

ANALISIS DE MEDIDAS ELECTRICAS

ERNEST FRANK

Professor of Electrical Engineering
Executive Officer, Department of Electrical Engineering
The George Washington University

TRADUCCIÓN Y ADAPTACIÓN

JOSÉ MARÍA GUILLÉN RUBIO

Licenciado en Ciencias Físicas
Colaborador del Instituto de Electricidad y Automática
Del Consejo Superior de Investigaciones Científicas

JOSÉ ANTONIO CORDERO MARTÍN

Jefe del Laboratorio de Medidas Eléctricas (I. E. A., C. S. I. C.)
Profesor Adjunto de la Facultad de Ciencias
de la Universidad de Madrid

LIBROS McGRAW-HILL

Panamá México New York
London Toronto Sydney Johannesburg

ANALISIS DE MEDIDAS ELECTRICAS

Copyright © 1969 por Ediciones del Castillo, S. A. Madrid. Reservados todos los derechos. Queda terminantemente prohibido reproducir este libro total o parcialmente sin permiso expreso de los editores.

Edición original en inglés publicada en los Estados Unidos de América. Copyright © 1959 por McGraw-Hill, Inc. Reservados todos los derechos.
Es propiedad.

21866

Depósito legal: M. 7.536 - 1969

Impreso en España - Printed in Spain

Talleres Gráficos de EDICIONES CASTILLA, S. A., Maestro Alonso, 23. Madrid, España

PROLOGO

Este libro es la recopilación de un curso de tres semestres a una hora diaria, dirigido a principiantes de la Moore School of Electrical Engineering (Universidad de Pensilvania), por varios profesores durante los últimos nueve años. El material ha sido seleccionado y dispuesto conforme a las necesidades de los nuevos planes de estudio de la ingeniería. En conjunto ha sido acogido con interés y entusiasmo por los estudiantes.

El desplazamiento en la enseñanza de ingeniería, desde el arte y consideraciones de diseño hasta los aspectos conceptuales y teóricos, pide que se rehaga el tratamiento tradicional de las medidas eléctricas. Se dedica poco espacio a los detalles de diseño de construcción de aparatos; menos aún a procedimientos detallados y aspectos de manipulación. Estos y otros temas deben reducirse para incorporar ideas más amplias y formativas. El campo de las medidas eléctricas proporciona una rica fuente de material analítico, altamente apropiado para estimular el pensamiento creador. La significación cuantitativa de las aproximaciones para ingeniería, las limitaciones teóricas de los sistemas eléctricos y electromecánicos, las bases fundamentales de varios métodos de medida y otras muchas ideas pueden tratarse sin excesivas consideraciones prácticas detalladas.

Un técnico puede estar entrenado para realizar medidas, pero antes el ingeniero debe proyectar experimentos y fijar su certeza para asegurar el uso económico del tiempo de laboratorio. Deben preverse las limitaciones y fallos de los sistemas de medidas, y esto requiere a menudo un alto nivel de capacidad analítica. Se debe estimar la precisión accesible e interpretar y presentar los resultados de forma inteligente, de acuerdo con normas científicas aceptadas. Estas exigencias y otras precisan un fuerte fundamento de conceptos y principios básicos. Con tal preparación el ingeniero puede conocer rápidamente las características y limitaciones de los equipos específicos que encuentra en la práctica aunque nunca haya estudiado el aparato explícitamente en la escuela. Es capaz de encontrar analogías en métodos y técnicas en vez de perderse en minuciosidades. Si se observa una actitud penetrante y crítica, no tendrá lugar el error de simplemente «tomar lecturas» sin un conocimiento de los fenómenos básicos y la interacción de los factores que intervienen.

Los conceptos y el análisis encajan bien en un curso de medidas. El estudiante tiene algún conocimiento de cálculo, ecuaciones diferenciales, física y circuitos y campos eléctricos. También ha adquirido alguna experiencia de laboratorio. Conviene entonces llevar toda esta información a un mismo campo. Las medidas eléctricas son muy apropiadas para proporcionar esta consolidación de ideas. La intención principal ha sido la de dar al estudiante una oportunidad de consolidar y unificar sus conocimientos, quizás aprendiendo de nuevo lo que él creía ya conocer. Puede ser una experiencia estimulante y satisfactoria para el estudiante el aplicar sus conocimientos a problemas de obvia importancia en ingeniería. El objeto esencial de este libro de texto es el de desarrollar en el estudiante las aptitudes y comprensión necesarias para resolver analíticamente problemas de ingeniería. Al mismo tiempo el estudiante debe familiarizarse con los métodos de medida, con la teoría de aplicación de ciertos instrumentos eléctricos y con la teoría y naturaleza de los errores de medida.

