \bar{u} \cos \delta - \theta'^2_d x_\nu. \quad (3.31)$$

In diesen Gleichungen treten Komponenten des Eingangs auf, jedoch normiert bezüglich der Bogenlängengeschwindigkeit und können so umgerechnet werden:

$$v = \bar{u} \dot{s}_d \quad (3.32)$$

$$\dot{\theta} = \theta' \dot{s}_d \quad (3.33)$$

Schließlich erhält man die folgende gesuchte Regelungsform:

$$z'_{1,1} = \varphi^1(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \theta_d, \theta'_d, \dot{s}_d) \quad (3.34a)$$

$$z'_{2,1} = z_{2,2} \quad (3.34b)$$

$$z'_{2,2} = \varphi^2(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{u}', \theta_d, \theta'_d, \theta''_d, \dot{s}_d). \quad (3.34c)$$

Jetzt kann man den neuen Eingang $\boldsymbol{\omega} = (\omega_\tau, \omega_\nu)$ einführen:

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_\tau, \omega_\nu) = (x'_\tau, x''_\nu). \quad (3.35)$$

Nun gibt man eine stabile Fehlerdynamik für den Fehler e vor, sodass sich in Tangentialrichtung ein stabiles System 1. Ordnung und in Normalenrichtung ein stabiles System 2. Ordnung ergibt:

$$e'_\tau + k_{\tau,0} e_\tau = 0 \quad (3.36a)$$

$$e''_\nu + k_{\nu,1} e'_\nu + k_{\nu,0} e_\nu = 0 \quad (3.36b)$$

Mit der Fehlerdefinition (Gleichung (3.25)) kann man obige Gleichungen nach dem neuen Eingang umstellen und man erhält

$$\omega_\tau = x'_{\tau,d} - k_{\tau,0} (x_\tau - x_{\tau,d}) \quad (3.37a)$$

$$\omega_\nu = x''_{\nu,d} - k_{\nu,1} (x'_\nu - x'_{\nu,d}) - k_{\nu,0} (x_\nu - x_{\nu,d}) \quad (3.37b)$$

$$\omega'_\tau = x''_{\tau,d} - k_{\tau,0} (x'_\tau - x'_{\tau,d}) \quad (3.37c)$$

mit den folgenden Sollwerten aus dem Trajektoriengenerator

$$x_{\tau,d} = \mathbf{x}_d^T \boldsymbol{\tau}_d \quad (3.37d)$$

$$x_{\nu,d} = \mathbf{x}_d^T \boldsymbol{\nu}_d \quad (3.37e)$$

$$x'_{\tau,d} = \mathbf{x}_d^{T'} \boldsymbol{\tau}_d + \mathbf{x}_d^T \boldsymbol{\tau}'_d = \bar{u}_d + \theta'_d x_{\nu,d} \quad (3.37f)$$

$$x'_{\nu,d} = \mathbf{x}_d^{T'} \boldsymbol{\nu}_d + \mathbf{x}_d^T \boldsymbol{\nu}'_d = -\theta'_d x_{\tau,d} \quad (3.37g)$$

$$x''_{\tau,d} = \mathbf{x}_d^{T''} \boldsymbol{\tau}_d + 2\mathbf{x}_d^{T'} \boldsymbol{\tau}'_d + \mathbf{x}_d^T \boldsymbol{\tau}''_d = \bar{u}''_d + \theta''_d x_{\nu,d} - \theta_d'^2 x_{\tau,d} \quad (3.37h)$$

$$x''_{\nu,d} = \mathbf{x}_d^{T''} \boldsymbol{\nu}_d + 2\mathbf{x}_d^{T'} \boldsymbol{\nu}'_d + \mathbf{x}_d^T \boldsymbol{\nu}''_d = -\bar{u}_d \theta'_d - \theta''_d x_{\tau,d} - \theta_d'^2 x_{\nu,d}. \quad (3.37i)$$

Schließlich müssen die Komponenten für den Eingang $(v, \dot{\theta})$ aus dem neuen Eingang $\boldsymbol{\omega} = (\omega_\tau, \omega_\nu)$ berechnet werden. Durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen (3.27) wird δ eliminiert und man erhält:

$$\bar{u} = \sqrt{(x'_\tau - \theta'_d x_\nu)^2 + (x'_\nu + \theta'_d x_\tau)^2} \quad (3.38)$$

Mit $v = u \dot{s}_d$ erhält man die Stellgröße für die Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{(x'_\tau - \theta'_d x_\nu)^2 + (x'_\nu + \theta'_d x_\tau)^2} \dot{s}_d \quad (3.39)$$

Mit Umstellen nach \bar{u} und Gleichsetzen folgt:

$$(x'_\tau - \theta'_d x_\nu) \sin \delta = (x'_\nu + \theta'_d x_\tau) \cos \delta \quad (3.40)$$

Durch Differenzieren erhält man

$$\delta' [(x'_\tau - \theta'_d x_\nu) \cos \delta + (x'_\nu + \theta'_d x_\tau) \sin \delta] = \quad (3.41)$$

$$(x''_\nu + \theta''_d x_\tau + \theta'_d x'_\tau) \cos \delta - \sin \delta (x''_\tau - \theta''_d x_\nu - \theta'_d x'_\nu) \quad (3.42)$$

und mit (3.40)

$$\delta' = \frac{(x''_\nu + \theta''_d x_\tau + \theta'_d x'_\tau) (x'_\tau - \theta'_d x_\nu) - (x'_\nu + \theta'_d x_\tau) (x''_\tau - \theta''_d x_\nu - \theta'_d x'_\nu)}{(x'_\tau - \theta'_d x_\nu)^2 + (x'_\nu + \theta'_d x_\tau)^2} \quad (3.43)$$

Nun kann man mit $\dot{\theta} = \dot{s}_d \theta' = \dot{s}_d(\delta' + \theta'_d)$ den 2. Teil des Eingangs berechnen:

$$\dot{\theta} = \dot{s}_d(\delta' + \theta'_d) \quad (3.44)$$

Die quasi-statische Zustandsrückführung lautet schließlich

$$v = \dot{s}_d \sqrt{(\omega_\tau - \theta'_d x_\nu)^2 + (x'_\nu + \theta'_d x_\tau)^2} \quad (3.45a)$$

$$\dot{\theta} = \dot{s}_d(\delta' + \theta'_d) \quad (3.45b)$$

mit

$$\delta' = \frac{(\omega_\nu + \theta''_d x_\tau + \theta'_d \omega_\tau)(\omega_\tau - \theta'_d x_\nu) - (x'_\nu + \theta'_d x_\tau)(\omega'_\tau - \theta''_d x_\nu - \theta'_d x'_\nu)}{(\omega_\tau - \theta'_d x_\nu)^2 + (x'_\nu + \theta'_d x_\tau)^2}$$

Zusätzlich werden die Größen x_τ, x_ν nach Gleichungen (3.23) und x'_ν benötigt. Letztere erhält man durch Umstellen der Gleichungen (3.27):

$$x'_\nu = (\omega_\tau - \theta'_d x_\nu) \tan \delta - \theta'_d x_\tau \quad (3.46)$$

Hier tritt eine Singularität für $\delta = \frac{\pi}{2}$ auf, die von der Steuerung erkannt und umgangen werden muss, sonst würden die Stellwerte unendlich werden. Eine Möglichkeit wäre die Begrenzung der Winkeldifferenz δ auf ein Maximum von $\frac{\pi}{4}$. Damit dreht das Fahrzeug kontinuierlich in die gewünschte Ausrichtung. An dieser Stelle wird auch klar, warum eine Wahl des Zustandes $z = (x_\tau, x'_\tau, x_\nu)$ für die quasi-statische Zustandsrückführung nicht brauchbar ist. In diesem Falle ergibt sich wegen

$$x'_\tau = (\omega_\nu + \theta'_d x_\tau) \frac{1}{\tan \delta} + \theta'_d x_\nu \quad (3.47)$$

eine Singularität tangential, also in Richtung der Bahn. Das Fahrzeug kann nicht stabilisiert werden. Ein System ohne Singularitäten hingegen erhält man mit dynamischer Zustandsrückführung.

