

Valoración de Opciones usando el Método Inverso

Sebastián Pachón Santamaría

Índice general

1. Introducción	2
2. Preliminares	4
2.1. Modelo de Black-Scholes-Merton	4
2.2. Fórmula de Black-Scholes-Merton	5
2.3. Proceso para seguir el precio de una acción	9
2.4. Lema de Ito	10
2.5. Ecuación de Black-Scholes-Merton	11
3. Problemas Inversos	13
3.1. Motivación	13
3.2. Teoría de Regularización y Regularización de Tikhonov	16
3.3. Estrategia de regularización para determinar la volatilidad	19
4. Resolución de la Ecuación y Resultados	23
4.1. Resolución de la Ecuación	23
4.2. Resultados Numéricos	25
5. Conclusiones	27

Capítulo 1

Introducción

Un derivado es un instrumento financiero diseñado sobre un subyacente y cuyo precio depende del precio del mismo. En general, un derivado se puede entender como un acuerdo (lo llamaremos contrato de aquí en adelante) de compra o venta de un activo determinado, en una fecha específica y a un precio establecido. Existen varios tipos de derivados, como forwards, futuros, opciones call o put, swaps, entre otros, y cada uno de ellos tiene un valor diferente y variable, pues depende de diferentes parámetros como el precio del subyacente, las tasas de interés y el tiempo de expiración del contrato, por mencionar algunos ejemplos.

Con base en lo anterior, surge una pregunta importante: ¿Cuál es el valor de ese contrato? O equivalentemente: ¿Cuánto debo pagar por alguno de esos derivados? Desafortunadamente la respuesta a esta pregunta no es única porque, si se utilizan varios modelos, cada uno de ellos ofrece una respuesta que no tiene que no necesariamente es igual a la de los demás modelos. Sin embargo, esta va a ser la pregunta que pretendremos responder a lo largo de este trabajo y que sirve como motivación para lo que viene.

Como ya dijimos, existen diferentes métodos para valorar derivados, y cada uno de ellos está ligado a un modelo particular. Es por esto que el primer paso para desarrollar este proyecto es el de definir un derivado para valorar, un método particular de valoración y el respectivo modelo al que va a estar ligado. El derivado que estudiaremos será una opción call y el método que utilizaremos es el denominado como "método inverso", junto con el modelo de Black-Scholes.

Una opción call es un contrato bilateral en el que una de las partes (parte larga, el comprador de la opción) tiene el derecho, pero no la obligación, a comprar a la otra parte (parte corta, vendedor de la opción) una cantidad dada de un subyacente, a un precio dado (conocido como Strike) y en un momento en particular. A diferencia de un forward, donde existe una obligación de las partes en comprar y vender, en una opción call la parte larga tiene la posibilidad de decidir si compra o no el subyacente sobre el que se diseñó ese derivado. Adicional a esto, existen dos tipos de opciones: de tipo Americano o de tipo Europeo. Las de tipo Americano se pueden ejercer en cualquier momento, contrario a las de tipo Europeo que exclusivamente se ejercen en el tiempo de expiración. Durante este trabajo utilizaremos únicamente opciones Europeas.

Ejemplo 1.1.

Juan Román compra una opción call, con strike $K = \$100$ y expiración en seis meses, para comprar un paquete de 100 acciones de alguna compañía. El precio de hoy de cada una de esas acciones es de $S = \$90$ y el valor de de una opción para comprar una acción es de $V = \$5$, por lo que el costo inicial

es de \$500. Al cabo de esos seis meses tenemos dos posibilidades:

- **Caso 1:** ($S < K$) En este caso Juan Román no debe ejercer la opción pues no tiene sentido comprar a \$100 una acción que en el mercado tiene un precio inferior. En este caso el inversionista pierde los \$500 de la inversión inicial.
- **Caso 2:** ($S \geq K$) Aquí Juan Román sí debe hacer uso de la opción. Supongamos que el precio de las acciones en ese momento es de $S = \$120$. Al ejercer la opción Juan Román está comprando por \$100 algo que en el mercado tiene un valor superior. De hecho, si las vende inmediatamente, estaría ganando $\$100 \times (\$120 - \$100) = \2000 sin incluir la inversión inicial y \$1500 si la incluimos.

Vale notar que, en algunos casos, puede pasar que incluso ejerciendo la opción Juan Román pierda algo de dinero. Consideremos el caso en que al final de esos seis meses el valor de las acciones es de $S = \$103 \geq K$. Aquí se estarían comprando a \$100 acciones que en el mercado valen \$103, entonces la ganancia por ejercer la opción es $\$100 \times (\$103 - \$100) = \300 . Sin embargo, Juan Román pagó \$500 por esa opción call, realmente perdió \$200. No obstante, si Juan Román no la ejerciera, perdería toda la inversión inicial de \$500, por lo que siempre es buena idea ejercer la opción cuando suceda que $S \geq K$.

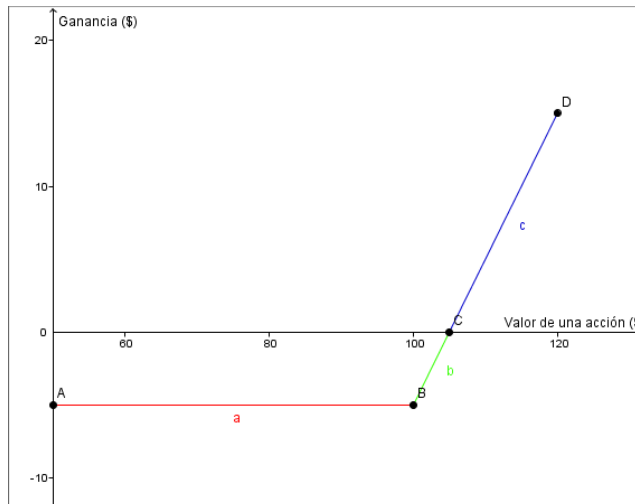


Figura 1.1: Gráfica de la ganancia de una opción call respecto al precio del subyacente

En la gráfica anterior se muestra la ganancia de una persona que compra una opción call de valor $V = \$5$ y strike $K = \$100$. El segmento *a* muestra el momento en el que el precio de la acción está por debajo del strike, por lo que no se ejerce la opción y se pierde V . El segmento *b* comienza exactamente cuando el valor de la acción es \$100, es decir, alcanza el strike y el dueño de la opción debe ejercerla. Sin embargo, en este segmento se pierde algo de dinero. Finalmente, el segmento *c* muestra el momento en que el dueño de la opción empieza a ganar dinero, pues para cualquier valor de la acción que sea mayor o igual a \$105, al hacer uso de la opción habrá una ganancia neta.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Modelo de Black-Scholes-Merton

En esta sección hablaremos sobre el modelo que vamos a utilizar a lo largo del trabajo. Es importante hacerlo porque nos brindará las bases para trabajar de aquí en adelante.

