5-1.1.- Conceptos generales acerca de circuitos y redes eléctricas

Desde el punto de vista teórico se considera circuito eléctrico a todo conjunto de **fuentes de energía eléctrica ideales** (de tensión o corriente) unidas mediante **conexiones ideales** a un conjunto de **elementos ideales** (resistencia, inductancia y capacidad), de modo tal que se establezca un dado flujo de energía en función del tiempo.Si dicho flujo de energía es constante, se dice que el circuito eléctrico funciona en régimen permanente.
En la práctica, los circuitos eléctricos funcionan por intervalos reducidos en regímenes transitorios (conexión, desconexión, conmutación) y la mayor parte del tiempo en regímenes permanentes .Puede decirse que el funcionamiento en régimen transitorio es el nexo entre dos regímenes permanentes caracterizados por diferentes flujos de potencia.
A los fines del análisis y cálculo resulta útil representar gráficamente los circuitos eléctricos mediante un **esquema de conexiones** , porque ello facilita el planteo de las ecuaciones necesarias para resolverlos.Toda representación gráfica de un circuito eléctrico contiene los siguientes elementos :

.- conexiones o líneas de trazo continuo (sin valor eléctrico) que vinculan entre sí elementos de circuitos
.- ramas o tramos de circuito recorridos por una determinada intensidad de corriente eléctrica que contienen, como mínimo, un elemento activo (fuente de energía) o pasivo (receptor de energía)
.- nodos o puntos de unión de las ramas de un circuito eléctrico.

Un circuito eléctrico está completamente descripto, vale decir resuelto, cuando *se conocen las intensidades de corriente en cada una de las ramas* que conforman el circuito o bien, *todas las tensiones entre pares de nudos del circuito*.En efecto :

.- *conocida la intensidad de corriente en una dada rama queda determinada la tensión entre los nodos ubicados en los extremos de ésta*.

Sea $\mathbf{I}_{a,b}$ la intensidad de corriente en una dada rama que contiene una fuente ideal de tensión **E** y una impedancia $\mathbf{Z}_{a,b}$, ubicada entre los nodos **a** y **b** de un dado circuito.Aplicando la ley de las mallas de Kirchhoff, puede escribirse

$$\overset{\circ}{E} = \overset{\circ}{I}_{a,b}\, \dot{Z}_{a,b} + \overset{\circ}{U}_{a,b} \qquad de\ donde: \quad \overset{\circ}{U}_{a,b} = \overset{\circ}{E} - \overset{\circ}{I}_{a,b}\, \dot{Z}_{a,b}$$

.- *conocida la tensión entre los nodos **a** y **b** de un dado circuito eléctrico, queda determinada la intensidad de corriente en la rama que los vincula*.

Suponiendo que, en general, la rama posee una fuente ideal de tensión **E** y una impedancia $\mathbf{Z}_{a,b}$, de la aplicación de la ley de mallas de Kirchhoff resulta :

$$\overset{\circ}{I}_{a,b} = \frac{\overset{\circ}{E} - \overset{\circ}{U}_{a,b}}{\dot{Z}_{a,b}}$$

Desde el punto de vista matemático para resolver un dado circuito eléctrico será necesario plantear un conjunto de ecuaciones independientes que utilicen como variable las intensidades de corriente de rama o las tensiones entre pares de nodos.Todo circuito eléctrico puede ser visto como una *red de ramas que vinculan los nodos del* circuito.Así considerado, todo circuito eléctrico puede representarse mediante un *gráfico de red* cuyo análisis permite deducir el número de ecuaciones independientes que se requiere, de acuerdo a la variable elegida, para resolverlo .
De acuerdo a lo visto en la Unidad 4, en base a los conceptos de *árbol de la red* y *conjunto de ramas de enlace*, resulta :

dado un árbol cualquiera perteneciente a una red eléctrica, las intensidades de corriente en cada una de las ramas que pertenecen a dicho árbol, dependerán de las intensidades de corriente de las ramas de enlace de la red correspondientes al árbol seleccionado.

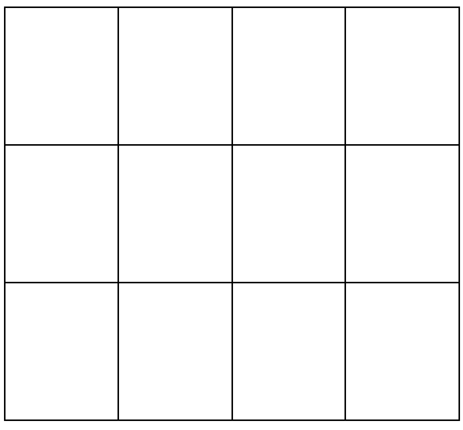
dado un árbol cualquiera perteneciente a una red eléctrica, las intensidades de corriente en cada una de las ramas que pertenecen a la red, dependerán del potencial de cada uno de los nodos correspondientes al árbol seleccionado.

En consecuencia, para resolver un dado circuito eléctrico puede procederse de dos maneras :

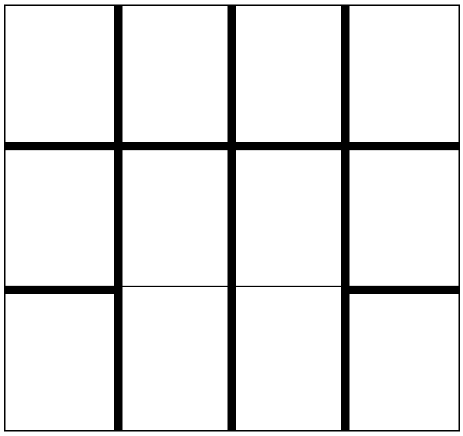
.- plantear un sistema de N_E ecuaciones independientes cuyas variables son las N_E intensidades de corriente de las ramas de enlace elegidas.
.- plantear un sistema de N_A ecuaciones independientes cuyas variables son las N_A tensiones de nodos de las ramas del árbol elegido (se excluye el nodo considerado a potencial cero o referido a masa).

El criterio a seguir consiste siempre en utilizar el menor número de ecuaciones posible así que cuando $N_E < N_A$, se utilizará como variables las corrientes de enlace y cuando $N_E > N_A$, las variables serán las tensiones de nodos.
Debe tenerse en cuenta que **cualquier rama** de un dado circuito eléctrico puede considerarse como perteneciente al conjunto **árbol** o al conjunto de **enlaces**, vale decir que a partir de una dada representación gráfica pueden obtenerse varios esquemas de árbol y, consecuentemente diferentes conjuntos de ramas de enlace.A modo de ejemplo consideremos el siguiente gráfico que representa un circuito eléctrico cualquiera (no se han representado los elementos activos y pasivos de cada rama) donde todos los segmentos son ramas y todos los puntos de intersección de tres o más segmentos son nodos.Resulta :

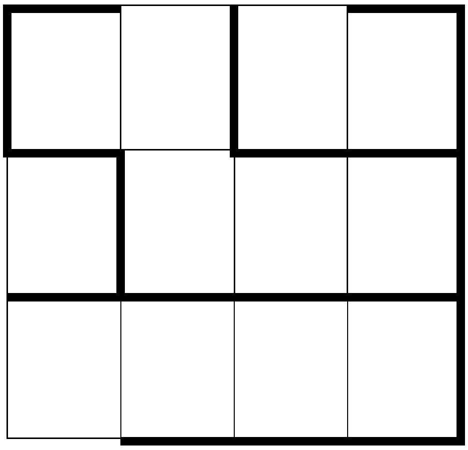
$N_R = 27$ ramas $N_N = 16$ nodos $N_A = 15$ ramas $N_E = 12$ ramas



Un árbol posible para el circuito dado es el siguiente (se han trazado con mayor grosor las ramas incluídas en el árbol considerado) :



Otro árbol posible para el circuito dado es el siguiente :



Comparando los dos esquemas de árbol trazados resulta evidente que algunas ramas forman parte del conjunto árbol en uno de los esquemas y del conjunto de enlaces en el otro.
Una dada red puede ser interpretada como un conjunto de lazos que sólo poseen ***una sola rama en común con los demás lazos de la red***.Los lazos que verifican ésta condición se denominan ***mallas***.
Para resolver una red eléctrica (circuito que posee tres o más nodos) sea ésta **simple** (una sola rama activa) o **múltiple** (más de una rama activa) existen, básicamente tres métodos :

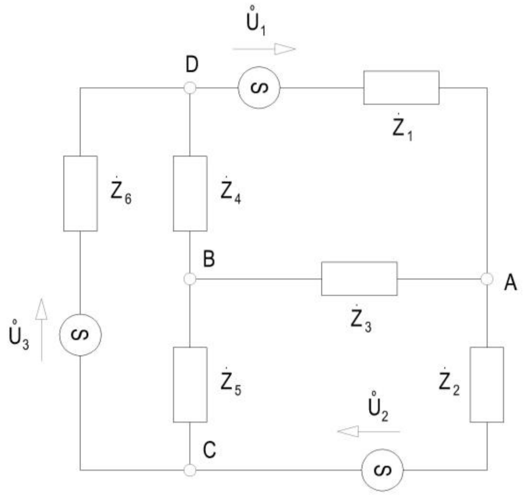
.- método de las intensidades de corriente de malla
.- método de las tensiones entre pares de nodos
.- método de superposición

Por otra parte, cuando sólo es necesario analizar una o dos ramas de una red eléctrica (simple o múltiple) existen métodos de cálculo más sencillos que los mencionados en el párrafo anterior que reciben la denominación general de teoremas de circuitos y son tratados en la Unidad 6.

5-2.1.- Métodos de solución de redes

5-2.1.1.- **Método de superposición**

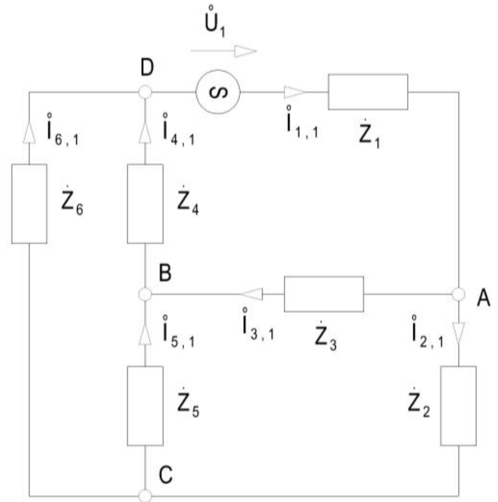
Dada una red múltiple, el método de superposición consiste en reemplazar la red dada por un conjunto de redes simples (tantas como ramas activas tenga la red múltiple) obtenidas pasivando (es decir, reemplazando las fuentes de tensión por un cortocircuito ideal y las fuentes de corriente por un circuito abierto, respectivamente) *todas las ramas activas menos la elegida* para la red simple a considerar.
Se resuelven luego por separado todas las redes simples así obtenidas determinando las intensidades de corriente en cada una de sus ramas.
Por último, se obtiene la solución de la red múltiple dada, calculando la intensidad de corriente de cada una de sus ramas como suma algebraica de las intensidades obtenidas para la rama considerada al resolver cada una de las redes simples.
A efectos de comprender el método se propone la resolución del siguiente circuito que es del tipo red múltiple y posee cuatro nodos (**A** , **B** , **C** , **D**) y seis ramas :



$$\mathring{U}_1 = 150 \langle 0^o [V] \quad ; \quad \mathring{U}_2 = 150 \langle 120^o [V] \quad ; \quad \mathring{U}_3 = 150 \langle -120^o [V]$$

$$\dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_6 = 3 + j\,4 [\Omega] = 5 \langle 53^o{,}13 [\Omega] \qquad ; \qquad \dot{Z}_3 = \dot{Z}_4 = \dot{Z}_5 = 6 + j\,8 [\Omega] = 10 \langle 53^o{,}13 [\Omega]$$

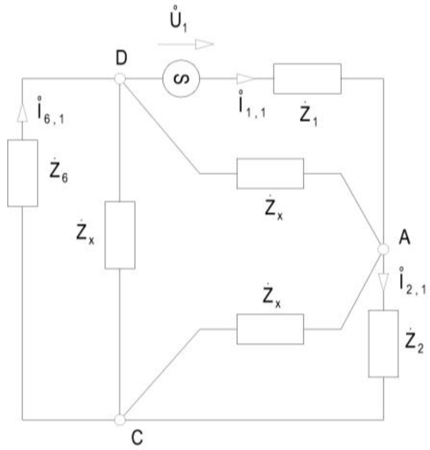
En la siguiente figura se muestra el circuito luego de pasivar las fuentes de tensión $\mathring{U}_2$ y $\mathring{U}_3$, operación que lo convierte en la red simple mostrada a continuación :



Las impedancias $\dot{Z}_3$, $\dot{Z}_4$ y $\dot{Z}_5$ están conectadas en estrella al nodo **B**.Aplicando la transformación de Kenelly se reemplaza la conexión estrella por una conexión triángulo equivalente formada por tres impedancias de valor :

$$\dot{Z}_x = 3\,\dot{Z}_Y = 30\,\langle\,53º,13\,[\,\Omega\,] = 18 + j\,24\,[\,\Omega\,]$$

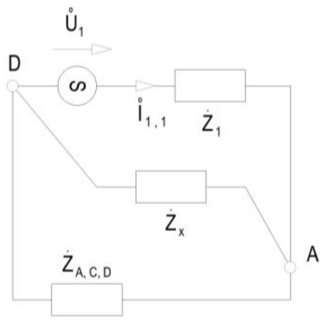
El circuito alimentado por la fuente de tensión $\mathring{U}_1$ queda convertido, luego de la transformación estrella-triángulo, en el que se muestra a continuación :



La impedancia equivalente $\dot{Z}_{A,C,D}$ viene dada por :

$$\dot{Z}_{A,C,D} = \frac{\dot{Z}_2\,\dot{Z}_x}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_x} + \frac{\dot{Z}_6\,\dot{Z}_x}{\dot{Z}_6 + \dot{Z}_x} = 2\,\frac{5\,\langle\,53º,13\;x\;30\,\langle\,53º,13}{21 + j\,28} = \frac{300\,\langle\,106,26}{35\,\langle\,53º,13} = 8,5714\,\langle\,53º,13\,[\,\Omega\,]$$

El circuito se transforma entonces en el siguiente :



La intensidad de corriente $\mathring{I}_{1,1}$ viene dada por :

$$\mathring{I}_{1,1} = \frac{\mathring{U}_1}{\dot{Z}_1 + \dfrac{\dot{Z}_x\,\dot{Z}_{A,C,D}}{\dot{Z}_x + \dot{Z}_{A,C,D}}} = \frac{150\,\langle\,0º}{3 + j\,4 + \dfrac{30\,\langle\,53º,13\;x\;8,5714\,\langle\,53º,13}{23,1429 + j\,30,8571}} = \frac{150\,\langle\,0º}{3 + j\,4 + \dfrac{257,1420\,\langle\,106º,26}{38,5714\,\langle\,53º,13}} =$$

$$\mathring{I}_{1,1} = \frac{150\,\langle\,0º}{3 + j\,4 + 4 + j\,5,3333} = \frac{150\,\langle\,0º}{11,6666\,\langle\,53º,13} = 12,8572\,\langle\,-53º,13\,[\,A\,] = 7,7143 - j\,10,2857\,[\,A\,]$$

La tensión entre los nodos **A-D** se calcula haciendo :

$$\mathring{U}_{A,D} = \mathring{I}_{1,1}\,\frac{\dot{Z}_x\,\dot{Z}_{A,C,D}}{\dot{Z}_x + \dot{Z}_{A,C,D}} = 12,8572\,\langle\,-53º,13\;x\;6,6666\,\langle\,53º,13 = 85,7138\,\langle\,0º\,[\,V\,]$$