Este libro está concebido para la enseñanza y estudia métodos, conceptos y análisis. No es un tratado de medidas eléctricas ni pretende cubrir este amplio campo. El tratamiento parte de tipos convencionales en el pasado. En una breve sección se exponen los patrones eléctricos lo suficiente para orientar al estudiante. Los sistemas de unidades, bien tratados en muchos libros y desde diferentes puntos de vista, no se discuten ampliamente. Se supone que el estudiante está familiarizado con el sistema mks de uso continuo. Se omiten medidas magnéticas, transformadores de medida, medidas polifásicas y otros tópicos. Se ha atendido a los principios de análisis más bien que a un conjunto de tópicos. Se ha reducido notablemente la gran cantidad de información empírica y práctica que a menudo se encuentra en otros libros. También se han suprimido los procedimientos de manipulación de equipos prácticos. Se cree que estos puntos se aprenden mejor con la experiencia directa en el laboratorio cuando el ingeniero se encuentra con un problema real cuya solución es lo suficientemente importante para dar significado a tales detalles. Generalmente la parte descriptiva es la que se considera necesaria para proveer al estudiante de una cierta base sobre la que comenzar el análisis. También se ha reducido enormemente la gran profusión de fotografías de aparatos comerciales que suelen contener otras obras de este tipo. Esto suele ser, como mucho, un mal sustituto del examen de los verdaderos instrumentos que se encuentran normalmente en casi todas las universidades.

Gran parte del análisis está enfocado a los circuitos eléctricos y por esta razón se incluye un capítulo de revisión de circuitos. Otros análisis, tales como los requeridos en cálculo de fuerzas, se desarrollan cuidadosamente a partir de sus primeros principios. Un limitado tratamiento de la aplicación de estadística a los errores de medida se presenta en forma más completa que en otros textos. Se soslaya demasiado a menudo la es-

tadística en ingeniería y su inclusión representa al menos una parcial satisfacción de esta necesidad. Técnicas como los métodos diferenciales, aplicación de problemas de circuitos, aproximación de banda estrecha, desarrollos en serie y otros muchos no exclusivos del campo de las medidas, se usan cuando se necesitan. Se acentúa el teorema de la compensación, pues es superior al de Thévenin para el análisis de puentes. Se tratan analíticamente las fuentes de error en óhmétros, potenciómetros, puentes y otros circuitos. Se sugieren técnicas de tratamiento de datos a lo largo del texto y se dedica un capítulo final a esta materia, a menudo despreciada.

La distribución de los capítulos procede de la experiencia docente. Se estudian primero los galvanómetros como un tópico de obvia importancia. Esto proporciona un conjunto de ejemplos usados en el estudio de errores de medida, lo cual es una materia difícil no tratada con éxito en el comienzo del curso. Los métodos de medida se abordan según dos categorías de deflexión o de cero que se subdividen a su vez. Se abandonan las categorías convencionales de medida de resistencia, medida de voltajes, medida de potencias, etc. La mayoría de los ejemplos son en c. c. y baja frecuencia, en alta y baja precisión. Los instrumentos electrónicos solo son rozados, el único análisis serio es el del voltímetro de pico con diodo. La sucesión de los capítulos restantes fue la seguida en la mayoría de los cursos, pero a partir del Cap. 9 se puede seguir cualquier orden.

Los problemas al final de cada capítulo constituyen una de las más importantes características de este libro. En algunos casos, obligan al estudiante a completar los pasos omitidos en el texto. En la mayoría se trata de problemas notables por su originalidad y cuidadosa elección, sin cálculo excesivo ni sustitución en fórmulas. Muchos tópicos tratados ligeramente en el texto son ampliados en los problemas que aumentan las aplicaciones previstas. Muchos de los problemas han sido preguntas de examen. Las respuestas a los problemas se dan al final del libro para que el alumno pueda comprobar la exactitud de su trabajo. Como el estudiante no puede saber qué problemas es capaz de resolver en determinada fase de su estudio, cada problema incluye un número que indica la sección que debe conocerse antes de intentar resolverlo. Es muy recomendable que un curso basado en este libro sea primariamente un curso de solución de problemas, solo de este modo el estudiante puede adquirir un profundo conocimiento de análisis.

