

Analisis de la Estabilidad y el error en los sistemas de control

Capitulo 6

Libro: Teoría de Control para Informáticos

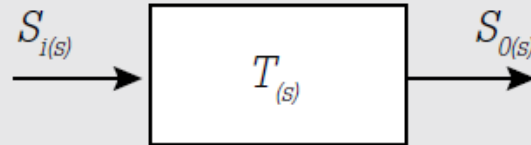
Introduccion

En este capítulo estudiaremos el error en estado estable de los sistemas de control mediante el empleo de determinadas técnicas, como el criterio de Routh-Hürwitz, la ubicación del lugar geométrico de las raíces y la interpretación de los diagramas respectivos. De esta forma evaluaremos si un sistema de control es estable, inestable o críticamente estable, de manera absoluta o relativa.

Respuesta transitoria de un sistema a un escalon



Sistema de lazo abierto



donde $S_{i(s)}$: señal de entrada
 $S_{o(s)}$: señal de salida
 $T_{(s)}$: función transferencia

Error de un sistema de lazo abierto

En esa situación podemos definir al error en estado estable –para un sistema de lazo abierto como el indicado en la figura 6-2– como la diferencia entre el valor deseado (S_i) y el obtenido realmente a la salida del sistema (S_o).

$$E(s) = S_i(s) - S_o(s) \quad (1)$$

Por otro lado, si tomamos en cuenta que la función transferencia del sistema abierto:

$$\frac{S_o(s)}{S_i(s)} = T(s) \quad \text{de donde} \quad S_o(s) = T(s) \cdot S_i(s)$$

Entonces, el error en estado estable será:

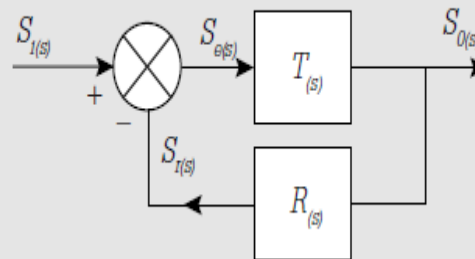
Aplicando a (1) tendremos:

$$E(s) = S_i(s) - T(s) \cdot S_i(s) \quad E(s) = [1 - T(s)] \cdot S_i(s) \quad (2)$$

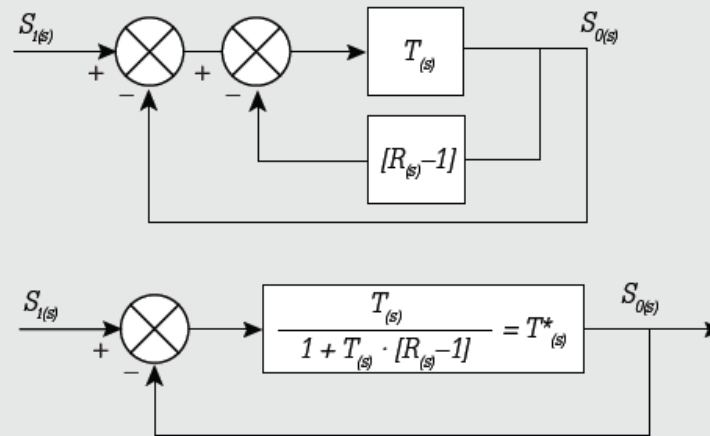
En consecuencia, observamos que el error en estado estable depende de dos factores: el sistema, por medio de la función transferencia $T(s)$, y la señal de entrada $S_i(s)$.