Como la impedancia entre los nodos **A-C** y **C-D** tiene el mismo valor se verifica : $\mathring{U}_{A,C} = \mathring{U}_{C,D} = 0{,}5\,\mathring{U}_{A,D}$, entonces :

$$\mathring{I}_{2,1} = \frac{\mathring{U}_{A,C}}{\dot{Z}_2} = \frac{42{,}8569\,\langle\, 0^o}{5\,\langle\, 53^o{,}13} = 8{,}5714\,\langle -53^o{,}13\,[\,A\,] = 5{,}1429 - j\;6{,}8571\,[\,A\,]$$

$$\mathring{I}_{6,1} = \frac{\mathring{U}_{A,C}}{\dot{Z}_6} = \frac{42{,}8569\,\langle\, 0^o}{5\,\langle\, 53^o{,}13} = 8{,}5714\,\langle -53^o{,}13\,[\,A\,] = 5{,}1429 - j\;6{,}8751\,[\,A\,]$$

Calculadas las intensidades de corriente $\mathring{I}_{1,1}$ e $\mathring{I}_{2,1}$ se obtiene $\mathring{I}_{3,1}$ aplicando la ley de nodos de Kirchhoff al nodo **A** tal como se muestra a continuación :

$$\mathring{I}_{3,1} = \mathring{I}_{1,1} - \mathring{I}_{2,1} = (\,7{,}7143 - j\,10{,}2857\,) - (\,5{,}1429 - j\;6{,}8571\,) = 2{,}5714 - j\;3{,}4286\,[\,A\,]$$

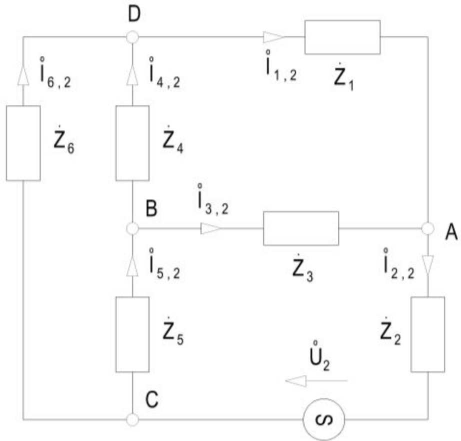
*Si se considera el nodo **D** referido a tierra (potencial igual a 0 [V]) el nodo **A** tiene un potencial de + 85,7138 [V] La caída de tensión sobre la impedancia **Z 3** viene dada por : **I 3,1** Z 3 = 4,2857 [A] x 10 [Ω] = 42,857 [V].El potencial del nodo **B** resulta igual a : 85,7138 – 42,857 = + 42,8568 [V].Por otra parte, la caída de tensión en la impedancia **Z 2** viene dada por : **I 2,1 Z 2** = 8,5714 [A] x 5 [Ω] = 42,857 [V].En consecuencia, el* potencial del *nodo **C** resulta igual a : 85,7138 – 42,857 = + 42,857 [V].Esto significa que no hay diferencia de potencial entre los nodos **B** y **C**, resultando nula **I 5 , 1** y por otra parte*
I 4 , 1 = I 3 , 1

Las intensidades de corriente en cada una de las ramas de la red simple alimentada por la fuente de tensión $\mathring{U}_1$ valen :

$\mathring{I}_{1,1} = 7{,}7143 - j\,10{,}2857\,[\,A\,]$; $\mathring{I}_{2,1} = 5{,}1429 - j\;6{,}8571\,[\,A\,]$; $\mathring{I}_{3,1} = 2{,}5714 - j\;3{,}4286\,[\,A\,]$
$\mathring{I}_{4,1} = 2{,}5714 - j\;3{,}4286\,[\,A\,]$; $\mathring{I}_{5,1} = 0\,[\,A\,]$; $\mathring{I}_{6,1} = 5{,}1429 - j\;6{,}8571\,[\,A\,]$

*Obsérvese que el circuito dado como ejemplo posee seis ramas (**N R = 6**) y cuatro nodos (**N N = 4**) resultando así tres ramas de enlace (**N E = 6 - 4 + 1 = 3**).En consecuencia determinadas tres intensidades de corriente las tres restantes son función de aquéllas.*

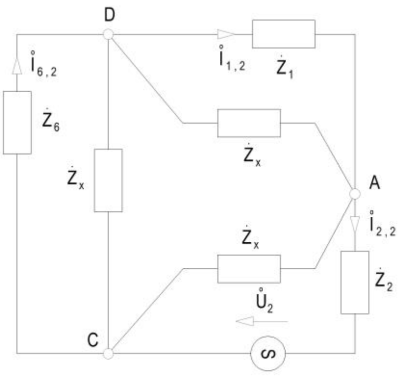
En la siguiente figura se muestra el circuito luego de pasivar las fuentes de tensión $\mathring{U}_1$ y $\mathring{U}_3$, operación que lo convierte en una nueva red simple mostrada en la siguiente figura.



Las impedancias $\dot{Z}_3$, $\dot{Z}_4$ y $\dot{Z}_5$ están conectadas en estrella al nodo **B**.Aplicando la transformación de Kenelly se reemplaza la conexión estrella por una conexión triángulo equivalente formada por tres impedancias de valor :

$$\dot{Z}_x = 3\,\dot{Z}_Y = 30\langle 53^o,13\,[\,\Omega\,] = 18 + j\,24\,[\,\Omega\,]$$

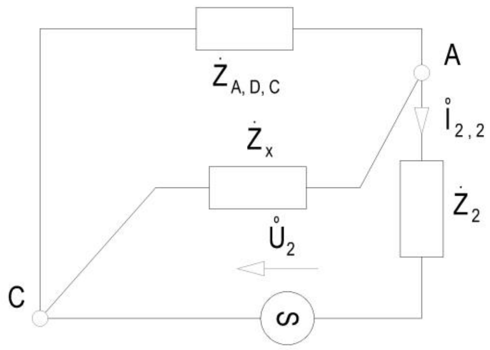
El circuito alimentado por la fuente de tensión $\mathring{U}_2$ queda convertido, luego de la transformación estrella-triángulo, en el que se muestra a continuación :



La impedancia equivalente $\dot{Z}_{A,D,C}$ viene dada por :

$$\dot{Z}_{A,D,C} = \frac{\dot{Z}_1\,\dot{Z}_x}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_x} + \frac{\dot{Z}_6\,\dot{Z}_x}{\dot{Z}_6 + \dot{Z}_x} = 2\,\frac{5\langle 53^o,13\;x\;30\langle 53^o,13}{21 + j\,28} = \frac{300\langle 106,26}{35\langle 53^o,13} = 8,5714\langle 53^o,13\,[\,\Omega\,]$$

El circuito se transforma entonces en el siguiente :



La intensidad de corriente $\mathring{I}_{2,2}$ viene dada por :

$$\mathring{I}_{2,2} = \frac{\mathring{U}_2}{\dot{Z}_2 + \dfrac{\dot{Z}_x\,\dot{Z}_{A,D,C}}{\dot{Z}_x + \dot{Z}_{A,D,C}}} = \frac{150\langle 120^o}{3 + j\,4 + \dfrac{30\langle 53^o,13\;x\;8,5714\langle 53^o,13}{23,1429 + j\,30,8571}} = \frac{150\langle 120^o}{3 + j\,4 + \dfrac{257,1420\langle 106^o,26}{38,5714\langle 53^o,13}} =$$

$$\mathring{I}_{2,2} = \frac{150\langle 120^o}{3 + j\,4 + 4 + j\,5,3333} = \frac{150\langle 120^o}{11,6666\langle 53^o,13} = 12,8572\langle\,66^o,87\,[\,A\,] = 5,0505 + j\,11,8237\,[\,A\,]$$

La tensión entre los nodos **A-C** se calcula haciendo :

$$\mathring{U}_{C,A} = \mathring{I}_{2,2}\,\frac{\dot{Z}_x\,\dot{Z}_{A,D,C}}{\dot{Z}_x + \dot{Z}_{A,D,C}} = 12,8572\langle 66^o,87\;x\;6,6666\langle 53^o,13 = 85,7138\langle 120^o\,[\,V\,]$$

Como la impedancia entre los nodos **A-D** y **C-D** tiene el mismo valor se verifica : $\mathring{U}_{D,A} = \mathring{U}_{C,D} = 0{,}5\,\mathring{U}_{C,A}$, entonces :

$$\mathring{I}_{1,2} = \frac{\mathring{U}_{D,A}}{\dot{Z}_1} = \frac{42{,}8569 \langle 120^\circ}{5 \langle 53^\circ{,}13} = 8{,}5714 \langle 66^\circ{,}87 \, [A] = 3{,}3670 + j\,7{,}8824 \, [A]$$

$$\mathring{I}_{6,2} = \frac{\mathring{U}_{C,D}}{\dot{Z}_6} = \frac{42{,}8569 \langle 120^\circ}{5 \langle 53^\circ{,}13} = 8{,}5714 \langle 66^\circ{,}87 \, [A] = 3{,}3670 + j\,7{,}8824 \, [A]$$

Calculadas las intensidades de corriente $\mathring{I}_{1,2}$; $\mathring{I}_{2,2}$ e $\mathring{I}_{6,2}$ se obtienen las restantes aplicando sucesivamente la ley de nodos de Kirchhoff a los nodos **A** , **C** y **D** tal como se muestra a continuación :

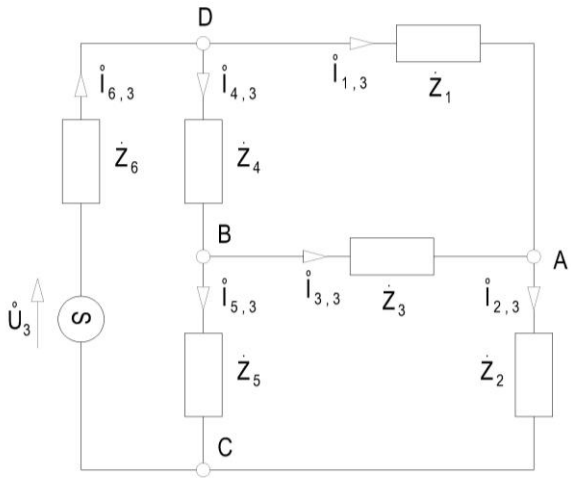
$$nodo\ A, \quad \mathring{I}_{3,2} = \mathring{I}_{2,2} - \mathring{I}_{1,2} = (5{,}0505 + j\,11{,}8237) - (3{,}3670 + j\,7{,}8824) = 1{,}6835 + j\,3{,}9413 \, [A]$$

$$nodo\ C, \quad \mathring{I}_{5,2} = \mathring{I}_{2,2} - \mathring{I}_{6,2} = (5{,}0505 + j\,11{,}8237) - (3{,}3670 + j\,7{,}8824) = 1{,}6835 + j\,3{,}9413 \, [A]$$

$$nodo\ D, \quad \mathring{I}_{4,2} = \mathring{I}_{1,2} - \mathring{I}_{6,2} = (3{,}3670 + j\,7{,}8824) - (3{,}3670 + j\,7{,}8824) = 0 + j\,0 \, [A]$$

En éste caso han resultado igualados los potenciales de los nodos **B** y **D** , en consecuencia **$I_{4,2} = 0$**

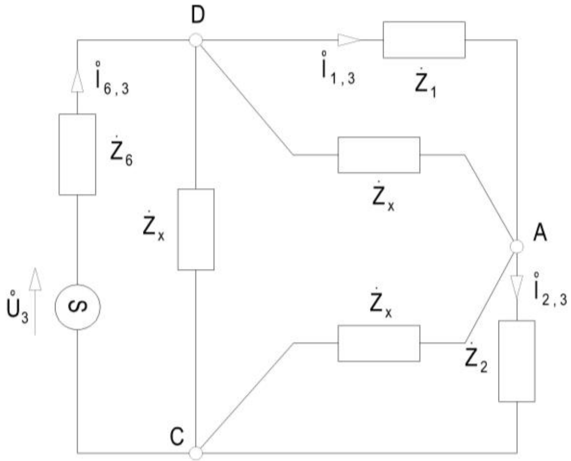
Por último, se debe considerar la red simple que se obtiene luego de pasivar las fuentes de tensión $\mathring{U}_1$ y $\mathring{U}_2$, operación que resulta en el circuito mostrado en la siguiente figura.



Las impedancias $\dot{Z}_3$, $\dot{Z}_4$ y $\dot{Z}_5$ están conectadas en estrella al nodo **B**.Aplicando la transformación de Kenelly se reemplaza la conexión estrella por una conexión triángulo equivalente formada por tres impedancias de valor :

$$\dot{Z}_x = 3\,\dot{Z}_Y = 30 \langle 53^\circ{,}13 \, [\Omega] = 18 + j\,24 \, [\Omega]$$

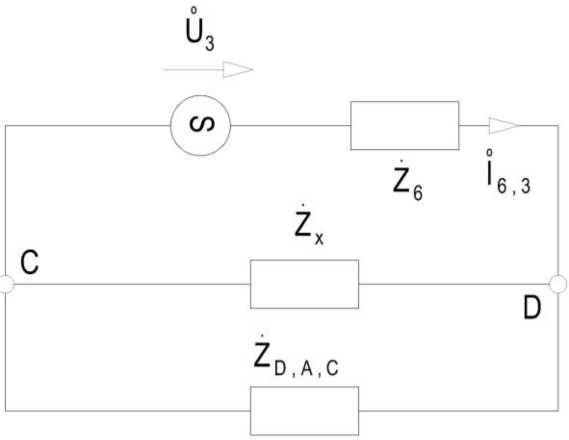
El circuito alimentado por la fuente de tensión $\mathring{U}_3$ queda convertido, luego de la transformación estrella-triángulo, en el que se muestra a continuación :



La impedancia equivalente $\dot{Z}_{D,A,C}$ viene dada por :

$$\dot{Z}_{D,A,C} = \frac{\dot{Z}_1\ \dot{Z}_x}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_x} + \frac{\dot{Z}_2\ \dot{Z}_x}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_x} = 2\ \frac{5\langle 53º,13\ x\ 30\langle 53º,13}{21 + j\ 28} = \frac{300\langle 106,26}{35\langle 53º,13} = 8{,}5714\langle 53º,13\left[\Omega\right]$$

El circuito se transforma entonces en el siguiente :



La intensidad de corriente $\mathring{I}_{6,3}$ viene dada por :

$$\mathring{I}_{6,3} = \frac{\mathring{U}_3}{\dot{Z}_6 + \dfrac{\dot{Z}_x\ \dot{Z}_{D,A,C}}{\dot{Z}_x + \dot{Z}_{A,D,C}}} = \frac{150\langle -120º}{3 + j\ 4 + \dfrac{30\langle 53º,13\ x\ 8{,}5714\langle 53º,13}{23{,}1429 + j\ 30{,}8571}} = \frac{150\langle -120º}{3 + j\ 4 + \dfrac{257{,}1420\langle 106º,26}{38{,}5714\langle 53º,13}} =$$

$$\mathring{I}_{6,3} = \frac{150\langle -120º}{3 + j\ 4 + 4 + j\ 5{,}3333} = \frac{150\langle -120º}{11{,}6666\langle 53º,13} = 12{,}8572\langle\ -173º,13\left[A\right] = -12{,}7649 - j\ 1{,}5379\left[A\right]$$

