



4-1.1.- Introducción a las redes eléctricas

4-1.1.1.- Estructura de una red y criterios de solución

4-1.1.2.- Clasificación de redes

4-1.1.2.1.- Conexión serie

4-1.1.2.2.- Conexión paralelo

4-1.1.2.3.- Conexión estrella

4-1.1.2.4.- Conexión triángulo

4-1.1.2.5.- Transformaciones de Kenelly

4-2.1.- Resolución de una red simple por el método de síntesis

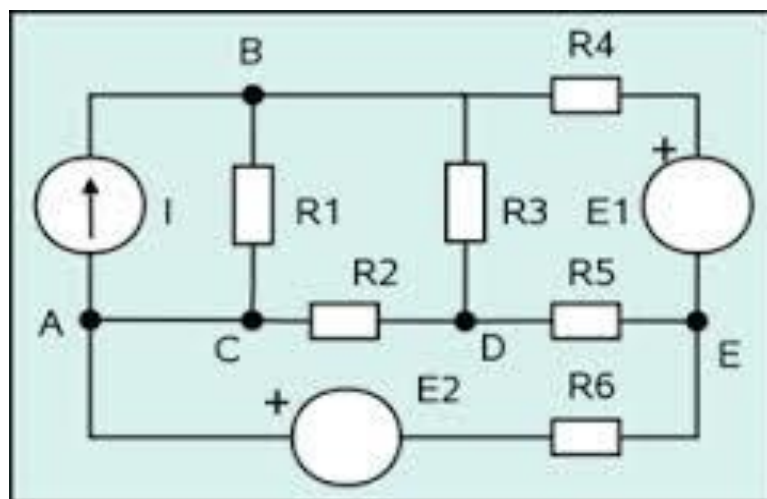
4-3.1.- Corrección del factor de potencia

4-1.1.- Introducción a las redes eléctricas

4-1.1.1.- Estructura de una red y criterios de solución

En general, todo circuito eléctrico que posee tres o más nodos configura una **red eléctrica**. Se define como **nodo** en un circuito eléctrico a cualquier punto del mismo donde convergen tres o más intensidades de corriente eléctrica y que verifica la correspondiente ley de Kirchhoff.

A modo de ejemplo, consideremos el siguiente circuito eléctrico, alimentado con fuentes de energía que proporcionan señales constantes de tensión e intensidad eléctrica:



El circuito posee cuatro (4) nodos identificados con las letras A (C), B, D y E. Los puntos identificados con las letras A y C configuran un único nodo puesto que la línea de trazo que los une no tiene **valor eléctrico alguno**; corresponderá entonces optar por una única letra de identificación (A ó C). En el caso del nodo B se ha procedido correctamente pues el punto de conexión de R_3 y R_4 pertenece al nodo B (la línea que une dicho punto con el nodo B carece de valor eléctrico alguno). La línea que une un par de nodos cualesquiera se denomina **rama** *sí y sólo sí* posee valor eléctrico o, en otras palabras, hay elementos de circuito eléctrico asociados a dicha línea.



El circuito dado como ejemplo posee siete (7) ramas a saber :

- .-rama # 1 : entre los nodos A (C) y B (fuente de corriente I)
- .-rama # 2 : entre los nodos B y A (C) (resistencia R_1)
- .-rama # 3 : entre los nodos B y D (resistencia R_3)
- .-rama # 4 : entre los nodos B y E (fuente de tensión E_1 y resistencia R_4)
- .-rama # 5 : entre los nodos A (C) y D (resistencia R_2)
- .-rama # 6 : entre los nodos A (C) y E (fuente de tensión E_2 y resistencia R_6)
- .-rama # 7 : entre los nodos D y E (resistencia R_5)

Las ramas que contienen fuentes de energía de cualquier tipo se denominan **ramas activas** , mientras que las ramas que sólo contienen elementos que no producen energía reciben el nombre de **ramas pasivas**. En el circuito dado como ejemplo las ramas # 1, # 4 y # 6 son ramas activas (contienen fuentes de energía) y las ramas # 2, # 3 # 5 y # 7 son ramas pasivas.

Cuando existe más de una rama entre un par cualquiera de nodos de una red eléctrica se dice que existe una **redundancia** porque para unir un par de nodos basta con una sola rama. En el circuito dado como ejemplo las ramas # 1 y # 2 son redundantes (el conjunto de la fuente de corriente I y la resistencia R_1 puede considerarse *una fuente real de corriente*). Aplicando la ley de nodos de Kirchhoff al nodo B, obtenemos :

$$I = I_2 + I_3 + I_4 \quad \text{donde haciendo } I_s = I_3 + I_4 \text{ podemos escribir : } I = I_2 + I_s$$

teniendo en cuenta que :

$$I_2 = \frac{U_{A(C),B}}{R_1}$$

resulta :

$$I = \frac{U_{A(C),B}}{R_1} + I_s \quad \therefore \quad I R_1 = U_{A(C),B} + I_s R_1 \quad \therefore \quad E_3 - I_s R_1 = U_{A(C),B}$$

ecuación que demuestra que las ramas # 1 y # 2 pueden ser reemplazadas por una *rama equivalente* conteniendo una fuente de tensión $E_3 = I R_1$ conectada *en serie* con la resistencia R_1 (resulta así que la fuente real de corriente se reemplaza por una fuente real de tensión I equivalente).

Al suprimir la redundancia entre los nodos A (C) y B, el número de ramas del circuito queda reducido a seis (6), siendo tres de ellas activas y tres pasivas. Las ramas redundantes # 1 y # 2 son reemplazadas por la rama # 1 e. Cuando las ramas redundantes son todas pasivas se las reemplaza por una rama equivalente a la *conexión en paralelo* de aquéllas.

Obviando los elementos de circuito (fuente, impedancias, admitancias) la red puede ser vista como una estructura compuesta sólo por nodos y ramas, denominada **gráfico de la red**.

El número total de ramas de una red se simboliza N_R y el número total de nodos, N_N . El conjunto de ramas necesario para unir todos los nodos de una dada red, sin formar ningún lazo cerrado , recibe el nombre de **árbol**. El número de ramas que forma un árbol se simboliza N_A y viene dado por :

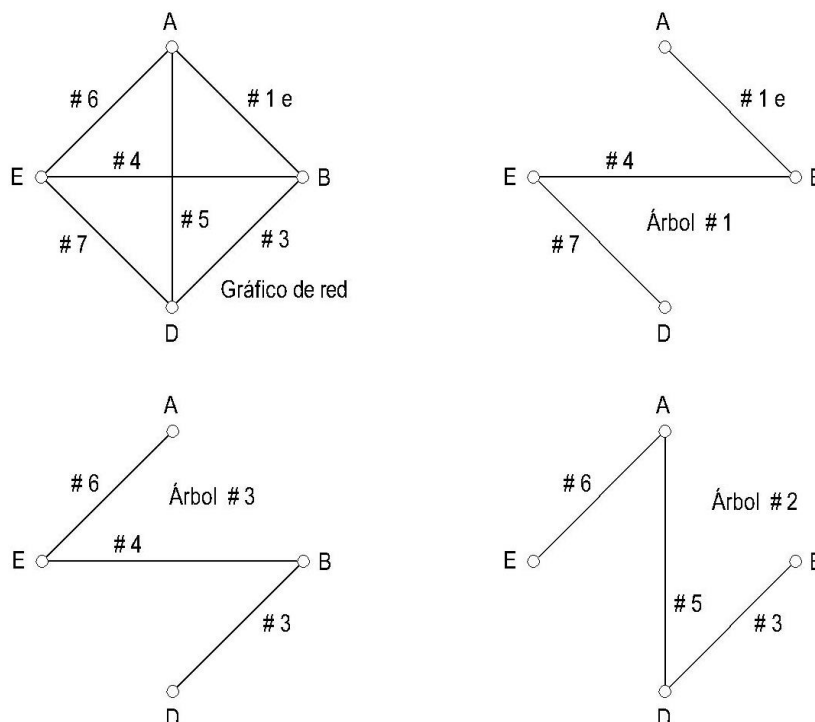
$$N_A = N_N - 1$$

debido a que para unir el primer par de nodos se requiere una rama y sólo una rama *por cada uno de los nodos restantes*.



El número de ramas N_A de un árbol de una dada red es siempre menor al número total de ramas N_R de la red y, por tal motivo existen diferentes árboles pertenecientes a la misma red. En otras palabras, cualquier rama de la red puede pertenecer a un dado árbol de ésta.

Para el circuito de nuestro ejemplo : $N_R = 4$ por lo que $N_A = 3$. En la siguiente figura pueden observarse algunos de los diferentes árboles que pueden obtenerse en éste caso particular :



El conjunto de ramas de la red que se elimina para formar un árbol recibe el nombre de **conjunto de ramas de enlace**. El número de ramas de enlace se simboliza N_E y resulta igual a :

$$N_E = N_R - N_A = N_R - N_N + 1$$

Considerando el árbol # 3, las ramas # 3, # 4 y # 6 del circuito dado como ejemplo pertenecen a dicho árbol, mientras que las ramas # 1 e, # 5 y # 7 forman el conjunto de ramas de enlace.

