

# **Corso di Laurea in INFORMATICA**

## **Algoritmi e Strutture Dati**

### **a.a. 2011-2012**

#### **MODULO 13**

#### **TECNICHE ALGORITMICHE 1**

Classificazione dei problemi: problemi di ricerca, di decisione, di ottimizzazione. Lo spazio di ricerca: definizione e proprietà. Paradigma selettivo e paradigma generativo.

Questi lucidi sono stati preparati per uso didattico. Essi contengono materiale originale di proprietà dell'Università degli Studi di Bari e/o figure di proprietà di altri autori, società e organizzazioni di cui è riportato il riferimento. Tutto o parte del materiale può essere fotocopiato per uso personale o didattico ma non può essere distribuito per uso commerciale. Qualunque altro uso richiede una specifica autorizzazione da parte dell'Università degli Studi di Bari e degli altri autori coinvolti.



# CLASSIFICAZIONE DEI PROBLEMI

I PROBLEMI SI POSSONO CLASSIFICARE IN:

- PROBLEMI DI RICERCA;
- PROBLEMI DI DECISIONE;
- PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE.

NELLA FASE DI **CONCETTUALIZZAZIONE** SI FORNISCE UNA **SPECIFICA DEL PROBLEMA**, SI STABILISCONO LE CARATTERISTICHE STRUTTURALI DEL PROBLEMA SENZA FARE RIFERIMENTO AI METODI PER LA RISOLUZIONE.

NELLA FASE DI **REALIZZAZIONE** SI PASSA DALLA SPECIFICA DEL PROBLEMA ALLE SCELTE PER LA SUA RISOLUZIONE, CHE COINVOLGONO LA DEFINIZIONE DELL'**ALGORITMO RISOLUTIVO** E LA **REALIZZAZIONE DEL PROGRAMMA**.



## LA SPECIFICA DEL PROBLEMA

- **LA SCELTA DELL'INPUT:** SI STABILISCE CHE I VALORI DI ALCUNE DELLE VARIABILI IN GIOCO SIANO I DATI DI INGRESSO DEL PROBLEMA. L'INSIEME DI TALI VALORI È LO **SPAZIO DI INPUT** DEL PROBLEMA;
- **LA SCELTA DELLO SCOPO DELLA RISOLUZIONE:** SI STABILISCE CHE I VALORI DI ALCUNE VARIABILI IN GIOCO RAPPRESENTINO LE SOLUZIONI DEL PROBLEMA. L'INSIEME DI TALI VALORI È LO **SPAZIO DELLE SOLUZIONI**;
- L'IDENTIFICAZIONE DEL LEGAME CHE I **VINCOLI DEL PROBLEMA** IMPONGONO TRA I VALORI DELLO SPAZIO DI INPUT E I VALORI DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI. CIÒ CONDUCE ALLA DEFINIZIONE DELLA **RELAZIONE CARATTERISTICA** DEL PROBLEMA;
- LA DETERMINAZIONE DI QUALI **INFORMAZIONI IN USCITA** SI VUOLE CHE IL PROCESSO RISOLUTIVO DEL PROBLEMA PRODUCA. QUESTE INFORMAZIONI STABILISCONO LO **SPAZIO DI OUTPUT** E IL **QUESITO** DEL PROBLEMA.



## ESEMPIO

**DETERMINARE LA POSIZIONE DI UN NUMERO INTERO  $M$  IN UN VETTORE DI NUMERI INTERI  $V$ .**

## LE VARIABILI: UN VETTORE $V$

## UN INDICE DEL VETTORE $K$

# UN NUMERO INTERO

LO **SPAZIO DI INPUT** È L'INSIEME DELLE POSSIBILI COPPIE FORMATE DA UN VETTORE **V** E UN NUMERO INTERO **M**.

LO **SPAZIO DELLE SOLUZIONI** È L'INSIEME DEGLI INDICI **K** DI OGNI POSSIBILE VETTORE.

LA **RELAZIONE CARATTERISTICA** ASSOCIA AD OGNI COPPIA  $(V, M)$  UNA POSIZIONE  $K$  SE E SOLO SE IL  $K$ -ESIMO ELEMENTO DI  $V$  COINCIDE CON  $M$ . LA RELAZIONE LA CHIAMIAMO  $R_{VETT}$ .



SIA  $V=[7,5,3,7,2]$

I NUMERI POSSIBILI CHE RICERCHIAMO  $\in \mathbf{N}$

$R_{\text{VETT}}$        $\langle [7,5,3,7,2], 7 \rangle \Rightarrow 1$   
                  $\langle [7,5,3,7,2], 5 \rangle \Rightarrow 2$   
                 .....  
                  $\langle [7,5,3,7,2], 7 \rangle \Rightarrow 4$   
                 .....

POICHÉ ESISTE UN NUMERO INFINITO DI VETTORI  $R_{\text{VETT}}$   
È DI DIMENSIONE INFINITA.

CONSIDERIAMO LO SPECIFICO ELEMENTO DELLO  
SPAZIO DI INPUT FORMATO DAL VETTORE  $V$  E DAL  
NUMERO  $M=7$ .

$R_{\text{VETT}}$  ASSOCIA A TALE ELEMENTO DUE POSSIBILI  
VALORI DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI:

1

4



NEL PROBLEMA CONSIDERATO, POTREBBERO NON ESSERVI SOLUZIONI, DUNQUE:

LO **SPAZIO DI OUTPUT** CONTIENE LO SPAZIO DELLE **SOLUZIONI** PIÙ UN PARTICOLARE SIMBOLO CHE DENOTA **L'ASSENZA DI SOLUZIONI**.

INOLTRE, POSSIAMO ESSERE INTERESSATI A UNA QUALUNQUE SOLUZIONE , A TUTTE, ETC... , DUNQUE:

IL **QUESITO** STABILISCE CHE, PER OGNI MANIFESTAZIONE CHE AMMETTE SOLUZIONE, VOGLIAMO COME OUTPUT UN ELEMENTO DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI LEGATO A QUELLA MANIFESTAZIONE DALLA RELAZIONE CARATTERISTICA.



# SPECIFICA DI UN PROBLEMA

## DEFINIZIONE

LA SPECIFICA DI UN PROBLEMA È' UNA QUINTUPLA  $\langle I, S, R, O, Q \rangle$  DOVE:

- $I$  È' LO SPAZIO DI INPUT;
- $S$  È' UN INSIEME QUALSIASI DETTO **SPAZIO DELLE SOLUZIONI**;
- $R \subseteq I \times S$  È' UNA RELAZIONE SU  $I$  ED  $S$  DETTA **RELAZIONE CARATTERISTICA**;
- $O$  È' LO **SPAZIO DI OUTPUT**;
- $Q$  È' UNA REGOLA, DETTA **QUESITO**, CHE, SULLA BASE DELLA RELAZIONE CARATTERISTICA  $R$ , CONSENTE DI DEFINIRE UNA RELAZIONE SU  $I$  E  $O$  :  
 $R_Q \subseteq I \times O$

UNA PARTICOLARE **ISTANZA** DEL PROBLEMA SI OTTIENE OGNI VOLTA CHE SCEGLIAMO UN PARTICOLARE VALORE DEI DATI IN INGRESSO.

