Corso di Laurea in INFORMATICA

Algoritmi e Strutture Dati

a.a. 2012-2013

MODULO 13

TECNICHE ALGORITMICHE 1

Classificazione dei problemi: problemi di ricerca, di decisione, di ottimizzazione. Lo spazio di ricerca: definizione e proprietà. Paradigma selettivo e paradigma generativo.

CLASSIFICAZIONE DEI PROBLEMI

I PROBLEMI SI POSSONO CLASSIFICARE IN:

- **PROBLEMI DI RICERCA;**
- **PROBLEMI DI DECISIONE;**
- **PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE.**

NELLA FASE DI CONCETTUALIZZAZIONE SI FORNISCE UNA *SPECIFICA DEL PROBLEMA*, SI STABILISCONO LE CARATTERISTICHE STRUTTURALI DEL PROBLEMA SENZA FARE RIFERIMENTO AI METODI PER LA RISOLUZIONE.

NELLA FASE DI REALIZZAZIONE SI PASSA DALLA SPECIFICA DEL PROBLEMA ALLE SCELTE PER LA SUA RISOLUZIONE, CHE COINVOLGONO LA DEFINIZIONE DELL'*ALGORITMO RISOLUTIVO* E LA *REALIZZAZIONE DEL PROGRAMMA*.

LA SPECIFICA DEL PROBLEMA

- **LA SCELTA DELL'INPUT: SI STABILISCE CHE I VALORI DI ALCUNE DELLE VARIABILI IN GIOCO SIANO I DATI DI INGRESSO DEL PROBLEMA. L'INSIEME DI TALI VALORI È LO *SPAZIO DI INPUT* DEL PROBLEMA;**

- **LA SCELTA DELLO SCOPO DELLA RISOLUZIONE: SI STABILISCE CHE I VALORI DI ALCUNE VARIABILI IN GIOCO RAPPRESENTINO LE SOLUZIONI DEL PROBLEMA. L'INSIEME DI TALI VALORI È LO *SPAZIO DELLE SOLUZIONI*;**

- **L'IDENTIFICAZIONE DEL LEGAME CHE I VINCOLI DEL PROBLEMA IMPONGONO TRA I VALORI DELLO SPAZIO DI INPUT E I VALORI DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI. CIÒ CONDUCE ALLA DEFINIZIONE DELLA *RELAZIONE CARATTERISTICA* DEL PROBLEMA;**

- **LA DETERMINAZIONE DI QUALI INFORMAZIONI IN USCITA SI VUOLE CHE IL PROCESSO RISOLUTIVO DEL PROBLEMA PRODUCA. QUESTE INFORMAZIONI STABILISCONO LO *SPAZIO DI OUTPUT* E IL *QUESITO* DEL PROBLEMA.**

ESEMPIO

DETERMINARE LA POSIZIONE DI UN NUMERO INTERO M IN UN VETTORE DI NUMERI INTERI V.

LE VARIABILI: UN VETTORE V

UN INDICE DEL VETTORE K

UN NUMERO INTERO M

LO *SPAZIO DI INPUT* È L'INSIEME DELLE POSSIBILI COPPIE FORMATE DA UN VETTORE V E UN NUMERO INTERO M.

LO *SPAZIO DELLE SOLUZIONI* È L'INSIEME DEGLI INDICI K DI OGNI POSSIBILE VETTORE.

LA *RELAZIONE CARATTERISTICA* ASSOCIA AD OGNI COPPIA (V,M) UNA POSIZIONE K SE E SOLO SE IL K-ESIMO ELEMENTO DI V COINCIDE CON M. LA RELAZIONE LA CHIAMIAMO R_{VETT}.

SIA $V=[7,5,3,7,2]$

I NUMERI POSSIBILI CHE RICERCHIAMO $\in$ N

R_{VETT}

$<[7,5,3,7,2],7> \Rightarrow 1$

$<[7,5,3,7,2],5> \Rightarrow 2$

....

$<[7,5,3,7,2],7> \Rightarrow 4$

....

POICHÉ ESISTE UN NUMERO INFINITO DI VETTORI R_{VETT} È DI DIMENSIONE INFINITA.

CONSIDERIAMO LO SPECIFICO ELEMENTO DELLO SPAZIO DI INPUT FORMATO DAL VETTORE V E DAL NUMERO $M=7$.

R_{VETT} ASSOCIA A TALE ELEMENTO DUE POSSIBILI VALORI DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI:

1 4

NEL PROBLEMA CONSIDERATO, POTREBBERO NON ESSERVI SOLUZIONI, DUNQUE:

LO ***SPAZIO DI OUTPUT*** CONTIENE LO SPAZIO DELLE **SOLUZIONI** PIÙ UN PARTICOLARE SIMBOLO CHE DENOTA **L'ASSENZA DI SOLUZIONI**.

INOLTRE, POSSIAMO ESSERE INTERESSATI A UNA QUALUNQUE SOLUZIONE , A TUTTE, ETC… , DUNQUE:

IL ***QUESITO*** STABILISCE CHE, PER OGNI MANIFESTAZIONE CHE AMMETTE SOLUZIONE, VOGLIAMO COME OUTPUT UN ELEMENTO DELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI LEGATO A QUELLA MANIFESTAZIONE DALLA RELAZIONE CARATTERISTICA.

SPECIFICA DI UN PROBLEMA
DEFINIZIONE

LA SPECIFICA DI UN PROBLEMA È' UNA QUINTUPLA <I,S,R,O,Q> DOVE:

- **I** È' LO SPAZIO DI INPUT;
- **S** È' UN INSIEME QUALSIASI DETTO *SPAZIO DELLE SOLUZIONI*;
- **$R \subseteq I x S$** È' UNA RELAZIONE SU I ED S DETTA *RELAZIONE CARATTERISTICA*;
- **O** È' LO *SPAZIO DI OUTPUT*;
- **Q** È' UNA REGOLA, DETTA *QUESITO*, CHE, SULLA BASE DELLA RELAZIONE CARATTERISTICA **R**, CONSENTE DI DEFINIRE UNA RELAZIONE SU I E O : $R_Q \subseteq I x O$

UNA PARTICOLARE **ISTANZA** DEL PROBLEMA SI OTTIENE OGNI VOLTA CHE SCEGLIAMO UN PARTICOLARE VALORE DEI DATI IN INGRESSO.

IN RELAZIONE AD UN PROBLEMA E AD UNA SUA ISTANZA DIAMO LA NOZIONE DI *SOLUZIONE*.