3.2.5 Dynamische Zustandsrückführung

Neben der Wahl der quasi-statischen Zustandsrückführung, kann man auch Fehlerdifferentialgleichungen höherer Ordnung wählen, die gleichzeitig eine höhere Dynamik zur Folge haben. Verwendet man für die Tangential- und Normalrichtung Differentialgleichungen zweiter Ordnung so verhält sich der Regler wie zwei entkoppelte stabile Oszillatoren der Form

$$\ddot{e} + 2D\omega_0 \dot{e} + \omega_0^2 e = 0 \quad (3.48)$$

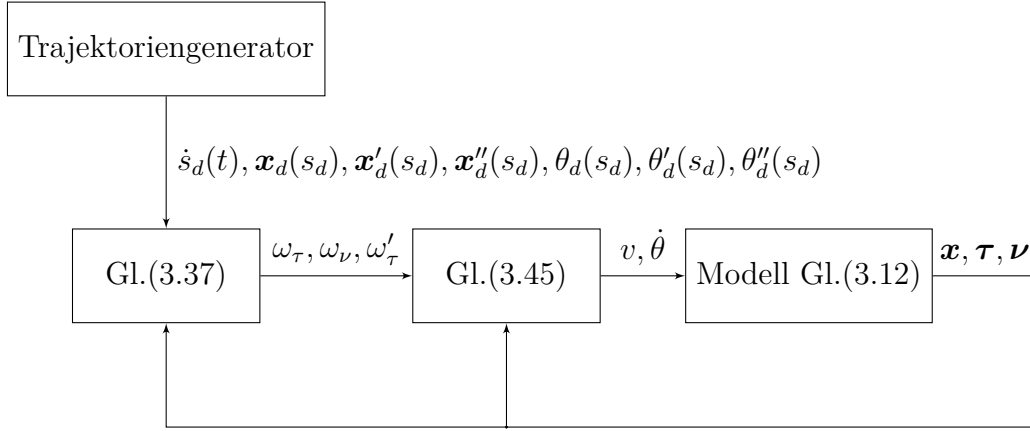


Abbildung 3.4: Signalflussdiagramm für die quasi-statische Folgeregelung des Fahrzeugs

mit positiver Dämpfung D und der Eigenfrequenz des ungedämpften Systems ω_0 . Die charakteristische Gleichung lautet

$$s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2 = 0 \quad (3.49)$$

mit den Lösungen

$$s_{1,2} = -D\omega_0 \pm \sqrt{D^2\omega_0^2 - \omega_0^2} = \omega_0 \left(-D \pm \sqrt{D^2 - 1} \right). \quad (3.50)$$

Für $D = 1$ ergibt sich der aperiodische Grenzfall, da dann die Wurzel zu Null wird. Somit kehrt der Oszillator ohne periodisches Schwingen in minimaler Zeit zur Ruhelage zurück. Dieser Fall ist ideal für die Folgeregelung. Durch Vergleich mit den Fehlerdifferentialgleichungen zweiter Ordnung

$$e_\tau'' + k_{\tau,1}e_\tau' + k_{\tau,0}e_\tau = 0 \quad (3.51)$$

$$e_\nu'' + k_{\nu,1}e_\nu' + k_{\nu,0}e_\nu = 0 \quad (3.52)$$

erhält man

$$k_0 = \omega_0^2 \quad (3.53a)$$

$$k_1 = 2\omega_0 \quad (3.53b)$$

und für den aperiodischen Grenzfall folgt daraus eine Abhängigkeit der Regelparameter. Durch Wahl der Eigenfrequenz ω_0 können nun die Regelverstärkungen für das Teilsystem ermittelt werden.

Durch Hinzufügen der Ableitung x'_τ zum Zustand $\mathbf{z} = (z_{1,1}, z_{1,2}, z_{2,1}, z_{2,2}) = (x_\tau, x'_\tau, x_\nu, x'_\nu)$ erhält man folgende Regelungsform:

$$z'_{1,1} = z_{1,2} \quad (3.54a)$$

$$z'_{1,2} = \varphi^1(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \theta_d, \theta'_d, \theta''_d, \dot{s}_d) \quad (3.54b)$$

$$z'_{2,1} = z_{2,2} \quad (3.54c)$$

$$z'_{2,2} = \varphi^2(\mathbf{z}, \mathbf{u}, \theta_d, \theta'_d, \theta''_d, \dot{s}_d) \quad (3.54d)$$

Für den neuen Eingang $\boldsymbol{\omega} = (\omega_\tau, \omega_\nu) = (z'_{1,2}, z'_{2,2})$ ergibt sich damit

$$\omega_\tau = x''_{\tau,d} - k_{\tau,1} (x'_\tau - x'_{\tau,d}) - k_{\tau,0} (x_\tau - x_{\tau,d}) \quad (3.55a)$$

$$\omega_\nu = x''_{\nu,d} - k_{\nu,1} (x'_\nu - x'_{\nu,d}) - k_{\nu,0} (x_\nu - x_{\nu,d}) \quad (3.55b)$$

Die Zustände \mathbf{z} werden mit den Gleichungen (3.23) und (3.27) berechnet. Zugrunde liegt das folgende Modell, aus dem die erforderlichen Größen hervorgehen.

$$\dot{x}_1 = v \sin \theta \quad (3.56a)$$

$$\dot{x}_2 = v \cos \theta \quad (3.56b)$$

$$\dot{\theta} = u_1 \quad (3.56c)$$

$$\dot{v} = u_2 \quad (3.56d)$$

Im Vergleich zum ersten Modell (3.12) wurde eine vierte Gleichung hinzugefügt, sodass nun die Beschleunigung im Eingang auftaucht. Die Integration dieser Größe wird im Regler realisiert. Nun lässt sich also der ursprüngliche Eingang $(\dot{v}, \dot{\theta})$ aus dem Zustand und dem neuen Eingang rekonstruieren. Zunächst wird mit der Kettenregel die Geschwindigkeit $v = \dot{s}_d \bar{u}$ abgeleitet. Man erhält:

$$u_1 = \dot{\theta} = \dot{s}_d (\delta' + \theta'_d) \quad (3.57)$$

$$u_2 = \dot{v} = \ddot{s}_d \bar{u} + \dot{s}_d^2 \bar{u}' \quad (3.58)$$

mit

$$\delta = \theta - \theta_d$$

$$\delta' = \frac{1}{\bar{u}} [\cos \delta (\omega_\nu + \theta''_d x_\tau + \theta'_d x'_\tau) - \sin \delta (\omega_\tau - \theta''_d x_\nu - \theta'_d x'_\nu)].$$

Die Größe \bar{u}' kann durch Ableiten nach s_d berechnet werden.

$$\bar{u}' = \frac{(x'_\tau - \theta'_d x'_\nu)(x''_\tau - \theta''_d x'_\nu - \theta'_d x'_\nu) + (x'_\nu + \theta'_d x_\tau)(x''_\nu + \theta''_d x_\tau + \theta'_d x'_\tau)}{\sqrt{(x'_\tau - \theta'_d x'_\nu)^2 + (x'_\nu + \theta'_d x_\tau)^2}} \quad (3.59)$$

Mit den Gleichungen (3.23), (3.38) und Einsetzen des neuen Eingangs $\omega = (\omega_\tau, \omega_\nu)$ kann der Ausdruck vereinfacht werden zu:

$$\bar{u}' = \cos \delta (w_\tau - \theta''_d x'_\nu - \theta'_d x'_\nu) + \sin \delta (w_\nu + \theta''_d x_\tau + \theta'_d x'_\tau) \quad (3.60)$$

Für die Stellwerte $(\dot{v}, \dot{\theta})$ muss schließlich noch die Beschleunigung \dot{v} aus Gleichung (3.58) integriert werden. Aufgrund dieser Integration und der daraus abgeleiteten internen Dynamik des Reglers spricht man von einer dynamischen Zustandsrückführung.