Si en el circuito dado como ejemplo se abren las ramas # 1 e, # 5 y # 7, las intensidades de corriente en las restantes ramas (pertenecientes al árbol # 3) resultarán **nulas** porque no queda **ningún lazo cerrado** en el circuito. En consecuencia, se puede afirmar que las intensidades de corriente en las ramas # 3, # 4 y # 6 dependen de las intensidades de corriente en las ramas # 1 e, # 5 y # 7 (independientemente de si dichas ramas son activas o pasivas). En general puede enunciarse :

Dado un árbol cualquiera perteneciente a una red eléctrica, las intensidades de corriente en cada una de las ramas que pertenecen a dicho árbol, dependerán de las intensidades de corriente de las ramas de enlace de la red correspondientes al árbol seleccionado.

Volviendo al circuito dado como ejemplo y considerando nuevamente el árbol # 3 formado por las ramas # 3, # 4 y # 6, si cada una de ellas se reemplaza por **un cortocircuito ideal** dejará de circular corriente en **todas las ramas del circuito** porque las diferencias de potencial entre los pares de nodos A (C) – E , E – B y B – D serán **nulas**.



En consecuencia, se puede afirmar que las intensidades de corriente en todas las ramas del circuito dependen del potencial correspondiente a cada uno de los nodos pertenecientes al árbol considerado. En general, puede enunciarse :

Dado un árbol cualquiera perteneciente a una red eléctrica, las intensidades de corriente en cada una de las ramas que pertenecen a la red, dependerán del potencial de cada uno de los nodos correspondientes al árbol seleccionado.

Para resolver completamente una red eléctrica cualquiera es necesario determinar las intensidades de corriente en cada una de sus ramas y, para ello, son aplicables dos criterios a partir de seleccionar uno entre todos los posibles árboles de la red :

- calcular las intensidades de corriente en cada una de las ramas de enlace
- calcular el potencial de cada uno de los nodos pertenecientes al árbol seleccionado

La verificación de la solución de una dada red eléctrica se realiza efectuando un **balance de potencia** que consiste en verificar que la suma de las potencias suministradas por las fuentes de energía de la red es igual a la suma de las potencias correspondientes a cada uno de los elementos pasivos. Si las fuentes suministran señales constantes (de tensión y/o intensidad de corriente) el balance de potencia es sólo de **potencia activa**. En cambio, si las fuentes entregan señales alternas senoidales, deberá realizarse además un balance de **potencia reactiva**.

4-1.1.2.- Clasificación de redes

Dado un circuito eléctrico cualquiera que posea tres o más nodos se lo puede considerar como una **red simple**, si sólo posee **una rama activa**, o como una **red múltiple** si posee **dos o más ramas activas**.

Las redes simples son sólo un caso particular de las redes eléctricas en general y para su solución son aplicables los métodos desarrollados para redes múltiples (ver Unidad 5).

Sin embargo, los circuitos eléctricos que pueden interpretarse como una red simple admiten un método de solución que consiste en separar la rama activa de las restantes ramas, resultando así una red pasiva que puede, mediante sucesivas transformaciones, reducirse a una sola rama mediante un proceso denominado **síntesis de red**.

Para poder realizar la síntesis de una red pasiva es necesario, previamente analizar las principales conexiones que pueden darse entre sus ramas :

- conexión serie
- conexión paralelo
- conexión estrella
- conexión triángulo

4-1.1.2.1.- Conexión serie

Si **n** ramas pasivas son recorridas por la *misma intensidad de corriente* alterna senoidal, se dice que están conectadas en **serie**. Denominando **a** y **b** a los terminales de inicio y final de dicha conexión serie se debe verificar que :

$$\dot{U}_{a,b} = \dot{I} \dot{Z}_1 + \dot{I} \dot{Z}_2 + \dots + \dot{I} \dot{Z}_n = \dot{I} \left(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dots + \dot{Z}_n \right) = \dot{I} \dot{Z}_s$$

donde \dot{Z}_i ; $i=1, \dots, n$, es la impedancia correspondiente a cada rama.



La impedancia $\dot{Z}_s = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dots + \dot{Z}_n = \sum_{i=1}^{i=n} \dot{Z}_i$ recibe el nombre de *impedancia equivalente serie*.

Si en lugar de considerar la impedancia de cada una de las ramas conectadas en serie se toma su admitancia, la *admitancia equivalente serie* viene dada por :

$$\dot{Y}_s = \frac{1}{\dot{Z}_s} = \frac{1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dots + \dot{Z}_n} = \frac{1}{\frac{1}{\dot{Y}_1} + \frac{1}{\dot{Y}_2} + \dots + \frac{1}{\dot{Y}_n}}$$

En el caso particular que la señal de corriente es de valor constante y que cada una de las ramas conectadas en serie sólo poseen resistencia, se obtienen las siguientes expresiones :

$$\text{resistencia equivalente serie, } R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

$$\text{conductancia equivalente serie, } G_s = \frac{1}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \dots + \frac{1}{G_n}}$$

Si la impedancia de cada una de las n ramas conectadas en serie es del mismo valor, \dot{Z} , la impedancia equivalente serie viene dada por :

$$\dot{Z}_s = n \dot{Z}$$

y la admitancia equivalente serie :

$$\dot{Y}_s = \frac{1}{n \dot{Z}} = \frac{\dot{Y}}{n}$$

En el caso de corriente constante y ramas de igual resistencia conectadas en serie, resulta :

$$R_s = n R \quad ; \quad G_s = \frac{G}{n}$$

4-1.1.2.2.- Conexión paralelo

Si n ramas pasivas están conectadas a un mismo par de nodos **a**, **b** se dice que forman una *conexión en paralelo*. La intensidad de corriente total en el nodo **a** (o en el nodo **b**) debe ser igual a la suma de las intensidades de corriente de cada una de las n ramas conectadas en paralelo de acuerdo a la ley de nodos de Kirchhoff. Si la tensión aplicada al par de nodos **a**, **b** es alterna senoidal, resulta :

$$\dot{I}_a = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots + \dot{I}_n = \dot{U}_{a,b} \dot{Y}_1 + \dot{U}_{a,b} \dot{Y}_2 + \dots + \dot{U}_{a,b} \dot{Y}_n$$

donde \dot{Y}_i ; $i = 1, \dots, n$, es la admitancia correspondiente a cada rama. Operando se obtiene :



$$\dot{I}_a = \dot{U}_{a,b} \left(\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dots + \dot{Y}_n \right) = \dot{U}_{a,b} \dot{Y}_P$$

La admitancia $\dot{Y}_P = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dots + \dot{Y}_n = \sum_{i=1}^{i=n} \dot{Y}_i$ recibe el nombre de *admitancia equivalente paralelo*.

Si en lugar de considerar la admitancia de cada una de las ramas conectadas en paralelo se toma su impedancia, la *impedancia equivalente paralelo* viene dada por :

$$\dot{Z}_P = \frac{1}{\dot{Y}_P} = \frac{1}{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dots + \dot{Y}_n} = \frac{1}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\dot{Z}_n}}$$

Si sólo existen dos ramas conectadas en paralelo, su impedancia equivalente viene dada por :

$$\dot{Z}_P = \frac{1}{\frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2}} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}$$

En el caso particular que la señal de tensión aplicada al par de nodos **a** , **b** es de valor constante y que cada una de las ramas conectadas en paralelo sólo poseen resistencia, se obtienen las siguientes expresiones :

$$\text{conductancia equivalente paralelo , } G_P = G_1 + G_2 + \dots + G_n$$

$$\text{resistencia equivalente paralelo , } R_P = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}}$$

Si la admitancia de cada una de las **n** ramas conectadas en paralelo es del mismo valor , \dot{Y} , la admitancia equivalente paralelo viene dada por :

$$\dot{Y}_P = n \dot{Y}$$

y la impedancia equivalente paralelo :

$$\dot{Z}_P = \frac{1}{n \dot{Y}} = \frac{\dot{Z}}{n}$$

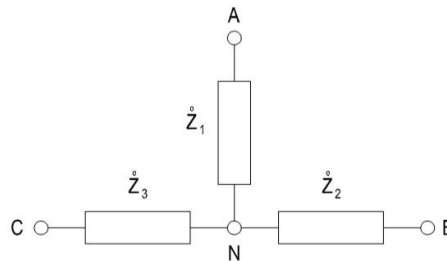
En el caso de tensión constante aplicada al par de nodos **a** , **b** y ramas de igual resistencia conectadas en paralelo, resulta :

$$G_P = n G \quad ; \quad R_P = \frac{R}{n}$$



4-1.1.2.3.- Conexión estrella

Tres ramas pasivas están conectadas en **estrella** cuando poseen un nodo en común, denominado *centro de estrella*. En la siguiente figura se da un ejemplo de una conexión de éste tipo :



El nodo **N** es el nodo común de la conexión estrella dada como ejemplo. Las impedancias entre los pares de nodos no comunes vienen dadas por :

$$\dot{Z}_{A,B} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2$$

$$\dot{Z}_{B,C} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3$$

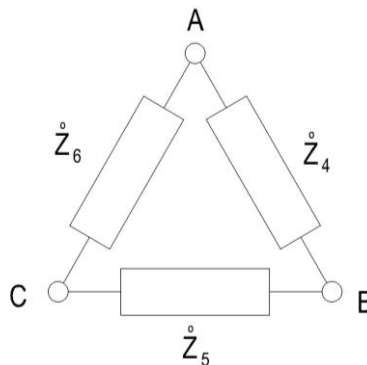
$$\dot{Z}_{A,C} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_3$$