La tensión entre los nodos **D-C** se calcula haciendo :

$$\mathring{U}_{C,D} = \mathring{I}_{6,3}\ \frac{\dot{Z}_x\ \dot{Z}_{D,A,C}}{\dot{Z}_x + \dot{Z}_{D,A,C}} = 12{,}8572\langle -173º,13\ x\ 6{,}6666\langle 53º,13 = 85{,}7138\langle -120º\left[V\ \right]$$

Como la impedancia entre los nodos **A-D** y **C-A** tiene el mismo valor se verifica : $\mathring{U}_{A,D} = \mathring{U}_{C,A} = 0{,}5\,\mathring{U}_{C,D}$, entonces :

$$\mathring{I}_{1,3} = \frac{\mathring{U}_{A,D}}{\dot{Z}_1} = \frac{42{,}8569 \langle -120º}{5 \langle 53º{,}13} = 8{,}5714 \langle -173º{,}13 \left[A \right] = -8{,}5099 - j\,1{,}0259 \left[A \right]$$

$$\mathring{I}_{2,3} = \frac{\mathring{U}_{C,A}}{\dot{Z}_2} = \frac{42{,}8569 \langle -120º}{5 \langle 53º{,}13} = 8{,}5714 \langle -173º{,}13 \left[A \right] = -8{,}5099 - j\,1{,}0259 \left[A \right]$$

Calculadas las intensidades de corriente $\mathring{I}_{1,3}$, $\mathring{I}_{2,3}$, $\mathring{I}_{6,3}$ se obtienen las restantes aplicando sucesivamente la ley de nodos de Kirchhoff a los nodos **A** , **C** y **D** tal como se muestra a continuación :

$$nodo\ A, \quad \mathring{I}_{3,3} = \mathring{I}_{2,3} - \mathring{I}_{1,3} = (-\ 8{,}5099 - j\,1{,}0259) - (-8{,}5099 - j\,1{,}0259) = 0 + j\,0 \left[A \right]$$

$$nodo\ C, \quad \mathring{I}_{5,3} = \mathring{I}_{6,3} - \mathring{I}_{2,3} = (-12{,}7649 - j\,1{,}5379) - (-8{,}5099 - j\,1{,}0259) = -4{,}2550 - j\,0{,}512 \left[A \right]$$

$$nodo\ D, \quad \mathring{I}_{4,3} = \mathring{I}_{6,3} - \mathring{I}_{1,3} = (-12{,}7649 - j\,1{,}5379) - (-8{,}5099 - j\,1{,}0259) = -4{,}2550 - j\,0{,}512 \left[A \right]$$

En éste caso han resultado igualados los potenciales de los nodos **B** y **A** , en consecuencia **$I_{3,3}$ = 0**
Aplicando el método de superposición se obtienen las intensidades de corriente en cada rama del circuito dado sumando algebraicamente los valores correspondientes obtenidos al resolver cada una de las redes simples consideradas.
En las ramas conectadas al nodo **B** se consideran positivas las intensidades de corriente entrantes y negativas las salientes.

$$\mathring{I}_1 = \mathring{I}_{1,1} + \mathring{I}_{1,2} + \mathring{I}_{1,3} = (7{,}7143 - j\,10{,}2857) + (3{,}3670 + j\,7{,}8824) + (-8{,}5099 - j\,1{,}0259) =$$

$$\underline{\mathring{I}_1 = 2{,}5714 - j\,3{,}4292 \left[A \right] = 4{,}2862 \langle -53º{,}14 \left[A \right]}$$

$$\mathring{I}_2 = \mathring{I}_{2,1} + \mathring{I}_{2,2} + \mathring{I}_{2,3} = (5{,}1429 - j\,6{,}8571) + (5{,}0505 + j\,11{,}8237) + (-8{,}5099 - j\,1{,}0259) =$$

$$\underline{\mathring{I}_2 = 1{,}6835 + j\,3{,}9407 \left[A \right] = 4{,}2852 \langle\ 66º{,}87 \left[A \right]}$$

$$\mathring{I}_3 = \mathring{I}_{3,1} - \mathring{I}_{3,2} + \mathring{I}_{3,3} = (2{,}5714 - j\,3{,}4286) - (1{,}6835 + j\,3{,}9413) + (0 - j\,0) =$$

$$\underline{\mathring{I}_3 = 0{,}8879 - j\,7{,}3699 \left[A \right] = 7{,}4232 \langle -83º{,}13 \left[A \right]}$$

$$\mathring{I}_4 = -\mathring{I}_{4,1} + \mathring{I}_{4,2} + \mathring{I}_{4,3} = -(2{,}5714 - j\,3{,}4286) + (0 + j\,0) + (-4{,}2550 - j\,0{,}512) =$$

$$\underline{\mathring{I}_4 = -6{,}8264 + j\,2{,}9166 \left[A \right] = 7{,}4234 \langle\ 156º{,}87 \left[A \right]}$$

$$\mathring{I}_5 = \mathring{I}_{5,1} + \mathring{I}_{5,2} - \mathring{I}_{5,3} = (0 + j\,0) + (1{,}6835 + j\,3{,}9413) - (-4{,}2550 - j\,0{,}512) =$$

$$\underline{\mathring{I}_5 = 5{,}9385 + j\,4{,}4533 \left[A \right] = 7{,}4228 \langle\ 36º{,}87 \left[A \right]}$$

$$\mathring{I}_6 = \mathring{I}_{6,1} + \mathring{I}_{6,2} + \mathring{I}_{6,3} = (5{,}1429 - j\,6{,}8751) + (3{,}3670 + j\,7{,}8824) + (-12{,}7649 - j\,1{,}5379) =$$

$$\underline{\mathring{I}_6 = -4{,}2550 - j\,0{,}5306 \left[A \right] = 4{,}2880 \langle -172º{,}89 \left[A \right]}$$

El circuito dado como ejemplo está formado por una fuente trifásica de tensión alterna senoidal, equilibrada y simétrica que alimenta una carga equlibrada conectada en estrella.La terna de intensidades de corriente de las ramas activas (intensidades de corriente de fase) configura un sistema trifásico, equilibrado y simétrico retrasadas respecto de las tensiones en un ángulo igual al argumento de la impedancia equivalente conectada a cada rama activa (53º,13); en efecto :

$$\overset{\circ}{U}_1 = 150 \langle 0^o \left[V \right] \quad ; \quad \overset{\circ}{U}_2 = 150 \langle 120^o \left[V \right] \quad ; \quad \overset{\circ}{U}_3 = 150 \langle -120^o \left[V \right]$$

$$\overset{\circ}{I}_1 = 4{,}29 \langle -53^o{,}14 \left[A \right] \quad ; \quad \overset{\circ}{I}_2 = 4{,}29 \langle\; 66^o{,}87 \left[A \right] \quad ; \quad \overset{\circ}{I}_6 = 4{,}29 \langle -172^o{,}89 \left[A \right]$$

La terna de intensidades de corriente de las ramas pasivas (intensidades de corriente de línea) configura un sistema trifásico, equilibrado y simétrico retrasadas 30º de las intensidades de corriente de fase lo que indica que todos los sistemas trifásicos del circuito considerado son de *secuencia* directa.

$$\overset{\circ}{I}_3 = 7{,}42 \langle -83^o{,}13 \left[A \right] \quad ; \quad \overset{\circ}{I}_5 = 7{,}42 \langle\; 36^o{,}87 \left[A \right] \quad ; \quad \overset{\circ}{I}_4 = 7{,}42 \langle\; 156^o{,}87 \left[A \right]$$

Las pequeñas diferencias numéricas se deben a los errores de redondeo acumulados de los cálculos precedentes.

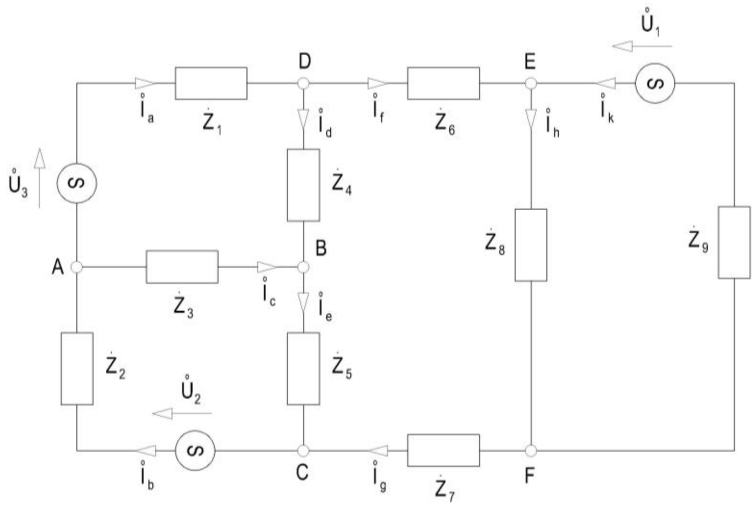
5-2.2.- **Método de las intensidades de corriente de malla**

Toda red puede interpretarse como un conjunto de mallas entrelazadas y, para resolverla, pueden calcularse las intensidades de corriente en cada malla por separado, para luego superponerlas y obtener así las intensidades de corriente en cada una de las ramas de la red considerada.
Dado que una malla es un lazo, si se abre se anula la intensidad de corriente de malla correspondiente.Si se abren todas las mallas de una dada red se anulan las intensidades de corriente en todas las ramas de ésta, en forma similar a lo que ocurre cuando se abren todas las ramas de enlace obtenidas a partir de seleccionar un árbol perteneciente a la red considerada.
Se deduce en consecuencia que el <u>*número de mallas*</u> de una dada red es <u>*igual al número de ramas de enlace*</u> correspondiente dado por :

$$\mathbf{N_E = N_R - N_N + 1}$$

Para deducir el método de las intensidades de corriente de malla utilizamos el circuito mostrado a continuación en el cual se suponen conocidas las intensidades de corriente en cada una de sus ramas.Se trata de una red múltiple que posee seis nodos ($\mathbf{N_N = 6}$) y nueve ramas ($\mathbf{N_R = 9}$) resultando entonces cuatro ramas de enlace ($\mathbf{N_E = 4}$) Considerando el árbol mostrado en la Figura 1, las ramas de enlace y sus intensidades de corriente son las indicadas a continuación :

rama **A-D** ($\overset{\circ}{I}_a$) ; rama **D-E** ($\overset{\circ}{I}_f$) ; rama **E-F** ($\overset{\circ}{I}_k$) ; rama **A-C** ($\overset{\circ}{I}_b$)



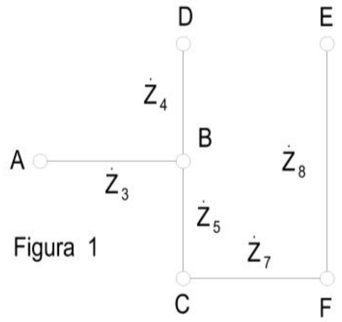


Figura 1

La red considerada puede considerarse como el resultado de entrelazar cuatro mallas siguientes :

malla # 1 : lazo **A-B-D** ; malla # 2 : lazo **C-D-E-F** ; malla # 3 : lazo **A-B-C** ; malla # 4 : lazo **E-F**

La malla # 1 tiene en común con la malla # 2 la rama **B-D** , con la malla # 3 la rama **A-B** y ninguna rama compartida con la malla # 4.
La malla # 2 tiene en común con la malla # 1 la rama **B-D** , con la malla # 3 la rama **B-C** y con la malla # 4 la rama **E-F**.
La malla # 3 tiene en común con la malla # 1 la rama **A-B** , con la malla # 2 la rama **B-C** y ninguna rama compartida con la malla # 4.
La malla # 4 no comparte ramas con las mallas # 1 y # 3 y tiene la rama **E-F** en común con la malla # 2.
Las impedancias pertenecientes a las ramas compartidas por las mallas reciben el nombre de ***impedancia de transferencia*** (o ***transimpedancia***) y se las simboliza con la notación $\dot{z}_{i,j}$ donde el subíndice **i** , **j** indica el número de las mallas que comparten la rama considerada .Recuérdese que sólo puede existir una rama en común entre cualquier par de mallas de la red y, en consecuencia se verifica la siguiente igualdad :

$$\dot{z}_{i,j} = \dot{z}_{j,i} \qquad siendo\ i \neq j$$

Si se aplica la ley de lazos de Kirchhoff a las mallas # 1, # 2, # 3 y # 4, recorriéndolas en *sentido horario* , se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones :

$$malla\ \#1: \qquad \overset{\circ}{U}_3 = \overset{\circ}{I}_a\, \dot{Z}_1 + \overset{\circ}{I}_d\, \dot{Z}_4 - \overset{\circ}{I}_c\, \dot{Z}_3$$

$$malla\ \#2: \qquad 0 = \overset{\circ}{I}_f\, \dot{Z}_6 + \overset{\circ}{I}_h\, \dot{Z}_8 + \overset{\circ}{I}_g\, \dot{Z}_7 - \overset{\circ}{I}_e\, \dot{Z}_5 - \overset{\circ}{I}_d\, \dot{Z}_4$$

$$malla\ \#3: \quad \mathring{U}_2 = \mathring{I}_b\,\dot{Z}_2 + \mathring{I}_c\,\dot{Z}_3 + \mathring{I}_e\,\dot{Z}_5$$

$$malla\ \#4: \quad -\mathring{U}_1 = -\,\mathring{I}_k\,\dot{Z}_9 - \mathring{I}_h\,\dot{Z}_8$$

Para que el sistema de ecuaciones obtenido pueda resolverse es necesario reducir el número de variables *intensidad de corriente* a sólo cuatro que deben ser las correspondientes a las ramas de enlace ($\mathring{I}_a$, $\mathring{I}_b$, $\mathring{I}_f$, $\mathring{I}_k$).Aplicando la ley de nodos de Kirchhoff, se obtiene :

$$nodo\ A: \quad \mathring{I}_c = \mathring{I}_b - \mathring{I}_a \quad ; \quad nodo\ D: \quad \mathring{I}_d = \mathring{I}_a - \mathring{I}_f \quad ; \quad nodo\ E: \quad \mathring{I}_h = \mathring{I}_f + \mathring{I}_k$$

$$nodo\ B: \quad \mathring{I}_e = \mathring{I}_d + \mathring{I}_c = \mathring{I}_a - \mathring{I}_f + \mathring{I}_b - \mathring{I}_a = \mathring{I}_b - \mathring{I}_f$$

$$nodo\ F: \quad \mathring{I}_g = \mathring{I}_k - \mathring{I}_h = \mathring{I}_k + \mathring{I}_f - \mathring{I}_k \; = \; \mathring{I}_f$$

Reemplazando las intensidades de corriente $\mathring{I}_c$, $\mathring{I}_d$, $\mathring{I}_e$, $\mathring{I}_g$, $\mathring{I}_h$ obtenidas por aplicación de la ley de nodos en el sistema de ecuaciones de tensión de las mallas # 1, # 2, # 3 y # 4 , obtenemos :

$$malla\ \#1: \quad \mathring{U}_3 = \mathring{I}_a\,\dot{Z}_1 + \mathring{I}_a\,\dot{Z}_4 - \mathring{I}_f\,\dot{Z}_4 - \mathring{I}_b\,\dot{Z}_3 + \mathring{I}_a\,\dot{Z}_3$$

$$malla\ \#2: \quad 0 = \mathring{I}_f\,\dot{Z}_6 + \mathring{I}_f\,\dot{Z}_8 + \mathring{I}_k\,\dot{Z}_8 + \mathring{I}_f\,\dot{Z}_7 - \mathring{I}_b\,\dot{Z}_5 + \mathring{I}_f\,\dot{Z}_5 - \mathring{I}_a\,\dot{Z}_4 + \mathring{I}_f\,\dot{Z}_4$$

$$malla\ \#3: \quad \mathring{U}_2 = \mathring{I}_b\,\dot{Z}_2 + \mathring{I}_b\,\dot{Z}_3 - \mathring{I}_a\,\dot{Z}_3 + \mathring{I}_b\,\dot{Z}_5 - \mathring{I}_f\,\dot{Z}_5$$

$$malla\ \#4: \quad -\mathring{U}_1 = -\,\mathring{I}_k\,\dot{Z}_9 - \mathring{I}_f\,\dot{Z}_8 - \mathring{I}_k\,\dot{Z}_8$$