Sistema de lazo cerrado y su reduccion a un sistema de realimentacion unitaria

Sistema de lazo cerrado



Reducción a un sistema de realimentación unitaria



$$\text{donde: } T^*_{(s)} = \frac{T_{(s)}}{1 + T_{(s)} \cdot [R_{(s)} - 1]}$$

TEORIA DE CONTROL

Calculo del error en un sistema de lazo cerrado

$$E(s) = S_i(s) - \frac{T^*(s) \cdot S_i(s)}{1 + T^*(s)} \quad ; \quad E(s) = \frac{S_i(s)}{1 + T^*(s)}$$

$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} S \cdot E(s)$$

$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ S \cdot \frac{1}{1 + T^*(s)} \cdot S_i(s) \right\}$$

Analisis del comportamiento de los sistemas

Para efectuar ese análisis primero debemos clasificar las funciones de transferencia $T^*(s)$, que en general se pueden representar con la expresión siguiente:

$$T^*(s) = \frac{k(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1s + a_0)}{s^q(s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0)}$$

Para una función transferencia tipo cero implica que $q=0$, en consecuencia es el denominador de $T^*(s)$ no existe un factor "s"

En consecuencia la (5) quedará:

$$\lim_{s \rightarrow 0} T^*(s) = k_p \quad (\text{constante adimensional})$$

$$k_p = \frac{k a_0}{b_0}$$

Para otro tipo de funciones $T^*(s)$, Kp tiende a infinito. Si recordamos la expresión 4 para el error, y reemplazamos $T^*(s)$, obtenemos:

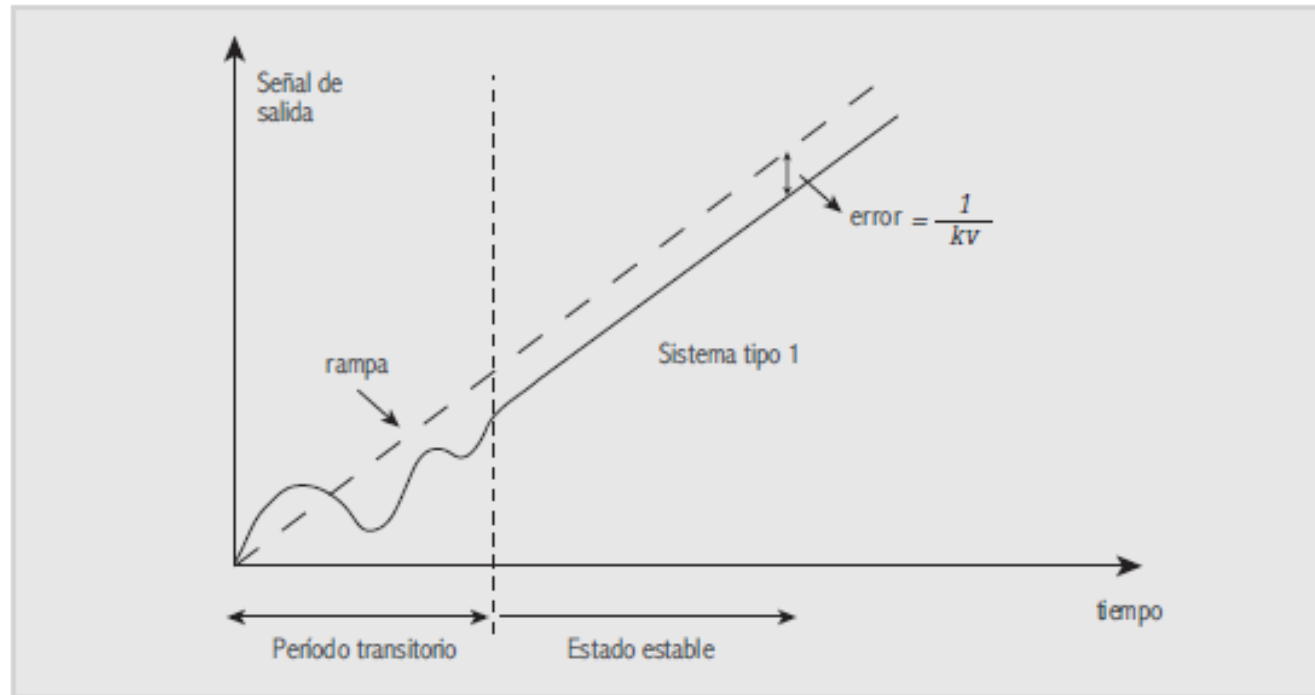
$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s}{1 + k_p} \cdot S_i(s) \right]$$

