Corso di Laurea in INFORMATICA

a.a. 2011-2012

Algoritmi e Strutture Dati

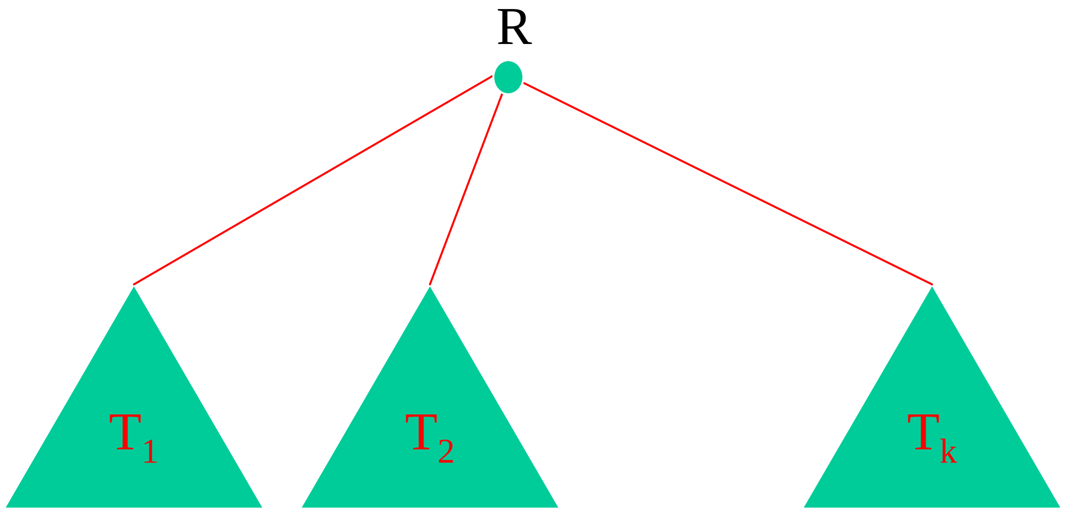
MODULO 10

STRUTTURE NON LINEARI

Alberi n-ari: specifiche sintattiche e semantiche. Realizzazioni. Visita di alberi n-ari.

tipo di dato astratto albero

albero: insieme vuoto di nodi oppure costituito da una radice R e da 0 o più sottoalberi. Ogni radice di ogni sottoalbero è collegata a R da un arco.



es.: albero con una radice e k sottoalberi ➡ k = grado della radice

ALBERO N-ARIO

L'ALBERO N-ARIO È UN TIPO ASTRATTO DI DATI UTILIZZATO PER RAPPRESENTARE RELAZIONI GERARCHICHE TRA OGGETTI.

E' *RADICATO* E SI ASSUME CHE SUI FIGLI DI OGNI NODO SIA DEFINITA UNA RELAZIONE D'ORDINE (*ALBERO RADICATO ORDINATO*).

DEFINIZIONE:

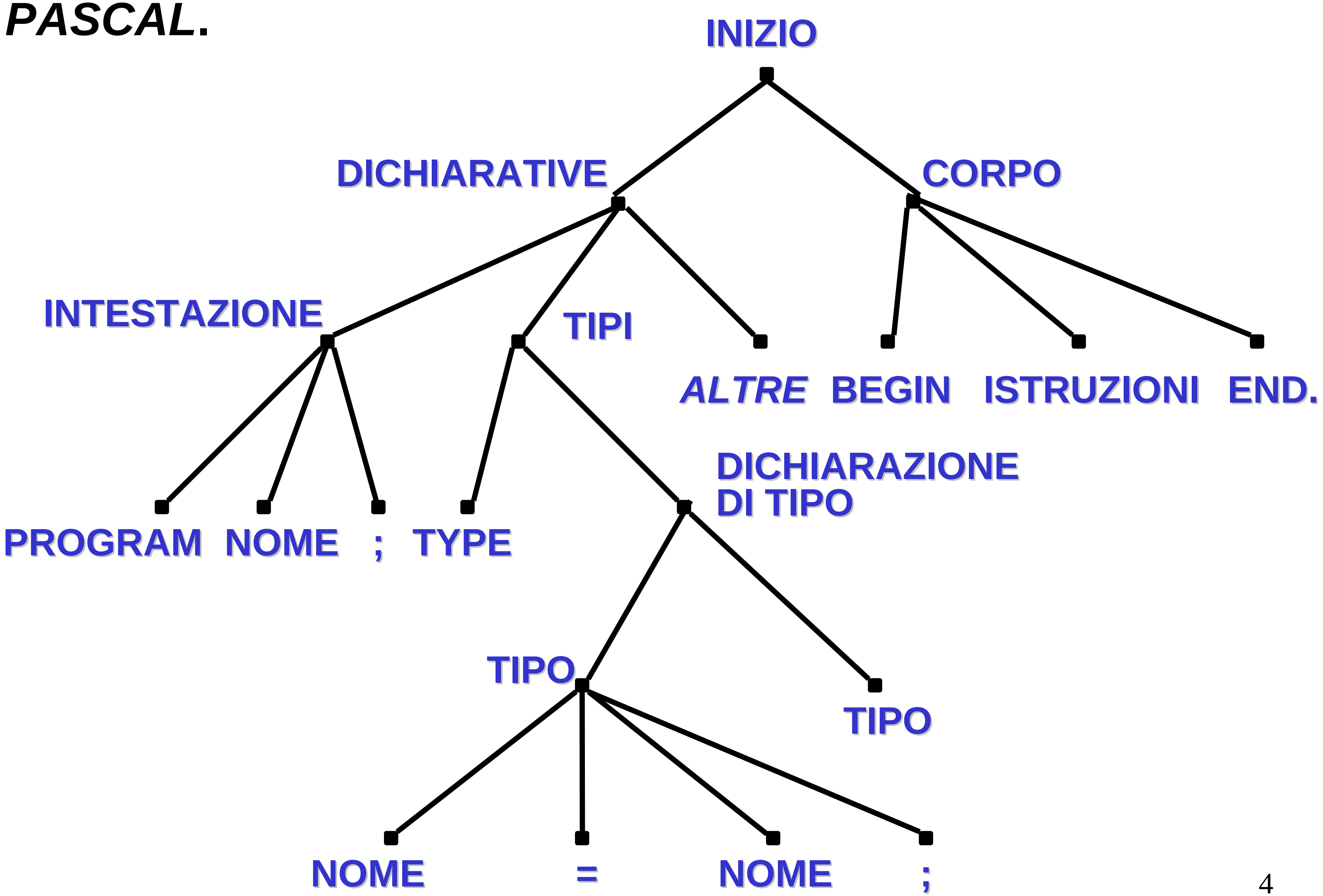
UN ALBERO È UN *GRAFO ORIENTATO* CHE:

- È VUOTO

OPPURE HA LE SEGUENTI CARATTERISTICHE:

- ESISTE UN NODO **R**, DETTO RADICE, SENZA PREDECESSORI, CON n ($n \geq 0$) NODI SUCCESSORI a_1, a_2, …, a_n;
- TUTTI GLI ALTRI NODI SONO RIPARTITI IN n SOTTOALBERI MUTUAMENTE DISGIUNTI T_1, T_2, …, T_n AVENTI RISPETTIVAMENTE a_1, a_2, …, a_n COME RADICE.

ESEMPIO: **APPLICAZIONE DEGLI ALBERI PER DEFINIRE LA GRAMMMATICA DEL LINGUAGGIO *PASCAL*.**



SPECIFICA SINTATTICA

Tipi: ***albero, boolean, nodo***

Operatori:

CREAALBERO: ( ) $\rightarrow$ *albero*
ALBEROVUOTO: (*albero*) $\rightarrow$ *boolean*
INSRADICE: (*nodo, albero*) $\rightarrow$ *albero*
RADICE: (*albero*) $\rightarrow$ *nodo*
PADRE: (*nodo, albero*) $\rightarrow$ *nodo*
FOGLIA: (*nodo, albero*) $\rightarrow$ *boolean*
PRIMOFIGLIO: (*nodo, albero*) $\rightarrow$ *nodo*
ULTIMOFRATELLO: (*nodo, albero*) $\rightarrow$ *boolean*
SUCCFRATELLO: (*nodo, albero*) $\rightarrow$ *nodo*
INSPRIMOSOTTOALBERO:(*nodo,albero,albero*)$\rightarrow$*albero*
INSSOTTOALBERO: (*nodo, albero, albero*) $\rightarrow$ *albero*
CANCSOTTOALBERO: (*nodo, albero*) $\rightarrow$ *albero*

SPECIFICA SEMANTICA

Tipi:
albero=insieme degli alberi ordinati T=<N,A> in cui ad ogni nodo n in N è associato il livello(n);
boolean=insieme dei valori di verità;
nodo=insieme qualsiasi (non infinito).

