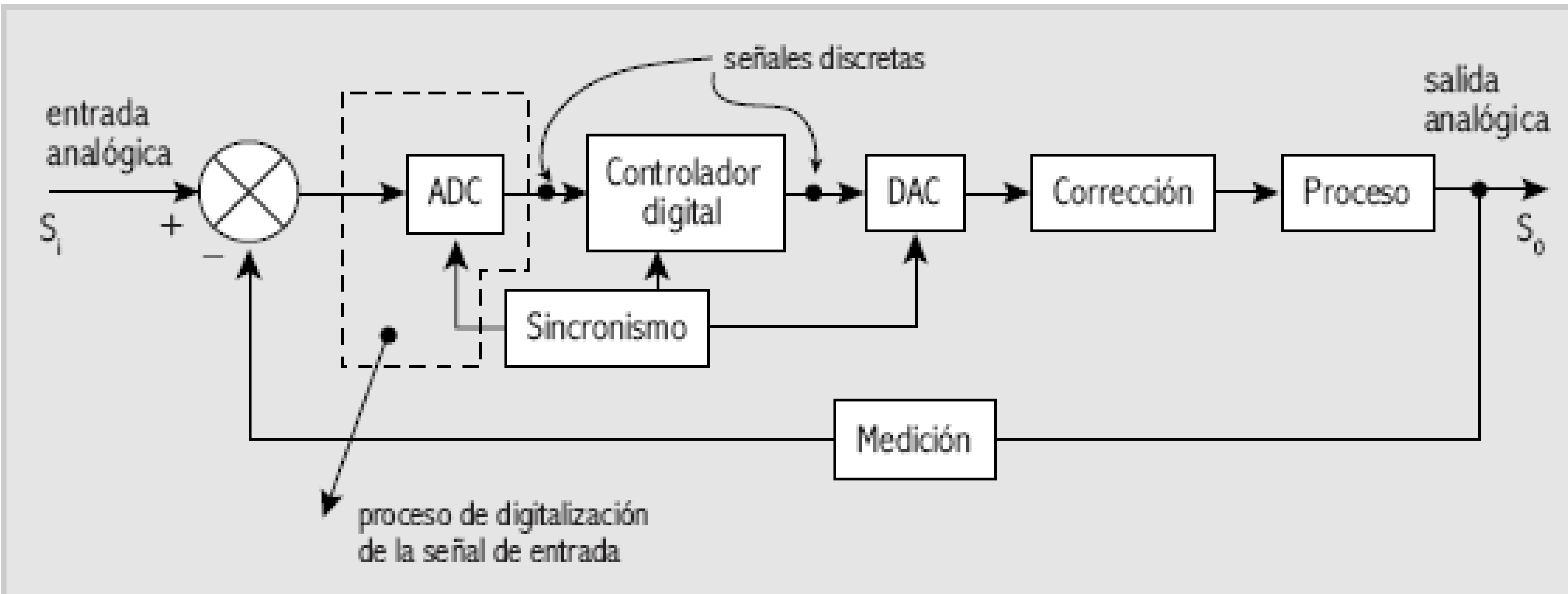
Transformada Z aplicada a los sistemas de control

Capitulo 8

Libro: Teoría de Control para Informáticos

Sistema de datos muestreado a partir de un controlador digital



Objetivo de la aplicación de la transformada Z

El objeto de aplicación de las transformadas Z, entonces, está centrado en los denominados sistemas de control en tiempo discreto: Aquellos en los cuales una o más variables pueden cambiar su magnitud *sólo* en valores discretos de tiempo.

Cada uno de dichos valores se corresponde con los instantes de muestreo determinados por el período T, que pertenece a la frecuencia de reloj del sistema.

La expresión de una señal muestreada es:

$$f^*(t) = f[0]\ \delta(t) + f[1]\ \delta(t-1T) + f[2]\ \delta(t-2T) + \ldots$$

$$+ f[k]\ \delta(t-kT)$$

donde:

f^* función digitalizada

$-\delta(t)$: impulso unitario en t.