SOLUZIONE DI UN PROBLEMA PER UNA SUA ISTANZA
DEFINIZIONE

SIA P=<I,S,R,O,Q> UN PROBLEMA E SIA $i \in I$ UNA SUA ISTANZA, UNA SOLUZIONE S_i DI P PER i È UN ELEMENTO DI S PER CUI VALE:

$$<i,S_i> \in R$$

RISPOSTA AD UN PROBLEMA PER UNA SUA ISTANZA
DEFINIZIONE

SIA P=<I,S,R,O,Q> UN PROBLEMA E SIA i UNA SUA ISTANZA, UNA RISPOSTA r_i A P PER i È UN ELEMENTO DI O PER CUI VALE

$$<i,r_i> \in R_Q$$

DOVE R_Q È LA RELAZIONE SU I E O DEFINITA IN BASE AD R APPLICANDO LA REGOLA Q.

PROBLEMI DI RICERCA

TRA TUTTE LE POSSIBILI SOLUZIONI SIAMO INTERESSATI A CONOSCERE **UNA QUALUNQUE DELLE SOLUZIONI DEL PROBLEMA PER L'ISTANZA** CHE STIAMO CONSIDERANDO, OPPURE, NEL CASO NON ESISTA SOLUZIONE, SIAMO INTERESSATI A SAPERLO. INTRODUCIAMO NELLO SPAZIO DI OUTPUT IL SIMBOLO ⊥ CHE INDIVIDUA **L'ASSENZA DI SOLUZIONI**.

DEFINIZIONE

UN PROBLEMA DI **RICERCA P** È UN PROBLEMA SPECIFICATO CON UNA QUINTUPLA DEL TIPO:

<I,S,R,S ∪ {⊥},qric>

DOVE **qric** È LA REGOLA CHE DEFINISCE, IN BASE AD R, LA RELAZIONE R_{qric} CONTENENTE TUTTI E SOLI I SEGUENTI ELEMENTI:

- ***OGNI COPPIA CONTENUTA IN R;***
- ***UNA COPPIA <i,⊥> PER OGNI ISTANZA i DI P PER LA QUALE P NON HA SOLUZIONI.***

ESEMPIO:

IL PROBLEMA DELLA *DEFINIZIONE DELLA POSIZIONE DI UN INTERO IN UN VETTORE* DI INTERI È UN PROBLEMA DI RICERCA:

$$\langle I,S,R,S \cup \{\perp\},qric \rangle$$

I È' L'INSIEME DI COPPIE $\langle V,M \rangle$

S È' L'INSIEME DEGLI INTERI POSITIVI (INDICI)

R È' LA RELAZIONE R_{VETT}.

SIAMO INTERESSATI, PER OGNI ISTANZA, A CALCOLARE *UNA* DELLE SOLUZIONI OPPURE A SEGNALARE IL FATTO CHE NON NE ESISTONO.

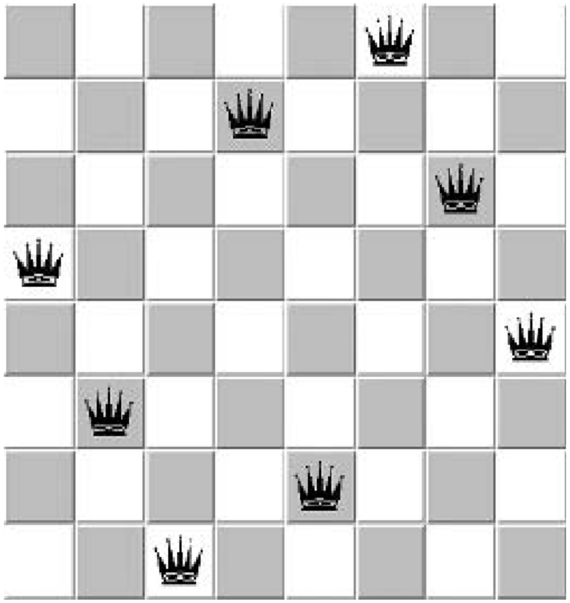
> ***SI DICE ANCHE: "TROVARE UNA SOLUZIONE AMMISSIBILE, CIOE' CHE SODDISFI LA RELAZIONE".***

ESEMPIO (PROBLEMA DELLE N REGINE)

Problema: posizionare n regine in una scacchiera $n \cdot n$, in modo tale che nessuna regina ne “minacci” un'altra.

Commenti storici:

Il problema classico, con n=8, è stato studiato, fra gli altri, anche da Gauss



Metodo

Partiamo dall'approccio più stupido,e mano a mano raffiniamo la soluzione.

ESEMPIO (PROBLEMA DELLE N REGINE)

DATO UN INTERO POSITIVO N SI DETERMINI UN POSIZIONAMENTO DI N REGINE IN UNA SCACCHIERA NxN TALE CHE NESSUNA REGINA Q MINACCI QUALCHE ALTRA REGINA.

			Q	
	Q			
				Q
		Q		
Q				

N=5

SOLUZIONE ALL'ISTANZA 5

FORNIRE LA SPECIFICA:

LA QUINTUPLA $<N^+,D,R,D \cup \{\perp\},qric>$

N^+ =INSIEME NUMERI INTERI POSITIVI;

D=INSIEME DELLE DISPOSIZIONI DI REGINE IN SCACCHIERE DI OGNI DIMENSIONE (NUMERO REGINE=DIMENSIONE SCACCHIERA);

R=RELAZIONE CHE CONTIENE TUTTE E SOLE LE COPPIE $<x,y>$ IN CUI $x \in N^+$ E y È UNA DISPOSIZIONE DI x REGINE NELLA SCACCHIERA x*x.

ESEMPIO: ORDINAMENTO DI UN VETTORE DI INTERI IN MODO NON DECRESCENTE.

FORNIRE LA SPECIFICA IN TERMINI DI INPUT, SPAZIO DELLE SOLUZIONI, RELAZIONE CARATTERISTICA, SPAZIO DI OUTPUT E QUESITO DEL PROBLEMA.