IN RELAZIONE AD UN PROBLEMA E AD UNA SUA ISTANZA DIAMO LA NOZIONE DI **SOLUZIONE**.



## SOLUZIONE DI UN PROBLEMA PER UNA SUA ISTANZA DEFINIZIONE

SIA  $P=\langle I,S,R,O,Q \rangle$  UN PROBLEMA E SIA  $i \in I$  UNA SUA ISTANZA, UNA **SOLUZIONE**  $s_i$  DI P PER  $i$  È UN ELEMENTO DI S PER CUI VALE:

$$\langle i, s_i \rangle \in R$$

## RISPOSTA AD UN PROBLEMA PER UNA SUA ISTANZA DEFINIZIONE

SIA  $P=\langle I,S,R,O,Q \rangle$  UN PROBLEMA E SIA  $i$  UNA SUA ISTANZA, UNA **RISPOSTA**  $r_i$  A P PER  $i$  È UN ELEMENTO DI O PER CUI VALE

$$\langle i, r_i \rangle \in R_Q$$

DOVE  $R_Q$  È LA RELAZIONE SU I E O DEFINITA IN BASE AD R APPLICANDO LA REGOLA Q.





## PROBLEMI DI RICERCA

TRA TUTTE LE POSSIBILI SOLUZIONI SIAMO INTERESSATI A CONOSCERE UNA QUALUNQUE DELLE SOLUZIONI DEL PROBLEMA PER L'ISTANZA CHE STIAMO CONSIDERANDO, OPPURE, NEL CASO NON ESISTA SOLUZIONE, SIAMO INTERESSATI A SAPERLO. INTRODUCIAMO NELLO SPAZIO DI OUTPUT IL SIMBOLO  $\perp$  CHE INDIVIDUA L'ASSENZA DI SOLUZIONI.

### DEFINIZIONE

UN PROBLEMA DI RICERCA  $P$  È UN PROBLEMA SPECIFICATO CON UNA QUINTUPLA DEL TIPO:

$$\langle I, S, R, S \cup \{\perp\}, q_{ric} \rangle$$

DOVE  $q_{ric}$  È LA REGOLA CHE DEFINISCE, IN BASE AD  $R$ , LA RELAZIONE  $R_{q_{ric}}$  CONTENENTE TUTTI E SOLI I SEGUENTI ELEMENTI:

- OGNI COPPIA CONTENUTA IN  $R$ ;
- UNA COPPIA  $\langle i, \perp \rangle$  PER OGNI ISTANZA  $i$  DI  $P$  PER LA QUALE  $P$  NON HA SOLUZIONI.



## ESEMPIO:

IL PROBLEMA DELLA **DEFINIZIONE DELLA POSIZIONE DI UN INTERO IN UN VETTORE** DI INTERI È UN PROBLEMA DI RICERCA:

$$\langle I, S, R, S \cup \{\perp\}, \text{qric} \rangle$$

**I** È' L'INSIEME DI COPPIE  $\langle V, M \rangle$

**S** È' L'INSIEME DEGLI INTERI POSITIVI (**INDICI**)

**R** È' LA RELAZIONE  $R_{\text{VETT}}$ .

SIAMO INTERESSATI, PER OGNI ISTANZA, A CALCOLARE **UNA** DELLE SOLUZIONI **OPPURE** A SEGNALARE IL FATTO CHE **NON NE ESISTONO**.

**SI DICE ANCHE: “TROVARE UNA SOLUZIONE AMMISSIBILE, CIOE' CHE SODDISFI LA**



## ESEMPIO (PROBLEMA DELLE N REGINE)

**DATO UN INTERO POSITIVO  $N$  SI DETERMINI UN POSIZIONAMENTO DI  $N$  REGINE IN UNA SCACCHIERA  $N \times N$  TALE CHE NESSUNA REGINA  $Q$  MINACCI QUALCHE ALTRA REGINA.**

			Q	
	Q			
				Q
		Q		
Q				

**$N=5$**

**SOLUZIONE  
ALL'ISTANZA 5**

**FORNIRE LA SPECIFICA:**

**LA QUINTUPLA  $\langle N^+, D, R, D \cup \{\perp\}, qric \rangle$**

**$N^+$  = INSIEME NUMERI INTERI POSITIVI;**

**$D$  = INSIEME DELLE DISPOSIZIONI DI REGINE IN SCACCHIERE DI OGNI DIMENSIONE (NUMERO REGINE = DIMENSIONE SCACCHIERA);**

**$R$  = RELAZIONE CHE CONTIENE TUTTE E SOLE LE COPPIE  $\langle x, y \rangle$  IN CUI  $x \in N^+$  E  $y$  È UNA DISPOSIZIONE DI  $x$  REGINE NELLA SCACCHIERA  $x \times x$ .**



## **ESEMPIO: ORDINAMENTO DI UN VETTORE DI INTERI IN MODO NON DECRESCENTE.**

**FORNIRE LA SPECIFICA IN TERMINI DI INPUT, SPAZIO DELLE SOLUZIONI, RELAZIONE CARATTERISTICA, SPAZIO DI OUTPUT E QUESITO DEL PROBLEMA.**

**SPAZIO DEGLI INPUT** È L'INSIEME DI TUTTI I VETTORI DI INTERI (DI QUALUNQUE DIMENSIONE);

**SPAZIO DELLE SOLUZIONI** È L'INSIEME DI TUTTE LE POSSIBILI SEQUENZE DI INDICI DI UN VETTORE (PER OGNI INTERO POSITIVO  $n$ , L'INSIEME DI **TUTTE LE POSSIBILI PERMUTAZIONI DEGLI INTERI DA 1 A  $n$** );