Operatori:

CREAALBERO=T'
  POST: T'=Λ (ALBERO VUOTO)

ALBEROVUOTO(T)=b
  POST: b=VERO SE T=Λ
  b=FALSO, ALTRIMENTI

INSRADICE(u, T) =T'
  PRE: T=Λ
  POST: T'=(N,A), N={u}, LIVELLO(u)=0, A=Ø

RADICE(T) =u
  PRE: T$\neq\Lambda$
  POST: u$\Rightarrow$RADICE DI T$\Rightarrow$LIVELLO(u)=0

PADRE(u, T) =v
  PRE: T$\neq\Lambda$, u$\in$N, LIVELLO(u)>0
  POST: v È PADRE DI u, <v,u>$\in$A
  LIVELLO(u)=LIVELLO(v)+1

FOGLIA(u, T) =b

PRE: $T \neq \Lambda$, $u \in N$

POST: b=VERO SE $\neg \exists\, v \in N \ni' \langle u,v \rangle \in A \wedge$
$\wedge$ LIVELLO(v)=LIVELLO(u)+1
b=FALSO, ALTRIMENTI

PRIMOFIGLIO(u, T) =v

PRE: $T \neq \Lambda$, $u \in N$, FOGLIA(u, T)=FALSO

POST: $\langle u,v \rangle \in A$, LIVELLO(v)=LIVELLO(u)+1
v È PRIMO SECONDO LA RELAZIONE D’ORDINE STABILITA TRA I FIGLI DI u

ULTIMOFRATELLO(u, T) =b

PRE: $T \neq \Lambda$, $u \in N$

POST: b=VERO SE NON ESISTONO ALTRI FRATELLI DI u CHE LO SEGUONO NELLA RELAZIONE D’ORDINE
b=FALSO, ALTRIMENTI

SUCCFRATELLO(u, T) =v

PRE: $T \neq \Lambda$, $u \in N$, ULTIMOFRATELLO(u, T)=FALSO

POST: v È IL FRATELLO DI u CHE LO SEGUE NELLA RELAZIONE D’ORDINE

INSPRIMOSOTTOALBERO(u, T, T') =T''

PRE: T$\neq\Lambda$, T '$\neq\Lambda$, u$\in$N

POST: T'' È OTTENUTO DA T AGGIUNGENDO L'ALBERO T' LA CUI RADICE r' È IL NUOVO PRIMOFIGLIO DI u

INSSOTTOALBERO(u, T, T') =T''

PRE: T$\neq\Lambda$, T '$\neq\Lambda$, u$\in$N, u NON È RADICE DI T

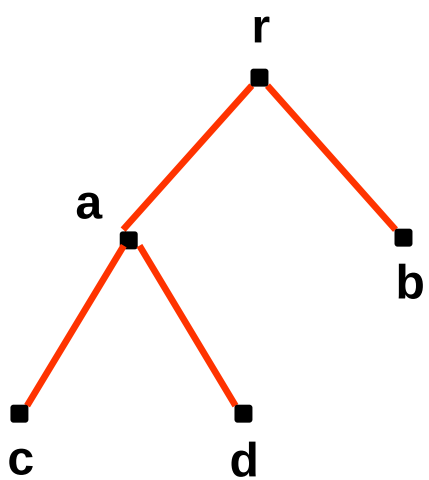
POST: T'' È L'ALBERO OTTENUTO DA T AGGIUNGENDO IL SOTTOALBERO T' DI RADICE r' (CIOÈ r' DIVENTA IL NUOVO FRATELLO CHE SEGUE u NELLA RELAZIONE D'ORDINE)

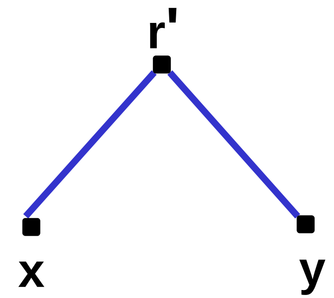
CANCSOTTOALBERO(u, T) =T'

PRE: T$\neq\Lambda$, u$\in$N

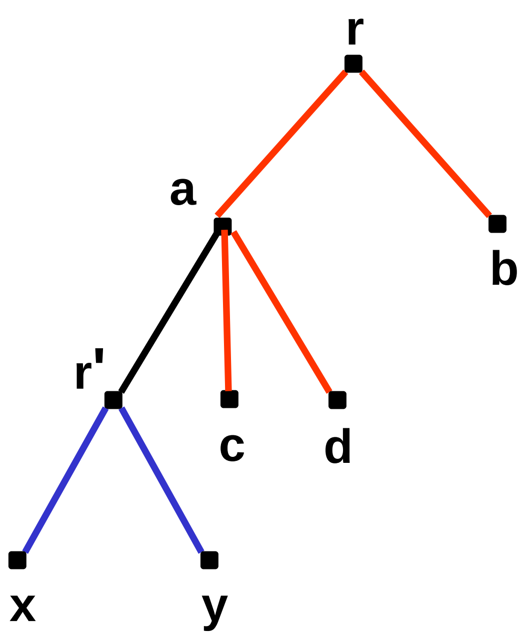
POST: T' È OTTENUTO DA T TOGLIENDOVI IL SOTTOALBERO DI RADICE u (CIOÈ u E TUTTI I SUOI DISCENDENTI)

ESEMPI DI INSERIMENTI

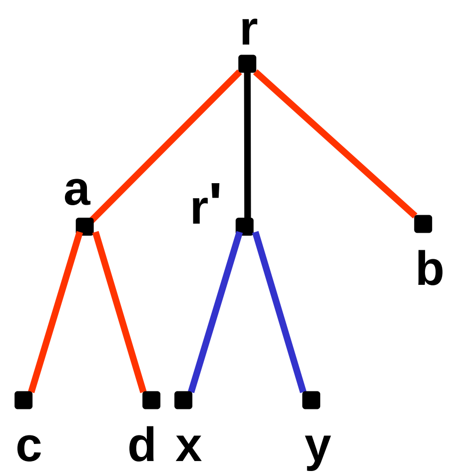




INSPRIMOSOTTOALBERO(a,T,T')

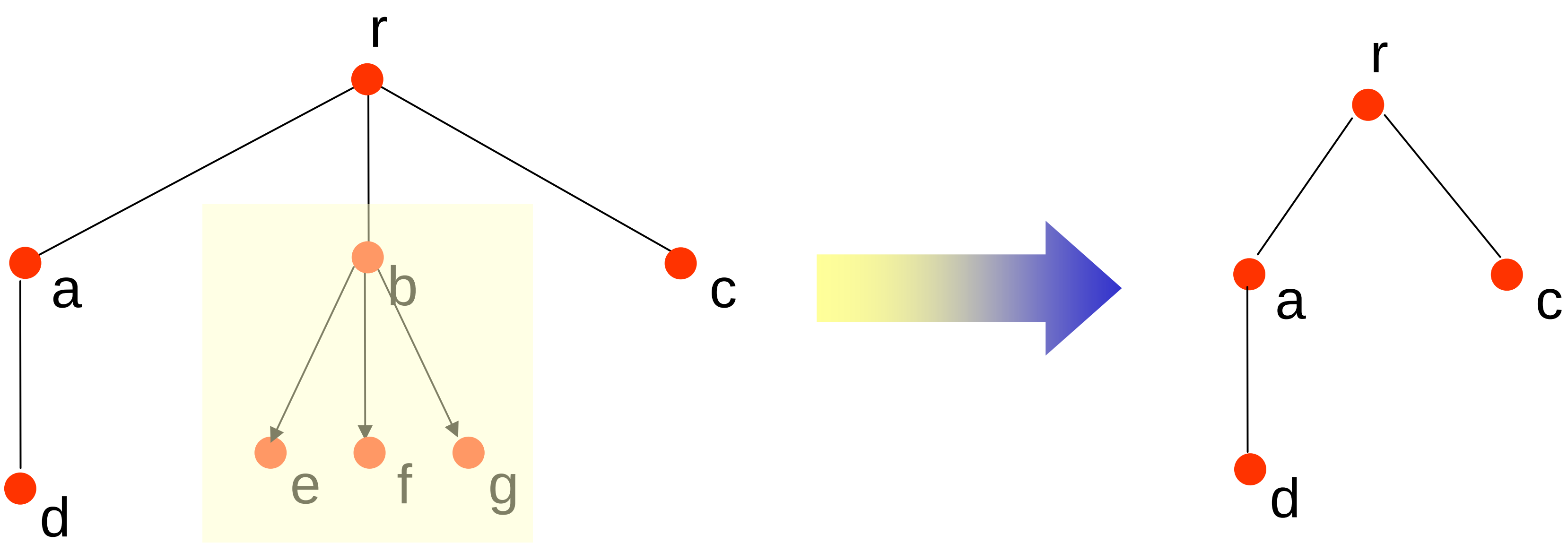


INSSOTTOALBERO(a,T,T')



ESEMPIO DI CANCELLAZIONE

CANCSOTTOALBERO(b,T)



ANCHE PER L'ALBERO N-ARIO SONO UTILI DUE OPERATORI

SPECIFICHE SINTATTICHE

Tipi: Va aggiunto TIPOELEM del tipo dell'etichetta

LEGGINODO: (NODO,ALBERO) → TIPOELEM

SCRIVINODO: (TIPOELEM,NODO,ALBERO) → ALBERO

SPECIFICHE SEMANTICHE

LEGGINODO (n,T) = a

PRE: n E' UN NODO DI T, n $\in$ N

POST: a E' IL VALORE ASSOCIATO AL NODO n IN T

SCRIVINODO (a,n,T) = T'