El modelo de Black-Scholes-Merton vive en un "mundo" bastante particular, donde se hacen unos supuestos para poder desarrollar la teoría. Particularmente, se asume que el mercado consiste de al menos un subyacente riesgoso (una acción) y un subyacente libre de riesgo (un bono).

Algunas hipótesis que se imponen sobre los subyacentes son las siguientes:

- La tasa de retorno del subyacente libre de riesgo es constante y se denomina "tasa de interés libre de riesgo".
- El retorno de las acciones sigue un movimiento Browniano geométrico y se supone que tiene tendencia y volatilidad constante.
- La acción no paga dividendos.

Por otro lado, los supuestos sobre el mercado son:

- No hay oportunidad de arbitraje. Esto quiere decir que no es posible ganar dinero sin ningún riesgo.
- Existe la posibilidad de prestar y pedir prestado cualquier cantidad de dinero, en los dos casos sujeto a la tasa libre de riesgo.
- Es posible vender cualquier cantidad de una acción, tanto múltiplos enteros como fracciones de ellas.
- No hay ningún costo de transacción.

Ahora definimos algunos conceptos y establecemos la notación:

- $S(t)$ el precio de la acción en el tiempo t , puede considerarse como constante o como variable, dependiendo el caso.
- $V(S, t)$ el precio de un derivado que depende del precio S y el tiempo.
- $C(S, t)$ el precio de una opción call Europea y $P(S, t)$ el precio de una opción put Europea.
- K el strike de la opción.
- r la tasa de interés libre de riesgo, compuesta continuamente.
- μ la tendencia (drift) de S .
- σ la desviación estándar del retorno de la acción.
- t el tiempo medido en años. Se utiliza $t = 0$ para expresar el presente y $t = T$ el momento de expiración.
- $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$. $N(x)$ representa la función de distribución acumulada.
- $N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ la función de densidad.

2.2. Fórmula de Black-Scholes-Merton

El resultado más importante del modelo planteado por Black-Scholes-Merton es la conocida fórmula de Black-Scholes, que dicta el precio de opciones call y put Europeas en $t = 0$ sobre acciones que no pagan dividendos. Esta fórmula es:

$$C = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$P = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

Aquí:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Usaremos la demostración de [Hul09] para probar estas fórmulas utilizando un resultado importante: si X tiene distribución lognormal y la desviación estándar de X es ν entonces

$$E[\max(X - K, 0)] = E(X)N(d_1) - KN(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln[\frac{E(X)}{K}] + \frac{\nu^2}{2}}{\nu}$$

$$d_2 = \frac{\ln[\frac{E(X)}{K}] - \frac{\nu^2}{2}}{\nu}$$

Y E es el valor esperado.

Demostración. Sea $f(X)$ la función de densidad de probabilidad de X . Por definición

$$E[\max(X - K, 0)] = \int_K^\infty (X - K)f(X)dX$$

Se tiene que $\ln(X)$ está normalmente distribuida con desviación estándar ν y, por propiedades de la distribución lognormal, el promedio de $\ln(X)$ es $m = \ln[E(X)] - \frac{\nu^2}{2}$.

Ahora definimos $G = \frac{\ln(X) - m}{\nu}$. Esta nueva variable tiene promedio 0 y desviación estándar 1. Sea $h(G) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{G^2}{2}}$ la función de densidad de G . Por lo tanto:

$$E[\max(X - K, 0)] = \int_{\frac{\ln(K) - m}{\nu}}^\infty (e^{G\nu + m} - K)h(G)dG$$

Si nos fijamos exclusivamente en $e^{G\nu + m}h(G)$ tenemos:

$$\begin{aligned} e^{G\nu + m}h(G) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(-G^2 + 2G\nu + 2m)}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(-G^2 + 2G\nu + 2m)}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{[-(G-\nu)^2 + 2m + \nu^2]}{2}} \\
&= \frac{e^{m + \frac{\nu^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{[-(G-\nu)^2]}{2}} \\
&= e^{m + \frac{\nu^2}{2}} h(G - \nu)
\end{aligned}$$

Con base en esto, reemplazando:

$$E[\max(X - K, 0)] = e^{m + \frac{\nu^2}{2}} \int_{\frac{(\ln(K) - m)}{\nu}}^{\infty} h(G - \nu) dG - K \int_{\frac{(\ln(K) - m)}{\nu}}^{\infty} h(G) dG$$

Finalmente, definiendo $N(x)$ como la probabilidad que una variable con promedio 0 y desviación estándar 1 sea menor que x , la primera integral resulta:

$$N\left[\frac{-\ln(K) + m}{\nu} + \nu\right]$$

Al cambiar m dentro de la ecuación anterior se tiene:

$$N\left(\frac{\ln\left[\frac{E(X)}{K}\right] + \frac{\nu^2}{2}}{\nu}\right) = N(d_1)$$

Se puede repetir el mismo procedimiento para definir $N(d_2)$ y concluir que

$$E[\max(X - K, 0)] = e^{m + \frac{\nu^2}{2}} N(d_1) - K N(d_2)$$

Pero

$$m = \ln[E(x)] - \frac{\nu^2}{2}$$

$$m + \frac{\nu^2}{2} = \ln[E(X)]$$

$$e^{m + \frac{\nu^2}{2}} = E(X)$$

Entonces

$$E[\max(X - K, 0)] = E(X)N(d_1) - KN(d_2)$$

□

Una vez probado este resultado, se deduce fácilmente el resultado de Black-Scholes-Merton. Consideremos una opción call sobre una acción que no paga dividendos. Se tiene que T es el tiempo de maduración, σ la volatilidad, K el strike de la opción, r la tasa de interés libre de riesgo y S_0 el precio actual de la acción.