Reordenando términos se obtienen las ecuaciones de tensión de mallas en función de las intensidades de corriente de las ramas de enlace que corresponden al árbol seleccionado de la red.El sistema de ecuaciones que *resuelve* el circuito eléctrico dado toma la forma :

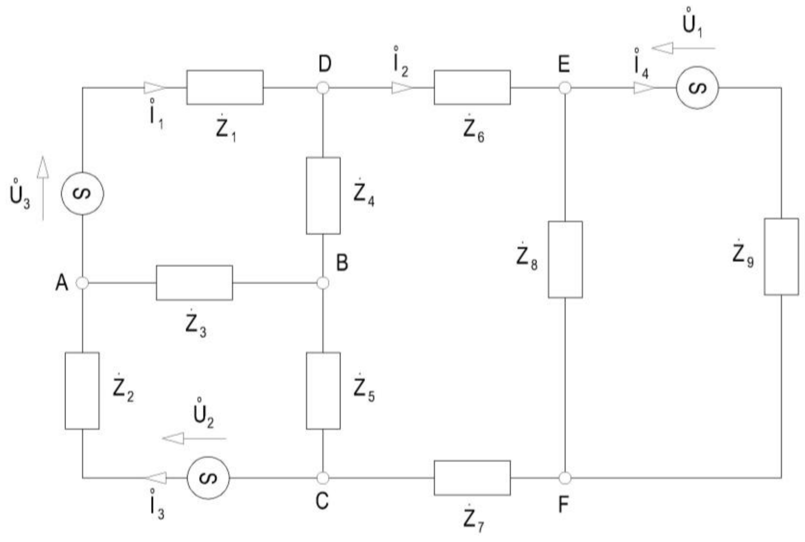
$$malla\ \#1: \quad \mathring{U}_3 = \mathring{I}_a\left(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_4\right) - \mathring{I}_f\,\dot{Z}_4 - \mathring{I}_b\,\dot{Z}_3 - \mathring{I}_k\,0$$

$$malla\ \#2: \quad 0 = -\,\mathring{I}_a\,\dot{Z}_4 + \mathring{I}_f\left(\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6 + \dot{Z}_7 + \dot{Z}_8\right) - \mathring{I}_b\,\dot{Z}_5 + \mathring{I}_k\,\dot{Z}_8$$

$$malla\ \#3: \quad \mathring{U}_2 = -\,\mathring{I}_a\,\dot{Z}_3 - \mathring{I}_f\,\dot{Z}_5 + \mathring{I}_b\left(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_5\right) + \mathring{I}_k\,0$$

$$malla\ \#4: \quad -\,\mathring{U}_1 = \mathring{I}_a\,0 - \mathring{I}_f\,\dot{Z}_8 + \mathring{I}_b\,0 - \mathring{I}_k\left(\dot{Z}_8 + \dot{Z}_9\right)$$

Se puede obtener el sistema de ecuaciones de resolución del circuito dado, suponiendo una dada intensidad de corriente en cada malla que circule en sentido horario o antihorario.No es necesario que el sentido de circulación de corriente *sea el mismo* *en todas las mallas* pero, para poder aplicar el método de intensidades de corriente de malla en forma sistemática considerando que las impedancias de transferencia están multiplicadas por – 1, resulta necesario que ***el sentido de circulación de corriente en todas las mallas sea el mismo*** (horario o antihorario) En la siguiente figura se muestra el circuito dado como ejemplo indicando las intensidades de corriente de malla habiendo adoptado el sentido horario de circulación en todas las mallas.



El sistema de ecuaciones de tensión de mallas que se obtiene aplicando la ley de lazos de Kirchhoff, considerando las intensidades de corriente de malla adoptadas es el siguiente :

$$malla\ \#1: \quad \mathring{U}_3 = \mathring{I}_1 \left(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_4 \right) - \mathring{I}_2\, \dot{Z}_4 - \mathring{I}_3\, \dot{Z}_3 - \mathring{I}_4\, 0$$

$$malla\ \#2: \quad 0 = -\mathring{I}_1\, \dot{Z}_4 + \mathring{I}_2 \left(\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6 + \dot{Z}_7 + \dot{Z}_8 \right) - \mathring{I}_3\, \dot{Z}_5 - \mathring{I}_4\, \dot{Z}_8$$

$$malla\ \#3: \quad \mathring{U}_2 = -\mathring{I}_1\, \dot{Z}_3 - \mathring{I}_2\, \dot{Z}_5 + \mathring{I}_3 \left(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_5 \right) - \mathring{I}_4\, 0$$

$$malla\ \#4: \quad -\mathring{U}_1 = -\mathring{I}_1\, 0 - \mathring{I}_2\, \dot{Z}_8 - \mathring{I}_3\, 0 + \mathring{I}_4 \left(\dot{Z}_8 + \dot{Z}_9 \right)$$

Nótese que al aplicar la ley de lazos de Kirchhoff a una dada malla, ***se considera positiva la intensidad de corriente de dicha malla y negativas las intensidades de corriente en las mallas adyacentes***.Esto es consecuencia de haber adoptado un sentido único (horario o antihorario) de circulación de corriente para todas las mallas consideradas.
Reemplazando las intensidades de corriente de malla por las intensidades de corriente de las ramas de enlace de acuerdo a las siguientes expresiones (debe tenerse en cuenta que cuando la intensidad de corriente de malla circula en sentido opuesto a la fuente de tensión de una rama activa , como sucede en la rama **E-F** del circuito dado como ejemplo , el sentido de la intensidad de corriente en dicha rama será opuesto al de la corriente de malla correspondiente) :

$$\mathring{I}_1 = \mathring{I}_a \quad ; \quad \mathring{I}_2 = \mathring{I}_f \quad ; \quad \mathring{I}_3 = \mathring{I}_b \quad ; \quad \mathring{I}_4 = -\mathring{I}_k$$

se verifica que el sistema de ecuaciones donde las variables son las intensidades de corriente de malla es igual al sistema de ecuaciones que resuelve el circuito dado utilizando como variables intensidades de corriente de ramas de enlace.Debe tenerse en cuenta que *toda malla contiene al menos una rama de enlace cualquiera sea el árbol de la red analizada que se elija para resolverla*.
El sistema de ecuaciones de mallas puede resolverse aplicando cualquiera de los métodos numéricos conocidos (igualación, sustitución, sumas y restas o determinantes) pero es más útil expresarlo en términos de matrices.
La solución general por el método de mallas de una dada red se expresa utilizando matrices de la siguiente forma :

$$\left[\mathring{U}_n\right]=\left[\dot{z}_{n,m}\right]\left[\mathring{I}_n\right]$$

donde **n,** es el número de mallas elegido para la red considerada; $\left[\mathring{U}_n\right]$ es el vector (o matriz de una sola columna) de tensiones de malla (correspondientes a la suma de las tensiones de todas las fuentes pertenecientes a la malla considerada); $\left[\dot{z}_{n,m}\right]$ es la matriz de impedancia de mallas de la red considerada (se caracteriza por ser una matriz cuadrada, vale decir con igual número de filas que de columnas) y $\left[\mathring{I}_n\right]$ es el vector de intensidades de corriente de malla.

Para el circuito dado como ejemplo, la ecuación matricial del sistema de ecuaciones de malla toma la forma :

$$\begin{bmatrix}\mathring{U}_1\\ \mathring{U}_2\\ \mathring{U}_3\\ \mathring{U}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{z}_{1,1} & -\dot{z}_{1,2} & -\dot{z}_{1,3} & -\dot{z}_{1,4}\\ -\dot{z}_{2,1} & \dot{z}_{2,2} & -\dot{z}_{2,3} & -\dot{z}_{2,4}\\ -\dot{z}_{3,1} & -\dot{z}_{3,2} & \dot{z}_{3,3} & -\dot{z}_{3,4}\\ -\dot{z}_{4,1} & -\dot{z}_{4,2} & -\dot{z}_{4,3} & \dot{z}_{4,4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathring{I}_1\\ \mathring{I}_2\\ \mathring{I}_3\\ \mathring{I}_4\end{bmatrix}$$

*Los signos negativos que afectan a las impedancias de transferencia son válidos sólo si todas las mallas **son recorridas en el mismo sentido (horario o antihorario)**.*

Multiplicando la matriz impedancia de mallas por el vector corrientes de mallas (ver ítem 5-3.1.- sobre operaciones con matrices) obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\begin{aligned}
\mathring{U}_1 &= \dot{z}_{1,1}\,\mathring{I}_1-\dot{z}_{1,2}\,\mathring{I}_2-\dot{z}_{3,1}\,\mathring{I}_3-\dot{z}_{4,1}\,\mathring{I}_4\\
\mathring{U}_2 &= -\dot{z}_{2,1}\,\mathring{I}_1+\dot{z}_{2,2}\,\mathring{I}_2-\dot{z}_{2,3}\,\mathring{I}_3-\dot{z}_{2,4}\,\mathring{I}_4\\
\mathring{U}_3 &= -\dot{z}_{3,1}\,\mathring{I}_1-\dot{z}_{3,2}\,\mathring{I}_2+\dot{z}_{3,3}\,\mathring{I}_3-\dot{z}_{3,4}\,\mathring{I}_4\\
\mathring{U}_4 &= -\dot{z}_{4,1}\,\mathring{I}_1-\dot{z}_{4,2}\,\mathring{I}_2-\dot{z}_{4,3}\,\mathring{I}_3+\dot{z}_{4,4}\,\mathring{I}_4
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las mallas consideradas para el circuito dado como ejemplo y recorriéndolas en sentido horario son válidas las siguientes igualdades :

$$\mathring{U}_1=\mathring{U}_3 \quad;\quad \mathring{U}_2=0 \quad;\quad \mathring{U}_3=\mathring{U}_2 \quad;\quad \mathring{U}_4=-\mathring{U}_1$$

$$\dot{z}_{1,1}=\dot{Z}_1+\dot{Z}_3+\dot{Z}_4 \;;\; \dot{z}_{2,2}=\dot{Z}_4+\dot{Z}_5+\dot{Z}_6+\dot{Z}_7+\dot{Z}_8 \;;\; \dot{z}_{3,3}=\dot{Z}_2+\dot{Z}_3+\dot{Z}_5 \;;\; \dot{z}_{4,4}=\dot{Z}_8+\dot{Z}_9$$

*Las impedancias $\dot{z}_{i,j}$ donde **i = j** se denominan **impedancias de malla** o **autoimpedancias**.*

$$\dot{z}_{1,2}=\dot{z}_{2,1}=\dot{Z}_4 \;;\; \dot{z}_{1,3}=\dot{z}_{3,1}=\dot{Z}_2 \;;\; \dot{z}_{1,4}=\dot{z}_{4,1}=0 \;;\; \dot{z}_{2,3}=\dot{z}_{3,2}=\dot{Z}_5 \;;\; \dot{z}_{2,4}=\dot{z}_{4,2}=\dot{Z}_8 \;;\; \dot{z}_{3,4}=\dot{z}_{4,3}=0$$

Reemplazando valores en el sistema de ecuaciones obtenido por aplicación de la ecuación matricial del método de intensidades de corriente de malla en base a las igualdades anteriores se obtiene el sistema de ecuaciones que resuelve el circuito dado como ejemplo; en efecto :

$$malla\ \#1: \quad \mathring{U}_3 = \mathring{I}_1 \left(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_4 \right) - \mathring{I}_2\, \dot{Z}_4 - \mathring{I}_3\, \dot{Z}_3 - \mathring{I}_4\, 0$$

$$malla\ \#2: \quad 0 = - \mathring{I}_1\, \dot{Z}_4 + \mathring{I}_2 \left(\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6 + \dot{Z}_7 + \dot{Z}_8 \right) - \mathring{I}_3\, \dot{Z}_5 - \mathring{I}_4\, \dot{Z}_8$$

$$malla\ \#3: \quad \mathring{U}_2 = - \mathring{I}_1\, \dot{Z}_3 - \mathring{I}_2\, \dot{Z}_5 + \mathring{I}_3 \left(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_5 \right) - \dot{I}_4\, 0$$

$$malla\ \#4: \quad - \mathring{U}_1 = - \mathring{I}_1\, 0 - \mathring{I}_2\, \dot{Z}_8 - \mathring{I}_3\, 0 + \mathring{I}_4 \left(\dot{Z}_8 + \dot{Z}_9 \right)$$

El cálculo de las corrientes de malla partiendo de la ecuación matricial dada por :

$$\left[\mathring{U}_n \right] = \left[\dot{z}_{n,m} \right] \left[\mathring{I}_n \right]$$

se realiza multiplicando ambos miembros de la igualdad por la inversa de la matriz de impedancias (ver ítem 5-3.1.- sobre operaciones con matrices) , vale decir :

$$\left[\dot{z}_{n,m} \right]^{-1} \left[\mathring{U}_n \right] = \left[\mathring{I}_n \right]$$

Resumiendo, para **aplicar el método de intensidades de corrientes de malla para resolver una dada red** (simple o múltiple) se debe proceder de la siguiente manera :

a.- determinar el número de ramas de enlace de la red ($\mathbf{N_E = N_R - N_N + 1}$)
b.- elegir un número de mallas igual al número de ramas de enlace obtenido en el paso anterior
c.- establecer un sentido único (horario o antihorario) para recorrer las mallas
d.- determinar la matriz de impedancias de malla.*Esta matriz es siempre cuadrada y simétrica respecto de su diagonal principal.Las impedancias de la diagonal principal son las impedancias de malla o* autoimpedancias. *Los demás elementos de la matriz impedancias son las impedancias de transferencia o transimpedancias multiplicadas por* **- 1**.
e.- determinar el vector de tensiones de malla.*Las tensiones de polaridad opuesta al sentido elegido para recorrer la malla considerada se multiplican por* **– 1**.
f.- escribir las ecuaciones de resolución de la red dada desarrollando la expresión general

$$\left[\mathring{U}_n \right] = \left[\dot{z}_{n,m} \right] \left[\mathring{I}_n \right]$$

g.- hallar el vector de intensidades de corriente de malla resolviendo la ecuación general :

$$\left[\dot{z}_{n,m} \right]^{-1} \left[\mathring{U}_n \right] = \left[\mathring{I}_n \right]$$

Veamos la aplicación del método indicado considerando algunos ejemplos.Sea la red mostrada en la Figura 5.