SPAZIO DEGLI INPUT **È' L'INSIEME DI TUTTI I VETTORI DI INTERI (DI QUALUNQUE DIMENSIONE);**

SPAZIO DELLE SOLUZIONI **È' L'INSIEME DI TUTTE LE POSSIBILI SEQUENZE DI INDICI DI UN VETTORE (PER OGNI INTERO POSITIVO n, L'INSIEME DI TUTTE LE POSSIBILI PERMUTAZIONI DEGLI INTERI DA 1 A n);**

RELAZIONE CARATTERISTICA **È L'INSIEME DI TUTTE E SOLE LE COPPIE <V,W> TALE CHE**

SE $V=[v_1,\ldots,v_n]$ ALLORA $W=[w_1,\ldots,w_n]$

E, DATI DUE INDICI QUALUNQUE q ED m, DOVE $1 \leq q \leq n$ E $1 \leq m \leq n$, VALE:

$$V_{w_q} > V_{w_m} \qquad \text{SE E SOLO SE } q \geq m$$

UN ELEMENTO:

V = [7,1,3,4]
W= [2,3,4,1]

$V_{W_2} > V_{W_1}$

STESSO PROBLEMA CON VETTORE DI CARATTERI:

V = [a,z,p,b]
W= [1,4,3,2]

INFATTI:

$V_{W_q} > V_{W_m}$ SE $q \geq m$

ESEMPIO

PROLEMA DI PARTIZIONAMENTO

SONO DATI k NUMERI INTERI POSITIVI $n_1,\ldots,n_k$ LA CUI SOMMA È' 2m (PER UN CERTO INTERO m). DECIDERE SE I k NUMERI POSSANO ESSERE RIPARTITI IN DUE GRUPPI IN MODO CHE LA SOMMA DEI COMPONENTI DI OGNI GRUPPO SIA m.

DUNQUE SE

$$n_{a_1},\ldots,n_{a_p} \text{ E } n_{b_1},\ldots,n_{b_q}$$

SONO I DUE GRUPPI DI NUMERI (CIOÈ $p+q=k$), DEVE ESSERE:

$$\sum_{i=1}^{p} n_{a_i} = \sum_{j=1}^{q} n_{b_j} = m$$

SPAZIO DI INPUT **E' L'INSIEME I DI TUTTI I POSSIBILI INSIEMI DI INTERI LA CUI SOMMA È PARI;**

SPAZIO DELLE SOLUZIONI **E' L'INSIEME S DI TUTTE LE POSSIBILI COPPIE DI INSIEMI DI INTERI;**

RELAZIONE CARATTERISTICA **E' L'INSIEME R DI TUTTE E SOLE LE COPPIE $\langle x,y \rangle$ ∍'**

- **$x \in I$, $y \in S$**
- **$y=\langle y_1,y_2 \rangle$ È UNA COPPIA DI INSIEMI ∍'**

$$y_1 \cap y_2 = \emptyset \quad \text{E} \quad y_1 \cup y_2 = x$$

$$\text{e sommatoria}(y_1) = \text{sommatoria}(y_2)$$

ESEMPIO: IL VETTORE

[1,2,2,4,7]

VIENE PARTIZIONATO IN:

[1,7] E [2,2,4]

PROBLEMI DI DECISIONE

LA RISPOSTA È VERO O FALSO A SECONDA CHE IL DATO DI INGRESSO SODDISFI O MENO UNA CERTA PROPRIETÀ. DUNQUE LO SPAZIO DI OUTPUT CONTIENE SOLO I DUE VALORI DI VERITÀ.

DEFINIZIONE

UN PROBLEMA DI DECISIONE P È UN PROBLEMA SPECIFICATO CON UNA QUINTUPLA DEL TIPO:

$$<I,S,R,\{TRUE,FALSE\},qdec>$$

DOVE IL QUESITO **qdec** DEFINISCE LA FUNZIONE:

$$R_{qdec}:I\rightarrow\{TRUE,FALSE\}$$

TALE CHE, PER OGNI ISTANZA i DI P, Rqdec(i) VALE:

- **TRUE** SE $\exists\ s\in S \ni' <i,s>\in R$;
- **FALSE** ALTRIMENTI.

IN LINEA DI PRINCIPIO, UN **PROBLEMA DI DECISIONE**

$$P=\langle I,S,R,\{TRUE,FALSE\},qdec\rangle$$

PUÒ ESSERE RISOLTO MEDIANTE **DUE APPROCCI**:

- CERCANDO UNA RISPOSTA AL CORRISPONDENTE PROBLEMA DI **RICERCA**:

  $$P'=\langle I,S,R,S \cup \{\perp\},qric\rangle$$

  DETTO ***PROBLEMA SOTTOSTANTE***, SFRUTTANDO IL FATTO CHE DATO UN $i \in I$, LA RISPOSTA A **P** PER **i** È **FALSE** SOLO SE LA RISPOSTA A **P'** COINCIDE CON $\perp$, MENTRE IN **OGNI ALTRO CASO** LA RISPOSTA A **P** È **TRUE** (***APPROCCIO COSTRUTTIVO***);

- DETERMINANDO LA **RISPOSTA APPROPRIATA** A **P** SENZA OTTENERE UNA SOLUZIONE AL CORRISPONDENTE PROBLEMA DI RICERCA SOTTOSTANTE (***APPROCCIO NON COSTRUTTIVO***).

PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE/1

ALLE SOLUZIONI AMMISSIBILI È' ASSOCIATA UNA MISURA (COSTO, OBIETTIVO): RISOLVERE IL PROBLEMA NON SIGNIFICA TROVARE UNA QUALUNQUE SOLUZIONE, MA LA MIGLIORE SOLUZIONE SECONDO LA MISURA O CRITERIO DI PREFERENZA FISSATO.

DEFINIZIONE

UN PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE P È' UN PROBLEMA SPECIFICATO CON UNA QUINTUPLA DEL TIPO:

$$<I,S,R,S \cup \{\perp\},q_{ott}(M,m,\subseteq)>$$

- **M È' INSIEME QUALSIASI;**
- **m È' UNA FUNZIONE DEL TIPO $I \times S \rightarrow M$ DETTA *FUNZIONE OBIETTIVO* DI P; PER UNA CERTA ISTANZA $i \in I$, IL VALORE $m(i,s)$ RAPPRESENTA UNA MISURA DELL'ELEMENTO S NELLO SPAZIO DELLE SOLUZIONI**

PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE/2

- **$\subseteq$ È UNA RELAZIONE DI ORDINAMENTO SU M ($x \subseteq y$ "x MIGLIORE DI y");**
- **$q_{ott}(M,m,\subseteq)$ È UNA REGOLA CHE DEFINISCE, IN BASE AD R, LA RELAZIONE $R_{q_{ott}} \subseteq I x S$ SU I ED S COSÌ DA INDIVIDUARE:**
  - ***a)* UNA COPPIA (i,s) $\forall i \ni' \neg\exists$ s' ASSOCIATA AD i MIGLIORE;**
  - ***b)* UNA COPPIA (i,$\perp$) $\forall i$ PER LA QUALE P NON HA SOLUZIONI.**