En el caso particular que la conexión estrella sea **equilibrada**, vale decir que las impedancias de cada una de las ramas son iguales, se obtiene :

$$\dot{Z}_{A,B} = \dot{Z}_{B,C} = \dot{Z}_{A,C} = 2 \dot{Z} \quad \text{donde} \quad \dot{Z} = \dot{Z}_1 = \dot{Z}_2 = \dot{Z}_3$$

4-1.1.2.4.- Conexión triángulo

Tres ramas pasivas están conectadas en **triángulo** cuando forman un *lazo cerrado* tal como se muestra en la siguiente figura :



Las impedancias entre los pares de nodos de la conexión triángulo dada como ejemplo resultan iguales a :

$$\dot{Z}_{A,B} = \frac{\dot{Z}_4 (\dot{Z}_5 + \dot{Z}_6)}{\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6}$$

$$\dot{Z}_{B,C} = \frac{\dot{Z}_5 (\dot{Z}_4 + \dot{Z}_6)}{\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6}$$

$$\dot{Z}_{A,C} = \frac{\dot{Z}_6 (\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5)}{\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6}$$

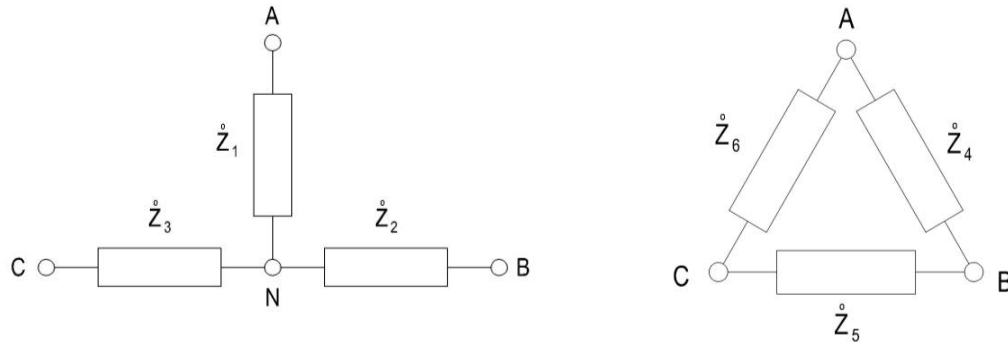
En el caso particular que la conexión triángulo sea **equilibrada**, vale decir que las impedancias de cada una de las ramas son iguales, se obtiene :

$$\dot{Z}_{A,B} = \dot{Z}_{B,C} = \dot{Z}_{A,C} = \frac{2}{3} \dot{Z} \quad \text{donde} \quad \dot{Z} = \dot{Z}_4 = \dot{Z}_5 = \dot{Z}_6$$

4-1.1.2.5.- Transformaciones de Kenelly



Existen muchos casos donde para simplificar la resolución de un dado circuito eléctrico es conveniente reemplazar una conexión en estrella por su equivalente en triángulo o viceversa aplicando un método conocido como **transformaciones de Kenelly**. La conexión en estrella se identificará con el subíndice Y, mientras que para la conexión en triángulo se empleará el subíndice D. Sea, por ejemplo, las siguientes conexiones en estrella y en triángulo :



Para que las dos conexiones sean equivalentes debe verificarse que la impedancia vista desde cada par de terminales de igual denominación tenga el mismo valor, vale decir :

$$\dot{Z}_{A,BY} = \dot{Z}_{A,BD} \quad (1) \quad \dot{Z}_{B,CY} = \dot{Z}_{B,CD} \quad (2) \quad \dot{Z}_{A,CY} = \dot{Z}_{A,CD} \quad (3)$$

desarrollando las expresiones (1), (2) y (3) obtenemos:

$$\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_4 \dot{Z}_5 + \dot{Z}_4 \dot{Z}_6}{\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6} \quad (4) \quad \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_4 \dot{Z}_5 + \dot{Z}_5 \dot{Z}_6}{\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6} \quad (5)$$

$$\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_4 \dot{Z}_6 + \dot{Z}_5 \dot{Z}_6}{\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6} \quad (6)$$

Sumando dos cualesquiera de las expresiones (4), (5) y (6) y restándole la tercera se obtienen las ecuaciones de la **transformación triángulo – estrella**. Por ejemplo consideremos la operación : (4) + (5) – (6)

$$(4) + (5) \quad \dot{Z}_1 + 2\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 = \frac{2\dot{Z}_4 \dot{Z}_5 + \dot{Z}_4 \dot{Z}_6 + \dot{Z}_5 \dot{Z}_6}{\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6}$$

$$(4) + (5) - (6) \quad \dot{Z}_1 + 2\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 - \dot{Z}_3 - \dot{Z}_1 = \frac{2\dot{Z}_4 \dot{Z}_5 + \dot{Z}_4 \dot{Z}_6 + \dot{Z}_5 \dot{Z}_6 - \dot{Z}_4 \dot{Z}_6 - \dot{Z}_5 \dot{Z}_6}{\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6}$$

de donde resulta :

$$\dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_4 \dot{Z}_5}{\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6} \quad (7)$$

y , operando de manera similar se obtienen :



$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_4 \dot{Z}_6}{\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6} \quad \text{obtenida haciendo } (4) + (6) - (5) \quad (8)$$

$$\dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_5 \dot{Z}_6}{\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6} \quad \text{obtenida haciendo } (4) + (6) - (5) \quad (9)$$

La inspección de las ecuaciones de cálculo de las impedancias \dot{Z}_1 , \dot{Z}_2 y \dot{Z}_3 permite deducir la regla de la **transformación de una conexión triángulo a una estrella equivalente** :

la impedancia de una rama cualquiera de la conexión estrella equivalente viene dada por el cociente del producto de las impedancias de las ramas del triángulo que tienen un nodo en común con la rama de la estrella considerada, dividido por la suma de las impedancias de todas las ramas de la conexión triángulo

En el caso particular que la conexión triángulo sea equilibrada (todas las impedancias son iguales), la estrella equivalente también será equilibrada y la impedancia de cada rama valdrá :

$$\dot{Z}_Y = \frac{1}{3} \dot{Z}_D$$

Consideremos ahora la transformación de la conexión estrella en un triángulo equivalente. En primer lugar se obtienen los productos dados por : (7) x (8) ; (7) x (9) y (8) x (9) ; en símbolos :

$$\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_4^2 \dot{Z}_5 \dot{Z}_6}{\left(\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6 \right)^2} ; \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_4 \dot{Z}_5 \dot{Z}_6^2}{\left(\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6 \right)^2} ; \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_4 \dot{Z}_5^2 \dot{Z}_6}{\left(\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6 \right)^2}$$

el siguiente paso consiste en sumar miembro a miembro las expresiones anteriores de donde obtenemos :

$$\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_4^2 \dot{Z}_5 \dot{Z}_6 + \dot{Z}_4 \dot{Z}_5^2 \dot{Z}_6 + \dot{Z}_4 \dot{Z}_5 \dot{Z}_6^2}{\left(\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6 \right)^2} \quad (10)$$

dividiendo miembro a miembro la ecuación (10) por las expresiones (7) , (8) y (9) se obtendrán las ecuaciones para calcular las impedancias de la conexión triángulo equivalente :

$$\frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2} = \frac{\left(\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6 \right)}{\dot{Z}_4 \dot{Z}_5} \frac{\dot{Z}_4^2 \dot{Z}_5 \dot{Z}_6 + \dot{Z}_4 \dot{Z}_5^2 \dot{Z}_6 + \dot{Z}_4 \dot{Z}_5 \dot{Z}_6^2}{\left(\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6 \right)^2}$$

$$\frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2} = \frac{\dot{Z}_4 \dot{Z}_6 + \dot{Z}_5 \dot{Z}_6 + \dot{Z}_6^2}{\left(\dot{Z}_4 + \dot{Z}_5 + \dot{Z}_6 \right)} = \dot{Z}_6$$

reordenando términos obtenemos :



$$\dot{Z}_6 = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2}$$

Operando de forma similar obtenemos las otras dos ecuaciones de la transformación estrella – triángulo :

$$\dot{Z}_5 = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1} \quad \text{obtenida dividiendo miembro a miembro (10) / (8)}$$

$$\dot{Z}_4 = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_3} \quad \text{obtenida dividiendo miembro a miembro (10) / (9)}$$

La inspección de las ecuaciones de cálculo de las resistencias \dot{Z}_4 , \dot{Z}_5 y \dot{Z}_6 permite deducir la regla de la **transformación de una conexión estrella a un triángulo equivalente** :

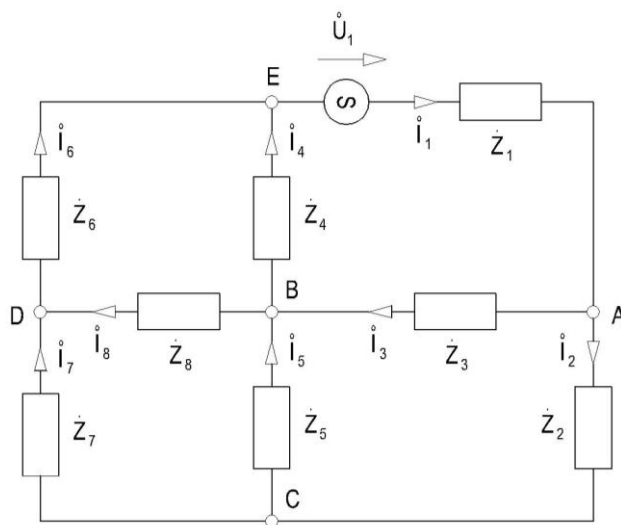
la impedancia de una rama cualquiera de la conexión triángulo equivalente viene dada por el cociente de la suma de los dobles productos de las impedancias de las ramas de la estrella, dividido por la impedancia de la rama de la conexión estrella correspondiente al nodo al que no pertenece la rama del triángulo considerada.