El precio de una opción call es

$$C = e^{-rT} \hat{E}[\max(S_T - K, 0)]$$

Donde \hat{E} es el valor esperado utilizando la probabilidad de neutralidad al riesgo. S_T es lognormal por el proceso estocástico que utilizan Black-Scholes-Merton. Entonces $\hat{E}(S_T) = S_0 e^{rT}$ con desviación estándar de $\ln(S_T) = \sigma\sqrt{T}$

Aplicando esto al resultado probado anteriormente, concluimos que

$$C = e^{-rT} [S_0 e^{rT} N(d_1) - KN(d_2)]$$

que es equivalente a

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln \left[\frac{\hat{E}(S_T)}{K} \right] + \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln \left[\frac{\hat{E}(S_T)}{K} \right] - \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

2.3. Proceso para seguir el precio de una acción

Aquí vamos a tratar de describir el proceso que sigue el precio de una acción mediante un proceso estocástico (nuevamente asumiendo que la acción no paga dividendos).

Lo primero que se viene a la mente para describir ese movimiento del precio es que se ajuste a un proceso de Wiener. Para que esto ocurra, es necesario que el drift y la volatilidad sean constantes. Pero esto no puede ocurrir porque no se ajusta a un hecho importante: sin importar cuál sea el precio de una acción, el dueño siempre querrá que el retorno sea el mismo. Es por esto que el supuesto de un drift constante debe ser reemplazado por uno de un retorno constante. Según esto, el drift debe verse como μS para un parámetro μ . Entonces, para un incremento pequeño de tiempo ΔT , el incremento del valor de la acción debe ser $\mu S \Delta T$.

Si la volatilidad de la acción llegase a ser siempre 0, este modelo implica que

$$\Delta S = \mu S \Delta T$$

Y si hacemos que el cambio en el tiempo tienda a 0:

$$dS = \mu S \Delta T$$

que es una ecuación diferencial separable.

$$\frac{dS}{S} = \mu \Delta T$$

e integrando entre $t = 0$ y $t = T$

$$\ln |S| = \ln S = \mu T$$

$$S_T = S_0 e^{\mu T}$$

Sin embargo, es poco real pensar que estamos en un escenario donde la volatilidad es 0. De hecho, en la realidad el precio siempre va a tener una volatilidad. De acuerdo a esto, una buena idea es considerar que la desviación en un período de tiempo corto es proporcional al precio de la acción. Esa nueva suposición nos lleva al siguiente modelo:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

Es por eso que en este trabajo, así como en muchos contextos académicos, vamos a suponer que el movimiento del precio de una acción sigue el proceso estocástico descrito anteriormente.

2.4. Lema de Ito

El lema de Ito es un resultado presentado por el matemático K. Ito en 1951 que es fundamental para poder seguir con la teoría desarrollada por Black-Scholes-Merton.

Definición:

Un *proceso de Ito* es un proceso de Wiener generalizado, donde los parámetros a y b son funciones que dependen tanto de una variable x como del tiempo t . Algebráicamente un proceso de Ito se puede escribir de la siguiente manera:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$$

Por un momento supongamos que el valor de una variable x sigue el proceso de Ito

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz$$

donde dz es un proceso de Wiener y los parámetros a y b son funciones que dependen de x y del tiempo t . Por un lado, a es el drift de x y b^2 es la varianza de x . Lo que probó Ito fue que para una función G que depende de x y t sigue el proceso

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz$$

En otras palabras, Ito mostró que G sigue un proceso de Ito con drift

$$\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2$$

y varianza

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 b^2$$

Este lema es importante porque a partir de él se puede reemplazar x por S , y G se convierte en una función que depende del valor de la acción y del tiempo t . Para ese caso, el proceso cambia a

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz$$

2.5. Ecuación de Black-Scholes-Merton

En lo previo hablamos de la fórmula de Black-Scholes-Merton, pero ahora presentamos la ecuación diferencial que ellos plantearon según el resultado del lema de Ito.

Como asumimos que el precio de la acción sigue el proceso estocástico

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

Tomemos V como el precio de una opción call sobre una acción de precio S . Claramente V depende de S y t , por lo tanto al aplicar el lema de Ito llegamos a la ecuación

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S dz$$

Para el caso discreto, considerando pequeños cambios de tiempo Δt , podemos reescribir estas últimas dos ecuaciones de la siguiente manera:

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z$$

$$\Delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial S} \mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S \Delta z$$

Y ahora construimos un portafolio de tal manera que se elimine el proceso de Wiener. Ese portafolio consiste en comprar $\frac{\partial V}{\partial S}$ acciones y vender un derivado, en particular una opción call. Por esto, el valor P de ese portafolio es $P = -V + \frac{\partial V}{\partial S} S$. En un cambio pequeño de tiempo Δt concluimos que $\Delta P = -\Delta V + \frac{\partial V}{\partial S} \Delta S$, pero ya conocemos los valores ΔV y ΔS , al reemplazarlos:

$$\begin{aligned} \Delta P &= \left(-\frac{\partial V}{\partial S} \mu S - \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t - \frac{\partial V}{\partial S} \sigma S \Delta z + \frac{\partial V}{\partial S} (\mu S \Delta t + \sigma S \Delta z) \\ &= \left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \end{aligned}$$

Vale notar que en esta última expresión ya no contamos con dz , por la construcción misma del portafolio, lo que indica que en el instante Δt , el portafolio no corre riesgo. Esto ocurre exclusivamente durante el momento Δt , no es cierto que el portafolio sea libre de riesgo en cada valor de t puesto que al hacer un cambio grande en S y t , $\frac{\partial V}{\partial S}$ también cambia.

Por las suposiciones hechas sobre el modelo de Black-Scholes-Merton, no se puede ganar dinero sin riesgo, por lo que este portafolio debe retornar lo mismo que un subyacente libre de riesgo, que es la tasa de interés libre de riesgo r . Es por esto que

$$\Delta P = rP\Delta t$$

Nuevamente conocemos quiénes son ΔP y P , por lo que al reemplazar

$$\left(-\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(-V + \frac{\partial V}{\partial S}S\right)\Delta t$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(V - \frac{\partial V}{\partial S}S\right)\Delta t$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV$$

y esta última es la ecuación de Black-Scholes Merton. Al ser una ecuación diferencial va a tener infinitas soluciones, pero la manera de llegar a una solución particular es tener en cuenta las condiciones de frontera. Si V es una opción call, por ejemplo, uno está interesado en que la solución V en el tiempo $t = T$ sea el máximo entre $(S - K, 0)$. Por el contrario, si V es una opción put, se invierte esa condición, entonces en $t = T$ se requiere que V sea el máximo entre $(K - S, 0)$.