**RELAZIONE CARATTERISTICA** È L'INSIEME DI TUTTE E SOLE LE COPPIE  **$\langle V, W \rangle$**  TALE CHE

SE  **$V = [v_1, \dots, v_n]$**  ALLORA  **$W = [w_1, \dots, w_n]$**

E, DATI DUE INDICI QUALUNQUE  **$q$**  ED  **$m$** , DOVE  **$1 \leq q \leq n$**  E  **$1 \leq m \leq n$** , VALE:

$$V_{w_q} > V_{w_m}$$

SE E SOLO SE  **$q \geq m$**



**UN ELEMENTO:**

$$V = [7, 1, 3, 4]$$
$$W = [2, 3, 4, 1]$$

$$V_{w_2} > V_{w_1}$$

**STESSO PROBLEMA CON VETTORE DI CARATTERI:**

$$V = [a, z, p, b]$$
$$W = [1, 4, 3, 2]$$

**INFATTI:**

$$V_{w_q} > V_{w_m} \quad \text{SE } q \geq m$$



## ESEMPIO

### PROLEMA DI PARTIZIONAMENTO

**SONO DATI  $k$  NUMERI INTERI POSITIVI  $n_1, \dots, n_k$  LA CUI SOMMA È  $2m$  (PER UN CERTO INTERO  $m$ ). DECIDERE SE I  $k$  NUMERI POSSANO ESSERE RIPARTITI IN DUE GRUPPI IN MODO CHE LA SOMMA DEI COMPONENTI DI OGNI GRUPPO SIA  $m$ .**

**DUNQUE SE**

**$n_{a_1}, \dots, n_{a_p}$  E  $n_{b_1}, \dots, n_{b_q}$**

**SONO I DUE GRUPPI DI NUMERI (CIOÈ  $p+q=k$ ), DEVE ESSERE:**

$$\sum_{i=1}^p n_{a_i} = \sum_{j=1}^q n_{b_j} = m$$



**SPAZIO DI INPUT** E' L'INSIEME **I** DI TUTTI I POSSIBILI INSIEMI DI INTERI LA CUI SOMMA È PARI;

**SPAZIO DELLE SOLUZIONI** E' L'INSIEME **S** DI TUTTE LE POSSIBILI COPPIE DI INSIEMI DI INTERI;

**RELAZIONE CARATTERISTICA** E' L'INSIEME **R** DI TUTTE E SOLE LE COPPIE  $\langle x, y \rangle \ni$

•  $x \in I, y \in S$

•  $y = \langle y_1, y_2 \rangle$  È UNA COPPIA DI INSIEMI  $\ni$

$$y_1 \cap y_2 = \emptyset \text{ E } y_1 \cup y_2 = x$$

$$\text{e } \text{somma}(y_1) = \text{somma}(y_2)$$

**ESEMPIO: IL VETTORE**

**[1,2,2,4,7]**

**VIENE PARTIZIONATO IN:**

**[1,7] E [2,2,4]**



# PROBLEMI DI DECISIONE

LA RISPOSTA È VERO O FALSO A SECONDA CHE IL DATO DI INGRESSO SODDISFI O MENO UNA CERTA PROPRIETÀ. DUNQUE LO SPAZIO DI OUTPUT CONTIENE SOLO I DUE VALORI DI VERITÀ.

## DEFINIZIONE

UN PROBLEMA DI DECISIONE  $P$  È UN PROBLEMA SPECIFICATO CON UNA QUINTUPLA DEL TIPO:

$$\langle I, S, R, \{TRUE, FALSE\}, q_{dec} \rangle$$

DOVE IL QUESITO  $q_{dec}$  DEFINISCE LA FUNZIONE:

$$R_{q_{dec}}: I \rightarrow \{TRUE, FALSE\}$$

TALE CHE, PER OGNI ISTANZA  $i$  DI  $P$ ,  $R_{q_{dec}}(i)$  VALE:

- **TRUE** SE  $\exists s \in S \exists' \langle i, s \rangle \in R$ ;
- **FALSE** ALTRIMENTI.





IN LINEA DI PRINCIPIO, UN **PROBLEMA DI DECISIONE**

$$P = \langle I, S, R, \{\text{TRUE}, \text{FALSE}\}, q_{\text{dec}} \rangle$$

PUÒ ESSERE RISOLTO MEDIANTE **DUE APPROCCI**:

- CERCANDO UNA RISPOSTA AL CORRISPONDENTE PROBLEMA DI RICERCA:

$$P' = \langle I, S, R, S \cup \{\perp\}, q_{\text{ric}} \rangle$$

DETTO **PROBLEMA SOTTOSTANTE**, SFRUTTANDO IL FATTO CHE DATO UN  $i \in I$ , LA RISPOSTA A **P** PER  $i$  È **FALSE** SOLO SE LA RISPOSTA A **P'** COINCIDE CON  $\perp$ , MENTRE IN **OGNI ALTRO CASO** LA RISPOSTA A **P** È **TRUE** (**APPROCCIO COSTRUTTIVO**);

- DETERMINANDO LA **RISPOSTA APPROPRIATA A P** SENZA OTTENERE UNA SOLUZIONE AL CORRISPONDENTE PROBLEMA DI RICERCA SOTTOSTANTE (**APPROCCIO NON COSTRUTTIVO**).



# PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE/1

ALLE SOLUZIONI AMMISSIBILI È ASSOCIATA UNA MISURA (COSTO, OBIETTIVO): RISOLVERE IL PROBLEMA NON SIGNIFICA TROVARE UNA QUALUNQUE SOLUZIONE, MA LA MIGLIORE SOLUZIONE SECONDO LA MISURA O CRITERIO DI PREFERENZA FISSATO.

## DEFINIZIONE

UN PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE P È UN PROBLEMA SPECIFICATO CON UNA QUINTUPLA DEL TIPO:

$$\langle I, S, R, S \cup \{\perp\}, q_{\text{ott}}(M, m, \subseteq) \rangle$$

- **M** È INSIEME QUALSIASI;
- **m** È UNA FUNZIONE DEL TIPO  $I \times S \rightarrow M$  DETTA **FUNZIONE OBIETTIVO** DI P; PER UNA CERTA ISTANZA  $i \in I$ , IL VALORE **m(i,s)** RAPPRESENTA UNA **MISURA** DELL'ELEMENTO S NELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI



## PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE/2

- $\subseteq$  È UNA RELAZIONE DI ORDINAMENTO SU  $M$  ( $x \subseteq y$  “ $x$  MIGLIORE DI  $y$ ”);
- $q_{\text{ott}}(M, m, \subseteq)$  È UNA REGOLA CHE DEFINISCE, IN BASE AD  $R$ , LA RELAZIONE  $R_{q_{\text{ott}} \subseteq} I \times S$  SU  $I$  ED  $S$  COSÌ DA INDIVIDUARE:
  - a)* UNA COPPIA  $(i, s) \forall i \exists' \neg \exists s'$  ASSOCIATA AD  $i$  MIGLIORE;
  - b)* UNA COPPIA  $(i, \perp) \forall i$  PER LA QUALE  $P$  NON HA SOLUZIONI.