En el caso particular que la conexión estrella sea equilibrada (todas las impedancias son iguales), el triángulo equivalente también será equilibrado y la impedancia de cada rama valdrá :

$$\dot{Z}_D = 3 \dot{Z}_Y$$

4-2.1.- Resolución de una red simple por el método de síntesis

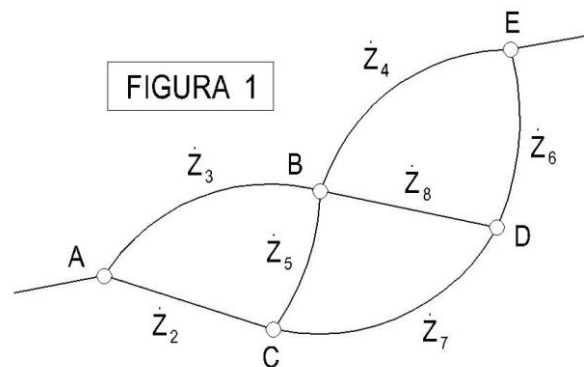
Se toma a modo de ejemplo el circuito eléctrico cuyo esquema de conexión se muestra a continuación. La inspección del esquema de conexión permite establecer que se trata de una red simple con cinco nodos y ocho ramas. El sentido de circulación de corriente en cada una de las ramas se ha establecido arbitrariamente. La determinación del sentido correcto se discutirá durante la resolución del circuito.





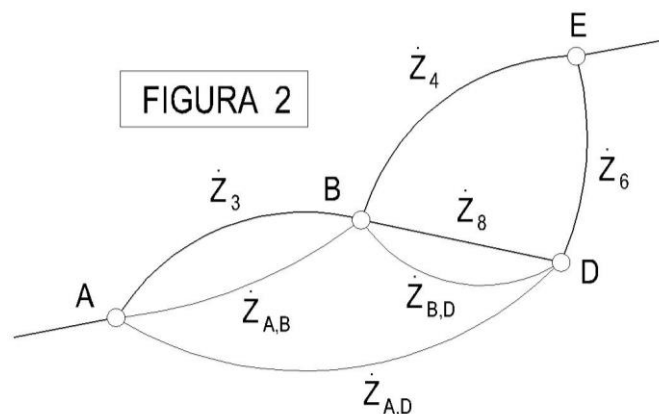
$$\begin{aligned}\dot{Z}_1 &= 3 + j4 [\Omega] = 5 \angle 53^\circ,13 [\Omega] & ; & \quad \dot{Z}_2 = 5 - j2 [\Omega] = 5,3852 \angle -21^\circ,80 [\Omega] \\ \dot{Z}_3 &= 2 + j5 [\Omega] = 5,3852 \angle 68^\circ,20 [\Omega] & ; & \quad \dot{Z}_4 = 2 - j4 [\Omega] = 4,4721 \angle -63^\circ,43 [\Omega] \\ \dot{Z}_5 &= 3 + j5 [\Omega] = 5,8310 \angle 59^\circ,04 [\Omega] & ; & \quad \dot{Z}_6 = 8 + j2 [\Omega] = 8,2462 \angle 14^\circ,04 [\Omega] \\ \dot{Z}_7 &= 2 - j6 [\Omega] = 6,3246 \angle -71^\circ,57 [\Omega] & ; & \quad \dot{Z}_8 = 3 + j3 [\Omega] = 4,2426 \angle 45^\circ [\Omega] \\ \dot{U}_1 &= 220 \angle 50^\circ [V]\end{aligned}$$

Al quitar la rama activa entre los nodos **A** y **E**, el circuito resultante es una red pasiva cuyo gráfico se muestra en la Figura 1.



Junto a las líneas de trazo que unen cada uno de los pares de nodos se indica la impedancia correspondiente a la rama de la red representada por el gráfico de la Figura 1.

Las impedancias \dot{Z}_2 , \dot{Z}_5 y \dot{Z}_7 están conectadas en estrella a los nodos **A**, **B** y **D**, siendo el nodo **C** el centro de estrella. Reemplazando dicha conexión estrella por una conexión triángulo equivalente, el gráfico de la red se convierte en el mostrado en la Figura 2, realizándose así el primer paso de la síntesis de red.



Las líneas en trazo grueso representan ramas pertenecientes al circuito eléctrico dado, mientras que las líneas en trazo fino corresponden a ramas resultantes de transformaciones que no pertenecen a dicho circuito. Se observa que al realizar la transformación estrella-triángulo se elimina el nodo **C** obteniéndose una red de cuatro nodos equivalente a la red original de cinco nodos.

De acuerdo a la transformación de Kenelly de una conexión estrella a una conexión triángulo equivalente, resulta :



$$\dot{Z}_{A,B} = \frac{\dot{Z}_2 \dot{Z}_5 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_7 + \dot{Z}_5 \dot{Z}_7}{\dot{Z}_7} ; \quad \dot{Z}_{B,D} = \frac{\dot{Z}_2 \dot{Z}_5 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_7 + \dot{Z}_5 \dot{Z}_7}{\dot{Z}_2}$$

$$\dot{Z}_{A,D} = \frac{\dot{Z}_2 \dot{Z}_5 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_7 + \dot{Z}_5 \dot{Z}_7}{\dot{Z}_5}$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_2 \dot{Z}_5 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_7 + \dot{Z}_5 \dot{Z}_7 &= 5,3852 \angle -21^\circ,80 \times 5,8310 \angle 59^\circ,04 + 5,3852 \angle -21^\circ,80 \times 6,3246 \angle -71^\circ,57 + \\ &+ 5,8310 \angle 59^\circ,04 \times 6,3246 \angle -71^\circ,57 = 31,4011 \angle 37^\circ,24 + 34,0592 \angle -93^\circ,37 + \\ &+ 36,8787 \angle -12^\circ,53 = 24,9987 + j 19,0025 - 2,0021 - j 34,0003 + 36,0003 - \\ &- j 8,0009 = 58,9969 - j 22,9986 \left[\Omega^2 \right] = 63,3212 \angle -21^\circ,30 \left[\Omega^2 \right] \end{aligned}$$

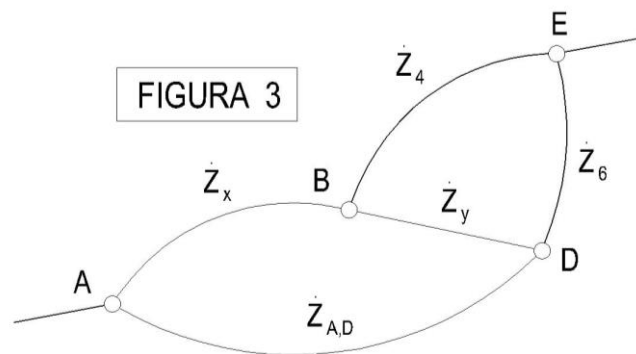
$$\dot{Z}_{A,B} = \frac{63,3212 \angle -21^\circ,30}{6,3246 \angle -71^\circ,57} = 10,0119 \angle 50^\circ,27 \left[\Omega \right] = 6,3993 + j 7,6998 \left[\Omega \right]$$

$$\dot{Z}_{B,D} = \frac{63,3212 \angle -21^\circ,30}{5,3852 \angle -21^\circ,80} = 11,7584 \angle 0^\circ,50 \left[\Omega \right] = 11,7580 + j 0,1026 \left[\Omega \right]$$

$$\dot{Z}_{A,D} = \frac{63,3212 \angle -21^\circ,30}{5,8310 \angle 59^\circ,04} = 10,8594 \angle -80^\circ,34 \left[\Omega \right] = 1,8222 - j 10,7054 \left[\Omega \right]$$

Observando la Figura 2 resultan, luego de la transformación estrella-triángulo, dos pares de nodos (**A-B** y **B-D**) con ramas redundantes, que pueden reemplazarse, en cada caso, por una rama equivalente a la conexión paralelo de aquéllas.