Capítulo 3

Problemas Inversos

3.1. Motivación

Para explicar el motivo por el que estamos interesados en los problemas inversos, primero debemos definir lo que significa ese concepto.

Definición: (Problema directo e inverso)

Según [Kirsch] un problema directo es aquel donde un operador K actúa sobre un "modelo" x que pertenece a un espacio de modelos X y un problema inverso es la solución a la ecuación $K(x) = y$.

En otras palabras:

- Problema directo: aquel donde tengo x , un operador K y computo $K(x)$ para llegar a una solución concreta y .
- Problema inverso: aquel donde tengo y , un operador K y debo encontrar x tal que se cumpla $K(x) = y$.

Para ayudar a clarificar esto, daremos unos ejemplos básicos y luego unos un poco más avanzados.

Ejemplo 3.1.

Encontrar el polinomio de grado n que tiene raíces reales $\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\}$. La solución a este problema simplemente es $p(x) = c(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$.

Esto es un problema inverso puesto que tenemos la información de llegada (las raíces del polinomio) y debemos encontrar el polinomio tal que $p(r_i) = 0$ con $1 \leq i \leq n$. Este mismo problema puede ser enunciado como uno de tipo directo: encontrar las raíces del polinomio $p(x) = c(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$, que tiene un método de solucionar distinto al primero.

Ejemplo 3.2.

Dados los términos $\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{6}, \dots\}$ determine la fórmula de la sucesión.

En ese caso, uno debe llegar a la respuesta que la sucesión que tiene esos cuatro primeros términos es

$$a_n = \frac{n+1}{n!}$$

Caso contrario sería: encontrar los primeros cuatro términos de la sucesión dada por $a_n = \frac{n+1}{n!}$.

El primero caso es la formulación de un problema inverso, mientras que el otro caso sería un problema directo.

Ejemplo 3.3.

La ecuación de calor 1 – dimensional está determinada por

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

con condiciones de frontera $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ para $t \geq 0$ y condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$, para $0 \leq x \leq \pi$.

Este problema tiene como solución

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

con

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(y) \sin(ny) dy$$

Tiene la forma de un problema inverso porque uno tiene fija la distribución de temperatura $u(\cdot, T)$ y busca una forma de encontrar la temperatura para tiempos anteriores a T . En particular, se podría calcular la temperatura inicial $u(\cdot, 0)$.

Esto también podría presentarse como un problema directo si dada la distribución de la temperatura u_0 y el tiempo final T , se encuentra $u(\cdot, T)$.

Ejemplo 3.4.

Este ejemplo trata sobre el problema de valores propios de Sturm-Liouville. Tomamos una cuerda de longitud L y densidad de masa $\rho = \rho(x) > 0$, para $0 \leq x \leq L$, que está fija en los extremos $x = 0$ y $x = L$.

Al mover la cuerda ésta, por las vibraciones, genera sonidos (tonos). Sea $v(x, t)$, $0 \leq x \leq L$ y $t > 0$ es el desplazamiento de x en el tiempo t . Esto satisface la ecuación de onda

$$\rho(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, 0 < x < L, t > 0$$

que tiene condiciones de frontera $v(0, t) = v(L, t) = 0$ para $t > 0$.

Definimos un "tono puro" a un desplazamiento periódico de la forma

$$v(x, t) = w(x)[a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)]$$

donde $\omega > 0$ es la frecuencia. Un tono puro resuelve el problema

$$\rho(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, 0 < x < L, t > 0$$

si y solo si w y ω son solución del problema de valores propios de Sturm-Liouville

$$w''(x) + \omega^2 \rho(x)w(x) = 0, 0 < x < L, w(0) = w(L) = 0$$

Existe una propiedad importante sobre los problemas inversos que ayuda a clasificarlos en dos grupos importantes: decimos que un problema inverso puede estar "bien puesto" ó "mal puesto".

Definición:(bien puesto)

Sean X, Y espacios normados, K un mapa que puede ser lineal o no. Se dice que $K(x) = y$ está *bien puesto* si se cumplen las siguientes tres condiciones:

- Para todo $y \in Y$ hay al menos un $x \in X$ tal que $K(x) = y$. A esto lo denominamos *existencia*.
- Para todo $y \in Y$ existe a lo sumo un $x \in X$ tal que $K(x) = y$. A esto lo denominamos *unicidad*.
- La solución x depende continuamente de y . Esto quiere decir que para toda sucesión $(x_n) \subset X$ con $Kx_n \rightarrow Kx$ cuando $n \rightarrow \infty$, se cumple que $x_n \rightarrow x$ cuando $n \rightarrow \infty$. A esto lo denominamos *estabilidad*.

Si alguna de las tres condiciones anteriores no se llega a cumplir, se dice que el problema está *mal puesto*. De hecho, la gran mayoría de problemas inversos van a ser *mal puestos* porque falla la tercera condición, la estabilidad. La motivación para conocer sobre problemas inversos nace por la manera en que vamos a valorar derivados.

El método inverso de valoración consiste en observar unos precios de opciones en el mercado y, con base en ellos, tratar de conseguir la función de volatilidad $\sigma(S, t)$ con la que se generaron. Esto es un problema inverso porque está planteado de la manera que corresponde: se cuenta con una información específica (unos resultados fijos) y se trata de recuperar algún elemento matemático con el que fueron obtenidos, en este caso particular una función de volatilidad.

Para solucionar este hecho lo que haremos será introducir un concepto nuevo, que es una *estrategia de regularización* que tiene como objetivo principal minimizar los errores con los que nos podamos encontrar por la falta de estabilidad.

3.2. Teoría de Regularización y Regularización de Tikhonov

El objetivo detrás de usar un método de regularización es olvidarnos de lo mal puesto que está un problema. La falta de estabilidad hace que no podamos encontrar una solución exacta en la mayoría de los casos, por eso buscamos soluciones lo más cercanas posibles a la original cambiando en lo mínimo posible el problema original y eliminando lo mal puesto que estaba. En este trabajo en particular haremos uso de la regularización de Tikhonov, que explicaremos más adelante.