# ESEMPIO

**3 PROBLEMI DIVERSI NEL MEDESIMO AMBITO:**  
**DATO UN INSIEME  $L$  DI PAROLE , DETERMINARE UNA PAROLA  $W \in L$  TALE CHE NON ESISTANO ALTRE PAROLE IN  $L$ :**

**$P_1$       MAGGIORI DI  $W$  SECONDO L'ORDINE ALFABETICO;**

**$P_2$       DI LUNGHEZZA MAGGIORE DI QUELLA DI  $W$ ;**

**$P_3$       COMPOSTE USANDO TUTTE LE LETTERE DELL'ALFABETO CHE COMPONGONO  $W$ , PIÙ' ALTRE LETTERE.**

**LO SCHEMA GENERALE PER I TRE PROBLEMI:**

**$\langle 2^W, W, \{(X, y) | X \in 2^W \wedge y \in X\}, W \cup \{\perp\}, q_{\text{ott}}(M, m, \subseteq) \rangle$**

**DOVE PER TUTTI E TRE I PROBLEMI:**

- **$W$**  È L'INSIEME DI PAROLE;
- **$2^W$**  È L'INSIEME DI TUTTI GLI INSIEMI DI PAROLE;
- **$M$**  È UN DIFFERENTE INSIEME PER CIASCUN PROBLEMA



## INFATTI PER IL PROBLEMA $P_1$ :

- $M=W$
- LA FUNZIONE OBIETTIVO:  
 $m:2^W \times W \rightarrow M$
- PER  $\forall i \in I$   $m(i,W)$  E' UGUALE A  $W$
- LA RELAZIONE  $\subseteq$  E' LA RELAZIONE DI ORDINAMENTO ALFABETICO

---

## PER IL PROBLEMA $P_2$ :

- $M=N$
- LA FUNZIONE OBIETTIVO:  
 $m:2^W \times W \rightarrow M$
- $\forall i \in I$   $m(i,W)$  E' LA LUNGHEZZA DI  $W$
- LA RELAZIONE  $\subseteq$  E' LA RELAZIONE DI ORDINAMENTO  $\geq$  TRA NUMERI

---

## PER IL PROBLEMA $P_3$ :

- $M$  E' L'INSIEME DI TUTTI GLI INSIEMI DI LETTERE DELL'ALFABETO
- LA FUNZIONE OBIETTIVO:  
 $m:2^W \times W \rightarrow M$
- $\forall i \in I$   $m(i,W)$  RESTITUISCE L'INSIEME DELLE LETTERE CHE COMPONGONO  $W$
- LA RELAZIONE E' QUELLA DI CONTENIMENTO  $\supseteq$  TRA INSIEMI



## ESEMPIO:

SIA L'ISTANZA PER I TRE PROBLEMI  
**{“TORRE”, “ERRORE”, “ZERO”, “TENORE”}**

**$P_1$**  ha una sola soluzione ottima **“ZERO”**

**$P_2$**  ha due soluzioni ottimali **“ERRORE”** e **“TENORE”**

**$P_3$**  ha due soluzioni ottimali **“TENORE”** e **“ZERO”**

<i>PAROLA</i>	<i>MISURA <math>P_1</math></i>	<i>MISURA <math>P_2</math></i>	<i>MISURA <math>P_3</math></i>
<b>TORRE</b>	<b>TORRE</b>	<b>5</b>	<b>{E,O,R,T}</b>
<b>ERRORE</b>	<b>ERRORE</b>	<b>6</b>	<b>{E,O,R}</b>
<b>ZERO</b>	<b>ZERO</b>	<b>4</b>	<b>{E,O,R,Z}</b>
<b>TENORE</b>	<b>TENORE</b>	<b>6</b>	<b>{E,N,O,R,T}</b>



## ESEMPIO:

### PROBLEMA

**DATO UN ALBERO I CUI NODI SONO ETICHETTATI CON VALORI INTERI NON NEGATIVI, TROVARE UN LIVELLO DELL'ALBERO IL CUI PESO È MASSIMO, DOVE PER PESO DI UN LIVELLO DELL'ALBERO SI INTENDE LA SOMMA DELLE ETICHETTE DEI NODI DI QUEL LIVELLO.**

**SPAZIO DEGLI INPUT** INSIEME **I** DEGLI ALBERI I CUI NODI SONO ETICHETTATI CON VALORI INTERI NON NEGATIVI;  
**SPAZIO DELLE SOLUZIONI** INSIEME **S** DEGLI INTERI NON NEGATIVI;

**RELAZIONE CARATTERISTICA** È L'INSIEME DELLE COPPIE  $(T, n)$  DOVE  $T$  È L'ALBERO DI PROFONDITÀ  $p$  E  $n \leq p$ ;

**SPAZIO DI OUTPUT** È  $S \cup \{\perp\}$ ;

**QUESITO DI OTTIMIZZAZIONE** È  $q_{\text{ott}}(N, m, \geq)$  DOVE:  
 $M: I \times S \rightarrow N$

È LA FUNZIONE TALE CHE  $m(T, n)$  È LA SOMMA DELLE ETICHETTE DEI NODI IN  $T$  DI LIVELLO  $n$ .



# ESEMPIO (IL PROBLEMA DELLO ZAINO)

UN LADRO DURANTE UNA RAPINA IN UN NEGOZIO (SIC!) SI TROVA DI FRONTE A  $n$  ARTICOLI: L'ARTICOLO  $i$ -ESIMO HA UN VALORE DI  $P_i$  EURO E UN PESO DI  $C_i$  CHILOGRAMMI, DOVE SIA  $P_i$  CHE  $C_i$ , PER SEMPLICITÀ, SONO INTERI. IL LADRO VUOLE PRENDERE GLI ARTICOLI DI MAGGIOR VALORE MA IL SUO ZAINO PUÒ SOPPORTARE UN PESO MASSIMO DI  $B$  CHILOGRAMMI. COSA GLI CONVIENE FARE?

PER FORMALIZZARE IL PROBLEMA OCCORRE CONSIDERARE  $2n+1$  INTERI POSITIVI:

$P_1, \dots, P_n, C_1, \dots, C_n, B$

DOVE I VALORI:

$P_1, \dots, P_n$   
SONO DETTI **PROFITTI**.

I VALORI:

$C_1, \dots, C_n$   
SONO CHIAMATI **COSTI**.

$B$  È DETTO **BUDGET** (BILANCIO).





# (IL PROBLEMA DELLO ZAINO)

È' UN'ASTRAZIONE DI MOLTI PROBLEMI REALI.