ESEMPIO

3 PROBLEMI DIVERSI NEL MEDESIMO AMBITO:

DATO UN INSIEME L DI PAROLE , DETERMINARE UNA PAROLA W$\in$ L TALE CHE NON ESISTANO ALTRE PAROLE IN L:

P_1 ***MAGGIORI DI W SECONDO L'ORDINE ALFABETICO;***

P_2 ***DI LUNGHEZZA MAGGIORE DI QUELLA DI W;***

P_3 ***COMPOSTE USANDO TUTTE LE LETTERE DELL'ALFABETO CHE COMPONGONO W, PIÙ' ALTRE LETTERE.***

LO SCHEMA GENERALE PER I TRE PROBLEMI:

$$<2^W, W, \{(X,y) | X \in 2^W \wedge y \in X\}, W \cup \{\perp\}, q_{ott}(M,m,\subseteq)>$$

DOVE PER TUTTI E TRE I PROBLEMI:

- **W È L'INSIEME DI PAROLE;**
- **2^W È L'INSIEME DI TUTTI GLI INSIEMI DI PAROLE;**
- **M È UN DIFFERENTE INSIEME PER CIASCUN PROBLEMA**

INFATTI PER IL PROBLEMA P_1 :

- **M=W**
- **LA FUNZIONE OBIETTIVO:**

  $$m:2^W x W \rightarrow M$$

  PER $\forall i \in I$ m(i,W) E' UGUALE A W
- **LA RELAZIONE $\subseteq$ E' LA RELAZIONE DI ORDINAMENTO ALFABETICO**

PER IL PROBLEMA P_2 :

- **M=N**
- **LA FUNZIONE OBIETTIVO:**

  $$m:2^W x W \rightarrow M$$

  $\forall i \in I$ m(i,W) E' LA LUNGHEZZA DI W
- **LA RELAZIONE $\subseteq$ E' LA RELAZIONE DI ORDINAMENTO $\geq$ TRA NUMERI**

PER IL PROBLEMA P_3 :

- **M E' L'INSIEME DI TUTTI GLI INSIEMI DI LETTERE DELL'ALFABETO**
- **LA FUNZIONE OBIETTIVO:**

  $$m:2^W x W \rightarrow M$$

  $\forall i \in I$ m(i,W) RESTITUISCE L'INSIEME DELLE LETTERE CHE COMPONGONO W
- **LA RELAZIONE E' QUELLA DI CONTENIMENTO $\supseteq$ TRA INSIEMI**

ESEMPIO:

SIA L'ISTANZA PER I TRE PROBLEMI
{"TORRE","ERRORE","ZERO","TENORE"}

P_1 ha una sola soluzione ottima "ZERO"
P_2 ha due soluzioni ottimali "ERRORE" e "TENORE"
P_3 ha due soluzioni ottimali "TENORE" e "ZERO"

PAROLA	*MISURA P_1*	*MISURA P_2*	*MISURA P_3*
TORRE	TORRE	5	{E,O,R,T}
ERRORE	ERRORE	6	{E,O,R}
ZERO	ZERO	4	{E,O,R,Z}
TENORE	TENORE	6	{E,N,O,R,T}

ESEMPIO:

PROBLEMA

DATO UN ALBERO I CUI NODI SONO ETICHETTATI CON VALORI INTERI NON NEGATIVI, TROVARE UN LIVELLO DELL'ALBERO IL CUI PESO È MASSIMO, DOVE PER PESO DI UN LIVELLO DELL'ALBERO SI INTENDE LA SOMMA DELLE ETICHETTE DEI NODI DI QUEL LIVELLO.

SPAZIO DEGLI INPUT **INSIEME I DEGLI ALBERI I CUI NODI SONO ETICHETTATI CON VALORI INTERI NON NEGATIVI;**
SPAZIO DELLE SOLUZIONI **INSIEME S DEGLI INTERI NON NEGATIVI;**
RELAZIONE CARATTERISTICA **E' L'INSIEME DELLE COPPIE (T,n) DOVE T È L'ALBERO DI PROFONDITÀ p E $n \leq p$;**
SPAZIO DI OUTPUT **E' $S \cup \{\perp\}$;**
QUESITO DI OTTIMIZZAZIONE **E' $q_{ott}(N,m,\geq)$ DOVE:**

$$M: I \times S \rightarrow N$$

È LA FUNZIONE TALE CHE m(T,n) È LA SOMMA DELLE ETICHETTE DEI NODI IN T DI LIVELLO n.

ESEMPIO (IL PROBLEMA DELLO ZAINO)

UN LADRO DURANTE UNA RAPINA IN UN NEGOZIO (SIC!) SI TROVA DI FRONTE A n ARTICOLI: L'ARTICOLO i-ESIMO HA UN VALORE DI P_i EURO E UN PESO DI C_i CHILOGRAMMI, DOVE SIA P_i CHE C_i, PER SEMPLICITÀ, SONO INTERI. IL LADRO VUOLE PRENDERE GLI ARTICOLI DI MAGGIOR VALORE MA IL SUO ZAINO PUÒ SOPPORTARE UN PESO MASSIMO DI B CHILOGRAMMI. COSA GLI CONVIENE FARE?

PER FORMALIZZARE IL PROBLEMA OCCORRE CONSIDERARE 2n+1 INTERI POSITIVI:

$$P_1,\ldots,P_n,C_1,\ldots,C_n,B$$

DOVE I VALORI:

$P_1,\ldots,P_n$

SONO DETTI *PROFITTI*.

I VALORI:

$C_1,\ldots,C_n$

SONO CHIAMATI *COSTI*.

B È DETTO *BUDGET* (BILANCIO).

(IL PROBLEMA DELLO ZAINO)

È' UN'ASTRAZIONE DI MOLTI PROBLEMI REALI.