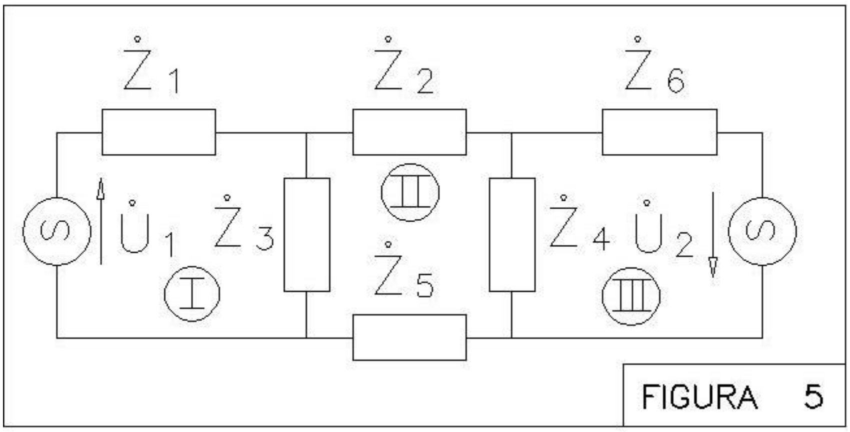


FIGURA 5

a.- la red de la Figura 5 posee 6 ramas y 4 nudos, en consecuencia : **$N_E = N_R - N_N + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$**
b.- en la Figura 5 se han indicado con los números romanos **I** , **II** y **III** las **N_E** mallas elegidas
c.- las mallas serán recorridas en sentido horario
d.- los elementos de la matriz de impedancias son :

$$\dot{z}_{1,1} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 \quad (malla\ \ I) \qquad \dot{z}_{1,2} = \dot{Z}_3 \quad (malla\ \ I, II) \qquad \dot{z}_{1,3} = 0 \quad (malla\ \ I, III)$$

$$\dot{z}_{2,1} = \dot{Z}_3 \quad (malla\ \ II, I) \qquad \dot{z}_{2,2} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 \quad (malla\ \ II) \qquad \dot{z}_{2,3} = \dot{Z}_4 \quad (malla\ \ II, III)$$

$$\dot{z}_{3,1} = 0 \quad (malla\ \ III, I) \qquad \dot{z}_{3,2} = \dot{Z}_4 \quad (malla\ \ III, II) \qquad \dot{z}_{3,3} = \dot{Z}_4 + \dot{Z}_6 \quad (malla\ \ III)$$

e.- el vector de tensiones de malla viene dado por :

$$\begin{bmatrix} \mathring{U}_1 & (malla\ \ I) \\ 0 & (malla\ \ II) \\ \mathring{U}_2 & (malla\ \ III) \end{bmatrix}$$

f.- las ecuaciones de resolución de la red representada en la Figura 5 vienen dadas por :

$$\begin{bmatrix} \mathring{U}_1 \\ 0 \\ \mathring{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_{1,1} & -\dot{z}_{1,2} & -\dot{z}_{1,3} \\ -\dot{z}_{2,1} & \dot{z}_{2,2} & -\dot{z}_{2,3} \\ -\dot{z}_{3,1} & -\dot{z}_{3,2} & \dot{z}_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathring{I}_I \\ \mathring{I}_{II} \\ \mathring{I}_{III} \end{bmatrix}$$

cuyo desarrollo permite escribir el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\mathring{U}_1 = \left(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 \right) \mathring{I}_I - \dot{Z}_3\, \mathring{I}_{II} \qquad [1]$$

$$0 = -\dot{Z}_3\, \mathring{I}_I + \left(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 \right) \mathring{I}_{II} - \dot{Z}_4\, \mathring{I}_{III} \qquad [2]$$

$$\mathring{U}_2 = -\dot{Z}_4\, \mathring{I}_{II} + \left(\dot{Z}_4 + \dot{Z}_6 \right) \mathring{I}_{III} \qquad [3]$$

Obsérvese que despejando $\overset{\circ}{I}_{III}$ en la ecuación [3] y reemplazándolo en la ecuación [2], el sistema queda reducido a dos ecuaciones con dos incógnitas, una de las cuales está igualada a cero (la [2] modificada) lo que permitirá despejar una de las incógnitas ($\overset{\circ}{I}_I \ o \ \overset{\circ}{I}_{II}$) a fin de reemplazarla en la ecuación [1], reduciendo a ésta a una sola incógnita cuyo cálculo permite determinar las dos restantes.
Puede compararse el grado de dificultad de éste procedimiento con el más general indicado en ítem g y quedará claro por qué es conveniente siempre explicitar las ecuaciones de resolución.

g.- para obtener las corrientes de malla se debe resolver la ecuación general dada por :

$$\left[\dot{z}_{n,m}\right]^{-1}\left[\overset{\circ}{U}_n\right]=\left[\overset{\circ}{I}_n\right]$$

La matriz inversa de la matriz impedancias viene dada por (ver apéndice sobre operaciones con matrices) :

$$\frac{1}{\Delta_z}\begin{bmatrix} \dot{z}_{2,2}\,\dot{z}_{3,3}-\dot{z}_{2,3}\,\dot{z}_{3,2} & \dot{z}_{1,2}\,\dot{z}_{3,3}+\dot{z}_{1,3}\,\dot{z}_{3,2} & \dot{z}_{1,2}\,\dot{z}_{2,3}+\dot{z}_{1,3}\,\dot{z}_{2,2} \\ \dot{z}_{2,1}\,\dot{z}_{3,3}-\dot{z}_{2,3}\,\dot{z}_{3,1} & \dot{z}_{1,1}\,\dot{z}_{3,3}-\dot{z}_{1,3}\,\dot{z}_{3,1} & \dot{z}_{1,1}\,\dot{z}_{2,3}+\dot{z}_{1,3}\,\dot{z}_{2,1} \\ \dot{z}_{2,1}\,\dot{z}_{3,2}+\dot{z}_{2,2}\,\dot{z}_{3,1} & \dot{z}_{1,1}\,\dot{z}_{3,2}+\dot{z}_{1,2}\,\dot{z}_{3,1} & \dot{z}_{1,1}\,\dot{z}_{2,2}-\dot{z}_{1,2}\,\dot{z}_{2,1} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_z=\dot{z}_{1,1}\left(\dot{z}_{2,2}\,\dot{z}_{3,3}-\dot{z}_{2,3}\,\dot{z}_{3,2}\right)-\dot{z}_{1,2}\left(\dot{z}_{2,1}\,\dot{z}_{3,3}+\dot{z}_{2,3}\,\dot{z}_{3,1}\right)-\dot{z}_{1,3}\left(\dot{z}_{2,1}\,\dot{z}_{3,2}+\dot{z}_{2,2}\,\dot{z}_{3,1}\right)$$

expresión general de la inversa de la matriz de impedancias de malla que, teniendo en cuenta los valores determinados en el ítem d ($\dot{z}_{1,2}=\dot{z}_{2,1}$, $\dot{z}_{1,3}=\dot{z}_{3,1}=0$, $\dot{z}_{2,3}=\dot{z}_{3,2}$) se reduce a :

$$\frac{1}{\Delta_z}\begin{bmatrix} \dot{z}_{2,2}\,\dot{z}_{3,3}-\dot{z}_{2,3}^{\,2} & \dot{z}_{1,2}\,\dot{z}_{3,3} & \dot{z}_{1,2}\,\dot{z}_{2,3} \\ \dot{z}_{2,1}\,\dot{z}_{3,3} & \dot{z}_{1,1}\,\dot{z}_{3,3} & \dot{z}_{1,1}\,\dot{z}_{2,3} \\ \dot{z}_{2,1}\,\dot{z}_{3,2} & \dot{z}_{1,1}\,\dot{z}_{3,2} & \dot{z}_{1,1}\,\dot{z}_{2,2}-\dot{z}_{1,2}^{\,2} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_z=\dot{z}_{1,1}\left(\dot{z}_{2,2}\,\dot{z}_{3,3}-\dot{z}_{2,3}^{\,2}\right)-\dot{z}_{1,2}^{\,2}\,\dot{z}_{3,3}$$

Multiplicando la inversa de la matriz de impedancias simplificada por el vector de tensiones determinado en el ítem e, se obtienen las expresiones de cálculo de las intensidades de corriente de malla :

$$\frac{1}{\Delta_z}\begin{bmatrix} \dot{z}_{2,2}\,\dot{z}_{3,3}-\dot{z}_{2,3}^{\,2} & \dot{z}_{1,2}\,\dot{z}_{3,3} & \dot{z}_{1,2}\,\dot{z}_{2,3} \\ \dot{z}_{2,1}\,\dot{z}_{3,3} & \dot{z}_{1,1}\,\dot{z}_{3,3} & \dot{z}_{1,1}\,\dot{z}_{2,3} \\ \dot{z}_{2,1}\,\dot{z}_{3,2} & \dot{z}_{1,1}\,\dot{z}_{3,2} & \dot{z}_{1,1}\,\dot{z}_{2,2}-\dot{z}_{1,2}^{\,2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overset{\circ}{U}_1\\0\\\overset{\circ}{U}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overset{\circ}{I}_I\\\overset{\circ}{I}_{II}\\\overset{\circ}{I}_{III}\end{bmatrix}$$

$$\mathring{I}_{I} = \frac{\left(\dot{z}_{2,2}\,\dot{z}_{3,3} - \dot{z}_{2,3}^{\,2}\right)\mathring{U}_{1} + \dot{z}_{1,2}\,\dot{z}_{2,3}\,\mathring{U}_{2}}{\dot{z}_{1,1}\left(\dot{z}_{2,2}\,\dot{z}_{3,3} - \dot{z}_{2,3}^{\,2}\right) - \dot{z}_{1,2}^{\,2}\,\dot{z}_{3,3}}$$

$$\mathring{I}_{II} = \frac{\dot{z}_{2,1}\,\dot{z}_{3,3}\,\mathring{U}_{1} + \dot{z}_{1,1}\,\dot{z}_{2,3}\,\mathring{U}_{2}}{\dot{z}_{1,1}\left(\dot{z}_{2,2}\,\dot{z}_{3,3} - \dot{z}_{2,3}^{\,2}\right) - \dot{z}_{1,2}^{\,2}\,\dot{z}_{3,3}}$$

$$\mathring{I}_{III} = \frac{\dot{z}_{2,1}\,\dot{z}_{3,2}\,\mathring{U}_{1} + \left(\dot{z}_{1,1}\,\dot{z}_{2,2} - \dot{z}_{1,2}^{\,2}\right)\mathring{U}_{2}}{\dot{z}_{1,1}\left(\dot{z}_{2,2}\,\dot{z}_{3,3} - \dot{z}_{2,3}^{\,2}\right) - \dot{z}_{1,2}^{\,2}\,\dot{z}_{3,3}}$$

Cabe señalar que las ecuaciones de las intensidades de corriente de malla se pueden obtener sin calcular la inversa de la matriz de impedancias aplicando **la regla de Crámer** sustituyendo sucesivamente las columnas 1 , 2 y 3 de la matriz impedancia por el vector tensión, tal como se muestra a continuación :

para calcular $\mathring{I}_{I}$ se reemplaza la primer columna de la matriz impedancia por el vector tensión y se divide la matriz resultante por el determinante de la matriz impedancia.El numerador de la ecuación se obtiene como suma de los productos de cada uno de los elementos del vector tensión por el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila y la columna a la que pertenece el elemento del vector tensión considerado.

$$\mathring{I}_{I} = \frac{\begin{bmatrix} \mathring{U}_{1} & -\dot{z}_{1,2} & 0 \\ 0 & \dot{z}_{2,2} & -\dot{z}_{2,3} \\ \mathring{U}_{2} & -\dot{z}_{3,2} & \dot{z}_{3,3} \end{bmatrix}}{\dot{z}_{1,1}\left(\dot{z}_{2,2}\,\dot{z}_{3,3} - \dot{z}_{2,3}^{\,2}\right) - \dot{z}_{1,2}^{\,2}\,\dot{z}_{3,3}} = \frac{\left(\dot{z}_{2,2}\,\dot{z}_{3,3} - \dot{z}_{2,3}^{\,2}\right)\mathring{U}_{1} + \dot{z}_{1,2}\,\dot{z}_{2,3}\,\mathring{U}_{2}}{\dot{z}_{1,1}\left(\dot{z}_{2,2}\,\dot{z}_{3,3} - \dot{z}_{2,3}^{\,2}\right) - \dot{z}_{1,2}^{\,2}\,\dot{z}_{3,3}}$$

para calcular $\mathring{I}_{II}$ se reemplaza la segunda columna de la matriz impedancia por el vector tensión y se divide la matriz resultante por el determinante de la matriz impedancia.El numerador de la ecuación se obtiene como suma de los productos (cambiados de signo) de cada uno de los elementos del vector tensión por el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila y la columna a la que pertenece el elemento del vector tensión considerado.

$$\mathring{I}_{II} = \frac{\begin{bmatrix} \dot{z}_{1,1} & \mathring{U}_{1} & 0 \\ -\dot{z}_{2,1} & 0 & -\dot{z}_{2,3} \\ 0 & \mathring{U}_{2} & \dot{z}_{3,3} \end{bmatrix}}{\dot{z}_{1,1}\left(\dot{z}_{2,2}\,\dot{z}_{3,3} - \dot{z}_{2,3}^{\,2}\right) - \dot{z}_{1,2}^{\,2}\,\dot{z}_{3,3}} = \frac{\dot{z}_{2,1}\,\dot{z}_{3,3}\,\mathring{U}_{1} + \dot{z}_{1,1}\,\dot{z}_{2,3}\,\mathring{U}_{2}}{\dot{z}_{1,1}\left(\dot{z}_{2,2}\,\dot{z}_{3,3} - \dot{z}_{2,3}^{\,2}\right) - \dot{z}_{1,2}^{\,2}\,\dot{z}_{3,3}}$$

para calcular $\mathring{I}_{III}$ se reemplaza la tercer columna de la matriz impedancia por el vector tensión y se divide la matriz resultante por el determinante de la matriz impedancia.El numerador de la ecuación se obtiene como suma de los *productos de cada uno de los elementos del vector tensión por el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila y la columna a la que pertenece el elemento del vector tensión considerado.*

$$\mathring{I}_{III} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{z}_{1,1} & -\dot{z}_{1,2} & \mathring{U}_1 \\ -\dot{z}_{2,1} & \dot{z}_{2,2} & 0 \\ 0 & -\dot{z}_{3,2} & \mathring{U}_2 \end{vmatrix}}{\dot{z}_{1,1}\left(\dot{z}_{2,2}\,\dot{z}_{3,3} - \dot{z}_{2,3}^{\,2}\right) - \dot{z}_{1,2}^{\,2}\,\dot{z}_{3,3}} = \frac{\dot{z}_{2,1}\,\dot{z}_{3,2}\,\mathring{U}_1 + \left(\dot{z}_{1,1}\,\dot{z}_{2,2} - \dot{z}_{1,2}^{\,2}\right)\mathring{U}_2}{\dot{z}_{1,1}\left(\dot{z}_{2,2}\,\dot{z}_{3,3} - \dot{z}_{2,3}^{\,2}\right) - \dot{z}_{1,2}^{\,2}\,\dot{z}_{3,3}}$$

Como regla general para reducir el trabajo de cálculo numérico, la aplicación de la regla de Crámer simplifica la resolución de la ecuación general matricial $\left[\dot{z}_{n,m}\right]^{-1}\left[\mathring{U}_n\right] = \left[\mathring{I}_n\right]$ pero siempre debe analizarse, previamente, el sistema de ecuaciones que se obtiene a partir de la ecuación $\left[\mathring{U}_n\right] = \left[\dot{z}_{n,m}\right]\left[\mathring{I}_n\right]$ ya que en muchos casos es posible mediante operaciones algebraicas reducir el orden (número de ecuaciones) del mismo.