## FORMALIZZAZIONE

DATI  $2n+1$  INTERI POSITIVI:

$$P_1, \dots, P_n, C_1, \dots, C_n, B$$

TROVARE  $n$  VALORI INTERI  $X_1, \dots, X_n \ni$  :

- $X_i \in \{0,1\} \quad (1 \leq i \leq n)$
- $\sum_{i=1}^n P_i X_i$  ABBIA VALORE MAX
- $\sum_{i=1}^n C_i X_i \leq B$



# SPECIFICA PER IL PROBLEMA DELLO ZAINO

- LO SPAZIO DI INPUT **I** È L'INSIEME DELLE COPPIE  $(n, Q)$  DOVE  $n$  È UN INTERO POSITIVO E  $Q$  È UNA SEQUENZA DI  $2n+1$  INTERI POSITIVI. L'ELEMENTO DI QUESTO SPAZIO È:

$$(n, (P_1, \dots, P_n, C_1, \dots, C_n, B))$$

- LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI **S** È L'INSIEME DELLE SEQUENZE FINITE:

$$\langle X_1, \dots, X_n \rangle$$

CON  $n \in \mathbb{N}^+$  E  $X_i \in \{0, 1\}$ ;

- LA RELAZIONE CARATTERISTICA È DATA DALL'INSIEME DELLE COPPIE:

$$(n, (P_1, \dots, P_n, C_1, \dots, C_n, B)), (X_1, \dots, X_n)$$

TALI CHE:

$$\sum_{i=1}^n C_i X_i \leq B ;$$

- IL QUESITO È  $q_{\text{ott}}(N, m, \geq)$  DOVE:

$$m = \sum_{i=1}^n P_i X_i .$$



**IN DEFINITIVA:**

**□ LA SPECIFICA DI UN PROBLEMA** MIRA A DETERMINARE LA STRUTTURA DEL PROBLEMA, IN MODO INDIPENDENTE DA CONSIDERAZIONI RELATIVE AL MODO IN CUI IL PROBLEMA VERRÀ RISOLTO.

**□ LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI** È CARATTERISTICA GENERALE DEL PROBLEMA E NON FORNISCE INDICAZIONI SULLE SOLUZIONI PER UNA GENERICA ISTANZA.

DUNQUE, PER ORIENTARE LA SCELTA DI UN ALGORITMO RISOLUTIVO È NECESSARIO UNO STRUMENTO CHE AIUTI A “**CARATTERIZZARE**” LE POTENZIALI SOLUZIONI AD UNA GENERICA ISTANZA DI UN PROBLEMA:

**LO SPAZIO DI RICERCA**



## LO SPAZIO DI RICERCA

PERCHÉ L'ANALISI DI UN PROBLEMA AIUTI A FORMULARE UN ALGORITMO RISOLUTIVO È NECESSARIO *UNO STRUMENTO CONCETTUALE CHE AIUTI A CARATTERIZZARE LE POTENZIALI SOLUZIONI DI UNA GENERICA ISTANZA DEL PROBLEMA.*

DETERMINARE **LO SPAZIO DI RICERCA** PER UN PROBLEMA **P** SIGNIFICA STABILIRE UN **METODO** CHE, PER OGNI ISTANZA  $i$  DI **P**, **CONSENTE DI DEFINIRE** UN INSIEME CON ASSOCIATE DUE FUNZIONI:

- **LA FUNZIONE DI AMMISSIBILITÀ** CHE PERMETTE DI VERIFICARE SE UN ELEMENTO DELLO SPAZIO DI RICERCA CORRISPONDE EFFETTIVAMENTE AD UNA SOLUZIONE PER  $i$ ;
- **LA FUNZIONE DI RISPOSTA** CHE PERMETTE DI OTTENERE, DAGLI ELEMENTI DELLO SPAZIO DI RICERCA, LE CORRISPONDENTI RISPOSTE PER  $i$ .



## DEFINIZIONE/1

SIA  $i$  UNA ISTANZA DI UN PROBLEMA

$$P = \langle I, S, R, S \cup \{\perp\}, Q \rangle$$

UNO **SPAZIO DI RICERCA DI P PER  $i$**  È COSTITUITO DA:

- UN INSIEME  $Z_i$  CON ASSOCIATE DUE FUNZIONI:

- LA **FUNZIONE DI AMMISSIBILITÀ**:

$$a: Z_i \rightarrow \{\text{TRUE}, \text{FALSE}\}$$

- LA **FUNZIONE DI RISPOSTA**:

$$o: Z_i \rightarrow S$$

CHE SODDISFANO LE SEGUENTI CONDIZIONI:

1) PER OGNI ELEMENTO  $z$  DI  $Z_i$ ,  $a(z) = \text{TRUE}$  SE E SOLO SE  $o(z)$  È SOLUZIONE DI  $P$  PER  $i$ ;

2)  $i$  HA RISPOSTA POSITIVA SE E SOLO SE VI È ALMENO UN ELEMENTO  $z$  DI  $Z_i$  PER CUI

$$a(z) = \text{TRUE}$$

E  $o(z)$  È UNA RISPOSTA A  $P$  PER  $i$ .



## **DEFINIZIONE/2**

- UN METODO PER RAPPRESENTARE OGNI ELEMENTO DI  $Z_i$  MEDIANTE UNA STRUTTURA DI DATI (VETTORE, MATRICE, LISTA, ALBERO,...) E PER ESPRIMERE LA FUNZIONE DI AMMISSIBILITÀ E DI RISPOSTA IN TERMINI DI TALE STRUTTURA.