FORMALIZZAZIONE

DATI 2n+1 INTERI POSITIVI:

$$P_1,\ldots,P_n,C_1,\ldots,C_n,B$$

TROVARE n VALORI INTERI $X_1,\ldots,X_n$ э' :

- $X_i \in \{0,1\} \quad (1 \leq i \leq n)$
- $\sum_{i=1}^{n} P_i X_i \quad ABBIA \quad VALORE \quad MAX$
- $\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \leq B$

SPECIFICA PER IL PROBLEMA DELLO ZAINO

- LO SPAZIO DI INPUT **I** È L'INSIEME DELLE COPPIE (n,Q) DOVE n È UN INTERO POSITIVO E Q È UNA SEQUENZA DI 2n+1 INTERI POSITIVI. L'ELEMENTO DI QUESTO SPAZIO È:

$$(n,(P_1,\ldots,P_n,C_1,\ldots,C_n,B))$$

- LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI **S** È L'INSIEME DELLE SEQUENZE FINITE:

$$\langle X_1,\ldots,X_n \rangle$$

CON $n \in N^+$ E $X_i \in \{0,1\}$;

- LA RELAZIONE CARATTERISTICA È DATA DALL'INSIEME DELLE COPPIE:

$$(n,(P_1,\ldots,P_n,C_1,\ldots,C_n,B)),(X_1,\ldots,X_n)$$

TALI CHE:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \leq B \; ;$$

- IL QUESITO È $q_{ott}(N,m,\geq)$ DOVE:

$$m = \sum_{i=1}^{n} P_i X_i \, .$$

IN DEFINITIVA:

- **LA SPECIFICA DI UN PROBLEMA MIRA A DETERMINARE LA STRUTTURA DEL PROBLEMA, IN MODO INDIPENDENTE DA CONSIDERAZIONI RELATIVE AL MODO IN CUI IL PROBLEMA VERRÀ RISOLTO.**

- **LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI È CARATTERISTICA GENERALE DEL PROBLEMA E NON FORNISCE INDICAZIONI SULLE SOLUZIONI PER UNA GENERICA ISTANZA.**

DUNQUE, PER ORIENTARE LA SCELTA DI UN ALGORITMO RISOLUTIVO È NECESSARIO UNO STRUMENTO CHE AIUTI A "*CARATTERIZZARE*" LE POTENZIALI SOLUZIONI AD UNA GENERICA ISTANZA DI UN PROBLEMA:

LO SPAZIO DI RICERCA

LO SPAZIO DI RICERCA

PERCHÉ L'ANALISI DI UN PROBLEMA AIUTI A FORMULARE UN ALGORITMO RISOLUTIVO È NECESSARIO *UNO STRUMENTO CONCETTUALE CHE AIUTI A CARATTERIZZARE LE POTENZIALI SOLUZIONI DI UNA GENERICA ISTANZA DEL PROBLEMA*.

DETERMINARE *LO SPAZIO DI RICERCA* PER UN PROBLEMA P SIGNIFICA STABILIRE UN METODO CHE, PER OGNI ISTANZA i DI P, CONSENTE DI DEFINIRE UN INSIEME CON ASSOCIATE DUE FUNZIONI:

- *LA FUNZIONE DI AMMISSIBILITÀ* CHE PERMETTE DI VERIFICARE SE UN ELEMENTO DELLO SPAZIO DI RICERCA CORRISPONDE EFFETTIVAMENTE AD UNA SOLUZIONE PER i;
- *LA FUNZIONE DI RISPOSTA* CHE PERMETTE DI OTTENERE, DAGLI ELEMENTI DELLO SPAZIO DI RICERCA, LE CORRISPONDENTI RISPOSTE PER i.

DEFINIZIONE/1

SIA i UNA ISTANZA DI UN PROBLEMA

$$P=\langle I,S,R,S \cup \{\perp\},Q\rangle$$

UNO SPAZIO DI RICERCA DI P PER i È COSTITUITO DA:

- **UN INSIEME Z_i CON ASSOCIATE DUE FUNZIONI:**
  - **LA *FUNZIONE DI AMMISSIBILITÀ*:**

$$a: Z_i \rightarrow \{TRUE,FALSE\}$$

  - **LA *FUNZIONE DI RISPOSTA*:**

$$o: Z_i \rightarrow S$$

CHE SODDISFANO LE SEGUENTI CONDIZIONI:

1) **PER OGNI ELEMENTO z DI Z_i, a(z)=TRUE SE E SOLO SE o(z) È SOLUZIONE DI P PER i;**

2) **i HA RISPOSTA POSITIVA SE E SOLO SE VI È ALMENO UN ELEMENTO z DI Z_i PER CUI a(z)=TRUE E o(z) È UNA RISPOSTA A P PER i.**

