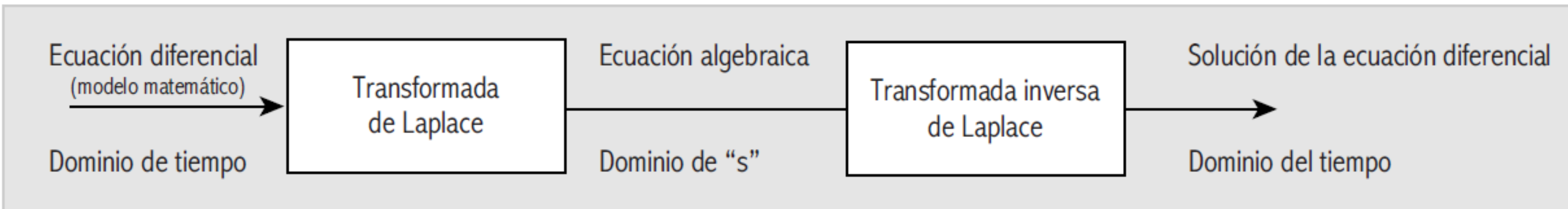
# La Transformada de Laplace aplicada a los sistemas de control

Capitulo 4

***Libro: Teoría de Control para Informáticos***

# Definicion de la Transformada de Laplace




El método de la transformada de Laplace, aplicado a la resolución de ecuaciones diferenciales, consiste en multiplicar cada término de esa ecuación diferencial por la expresión $e^{-st}$ e integrar cada uno de estos términos en función del tiempo en el intervalo cero hasta infinito. Si asumimos que cada término será una función del tiempo $f(t)$, la transformada de Laplace de ese término será:

$$L[f(t)] = F(s)$$

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} \cdot dt$$

# Propiedades de la Transformada de Laplace

Si $f(t) = f_1(t) \pm f_2(t)$,

entonces

$$L[f(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

---

$$L[a \cdot f(t)] = a \cdot F(s)$$

$$L[k_1 \cdot f(t) + k_2 \cdot g(t)] = k_1 L[f(+)] + k_2 L[g(t)]$$

---

Si se tiene $f(t-T)$, función $f(t)$ retrasada en $T$,

$$L[f(t - T)] = e^{-Ts} \cdot F(s)$$

# Propiedades de la Transformada de Laplace

Si se tiene $\dfrac{d^n f(t)}{df^n}$

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{df^n}\right] = S^n F(s) - S^{n-1} f(0) - S^{n-2} f'(0) - \frac{d^{n-1} f(0)}{df^{n-1}}$$

---

**Ejemplo:** hallar la transformada de Laplace de $\dfrac{d^2 f(t)}{df^2}$

$$L\left[\frac{d^2\ f(t)}{df^2}\right] = S^2\ F(s) - Sf(0) - \frac{df(0)}{df}$$

Si $f(0) = 0$, resulta

$$L\left[\frac{d^2\ f(t)}{df^2}\right] = S^2 \cdot F(s)$$

# Propiedades de la Transformada de Laplace

Si se tiene $\int_{0}^{\infty} f(t)\, dt$

$$L\left[\int_{0}^{\infty} f(t)\, dt\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

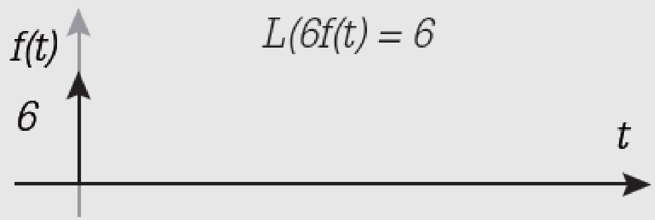
# Transformada de funciones especiales

La transformada de Laplace de la función impulso unitario que se produce en $t = 0$, es igual a $1$.

$$L\left[\delta(t)\right] = 1$$

Para una función impulso igual a 6 será:

$L(6f(t) = 6$ $\qquad$ $f(t) = \delta(t)$




en $t=0$ el impulso tiene una magnitud igual a 6.

# Transformada de funciones especiales

Cuando el escalón tiene amplitud igual a uno se denomina escalón unitario.