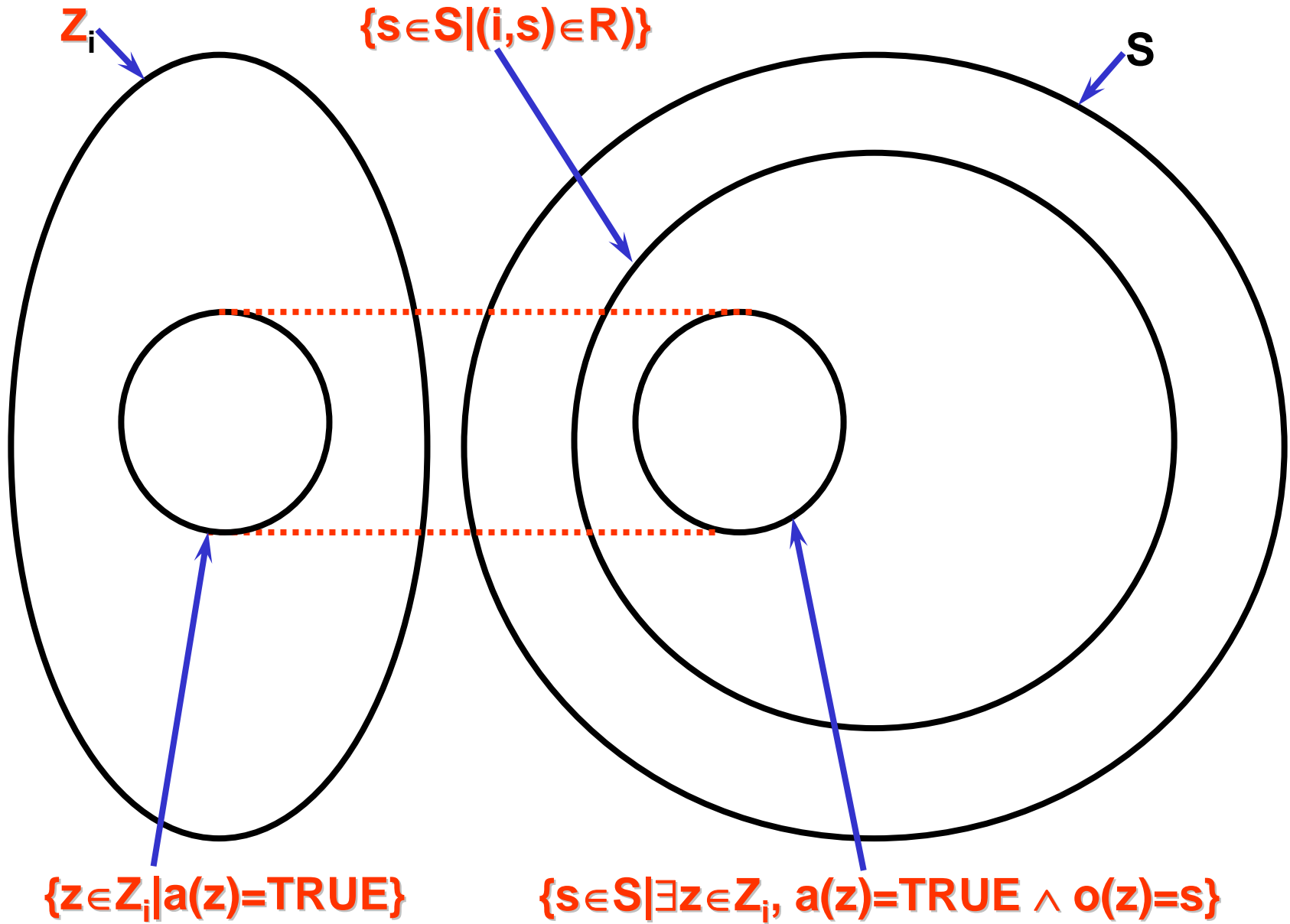
***LO SPAZIO DI RICERCA ASSOCIATO AD UNA ISTANZA  $i$  DI  $P$  CARATTERIZZA LE SOLUZIONI E LE CORRISPONDENTI RISPOSTE A  $P$  PER L'ISTANZA  $i$ .***



## STRUTTURA DELLO SPAZIO DI RICERCA PER PROBLEMI DI RICERCA CON RISPOSTA POSITIVA

- L'INSIEME  $\{s \in S \mid (i, s) \in R\}$  RAPPRESENTA LE SOLUZIONI DI P PER L'ISTANZA  $i$  (PER UN PROBLEMA DI RICERCA QUESTO INSIEME COINCIDE CON L'INSIEME DELLE RISPOSTE);
- L'INSIEME  $\{s \in S \mid \exists z \in Z_i, a(z) = \text{TRUE} \wedge o(z) = s\}$  È COSTITUITO DALLE SOLUZIONI DI P PER L'ISTANZA  $i$  CHE SONO RAPPRESENTATE NELLO SPAZIO DI RICERCA;
- LO SPAZIO DI RICERCA NON RAPPRESENTA NECESSARIAMENTE TUTTE LE SOLUZIONI AD  $i$ . SE ESISTONO RISPOSTE POSITIVE PER  $i$  BASTA CHE UNA SIA RAPPRESENTATA NELLO SPAZIO DI RICERCA.







## ESEMPIO: RICERCA DI UN ELEMENTO IN UN VETTORE

CONSIDERIAMO UNA GENERICA ISTANZA DEL PROBLEMA CON INPUT UN VETTORE  $V$  DI  $N$  ELEMENTI E UN NUMERO  $M$ .

- LO SPAZIO DI RICERCA ASSOCIATO A TALE ISTANZA È L'INSIEME DEI VALORI CHE SONO INDICI DEL VETTORE (INTERI DA 1 A  $N$ ).
- LA FUNZIONE DI AMMISSIBILITÀ VERIFICA, DATO UN  $j$ , SE  $V[j]=M$ .
- LA FUNZIONE DI RISPOSTA RESTITUISCE  $j$ .
- LA STRUTTURA DATI PER RAPPRESENTARE I SINGOLI ELEMENTI DELL'INSIEME È UNA SEMPLICE VARIABILE DI TIPO INTERO.



PER I **PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE** VALGONO LE SEGUENTI OSSERVAZIONI:

- LA DEFINIZIONE DI SPAZIO DI RICERCA STABILISCE CHE LA FUNZIONE DI AMMISSIBILITÀ DEVE ASSICURARE CHE:

$$\forall i \in Z_i, a(z) = \text{TRUE} \text{ IFF } (i, o(z)) \in R$$

*(CONDIZIONI RELATIVE ALLA RELAZIONE CARATTERISTICA E NON AL QUESITO);*

- OTTENERE UNA RISPOSTA PER UNA CERTA ISTANZA SIGNIFICA CALCOLARE UNA SOLUZIONE OTTIMALE: LO SPAZIO DI RICERCA DEVE INCLUDERE **ALMENO** UN ELEMENTO DAL QUALE SI POSSA OTTENERE **UNA SOLUZIONE OTTIMALE** ALL'ISTANZA.



# STRUTTURA DELLO SPAZIO DI RICERCA PER PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE CON RISPOSTA POSITIVA

PER UN PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE:

- L'INSIEME

$$\{s \in S \mid (i, s) \in R \wedge \neg \exists s' \in S, (i, s') \in R \wedge m(i, s') \subseteq m(i, s)\}$$

RAPPRESENTA LE SOLUZIONI OTTIMALI DI P PER L'ISTANZA i, CIOÈ LE RISPOSTE A P PER i;

- UNO SPAZIO DI RICERCA PER i DI P DEVE CONTENERE LA RAPPRESENTAZIONE DI ALMENO UNA TRA LE SOLUZIONI OTTIMALI SE ESISTONO.