PRE: n E' UN NODO DI T, n $\in$ N

POST: T' E' IL NUOVO ALBERO CORRISPONDENTE AL VECCHIO T CON IL VALORE a ASSEGNATO AL NODO n

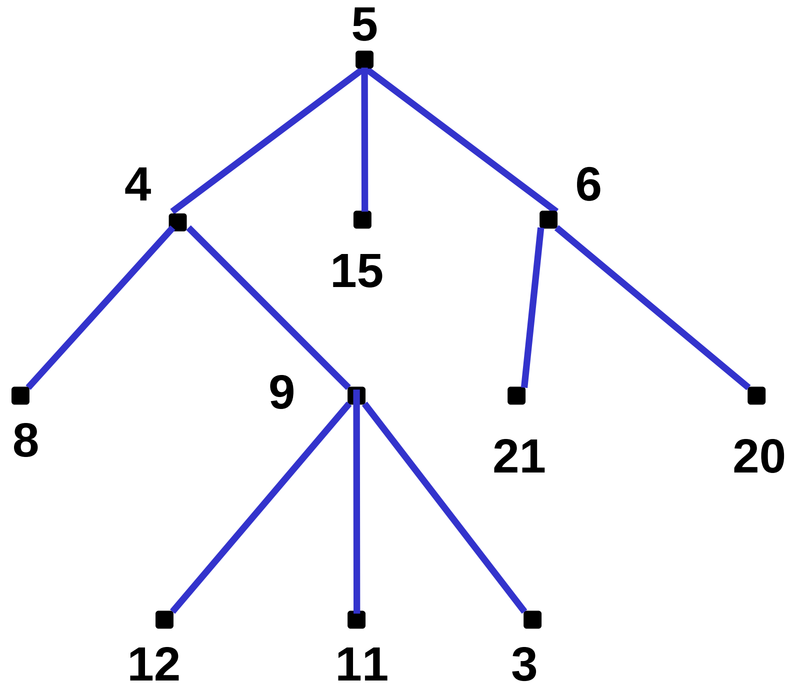
VISITA DI ALBERI

CONSISTE NEL PIANIFICARE E SEGUIRE UNA "ROTTA" CHE CONSENTA DI ESAMINARE OGNI NODO DELL'ALBERO ESATTAMENTE UNA VOLTA.
ESISTONO MODI DIVERSI PER EFFETTUARE UNA VISITA CORRISPONDENTI ALL'*ORDINE* CON CUI SI INTENDE SEGUIRE LA STRUTTURA.

SIA T UN ALBERO NON VUOTO DI RADICE r. SE r NON E' FOGLIA ED HA k (k>0) FIGLI, SIANO T_1, T_2, …, T_k I SOTTOALBERI DI T AVENTI COME RADICI I FIGLI DI r. GLI ORDINI DI VISITA SONO:

- ***PREVISITA*** (*PREORDINE*): CONSISTE NELL'ESAMINARE r E POI, NELL'ORDINE, EFFETTUARE LA PREVISITA DI T_1, T_2, …, T_k;
- ***POSTVISITA*** (*POSTORDINE*): CONSISTE NEL FARE, NELL'ORDINE, PRIMA LA POSTVISITA DI T_1, T_2, …, T_k E POI NELL'ESAMINARE LA RADICE r ;
- ***INVISITA*** (*ORD. SIMMETRICO*): CONSISTE NEL FARE, NELL'ORDINE LA INVISITA DI T_1, T_2, …, T_i, NELL'ESAMINARE r, E POI EFFETTUARE, NELL'ORDINE, LA INVISITA DI T_{i+1}, …, T_k, PER UN PREFISSATO $i \geq 1$.

***ESEMPIO*: SIA UN ALBERO CHE HA DEGLI INTERI NEI NODI:**



LA VISITA IN PREORDINE HA L'EFFETTO DI VISITARE I NODI SECONDO LA SEQUENZA:

5 4 8 9 12 11 3 15 6 21 20

LA VISITA IN POSTORDINE PRODUCE:

8 12 11 3 9 4 15 21 20 6 5

LA INVISITA (i=1) PRODUCE:

8 4 12 9 11 3 5 15 21 6 20

IN PSEUDOCODICE

```
PREVISITA(T: albero; U:nodo)

  esamina nodo U                                  (1)
  if not FOGLIA(U,T) then                         (2)
    C ← PRIMOFIGLIO(U,T)
    while not ULTIMOFRATELLO(C,T) do
      PREVISITA(T,C)
      C ← SUCCFRATELLO(C,T)
    PREVISITA(T,C)
```

SCAMBIANDO L'ORDINE DELLE ISTRUZIONI (1) E (2) SI OTTIENE LA POSTVISITA.

DIAMO ORA LA INVISITA (PER i=1):

```
INVISITA(T:albero; U:nodo)

  if FOGLIA(U,T) then
     esamina nodo U
  else
     C ← PRIMOFIGLIO(U,T)
     INVISITA(T,C)
     esamina nodo U
     while not ULTIMOFRATELLO(C,T) do
        C ← SUCCFRATELLO(C,T)
        INVISITA(T,C)
```

EQUIVALENZA DI ALBERI N-ARI E BINARI

È EVIDENTE CHE SI TRATTA DI UNA *EQUIVALENZA AI FINI DELLA PRE-VISITA*. E' SEMPRE POSSIBILE RAPPRESENTARE UN ALBERO N-ARIO ORDINATO T CON UN ALBERO BINARIO B AVENTE GLI STESSI NODI E LA STESSA RADICE: IN B OGNI NODO HA COME FIGLIO SINISTRO IL PRIMO FIGLIO IN T E COME FIGLIO DESTRO IL FRATELLO SUCCESSIVO IN T.

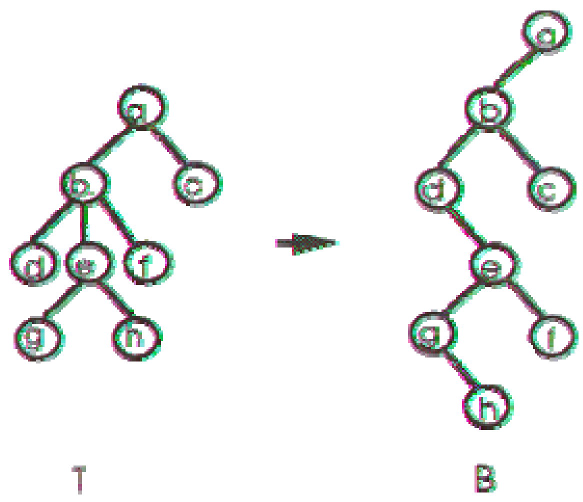


Figura 4.12: Rappresentazione di un albero ordinato T con un albero binario B.

È FACILE NOTARE CHE LE SEQUENZE DI NODI ESAMINATI SU T E SU B COINCIDONO SE T E B SONO VISITATI IN PREVISITA.

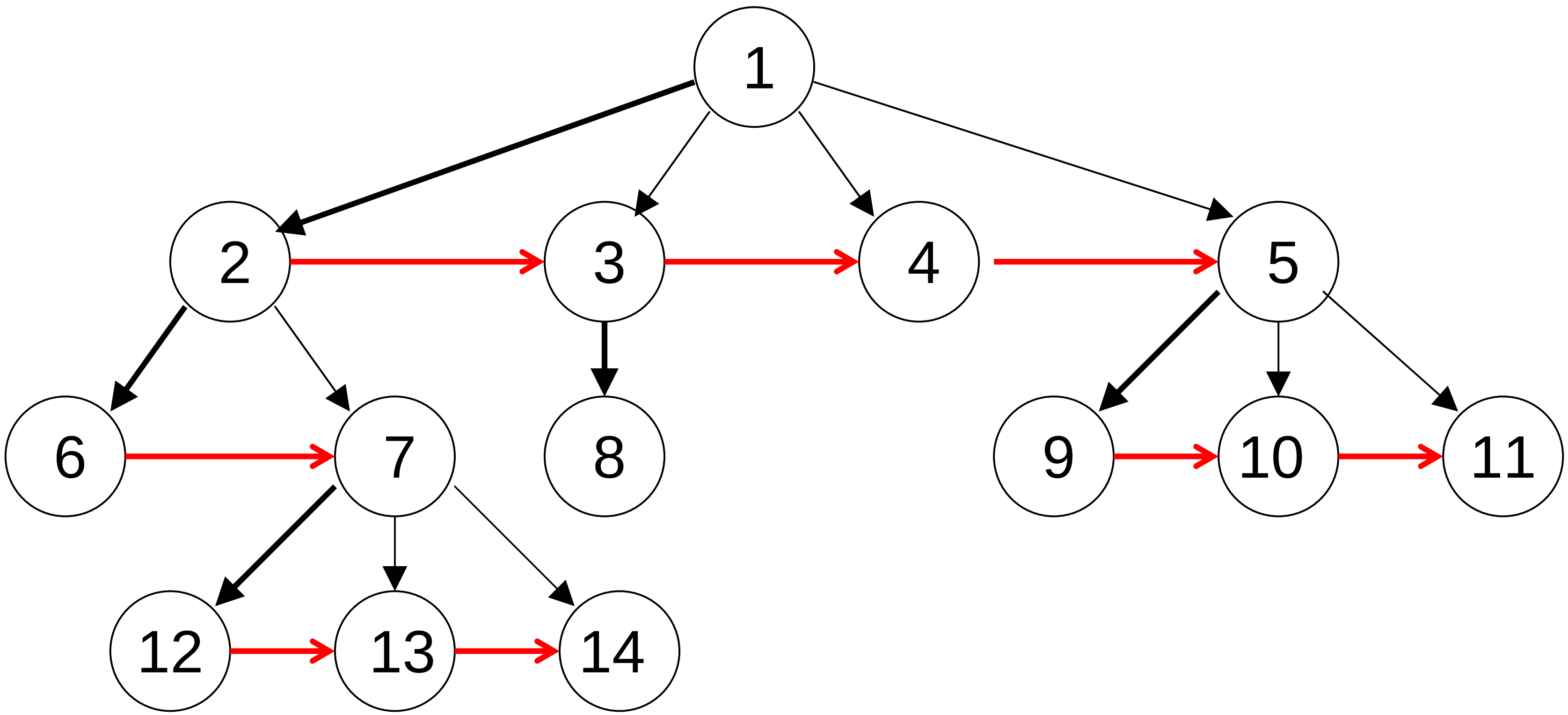
OLTRE ALLE VISITE, UN'ALTRA FUNZIONE UTILE E' LA DI PROFONDITA' DI UN ALBERO INTESA COME IL MASSIMO LIVELLO DELLE FOGLIE.

```
MAXPROFONDITA(U:nodo; T: albero)→integer

  if FOGLIA(U,T) then
    MAXPROFONDITA ← 0
  else
    V ← PRIMOFIGLIO(U,T)
    MAX ← MAXPROFONDITA(V,T)
    repeat
      V ← SUCCFRATELLO(V,T)
      CORR ← MAXPROFONDITA(V,T)
      if MAX ≤ CORR then
        MAX ← CORR
    until ULTIMOFRATELLO(V,T)
    MAXPROFONDITA ← MAX+1
```