Definición: (estrategia de regularización)

Una *estrategia de regularización* es una familia de operadores lineales $R_\alpha : Y \rightarrow X$ con $\alpha > 0$ tal que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} R_\alpha Kx = x$$

para todo $x \in X$. Esto quiere decir que los operadores $R_\alpha K$ convergen puntualmente a la identidad. A α lo llamamos parámetro de regularización.

Definición: (operador compacto)[Eva98]

Dado un operador lineal acotado

$$K : X \rightarrow Y$$

se dice *compacto* si para cada sucesión $(x_n) \subset X$, la sucesión (Kx_n) es precompacta en Y . En otras palabras, existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que (Kx_{n_k}) converge en Y .

Ahora probaremos un teorema de [Kirsch] importante para nosotros:

Teorema 3.1.

Sean X, Y espacios normados y $K : X \rightarrow Y$ un operador lineal compacto con kernel $\mathcal{N}(K) := \{x \in X : K(x) = 0\}$. Suponemos que la dimensión de $X/\mathcal{N}(K)$ sea infinita. Entonces existe una sucesión $(x_n) \subset X$ tal que $Kx_n \rightarrow 0$ pero (x_n) no converge. De hecho se puede escoger (x_n) tal que $\|x_n\| \rightarrow \infty$. En particular, si K es inyectivo, la inversa $K^{-1} : Y \supset \mathcal{R}(K) \rightarrow X$ no es acotado. Aquí $\mathcal{R}(K) := \{Kx \in Y : x \in X\}$ es el rango de K .

Demostración. El espacio $X/\mathcal{N}(K)$ es un espacio normado con norma $\|[x]\| := \inf\{\|x + z\| : z \in \mathcal{N}(K)\}$ porque el kernel es cerrado. Ahora, el operador inducido $\hat{K} : X/\mathcal{N}(K) \rightarrow Y$ tal que $\hat{K}([x]) := Kx$ con $[x] \in X/\mathcal{N}(K)$, y está bien definido, es inyectivo y compacto.

Por otro lado, la inversa del operador \hat{K} la definimos como $\hat{K}^{-1} : Y \supset \mathcal{R}(K) \rightarrow X/\mathcal{N}(K)$ y no es acotado porque, de lo contrario, la identidad $I : X/\mathcal{N}(K) \rightarrow X/\mathcal{N}(K)$ sería compacto por ser composición de operador acotado y operador compacto. Esto contradice el hecho que la dimensión de $X/\mathcal{N}(K)$ es infinita. Usando que \hat{K}^{-1} no es acotado, tomamos una sucesión $([z_n]) \subset X/\mathcal{N}(K)$ con

$Kz_n \rightarrow 0$ y $\|z_n\| = 1$. Finalmente, tomamos $v_n \in X/\mathcal{N}(K)$ tal que $\|z_n + v_n\| \geq \frac{1}{2}$, y definimos $x_n := \frac{(z_n + v_n)}{\sqrt{\|Kz_n\|}}$. Entonces $Kx_n \rightarrow 0$ y $\|x_n\| \rightarrow \infty$. □

Esta prueba se encuentra en el libro [Kir11] e ilustra algo de mucho valor: para todo operador compacto K , un problema de la forma $Kx = y$ siempre estará mal puesto.

El siguiente lema lo encontramos en [Kir11].

Lema 3.1.

Sean X, Y espacios de Hilbert, $K : X \rightarrow Y$ operador lineal y acotado y $y \in Y$. Entonces existe $\hat{x} \in X$ con $\|K\hat{x} - y\| \leq \|Kx - y\|$ para todo $x \in X$ si y sólo si $\hat{x} \in X$ es solución de la ecuación $K^*K\hat{x} = K^*y$. Aquí $K^* : Y \rightarrow X$ se refiere al adjunto de K .

Demostración. Por definición del producto interno se tiene

$$\|Kx - y\|^2 - \|K\hat{x} - y\|^2 = 2\operatorname{Re}(K\hat{x} - y, K(x - \hat{x})) + \|K(x - \hat{x})\|^2$$

para todo $x, \hat{x} \in X$. Si \hat{x} cumple que $K^*K\hat{x} = K^*y$ entonces $\|Kx - y\|^2 - \|K\hat{x} - y\|^2 \geq 0$ por lo que \hat{x} minimiza $\|Kx - y\|$.

Para la otra dirección, si \hat{x} minimiza $\|Kx - y\|$, hacemos la sustitución $x = \hat{x} + zt$ para $t > 0$ y $z \in X$. Entonces

$$2t\operatorname{Re}(K^*(K\hat{x} - y), z) + t^2\|Kz\|^2 \geq 0$$

Al dividir por t :

$$2\operatorname{Re}(K^*(K\hat{x} - y), z) + t\|Kz\|^2 \geq 0$$

Y al hacer $t \rightarrow 0$:

$$2\operatorname{Re}(K^*(K\hat{x} - y), z) \geq 0$$

lo que significa que $K^*(K\hat{x} - y) = 0$ y por tanto \hat{x} resuelve la ecuación. □

Lo que propone la regularización de Tikhonov es que en vez de resolver $Kx = y$, se determine el mínimo del *funcional de Tikhonov*

$$J_\alpha := \|Kx - y\|^2 + \alpha\|x\|^2$$

para $x \in X$.

Probaremos el siguiente teorema que encontramos en [Kir11] y expondremos la demostración que allí se encuentra.

Teorema 3.2.

Sea $K : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado entre espacios de Hilbert y $\alpha > 0$. Entonces el funcional de Tikhonov tiene un único mínimo $x^\alpha \in X$. Este x^α es la única solución a la ecuación

$$\alpha x^\alpha + K^* K x^\alpha = Ky$$

Demostración. Sea $I := \inf_{x \in X} J_\alpha(x)$. Definimos una sucesión minimizadora como una sucesión $(x_n) \subset X$ tal que $J_\alpha(x_n) \rightarrow I$ cuando $n \rightarrow \infty$. Vamos a mostrar que (x_n) es una sucesión de Cauchy.

Por definición de producto interno y funcional de Tikhonov:

$$\begin{aligned} J_\alpha(x_n) + J_\alpha(x_m) &= 2J_\alpha\left(\frac{1}{2}(x_n + x_m)\right) + \frac{1}{2}\|K(x_n - x_m)\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|x_n - x_m\|^2 \\ &\geq 2I + \frac{\alpha}{2}\|x_n - x_m\|^2 \end{aligned}$$

.