Consideremos por último otro ejemplo de aplicación del método de corrientes de malla a la red representada en la Figura 6.

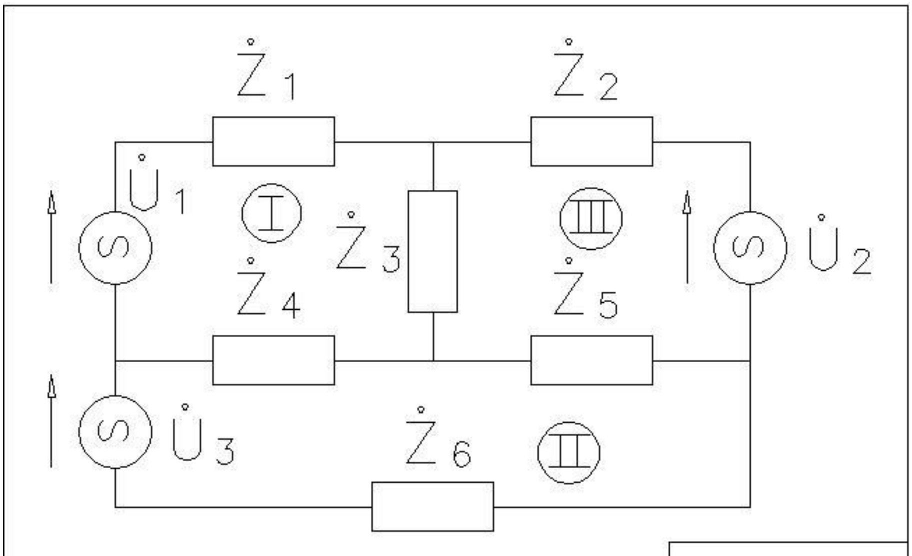


FIGURA 6

a.- el número de ramas de enlace vale **N $_E$ = N $_R$ – N $_N$ + 1 = 6 – 4 + 1 = 3**
b.- en la Figura 6 se han indicado con los números **I** , **II** y **III** las **N $_E$** mallas elegidas
c.- las mallas serán recorridas en sentido antihorario
d.- los elementos de la matriz de impedancias son :

$$\dot{z}_{1,1} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_4 \quad (malla\ \ I) \qquad \dot{z}_{1,2} = \dot{Z}_4 \quad (malla\ \ I, II) \qquad \dot{z}_{1,3} = \dot{Z}_3 \quad (malla\ \ I, III)$$

$$\dot{z}_{2,1} = \dot{Z}_4 \quad (malla\ \ II, I) \qquad \dot{z}_{2,2} = \dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6 \quad (malla\ \ II) \qquad \dot{z}_{2,3} = \dot{Z}_5 \quad (malla\ \ II, III)$$

$$\dot{z}_{3,1} = \dot{Z}_3 \quad (malla\ \ III, I) \qquad \dot{z}_{3,2} = \dot{Z}_5 \quad (malla\ \ III, II) \qquad \dot{z}_{3,3} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_5 \quad (malla\ \ III)$$

e.- el vector de tensiones de malla viene dado por :

$$\begin{bmatrix} -\mathring{U}_1 & (malla\ \ I) \\ -\mathring{U}_3 & (malla\ \ II) \\ \mathring{U}_2 & (malla\ \ III) \end{bmatrix}$$

f.- las ecuaciones de resolución de la red representada en la Figura 5 vienen dadas por :

$$\begin{bmatrix} -\mathring{U}_1 \\ -\mathring{U}_3 \\ \mathring{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_{1,1} & -\dot{z}_{1,2} & -\dot{z}_{1,3} \\ -\dot{z}_{2,1} & \dot{z}_{2,2} & -\dot{z}_{2,3} \\ -\dot{z}_{3,1} & -\dot{z}_{3,2} & \dot{z}_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathring{I}_I \\ \mathring{I}_{II} \\ \mathring{I}_{III} \end{bmatrix}$$

cuyo desarrollo permite escribir el siguiente sistema de ecuaciones :

$$-\mathring{U}_1 = \left(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_4 \right) \mathring{I}_I - \dot{Z}_4\, \mathring{I}_{II} - \dot{Z}_3\, \mathring{I}_{III}$$

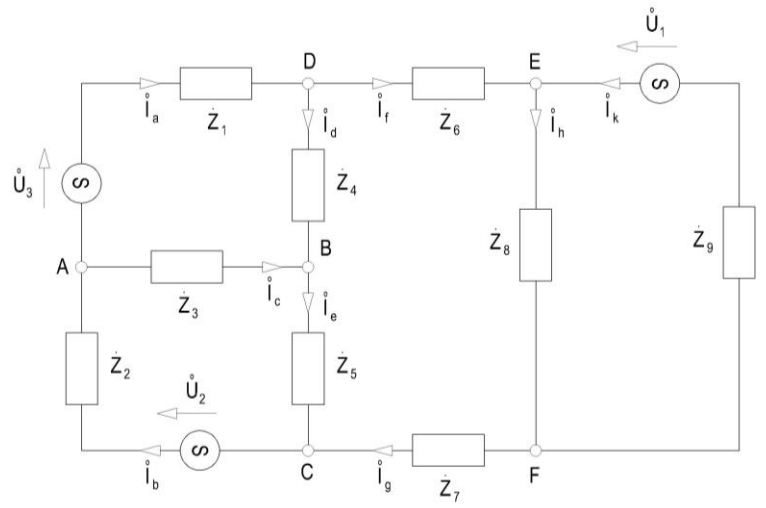
$$-\mathring{U}_3 = -\dot{Z}_4\, \mathring{I}_I + \left(\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6 \right) \mathring{I}_{II} - \dot{Z}_5\, \mathring{I}_{III}$$

$$\mathring{U}_2 = -\dot{Z}_3\, \mathring{I}_I - \dot{Z}_5\, \mathring{I}_{II} + \left(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dot{Z}_5 \right) \mathring{I}_{III}$$

El cálculo de las intensidades de corriente de malla debe ahora resolverse mediante cualquiera de los métodos conocidos si bien el uso de la regla de Crámer pareciera ser el más adecuado en éste caso.

5-2.1.3.- **Método de las tensiones de nodo**

El método de las corrientes de malla está basado en la ley de mallas de Kirchhoff y el método de las tensiones de nodos, en la ley de los nodos de Kirchhoff.El número de ecuaciones necesarias para resolver un dado circuito es igual al número de ramas de un árbol que pertenezca al mismo y viene dado por el número de nodos menos la unidad.
Como ejemplo consideremos el circuito utilizado para deducir el método de intensidades de corriente de mallas, donde se suponen conocidas las intensidades de corriente en todas sus ramas.
Para analizar el circuito dado como ejemplo se elige el árbol mostrado en la Figura 1. Arbitrariamente se elige el nodo **B** como referencia para establecer los potenciales o tensiones de los restantes nodos del árbol respecto al nodo de referencia.El potencial del nodo **B** se considera igual a cero (en otras palabras el nodo **B** se supone conectado a tierra).



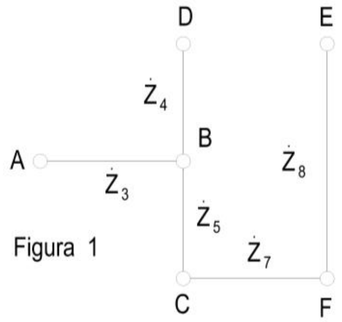


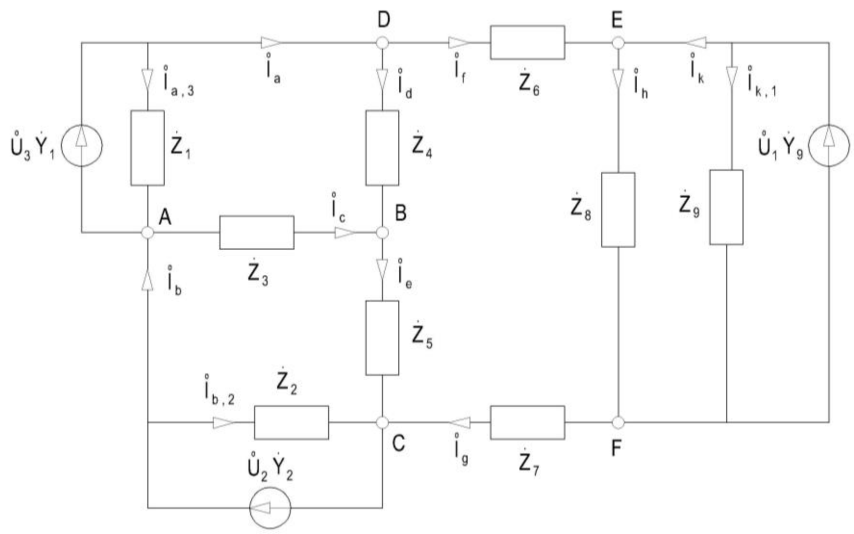
Figura 1

Aplicando sucesivamente la ley de nodos de Kirchhoff a los nodos **A** , **C** , **D** , **E** , **F** se obtienen las siguientes expresiones :

$$nodo\ A \quad \mathring{I}_b = \mathring{I}_a + \mathring{I}_c \quad ; \quad nodo\ C \quad \mathring{I}_b = \mathring{I}_e + \mathring{I}_g \quad ; \quad nodo\ D \quad \mathring{I}_a = \mathring{I}_d + \mathring{I}_f \quad ; \quad nodo\ E \quad \mathring{I}_h = \mathring{I}_f + \mathring{I}_k$$

$$nodo\ F \quad \mathring{I}_h = \mathring{I}_f + \mathring{I}_k$$

Para facilitar el análisis del circuito en base a las tensiones de nodo es conveniente reemplazar las fuentes *reales* de tensión ubicadas en las ramas **A-D** , **A-C** y **E-F** por fuentes *reales* de intensidad de corriente tal como se muestra en el siguiente esquema :



Las expresiones obtenidas por aplicación de la ley de nodos de Kirchhoff pueden escribirse de la siguiente manera

$$nodo\ A \quad \mathring{U}_2 \dot{Y}_2 - \mathring{I}_{b,2} = \mathring{U}_3 \dot{Y}_1 - \mathring{I}_{a,3} + \mathring{I}_c \quad ; \quad nodo\ C \quad \mathring{U}_2 \dot{Y}_2 - \mathring{I}_{b,2} = \mathring{I}_e + \mathring{I}_g$$

$$nodo\ D \quad \mathring{U}_3 \dot{Y}_1 - \mathring{I}_{a,3} = \mathring{I}_d + \mathring{I}_f \ ; \ nodo\ E \quad \mathring{I}_h = \mathring{U}_1 \dot{Y}_9 - \mathring{I}_{k,1} + \mathring{I}_f \ ; \ nodo\ F \quad \mathring{I}_h = \mathring{U}_1 \dot{Y}_9 - \mathring{I}_{k,1} + \mathring{I}_g$$

Desarrollando las expresiones obtenidas para cada uno de los nodos considerando que el sentido de circulación de corriente en cada rama pasiva es desde el nodo a mayor potencial hacia el nodo a menor potencial, resulta :

$$nodo\ A \quad \mathring{U}_2 \dot{Y}_2 - \mathring{U}_{A,C} \dot{Y}_2 = \mathring{U}_3 \dot{Y}_1 - \mathring{U}_{D,A} \dot{Y}_1 + \mathring{U}_{A,B} \dot{Y}_3$$

$$nodo\ C \quad \mathring{U}_2 \dot{Y}_2 - \mathring{U}_{A,C} \dot{Y}_2 = \mathring{U}_{B,C} \dot{Y}_5 + \mathring{U}_{F,C} \dot{Y}_7$$

$$nodo\ D \quad \mathring{U}_3 \dot{Y}_1 - \mathring{U}_{D,A} \dot{Y}_1 = \mathring{U}_{D,B} \dot{Y}_4 + \mathring{U}_{D,E} \dot{Y}_6$$

$$nodo\ E \quad \mathring{U}_{E,F} \dot{Y}_8 = \mathring{U}_1 \dot{Y}_9 - \mathring{U}_{E,F} \dot{Y}_9 + \mathring{U}_{D,E} \dot{Y}_6$$

$$nodo\ F \quad \mathring{U}_{E,F} \dot{Y}_8 = \mathring{U}_1 \dot{Y}_9 - \mathring{U}_{E,F} \dot{Y}_9 + \mathring{U}_{F,C} \dot{Y}_7$$

En las expresiones anteriores todas las diferencias de potencial deben expresarse en relación al nodo **B** , elegido como nodo de referencia, en base a las siguientes igualdades obtenidas aplicando la ley de lazos de Kirchhoof :

$$\mathring{U}_{A,C} = \mathring{U}_{A,B} - \mathring{U}_{C,B} \quad ; \quad \mathring{U}_{D,A} = \mathring{U}_{D,B} - \mathring{U}_{A,B} \quad ; \quad \mathring{U}_{F,C} = \mathring{U}_{F,B} - \mathring{U}_{C,B} \quad ; \quad \mathring{U}_{D,E} = \mathring{U}_{D,B} - \mathring{U}_{E,B}$$

$$\mathring{U}_{E,F} = \mathring{U}_{E,B} - \mathring{U}_{F,B}$$

Reemplazando en las expresiones obtenidas por aplicación de la ley de nodos de Kirchhoff de forma que todas las tensiones de nodo estén referidas al nodo **B** , obtenemos :

$$nodo\ A \quad \mathring{U}_2 \dot{Y}_2 - \mathring{U}_{A,B} \dot{Y}_2 + \mathring{U}_{C,B} \dot{Y}_2 = \mathring{U}_3 \dot{Y}_1 - \mathring{U}_{D,B} \dot{Y}_1 + \mathring{U}_{A,B} \dot{Y}_1 + \mathring{U}_{A,B} \dot{Y}_3$$

$$nodo\ C \quad \mathring{U}_2 \dot{Y}_2 - \mathring{U}_{A,B} \dot{Y}_2 + \mathring{U}_{C,B} \dot{Y}_2 = -\mathring{U}_{C,B} \dot{Y}_5 + \mathring{U}_{F,B} \dot{Y}_7 - \mathring{U}_{C,B} \dot{Y}_7$$

$$nodo\ D \quad \mathring{U}_3 \dot{Y}_1 - \mathring{U}_{D,B} \dot{Y}_1 + \mathring{U}_{A,B} \dot{Y}_1 = \mathring{U}_{D,B} \dot{Y}_4 + \mathring{U}_{D,B} \dot{Y}_6 - \mathring{U}_{E,B} \dot{Y}_6$$

$$nodo\ E \quad \mathring{U}_{E,B} \dot{Y}_8 - \mathring{U}_{F,B} \dot{Y}_8 = \mathring{U}_1 \dot{Y}_9 - \mathring{U}_{E,B} \dot{Y}_9 + \mathring{U}_{F,B} \dot{Y}_9 + \mathring{U}_{D,B} \dot{Y}_6 - \mathring{U}_{E,B} \dot{Y}_6$$

$$nodo\ F \quad \mathring{U}_{E,B} \dot{Y}_8 - \mathring{U}_{F,B} \dot{Y}_8 = \mathring{U}_1 \dot{Y}_9 - \mathring{U}_{E,B} \dot{Y}_9 + \mathring{U}_{F,B} \dot{Y}_9 + \mathring{U}_{F,B} \dot{Y}_7 - \mathring{U}_{C,B} \dot{Y}_7$$