La figura 3 muestra el gráfico de la red una vez eliminadas las ramas redundantes entre los pares de nodos **A-B** y **B-D**.



$$\dot{Z}_x = \frac{\dot{Z}_{A,B} \dot{Z}_3}{\dot{Z}_{A,B} + \dot{Z}_3} = \frac{10,0119 \angle 50^\circ,27 \times 5,3852 \angle 68^\circ,20}{6,3993 + j 7,6998 + 2 + j 5} = \frac{53,9161 \angle 118^\circ,47}{8,3993 + j 12,6998} = \frac{53,9161 \angle 118^\circ,47}{15,2261 \angle 56^\circ,52} =$$

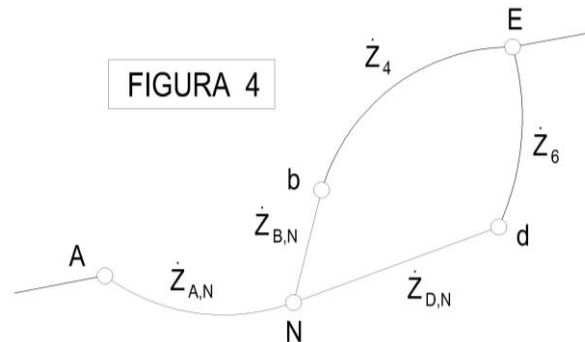
$$\dot{Z}_x = 3,5410 \angle 61^\circ,95 \left[\Omega \right] = 1,6651 + j 3,1251 \left[\Omega \right]$$

$$\dot{Z}_y = \frac{\dot{Z}_{B,D} \dot{Z}_8}{\dot{Z}_{B,D} + \dot{Z}_8} = \frac{11,7584 \angle 0^\circ,50 \times 4,2426 \angle 45^\circ,00}{11,7580 + j 0,1026 + 3 + j 3} = \frac{49,8862 \angle 45^\circ,50}{14,7580 + j 3,1026} = \frac{49,8862 \angle 45^\circ,50}{15,0806 \angle 11^\circ,87} =$$

$$\dot{Z}_y = 3,3080 \angle 33^\circ,63 \left[\Omega \right] = 2,7543 + j 1,8321 \left[\Omega \right]$$



En la Figura 3 puede observarse que las ramas conectadas a los nodos **A**, **B** y **D** están en conexión triángulo y pueden ser reemplazadas por una conexión estrella equivalente. Este nuevo paso del proceso de síntesis de la red original da por resultado el gráfico mostrado en la Figura 4.



Como consecuencia de la transformación triángulo-estrella, la red equivalente presenta el nodo **N**, mientras que los nodos **B** y **D** quedan convertidos en los terminales de conexión **b** y **d**, respectivamente. La red equivalente posee sólo tres nodos (**A**, **N** y **E**) en lugar de los cinco de la red original. Puede apreciarse en la Figura 4 que sólo las ramas **b-E** y **d-E** se corresponden con las del circuito original.

De acuerdo a la transformación de Kenelly de una conexión triángulo a una conexión estrella equivalente, resulta :

$$\dot{Z}_{A,N} = \frac{\dot{Z}_x \dot{Z}_{A,D}}{\dot{Z}_x + \dot{Z}_y + \dot{Z}_{A,D}} \quad ; \quad \dot{Z}_{B,N} = \frac{\dot{Z}_x \dot{Z}_y}{\dot{Z}_x + \dot{Z}_y + \dot{Z}_{A,D}} \quad ; \quad \dot{Z}_{D,N} = \frac{\dot{Z}_{A,D} \dot{Z}_y}{\dot{Z}_x + \dot{Z}_y + \dot{Z}_{A,D}}$$

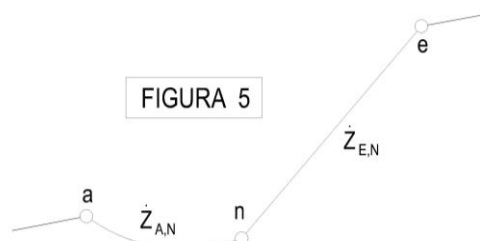
$$\dot{Z}_x + \dot{Z}_y + \dot{Z}_{A,D} = 1,6651 + j 3,1251 + 2,7543 + j 1,8321 + 1,8222 - j 10,7054 = 6,2416 - j 5,7482 [\Omega] = 8,4852 \angle -42^\circ,64 [\Omega]$$

$$\dot{Z}_{A,N} = \frac{3,5410 \angle 61^\circ,95 \times 10,8594 \angle -80^\circ,34}{8,4852 \angle -42^\circ,64} = 4,5318 \angle 24^\circ,25 [\Omega] = 4,1319 + j 1,8613 [\Omega]$$

$$\dot{Z}_{B,N} = \frac{3,5410 \angle 61^\circ,95 \times 3,3080 \angle 33^\circ,63}{8,4852 \angle -42^\circ,64} = 1,3805 \angle 138^\circ,22 [\Omega] = -1,0295 + j 0,9198 [\Omega]$$

$$\dot{Z}_{D,N} = \frac{3,3080 \angle 33^\circ,63 \times 10,8594 \angle -80^\circ,34}{8,4852 \angle -42^\circ,64} = 4,2336 \angle -4^\circ,07 [\Omega] = 4,2229 - j 0,3005 [\Omega]$$

Entre los nodos **N** y **E** hay ramas redundantes conectadas en paralelo que pueden reemplazarse por una equivalente obteniéndose el gráfico de la Figura 5, que constituye el *resultado final del proceso de síntesis* de la red original puesto que se han eliminado todos los nodos y se llega a una sola rama con dos impedancias conectadas en serie.



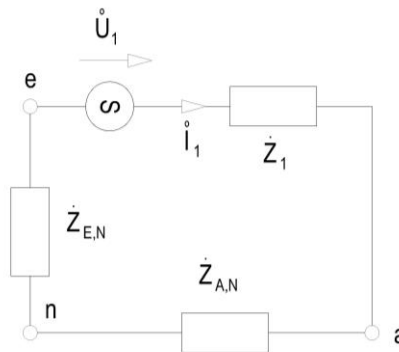


$$\dot{Z}_{E,N} = \frac{\left(\dot{Z}_4 + \dot{Z}_{B,N} \right) \left(\dot{Z}_6 + \dot{Z}_{D,N} \right)}{\dot{Z}_4 + \dot{Z}_{B,N} + \dot{Z}_6 + \dot{Z}_{D,N}} = \frac{(2 - j 4 - 1,0295 + j 0,9198)(8 + j 2 + 4,2229 - j 0,3005)}{2 - j 4 - 1,0295 + j 0,9198 + 8 + j 2 + 4,2229 - j 0,3005} =$$

$$\dot{Z}_{E,N} = \frac{(0,9705 - j 3,0802)(12,2229 + j 1,6995)}{13,1934 - j 1,3807} = \frac{3,2295 \angle -72^\circ,51 \times 12,3405 \angle 7^\circ,92}{13,2654 \angle -5^\circ,97} =$$

$$\dot{Z}_{E,N} = 3,0043 \angle -58^\circ,62 [\Omega] = 1,5644 - j 2,5649 [\Omega]$$

En la siguiente figura se muestra el lazo simple obtenido luego de realizar la síntesis de la red correspondiente al circuito original.



Ahora se puede comenzar a resolver el circuito dado como ejemplo calculando la intensidad de corriente en la rama activa como se muestra a continuación :

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_{A,N} + \dot{Z}_{E,N}} = \frac{220 \angle 50^\circ}{3 + j 4 + 4,1319 + j 1,8613 + 1,5644 - j 2,5649} = \frac{220 \angle 50^\circ}{8,6963 + j 3,2964} =$$

$$\dot{I}_1 = \frac{220 \angle 50^\circ}{9,3001 \angle 20^\circ,76} = 23,6557 \angle 29^\circ,24 [A]$$

El sentido de circulación dado para la intensidad de corriente \dot{I}_1 es correcto porque en la fuente de tensión ideal la corriente debe circular desde el terminal a menor potencial hacia el terminal a mayor potencial (la flecha junto al símbolo de la fuente de tensión está dirigida de **E** hacia **A** indicando que **A** está a mayor potencial que **E**). El potencial de **N** debe ser menor que el de **A** y mayor que el de **B** , porque en las ramas pasivas el sentido de circulación de corriente es siempre desde el punto de mayor potencial hacia el de menor potencial.

El siguiente paso en la resolución del circuito dado como ejemplo consiste en hallar las diferencias de potencial entre los pares de nodos **N-E**, haciendo :

$$\dot{U}_{N,E} = \dot{I}_1 \dot{Z}_{E,N} = 23,6557 \angle 29^\circ,24 \times 3,0043 \angle -58^\circ,62 = 71,0688 \angle -29^\circ,38 [V]$$

Observando el gráfico de red de la Figura 4 se deduce que las intensidades de corriente \dot{I}_4 e \dot{I}_6 deben estar dirigidas hacia el nodo **E** porque se trata de ramas pasivas y el nodo **N** está a mayor potencial. En consecuencia los sentidos de circulación de dichas corrientes establecidos inicialmente son correctos.