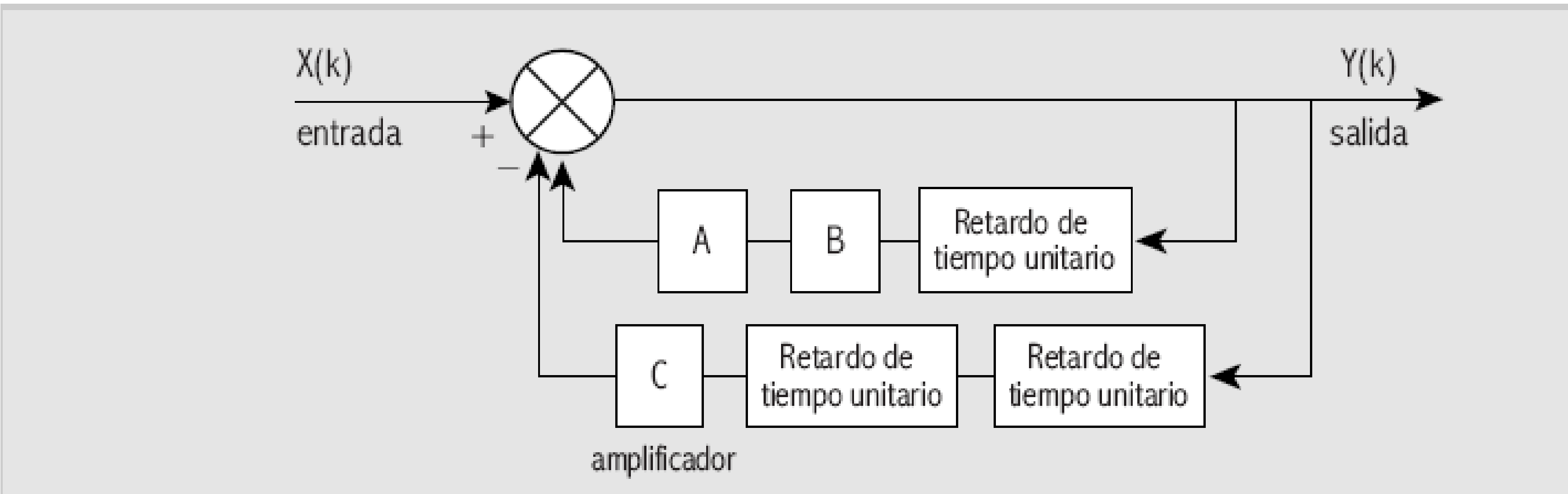
T: período de muestreo.

Clasificacion de los sistemas de control discretos

- **Sistema causal:** Aquellos en los cuales su salida, en cualquier instante de tiempo, dependerá de los valores que adoptan las entradas en el instante "actual" (tn) y en el instante inmediatamente anterior ($t_n - 1$).
  Responde, en definitiva, a los sistemas del tipo secuencial.
  A modo de ejemplo, podemos citar los flip-flop pertenecientes al campo de los circuitos digitales.
  La expresión de este tipo de sistemas es:
  $$x(t) = u(t) + u(t-1)$$
- **Sistema estrictamente causal:** Aquellos en los cuales la salida sólo depende de los valores de las entradas en los instantes pasados (inmediatos o no).
  La expresión de este tipo de sistemas es:
  $$x(t) = u(t-1)$$

Este tipo de sistema está incluido en los denominados sistemas no anticipativos, ya que las salidas de los mismos no "anticipa" valores próximos ($t_n + 1$) que han de adoptar las entradas.