Ordenando términos, las expresiones anteriores pueden escribirse (se omite el subíndice **B** al indicar las tensiones porque al ser **U_B = 0** [V] el valor de tensión en cada nodo es absoluto y no una diferencia relativa) :
*al reescribir las ecuaciones de nodo se han tomado **positivas** las intensidades de corriente de las fuentes ideales si entran al nodo considerado y **negativas** en caso contario.También se ha completado cada una de las ecuaciones de modo que estén representadas todas las tensiones de nodo (excepto el de referencia) agregando términos nulos.*

$$nodo\ A \quad \mathring{U}_2 \dot{Y}_2 - \mathring{U}_3 \dot{Y}_1 = \left(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 \right) \mathring{U}_A - \dot{Y}_2 \mathring{U}_C - \dot{Y}_1 \mathring{U}_D + 0\,\mathring{U}_E + 0\,\mathring{U}_F$$

$$nodo\ C \quad -\mathring{U}_2 \dot{Y}_2 = -\dot{Y}_2 \mathring{U}_A + \left(\dot{Y}_2 + \dot{Y}_5 + \dot{Y}_7 \right) \mathring{U}_C + 0\,\mathring{U}_D + 0\,\mathring{U}_E - \dot{Y}_7 \mathring{U}_F$$

$$nodo\ D \quad \mathring{U}_3 \dot{Y}_1 = -\dot{Y}_1 \mathring{U}_A + 0\,\mathring{U}_C + \left(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_4 + \dot{Y}_6 \right) \mathring{U}_D - \dot{Y}_6 \mathring{U}_E + 0\,\mathring{U}_F$$

$$nodo\ E \quad \mathring{U}_1 \dot{Y}_9 = 0\,\mathring{U}_A + 0\,\mathring{U}_C - \dot{Y}_6 \mathring{U}_D + \left(\dot{Y}_6 + \dot{Y}_8 + \dot{Y}_9 \right) \mathring{U}_E - \left(\dot{Y}_8 + \dot{Y}_9 \right) \mathring{U}_F \dot{Y}_6$$

$$nodo\ F \quad -\mathring{U}_1 \dot{Y}_9 = 0\,\mathring{U}_A - \dot{Y}_7 \mathring{U}_C + 0\,\mathring{U}_D - \left(\dot{Y}_8 + \dot{Y}_9 \right) \mathring{U}_E + \left(\dot{Y}_7 + \dot{Y}_8 + \dot{Y}_9 \right) \mathring{U}_F$$

El sistema de ecuaciones obtenido permite calcular las tensiones de los nodos **A** , **C** , **D** , **E** , **F** considerando el nodo **B** a potencial cero y, luego determinar las intensidades de corriente en todas las ramas del circuito dado como ejemplo.
El sistema de ecuaciones de tensiones de nodo que resuelve el circuito dado como ejemplo se puede escribir de forma más general reemplazando la letra que identifica cada nodo por un número (asignando el cero al nodo tomado como referencia) tal como se muestra a continuación :

$$\begin{aligned}
&nodo\ A \qquad \mathring{I}_1 = \dot{y}_{1,1}\,\mathring{U}_{1,0} - \dot{y}_{1,2}\,\mathring{U}_{2,0} - \dot{y}_{1,3}\,\mathring{U}_{3,0} - \dot{y}_{1,4}\,\mathring{U}_{4,0} - \dot{y}_{1,5}\,\mathring{U}_{5,0} \\
&nodo\ C \qquad \mathring{I}_2 = -\dot{y}_{2,1}\,\mathring{U}_{1,0} + \dot{y}_{2,2}\,\mathring{U}_{2,0} - \dot{y}_{2,3}\,\mathring{U}_{3,0} - \dot{y}_{2,4}\,\mathring{U}_{4,0} - \dot{y}_{2,5}\,\mathring{U}_{5,0} \\
&nodo\ D \qquad \mathring{I}_3 = -\dot{y}_{3,1}\,\mathring{U}_{1,0} - \dot{y}_{3,2}\,\mathring{U}_{2,0} + \dot{y}_{3,3}\,\mathring{U}_{3,0} - \dot{y}_{3,4}\,\mathring{U}_{4,0} - \dot{y}_{3,5}\,\mathring{U}_{5,0} \\
&nodo\ E \qquad \mathring{I}_4 = -\dot{y}_{4,1}\,\mathring{U}_{1,0} - \dot{y}_{4,2}\,\mathring{U}_{2,0} - \dot{y}_{4,3}\,\mathring{U}_{3,0} + \dot{y}_{4,4}\,\mathring{U}_{4,0} - \dot{y}_{4,5}\,\mathring{U}_{5,0} \\
&nodo\ F \qquad \mathring{I}_5 = -\dot{y}_{5,1}\,\mathring{U}_{1,0} - \dot{y}_{5,2}\,\mathring{U}_{2,0} - \dot{y}_{5,3}\,\mathring{U}_{3,0} + \dot{y}_{5,4}\,\mathring{U}_{4,0} + \dot{y}_{5,5}\,\mathring{U}_{5,0}
\end{aligned}$$

Utilizando el álgebra de matrices la expresión general de la solución de una dada red por el método de las tensiones de nodos, resulta :

$$\left[\,\mathring{I}_n\,\right] = \left[\,\dot{y}_{n,m}\,\right]\left[\,\mathring{U}_{n,0}\,\right]$$

donde **n**, es el número de nodos elegido para la red considerada ; $\left[\,\mathring{I}_n\,\right]$ es el vector de corrientes de nodo (correspondientes a la suma de las corrientes de todas las **ramas activas** conectadas al nodo considerado.Se considera positiva la corriente entrante y negativa la saliente); $\left[\,\dot{y}_{n,n}\,\right]$ es la matriz de admitancia de nodos de la red considerada (se caracteriza por ser una matriz cuadrada,vale decir con igual número de filas que de columnas, simétrica respecto de la diagonal principal) y $\left[\,\mathring{U}_{n,0}\,\right]$ es el vector de tensiones de nodo respecto del nodo de referencia (puesto a tierra).
Los elementos de la matriz admitancia ubicados en la diagonal principal , $\dot{y}_{i,j}\ ;\ donde\ i = j$ se denominan **admitancia de nodo** o **autoadmitancia** y se obtienen sumando las admitancias de cada una de las ramas conectadas al nodo considerado.
Los restantes elementos de la matriz admitancia , $\dot{y}_{i,j}\ ;\ donde\ i \neq j$, se denominan **admitancia de transferencia** o **transadmitancia** y se obtienen sumando las admitancias de las ramas que conectan el nodo considerado con cada uno de los nodos adyacentes, de a pares. Puesto que por definición sólo hay *una rama del árbol* elegido para el circuito considerado *entre cada par de nodos*, las admitancias de transferencia entre nodos adyacentes tienen *el mismo valor*.Téngase en cuenta que un dado circuito puede presentar más de una rama entre el mismo par de nodos, pero como se trata de ramas en paralelo siempre se las puede reemplazar por una única rama equivalente. Las admitancias de transferencia siempre deben multiplicarse por **– 1**.

El cálculo de las tensiones de nodos partiendo de la ecuación matricial se realiza multiplicando ambos miembros de la igualdad por la inversa de la matriz de admitancias (ver ítem 5-3.1.- sobre operaciones con matrices) , vale decir :

$$\left[\dot{y}_{n,m}\right]^{-1}\left[\overset{\circ}{I}_n\right]=\left[\overset{\circ}{U}_{n,0}\right]$$

De acuerdo al sistema de ecuaciones que resulte], tal como se discutió al considerar el método de intensidades de corrientes de malla, se deberá elegir el método numérico (igualación, sustitución, sumas y restas, determinantes o cálculo de la inversa de la matriz de admitancia) que resulte más sencillo.

Resumiendo, para **aplicar el método de tensiones de nodos para resolver una dada red** (simple o múltiple) se debe proceder de la siguiente manera :

a.- determinar el número de ramas del árbol de la red ($\mathbf{N_A = N_N - 1}$)

b.- elegir un número de nodos igual al número de ramas del árbol obtenido en el paso anterior y al nodo restante considerarlo de referencia (puesto a potencial de tierra)

c.- determinar la matriz de admitancias de nodo

e.- determinar el vector de corrientes de nodo (para ello es conveniente reemplazar las fuentes reales de tensión por sus equivalentes de corriente)

f.- escribir las ecuaciones de resolución de la red dada desarrollando la expresión general

$$\left[\overset{\circ}{I}_n\right]=\left[\dot{y}_{n,m}\right]\left[\overset{\circ}{U}_{n,0}\right]$$

g.- hallar el vector de tensiones de nodo resolviendo la ecuación general :

$$\left[\dot{y}_{n,m}\right]^{-1}\left[\overset{\circ}{I}_n\right]=\left[\overset{\circ}{U}_{n,0}\right]$$

Veamos la aplicación del método indicado considerando algunos ejemplos.Sea la red mostrada en la Figura 8.

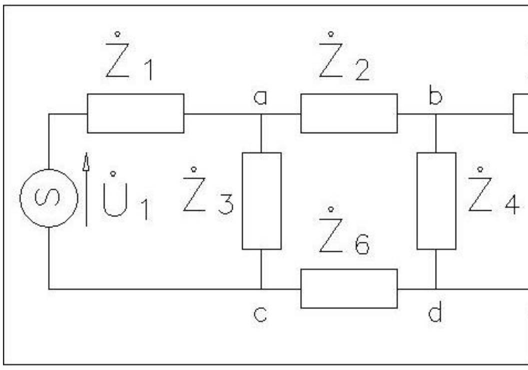


FIGURA 8

a.- el número de ramas del árbol para el circuito representado en la Figura 8 vale : $\mathbf{N_A = N_N - 1 = 4 - 1 = 3}$

b.- El circuito representado en la Figura 8 posee cuatro nodos identificados con las letras **a**, **b**, **c** y **d**.Se elige el nodo **d** como referencia (se lo conecta a tierra) y los potenciales de los nodos restantes (**a**, **b** y **c**) se calculan conrespecto a éste

c.- los elementos de la matriz de admitancias de nodos son :

$$\dot{y}_{1,1}=\dot{Y}_1+\dot{Y}_2+\dot{Y}_3\quad(nodo\ \ a)\qquad \dot{y}_{1,2}=\dot{Y}_2\quad(nodo\ \ a,b)\qquad \dot{y}_{1,3}=\dot{Y}_1+\dot{Y}_3\quad(nodo\ \ a,c)$$

$$\dot{y}_{2,1}=\dot{Y}_2\quad(nodo\ \ b,a)\qquad \dot{y}_{2,2}=\dot{Y}_2+\dot{Y}_4+\dot{Y}_5\quad(nodo\ \ b)\qquad \dot{y}_{2,3}=0\quad(nodo\ \ b,c)$$

$$\dot{y}_{3,1}=\dot{Y}_1+\dot{Y}_3\quad(nodo\ \ c,a)\qquad \dot{y}_{3,2}=0\quad(nodo\ \ c,b)\qquad \dot{y}_{3,3}=\dot{Y}_1+\dot{Y}_3+\dot{Y}_6\quad(nodo\ \ c)$$

d.- el vector de corrientes de nodo viene dado por :

$$\begin{bmatrix} \mathring{I}_a \left(= \mathring{U}_1 \dot{Y}_1 \quad , nodo \;\; a \right) \\ -\mathring{I}_b \left(= \mathring{U}_2 \dot{Y}_5 \quad , nodo \;\; b \right) \\ -\mathring{I}_c \left(= \mathring{U}_1 \dot{Y}_1 \quad , nodo \;\; c \right) \end{bmatrix}$$

f.- las ecuaciones de resolución del circuito representado en la Figura 8 se obtienen desarrollando la expresión general matricial

$$\begin{bmatrix} \mathring{I}_a \\ -\mathring{I}_b \\ -\mathring{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}_{1,1} & -\dot{y}_{1,2} & -\dot{y}_{1,3} \\ -\dot{y}_{2,1} & \dot{y}_{2,2} & -\dot{y}_{2,3} \\ -\dot{y}_{3,1} & -\dot{y}_{3,2} & \dot{y}_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathring{U}_{a,d} \\ \mathring{U}_{b,d} \\ \mathring{U}_{c,d} \end{bmatrix}$$

al multiplicar la matriz admitancias de nodo por el vector de tensiones de nodos respecto del nodo de referencia (ver ítem 5-3.1.- sobre operaciones con matrices) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de resolución por el método de tensiones de nodos :

$$\mathring{I}_a = \left(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 \right) \mathring{U}_{a,d} - \dot{Y}_2 \mathring{U}_{b,d} - \left(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_3 \right) \mathring{U}_{c,d}$$

$$-\mathring{I}_b = -\dot{Y}_2 \mathring{U}_{a,d} + \left(\dot{Y}_2 + \dot{Y}_4 + \dot{Y}_5 \right) \mathring{U}_{b,d}$$

$$-\mathring{I}_c = -\left(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_3 \right) \mathring{U}_{a,d} + \left(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_3 + \dot{Y}_6 \right) \mathring{U}_{c,d}$$

La solución del sistema de ecuaciones puede obtenerse aplicando cualquiera de los métodos numéricos conocidos.
Consideremos por último otro ejemplo de aplicación del método de tensiones entre pares de nodos a la red representada en la Figura 9.

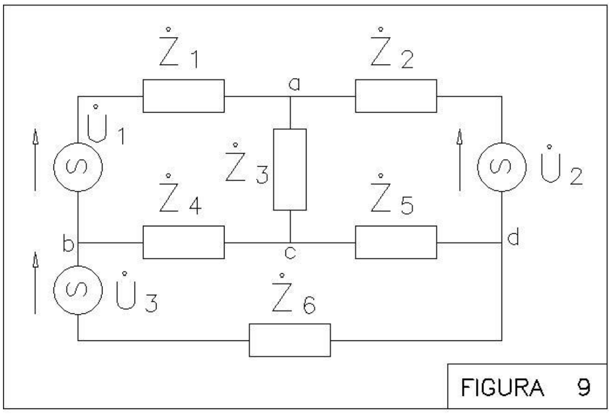


FIGURA 9

a.- el número de ramas del árbol para el circuito representado en la Figura 9 vale : **$N_A = N_N - 1 = 4 - 1 = 3$**

b.- El circuito representado en la Figura 9 posee cuatro nodos identificados con las letras **a**, **b**, **c** y **d**.Se elige el no nodo **c** como referencia (se lo conecta a tierra) y los potenciales de los nodos restantes (**a**, **b** y **d**) se calculan con respecto a éste

c.- los elementos de la matriz de admitancias de nodos son :

$$\dot{y}_{1,1} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 \quad (nodo\ \ a) \qquad \dot{y}_{1,2} = \dot{Y}_1 \quad (nodo\ \ a,b) \qquad \dot{y}_{1,3} = \dot{Y}_2 \quad (nodo\ \ a,d)$$

$$\dot{y}_{2,1} = \dot{Y}_1 \quad (nodo\ \ b,a) \qquad \dot{y}_{2,2} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_4 + \dot{Y}_6 \quad (nodo\ \ b) \qquad \dot{y}_{2,3} = \dot{Y}_6 \quad (nodo\ \ b,d)$$

$$\dot{y}_{3,1} = \dot{Y}_2 \quad (nodo\ \ d,a) \qquad \dot{y}_{3,2} = \dot{Y}_6 \quad (nodo\ \ d,b) \qquad \dot{y}_{3,3} = \dot{Y}_2 + \dot{Y}_5 + \dot{Y}_6 \quad (nodo\ \ d)$$

d.- el vector de corrientes de nodo viene dado por :

$$\begin{bmatrix} \mathring{I}_a \left(= \mathring{U}_1 \dot{Y}_1 + \mathring{U}_2 \dot{Y}_2 \quad , nodo\ \ a \right) \\ \mathring{I}_b \left(= \mathring{U}_3 \dot{Y}_6 - \mathring{U}_1 \dot{Y}_1 \quad , nodo\ \ b \right) \\ \mathring{I}_c \left(= -\mathring{U}_2 \dot{Y}_2 - \mathring{U}_3 \dot{Y}_3 \quad , nodo\ \ c \right) \end{bmatrix}$$

f.- las ecuaciones de resolución del circuito representado en la Figura 9 se obtienen desarrollando la expresión general matricial :

$$\begin{bmatrix} \mathring{I}_a \\ \mathring{I}_b \\ \mathring{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y}_{1,1} & -\dot{y}_{1,2} & -\dot{y}_{1,3} \\ -\dot{y}_{2,1} & \dot{y}_{2,2} & -\dot{y}_{2,3} \\ -\dot{y}_{3,1} & -\dot{y}_{3,2} & \dot{y}_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathring{U}_{a,c} \\ \mathring{U}_{b,c} \\ \mathring{U}_{d,c} \end{bmatrix}$$

al multiplicar la matriz admitancias de nodo por el vector de tensiones de nodos respecto del nodo de referencia (ver ítem 5-3.1.- sobre operaciones con matrices) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de resolución por el método de tensiones de nodos :

$$\mathring{I}_a = \left(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3 \right) \mathring{U}_{a,c} - \dot{Y}_1 \mathring{U}_{b,c} - \dot{Y}_2 \mathring{U}_{d,c}$$

$$\mathring{I}_b = -\dot{Y}_1 \mathring{U}_{a,c} + \left(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_4 + \dot{Y}_6 \right) \mathring{U}_{b,c} - \dot{Y}_6 \mathring{U}_{d,c}$$

$$\mathring{I}_c = -\dot{Y}_2 \mathring{U}_{a,c} - \dot{Y}_6 \mathring{U}_{b,c} + \left(\dot{Y}_2 + \dot{Y}_5 + \dot{Y}_6 \right) \mathring{U}_{d,c}$$

cuya solución se obtiene aplicando cualquiera de los métodos numéricos conocidos.