No obstante, si la señal de entrada es un escalón, su transformada de Laplace será $= 1/s$; al reemplazar obtenemos:

$$e_s = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s}{1 + k_p} \cdot \frac{1}{s} \right]$$

$$e_s = \frac{1}{1 + k_p}$$

Error en estado estable cuando la señal es una rampa

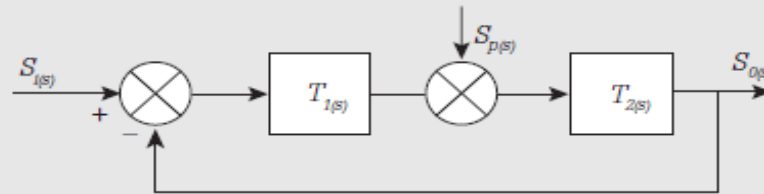


Error en estado estable para diferentes señales de entrada

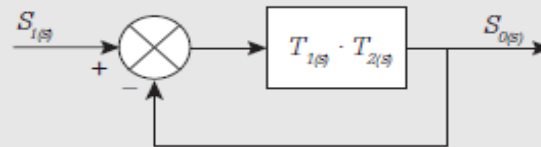
Tabla 6-1 Error relativo en estado estable

<i>ERROR</i> <i>Tipo de sistema</i>	e_p (escalón)	e_v (rampa)	e_a (parábola)
0	$\frac{1}{(1+K_D)}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K_V}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K_A}$
3	0	0	0

Error debido a perturbaciones

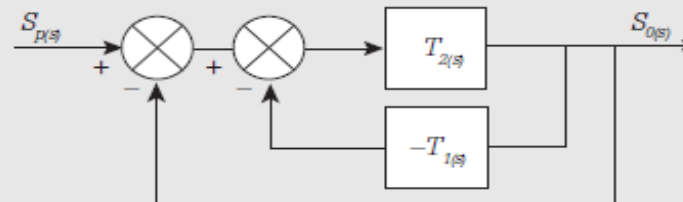


Si $S_{p(s)} = 0$ y $S_{1(s)} \neq 0$



$$e(s)_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \cdot \frac{1}{1 + T_{1(s)} \cdot T_{2(s)}} \cdot S_{1(s)} \right] \quad (11)$$