Como $J_\alpha(x_n) + J_\alpha(x_m)$ converge a $2I$ cuando $n, m \rightarrow \infty$, eso muestra que la sucesión es de Cauchy y es convergente. Sea $x^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Por continuidad de J_α se cumple que $J_\alpha(x_n) \rightarrow J_\alpha(x^\alpha)$ y $J_\alpha(x^\alpha) = I$, lo que prueba la existencia del mínimo para el funcional de Tikhonov.

Al igual que en el lema anterior, haremos la siguiente operación:

$$\begin{aligned} J_\alpha(x) - J_\alpha(x^\alpha) &= 2\operatorname{Re}(Kx^\alpha - y, K(x - x^\alpha)) + 2\alpha\operatorname{Re}(x^\alpha, x - x^\alpha) + \|K(x - x^\alpha)\|^2 + \alpha\|x - x^\alpha\|^2 \\ &= 2\operatorname{Re}(K^*(Kx^\alpha - y) + \alpha x^\alpha, x - x^\alpha) + \|K(x - x^\alpha)\|^2 + \alpha\|x - x^\alpha\|^2 \end{aligned}$$

para todo $x \in X$

Según esto, la equivalencia de la ecuación con el problema de minimización para J_α se muestra igual que en el lema anterior. Lo único que resta hacer es mostrar la inyectividad de $\alpha I + K^* K$ para $\alpha > 0$. Sea $\alpha I + K^* K x = 0$, al multiplicar por x resulta $\alpha(x, x) + (Kx, Kx) = 0$ entonces $x = 0$.

□

Definición:

Sea X un espacio lineal y las normas $\|\cdot\|$,

$$\|\cdot\|_1$$

en X . Decimos que la norma

$$\|\cdot\|_1$$

es *más fuerte* que $\|\cdot\|$ si existe $c > 0$ tal que

$$\|x\| \leq c\|x\|_1$$

para todo $x \in X$.

Podemos hacerle un cambio al funcional de Tikhonov de tal manera que

$$J_\alpha^1 := \|Kx - y\|^2 + \alpha\|x\|_1^2$$

donde $\|\cdot\|_1$ es una norma más fuerte que pertenece a un subespacio $X_1 \subset X$. De acuerdo a esto, el teorema que acabamos de probar sigue sirviendo, algo importante para nosotros.

3.3. Estrategia de regularización para determinar la volatilidad

Para aterrizar un poco la teoría desarrollada anteriormente, debemos decir cuáles serán nuestros espacios X, Y y el operador K con los que vamos a trabajar de aquí en adelante. X es H^1 , Y es \mathbb{R} y

$$K : X \rightarrow Y, \sigma \mapsto V(S, t, K_{ij}, T_i, \sigma)$$

En [LO97] encontramos el trabajo donde se basan muchos autores para determinar la volatilidad del problema inverso que nos interesa. Vamos a explicar un poco la estrategia de regularización que usan Lagnado y Osher, que consiste en minimizar el funcional

$$F(\sigma) = \|\nabla \sigma\|_2^2 + \lambda G(\sigma)$$

donde

$$G(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} (V(S_0, 0, K_{ij}, T_i, \sigma) - V^{ij})^2$$

Aquí $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ son los tiempos de maduración, para cada uno de estos tiempos T_i decimos que $\{K_{i1}, K_{i2}, \dots, K_{iM_i}\}$ son los strikes de las opciones que maduran en T_i , $V(S, t, K_{ij}, T_i, \sigma)$ es el precio de la opción según la ecuación de Black-Scholes-Merton para esos parámetros y V^{ij} son los precios observados en el mercado.

Antes de seguir con la teoría, vale la pena hacer un comentario antes. En los teoremas que probamos con anterioridad suponemos que tenemos operadores lineales y acotados. No estamos seguros que σ cumpla las dos condiciones, pero heurísticamente lo que estamos haciendo parece tener sentido porque el gradiente de σ es un vector normal a la función, que indica la dirección donde el valor de la función cambia más rápido. Por lo tanto, minimizar $F(\sigma)$ significa minimizar $G(\sigma)$ y minimizar la velocidad con la que σ se aleja del mínimo.

Lagnado y Osher proponen minimizar el funcional

$$\hat{F}(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} (V(S_0, 0, K_{ij}, T_i, \sigma) - V^{ij})^2 + \alpha \|\sigma\|^2 = \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} (V(S_0, 0, K_{ij}, T_i, \sigma) - V^{ij})^2 + \|\sigma\|^2$$

Para lograr esto, deciden minimizar en una norma más fuerte, por lo que consideran un espacio de funciones 1 – *diferenciables* en $(0, \infty) \times (0, \infty)$ que sean integrables por rectángulos y que cumplan

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\sigma(S, t)|^2 dS dt \leq c \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial S} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 \right] dS dt$$

para alguna constante c . Al hacer estas suposiciones, estamos en un espacio de Sobolev, H^1 , que también es espacio de Hilbert, donde la norma $\|\nabla \sigma\|_2$ es más fuerte que $\|\sigma\|_2$. Usando algunos de los resultados ya mostrados, decimos que $F(\sigma)$ tiene un único mínimo $\sigma \in H^1$, que es justamente la función de volatilidad que ellos (y también nosotros) están buscando.

Al reescribir el funcional $F(\sigma)$ tenemos que

$$F(\sigma) = \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{\partial \sigma}{\partial S} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 + \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} (V(S_0, 0, K_{ij}, T_i, \sigma) - V^{ij})^2 \delta(S - S_0) \delta(t) dS dt$$

con $\delta(S - S_0)$ es la función delta de Dirac.

A continuación, Lagnado y Osher utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange para lo que está al interior de las integrales, es decir:

$$L = \int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{\partial \sigma}{\partial S} \right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right)^2 + \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} (V(S_0, 0, K_{ij}, T_i, \sigma) - V^{ij})^2 \delta(S - S_0) \delta(t)$$

Al aplicar las ecuaciones, según los autores, el resultado obtenido es

$$\frac{d}{dS} \frac{\partial L}{\partial \sigma_S} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \sigma_t} - \frac{\partial L}{\partial \sigma} = 0$$

En este sentido, σ_S y σ_t son las derivadas de σ respecto a S y t . Entonces

$$\frac{d}{dS} \frac{\partial L}{\partial \sigma_S} = 2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial S^2}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \sigma_t} = 2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}$$

y también

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = 2\lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} (V(S_0, 0, K_{ij}, T_i, \sigma) - V^{ij}) \frac{\partial V}{\partial \sigma} \delta(S - S_0) \delta(t)$$

.