Hallar la ecuacion de "diferencias" correspondiente al siguiente diagrama



Solución: $Y(k) = X(k) - A \cdot B \cdot y\ (k-1) - c\ y\ (k-2)$

La transformada Z

$$Z(f(k)) = F(z) = f(0) + f(1)\, Z^{-1} + f(2)\, Z^{-2} + \ldots + f(k)\, Z^{-k}$$

F(Z) se denomina la transformada Z de la secuencia de impulsos, donde cada periodo de retardo da como resultado un impulso multiplicado por Z^{-1}

Propiedades basicas

El principio de linealidad establece que:

- La **transformada Z** de dos secuencias equivale a la suma de la correspondiente **transformada Z** de cada una de las secuencias por separado.

Si $f\,(kT)$ y $g\,(kT)$ tienen **transformada Z**, y α y β son escalares y considerando a $F(z)$ y $G(z)$ como las respectivas transformadas Z de $f\,(kT)$ y $g\,(kT)$, tenemos:

$$y(kT) = \alpha\, f(kT) + \beta g(kT)$$

donde T es el período de muestreo.

La transformada Z resulta:

$$z(y(kT)) = \alpha\, f(z) + \beta g(z)$$

La **transformada Z** correspondiente a una secuencia y multiplicada por una constante, equivale a la **transformada Z** del producto de dicha secuencia y la constante.

$$z\,[a\, f(k)] = a \cdot z\,[f(k)]$$

Propiedades basicas

Teoremas de desplazamiento

Estos teoremas proponen conceptualizar a **Z** como si fuese un operador de desplazamiento en el tiempo, lo que origina el análisis de las secuencias adelantadas o retrasadas en el tiempo de un intervalo de muestreo.

Los teoremas de desplazamiento demuestran que se puede considerar que z es un operador de corrimiento del tiempo. En este caso la multiplicación por **Z** equivale a un adelanto en el tiempo de un intervalo T de muestreo. La division por z quivale a un retardo T de un intervalo de muestreo.

Así, la multiplicación por **Z** equivale a un adelanto mientras que la división entre **Z** equivale a un retraso.

Considerando:

- *f[k]* como una secuencia determinada,
- *F[z]* como la transformada de la secuencia anterior,

la **transformada Z** de la secuencia adelantada por *n* intervalos de muestreo es:

$$y(z) = z^{-n} f(z) + \sum_{i=0}^{n-1} f(iT - nT)\, z^{-i}$$

En cambio, la **transformada Z** retrasada en n intervalos de muestreo será:

$$y(z) = z^{n} f(z) - \sum_{i=0}^{n-1} f(iT)\, z^{n-i}$$

Propiedades basicas

Teorema de traslación real

Siendo n un entero no negativo (positivo o cero), entonces:

$$z(\alpha\, f(kT) + \beta g(kT)) = \alpha\, z(f(kT) + \beta z(g(kT)))$$

y

$$z(\alpha\, f(kT) + \beta g(kT)) = \alpha F(z) + \beta G(z)$$

Teorema de traslación compleja.

Si $x\,(t)$ tiene la transformada $Z\,X(\,z\,)$, entonces la **transformada Z** del término:

$$z(\alpha f(k)) = \alpha z(f(k))$$

viene dada por:

$$z(a^{kT}\, x(kT)) = x(a^{-1}.z)$$

Teorema del valor inicial

Si $x\,(t)$ tiene por **transformada Z** a $X\,(\,z\,)$ y si el $\lim_{z\to\infty} X(z)$ existe, entonces el valor inicial $x\,(0)$ de $x(t)$ ó $x(k)$ está dado por:

$$z(x(t - aT)) = z^{-n}\, X(z)$$

Es importante considerar que el teorema del valor inicial es una herramienta que nos permite verificar la incidencia de posibles errores en el cálculo de la **transformada Z**. Dado que el valor correspondiente a $x\,(0)$ se suele conocer, el comprobar su valor mediante la aplicación del límite ayuda a descubrir posibles errores en la aplicación de la **transformada Z**.