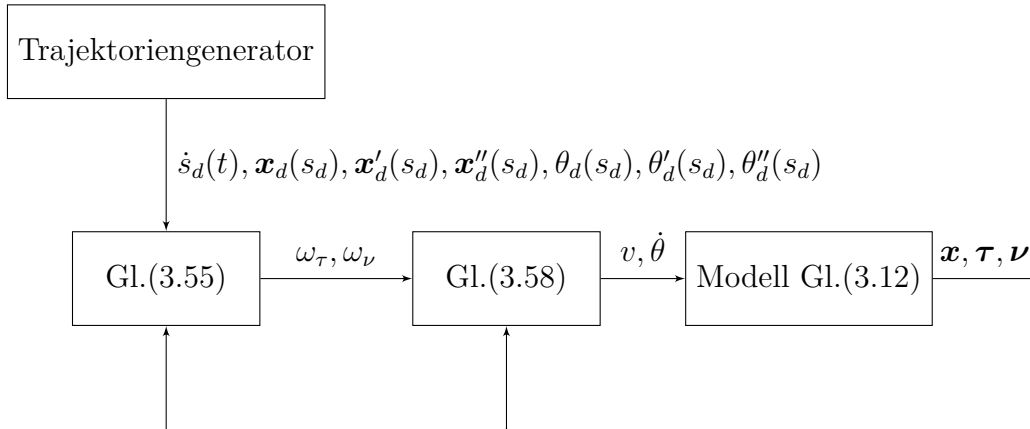


Abbildung 3.5: Signalflussdiagramm für die dynamische Folgeregelung des Fahrzeugs

3.3 Methode zur stabilen Folgeregelung nach KANAYAMA et al. [1990]

Neben dem flachheitsbasierten Ansatz wurde vergleichend auch die nichtlineare Methode zur Folgeregelung von Y. Kanayama und Y. Kimura implementiert. In KANAYAMA et al. [1990] stellen die Autoren eine stabile Regelungsmethode

zur Trajektorienfolge vor. Sei nun

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

die Pose des Fahrzeugs und

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} v \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

den Vektor der Geschwindigkeit, so gilt:

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{J} \mathbf{q}. \quad (3.63)$$

Das Fahrzeug mit den Koordinaten $\mathbf{p}(t)$ soll dabei einer glatten Referenztrajektorie $\mathbf{p}_d(t)$ folgen (siehe Abbildung 3.6).

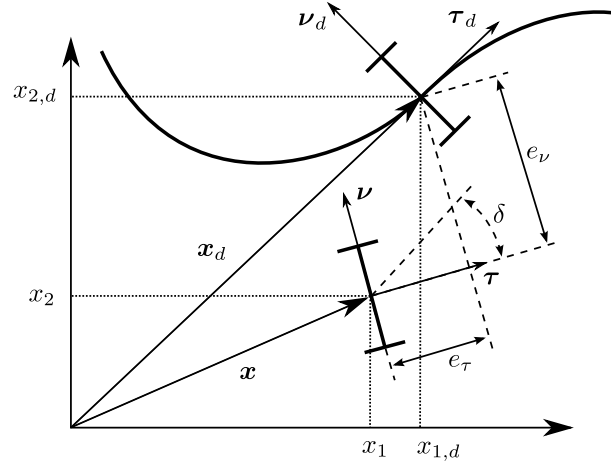


Abbildung 3.6: Fehler zum Referenzfahrzeug nach KANAYAMA et al. [1990]

Anhand von Abbildung 3.6 kann man nun den Fehler \mathbf{e} definieren. Im Gegensatz zur flachheitsbasierten Folgeregelung wird in KANAYAMA et al. [1990] der Fehler \mathbf{e} über das mit bewegte Koordinatensystem definiert:

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_\tau \\ e_\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) = \boldsymbol{\tau} e_\tau + \boldsymbol{\nu} e_\nu. \quad (3.64)$$

Schließlich wird in KANAYAMA et al. [1990] ein Regelgesetz¹ für einen geschlossenen Regelkreis postuliert

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} v(\mathbf{e}, \mathbf{q}_d) \\ \dot{\theta}(\mathbf{e}, \mathbf{q}_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_d \cos \delta - K_\tau e_\tau \\ \dot{\theta}_d - v_d(K_\nu e_\nu + K_\theta \sin \delta) \end{pmatrix}, \quad (3.65)$$

wobei die Reglerkoeffizienten K_τ, K_ν, K_θ positive reelle Zahlen sind.

Der erste Summand stellt jeweils die Geschwindigkeitsvorsteuerung dar. Bei einem tangentialen Fehler e_τ wird die Geschwindigkeit v angepasst. Der normale Fehler e_ν sorgt für eine entsprechende Winkelgeschwindigkeitskomponente. Ein Winkelfehler δ schwächt die tangentielle Geschwindigkeit mit der Kosinusfunktion und sorgt mit der Sinusfunktion für zusätzliche Winkelgeschwindigkeit.

3.3.1 Ljapunov-Stabilität

In KANAYAMA et al. [1990] wurde bereits gezeigt, dass das Regelgesetz (3.65) für positive Referenzgeschwindigkeiten $v_d > 0$ asymptotische Stabilität nach Ljapunov besitzt. Dies soll nun mit der Methode nach Ljapunov nachvollzogen werden. Dazu wird die in VIDYASAGAR [1978] vorgeschlagene Ljapunov-Funktion V angesetzt:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \alpha (1 - \cos \delta) \quad \text{mit} \quad \alpha > 0. \quad (3.66)$$

V ist positiv definit, denn V ist eine stetig differenzierbare Funktion mit $V(\mathbf{e} = 0) = 0$ und $V(\mathbf{e} \neq 0) > 0$. Durch Ableiten erhält man zunächst

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{e} + \alpha \sin(\delta) \dot{\delta}. \quad (3.67)$$

Für die Ableitungen der Fehler gilt:

$$\dot{\delta} = \dot{\theta} - \dot{\theta}_d \quad (3.68)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_d = v \boldsymbol{\tau} - v_d \boldsymbol{\tau}_d \quad (3.69)$$

Setzt man diese Fehlerableitungen in \dot{V} ein so erhält man unter Verwendung von den Gleichungen (3.29)

$$\dot{V} = v e_\tau - v_d e_\tau \cos \delta + v_d e_\nu \sin \delta + \alpha \sin(\delta) (\dot{\theta} - \dot{\theta}_d) \quad (3.70)$$

$$= e_\tau [v - v_d \cos \delta] + \sin \delta [v_d e_\nu + \alpha (\dot{\theta} - \dot{\theta}_d)]. \quad (3.71)$$

¹In KANAYAMA et al. [1990] wurde der Fehler negativ definiert. Deshalb treten hier andere Vorzeichen auf.

Schließlich wird nach Ljapunov ein stabiles Regelgesetz gefunden indem für \dot{V} die Bedingung $\dot{V} \leq 0$ und negative Definitheit vorausgesetzt wird. Dazu werden die Stellgrößen so gewählt, dass die Ausdrücke in eckigen Klammern in Gleichung (3.71) negativ werden. Die Stellgrößen $(v, \dot{\theta})$ werden wie folgt gewählt:

$$v = v_d \cos \delta - K_\tau e_\tau \quad (3.72)$$

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_d - \frac{1}{\alpha} (v_d e_\nu + \beta \sin \delta) \quad \text{mit} \quad \beta > 0. \quad (3.73)$$

Das Regelgesetz (3.65) erhält man durch Umstellen von Gleichung (3.73) mit den Koeffizienten $K_\nu = \frac{1}{\alpha}$ und $K_\theta = \frac{\beta}{\alpha v_d}$. Hierbei ist zu beachten, dass $v_d > 0$ sein muss. Setzt man die Stellgrößen in Gleichung (3.71) ein, so sieht man, dass \dot{V} negativ definit ist:

$$\dot{V} = -K_\tau e_\tau - \beta \sin^2 \delta \quad (3.74)$$

bzw.

$$\dot{V} = -K_\tau e_\tau - \frac{K_\theta}{K_\nu} v_d \sin^2 \delta. \quad (3.75)$$

3.3.2 Wahl der Reglerkoeffizienten

Aus den Betrachtungen KANAYAMA et al. [1990] geht ebenfalls eine Richtlinie zur Wahl der Reglerkoeffizienten hervor:

$$K_\theta^2 = 4K_\nu \quad (3.76)$$

Hierbei wurde eine kritische Dämpfung von eins angenommen, sodass ein Aufschwingen verhindert wird.

