Modelos de sistemas dinámicos

Estudiamos ahora los sistemas de control cuando se tiene en cuenta el tiempo, en contraposición al *estado estable*, que es cuando la función de transferencia no cambia en el tiempo.
El estudio lo acotamos a los sistemas de primer orden.

Funciones de transferencia de elementos dinámicos.

Dado un sistema basico como el de la figura, de primer órden, representado por la ecuación diferencial:

$$a_1 * d\,\Theta_0 / d_t + a_0 * \Theta_0 = b_0 * \Theta_i$$

La transformada de Laplace en $\Theta_0 = 0 ; t = 0$ es: $a_1 * s * \Theta_o(s) + a_0 * \Theta_0(s) = b_0 * \Theta_i(s)$, y la función de transferencia G(s) queda como:

$$G(s) = b_0 / (a_1 * s + a_0)$$

Si dividimos por a_0 , y reordenamos:
$G(s) = (b_0 / a_0) / ((a_1 / a_0) * s + 1)$, donde podemos identificar $G_{ss} = b_0 / a_0$ es la función de transferencia en estado estable, que podemos denominar también como solo “G”, para no confundir las “s” de Laplace. Y, por otro lado $\tau = a_1 / a_0$. Finalmente nos queda como expresión general:

$$G(s) = G / (\tau * s + 1)$$

Es la forma general que adopta la relación *entrada – salida* en el dominio de Laplace.

Respuesta a la función escalón.

$G(s) = G / (\tau * s + 1)$ Consideramos el sistema de primer orden cuando la entrada es un función escalón, entonces, la TL (transformada de Laplace) de salida es:

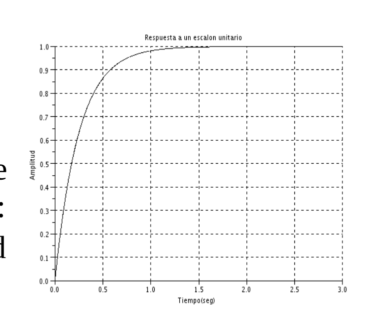
G(s) x TL de la entrada.

$G / (\tau * s + 1)$ x TL de la entrada.

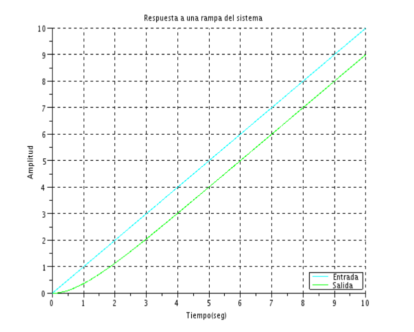
$G / (\tau * s + 1) * 1 / s$ Dividiendo por Tau

$G * (1/\tau) / s * (s + 1/\tau)$

Esto, en el dominio de Laplace es de la forma $a / s * (s + a)$, donde $a = 1/\tau$, por lo tanto, la solución en el dominio del tiempo es: $\Theta_0 = G * (1 - e^{(-t/\tau)})$, y generalizando para un escalón de magnitud “A” queda: $\Theta_0 = A * G * (1 - e^{(-t/\tau)})$, según grafico de la izquierda.



Respuesta a la función rampa.



Siguiendo el mismo método anterior:

G(s) x TL de la entrada.

$G / (\tau * s + 1)$ x TL de la entrada.

$G / (\tau * s + 1) * 1 / s^2$ Dividiendo por Tau

$$G*(1/\tau)/s^2*(s+1/\tau)$$

Esto, en el dominio de Laplace es de la forma $a/s^2*(s+a)$, donde $a=1/\tau$, por lo tanto, la solución en el dominio del tiempo es:

$t-(1-e^{(-a*t)})/a$, y $a=1/\tau$, por lo tanto se puede expresar como:

$\Theta_0=G*(t-\tau*(1-e^{(-t/\tau)}))$, y para una rampa de pendiente A es:

$$\Theta_0=G*A*(t-\tau*(1-e^{(-t/\tau)}))$$

Respuesta a la función impulso

Siguiendo el mismo método:

G(s) x TL de la entrada.

$G/(\tau*s+1)$ x TL de la entrada.

Para el impulso unitario, en t=0, la TL es 1, entonces

$G/(\tau*s+1)$ x 1 de la entrada, queda:

$$G/(\tau*s+1)$$

dividiendo por tau:

$$G*(1/\tau)/(s+1/\tau)$$

es de la forma: $1/s+a$, por lo tanto:

$$\Theta_0=G*(1-\tau)*e^{(-t/\tau)}$$

para un impulso de magnitud A:

$$\Theta_0=G*A*(1-\tau)*e^{(-t/\tau)}$$