Empleando la red equivalente mostrada en la Figura 4 se pueden obtener las intensidades de corriente \dot{I}_4 e \dot{I}_6 , haciendo :

$$\dot{I}_4 = \frac{\dot{U}_{N,E}}{\dot{Z}_4 + \dot{Z}_{B,N}} = \frac{71,0688 \angle -29^\circ,38}{2 - j 4 - 1,0295 + j 0,9198} = \frac{71,0688 \angle -29^\circ,38}{0,9705 - j 3,0802} = \frac{71,0688 \angle -29^\circ,38}{3,2295 \angle -72^\circ,51} =$$

$$\underline{\dot{I}_4 = 22,0061 \angle 43^\circ,13 [A]}$$

$$\dot{I}_6 = \frac{\dot{U}_{N,E}}{\dot{Z}_6 + \dot{Z}_{D,N}} = \frac{71,0688 \angle -29^\circ,38}{8 + j 2 + 4,2229 - j 0,3005} = \frac{71,0688 \angle -29^\circ,38}{12,2229 + j 1,6995} = \frac{71,0688 \angle -29^\circ,38}{12,3405 \angle 7^\circ,92} =$$

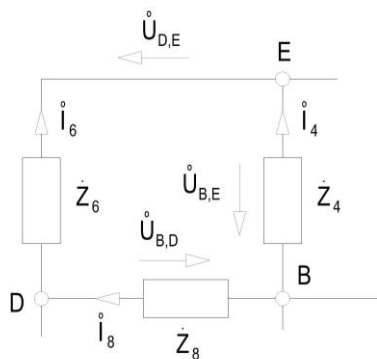
$$\underline{\dot{I}_6 = 5,7590 \angle -37^\circ,30 [A]}$$

En éste punto es conveniente verificar los resultados parciales aplicando la ley de nodos de Kirchhoff al nodo **E** (ver esquema de conexión del circuito dado como ejemplo). Se obtiene la siguiente igualdad :

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_4 + \dot{I}_6 = 16,0601 + j 15,0446 + 4,5811 - j 3,4899 = 20,6412 + j 11,5547 [A] = 23,6552 \angle 29^\circ,24 [A]$$

valor que no difiere prácticamente del calculado anteriormente , $\dot{I}_1 = 23,6557 \angle 29^\circ,24 [A]$. En consecuencia los cálculos parciales son correctos.

En la siguiente figura se muestra la porción del circuito eléctrico dado como ejemplo, correspondiente a los nodos **B** , **D** y **E** indicando los sentidos de las caídas de tensión en cada una de las ramas teniendo en cuenta los sentidos de circulación de corriente adoptados (recuérdese que los sentidos de circulación de corriente en las ramas **D-E** y **B-E** han sido verificados y son correctos).



Aplicando la ley de lazos de Kirchhoff al lazo **B** , **D** , **E** recorriéndolo en sentido antihorario, obtenemos :

$$\dot{U}_{D,E} + \dot{U}_{B,D} - \dot{U}_{B,E} = 0 \quad \therefore \quad \dot{U}_{B,D} = \dot{U}_{B,E} - \dot{U}_{D,E}$$

$$\dot{U}_{B,D} = \dot{I}_4 \dot{Z}_4 - \dot{I}_6 \dot{Z}_6 = 22,0061 \angle 43^\circ,13 \times 4,4721 \angle -63^\circ,43 - 5,7590 \angle -37^\circ,30 \times 8,2462 \angle 14^\circ,04 =$$

$$\dot{U}_{B,D} = 98,4135 \angle -20^\circ,30 - 47,4899 \angle -23^\circ,26 = 92,3009 - j 34,1432 - 43,6300 + j 18,7540 =$$

$$\underline{\dot{U}_{B,D} = 48,6709 - j 15,3892 [V] = 51,0459 \angle -17^\circ,55 [V]}$$



Los cálculos realizados indican que la tensión entre los nodos **B-E** vale $98,4135 \angle -20^\circ,30$ [V]. Considerando el nodo **E** referido a tierra (potencial = 0 [V]) el valor instantáneo de tensión (o potencial respecto a tierra) en el nodo **B** es igual a : $-48,2852$ [V]. Por otra parte la tensión entre los nodos **D-E** vale $47,4899 \angle -23^\circ,26$ [V], resultando un valor instantáneo de tensión en el nodo **D** igual a $-26,5219$ [V]. En consecuencia, *el nodo D está a mayor potencial que el nodo B respecto de la referencia a potencial cero (nodo E)* y, por lo tanto la intensidad de corriente debe circular desde **D** hacia **B** , sentido opuesto al asignado arbitrariamente.

La tensión entre los nodos **D-B** , vale :

$$\dot{U}_{D,B} = -\dot{U}_{B,D} = -51,0459 \angle -17^\circ,55$$

$$[V] = 51,0459 \angle 162^\circ,45 [V]$$

La intensidad de corriente en la rama **D-B** resulta igual a :

$$\dot{I}_8 = \frac{\dot{U}_{D,B}}{\dot{Z}_8} = \frac{51,0459 \angle 162^\circ,45}{4,2426 \angle 45^\circ,00} = 12,0317 \angle 117^\circ,45 [A]$$

En el nodo **D** aplicando la ley de nodos de Kirchhoff y teniendo en cuenta el sentido correcto de circulación de corriente en la rama **D-B** , se obtiene la siguiente igualdad :

$$\dot{I}_7 = \dot{I}_6 + \dot{I}_8 = 4,5811 - j 3,4899 - 5,5463 + j 10,6771 = -0,9652 + j 7,1872 [A]$$

$$\dot{I}_7 = 7,2517 \angle 97^\circ,65 [A]$$

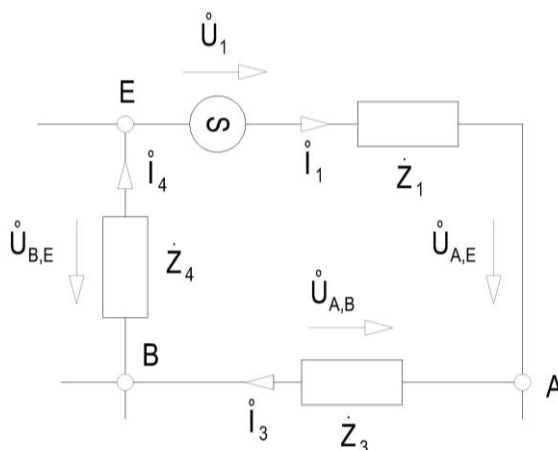
En la rama activa conectada a los nodos **A-E** , resulta aplicando la ley de lazos de Kirchhoff :

$$\dot{U}_{A,E} = \dot{U}_1 - \dot{I}_1 \dot{Z}_1 = 220 \angle 50^\circ - 23,6557 \angle 29^\circ,24 \times 5 \angle 53^\circ,13 = 141,4133 + j 168,5298 - 118,2785 \angle 82^\circ,37 =$$

$$\dot{U}_{A,E} = 141,4133 + j 168,5298 - 15,7045 - j 117,2313 = 125,7088 + j 51,2985 [V] = 135,7727 \angle 22^\circ,20 [V]$$

Tomando como referencia el nodo **E** (potencial = 0 [V]) el valor instantáneo del potencial en el nodo **A** es igual a $+ 72,5491$ [V], resultando el nodo **A** a mayor potencial que el nodo **B** ($u_{B,E} = - 48,2252$ [V]). Este resultado verifica el sentido de circulación asignado a la corriente en la rama **A-B**.

En la siguiente figura se muestra la porción del circuito eléctrico dado como ejemplo, correspondiente a los nodos **A** , **B** y **E** indicando los sentidos de las caídas de tensión en cada una de las ramas teniendo en cuenta los sentidos de circulación de corriente adoptados (recuérdese que los sentidos de circulación de corriente en las ramas **A-B** , **B-E** y **E-A** han sido verificados y son correctos).





Aplicando la ley de lazos de Kirchhoff al lazo **E, A, B** recorriéndolo en sentido horario, obtenemos :

$$\dot{U}_{A,E} - \dot{U}_{A,B} - \dot{U}_{B,E} = 0 \quad \therefore \quad \dot{U}_{A,B} = \dot{U}_{A,E} - \dot{U}_{B,E} = 125,7079 + j 51,3005 - 92,3009 + j 34,1432 =$$

$$\dot{U}_{A,B} = 33,4070 + j 85,4437 \text{ [V]} = 91,7423 \angle 68^\circ,65 \text{ [V]}$$

La intensidad de corriente en la rama **A-B** resulta igual a :

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{A,B}}{\dot{Z}_3} = \frac{91,7423 \angle 68^\circ,65}{5,3852 \angle 68^\circ,20} = 17,0360 \angle 0^\circ,45 \text{ [A]}$$

Aplicando la ley de nodos de Kirchhoff al nodo **A**, se obtiene la siguiente igualdad :

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 - \dot{I}_3 = 20,6415 + j 11,5551 - 17,0355 - j 0,1338 = 3,6060 + j 11,4213 \text{ [A]}$$

$$\dot{I}_2 = 11,9770 \angle 72^\circ,48 \text{ [A]}$$

Obtenida la intensidad de corriente en la rama **A-C** se debe hallar el potencial en el nodo **C** (tomando el nodo **E** como potencial de referencia). Para ello se debe calcular la diferencia de potencial entre los nodos **C** y **E**, haciendo

$$\dot{U}_{C,E} = \dot{U}_{A,E} - \dot{I}_2 \dot{Z}_2 = 125,7079 + j 51,3005 - 11,9770 \angle 72^\circ,48 \times 5,3852 \angle -21^\circ,80 =$$

$$\dot{U}_{C,E} = 125,7079 + j 51,3005 - 64,4985 \angle 50^\circ,68 = 125,7079 + j 51,3005 - 40,8695 - j 49,8973 =$$

$$\dot{U}_{C,E} = 84,8384 + j 1,4032 \text{ [V]} = 84,8500 \angle 0^\circ,95 \text{ [V]}$$

El potencial en el nodo **C** vale + 1,9895 [V], resultando más positivo que los potenciales en los nodos **B** (-48,2252 [V]) y **D** (-26,5219 [V]). En consecuencia los sentidos de circulación de corriente en las ramas **C-B** y **C-D** coinciden con los adoptados para el circuito dado como ejemplo.