Propiedades basicas

Teorema del valor final

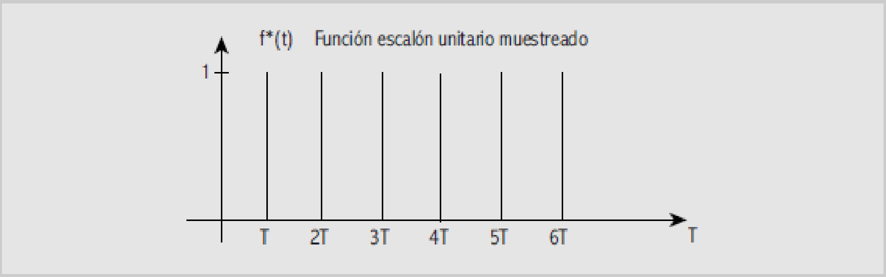
Suponemos que $x(kT)$, siendo T el periodo de muestreo, tiene la **transformada Z** $X(z)$, con $x(kT) = 0$ para valores negativos de k, y que todos los polos de $X(z)$ están dentro del círculo unitario, con la posible excepción de un sólo polo en $z = 1$. Ésta es la condición para la estabilidad de $X(z)$, es decir, la condición para que $x(kT)$ $(k = 0, 1, 2...)$ permanezca finita. Entonces, el valor final de $x(kT)$ será:

$$\lim_{k \to \infty} X(kT) = \lim_{z \to 1} (1 - Z^{-1})\, X(z)$$

El teorema del valor final es muy útil para determinar el comportamiento de $x(k)$ a medida que k tiende a infinito, a partir de su transformada $Z\, X(z)$.

Transformada Z de Funciones especiales

Transformada Z de la función escalón unitario



2 Transformada Z de la función rampa

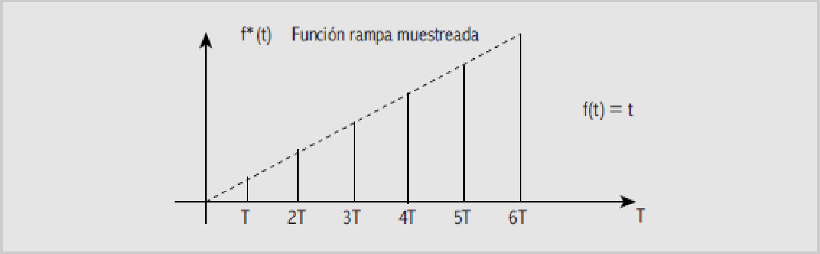


Fig. 8-6. Función rampa muestreada

Aplicando la ecuación 8-3 tenemos:

$F(z) = 0 + Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + 4Tz^{-4} + \ldots + kTz^{-K}$

Multiplicando por z ambos términos y dividiendo por T tenemos:

$\frac{zF(t)}{T} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + \ldots + (k+1) \cdot z^{-K}$

recordando que la serie $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ la podemos representar mediante la expresión binomial:

$\frac{1}{(1-x)^2}$ y siendo z > 1 tenemos:

$\frac{zF(z)}{T} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{z}\right)^2}$ de donde $F(z) = \frac{T \cdot z}{(z-1)^2}$

Transformada Z inversa

Para efectuar el cálculo de la transformada inversa existen diferentes métodos de aplicación. Estos métodos analíticos son:

- Método de expansión en fracciones parciales.
- Método computacional.
- Método de la división directa.
- Método de la integral de inversión.

La **transformada Z** inversa de $X(z)$ da como resultado la correspondiente secuencia de tiempo $x(kT)$. En este punto es importante tener en cuenta que a partir de la aplicación de esta transformada inversa sólo se obtiene la secuencia temporal de valores correspondientes a los instantes de muestreo del sistema.

La secuencia $x(kT)$ es única; sin embargo no es la única $x(t)$ debido a que la secuencia obtenida no hace referencia alguna a los valores correspondientes a los instantes de tiempo que no han formado parte de los períodos de muestreo de la señal. Esto significa que existen infinitas $x(t)$ que originan secuencia $x(kT)$.