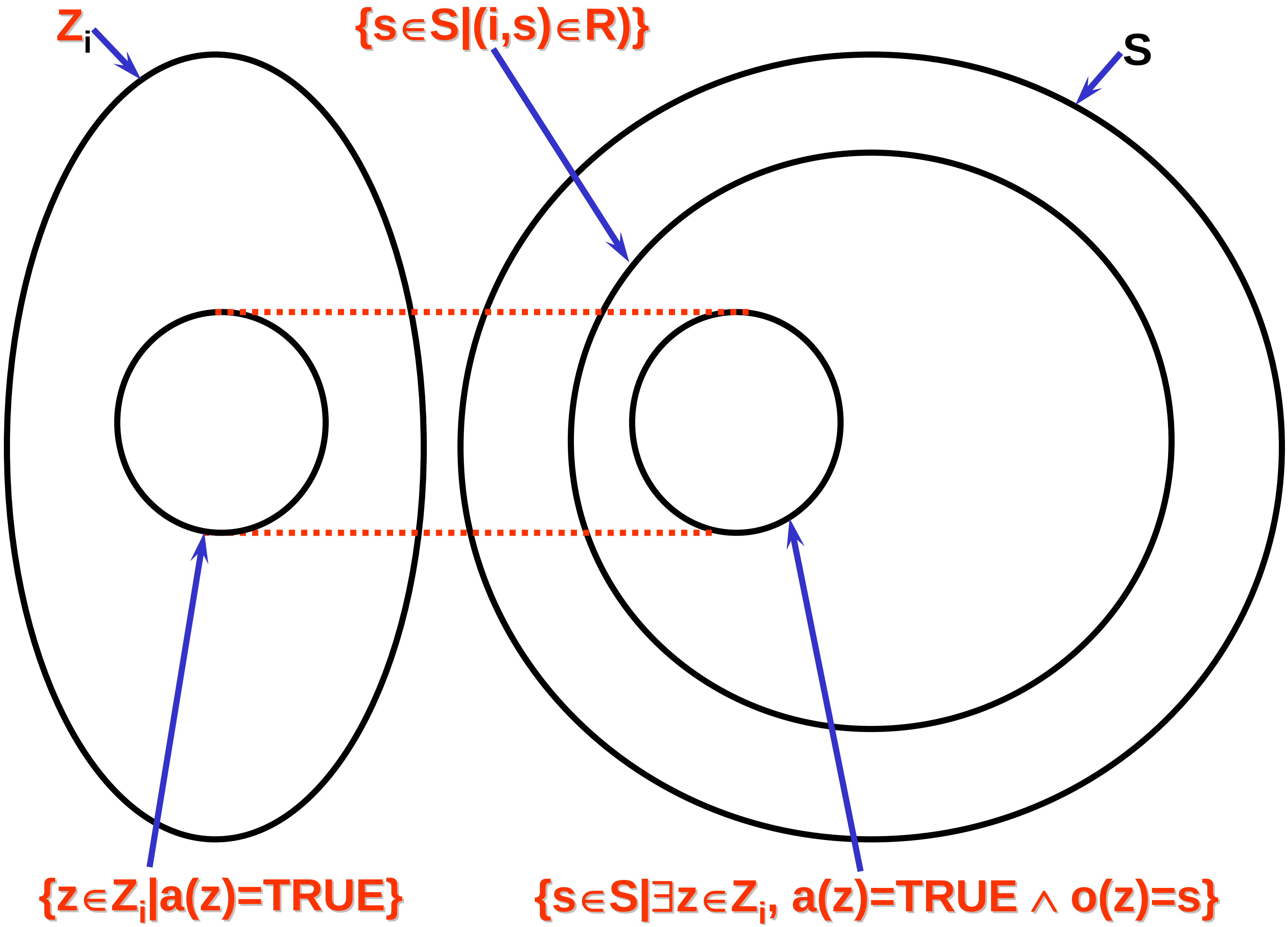
DEFINIZIONE/2

- **UN METODO PER RAPPRESENTARE OGNI ELEMENTO DI Z_i MEDIANTE UNA STRUTTURA DI DATI (VETTORE, MATRICE, LISTA, ALBERO,…) E PER ESPRIMERE LA FUNZIONE DI AMMISSIBILITÀ E DI RISPOSTA IN TERMINI DI TALE STRUTTURA.**

LO SPAZIO DI RICERCA ASSOCIATO AD UNA ISTANZA i DI P CARATTERIZZA LE SOLUZIONI E LE CORRISPONDENTI RISPOSTE A P PER L'ISTANZA i.

STRUTTURA DELLO SPAZIO DI RICERCA PER PROBLEMI DI RICERCA CON RISPOSTA POSITIVA

- L'INSIEME $\{s \in S | (i,s) \in R)\}$ RAPPRESENTA LE SOLUZIONI DI P PER L'ISTANZA i (PER UN PROBLEMA DI RICERCA QUESTO INSIEME COINCIDE CON L'INSIEME DELLE RISPOSTE);
- L'INSIEME $\{s \in S | \exists z \in Z_i,\ a(z)=TRUE \wedge o(z)=s\}$ È COSTITUITO DALLE SOLUZIONI DI P PER L'ISTANZA i CHE SONO RAPPRESENTATE NELLO SPAZIO DI RICERCA;
- LO **SPAZIO DI RICERCA NON RAPPRESENTA NECESSARIAMENTE TUTTE LE SOLUZIONI AD i**. SE ESISTONO RISPOSTE POSITIVE PER i BASTA CHE ***UNA*** SIA RAPPRESENTATA NELLO SPAZIO DI RICERCA.


Z_i
$\{s \in S | (i,s) \in R\}$
S
$\{z \in Z_i | a(z)=TRUE\}$
$\{s \in S | \exists z \in Z_i, a(z)=TRUE \wedge o(z)=s\}$

ESEMPIO: RICERCA DI UN ELEMENTO IN UN VETTORE

CONSIDERIAMO UNA GENERICA ISTANZA DEL PROBLEMA CON INPUT UN VETTORE V DI N ELEMENTI E UN NUMERO M.

- LO SPAZIO DI RICERCA ASSOCIATO A TALE ISTANZA È L'INSIEME DEI VALORI CHE SONO INDICI DEL VETTORE (INTERI DA 1 A N).

- LA FUNZIONE DI AMMISSIBILITÀ VERIFICA, DATO UN j, SE V[j]=M.

- LA FUNZIONE DI RISPOSTA RESTITUISCE j.

- LA STRUTTURA DATI PER RAPPRESENTARE I SINGOLI ELEMENTI DELL'INSIEME È UNA SEMPLICE VARIABILE DI TIPO INTERO.

PER I PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE VALGONO LE SEGUENTI OSSERVAZIONI:

- **LA DEFINIZIONE DI SPAZIO DI RICERCA STABILISCE CHE LA FUNZIONE DI AMMISSIBILITÀ DEVE ASSICURARE CHE:**

  $$\forall i \in Z_i\ a(z)=\text{TRUE IFF } (i,o(z)) \in R$$

  (*CONDIZIONI RELATIVE ALLA RELAZIONE CARATTERISTICA E NON AL QUESITO*);

- **OTTENERE UNA RISPOSTA PER UNA CERTA ISTANZA SIGNIFICA CALCOLARE UNA SOLUZIONE OTTIMALE: LO SPAZIO DI RICERCA DEVE INCLUDERE ALMENO UN ELEMENTO DAL QUALE SI POSSA OTTENERE UNA SOLUZIONE OTTIMALE ALL'ISTANZA.**

STRUTTURA DELLO SPAZIO DI RICERCA PER PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE CON RISPOSTA POSITIVA

PER UN PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE:

- **L'INSIEME**

  $$\{s \in S | (i,s) \in R \wedge \neg \exists s' \in S, (i,s') \in R \wedge m(i,s') \subseteq m(i,s)\}$$

  RAPPRESENTA LE SOLUZIONI *OTTIMALI* DI P PER L'ISTANZA i, CIOÈ LE RISPOSTE A P PER i;