5-2.1.4.- **Criterios para resolución de redes**

Para resolver un dado circuito eléctrico en régimen permanente puede procederse de dos maneras :

.- plantear un sistema de $\mathbf{N_E}$ ecuaciones independientes cuyas variables son las $\mathbf{N_E}$ intensidades de corriente de las ramas de enlace elegidas.
.- plantear un sistema de $\mathbf{N_A}$ ecuaciones independientes cuyas variables son las $\mathbf{N_A}$ tensiones de nodos de las ramas del árbol elegido (se excluye el nodo considerado a potencial cero o referido a masa).

El criterio a seguir consiste siempre en utilizar el menor número de ecuaciones posible así que cuando $\mathbf{N_E < N_A}$, se utilizará como variables las corrientes de enlace, aplicando el método de intensidades de corriente de malla y cuando $\mathbf{N_E > N_A}$, las variables serán las tensiones de nodos, aplicándose el método de tensiones de nodos.
Cuando se emplea el método de intensidades de corriente de malla es conveniente que todas las ramas activas contengan fuentes reales de tensión.Por el contrario, cuando se aplica el método de tensiones de nodos es útil que todas las ramas activas contengan fuentes reales de corriente.
En los casos que $\mathbf{N_E = N_A}$, se aplicará el método de intensidades de corriente de malla si en las ramas activas de la red considerada predominan las fuentes reales de tensión.Si en cambio hay mayor número de ramas activas con fuentes reales de corriente, se aplicará el método de tensiones de nodos.

5-3.1.- Operaciones con matrices

<u>Conceptos básicos</u>

Se define como **matriz** a todo conjunto de números ordenado según filas y columnas.Cada uno de dichos números se denomina **elemento de la matriz**.
Una matriz puede formarse con cualquier tipo de números (enteros, reales, complejos, etc).En los ejemplos que se dan a continuación sólo se utilizan números enteros para mayor claridad.
El número de columnas determina el **orden** de una matriz y, el producto del número de filas multiplicado por el número de columnas da el **número total de elementos** de la matriz.Veamos los siguientes ejemplos :

$\begin{bmatrix} 45 \\ -7 \\ 39 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}$ se trata de una matriz de orden 1 (denominada **vector**), de 5 filas y que contiene 5 elementos

$\begin{bmatrix} 0 & -18 & 27 & 45 & -21 \\ 12 & 71 & 0 & -5 & 46 \\ 35 & -9 & -6 & 45 & 11 \end{bmatrix}$ se trata de una matriz de orden 5 (del tipo **rectangular**), de 3 filas y 15 elementos

$\begin{bmatrix} 18 & -5 & 12 \\ 0 & 25 & 3 \\ 34 & -17 & 0 \end{bmatrix}$ se trata de una matriz de orden 3 (del tipo **cuadrada**), de 3 filas y nueve elementos

Los elementos (números) de una matriz se indican en forma general : $a_{i,j}$, donde i es el número de la fila y j, el número de la columna donde está ubicado el elemento.
Para que dos matrices [A] y [B] sean iguales es necesario que sean del mismo orden, tengan la misma cantidad de elementos y además se verifique que : [$a_{i,j}$] = [$b_{i,j}$] , siendo a y b elementos pertenecientes a cada una de las matrices.
Dada una matriz cuadrada de n filas y columnas, se denomina diagonal principal al conjunto de elementos ubicados según una línea trazada desde el elemento $a_{1,1}$ hasta el $a_{n,n}$ (para la matriz cuadrada dada como ejemplo, los elementos de la diagonal principal son : 18, 25 y 0).Por otra parte, se denomina diagonal secundaria al conjunto de elementos ubicados según una línea trazada desde el elemento $a_{1,n}$ hasta el $a_{n,1}$ (para la matriz cuadrada dada como ejemplo, los elementos de la diagonal secundaria son : 12, 25 y 34).
Toda matriz cuadrada cuyos únicos elementos distintos de cero pertenecen a la diagonal principal se denomina **matriz diagonal**.
La matriz diagonal cuyos elementos son iguales a la unidad se denomina **matriz unidad [I]** .La siguiente es una matriz unidad de orden 4 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dada una matriz cuadrada cualquiera [A] . se denomina **matriz traspuesta** [B] de aquélla a la que verifica la siguiente condición : [$a_{i,j}$] = [$b_{j,i}$] (vale decir que los elementos de la fila i de la matriz [A] son iguales a los elementos de la columna i de la matriz [B]).Por ejemplo :

$$\left[A\right]=\begin{bmatrix} 18 & -5 & 12 \\ 0 & 25 & 3 \\ 34 & -17 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{tiene como traspuesta a} \quad \left[B\right] = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 34 \\ -5 & 25 & -17 \\ 12 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Producto de un número por una matriz

La operación N x [A], donde N es un número cualquiera y [A] una matriz cualquiera da por resultado una matriz [B] tal que : $b_{i,j} = N \times a_{i,j}$.Por ejemplo :

$$3\left[A\right]=3\begin{bmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 0 & 4 & 11 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 15 & 21 & -6 \\ 0 & 12 & 33 \\ 27 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Producto de una matriz cuadrada por un vector (o matriz columna)

Dada una matriz cuadrada [A] de orden n y un vector [B] de n filas, el producto [A] x [B] da por resultado un vector [C] de n filas cuyos elementos vienen dados por :

$$c_{1,1} = a_{1,1}\, b_{1,1} + a_{1,2}\, b_{2,1} + a_{1,3}\, b_{3,1} + \ldots + a_{1,n}\, b_{n,1}$$

$$c_{2,1} = a_{2,1}\, b_{1,1} + a_{2,2}\, b_{2,1} + a_{2,3}\, b_{3,1} + \ldots + a_{2,n}\, b_{n,1}$$

$c_{3,1} = a_{3,1}\, b_{1,1} + a_{3,2}\, b_{2,1} + a_{3,3}\, b_{3,1} + \ldots + a_{3,n}\, b_{n,1}$

………………………………………………………………………………………

$c_{m,1} = a_{n,1}\, b_{1,1} + a_{n,2}\, b_{2,1} + a_{n,3}\, b_{3,1} + \ldots + a_{n,n}\, b_{n,1}$

Vale decir que el elemento de la fila i del vector producto [C] se obtiene como suma de las productos (elemento a elemento) de los elementos de la fila i de la matriz [A] por los elementos del vector [B].Veamos el siguiente ejemplo :

$$[A][B] = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -3 & 7 & -2 \\ 6 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\times4+(-5)(-2)+2\times6 \\ (-3)4+7(-2)+(-2)8 \\ 6\times4+3(-2)+8\times6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+10+12 \\ -12-14-12 \\ 24-6+48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ -38 \\ 66 \end{bmatrix}$$

Cálculo del determinante de una matriz cuadrada

El determinante (Δ) de una matriz cuadrada de orden 2 viene dado por :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \qquad \Delta_A = a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}$$

Considérese el siguiente ejemplo :

$$[D] = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \Delta_A = 7\times4 - 9(-5) = 28 + 45 = 73$$

El determinante (Δ) de una matriz cuadrada de orden 3 viene dado por :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_A = a_{1,1}\left(a_{2,2}\, a_{3,3} - a_{2,3}\, a_{3,2}\right) - a_{1,2}\left(a_{2,1}\, a_{3,3} - a_{2,3}\, a_{3,1}\right) + a_{1,3}\left(a_{2,1}\, a_{3,2} - a_{2,2}\, a_{3,1}\right)$$

Consideremos el siguiente ejemplo :

$$[E] = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_E = 6[5\times5-(-2)\times7] - (-2)[4\times5-(-2)\times(-1)] + 3[4\times7-5\times(-1)] = 6(25+14) + 2(20-2) +$$
$$+\ 3(28+5) =$$
$$\Delta_E = 234 + 36 + 99 = 369$$

Cálculo de la inversa de una matriz cuadrada

Dada una matriz cuadrada cualquiera [A] , la matriz inversa de ésta [A] $^{-1}$ es aquélla que verifica la siguiente igualdad :

$$[A][A]^{-1} = [A]^{-1}[A] = [I]$$

El producto de una matriz por su inversa es conmutativo y su resultado es igual a la matriz unidad.
Sea [A] una matriz cuadrada de orden 2, su inversa [A] $^{-1}$ viene dada por :

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\Delta_A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_A = a_{1,1}\left(a_{2,2}\ a_{3,3} - a_{2,3}\ a_{3,2}\right) - a_{1,2}\left(a_{2,1}\ a_{3,3} - a_{2,3}\ a_{3,1}\right) + a_{1,3}\left(a_{2,1}\ a_{3,2} - a_{2,2}\ a_{3,1}\right)$$

Obsérvese que la inversa de una matriz cuadrada de orden 2 se obtiene multiplicando la inversa de su determinante por la matriz que resulta de trasponer los elementos de la diagonal principal de la matriz dada y cambiar de signo los elementos de la diagonal secundaria (denominada matriz cofactor traspuesta).
Como ejemplo calculemos la inversa de la matriz [D] cuyo determinante vale $\Delta_D = 73$

$$[D]^{-1} = \frac{1}{73}\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Se ha omitido multiplicar cada elemento de la matriz por 1/73 a fin de no utilizar números decimales.

Para verificar el resultado obtenido calculamos [D]$^{-1}$ x [D],

$$[D]^{-1}[D] = \frac{1}{73}\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{73}\begin{bmatrix} 4\times 7 + (-9)\times(-5) & 4\times 9 + (-9)\times 4 \\ 5\times 7 + 7\times(-5) & 5\times 9 + 7\times 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{73}\begin{bmatrix} 73 & 0 \\ 0 & 73 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como el producto de [D] multiplicada por [D] $^{-1}$ da por resultado la matriz unidad, [D] $^{-1}$ es la matriz inversa de [D]
Sea [Z] una matriz cuadrada de orden 3.Su inversa [Z]$^{-1}$ viene dada por :

$$[Z]^{-1} = \frac{1}{\Delta_Z}\begin{bmatrix} z_{2,2}\ z_{3,3} - z_{2,3}\ z_{3,2} & z_{1,3}\ z_{3,2} - z_{1,2}\ z_{3,3} & z_{1,2}\ z_{2,3} - z_{1,3}\ z_{2,2} \\ z_{2,3}\ z_{3,1} - z_{2,1}\ z_{3,3} & z_{1,1}\ z_{3,3} - z_{1,3}\ z_{3,1} & z_{1,3}\ z_{2,1} - z_{1,1}\ z_{2,3} \\ z_{2,1}\ z_{3,2} - z_{2,2}\ z_{3,1} & z_{1,2}\ z_{3,1} - z_{1,1}\ z_{3,2} & z_{1,1}\ z_{2,2} - z_{1,2}\ z_{2,1} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_Z = z_{1,1}\left(z_{2,2}\ z_{3,3} - z_{2,3}\ z_{3,2}\right) - z_{1,2}\left(z_{2,1}\ z_{3,3} - z_{2,3}\ z_{3,1}\right) + z_{1,3}\left(z_{2,1}\ z_{3,2} - z_{2,2}\ z_{3,1}\right)$$

La matriz multiplicada por la inversa del determinante de [Z] se denomina matriz cofactor traspuesta de la matriz [Z]

Como ejemplo se calcula la inversa de la matriz [E] cuyo determinante vale $\Delta_E = 369$

$$[E]^{-1} = \frac{1}{369}\begin{bmatrix} 5\times5-(-2)\times7 & 3\times7-(-2)\times5 & (-2)\times(-2)-3\times5 \\ (-2)\times(-1)-4\times5 & 6\times5-3\times(-1) & 3\times4-6\times(-2) \\ 4\times7-5\times(-1) & (-2)\times(-1)-6\times7 & 6\times5-(-2)\times4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{369}\begin{bmatrix} 25+14 & 21+10 & 4-15 \\ 2-20 & 30+3 & 12+12 \\ 28+5 & 2-42 & 30+8 \end{bmatrix} = \frac{1}{369}\begin{bmatrix} 39 & 31 & -11 \\ -18 & 33 & 24 \\ 33 & -40 & 38 \end{bmatrix}$$

Para verificar que [E] $^{-1}$ es la inversa de la matriz [E] se efectúa el siguiente cálculo :

$$[E][E]^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 39 & 31 & -11 \\ -18 & 33 & 24 \\ 33 & -40 & 38 \end{bmatrix}\frac{1}{369} =$$

$$= \frac{1}{369}\begin{bmatrix} 6\times39+(-2)\times(-18)+3\times33 & 6\times31+(-2)\times33+3\times(-40) & 6\times(-11)+(-2)\times24+3\times38 \\ 4\times39+5\times(-18)+(-2)\times33 & 4\times31+5\times33+(-2)\times(-40) & 4\times(-11)+5\times24+(-2)\times38 \\ (-1)\times39+7\times(-18)+5\times33 & (-1)\times31+7\times33+5\times(-40) & (-1)\times(-11)+7\times24+5\times38 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{369}\begin{bmatrix} 234+36+99 & 186-66-120 & -66-48+114 \\ 156-90-66 & 124+165+80 & -44+120-76 \\ -39-126+165 & -31+231-200 & 11+168+190 \end{bmatrix} = \frac{1}{369}\begin{bmatrix} 369 & 0 & 0 \\ 0 & 369 & 0 \\ 0 & 0 & 369 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como se obtuvo la matriz unidad se verifica que [Z] $^{-1}$ es la matriz inversa de [Z]