VA CHIAMATA COME MAXPROFONDITA(RADICE(T),T).

Rappresentazione di Alberi (n-ari)

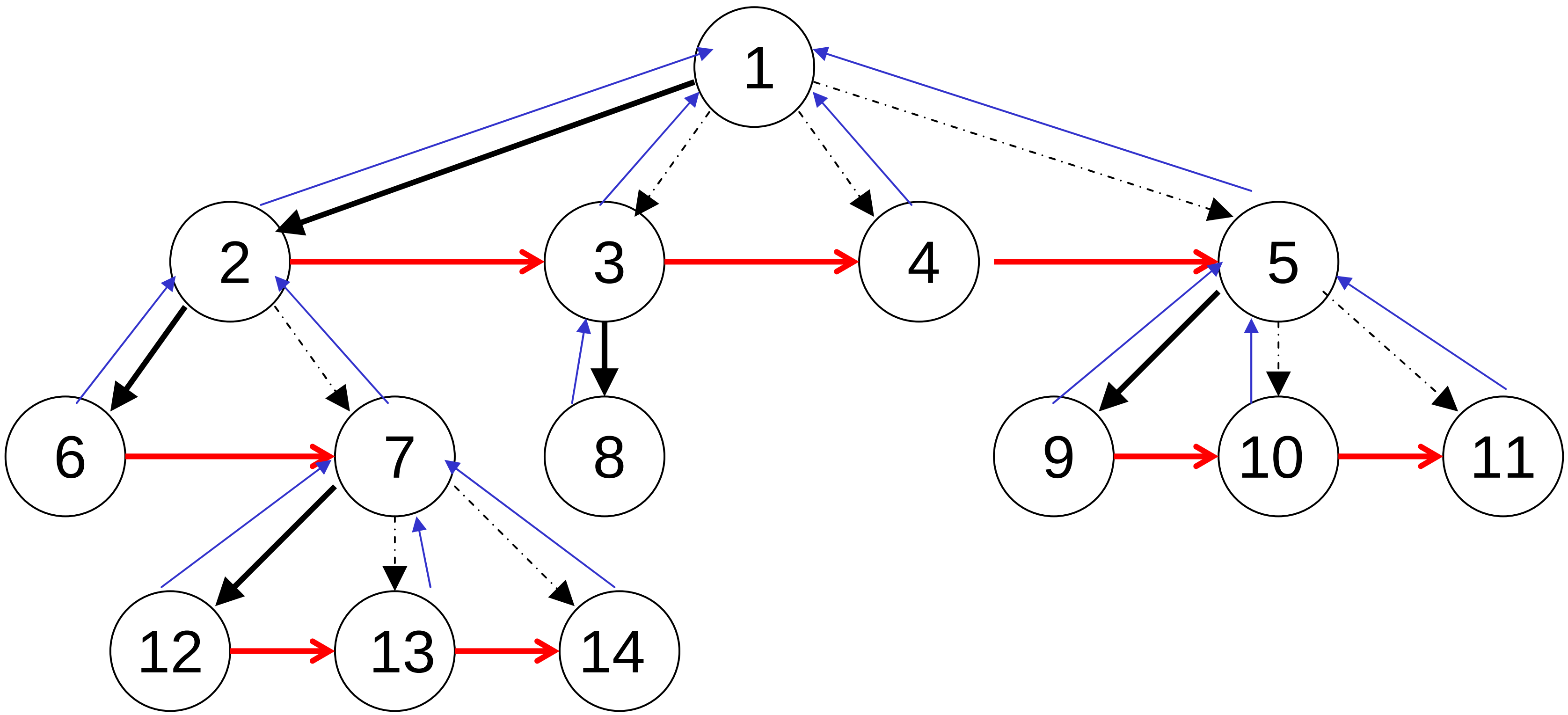


figlio (relazione logica, rappresentata in modo indiretto)

figlio primogenito

fratello

Rappresentazione di Alberi (n-ari)



figlio (relazione logica, rappresentata in modo indiretto)

figlio primogenito

fratello

padre

LA REALIZZAZIONE SEQUENZIALE

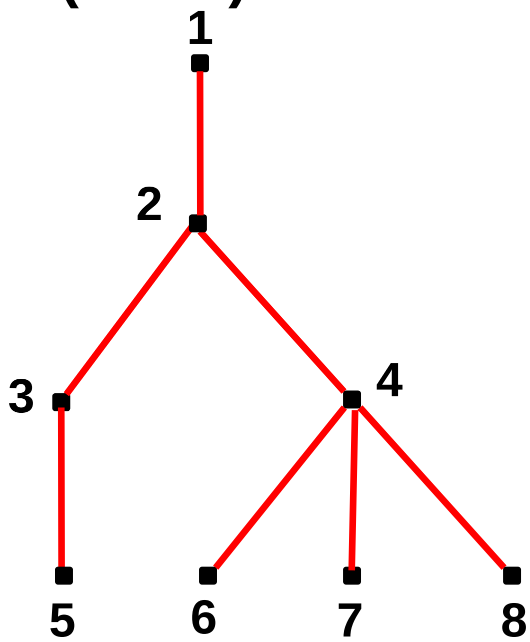
ANCHE PER UN ALBERO N-ARIO UNA POSSIBILE RAPPRESENTAZIONE E' QUELLA SEQUENZIALE STATICA MEDIANTE VETTORE.

IN QUESTO CASO, TUTTAVIA, NON E' PENSABILE RISOLVERLA METTENDO LA RADICE IN PRIMA POSIZIONE, COME PER L'ALBERO BINARIO E UTILIZZANDO L'INDICIZZAZIONE IN POSIZIONE i, PER IL GENERICO NODO p, 2*i PER IL FIGLIO SINISTRO E 2*i+1 PERIL FIGLIO DESTRO.

IL NUMERO DEI FIGLI PER CIASCUN NODO DI UN ALBERO DI RANGO K E' VARIABILE TRA 0 E K ED E' NECESSARIO TROVARE IL MODO DI CONSERVARE LA STRUTTURA MANTENENDO UN RIFERIMENTO TRA OGNI NODO E IL RISPETTIVO PADRE.

REALIZZAZIONE CON VETTORE DI PADRI

IMMAGINANDO DI NUMERARE I NODI DI T DA 1 A n, LA PIÙ SEMPLICE REALIZZAZIONE (SEQUENZIALE) CONSISTE NELL'USARE UN VETTORE CHE CONTIENE, PER OGNI NODO i ($1 \leq i \leq n$) IL CURSORE AL PADRE.