Finalmente, Lagnado y Osher concluyen que al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange al funcional $F(\sigma)$ el resultado definitivo es:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \frac{\partial V}{\partial \sigma} (S, t, K_{ij}, T_i, \sigma) (V(S, t, K_{ij}, T_i, \sigma) - V^{ij}) = 0$$

Esta fue la importante conclusión a la que llegaron en el paper [LO97].

De acuerdo a [CCEH00] existen dos alternativas para determinar la volatilidad.

- Caso 1: en este caso se tiene en cuenta la variación del precio de las opciones respecto a cambios del índice en el tiempo. La idea es minimizar

$$H(\sigma) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_0^\infty \int_0^{T_{act}} (V(S, t, K_{ij}, T_i, \sigma) - V^{ij})^2 dS dt$$

Este problema también está mal puesto, entonces se sigue el procedimiento de [LO97] y se trata de minimizar

$$J_\lambda(\sigma) = \|\nabla \sigma\|^2 + \lambda H(\sigma)$$

donde $\|\nabla \sigma\|$ es una norma más fuerte que $\|\sigma\|$ y λ el parámetro de regularización.

Al igual que en [LO97], se aplican las ecuaciones de Euler-Lagrange y resulta

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \frac{\partial V}{\partial \sigma} (S, t, K_{ij}, T_i, \sigma) (V(S, t, K_{ij}, T_i, \sigma) - V^{ij}) = 0$$

Para hacer esto se necesitan unas condiciones de frontera que definimos ahora: $\sigma(0, t) = 0$, $\sigma(S, 0) = \sigma_0(S)$ donde $\sigma_0(S)$ es una función que debe obtenerse de los datos del mercado.

- Caso 2: aquí el procedimiento es reemplazar la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \frac{\partial V}{\partial \sigma}(S, t, K_{ij}, T_i, \sigma)(V(S, t, K_{ij}, T_i, \sigma) - V^{ij}) = 0$$

por una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Para hacer esto se supone que σ ya no depende del tiempo sino únicamente de cambios en S . Fijando $t = 0$, ahora se debe minimizar el funcional

$$J_\lambda(\sigma) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial S} \right) - \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_0^\infty V(S, 0, K_{ij}, T_i, \sigma) - V^{ij})^2 dS = 0$$

que al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange resulta en

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial S^2} - \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \frac{\partial V}{\partial \sigma}(S, 0, K_{ij}, T_i, \sigma)(V(S, 0, K_{ij}, T_i, \sigma) - V^{ij}) = 0$$

Capítulo 4

Resolución de la Ecuación y Resultados

4.1. Resolución de la Ecuación

En esta sección vamos a mostrar el método de resolución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \frac{\partial V}{\partial \sigma}(S, t, K_{ij}, T_i, \sigma) (V(S, t, K_{ij}, T_i, \sigma) - V^{ij}) = 0$$

que se encuentra en el trabajo de[CCEH00].

La idea es presentar un algoritmo con el que se encuentra la función $\sigma(S, t)$ con la que se resuelve el problema inverso. Para hacer esto necesitamos unos datos tomados del mercado, los cuales simularemos y llamaremos V^{ij} . Con base en estos precios de opciones exhibiremos el algoritmo de Chiarella.

Lo primero que haremos será delimitar el espacio en que trabajamos, pues si bien el valor de una acción cumple que $0 \leq S < \infty$, debemos tomar un máximo. De igual forma, el tiempo en el que se trabaja puede ser $0 \leq t < \infty$ pero no estamos interesados en muchos valores de tiempo, sino hasta uno específico. Según esto, restringimos el dominio a una cuadrícula determinada por

$$[0 \leq S < S_{max}] \times [0 \leq t < t_{max}]$$

Con la cuadrícula definida, por convención, decimos que rompemos en m pedazos el intervalo $[0 \leq S < S_{max}]$ y en n pedazos el intervalo $[0 \leq t < t_{max}]$. Un elemento típico de la grilla se vería como $(m\Delta S, n\Delta t)$. Antes de comenzar con el algoritmo, se debe fijar el parámetro de regularización λ .

- (I) Definimos la primera aproximación a la función de volatilidad $\sigma(S, t)$ y la llamamos σ_0 .
- (II) En cada punto de la cuadrícula, es decir, en cada uno de los puntos $(m\Delta S, n\Delta t)$, calculamos nuestra función de aproximación. Entonces se calcula $\sigma_0(m\Delta S, n\Delta t)$ en todos los puntos.

(III) Usamos la fórmula de Black-Scholes-Merton para calcular

$$V(m\Delta S, n\Delta t, K_{ij}, T_i, \sigma_0(m\Delta S, n\Delta t))$$

y también

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma}(m\Delta S, n\Delta t, K_{ij}, T_i, \sigma_0(m\Delta S, n\Delta t))$$

.

Esto quiere decir que si estamos trabajando con una opción call, aproximamos V mediante

$$C(m\Delta S, n\Delta t, K_{ij}, T_i, \sigma_0(m\Delta S, n\Delta t))$$

y aproximamos $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$ con

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma}(m\Delta S, n\Delta t, K_{ij}, T_i, \sigma_0(m\Delta S, n\Delta t))$$

donde $C(S, t, K, T, \sigma)$ es el precio de una opción call.

(IV) De acuerdo al paso anterior, usamos esos valores obtenidos para calcular

$$W = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} \frac{\partial V}{\partial \sigma}(S, t, K_{ij}, T_i, \sigma)(V(S, t, K_{ij}, T_i, \sigma) - V^{ij})$$

(v) Resolver la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \lambda W$$

(VI) Como en el punto anterior, al resolver la ecuación de Poisson, el resultado obtenido es una función, llamamos a esa función σ_1 . Con base en esto, repetimos este algoritmo desde el tercer paso hasta generar dos funciones σ_k y σ_{k+1} tales que su diferencia sea menor a un valor deseado.

