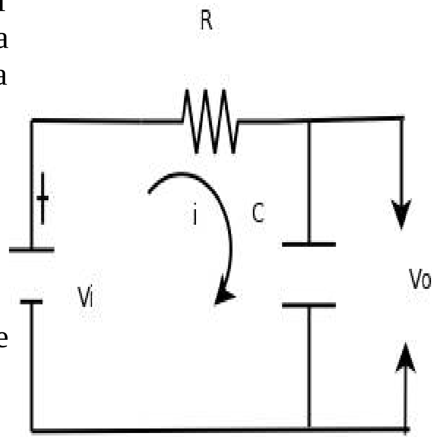
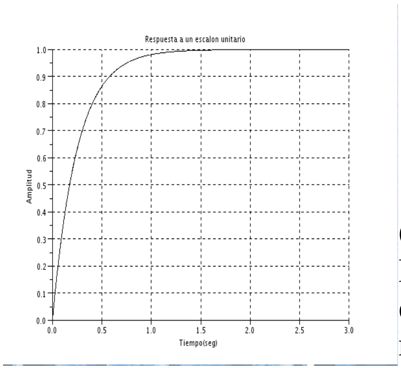
# Respuesta del sistema

Cuando se aplica una entrada, o un cambio en la entrada de un sistema de control, o en algún elemento del mismo, el sistema produce una *respuesta*.
Esta respuesta está formada por dos partes: una ***respuesta transitoria***, que desaparece luego de un breve intervalo, y una ***respuesta en estado estable***, que es la que permanece en el tiempo después que desaparecen todos los transitorios.
Analizamos la respuesta para sistemas de primer orden. Por ejemplo, el circuito RC de la figura, tiene una entrada Vi, y una salida Vo. De esta forma, al aplicar una tensión Vi, produce una salida Vo, que responde al siguiente modelo matemático:




$dVc/dt=1/R*C*(Vi-Vc)$ , siendo Vc = Vo (la salida).

R es la resistencia, y C la capacitancia.
Entoces:
$Vc=Vi*(1-e^{(t/R*C)})$ , y podemos observar este comportamiento:




Observamos que la salida representada tiende a un valor estable luego de cierto período de tiempo, esa es la respuesta en estado estable, mientras que la curva que aparece a la izquierda es una respuesta transitoria, que desaparece transcurrido cierto tiempo.

## *Análisis*

Analizamos un sistema de primer orden genérico; todos los sistema de primer orden tienen la misma forma matemática y comportamiento, sea un modelo eléctrico, térmico, mecánico, económico, etc.
La ecuación diferencial de primer orden se escribe como:

$$a_1 * d\,\Theta_0/d_t + a_0 * \Theta_0 = b_0 * \Theta_i \quad (1)$$

$\Theta_o\, es\, la\, salida$
$\Theta_i\, es\, la\, entrada$ $\quad a_{1,}\, a_0\, , b_0\, son\, coeficientes\, constantes$

Como la salida del sistema es la suma de la respuesta transitoria y de la respuesta en estado estable, se sustituye:

$\Theta_o = u + v$ donde ***u*** es la respuesta transitoria, y ***v*** la forzada o estable.

$a_1 * d(u+v)/dt + a_0 * (u+v) = b_0 * \Theta_i$

Reordenando términos queda:
$(a_1 * du/dt + a_0 * u) + (a_1 * dv/dt + a_0 * v) = b_0 * \Theta_i$

Así, la respuesta forzada es:

$(a_1 * dv/dt + a_0 * v) = b_0 * \Theta_i$ (2), porque depende del sistema y de la entrada.

y la respuesta transitoria es:

$a_1 * du/dt + a_0 * u = 0$ (3), esta respuesta solo depende del sistema, es libre y no depende de la entrada.
La respuesta total del sistema es: $\Theta_o = u + v$
Para resolver este sistema, se toma primero la (3), para obtener u, puesto que no es necesario tener una entrada. Para hacerlo se prueba una solución:
$u = A * e^{(s*t)}$ , así, la $du/dt = A * s * e^{(s*t)}$ , reemplazando en (3):
$a_1 * A * s * e^{(s*t)} + a_0 * A * e^{(s*t)} = 0$ , dónde el término $A * e^{(s*t)}$ se cancela, y se obtiene:
$a_1 * s + a_0 = 0$

$$s = a_0 / a_1$$
$$u = A * e^{-(a_0 * t / a_1)} \quad \text{solución de (3)}$$

Para la solución de (2)
$$(a_1 * dv/dt + a_0 * v) = b_0 * \Theta_i$$
También se resuelve probando una solución, pero en este caso, dependerá de la forma de la señal de entrada. Lo hacemos con una entrada de tipo escalón, es decir, para todo $t > 0, v = k(constante)$
Así, $dv/dt = 0$ , con v constante, y la ecuación queda:
$a_0 * v = b_0 * \Theta_i$ $v = b_0 * \Theta_i / a_0$