4 Simulation und Implementierung

4.1 MATLAB-Simulation

Zunächst wurden die theoretischen Ergebnisse in einer MATLAB-Simulation realisiert und getestet. Somit konnten die Ansätze zur Folgeregelung überprüft und deren stabiles Verhalten simulativ nachgewiesen werden. Das Fahrzeugmodell wurde als reiner Integrator mit der *ode45*-Funktion¹ zunächst ohne Störungen simuliert. Als Simulationsparameter wurden für die Referenzplattform typische Werte gewählt, die bereits mit der Kaskadenregelung realisiert wurden. In den Folgenden Abbildungen wurde das Fahrzeug aus der Ruhelage in $\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 \text{ mm} \\ 0 \text{ mm} \\ 0^\circ \end{pmatrix}$ in eine Ruhelage in $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1000 \text{ mm} \\ 1000 \text{ mm} \\ 0^\circ \end{pmatrix}$ überführt. Weitere

Parameter sind $v_{max} = 1000 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$, $\omega_{max} = 320 \frac{\text{Grad}}{\text{s}}$ und $a_1 = -a_2 = 1800 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ sowie die Abtastzeit von $T_A = 10 \text{ ms}$. Da für die Überführung von \mathbf{p}_0 nach \mathbf{p}_1 ohne Hindernisse keine weiteren Stützpunkte nötig sind, wurde ein Catmull-Rom Spline dritter Ordnung benutzt.

Ein Beweis für die Richtigkeit der Berechnungen in der Implementierung ist die reine Steuerung des Systems, das heißt alle Reglerkoeffizienten werden auf Null gesetzt. In diesem Falle sollte das Fahrzeug der Solltrajektorie sehr gut folgen können. Der einzige Fehler tritt durch die numerische Integration (*ode45*-Funktion) auf. Er zeigt sich durch die zunehmende Abweichung des Fahrzeugs zur Solltrajektorie.

In den Abbildungen 4.1 ist erkennbar, dass die flachheitsbasierte Steuerung mit quasi-statischem Ansatz bereits sehr gute Ergebnisse erzielt. Die Methode nach KANAYAMA et al. [1990] bleibt vor dem Ziel stehen, während die flachheitsbasierte Steuerung mit dynamischem Ansatz über das Ziel hinaus fährt. Diese Fehler entstehen durch die numerische Integration der *ode45*-Funktion und können entweder mit einer besseren Approximation oder geeigneter Wahl der Reglerkoeffizienten, also Schließen des Reglerkreises, deutlich minimiert werden.

Bei der Einstellung der Reglerkoeffizienten werden zunächst, sofern keine

¹Die *ode45*-Funktion realisiert die numerische Integration nach dem Runge-Kutta Verfahren.

weiteren Einschränkungen vorliegen, kleine Werte um Eins versucht und langsam gesteigert. Dieses Vorgehen ist bei den Koeffizienten K_ν und K_θ nach KANAYAMA et al. [1990] nicht möglich, da die Größenordnung von K_ν nur unter 10^{-4} sinnvoll ist. Die Reglerverstärkung für K_θ ergibt sich dann nach Gleichung (3.76) oder Vielfachen davon:

$$K_\theta = \hat{k}_\theta \cdot 2\sqrt{K_\nu} \quad (4.1)$$

In der Simulation haben sich die Koeffizienten

$$K_\tau = 10 \quad (4.2)$$

$$K_\nu = 0.0002 \quad (4.3)$$

$$K_\theta = 2\sqrt{K_\nu} = 0.02828 \quad (4.4)$$

als günstig erwiesen.

Die Koeffizienten der Stabilisierungen 2. Ordnung der flachheitsbasierten Folgeregelung wurden für den aperiodischen Grenzfall des harmonischen Oszillators nach Gleichung (3.53b) eingestellt. Das betrifft den tangentialen und normalen Regler der dynamischen Zustandsrückführung, aber nur den normalen Fehler der quasi-statischen Zustandsrückführung. Hierbei ist also lediglich die Eigenfrequenz ω_0 einzustellen. In der Simulation haben sich

$$k_\tau = 10 \quad (4.5)$$

$$\omega_{0,\nu} = 10 \quad (4.6)$$

für die quasi-statische Zustandsrückführung, und

$$\omega_{0,\tau} = 20 \quad (4.7)$$

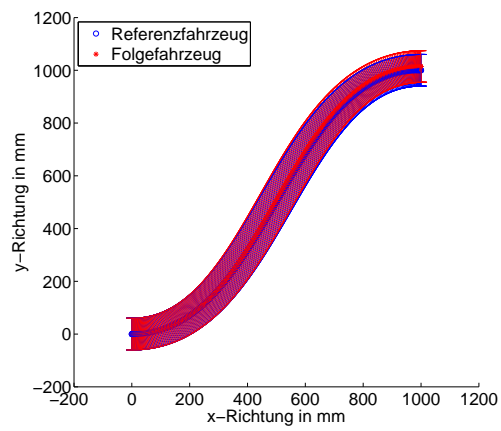
$$\omega_{0,\nu} = 20 \quad (4.8)$$

für die dynamische Zustandsrückführung als geeignet erwiesen. Abbildung 4.2 zeigt, dass die Regelung den numerischen Integrationsfehler ausregelt. Bei der Implementierung auf der Referenzplattform konnten diese Erkenntnisse genutzt werden und die Reglerverstärkungen der Simulation stellten sich als gute Startwerte heraus.

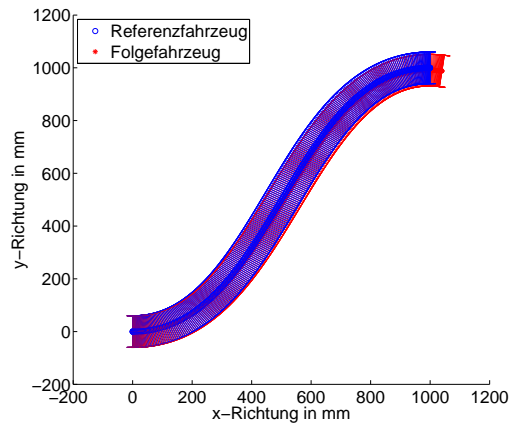
Sind die Fehler nur noch auf die numerische Integration zurückzuführen, so können zusätzliche Störungen getestet werden. Trotz verschiedener Störungen zeigte das System ein stabiles Verhalten (siehe Abbildungen 4.3, 4.4, 4.5). Zunächst wurde untersucht, ob das Fahrzeug bei einem Anfangsfehler von

$y = 200$ mm auf die Trajektorie zurückfindet. Diese Überprüfung ist rein theoretischer Natur, da die Bahn immer ausgehend von der aktuellen Pose geplant wird. In Abbildung 4.3 kann man erkennen, dass alle 3 Regelungsmethoden diesen Fehler ausregeln und anschließend der Trajektorie folgen.

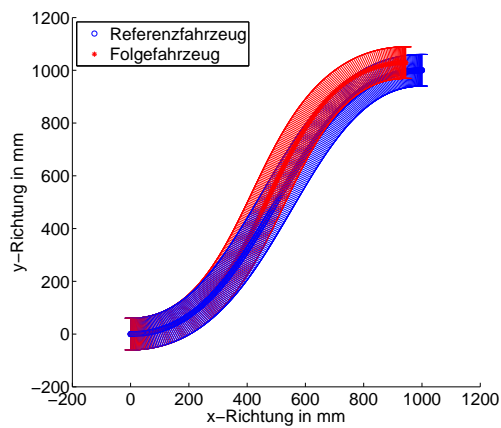
In der Simulation wurden zusätzliche Tangential- (siehe 4.4) sowie Winkelbeschleunigungen (siehe 4.5) aufgeschaltet, die von außen angreifende Kräfte simulieren sollen. Hierbei wurden eine Tangentialbeschleunigung von $a = 1800 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$ und eine Winkelbeschleunigung $\alpha = 3200 \frac{\text{Grad}}{\text{s}^2}$ jeweils im Zeitintervall $t \in [1\text{s}; 1.5\text{s}]$ positiv und im Zeitintervall $t \in [1.5\text{s}; 2\text{s}]$ negativ addiert. Zunächst ist es auffällig, dass bereits die Beschleunigungs- und Bremsphasen bei $t \in [0\text{s}; 0.35\text{s}]$ und $t \in [2.35\text{s}; 2.7\text{s}]$ zu geringen Fehlern führen. Somit kommt es zu großen tangentialen Fehlern insbesondere am Ende der Trajektorie. Eine Störkraft in Tangentialrichtung zeigt bei der flachheitsbasierten Folgeregelung mit quasi-statischer Rückführung den geringsten Einfluss. Eine rotatorische Störkraft hingegen wird von der Methode nach KANAYAMA et al. [1990] am besten ausgeregelt. Während die aufgeschalteten Störungen bei den flachheitsbasierten Ansätzen durch Knicke deutlich hervortreten, zeigt die Methode nach KANAYAMA et al. [1990] eine stärkere Abhängigkeit von der Krümmung der Kurve und damit verbundene Fehler.