Por tal motivo, la **transformada Z** inversa sólo provee valores exactos de la $x(t)$ en los instantes de muestreo $t=kT$. La expresión correspondiente a la transformada inversa es:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(z)\}$$

Tabla de transformada Z y de Laplace

Dominio (tiempo)	Dominio (Laplace)	Dominio z $\beta = e^{-aT} sen\omega T$
$\delta(t)$ Impulso	1	1
$\mu(t)$ Escalón	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
t^2	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
t^{m-1} $m = 1,2,...$	$\frac{(m-1)!}{s^m}$	$\lim_{b \to 0}\left[(-1)^{m-1}\frac{\delta^{m-1}\frac{z}{z-e^{-bT}}}{\delta b^{m-1}}\right]$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{a-b}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{a-b}\left[\frac{z}{z-e^{-bT}}-\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]$
$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$	$\frac{1}{a}\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{1}{a}(t-\frac{1-e^{at}}{a})$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{a}\left[\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{(1-e^{-aT})z}{a(z-1)(z-e^{-aT})}\right]$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$sen\, at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{z\, sen\, aT}{z^2-2z(\cos at)+1}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{z(z-\cos aT)}{z^2-2z(\cos aT)+1}$

Tabla de transformada Z y de Laplace (cont.)

$e^{-at}\,sen\,bt$	$\dfrac{b}{(s+a)^2+b^2}$	$\dfrac{z e^{-aT}\,sen\,bT}{z^2-2ze^{-aT}(\cos bT)+e^{-2aT}}$
$e^{-at}\cos bt$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$\dfrac{z^2-ze^{-aT}\cos bT}{z^2-2ze^{-aT}(\cos bT)+e^{-2aT}}$
$e^{-at}\cos(at-\delta)$	$\dfrac{\cos\theta(s+a)+\omega\,sen\theta}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{z\cos\theta(z-a)-z\beta\,sen\theta}{(z-a)^2+\beta^2}$ donde $\alpha = e^{-aT}\cos\omega T$
a^k	...	$\dfrac{z}{z-a}$
ka^{k-1}	...	$\dfrac{z}{(z-a)^2}$
$\dfrac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}$	...	$\dfrac{z}{(z-a)^3}$
$\dfrac{1}{(M-1)!}\left[\prod_{1=0}^{M-2}(k-i)\right]a^{k-M+1}$	...	$\dfrac{z}{(z-a)^M}$

Equivalencias entre señales digitalizadas y el dominio Z

Señal en el dominio del tiempo	*Señal en el Dominio z*
$\{\delta_k\} = \{1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ldots\}$	$\Delta(z) = 1$
$\{u_k\} = \{1\} = \{1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ldots\}$	$U(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}}$
$\{x_k\} = \{a^k\} = \{1 \ \ a \ \ a^2 \ \ a^3 \ldots\}$	$X(z) = \dfrac{1}{1 - a.z^{-1}}$
$\{r_k\} = \{k\} = \{0 \ \ 1 \ \ 2 \ \ 3 \ldots\}$	$R(z) = \dfrac{z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$
$\{x_k\} = \{k + 1\}$	$X(z) = \dfrac{1}{(1 - z^{-1})^2}$
$\{x_k\} = \{a^k \cdot (k + 1)\}$	$X(z) = \dfrac{1}{(1 - a.z^{-1})^2}$
$\{x_k\} = \{(k + 1) \cdot (k + 2)\}$	$X(z) = \dfrac{2}{(1 - z^{-1})^{-3}}$
$\{x_k\} = \{a^k \cdot (k + 1) \cdot (k + 2)\}$	$X(z) = \dfrac{2}{(1 - a.z^{-1})^3}$
$\{x_k\} = \{(k + 1) \cdot (k + 2) \cdot \ldots \cdot (k + n)\}$	$X(z) = \dfrac{n!}{(1 - z^{-1})^{n+1}}$
$\{x_k\} = \{a^k \cdot (k + 1) \cdot (k + 2) \cdot \ldots \cdot (k + n)\}$	$X(z) = \dfrac{n!}{(1 - a \cdot z^{-1})^{n+1}}$