Si $S_{p(s)} \neq 0$ y $S_{1(s)} = 0$



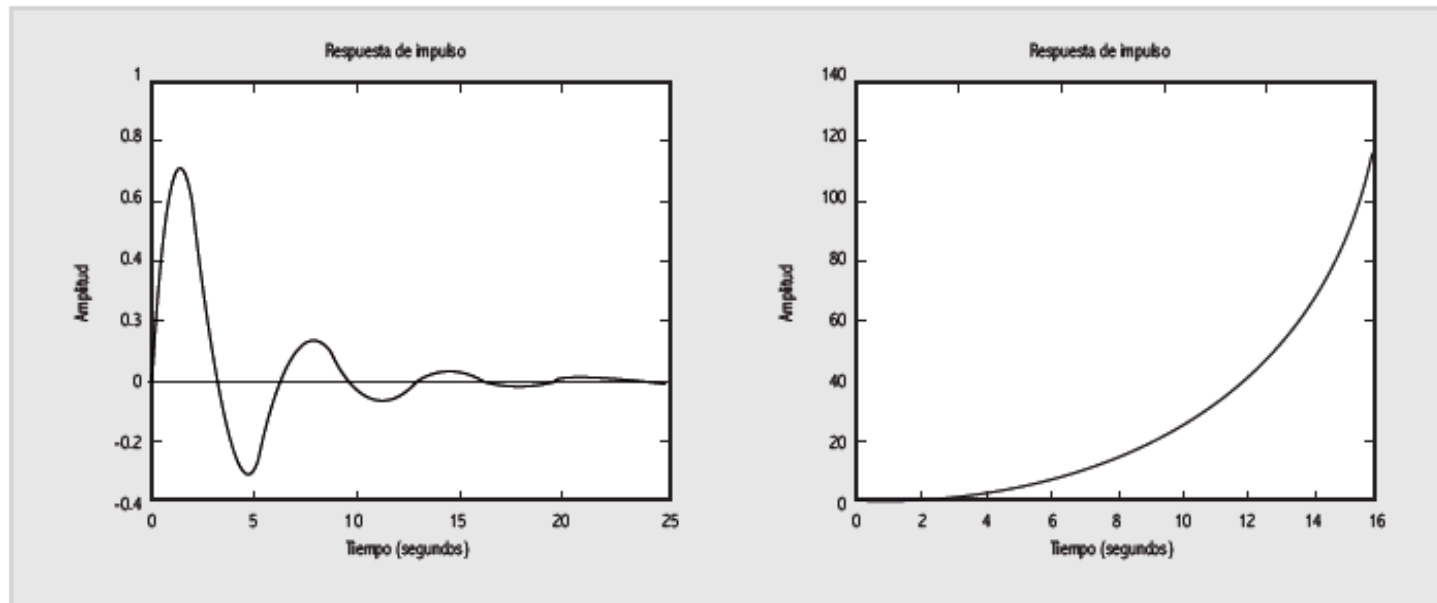
$$e(s)_2 = \lim_{s \rightarrow 0} \left[-s \cdot \frac{T_{2(s)}}{1 + T_{2(s)} \cdot [T_{1(s)} + 1]} \cdot S_{p(s)} \right] \quad (12)$$

el error total: $eS_t = eS_1 + eS_2$ (13)

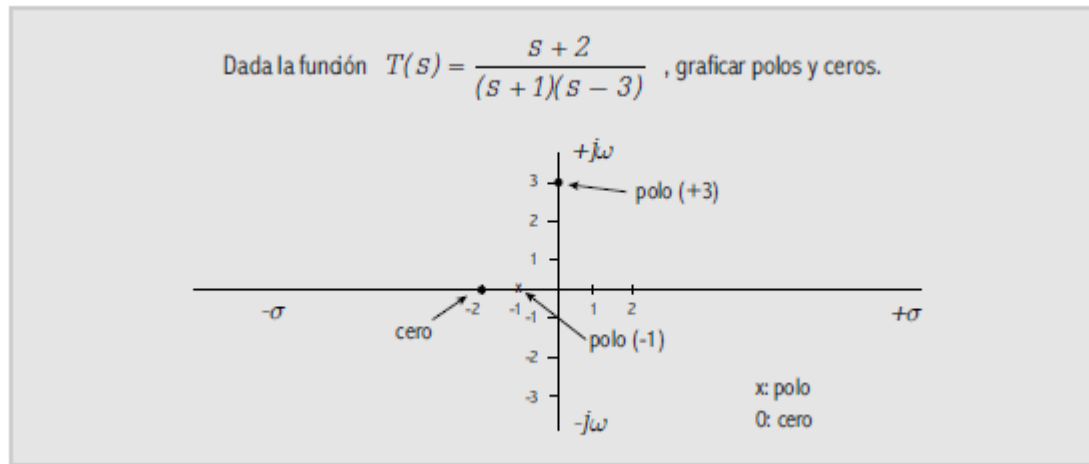
Estabilidad de los sistemas

- a. Estables
- b. Inestables
- c. Críticamente o marginalmente estables

En la figura se grafica la respuesta en el tiempo de sistemas estables e inestables.