(a) Steuerung mit quasi-statischem Ansatz

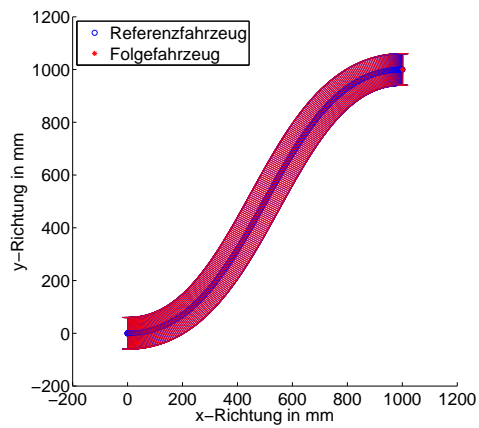


(b) Steuerung mit dynamischen Ansatz

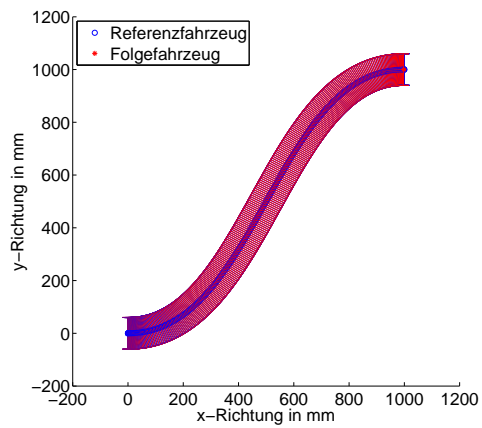


(c) Steuerung nach Kanayama, Y.

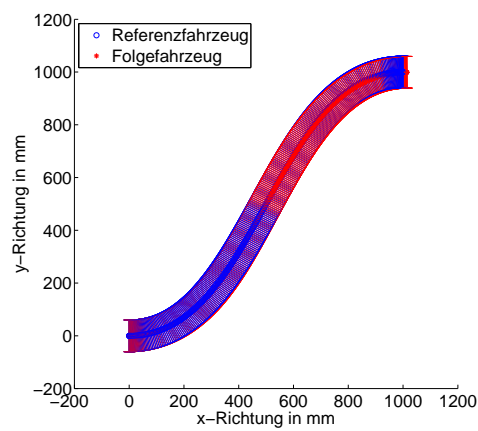
Abbildung 4.1: Steuerung



(a) Quasi-statische Zustandsrückführung

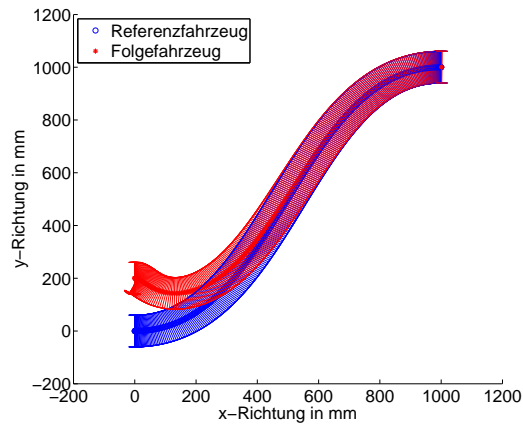


(b) Dynamische Zustandsrückführung

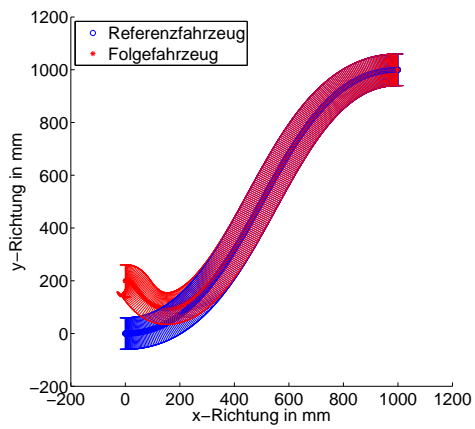


(c) Folgeregelung nach Kanayama, Y.

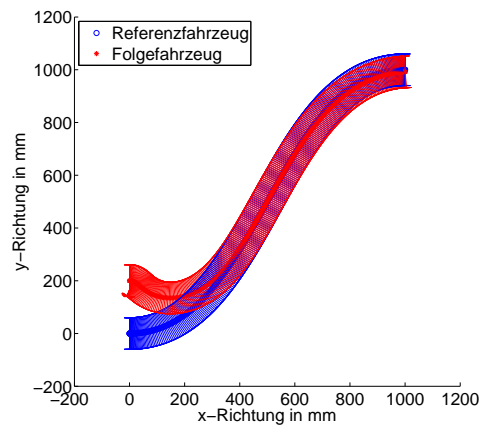
Abbildung 4.2: Regelung ohne Störungen



(a) Quasi-statische Zustandsrückführung



(b) Dynamische Zustandsrückführung



(c) Folgeregelung nach Kanayama, Y.

Abbildung 4.3: Anfangsfehler $y = 200$ mm

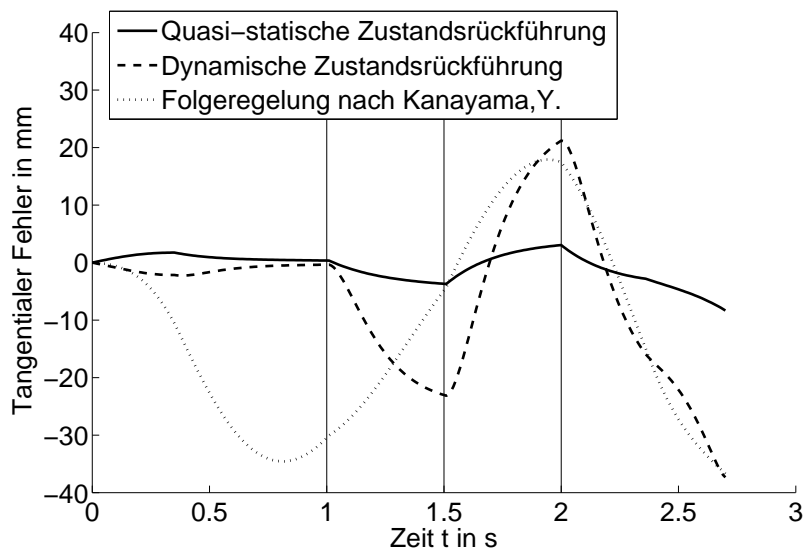


Abbildung 4.4: Tangentialer Fehler durch Störung in Tangentialbeschleunigung $a = 1800 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$ positiv im Intervall $t \in [1\text{s}; 1.5\text{s}]$ und negativ im Intervall $t \in [1.5\text{s}; 2\text{s}]$

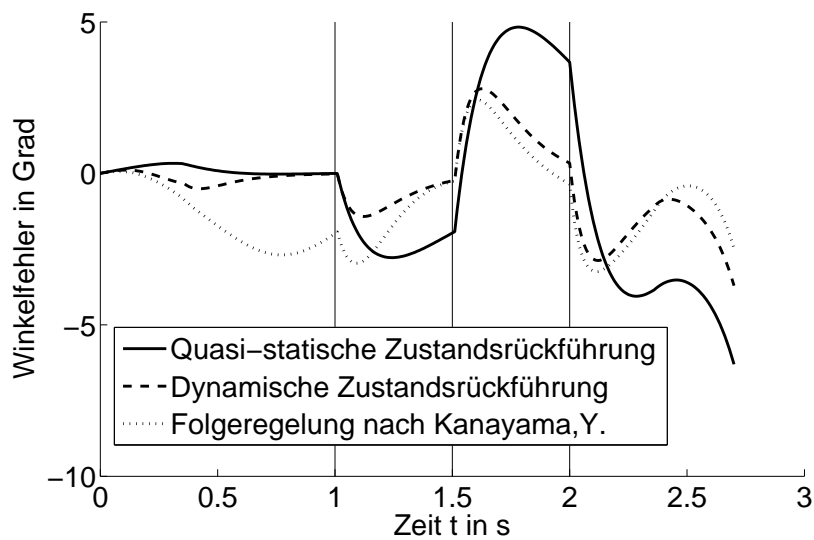


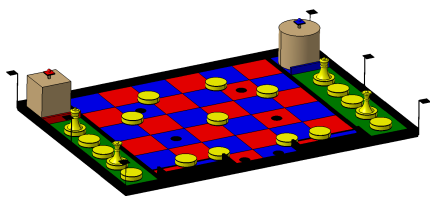
Abbildung 4.5: Winkelfehler durch Störung in Winkelbeschleunigung $\alpha = 3200 \frac{\text{Grad}}{\text{s}^2}$ positiv im Intervall $t \in [1\text{s}; 1.5\text{s}]$ und negativ im Intervall $t \in [1.5\text{s}; 2\text{s}]$