Así, la solución completa de $\Theta_o = u + v$

$$\Theta_0 = A * e^{-(a_0 * t / a_1)} + (b_0 / a_0) * \Theta_i$$

Por la condición inicial o de frontera, cuando $\Theta_o = 0; t = 0$ queda:

$0 = A + (b_0 / a_0) * \Theta_i$ y $A = -(b_0 / a_0) * \Theta_i$ y se puede expresar la ecuación de esta forma:

$$\Theta_0 = -(b_0 / a_0) * \Theta_i * e^{-(a_0 * t / a_1)} + b_0 / a_0 * \Theta_i$$

$$\Theta_0 = (b_0 / a_0) * \Theta_i * (1 - e^{-(a_0 * t / a_1)}) \quad (4)$$

Con esto, la forma de encarar un problema es la siguiente. Por ejemplo si volvemos al circuito eléctrico RC, la ecuación diferencial del modelo es:
$R * C * dv_c / d_t + v_c = V$ , que observamos que es de primer orden, y tiene la forma de

$a_1 * d\Theta_0 + a_0 * \Theta_0 = b_0 * \Theta_i$ (1), entonces, identificamos los coeficientes como:
$a_1 = R*C\,;\, a_0 = 1\,;\, b_0 = 1$ , quedando la ecuación (4) como:

$$v_c = V*\left(1 - e^{-(t/R*C)}\right)$$

Expresión que representa la salida Vc, en el dominio del tiempo.

Función de transferencia y constante de tiempo

Tomando la ecuación (4), $\Theta_0 = (b_0/a_0)*\Theta_i*\left(1 - e^{-(a_0*t/a_1)}\right)$ , analizamos su comportamiento para $t=0$ (instante inicial), para $t \to \infty$ , y para instantes intermedios.
Si $t=0$ entonces, $\Theta_0 = 0$ , porque el término exponencial tiende a 1.
Si $t \to \infty$ , el término exponencial tiende a 0, y obtenemos esta expresión:
$\Theta_0 = (b_0/a_0)*\Theta_i$ , pero la relación entre la salida y la entrada $\Theta_0/\Theta_i$ es la función de transferencia del sistema, que en este caso llamamos ***función de transferencia en estado estable*** $(G_{ss})$ definida como:

$$G_{ss} = \Theta_0/\Theta_i = b_0/a_0$$

Con esto, ahora la ecuación (4) se puede expresar como:

$$\Theta_0 = G_{ss}*\Theta_i*\left(1 - e^{-(a_0*t/a_1)}\right) \quad (5)$$

Hacemos ahora el siguiente análisis sobre el exponente de e. Cuando el tiempo $t = a_1/a_0$ , entonces $e^{-t} = e^{-1} = 0{,}37$ y en la ecuación (5) es:

$$\Theta_0 = G_{ss}*\Theta_i*(1 - 0{,}37) = 0{,}63*G_{ss}*\Theta_i \quad (6)$$

| Tiempo $t$ | $\theta_o/\theta_i$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| $1\tau$ | $0.63G_{SS}$ |
| $2\tau$ | $0.86G_{SS}$ |
| $3\tau$ | $0.95G_{SS}$ |
| $4\tau$ | $0.98G_{SS}$ |
| $5\tau$ | $0.99G_{SS}$ |
| $\infty$ | $G_{SS}$ |

Su significado es que la salida del sistema ha alcanzado el 63% de su valor en estado estable. El tiempo que tarda en alcanzar este valor, se denomina ***constante de tiempo*** $\tau$ .
En términos de la constante de tiempo, la ecuación (5) se puede escribir como:

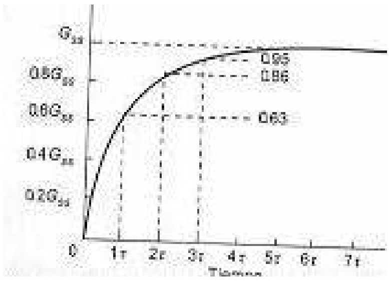
$\Theta_0 = G_{ss}*\Theta_i*\left(1 - e^{-(t/\tau)}\right)$ , y además tenemos las relaciones siguientes:
$G_{ss} = b_0/a_0\,;\, \tau = a_1/a_0$ , y con esto podemos expresar la ecuación diferencial para los sistemas de primer orden como sigue:

$a_1 * d\,\Theta_0/d_t + a_0 * \Theta_0 = b_0 * \Theta_i$ , dividiendo por $a_0$ queda

$(a_1/a_0)*d\,\Theta_0/d_t + \Theta_0 = (b_0/a_0)*\Theta_i$ , y reemplazando:

$$\tau * d\,\Theta_0/d_t + \Theta_0 = G_{ss}*\Theta_i$$

La salida del sistema tiene esta forma:


0.4G
0.2G
0
1τ
2τ
3τ
4τ
5τ
6τ
7τ