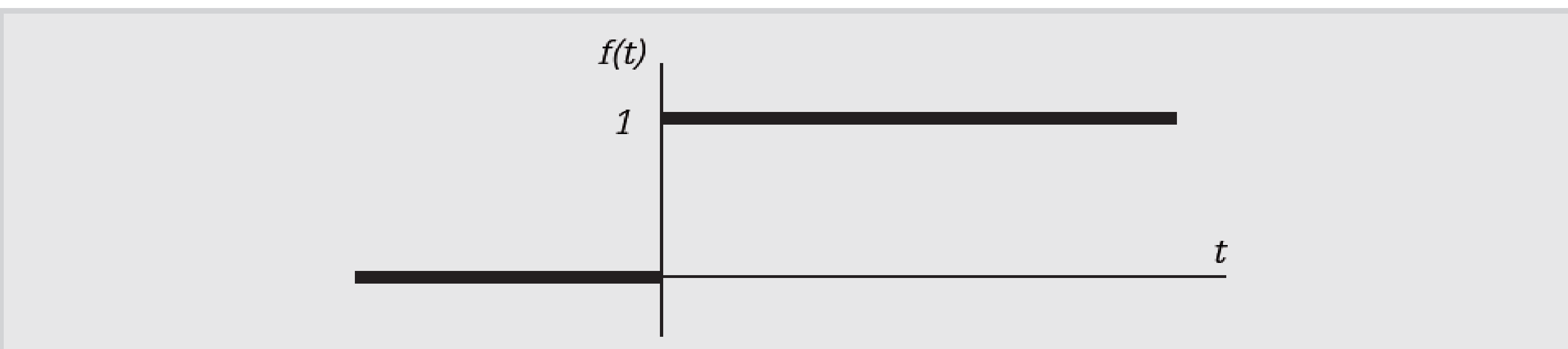
La función escalón unitario en el dominio del tiempo se define como sigue a continuación:

$$f(t) \begin{cases} = 1 \text{ para } t > 0 \\ = 0 \text{ para } t < 0 \end{cases}$$

En la figura 4-3 se grafica la función escalón unitario.

$$L\left[f(t)\right] = \int_{\circ}^{\infty} 1 \cdot e^{-st} \cdot dt = -\frac{1}{s}\, e^{-st} \, {}_{\circ}^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{s}\; 0 - 1 = \frac{1}{s}$$



# Transformada de funciones especiales

Funcion rampa: $f(t) = a \cdot t$

$$L\,[f(t)] = a \cdot \int_{0}^{\infty} t \cdot e^{-st} dt =$$

$$F(s) = a \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$F(s) = \frac{a}{s^2}$$

## Función exponencial: $e^{xt}$

La transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{\alpha t}$, donde $\alpha$ es una constante, será:

$f(t) = e^{\alpha t}$

$$L\,[f(t)] = F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{\alpha t} \cdot e^{-st} \cdot dt$$

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-(s-\alpha)t} dt$$

$$F(s) = -\frac{1}{s-\alpha}\, e^{-(s-\alpha)t} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$F(s) = -\frac{1}{s-\alpha}(0-1) = \frac{1}{s-\alpha}$$

$$F(s) = \frac{1}{s-\alpha}$$

# Laplace en los sistemas de control

- Definido el modelo matemático que representa a la función transferencia del sistema se aplica Laplace para hallar la solución mediante la resolución de una ecuación algebráica simple.
- Una vez desarrollada dicha solución en el dominio de "S" se halla la transformada de Laplace para en definitiva obtener la solución en el dominio del tiempo.

# Transformada inversa de Laplace

Dada la función $F(s)$, se define como transformada inversa de Laplace a:

$f(t) = L^{-1}[F(s)]$,

siempre que se cumpla que:

$L[f(t)] = F(s)$

**Ejemplo1:**

Hallar la transformada inversa de Laplace de

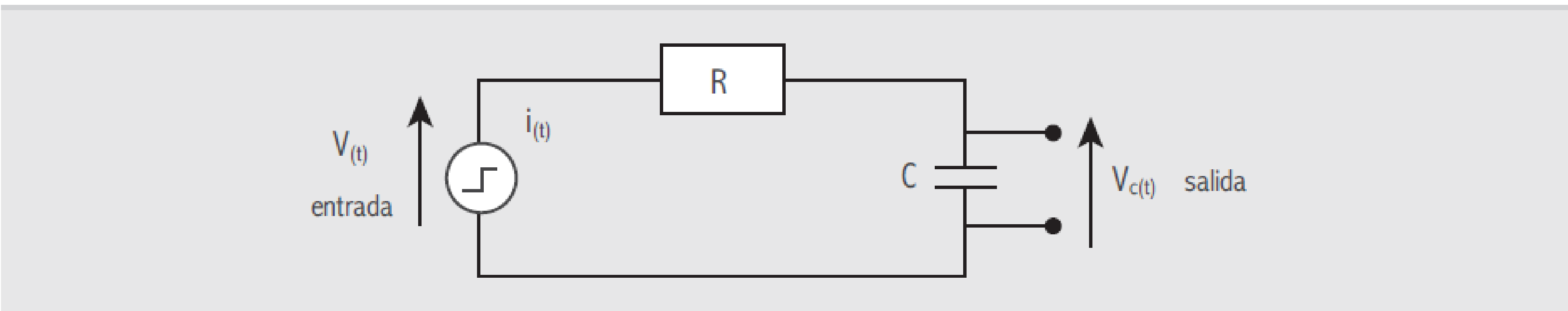
$$F(s) = \frac{a}{s}$$

$$L^{-1}\left[\frac{a}{s}\right] = a$$

o sea, $f(t) = a$, escalón de amplitud "a".

# Ejemplo de aplicación de Laplace a un sistema RC

$$v(t) = RC\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + v_C(t)$$




$$\frac{V}{s} = RC\,s\,v_C(s) + v_C(s)$$

$$V_C(s) = \frac{V}{(RC\,s + 1)s}$$

Al reordenarla (4-14):

$$v_C(s) = \frac{v(1 + R_C)}{[s + (1/RC)]s}$$

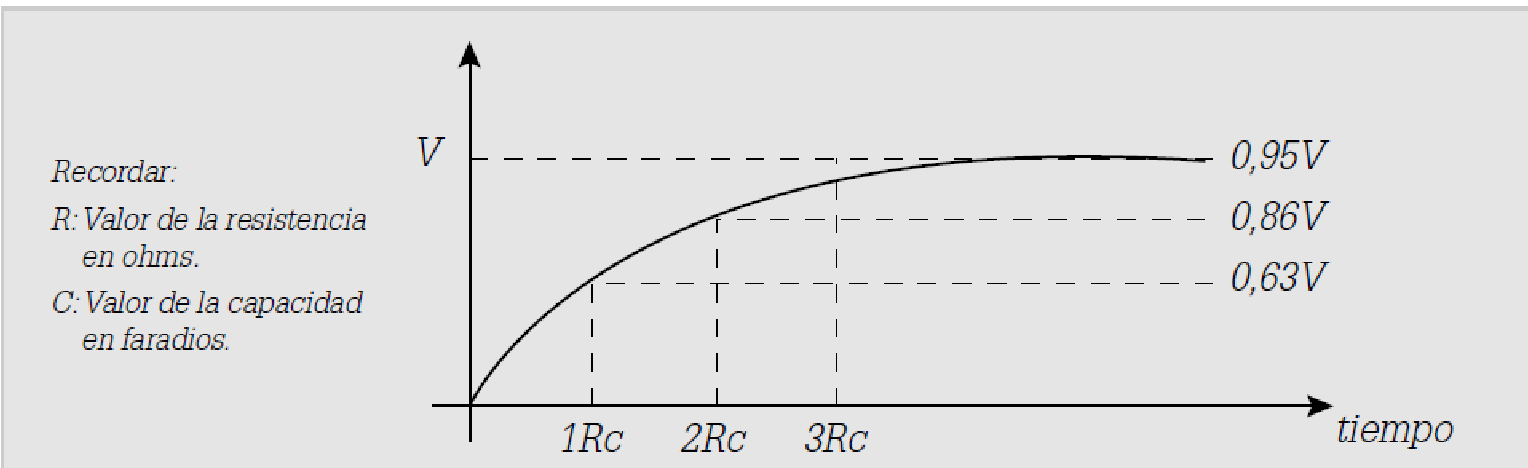
Si recordamos que $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{(s+a)s}\right] = 1 - e^{-at}$

# Ejemplo de aplicación de Laplace a un sistema RC

Y si se considera que $a = \frac{1}{RC}$

Quedará:

$$v_C(t) = v(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}})$$




Curva de carga del capacitor para diferentes valores de la constante RC.

# Resumen
# Transformada de Laplace

El procedimiento consiste en pasar la ecuación diferencial del dominio del tiempo al dominio “s” de Laplace, resolver la ecuación algebraica que se genera en ese dominio, y luego, aplicando la transformada inversa de Laplace, hallar la respuesta en el dominio del tiempo, dado que es lo que interesa descubrir para conocer el comportamiento del sistema.