5 Experimentelle Untersuchung auf einer Referenzplattform

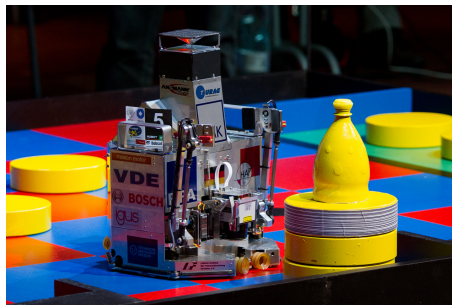
Zum Test und Vergleich der Folgeregelungsmethoden wurden sie auf dem Roboter „Scrat“ der TU Dresden Robotik AG (TURAG) implementiert.

5.1 TURAG-Roboter

Der Roboter „Scrat“ wurde für den internationalen Roboterwettbewerb EUROBOT 2011 entwickelt und gebaut. Die Aufgabe bei dem Spiel „Chess-Up“ bestand darin in 90 Sekunden Spielzeit zylinderförmige Könige, Damen und Bauern auf die richtigen Felder des schachbrettartigen Spielfeld zu platzieren. Es spielten stets zwei Roboter zur gleichen Zeit gegeneinander.



(a) Spielfeld Eurobot 2011



(b) Roboter „Scrat“

Abbildung 5.1: Eurobot

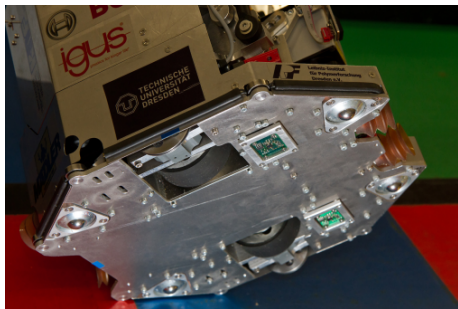
Das Antriebssystem (5.2) von „Scrat“ ist differentiell aufgebaut. Die Achse liegt mittig und 4 federnd gelagerte Kugelrollen verhindern das Kippen. Die Odometrie ist durch zwei mitlaufende Räder realisiert, die für die Unempfindlichkeit gegenüber Bodenunebenheiten durch Federn auf dem Untergrund gehalten werden. Inkrementalgeber zählen die Radumdrehungen und damit den gefahrenen Weg. Farbsensoren, die das Schachbrettmuster auf dem Spielfeld (siehe 5.1) nutzen, sorgen für die Korrektur der Position. Die Antriebsregelung besteht aus einer dreistufigen Kaskadenregelung. Die unterste Stufe ist eine

Stromregelung wofür der Motorstrom gemessen wird. Aufgrund der Abtastzeit $T_A = 10 \text{ ms}$ wurden zeidiskrete Regler implementiert. Als Stromregler wurde wegen seiner kurzen Ausregelzeit ein Deadbeat-Regler nach FRÖHLICH [2008] verwendet. Die nachfolgenden Kaskadenstufen stabilisieren die Geschwindigkeit und den Weg, wobei der Weg über die Odometrierräder gemessen und die Geschwindigkeit durch Differenzieren berechnet wird. Sie sind mit diskreten PID-Reglern realisiert. Wegen der Beziehung

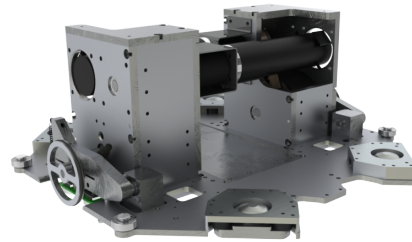
$$v = \frac{1}{2}(v_r + v_l) \quad (5.1)$$

$$\omega = b(v_r - v_l) \quad (5.2)$$

nach Gleichung (3.9) wurde jeweils ein Regler für die rotatorische und die translatorische Komponente implementiert. Die Software läuft auf einem Atmel AT91SAM7x-Controller. Weiterhin war die Reibung zwischen den



(a) Unterseite Roboter „Scrat“



(b) Antriebseinheit

Abbildung 5.2: Antriebssystem des Roboters „Scrat“

Rädern und dem Untergrund eine wichtige Einflussgröße. Die Reifen des Roboters „Scrat“ haben kein Profil und bestehen aus einer relativ harten Gummimischung die denen von LKW-Reifen ähnelt. Staub und Schmutz sorgten für stark variierende Reibungsverhältnisse, sodass es zum Rutschen kam. Daher mussten die Räder während der Tests stets sauber gehalten werden.

5.2 Ergebnisse

Zum Vergleich der Simulationsergebnisse mit den von der Odometrie des Roboters erhaltenen Messergebnissen, wurden die gleiche Trajektorie und

Anfangsbedingungen wie in Kapitel 4 gewählt. Wie aus den folgenden Ergebnissen erkennbar ist, weisen alle drei Regelungsmethoden ein stabiles Verhalten auf. In Abbildung 5.3 sind die Fehler in tangentialer, normaler und rotatorischer Richtung der drei Regelungsmethoden gegenübergestellt. Es fällt auf, dass die Fehler wie auch schon in der Simulation insbesondere in der Beschleunigungs- und Bremsphase bei $t \in [0s; 0.35s]$ und $t \in [2.35s; 2.7s]$ relativ groß ist. Grund hierfür sind die systeminternen Totzeiten, die auch die Steuerung des Fahrzeugs verzögern. Mit einer Vorsteuerung des Stromes in der Kaskadenregelung oder schnelleren Reglern könnte man diese Störung reduzieren. Außerdem ist in den Graphen die Funktionsweise der Folgeregelung sehr gut erkennbar. Zu Beginn in der Beschleunigungsphase bleibt das Fahrzeug hinter dem Referenzfahrzeug zurück. Daher treten Abweichungen in der Tangentialrichtung- und Normalenrichtung aufgrund der Krümmung der Kurve auf. Um diese zu kompensieren lenkt das Fahrzeug in Richtung der Solltrajektorie und verursacht damit einen Winkelfehler. Erst wenn der Normalfehler wieder sehr klein ist, sinkt auch der Winkelfehler. Bei etwa $t = 2s$ kommt es erneut zu einem negativen Normalfehler, woraufhin das Fahrzeug einlenkt und vom Sollwinkel abweicht.

Quantitativ liegen die Fehler unterhalb der in Kapitel 4 simulierten Störungen (siehe 4.4, 4.5). Während sich die flachheitsbasierten Regelungsvarianten kaum voneinander unterscheiden, zeigt die Methode nach KANAYAMA et al. [1990] ein anderes Verhalten mit größeren Normalabweichungen. Insgesamt liegen die Fehler in den akzeptablen Schranken von $|e_\tau| < 12 \text{ mm}$, $|e_\nu| < 3 \text{ mm}$ und $|\delta| < 4 \text{ Grad}$. Zum Vergleich der Simulation mit der Realisierung auf dem Roboter „Scrat“ wurde die Folgeregelung mit einem Anfangsfehler von $y = 200 \text{ mm}$ in Normalenrichtung durchgeführt und dabei jeweils die gleichen Reglerkoeffizienten gewählt. Abbildung 5.4 zeigt für die drei Regelungsansätze jeweils sehr ähnliche Ergebnisse, wobei die flachheitsbasierte Folgeregelung mit dynamischer Zustandsrückführung am besten mit den Simulationsergebnissen übereinstimmt. Bei der Methode nach KANAYAMA et al. [1990] stellten sich im Gegensatz zur Simulation die Reglerkoeffizienten

$$K_\tau = 10 \tag{5.3}$$

$$K_\nu = 0.00006 \tag{5.4}$$

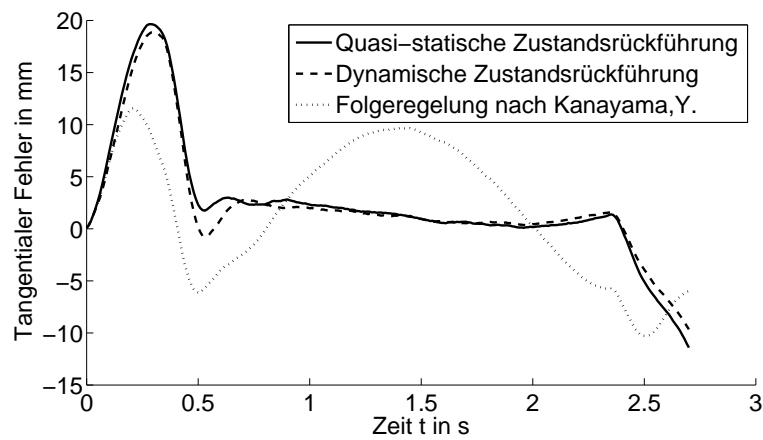
$$K_\theta = 2\sqrt{K_\nu} = 0.01549 \tag{5.5}$$

als besser heraus.