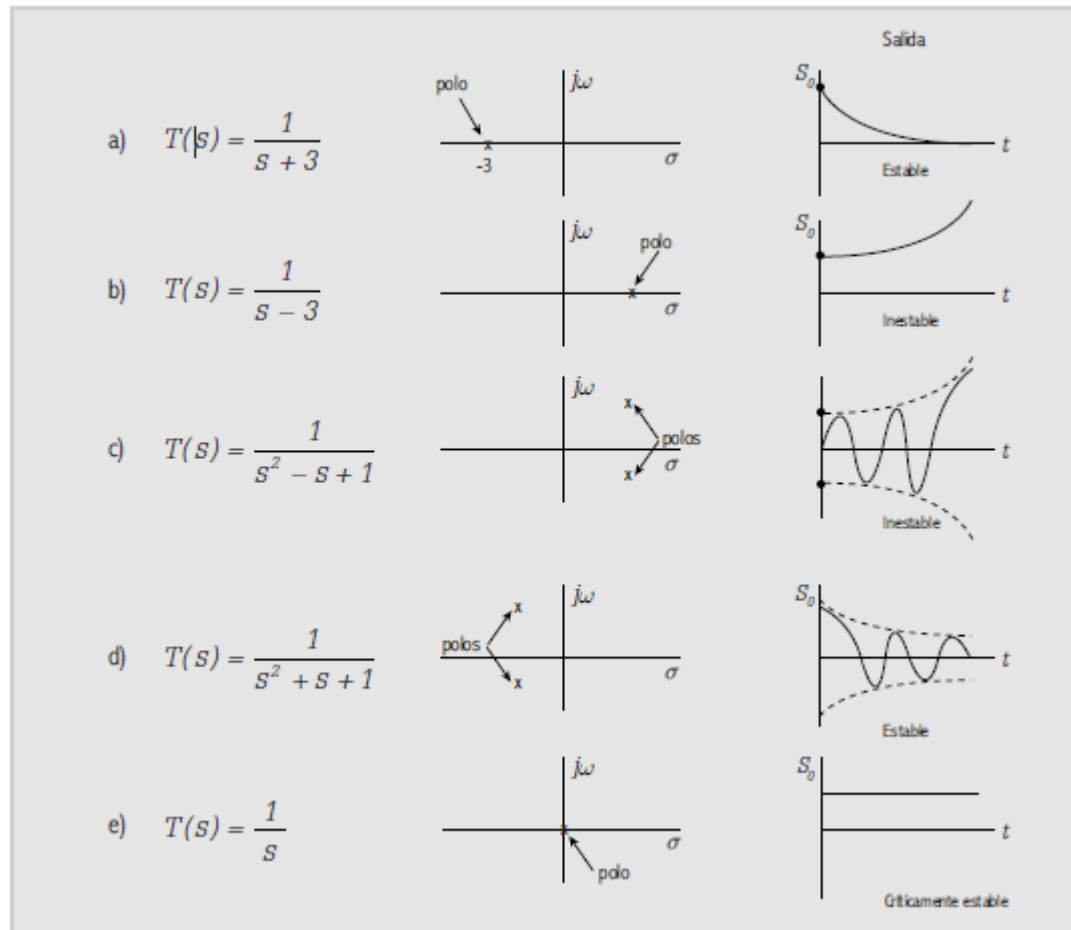


Analisis de la estabilidad mediante la evaluacion de los polos y ceros



- Los valores de los ceros no se consideran para la determinación de la estabilidad, sólo interesa el valor de los polos.
- Si todos los polos están en el semiplano izquierdo del patrón de polos y ceros, el sistema es estable.
- Si uno o más polos están ubicados en el semiplano derecho del patrón de polos y ceros, el sistema es inestable.
- Si no hay polos en el semiplano derecho y uno o más polos están ubicados en el eje de ordenadas (tienen parte real cero), el sistema es críticamente estable (pueden existir polos en el semiplano izquierdo).