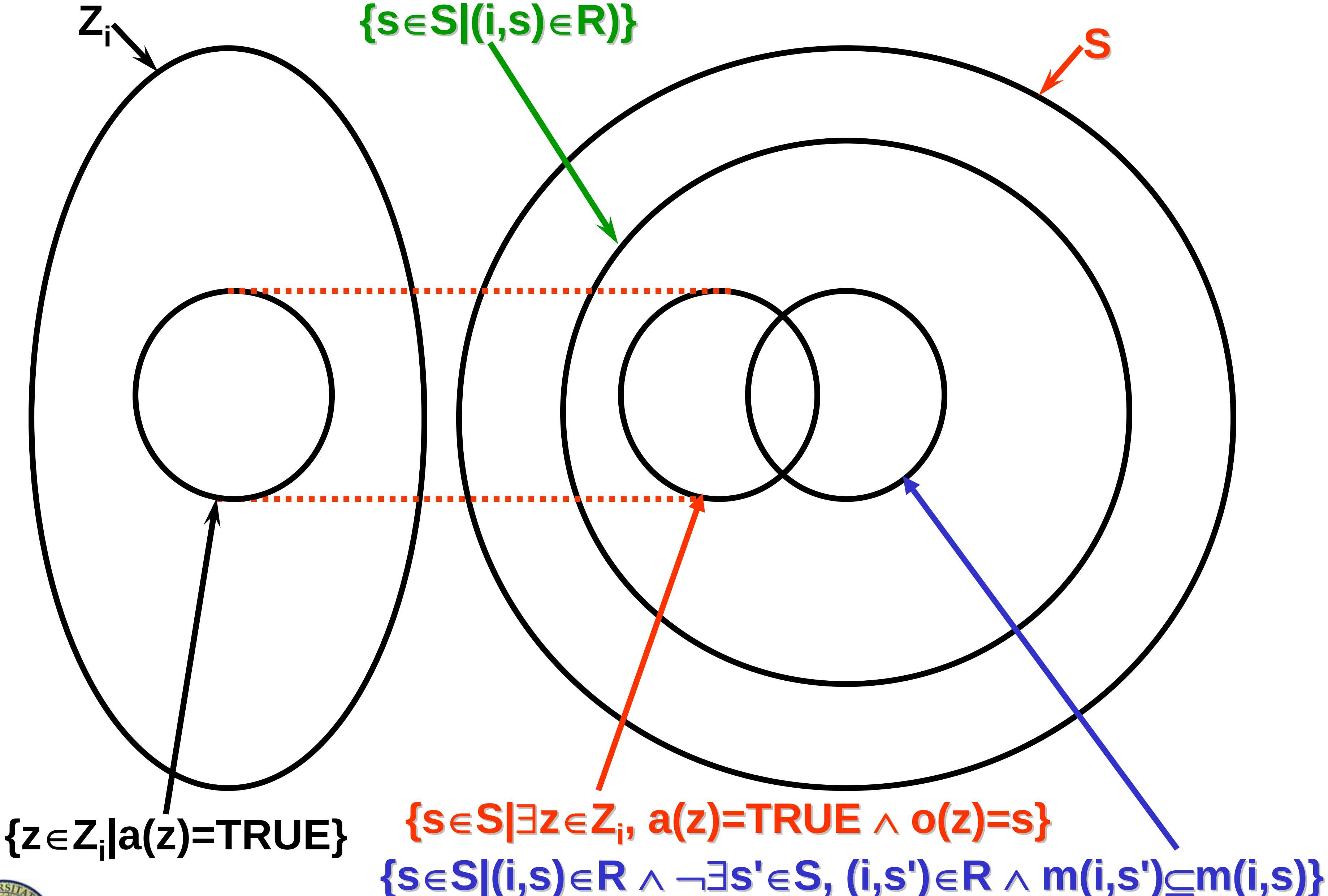
- **UNO SPAZIO DI RICERCA PER i DI P DEVE CONTENERE LA RAPPRESENTAZIONE DI ALMENO UNA TRA LE SOLUZIONI OTTIMALI SE ESISTONO.**

  CIOÈ NON DEVE ESSERE VUOTA L'INTERSEZIONE TRA L'INSIEME:

  $$\{s \in S | (i,s) \in R \wedge \neg \exists s' \in S, (i,s') \in R \wedge m(i,s') \subseteq m(i,s)\}$$

  E

  $$\{s \in S | \exists z \in Z_i, a(z) = TRUE \wedge o(z) = s\}$$


Z_i
$\{s \in S | (i,s) \in R)\}$
S
$\{z \in Z_i | a(z)=TRUE\}$
$\{s \in S | \exists z \in Z_i,\ a(z)=TRUE \wedge o(z)=s\}$
$\{s \in S | (i,s) \in R \wedge \neg \exists s' \in S,\ (i,s') \in R \wedge m(i,s') \subseteq m(i,s)\}$

SPAZIO DI RICERCA PER IL PROBLEMA DELLO ZAINO

DATA UNA ISTANZA $(P_1,\ldots,P_n,C_1,\ldots,C_n,B)$ DEL PROBLEMA LO SPAZIO DI RICERCA E' DEFINITO NEL SEGUENTE MODO:

- **L'INSIEME DELLE POSSIBILI SEQUENZE FINITE:**

$$\langle X_1,\ldots,X_n \rangle$$

CON $X_i \in \{0,1\}$;

- **LA FUNZIONE DI AMMISSIBILITA' RESTITUISCE TRUE IFF LA SEQUENZA SODDISFA LA RELAZIONE**

$$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i \leq B;$$

- **LA FUNZIONE DI RISPOSTA E' LA FUNZIONE IDENTITA'**
- **LA STRUTTURA DI DATI PER RAPPRESENTARE LA SEQUENZA E' UN VETTORE DI DIMENSIONE n I CUI ELEMENTI POSSONO ASSUMERE I VALORI 0 E 1.**

DIFFERENZE TRA SPAZIO DELLE SOLUZIONI E SPAZIO DI RICERCA PER UN PROBLEMA P

- LO **SPAZIO DELLE SOLUZIONI** È UNA COMPONENTE DELLA SPECIFICA DEL PROBLEMA E FA GLOBALMENTE RIFERIMENTO A **TUTTE LE POSSIBILI SOLUZIONI** PER IL PROBLEMA;
- LO **SPAZIO DI RICERCA** FORNISCE UNO STRUMENTO PER **CARATTERIZZARE LE SOLUZIONI** DI OGNI SINGOLA ISTANZA DEL PROBLEMA;
- LO **SPAZIO DI RICERCA** DETERMINA ANCHE, PER OGNI ISTANZA DEL PROBLEMA, UNA STRUTTURA DI DATI E UN **MECCANISMO PER VERIFICARE**, TRAMITE LA FORMULAZIONE DELLA FUNZIONE DI AMMISSIBILITÀ IN TERMINI DI TALE STRUTTURA, **SE UNA SUA CONFIGURAZIONE CORRISPONDE O MENO AD UNA SOLUZIONE** PER L'ISTANZA E UN **METODO PER DERIVARE**, TRAMITE LA FORMULAZIONE DELLA FUNZIONE DI RISPOSTA, **UNA RISPOSTA** ALL'ISTANZA.