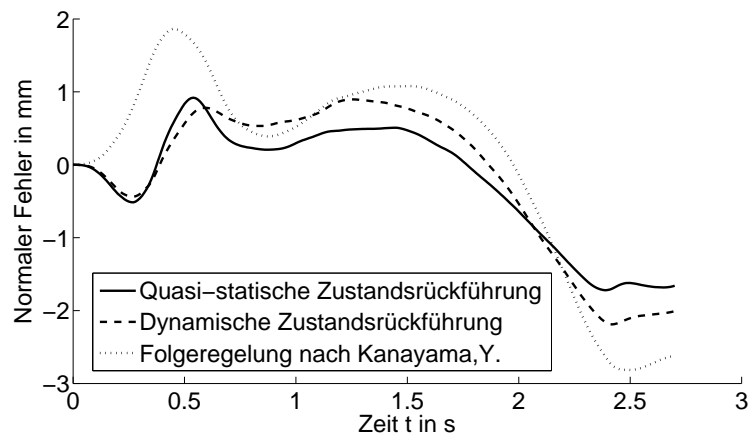
Für die Hindernisumfahrung sind meist komplexere Trajektorien, die aus mehreren Stützpunkten bestehen, nötig. Hierfür werden nun Kurven fünfter

Polynomordnung verwendet, sodass die Winkelgeschwindigkeit an den Stützpunkten nicht springt (siehe Abschnitt 2.2.3 in Kapitel 2). Solche Bahnen haben meist eine größere Krümmung als beispielsweise Kurven dritter Ordnung, da an den Stützpunkten die Winkelbeschleunigung gleich sein muss. Meist ist auch die Maximalgeschwindigkeit geringer, da sie von der maximalen Krümmung des Spline-Stückes abhängt (siehe Gleichung (2.15)). In Abbildung 5.5 wird gezeigt, wie das Fahrzeug mit der flachheitsbasierten Folgeregelung und dynamischer Zustandsrückführung durch Stützpunkte mit etwa einem Meter Abstand fährt. Es wird nur dieser Ansatz beispielhaft dargestellt, da die Abweichungen zwischen den drei vorgestellten Regelungsmethoden sehr gering sind.

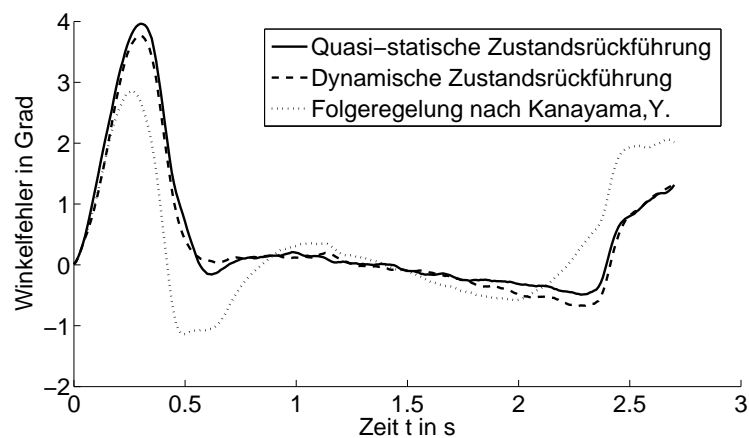
In Abschnitt 2.3.1 bei der Planung des Zeitverlaufes wurde argumentiert, dass eine enge Wahl der Stützpunkte dafür sorgt, dass eine Bahn stets nahe an der maximal möglichen krümmungsabhängigen Geschwindigkeit durchfahren werden kann. In der Realität sorgt das für ein ruckartiges Fahrverhalten, weil ein jedem Splineabschnitt beschleunigt und gebremst wird. Es ist also besser die Stützpunkte genügend weit entfernt zu planen.



(a) Tangentialer Fehler

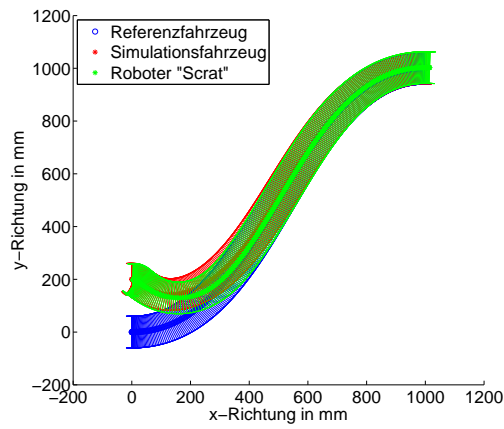


(b) Normaler Fehler

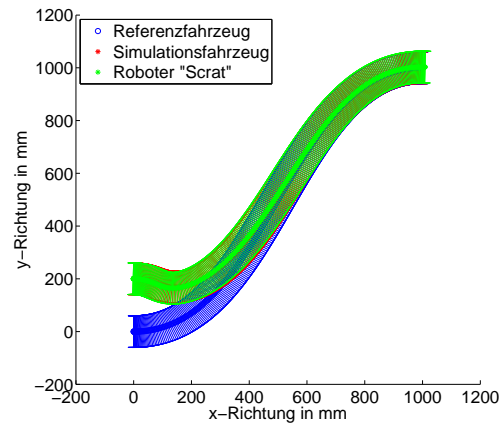


(c) Winkelfehler

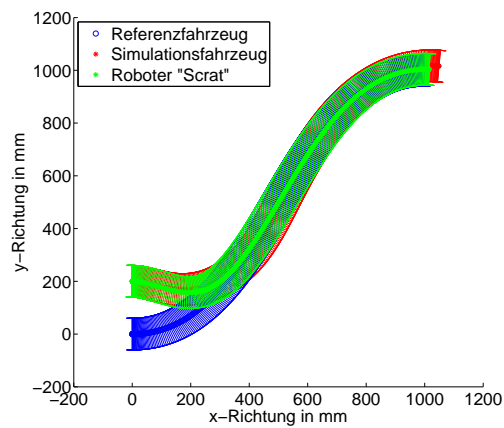
Abbildung 5.3: Messergebnisse der Odometrie des Roboters



(a) Quasi-statische Zustandsrückführung



(b) Dynamische Zustandsrückführung



(c) Folgeregelung nach Kanayama, Y.