1	0
2	1
3	2
4	2
5	3
6	4
7	4
8	4

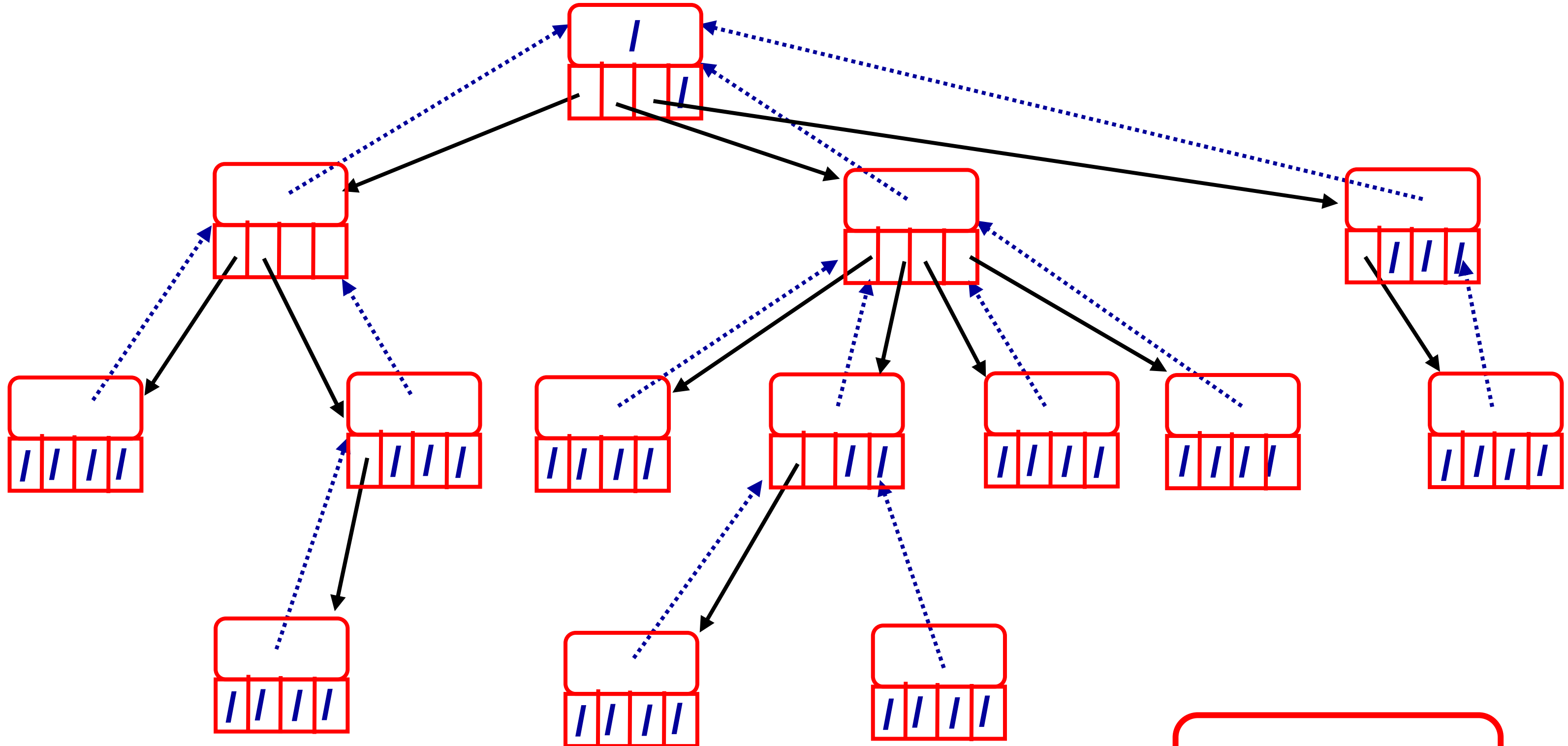
È FACILE, COSÌ, VISITARE I NODI LUNGO PERCORSI CHE VANNO DA FOGLIE A RADICE. È, INVECE, PIÙ COMPLESSO INSERIRE E CANCELLARE SOTTOALBERI.

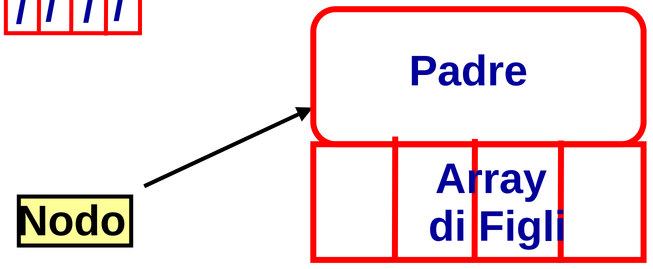
IN QUESTO CASO RISULTA ABBASTANZA SEMPLICE LA REALIZZAZIONE DI ALCUNI OPERATORI. AD ESEMPIO

```
SUCCFRATELLO(U:nodo;
             T: albero)→ nodo

  begin
  j ← T(u)
  I ← u+1
  TROVATO ←  False
     while (not TROVATO and i≤ MAXLUNG) DO
        if T(i) = j then
          begin SUCCFRATELLO ← I
               TROVATO ← True
          end
          else  i ← i+1
        end
   end
```

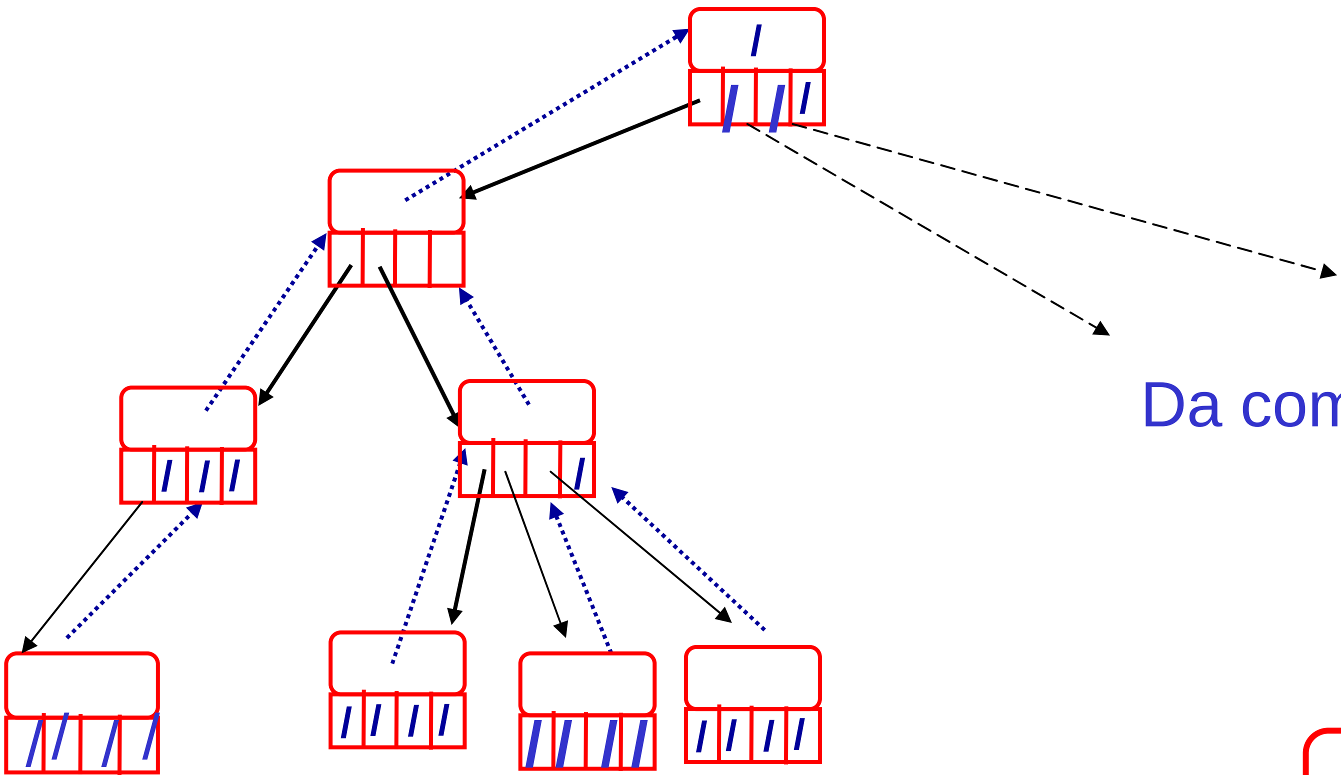
Realizzazione con vettore di figli



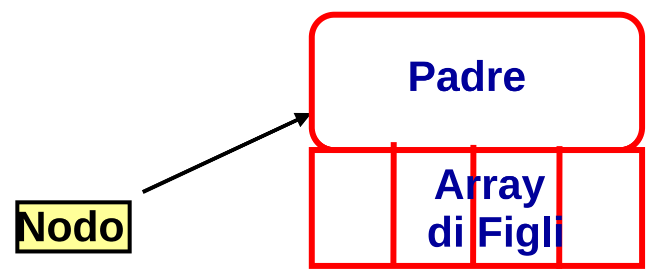


Rischio di sprecare memoria se molti nodi hanno grado minore del grado massimo k.