El primer paso del algoritmo es importante porque es la primera aproximación a la función verdadera $\sigma(S, t)$. El segundo paso sirve para saber cuánto es la volatilidad de la función en cada uno de los nodos de la cuadrícula, datos que son importantes para el siguiente paso. En tercer lugar, se calculan el valor de la opción en cada uno de los nodos de la cuadrícula y el cambio en el valor de la opción respecto a cambios en el valor de σ . Para esto debemos conocer el nodo en el que estamos parados, el Strike de la opción, el tiempo de madurez y el valor de la volatilidad en ese nodo específico. En el cuarto paso se hacen dos sumatorias, una sobre los diferentes tiempos de madurez T_i de la opción y otra sobre los diferentes strikes K_{ij} que puede tener cada uno de los T_i . Finalmente, en el paso cinco se resuelve la ecuación de Poisson que nos interesa y repetimos el proceso hasta que sea necesario.

4.2. Resultados Numéricos

En este trabajo replicamos el experimento hecho por [CCEH00] y obtuvimos resultados muy similares, por lo que pensamos que las simulaciones estuvieron bien realizadas.

La función con la que generamos los precios reales V^{ij} fue $\sigma(S) = 0.2 + 0.1e^{-0.2S}$. La tasa de interés $r = 0.05$ y únicamente un tiempo de maduración $T = 10$ con 12 strikes: $K_1 = 50, K_2 = 60, \dots, K_{12} = 160$. Tomamos $\Delta S = 1.6$ y $\Delta t = 0.004$.

(I) $\sigma_0 = 0.1$. Parámetro de regularización $\lambda = 1$.

- El proceso terminó tras seis iteraciones.
- $\max|\sigma(S) - \sigma_6(S)| = 0.007167$

(II) $\sigma_0 = 0.2$. Parámetro de regularización $\lambda = 1$.

- El proceso terminó tras cuatro iteraciones.
- $\max|\sigma(S) - \sigma_4(S)| = 0.007158$

(III) $\sigma_0 = 0.3$. Parámetro de regularización $\lambda = 1$.

- El proceso terminó tras seis iteraciones.
- $\max|\sigma(S) - \sigma_6(S)| = 0.007154$

(IV) $\sigma_0 = 0.1$. Parámetro de regularización $\lambda = 0.1$.

- El proceso terminó tras tres iteraciones.
- $\max|\sigma(S) - \sigma_3(S)| = 0.007690$

(v) $\sigma_0 = 0.1$. Parámetro de regularización $\lambda = 0.2$.

- El proceso terminó tras tres iteraciones.
- $\max|\sigma(S) - \sigma_4(S)| = 0.001526$

La función real de volatilidad oscila entre 0.2 y 0.3, por lo que los resultados obtenidos son bastante acertados y necesitaron de pocas iteraciones. Primero mantuvimos constante el parámetro de regularización λ y variamos el valor de la primera aproximación. Luego hicimos lo contrario, pues no modificamos el valor de σ_0 pero sí el de λ .

Capítulo 5

Conclusiones

Lo primero que podemos concluir de este trabajo es que se necesita un conocimiento previo de varios temas para poder desarrollarlo correctamente. Es importante tener un conocimiento básico de algunos conceptos financieros, así como algunas definiciones que omitimos para no extender demasiado este trabajo.

Algo que observamos mientras hicimos esta investigación fue que el modelo de Black-Scholes-Merton está alejado de la realidad, pues supone varios hechos que no ocurren realmente. Por ejemplo, suponer infinita liquidez y cero costos de transacción es bastante fuerte, pues es evidente que en el mercado real no se cumplen estas condiciones. Es por esto que, en algunos casos, las ecuaciones de Black-Scholes-Merton pueden servir de guía para la valoración de derivados pero no para dar un precio real y preciso de opciones call y put.

Dentro de la investigación encontramos varios teoremas y lemas acerca de operadores lineales acotados que no podemos aplicar directamente. Heurísticamente estamos convencidos que tiene sentido usar estrategias de regularización sobre los funcionales que nos interesan, pero no se pueden usar directamente los resultados teóricos porque no se cumplen todas las hipótesis.

El algoritmo presentado por [CCEH00] parece funcionar pero mientras realizamos la programación surgieron algunas observaciones. Es probable que con funciones originales de volatilidad más complicadas el problema inverso sea más difícil de resolver porque la solución de la Poisson puede tardar más tiempo y ser menos precisa.

El objetivo principal del trabajo fue cumplido con éxito porque se logró resolver el problema inverso que nos interesaba. A partir de una función de volatilidad original, recreamos unos precios de opciones y pudimos, mediante el algoritmo de Chiarella, devolvernos hasta una muy cercana aproximación de la función original.

Con base en la investigación surgieron algunas preguntas que serían interesantes de resolver en futuras oportunidades y que expondremos ahora:

- ¿Qué modificaciones deben hacerse en el modelo de Black-Scholes-Merton para ajustarlo más a la realidad?
- Suponiendo costos de transacción, ¿cómo cambian las ecuaciones de Black-Scholes-Merton? ¿Qué tan distintas serían de las expuestas en este trabajo?

- ¿Cuál es la relación en este trabajo entre el parámetro de regularización con la primera aproximación de la función de volatilidad?

Referencias

- [AP05] Yves Achdou y Olivier Pironneau. *Computational methods for option pricing*. Vol. 30. Siam, 2005.
- [CCEH00] Carl Chiarella, Mark Craddock y Nadima El-Hassan. “The calibration of stock option pricing models using inverse problem methodology”. En: *QFRQ Research Papers, UTS Sydney* (2000).
- [Cré03] S Crépey. “Calibration of the local volatility in a trinomial tree using Tikhonov regularization”. En: *Inverse Problems* 19.1 (2003), pág. 91.
- [CZ03] Marek Capinski y Tomasz Zastawniak. *Mathematics for finance: an introduction to financial engineering*. Vol. 1. Springer London, 2003.
- [Eva98] Lawrence C Evans. “Partial differential equations”. En: (1998).
- [Hul09] John Hull. *Options, futures and other derivatives*. Pearson education, 2009.
- [Kir11] Andreas Kirsch. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. Vol. 120. Springer, 2011.
- [LO97] Ronald Lagnado y Stanley Osher. *A technique for calibrating derivative security pricing models: numerical solution of an inverse problem*. Inf. téc. Society for Computational Economics, 1997.
- [Shr04] Steven E Shreve. *Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models*. Vol. 11. Springer, 2004.
- [Wlo] J Wloka. “Partial Differential Equations. 1987”. En: *Cambridge University* ().
- [WN99] SJ Wright y J Nocedal. *Numerical optimization*. Vol. 2. Springer New York, 1999.