Abbildung 5.4: Messergebnisse mit Anfangsfehler $y = 200$ mm

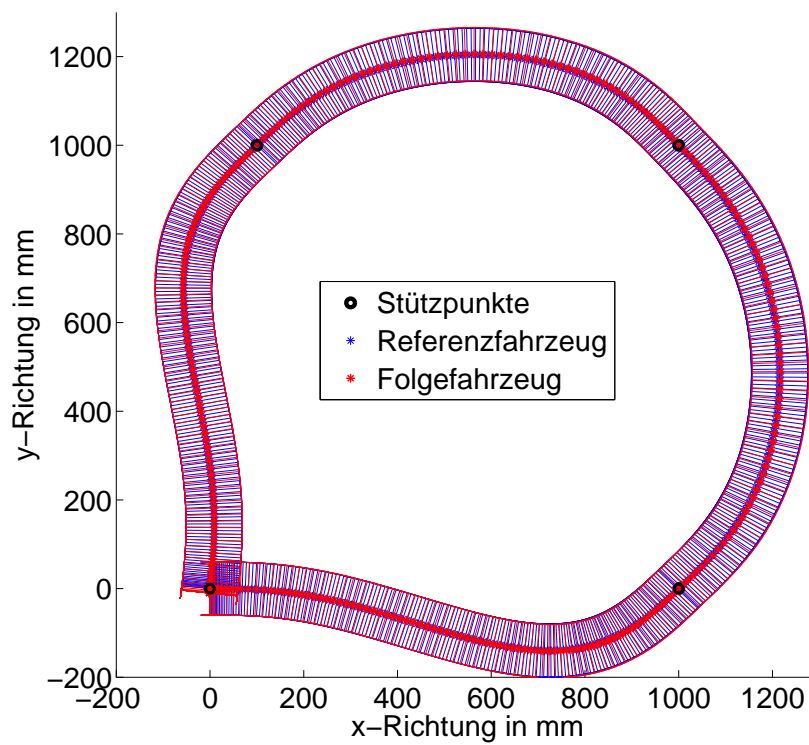


Abbildung 5.5: Regelung auf Kurve mit 4 Stützpunkten nach flachheitsbasierter Folgeregelung mit dynamischer Zustandsrückführung

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Studienarbeit ist es gelungen das nichtholonome System des einachsigen mobilen Fahrzeugs entlang einer selbstgewählten Trajektorie zu stabilisieren. Dabei wurden die flachheitsbasierten Ansätze mit quasi-statischer und dynamischer Zustandsrückführung sowie der Ansatz nach KANAYAMA et al. [1990] in einer MATLAB-Simulation untersucht und auf einer Referenzplattform realisiert. Es wurde gezeigt, dass die theoretisch untersuchten Folgeregelungsmethoden auch in der Praxis angewendet werden können und zu sehr guten Ergebnissen führen. Hierfür ist es jedoch nötig, das Modell des Systems zu kennen und nichtlineare Störungen zu minimieren. Des weiteren wurde eine Lösungsstrategie zur Bahn- und Trajektorienplanung um Hindernisse vorgestellt.

Als Ausblick werden nun abschließend noch einige Ideen zur weiterführenden Bearbeitung der Thematik aufgeführt. Die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen haben gezeigt, dass die Planung von Zeitverläufen mit einem trapezförmigen Geschwindigkeitsverlauf zu einem unerwünschten Fahrverhalten insbesondere in den Beschleunigungsphasen führt. Es wäre denkbar glattere Zeitverläufe zu verwenden, wie zum Beispiel Zeitverläufe mit sinusförmigem Verlauf (siehe FRÖHLICH [2008]), um dieses Problem zu beheben.

In dieser Arbeit wurde die Geschwindigkeit anhand des Maximums der Krümmung der Kurve begrenzt, weshalb die Kurve meist langsamer durchfahren wird als möglich wäre. Dazu müsste es gelingen entweder die Krümmungsänderung für die Bahn vorzugeben oder beispielsweise nur jene Fälle speziell zu behandeln, in dem die Krümmungsänderung ein Maximum überschreitet.

Weiterhin wurden Splines dritter und fünfter Ordnung vorgestellt, bei denen bis zur ersten oder bis zur zweiten Ableitung die Randbedingungen festgelegt werden können. Der erste und letzte Splineabschnitt einer Kurve benötigen aber nur einen Spline vierter Ordnung, da an einem Ende eine Ruhelage vorhanden ist. Dieser Spezialfall sollte in einer weiterführenden Arbeit berücksichtigt werden. Dabei könnte unter anderem auch die Realisierung der Wegfindung um Hindernisse mit dem vorgestellten A*-Algorithmus in Kombination mit der Zellzerlegung realisiert werden.

Literaturverzeichnis

BENALIA, A. DJEINAI, M. und BARBOT, J.-P. (2003). *Control of the kinematic car using trajectory generation and the high order sliding mode control*. IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics.

Zitiert auf Seite 2.

BLOCH, A. M. REYHANOGLU, M. und MCCLAMROCH, N. H. (1992). *Control and Stabilization of Nonholonomic Dynamic Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 37(11).

Zitiert auf Seite 2.

BROCKETT, R.W. (1983). *Asymptotic Stability and Feedback stabilization*. In: BROCKETT, R. W. MILLMAN, R. S. und J., SUSSMAN H., Hrsg.: *Differential Geometric Control Theory*, S. 181–208. Birkhauser.

Zitiert auf Seite 2.

CAMPION, G. NOVEL, B. D'ANDREA und BASTIN, G. (1990). *Controllability and State Feedback stabilizability of Nonholonomic Mechanical Systems*. Advanced Robot Control, Proc. of the Int. Workshop on Nonlinear and Adaptive Control: Issues in Robotics (Grenoble, France).

Zitiert auf Seite 2.

CATMULL, E. und ROM, R. (1974). *A Class of Local Interpolation Splines*. In: R.E., BARNHILL und RIESEN, R. F., Hrsg.: *Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, New York.

Zitiert auf Seite 7.

FRÖHLICH, N. (2008). *Studienarbeit, Entwicklung einer Bewegungssteuerung für einen autonomen mobilen TURAG-Roboter mit Differentialantrieb für den EUROBOT 2008*.

Zitiert auf Seiten 10, 11, 42 und 49.

GRAF, B. (2008). *Ein benutzer- und umgebungsangepasstes Steuerungssystem für die Zielführung roboterbasierter Gehhilfen*. Diplomarbeit, Fakultät für Konstruktions-, Produktions- und Fahrzeugtechnik der Universität Stuttgart.

Zitiert auf Seiten 5 und 6.

JIANGZHOU, L. U. SAKHAVAT, S. MING, X. und LAUGIER, C. (2000). *Sliding Mode Control for Nonholonomic Mobile Robot*. Proc. of the International Conference on Control Automation Robotics and Vision.

Zitiert auf Seite 2.

KANAYAMA, Y. KIMURA, Y. MIYAZAKI, F. und T., NOGUCHI (1990). *A Stable Tracking Control Method for an Autonomous Mobile Robot*. Proc. IEEE, International Conference on Robotics and Automation (Cincinnati, Ohio), S. 384–389.

Zitiert auf Seiten iii, v, 2, 3, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 43 und 49.

KOLMANOVSKY, I. und H., MCCLAMROCH N. (1995). *Developments in nonholonomic control problems*. Control Systems, IEEE.

Zitiert auf Seite 2.

KRASCHL, G. (2005). *Routenplanung für mobile Roboter*. Diplomarbeit, Institut für Navigation und Satellitengeodäsie der Technischen Universität Graz.

Zitiert auf Seiten 5 und 6.

M'CLOSKEY, R. T. und MURRAY, R. M. (1997). *Exponential Stabilization of Driftless Nonlinear Control Systems Using Homogeneous Feedback*. IEEE Transactions on Automatic Control, 42(5).

Zitiert auf Seite 2.

ROUCHON, P. FLIESS, M. LEVINE, J. und MARTIN, P. (1993). *Flatness, motion planning and trailer system*. Proceedings of the 32nd IEEE Conference on Decision and Control, S. 2700 – 2705.

Zitiert auf Seite 2.

RUDOLPH, J. (2009). *Script, Flachheitsbasierte Folgeregelung*.

Zitiert auf Seiten 2, 18, 19 und 20.

SAMSON, C. (1991). *Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart*. In: *Advanced Robot Control Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Bd. 162/1991, S. 125–151. Springer.

Zitiert auf Seite 2.

SAMSON, C. und AIT-ABDERRAHIM, K. (1991). *Feedback Control of a Nonholonomic wheeled Cart in Cartesian Space*. Proc. IEEE, International Conference on Robotics and Automation (Sacramento, California).

Zitiert auf Seite 2.

VIDYASAGAR, M. (1978). *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Zitiert auf Seite 30.

WIT, C. C. DE und SØRDALEN, O.J. (1992). *Exponential Stabilization of Mobile Robots with Nonholonomic Constraints*. IEEE Transactions on Automatic Control, 37(11).

Zitiert auf Seite 2.

YANG, J.-M. und KIM, J.-H. (1999). *Sliding Mode Motion Control of Nonholonomic Mobile Robots*. Control Systems, IEEE, S. 15 – 23.

Zitiert auf Seite 2.