Esempio precedente



Da completare

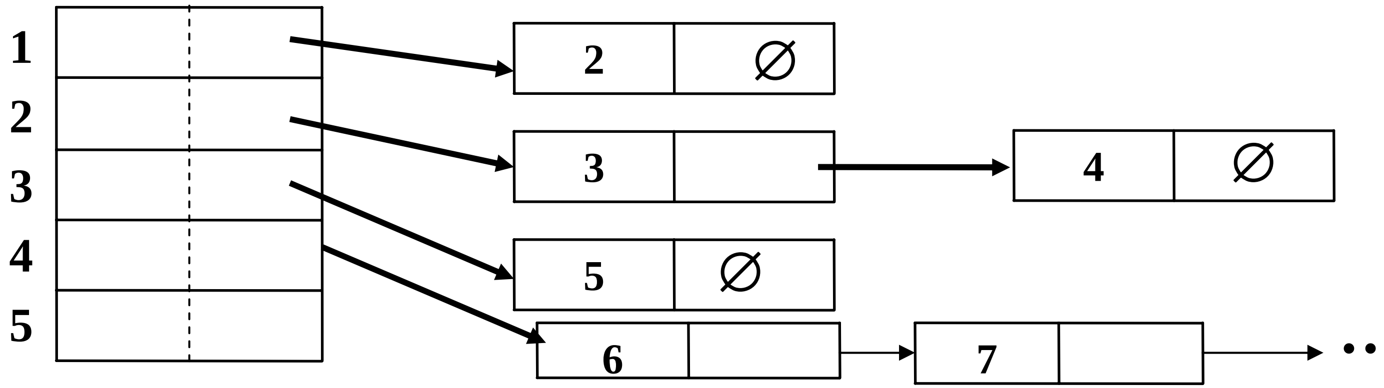


Realizzazione con liste di figli

INTRODUCE UNA *CERTA DINAMICITA*' E COMPRENDE:

- **IL *VETTORE DEI NODI PADRE*, IN CUI, OLTRE ALLE EVENTUALI ETICHETTE DEI NODI, SI MEMORIZZA IL RIFERIMENTO INIZIALE DI UNA LISTA ASSOCIATA AD OGNI NODO;**
- **UNA LISTA PER OGNI NODO, DETTA *LISTA DEI FIGLI*. LA LISTA ASSOCIATA AL GENERICO NODO i CONTIENE TANTI ELEMENTI QUANTI SONO I SUCCESSORI DI i; CIASCUN ELEMENTO È IL RIFERIMENTO AD UNO DEI SUCCESSORI.**

PER L'ESEMPIO PRECEDENTE SI AVREBBE:



TRASCURANDO, IL TIPO LISTA, UNA POSSIBILE DICHIARATIVA PER L'ALBERO POTREBBE PREVEDERE:

```
type   nodo=integer;
       albero=record
              testa:array[1..MAXLUNG] of lista;
              radice:nodo;
              end;
```

GLI OPERATORI POSSONO ESSERE REALIZZATI IN TERMINI DI OPERATORI DELLE LISTE. AD ESEMPIO

```
PRIMOFIGLIO(U:nodo;
             T: albero)→ nodo
   var L: lista
   begin
      L ← T.testa (u)
      PRIMOFIGLIO ← LEGGILISTA(PRIMOLISTA(L),L)
   end
```

```
PADRE(U:nodo; var T:albero) → nodo;
var I:nodo
begin
      I ← 1;
      while (not APPARTIENE(U,T.TESTA[I]) and (I≤N)
      do
            I ← I+1;
            PADRE ← I;
end;
```

QUESTA IMPONE L'USO DI UNA FUNZIONE

```
APPARTIENE(U:nodo; var L:lista) → boolean;
var   P:posizione
      TROVATO:boolean
begin
      P ← PRIMOLISTA(L)
      TROVATO ← false
      while (not TROVATO) and (not FINELISTA(L)) do
            if LEGGILISTA(P,L)=U then
                  TROVATO ← true
      APPARTIENE ← TROVATO;
end
```

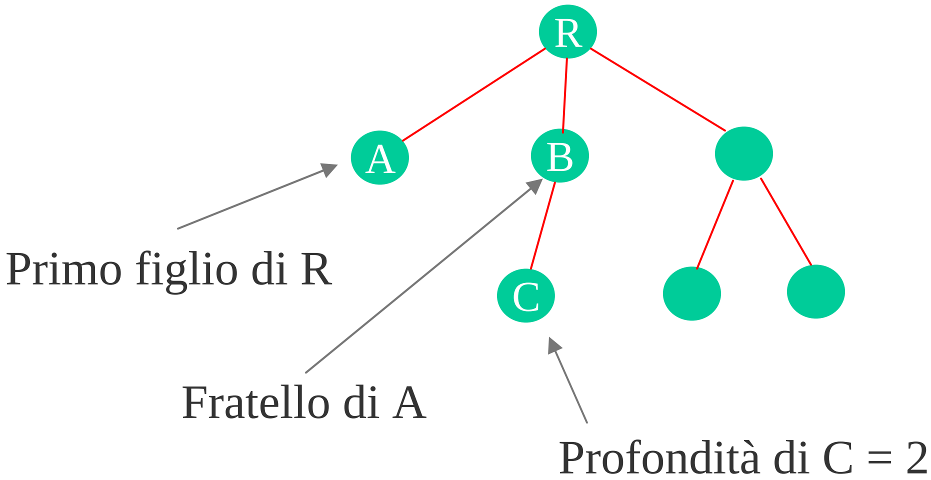
rappresentazione con liste collegate

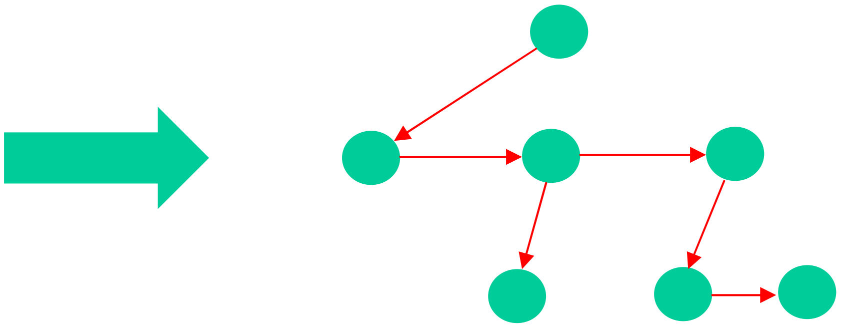
DA UN PUNTO DI VISTA FORMALE L'ALBERO N-ARIO PUÒ ESSERE RAPPRESENTATO MEDIANTE LISTA SECONDO LE SEGUENTI REGOLE:

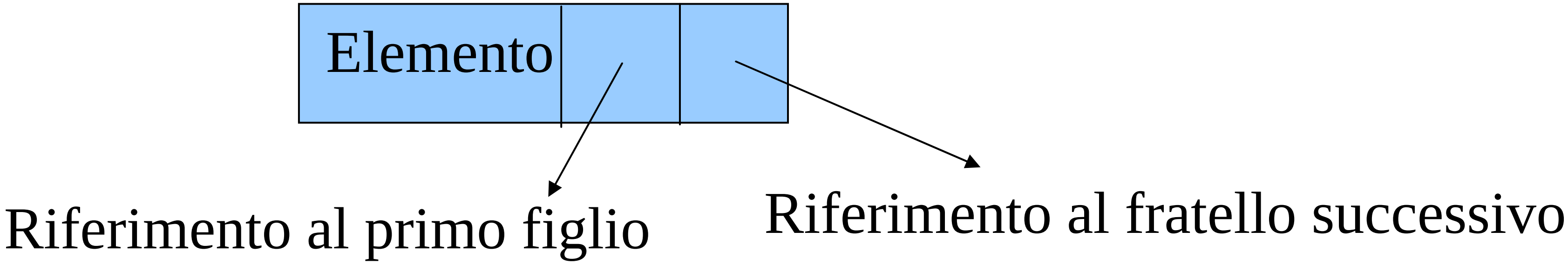
- **SE L'ALBERO È' VUOTO LA LISTA CHE LO RAPPRESENTA È' VUOTA;**

- **ALTRIMENTI, L'ALBERO È' COMPOSTO DA UNA RADICE E DA k SOTTOALBERI T1, T2, …, Tk E LA LISTA È' FATTA DA k+1 ELEMENTI: IL PRIMO RAPPRESENTA LA RADICE, MENTRE GLI ALTRI SONO GLI ALBERI T1, T2, …, Tk (CON $k \geq 0$);**

rappresentazione con liste collegate







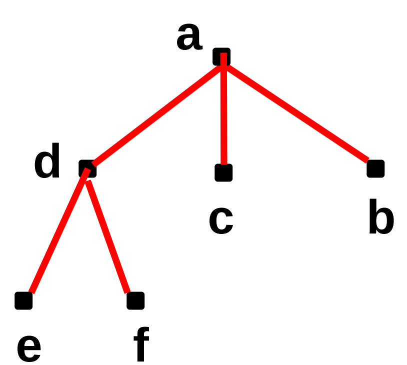
Realizzazione lista primo-figlio/fratello successivo

PREVEDE LA GESTIONE DI UNA LISTA CON CURSORI E QUESTO PUÒ ESSERE FATTO IMPONENDO CHE *OGNI CELLA CONTENGA ESATTAMENTE DUE CURSORI: UNO AL PRIMOFIGLIO ED UNO AL FRATELLO SUCCESSIVO*.
LA REALIZZAZIONE È SIMILE A QUELLA PROPOSTA PER GLI ALBERI BINARI CON L’UNICA DIFFERENZA CHE IL CURSORE NEL TERZO CAMPO PUNTA AL FRATELLO. NATURALMENTE E’ POSSIBILE ANCHE PREVEDERE UN CURSORE AL *PADRE*:

INIZIO

4

	FIGLIO	NODO	FRATELLO
1	0	e	2
2	0	f	0
3	0	c	5
4	7	a	0
5	0	b	0
6			
7	1	d	3
8			



OVVIAMENTE TUTTI GLI ALBERI DEVONO ***CONDIVIDERE UN'AREA COMUNE*** (AD ESEMPIO UN VETTORE AREALIBERA NELLA REALIZZAZIONE CON CURSORI)

LE OPERAZIONI PER SPOSTARSI SULL'ALBERO COSI' COME LE OPERAZIONI DI LETTURA E SCRITTURA DEL VALORE DEL NODO SONO O(1).