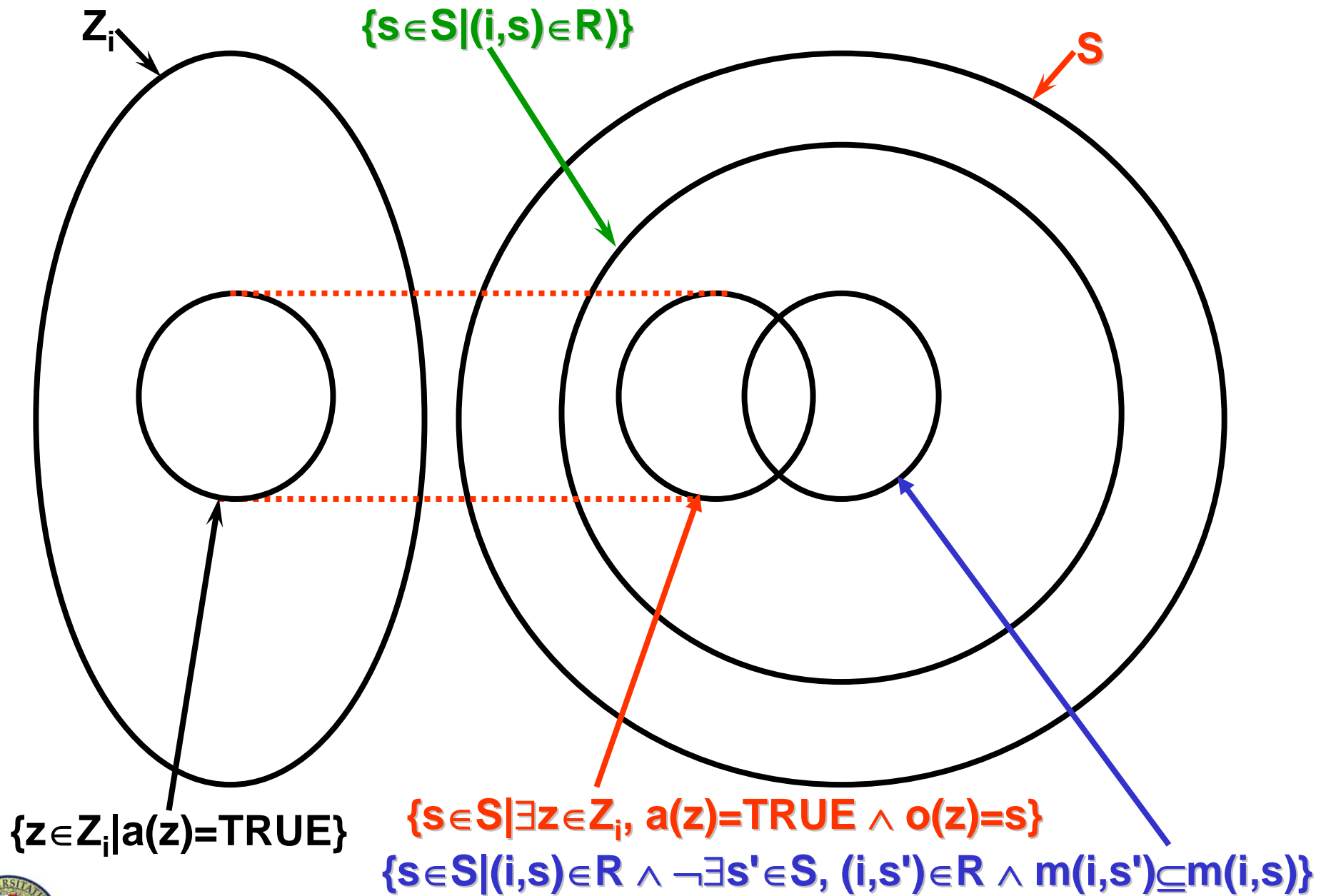
CIOÈ **NON** DEVE ESSERE **VUOTA** L'INTERSEZIONE TRA L'INSIEME:

$$\{s \in S \mid (i, s) \in R \wedge \neg \exists s' \in S, (i, s') \in R \wedge m(i, s') \subseteq m(i, s)\}$$

E

$$\{s \in S \mid \exists z \in Z_i, a(z) = \text{TRUE} \wedge o(z) = s\}$$





# SPAZIO DI RICERCA PER IL PROBLEMA DELLO ZAINO

DATA UNA ISTANZA  $(P_1, \dots, P_n, C_1, \dots, C_n, B)$  DEL PROBLEMA LO SPAZIO DI RICERCA E' DEFINITO NEL SEGUENTE MODO:

- L'INSIEME DELLE POSSIBILI SEQUENZE FINITE:

$$\langle X_1, \dots, X_n \rangle$$

CON  $X_i \in \{0, 1\}$ ;

- LA FUNZIONE DI AMMISSIBILITA' RESTITUISCE TRUE IFF LA SEQUENZA SODDISFA LA RELAZIONE

$$\sum_{i=1}^n C_i X_i \leq B ;$$

- LA FUNZIONE DI RISPOSTA E' LA FUNZIONE IDENTITA'
- LA STRUTTURA DI DATI PER RAPPRESENTARE LA SEQUENZA E' UN VETTORE DI DIMENSIONE  $n$  I CUI ELEMENTI POSSONO ASSUMERE I VALORI 0 E 1.



# DIFFERENZE TRA SPAZIO DELLE SOLUZIONI E SPAZIO DI RICERCA PER UN PROBLEMA P

- LO **SPAZIO DELLE SOLUZIONI** È UNA COMPONENTE DELLA SPECIFICA DEL PROBLEMA E FA GLOBALMENTE RIFERIMENTO A **TUTTE LE POSSIBILI SOLUZIONI** PER IL PROBLEMA;
- LO **SPAZIO DI RICERCA** FORNISCE UNO STRUMENTO PER **CARATTERIZZARE LE SOLUZIONI** DI OGNI SINGOLA ISTANZA DEL PROBLEMA;
- LO **SPAZIO DI RICERCA** DETERMINA ANCHE, PER OGNI ISTANZA DEL PROBLEMA, UNA STRUTTURA DI DATI E UN **MECCANISMO PER VERIFICARE**, TRAMITE LA FORMULAZIONE DELLA FUNZIONE DI AMMISSIBILITÀ IN TERMINI DI TALE STRUTTURA, **SE UNA SUA CONFIGURAZIONE CORRISPONDE O MENO AD UNA SOLUZIONE** PER L'ISTANZA E UN **METODO PER DERIVARE**, TRAMITE LA FORMULAZIONE DELLA FUNZIONE DI RISPOSTA, **UNA RISPOSTA** ALL'ISTANZA.