SPAZIO DI RICERCA PER UN PROBLEMA P

ESISTONO DIVERSI MODI PER DETERMINARE UNO SPAZIO DI RICERCA DI UN PROBLEMA. CRITERI PER VALUTARE LA QUALITA' DI UNA SCELTA RISPETTO AD UN'ALTRA:

- **LO SPAZIO DI RICERCA DEVE CARATTERIZZARE LE SOLUZIONI AD UNA ISTANZA IN MODO NON RIDONDANTE: E' OPPORTUNO SCEGLIERE UNA STRUTTURA DATI CHE ESCLUDA A PRIORI CONFIGURAZIONI CHE NON CORRISPONDONO A PRIORI AD ALCUNA SOLUZIONE.**
- **LO SPAZIO DI RICERCA NON DEVE ESSERE UNA BANALE RIFORMULAZIONE DEL PROBLEMA E DELLA SUA RELAZIONE CARATTERISTICA, NE´ DEVE NASCONDERE LA DIFFICOLTA' DI UN PROBLEMA, MA DEVE FORNIRE ELEMENTI SIGNIFICATIVI PER LA COMPRENSIONE DELLA STRUTTURA DEL PROBLEMA E DELLE SUE SOLUZIONI.**

ESEMPIO: PROBLEMA DELLE N REGINE

SIA i LA DIMENSIONE DELLA SCACCHIERA:

- L'INSIEME CHE FORMA LO SPAZIO DI RICERCA È L'INSIEME DI TUTTE LE POSSIBILI SCACCHIERE DI DIMENSIONE i IN CUI SONO POSTE i REGINE;
- LA FUNZIONE DI AMMISSIBILITÀ VERIFICA SE LA SCACCHIERA SODDISFA I VINCOLI DEL PROBLEMA, CIOÈ SE NON ESISTONO NELLA SCACCHIERA DUE REGINE PIAZZATE NELLA STESSA RIGA O COLONNA O DIAGONALE;
- LA FUNZIONE DI RISPOSTA È LA FUNZIONE IDENTITÀ;
- LA STRUTTURA DI DATI È UNA MATRICE ixi MAGARI DI CARATTERI IN CUI IL CARATTERE Q OPPURE IL SIMBOLO SPECIALE $\Re$ INDICA LA POSIZIONE DELLA REGINA.

AD ESEMPIO:

		Q	
Q			
	Q		
			Q

CONFIGURAZIONE NON AMMESSA

		Q	
Q			
			Q
	Q		

CONFIGURAZIONE AMMISSIBILE

ESEMPIO: PROBLEMA DELLE N REGINE

MA LA RAPPRESENTAZIONE È MIGLIORABILE?

- **PER ESCLUDERE CONFIGURAZIONI CON DUE REGINE SULLA STESSA RIGA RAPPRESENTIAMO LA CONFIGURAZIONE DI SCACCHIERA MEDIANTE UN *VETTORE* DI DIMENSIONE i CON ELEMENTI INTERI COMPRESI TRA 1 ED i:**

  SE L'ELEMENTO IN POSIZIONE j DEL VETTORE È h VUOL DIRE CHE LA REGINA DELLA RIGA j È IN COLONNA h;

- **PER ESCLUDERE CONFIGURAZIONI ERRATE BASTA ESCLUDERE VETTORI CHE HANNO VALORI UGUALI IN POSIZIONI DIVERSE.**

AD ESEMPIO:

		Q	
Q			
	Q		
			Q

3	1	2	4

		Q	
Q			
			Q
	Q		

3	1	4	2

PER IL PROBLEMA DELLE N REGINE :

- L'INSIEME DEGLI ELEMENTI DELLO SPAZIO DI RICERCA COINCIDE CON TUTTI I POSSIBILI MODI DI MEMORIZZARE I VALORI DA 1 A i IN UN VETTORE V CON i ELEMENTI (*TUTTE LE POSSIBILI PERMUTAZIONI DI (1,..,i)*);
- LA FUNZIONE DI AMMISSIBILITÀ VERIFICA SE IL GENERICO ELEMENTO DELLO SPAZIO DI RICERCA, CIOÈ IL GENERICO VETTORE V, NON CONTENGA DUE ELEMENTI IN POSIZIONE h E k TALI CHE

$$|V[h]-V[k]| = |h-k|$$

(*DUE REGINE NELLA STESSA DIAGONALE*);
- LA FUNZIONE DI RISPOSTA RICOSTRUISCE SEMPLICEMENTE, A PARTIRE DA UN GENERICO VETTORE, LA CORRISPONDENTE CONFIGURAZIONE DELLA SCACCHIERA.

TECNICHE ALGORITMICHE

SONO BASATE SU DIVERSI PARADIGMI DI UTILIZZO DELLO SPAZIO DI RICERCA E CONSIDERIAMO:

- **LA TECNICA DI ENUMERAZIONE**
- **LA TECNICA BACKTRACKING**
- **LA TECNICA GOLOSA (GREEDY)**
- **LA TECNICA DIVIDE ET IMPERA**

I PARADIGMI SONO

IL PARADIGMA SELETTIVO

IL PARADIGMA GENERATIVO

DAL PARADIGMA ***SELETTIVO*** SONO CREATE TECNICHE DI PROGETTO DI ALGORITMI CHE, PER L'ISTANZA DEL PROBLEMA PRESA IN CONSIDERAZIONE, VISITANO LO SPAZIO DI RICERCA TENTANDO DI TROVARE UN ELEMENTO AMMISSIBILE.

OGNI ALGORITMO FA RIFERIMENTO **ALL'INTERO SPAZIO DI RICERCA** CHE VIENE **ESPLORATO** CON SISTEMATICITÀ IN UNA DEFINITA MODALITÀ.

APPARTENGONO A QUESTO PARADIGMA LA TECNICA **ENUMERATIVA** E QUELLA DI **BACKTRACKING**.

DAL PARADIGMA *GENERATIVO* SCATURISCONO TECNICHE DI PROGETTO DI ALGORITMI CHE GENERANO DIRETTAMENTE LA SOLUZIONE SENZA SELEZIONARLA TRA GLI ELEMENTI DELLO SPAZIO DI RICERCA.

IN QUESTO PARADIGMA LO SPAZIO DI RICERCA È CONSIDERATO ESCLUSIVAMENTE IN FASE DI PROGETTO DELL'ALGORITMO ALLO SCOPO DI CARATTERIZZARE LE SOLUZIONI DEL PROBLEMA E DEFINIRE UNA STRATEGIA RISOLUTIVA DIRETTA PER OGNI ISTANZA.

APPARTENGONO A QUESTO PARADIGMA LA TECNICA GOLOSA E LA DIVIDE- ET-IMPERA.