LE OPERAZIONI DI INSERIMENTO SONO SIMILI ALLE CORRISPONDENTI OPERAZIONI NELLE LISTE (ordine O(1)), MENTRE LA CANCELLAZIONE, DOVENDO PREVEDERE L'ELIMINAZIONE DELL'INTERO SOTTOALBERO E' O(N).

NULLA IMPEDISCE CHE QUESTA REALIZZAZIONE SIA FATTA CON PUNTATORI PURCHE' SIANO MANTENUTI I RIFERIMENTI AL PRIMO FIGLIO, AL SUCCESSIVO FRATELLO ED EVENTUALMENTE AL PADRE.

Realizzazione lista primo-figlio/fratello successivo

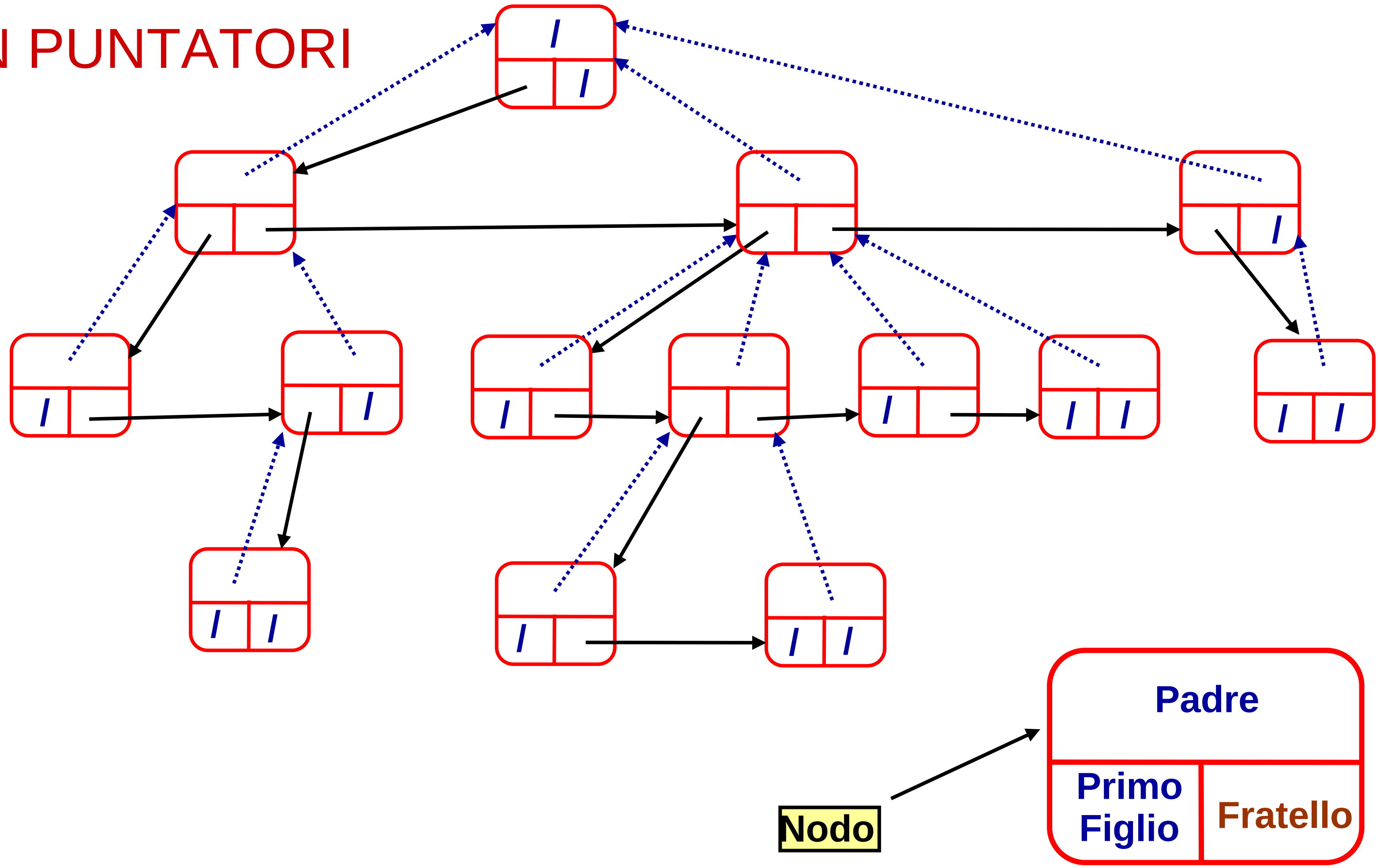
UNA POSSIBILE DICHIARATIVA DI TIPO DELLA IMPLEMENTAZIONE (CON CURSORI E *AREA LIBERA*).
PER ESEGUIRE EFFICIENTEMENTE ANCHE L'OPERATORE PADRE SI PUÒ IMPORRE CHE OGNI CELLA CONTENGA UN QUARTO CAMPO RISERVATO PER IL CURSORE AL PADRE.

```
type  tipoelem=char;
      indice=1..MAXLUNG;
      albero=indice;
      arealibera=array[indice] of elemento;
      elemento=record
            figlio:indice;
            nodo:tipoelem;
            fratello:indice;
            genitore:indice
            end;

var   SPAZIO:arealibera;
      T:albero;
```

Realizzazione lista primo-figlio/fratello successivo

CON PUNTATORI



REALIZZAZIONE DI MFSET

COME E’ NOTO UN MFSET È UNA PARTIZIONE DI UN INSIEME FINITO IN SOTTOINSIEMI DISGIUNTI DETTI COMPONENTI.

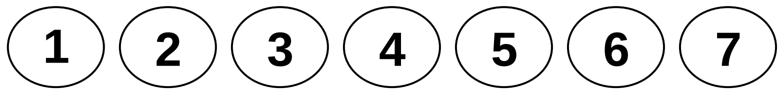
È POSSIBILE RAPPRESENTARLO MEDIANTE:

UNA FORESTA DI ALBERI RADICATI

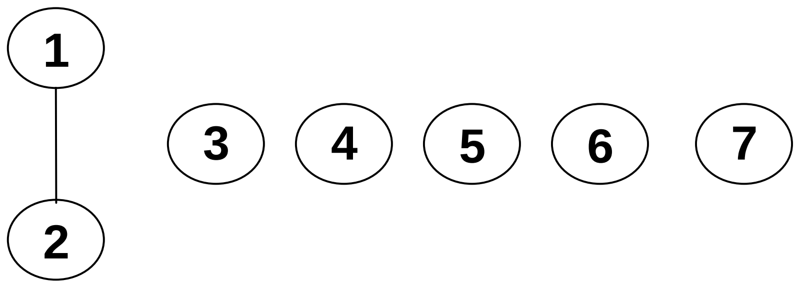
IN CUI CIASCUN ALBERO RAPPRESENTA UNA COMPONENTE.
LE COMPONENTI INIZIALI DI MFSET SONO I NODI. ATTRAVERSO OPERAZIONI SUCCESSIVE DI FONDI E TROVA SI CREA LA STRUTTURA.

L’OPERATORE FONDI COMBINA DUE ALBERI NELLO STESSO ALBERO. SI REALIZZA IMPONENDO CHE UNA DELLE DUE RADICI DIVENTI NUOVO FIGLIO DELL’ALTRA.

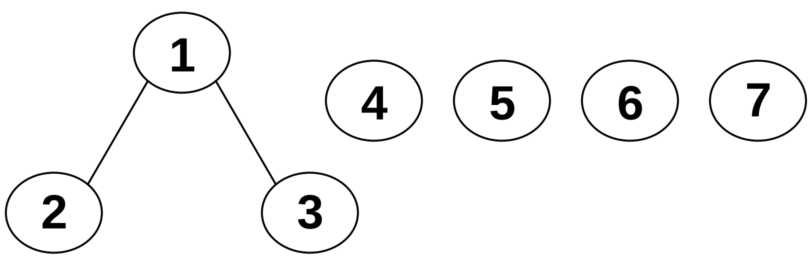
L’OPERATORE TROVA VERIFICA SE DUE ELEMENTI SONO NEL MEDESIMO ALBERO. SI REALIZZA ACCEDENDO AI NODI CONTENENTI GLI ELEMENTI E RISALENDO DA TALI NODI, TRAVERSO I PADRI, FINO AD ARRIVARE ALLE RADICI.