Aplicación de la Transformada Z a los sistemas de control

Ejemplo 1: Dado un sistema de control de lazo cerrado cuya función transferencia $T(z)$ es:

$$T(z) = \frac{z}{(z+2)\,(z+1)}$$

hallar la respuesta del sistema cuando se aplica a la entrada del mismo una señal impulso unitario $z\,[\delta(t)] = 1$ (función impulso unitario).

$$Y(z) = T(z)\,.\,X\,(z) = \frac{z}{(z+2)\,(z+1)}$$

Desarrollando en fracciones parciales obtenemos:

$$Y(k) = z^{-1} - 3z^{-2} + 7z^{-3} - 15z^{-4} + \ldots$$

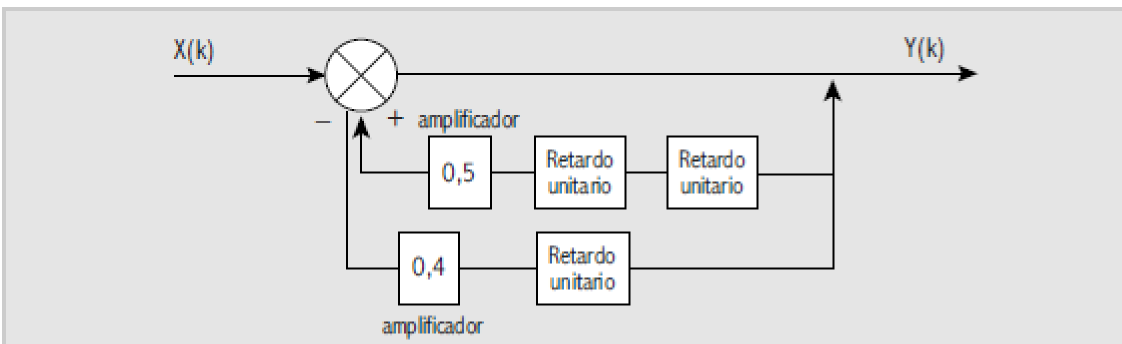
Si ahora hallamos la transformada inversa de Z tenemos:

$$Y(k) = 0;\ 1;\ -3;\ 7;\ -15;\ \ldots$$

que constituye la secuencia discreta en función del tiempo de la respuesta del sistema cuando se alimenta con la función impulso unitario.

Aplicación de la Transformada Z a los sistemas de control

Ejemplo 2: Dado un sistema que tiene un diagrama de bloques como el indicado en la figura 8.7 determinar la respuesta del mismo cuando a su entrada se aplica una señal impulso unitario:



Aplicación de la Transformada Z a los sistemas de control

La ecuación de diferencias del diagrama en bloques de la figura 8.7 es:

$Y(k) = x(k) + 0{,}5\, y\,(k-2) - 0{,}4\, y(k-1)$

aplicando la transformada Z (propiedad de desplazamiento)

$Y(z) = x(z) + 0{,}5\, z^{-2}\ \ y(z) - 0{,}4\, z^{-1}\, y(z)$

Reordenando:

$Y(z) - 0{,}5\, z^{-2}\, y(t) + 0{,}4\, z^{-1}\, y(z) = x(z)$

$Y(t)\ (1 - 0{,}5\, z^{-2} + 0{,}4\, z^{-1}) = x(z)$

la función transferencia será:

$$T(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{1}{1 + 0{,}4\, z^{-1} - 0{,}5\, z^{-2}}$$

pero el impulso unitario (δt) tiene $Z(\delta(t) = 1$ en consecuencia:

$$y(z) = \frac{1}{1 + 0{,}4\, z^{-1} - 0{,}5\, z^{-2}}$$

una vez realizada la división se deberá efectuar la transformada Z inver
secuencia en tiempo discreto.