Aplicando la ley de nodos de Kirchhoff al nodo **C**, se obtiene la siguiente igualdad :

$$\dot{I}_5 = \dot{I}_2 - \dot{I}_7 = 3,6060 + j 11,4213 + 0,9652 - j 7,1872 = 4,5712 + j 4,2341 \text{ [A]}$$

$$\dot{I}_5 = 6,2308 \angle 42^\circ,81 \text{ [A]}$$

Para comprobar los resultados obtenidos se aplica la ley de nodos de Kirchhoff al nodo **B** (ver esquema de conexión del circuito dado como ejemplo). Se obtiene la siguiente igualdad :

$$\dot{I}_3 + \dot{I}_5 + \dot{I}_8 - \dot{I}_4 = 0$$

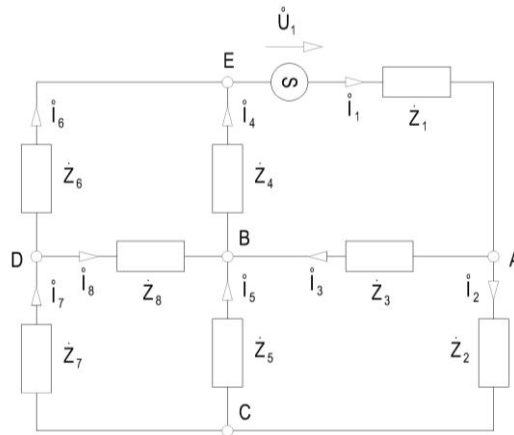
$$\dot{I}_3 + \dot{I}_5 + \dot{I}_8 - \dot{I}_4 = (17,0355 + 4,5712 - 5,5463 - 16,0601) + j (0,1338 + 4,2341 + 10,6771 - 15,0446) =$$

$$\dot{I}_3 + \dot{I}_5 + \dot{I}_8 - \dot{I}_4 = 0,0003 + j 0,0004 \cong 0$$

En consecuencia los cálculos parciales son correctos.



En la siguiente figura se muestra el circuito dado como ejemplo resuelto (se dan los valores de las intensidades de corriente en cada rama y los sentidos de circulación que satisfacen las leyes de Kirchhoff):



$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= 23,6557 \angle 29^\circ,24 [A] & ; & \quad \dot{I}_2 = 11,9770 \angle 72^\circ,48 [A] & \quad ; & \quad \dot{I}_3 = 17,0360 \angle 0^\circ,45 [A] \\ \dot{I}_4 &= 22,0061 \angle 43^\circ,13 [A] & \quad ; & \quad \dot{I}_5 = 6,2308 \angle 42^\circ,81 [A] & \quad ; & \quad \dot{I}_6 = 5,7590 \angle -37^\circ,30 [A] \\ \dot{I}_7 &= 7,2517 \angle 97^\circ,65 [A] & \quad ; & \quad \dot{I}_8 = 12,0317 \angle 117^\circ,45 [A] \end{aligned}$$

A modo de verificación de las intensidades de corriente obtenidas para cada rama se debe realizar **un balance de potencia** , comprobando que la suma de las potencias activas y reactivas en los elementos pasivos es igual a la potencia activa y reactiva, respectivamente, suministrada por la fuente.

En la siguiente tabla se realiza el cálculo de las potencias activa y reactiva correspondientes a cada una de las ramas del circuito dado como ejemplo :

Rama	$I_j [A]$	$R [\Omega]$	$X [\Omega]$	$P [W]$	$Q [Var]$
A-E	$I_1 = 23,6557$	3	4	1678,7764	2238,3686
A-C	$I_2 = 11,9770$	5	-2	717,2426	-286,8971
A-B	$I_3 = 17,0360$	2	5	580,4506	1451,1265
B-E	$I_4 = 22,0061$	2	-4	968,5369	-1937,0737
C-B	$I_5 = 6,2308$	3	5VA	116,4686	194,1143
D-E	$I_6 = 5,7590$	8	2	265,3286	66,3322
C-D	$I_7 = 7,2517$	2	-6	105,1743	-315,5229
D-B	$I_8 = 12,0317$	3	3	434,2854	434,2854

De acuerdo a los resultados obtenidos la potencia activa total consumida , P_T , es igual a : 4866,2634 [W] y la potencia reactiva total, Q_T , vale :1844,7333 [Var].

La potencia correspondiente a la fuente viene dada por :

$$\dot{S}_F = \dot{U}_1 \dot{I}_1^* = 220 \angle 50^\circ \times 23,6557 \angle -29^\circ,24 = 5204,2540 \angle 20^\circ,76 [VA] = 4866,3593 + j 1844,6699 [VA]$$

De donde , $P_F=4866,3593$ (la diferencia con P_T es igual a : 0,0959) y $Q_F= 1844,6699 [Var]$ (la diferencia con Q_T es igual a : - 0,0643).Dado que las diferencias son de muy pequeña magnitud (inferiores a 100 [mW], el balance de potencia verifica que los valores obtenidos para las intensidades de corriente de rama son correctos.



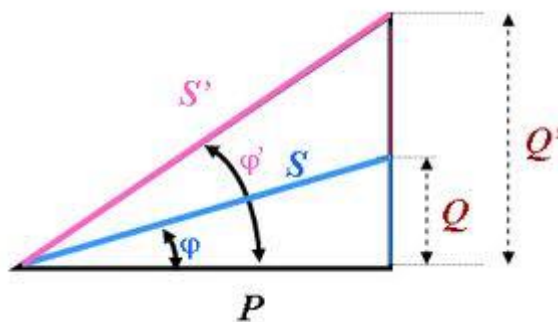
4-3.1.- Corrección del factor de potencia

El problema de la corrección del factor de potencia de un dado grupo de cargas consiste básicamente en determinar la capacidad (o la potencia reactiva) del capacitor a conectar en paralelo con cada una de las cargas o con el conjunto a fin de obtener un nuevo factor de potencia que satisfaga los requisitos de operación de la fuente que suministra energía a dichas cargas.

En la práctica , las compañías que suministran energía eléctrica le imponen al usuario un valor límite al *factor de potencia medio* de la instalación abastecida. El factor de potencia medio es el determinado por los consumos de energías activa y reactiva en un período igual al intervalo de facturación (generalmente mensual) de acuerdo a la siguiente relación :

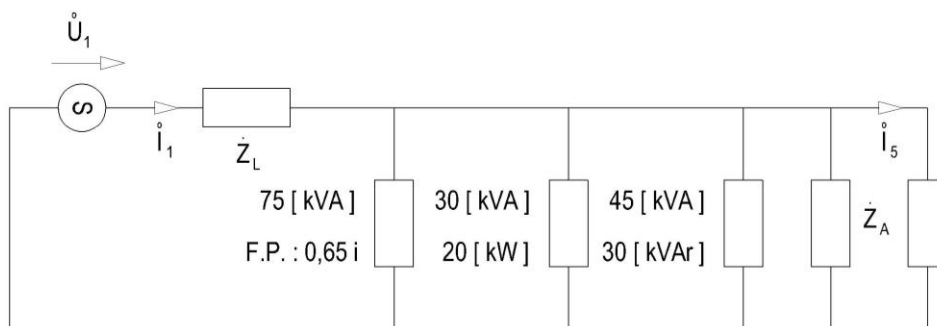
$$F.P._{medio} = \cos \left[\arctg \left(\frac{kVArh}{kWh_{TOTAL}} \right) \right]$$

Para instalaciones ubicadas la Capital Federal, Gran Buenos Aires, La Plata y Gran La Plata se exige un factor de potencia superior a 0,85 (inductivo o capacitivo) y en la provincia de Buenos Aires el valor límite es 0,95 (i ó c). En el siguiente gráfico se ilustra el resultado de una corrección dada del factor de potencia.



La carga consume inicialmente una potencia activa P y una potencia reactiva Q' . Luego de corregido al factor de potencia la fuente le suministra a la carga la potencia activa P (que no se modifica) y una potencia reactiva Q tal que $Q < Q'$. La diferencia entre la potencia reactiva final, Q y la inicial , Q' equivale a la potencia reactiva de compensación, Q_c utilizada. La corrección del factor de potencia permite además reducir la potencia aparente y, con ello, las pérdidas en la línea que conecta la fuente con la carga.