# SPAZIO DI RICERCA PER UN PROBLEMA P

**ESISTONO DIVERSI MODI PER DETERMINARE UNO SPAZIO DI RICERCA DI UN PROBLEMA. CRITERI PER VALUTARE LA QUALITA' DI UNA SCELTA RISPETTO AD UN'ALTRA:**

- **LO SPAZIO DI RICERCA DEVE CARATTERIZZARE LE SOLUZIONI AD UNA ISTANZA IN MODO NON RIDONDANTE: E' OPPORTUNO SCEGLIERE UNA STRUTTURA DATI CHE ESCLUDA A PRIORI CONFIGURAZIONI CHE NON CORRISPONDONO A PRIORI AD ALCUNA SOLUZIONE.**
- **LO SPAZIO DI RICERCA NON DEVE ESSERE UNA BANALE RIFORMULAZIONE DEL PROBLEMA E DELLA SUA RELAZIONE CARATTERISTICA, NE' DEVE NASCONDERE LA DIFFICOLTA' DI UN PROBLEMA, MA DEVE FORNIRE ELEMENTI SIGNIFICATIVI PER LA COMPrensione DELLA STRUTTURA DEL PROBLEMA E DELLE SUE SOLUZIONI.**



# ESEMPIO: PROBLEMA DELLE N REGINE

SIA  $i$  LA DIMENSIONE DELLA SCACCHIERA:

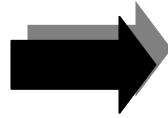
- L'INSIEME CHE FORMA LO SPAZIO DI RICERCA È L'INSIEME DI TUTTE LE POSSIBILI SCACCHIERE DI DIMENSIONE  $i$  IN CUI SONO POSTE  $i$  REGINE;
- LA FUNZIONE DI AMMISSIBILITÀ VERIFICA SE LA SCACCHIERA SODDISFA I VINCOLI DEL PROBLEMA, CIOÈ SE NON ESISTONO NELLA SCACCHIERA DUE REGINE PIAZZATE NELLA STESSA RIGA O COLONNA O DIAGONALE;
- LA FUNZIONE DI RISPOSTA È LA FUNZIONE IDENTITÀ;
- LA STRUTTURA DI DATI È UNA MATRICE  $i \times i$  MAGARI DI CARATTERI IN CUI IL CARATTERE  $Q$  OPPURE IL SIMBOLO SPECIALE  $\Re$  INDICA LA POSIZIONE DELLA REGINA.





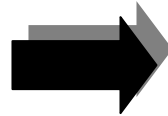
## AD ESEMPIO:

		Q	
Q			
	Q		
			Q



**CONFIGURAZIONE NON AMMESSA**

		Q	
Q			
			Q
	Q		



**CONFIGURAZIONE AMMISSIBILE**

## ESEMPIO: PROBLEMA DELLE N REGINE

MA LA RAPPRESENTAZIONE È MIGLIORABILE?

- PER ESCLUDERE CONFIGURAZIONI CON DUE REGINE SULLA STESSA RIGA RAPPRESENTIAMO LA CONFIGURAZIONE DI SCACCHIERA MEDIANTE UN **VETTORE** DI DIMENSIONE  $i$  CON ELEMENTI INTERI COMPRESI TRA **1** ED  $i$ :

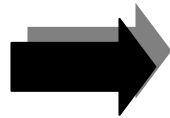
*SE L'ELEMENTO IN POSIZIONE  $j$  DEL VETTORE È  $h$  VUOL DIRE CHE LA **REGINA DELLA RIGA  $j$**  È IN **COLONNA  $h$** ;*

- PER ESCLUDERE CONFIGURAZIONI ERRATE BASTA ESCLUDERE VETTORI CHE HANNO VALORI UGUALI IN POSIZIONI DIVERSE.



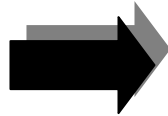
## AD ESEMPIO:

		$\Re$	
$\Re$			
	$\Re$		
			$\Re$



3	1	2	4
---	---	---	---

		$\Re$	
$\Re$			
			$\Re$
	$\Re$		



3	1	4	2
---	---	---	---



## ALLORA, PER IL PROBLEMA DELLE N REGINE :

- L'INSIEME DEGLI ELEMENTI DELLO SPAZIO DI RICERCA COINCIDE CON TUTTI I POSSIBILI MODI DI MEMORIZZARE I VALORI DA 1 A  $i$  IN UN VETTORE  $V$  CON  $i$  ELEMENTI (*TUTTE LE POSSIBILI PERMUTAZIONI DI  $(1,...,i)$* );
- LA FUNZIONE DI AMMISSIBILITÀ VERIFICA SE IL GENERICO ELEMENTO DELLO SPAZIO DI RICERCA, CIOÈ IL GENERICO VETTORE  $V$ , NON CONTENGA DUE ELEMENTI IN POSIZIONE  $h$  E  $k$  TALI CHE
$$|V[h]-V[k]| = |h-k|$$
(*DUE REGINE NELLA STESSA DIAGONALE*);
- LA FUNZIONE DI RISPOSTA RICOSTRUISCE SEMPLICEMENTE, A PARTIRE DA UN GENERICO VETTORE, LA CORRISPONDENTE CONFIGURAZIONE DELLA SCACCHIERA.



# TECNICHE ALGORITMICHE

**SONO BASATE SU DIVERSI PARADIGMI DI UTILIZZO DELLO SPAZIO DI RICERCA E CONSIDERIAMO:**

- **LA TECNICA DI ENUMERAZIONE**
- **LA TECNICA BACKTRACKING**
- **LA TECNICA GOLOSA (GREEDY)**
- **LA TECNICA DIVIDE ET IMPERA**

**I PARADIGMI SONO**

**IL PARADIGMA SELETTIVO**

**IL PARADIGMA GENERATIVO**



DAL PARADIGMA **SELETTIVO** SONO CREATE  
TECNICHE DI PROGETTO DI ALGORITMI CHE, PER  
L'ISTANZA DEL PROBLEMA PRESA IN  
CONSIDERAZIONE, VISITANO LO SPAZIO DI RICERCA  
TENTANDO DI TROVARE UN ELEMENTO  
AMMISSIBILE.

OGNI ALGORITMO FA RIFERIMENTO **ALL'INTERO  
SPAZIO DI RICERCA** CHE VIENE **ESPLORATO** CON  
SISTEMATICITÀ IN UNA DEFINITA MODALITÀ.

APPARTENGONO A QUESTO PARADIGMA LA  
TECNICA **ENUMERATIVA** E QUELLA DI  
**BACKTRACKING**.



DAL PARADIGMA **GENERATIVO** SCATURISCONO  
TECNICHE DI PROGETTO DI ALGORITMI CHE  
GENERANO DIRETTAMENTE LA SOLUZIONE SENZA  
SELEZIONARLA TRA GLI ELEMENTI DELLO SPAZIO DI  
RICERCA.

IN QUESTO PARADIGMA LO **SPAZIO DI RICERCA** È  
CONSIDERATO ESCLUSIVAMENTE IN FASE DI  
PROGETTO DELL'ALGORITMO ALLO SCOPO DI  
**CARATTERIZZARE LE SOLUZIONI DEL PROBLEMA** E  
DEFINIRE UNA STRATEGIA RISOLUTIVA DIRETTA  
PER OGNI ISTANZA.

APPARTENGONO A QUESTO PARADIGMA LA  
**TECNICA GOLOSA** E LA **DIVIDE- ET-IMPERA**.