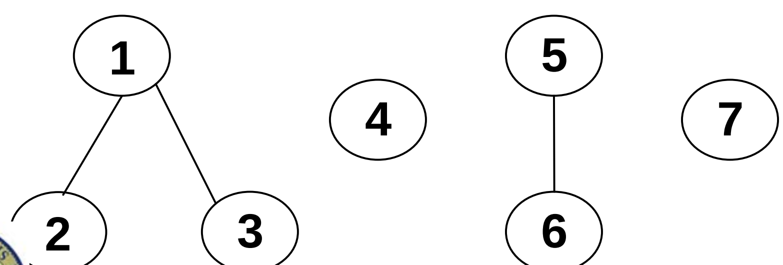
FONDI (1,2,S)



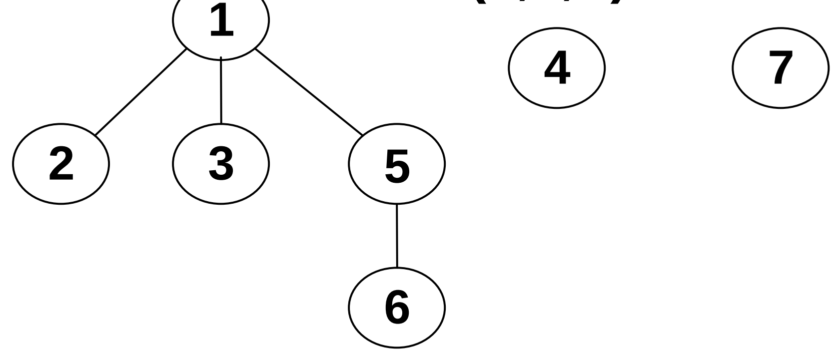
FONDI (1,3,S)



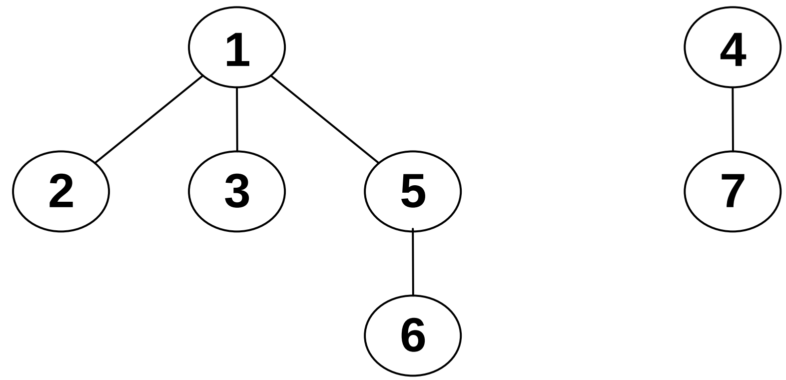
FONDI (5,6,S)



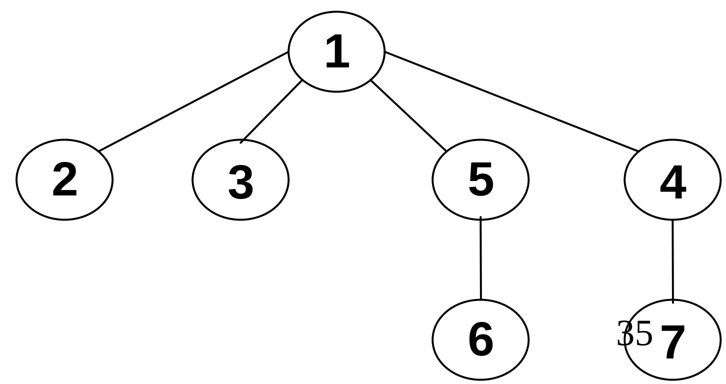
FONDI (6,3,S)



FONDI (4,7,S)



FONDI (3,7,S)



Realizzazione basata su alberi (foreste)

Implementazione basata su foresta

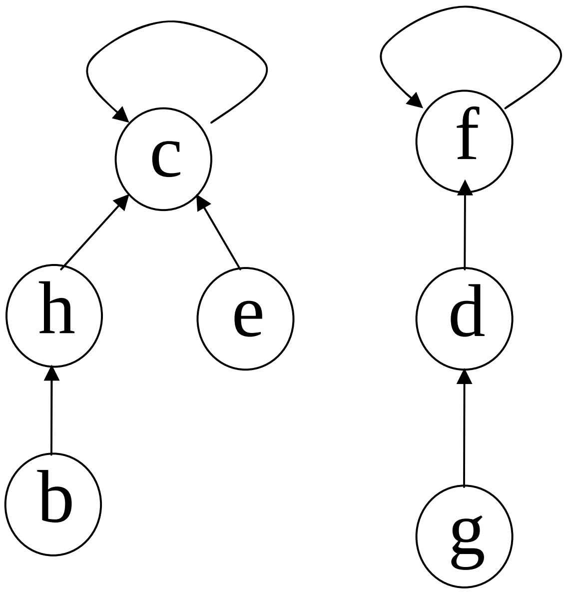
Si rappresenta ogni insieme tramite un albero radicato

Ogni nodo dell'albero contiene

- l'oggetto
- un puntatore al padre

Il rappresentante è la radice dell'albero

La radice ha come padre un puntatore a se stessa

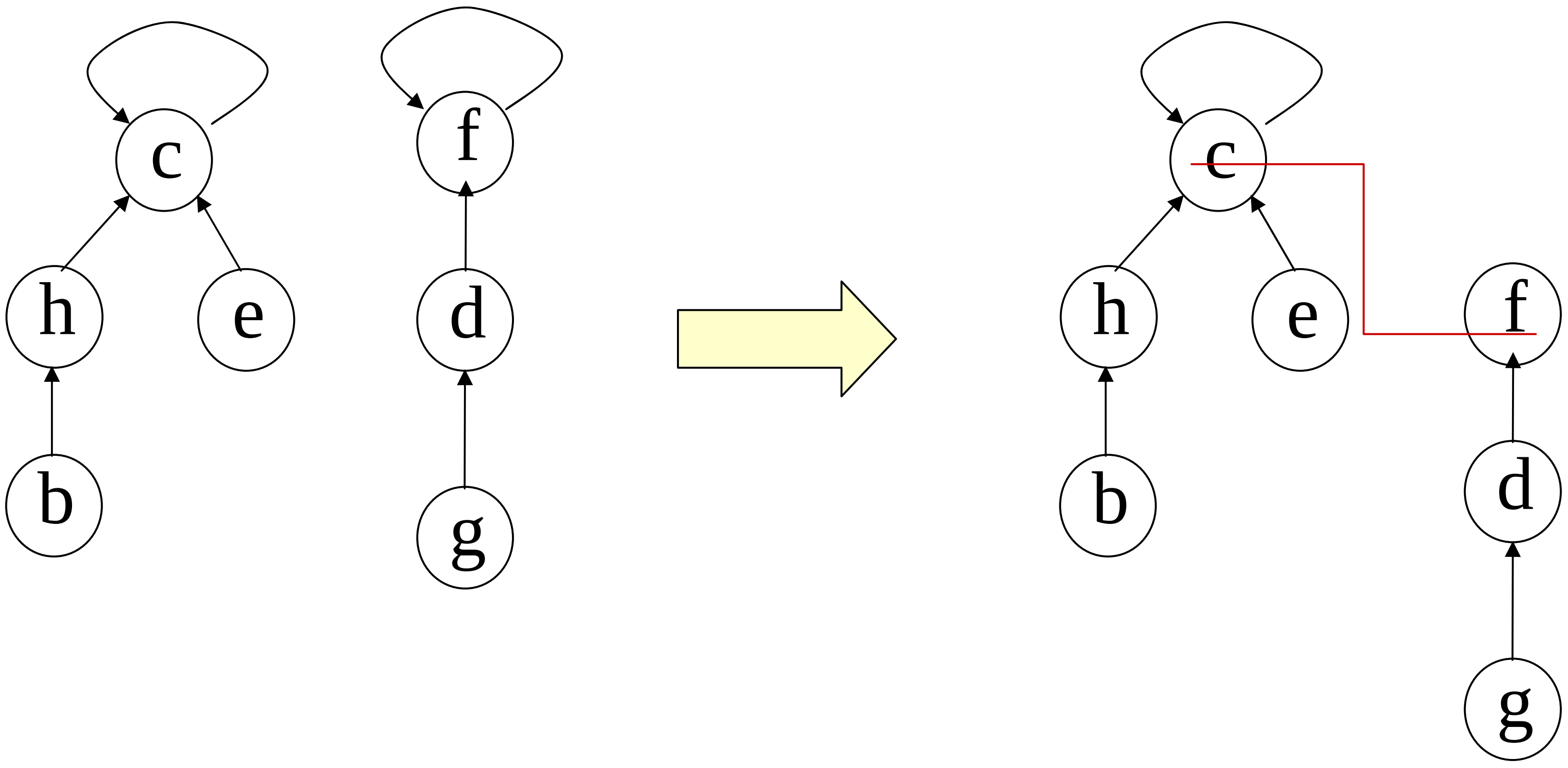


Realizzazione basata su alberi

Operazioni e costo

- trova(x,S)
  - Risale la lista dei padri di x fino a trovare la radice e restituisce la radice come oggetto rappresentante
  - Costo: $O(n)$ nel caso pessimo
- fondi(x,y,S)
  - Appende l'albero radicato in y ad x
  - Costo: $O(1)$

Realizzazione basata su alberi: Esempio – **fondi(*c*, *f*, *S*)**



Realizzazione basata su alberi: Esempio – **fondi(*c*, *f*, *S*)**