A modo de ejemplo se propone corregir el factor de potencia del siguiente grupo de cargas, cuyos datos se presentan de acuerdo a las variantes usuales en la práctica.



$$u_1 = \sqrt{2} \, 220 \, \text{sen}(314t) [V] \quad ; \quad \dot{Z}_A = 4 + j8 [\Omega] \quad ; \quad \dot{I}_5 = 25 \angle -36^\circ [A]$$



En primer lugar se considerará la corrección del factor de potencia del grupo de cargas conectando un capacitor en paralelo con las mismas a continuación de la impedancia de línea, Z_L . Para ello es necesario determinar las potencias totales, activa y reactiva del grupo de cargas, de la siguiente manera:

Carga # 1 (75 [kVA] ; F.P.: 0,65 i) $P_1 = S_1 \text{FP}_1 = 75 \times 0,65 = 48,75 \text{ [kW]}$

$$Q_1 = P_1 \operatorname{tg} [\arccos (\text{FP}_1)] = 48,75 \operatorname{tg} [\arccos (0,65)] = 57,00 \text{ [kVAr]}$$

Carga # 2 (30 [kVA] ; 20 [kW]) $Q_2 = \sqrt{S_2^2 - P_2^2} = \sqrt{30^2 - 20^2} = 22,36 \text{ [kVAr]}$

Carga # 3 (45 [kVA] ; 30 [kVAr]) $P_2 = \sqrt{S_2^2 - Q_2^2} = \sqrt{45^2 - 30^2} = 33,54 \text{ [kW]}$

Carga # 4 ($\dot{Z}_A = 4 + j 8 \text{ [} \Omega \text{]} = 8,9443 \angle 63^\circ, 43 \text{ [} \Omega \text{]}$) En éste caso se considera despreciable la caída de tensión en la impedancia de línea. En consecuencia:

$$I_4 = \frac{U_1}{Z_4} ; P_4 = R_4 I_4^2 = 4 \frac{220^2}{80} = 2,42 \text{ [kW]} ; Q_4 = X_4 I_4^2 = 8 \frac{220^2}{80} = 4,84 \text{ [kVAr]}$$

Carga # 5 ($\dot{I}_5 = 25 \angle -36^\circ \text{ [A]}$) En éste caso se considera despreciable la caída de tensión en la impedancia de línea. En consecuencia:

$$\dot{S}_5 = \dot{U}_1 \dot{I}_5^* = 220 \angle 0^\circ \times 25 \angle 36^\circ = 5,5 \angle 36^\circ \text{ [kVA]} \therefore P_5 = 4,45 \text{ [kW]} ; Q_5 = 3,23 \text{ [kVAr]}$$

En base a los cálculos precedentes, obtenemos:

$$P_T = \sum_{i=1}^{i=5} P_i = 48,75 + 20 + 33,54 + 2,42 + 4,45 = 109,16 \text{ [kW]}$$

$$Q_T = \sum_{i=1}^{i=5} Q_i = 57 + 22,36 + 30 + 4,84 + 3,23 = 117,43 \text{ [kVAr]}$$

Considerando que el factor de potencia corregido, FP' sea igual a 0,97 i, la potencia reactiva total luego de la corrección, Q'_T viene dada por:

$$Q'_T = P_T \operatorname{tg} [\arccos (\text{FP}')] = 109,16 \operatorname{tg} [\arccos (0,97)] = 27,36 \text{ [kVAr]}$$

resultando una potencia de compensación, Q_c igual a:

$$Q_c = Q'_T - Q_T = 27,36 - 117,43 = -90,07 \text{ [kVAr]}$$

La capacidad del capacitor correspondiente viene dada por:

$$C = \frac{Q_c}{\omega U_1^2} = \frac{90,07 \times 10^3}{314 \times 220^2} = 0,0059 \text{ [F]} \cong 6 \text{ [mF]}$$



Considerando despreciable la caída de tensión en la impedancia de línea, Z_L se puede escribir :

$$S_T = U_1 I_1 \quad S'_T = U_1 I'_1$$

La potencia de pérdidas, P_P en la línea viene dada por el producto de la resistencia de línea, R_L multiplicada por el cuadrado del valor eficaz de la intensidad de corriente de línea. El factor de reducción de la potencia de pérdidas en la línea, ΔP_P puede expresarse de la siguiente manera :

$$\Delta P_P = \frac{P'_P}{P_P} = \frac{I'^2_1 R_L}{I^2_1 R_L} = \frac{\frac{S'^2_T}{U^2_1}}{\frac{S^2_T}{U^2_1}} = \left(\frac{S'_T}{S_T} \right)^2$$

Desarrollando la expresión de la potencia de pérdidas en la línea, se obtiene :

$$\Delta P_P = \left(\frac{S'_T}{S_T} \right)^2 = \frac{P^2_T + Q'^2_T}{P^2_T + Q^2_T} = \frac{1 + \frac{Q'^2_T}{P^2_T}}{1 + \frac{Q^2_T}{P^2_T}} = \frac{1 + (tg \varphi')^2}{1 + (tg \varphi)^2}$$

Para el grupo de cargas dado como ejemplo, el factor de reducción de la potencia de pérdidas en la línea, vale :

$$tg \varphi' = tg [\arccos (FP')] = tg [\arccos (0,97)] = 0,251 \quad ; \quad tg \varphi = \frac{Q_T}{P_T} = \frac{117,43}{109,16} = 1,076$$

$$\Delta P_P = \frac{1 + (tg \varphi')^2}{1 + (tg \varphi)^2} = \frac{1 + (0,251)^2}{1 + (1,076)^2} = \frac{1,0630}{2,1578} = 0,49$$

La potencia de pérdidas en la línea se reducirá a la mitad cuando se efectúe la compensación del factor de potencia.

En muchos casos las cargas no funcionan simultáneamente en forma permanente por lo que para evitar sobrecompensar (vale decir pasar a factor de potencia en adelanto) se debe optar por corregir el factor de potencia en cada carga por separado. Para el ejemplo dado, si el factor de potencia corregido debe ser igual a 0,97 resulta :

Carga # 1 (75 [kVA] ; F.P.: 0,65 i) $C_1 = \frac{Q_{c,1}}{\omega U_1^2} = \frac{44,78 \times 10^3}{314 \times 220^2} = 0,0029 [F] \cong 2,95 [mF]$

$$Q'_1 = P_1 tg [\arccos (FP')] = 48,75 tg [\arccos (0,97)] = 12,22 [kVar]$$

$$Q_{c,1} = Q'_1 - Q_1 = 12,22 - 57,00 = -44,78 [kVar]$$



Carga # 2 (30 [kVA] ; 20 [kW]) $C_2 = \frac{Q_{c,2}}{\omega U_1^2} = \frac{17,35 \times 10^3}{314 \times 220^2} = 0,0011 [F] \cong 1,14 [mF]$

$$Q'_2 = P_2 \operatorname{tg} [\arccos (FP')] = 20 \operatorname{tg} [\arccos (0,97)] = 5,01 [kVAr]$$

$$Q_{c,2} = Q'_2 - Q_2 = 5,01 - 22,36 = -17,35 [kVAr]$$

Carga # 3 (45 [kVA] ; 30 [kVAr]) $C_3 = \frac{Q_{c,3}}{\omega U_1^2} = \frac{21,59 \times 10^3}{314 \times 220^2} = 0,0014 [F] \cong 1,42 [mF]$

$$Q'_3 = P_3 \operatorname{tg} [\arccos (FP')] = 33,54 \operatorname{tg} [\arccos (0,97)] = 8,41 [kVAr]$$

$$Q_{c,3} = Q'_3 - Q_3 = 8,41 - 30,00 = -21,59 [kVAr]$$

Carga # 4 ($\dot{Z}_A = 4 + j 8 [\Omega]$) $C_4 = \frac{Q_{c,4}}{\omega U_1^2} = \frac{4,23 \times 10^3}{314 \times 220^2} = 0,0003 [F] \cong 278 [\mu F]$

$$Q'_4 = P_4 \operatorname{tg} [\arccos (FP')] = 2,42 \operatorname{tg} [\arccos (0,97)] = 0,61 [kVAr]$$

$$Q_{c,4} = Q'_4 - Q_4 = 0,61 - 4,84 = -4,23 [kVAr]$$

Carga # 5 ($\dot{I}_5 = 25 \angle -36^\circ [A]$) $C_5 = \frac{Q_{c,5}}{\omega U_1^2} = \frac{2,11 \times 10^3}{314 \times 220^2} = 0,0001 [F] \cong 139 [\mu F]$

$$Q'_5 = P_5 \operatorname{tg} [\arccos (FP')] = 4,45 \operatorname{tg} [\arccos (0,97)] = 1,12 [kVAr]$$

$$Q_{c,5} = Q'_5 - Q_5 = 1,12 - 3,23 = -2,11 [kVAr]$$

La potencia total de compensación viene dada por :

$$Q_c = \sum_{i=1}^{i=5} Q_i = 44,78 + 17,35 + 21,59 + 4,23 + 2,11 = 90,06 [kVAr]$$

Puede verse que la potencia total de compensación resulta igual ya sea se compense cada carga individualmente o en tomándolas en conjunto