Señal de salida de los sistemas para diferente configuracion de polos y ceros



Criterio de Routh Hurwitz

El criterio de Routh–Hurwitz se utiliza para comprobar de manera efectiva la estabilidad de los sistemas dinámicos, además de brindar información respecto de su comportamiento.

Ese método permite hallar las raíces del denominador de la función de transferencia del sistema y posteriormente ubicarla en el semiplano izquierdo o derecho; y así se determina la estabilidad del sistema.

El método de Routh-Hurwitz involucra dos pruebas:

Prueba N°1:

Ésta consiste en analizar los coeficientes del polinomio del denominador de la función transferencia ($T^*(s)$).

- Si todos son positivos y ninguno es cero, el sistema puede ser estable.
- Si uno o más coeficientes son negativos, el sistema es inestable.
- Si uno de los coeficiente es cero, el sistema puede ser inestable o críticamente estable.

Prueba N°2:

Cuando el sistema puede ser **estable** o **críticamente estable** se realiza esta segunda prueba, que consiste en el proceso siguiente.

Los coeficientes del denominador de la función transferencia $T^*(s)$ se escriben según el arreglo de Routh.

Arreglo de Routh

S^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
S^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
S^{n-2}	α_1	α_2	α_3	...
S^{n-3}	β_1	β_2	β_3	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
S^0	δ_1			

Arreglo de Routh (cont.)

Los primeros dos renglones o filas (S^n y S^{n-1}) se determinan directamente extrayendo los coeficientes del denominador de la función de transferencia, siguiendo el criterio expuesto antes en la matriz.

El tercer renglón (S^{n-2}):

$$\alpha_1 = a_{n-2} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) a_{n-3}$$

$$\alpha_2 = a_{n-4} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) a_{n-5}$$

El cuarto renglón (S^{n-3}):

$$\beta_1 = a_{n-3} - \left(\frac{a_{n-1}}{\alpha_1} \right) \alpha_2$$

$$\beta_2 = a_{n-5} - \left(\frac{a_{n-1}}{\alpha_1} \right) \alpha_3$$

Y así sucesivamente, el quinto y demás renglones o filas, hasta obtener ceros en toda la última fila.

Del resultado de la matriz se concluye que:

- Si todos los elementos de la primera columna resultante de aplicar el método de Routh-Hürwitz son positivos, el sistema es estable.
- Si alguno de ellos es 0, entonces será críticamente estable.
- Si alguno de ellos es menor que 0 (negativo), el sistema es inestable.

Hallar mediante el metodo de Routh la estabilidad del sistema $T(s) = S^4 + 5S^3 + 3S^2 + S + 2$

$$\begin{array}{c|ccc|c|c}
 s^4 & 1 & 3 & 2 & \alpha_1 = \frac{(5 \cdot 3) - (1 \cdot 1)}{5} & \beta_1 = \frac{(2'8 \cdot 1) - (5 \cdot 2)}{2'8} \\
 s^3 & 5 & 1 & 0 & & \\
 s^2 & 2,8 & 2 & 0 & \alpha_2 = \frac{(5 \cdot 2) - (1 \cdot 0)}{5} & \beta_2 = \frac{(2'8 \cdot 0) - (5 \cdot 0)}{2'8} \\
 s^1 & -2,57 & 0 & 0 & & \\
 s^0 & 2 & & & \alpha_3 = \frac{(5 \cdot 0) - (1 \cdot 0)}{5} & \beta_3 = \frac{(2'8 \cdot 0) - (5 \cdot 0)}{2'8} \\
 & & & & \delta_1 = \frac{(-2'57 \cdot 2) - (-2'8 \cdot 0)}{-2'57} &
 \end{array}$$

Esto nos da como resultado en la primera columna: 1, 5, 2,8, -2,57, 2 y por existir por haber dos cambios de signo, el sistema es inestable y posee dos polos en el semiplano derecho.