No se pretende que un curso o un libro de texto remplacen a la experiencia de laboratorio. Ciertos aspectos de la medida solo se pueden aprender en el laboratorio. Sin embargo, la experiencia tiene limitado valor para el estudiante a causa de su incapacidad de analizar adecuadamente el problema de laboratorio. Los conceptos y el análisis son elementos vitales necesarios para cumplir una labor de medida satisfactoriamente y éste es el campo al que está dedicado el libro. Sin embargo,

las materias de laboratorio no se eliminan totalmente. Se sugieren en el texto las aplicaciones prácticas que están implicadas en la teoría. Por ejemplo, la importante idea de que la magnitud a medir puede ser perturbada por el mismo acto de medir, es reforzada con ejemplos cuantitativos en muchos casos.

La vasta literatura de revistas, libros de texto, boletines especiales y publicaciones de fabricantes, respecto a medidas eléctricas es demasiado amplia para un curso de introducción en el que dominan los conceptos analíticos. Por ello solo se da una lista de libros de texto (en inglés) al final del libro, que se consideran pertinentes. Se dan algunos viejos trabajos en medidas eléctricas para que el estudiante comprenda el extraordinario desarrollo del campo de las medidas en las últimas décadas. Se espera que este tratado no quede anticuado en muchos años.

El autor está en deuda con muchos de sus colegas que a lo largo de los años contribuyeron en este libro con problemas, métodos de aproximación y análisis. En la mayoría la identidad de la responsabilidad individual se ha perdido. Sin embargo, las ideas de Donald F. Hunt se han incorporado en el método estadístico de los Caps. 6 y 7 y también en otras secciones. Reconocemos también las contribuciones de Edward I. Hawthorne y Howard E. Tompkins. Neely F. Matthews fue tan amable de leer y corregir el manuscrito completo. La influencia de Harry Sohon, bajo cuya supervisión el autor explicó por primera vez esta materia, aparece en muchas formas a lo largo del tratado. La notable cooperación de la esposa del autor ha sido una ayuda vital y la más gratamente apreciada.

Ernest Frank

TABLA DE MATERIAS

Prólogo	5
Capítulo 1. INTRODUCCION	13
1-1. Desarrollo y alcance de las medidas eléctricas; 1-2. Naturaleza de las medidas y patrones eléctricos; 1-3. Papel de la fuerza en las medidas eléctricas; 1-4. El arte de medir; 1-5. Creación e ideas; 1-6. Incertidumbres y teorías; 1-7. Terminología y notación; 1-8. Comprobación dimensional y conversión de unidades; 1-9. Materias omitidas	30
Capítulo 2. REVISION DEL ANALISIS DE CIRCUITOS LINEALES	61
2-1. Definiciones; 2-2. Leyes de Kirchhoff; 2-3. Elementos de circuito de dos terminales; 2-4. Ecuaciones de circuitos y soluciones; 2-5. Soluciones en el estado estacionario sinusoidal; 2-6. Impedancia y admitancia; 2-7. División de tensión y de corriente; 2-8. Potencia media; 2-9. Ecuaciones de mallas; 2-10. Ecuaciones de nudos; 2-11. Impedancia vista desde la excitación e impedancia de transferencia; 2-12. Circuitos equivalentes; 2-13. Teorema de superposición; 2-14. Teorema de reciprocidad; 2-15. Teorema de Thévenin; 2-16. Teorema de compensación; 2-17. Forma aproximada del teorema de compensación	94
Capítulo 3. GALVANOMETROS, SHUNTS Y MEDIDORES DE CORRIENTE CONTINUA	
3-1. Ventajas del movimiento de d'Arsonval; 3-2. Descripciones del movimiento; 3-3. Ley fundamental de la fuerza; 3-4. Fuerza sobre una bobina en un campo uniforme; 3-5. Par sobre una bobina en un campo uniforme; 3-6. Ley de deflexión estática y proyecto; 3-7. Características de escala; 3-8. Instrumentos de campo radial; 3-9. Sensibilidad del galvanómetro; 3-10. Shunts elementales; 3-11. Shunt de Ayrton; 3-12. Shunts especiales; 3-13. Atenuadores; 3-14. Amperímetros y shunts; 3-15. Voltímetros; 3-16. Aplicaciones del teorema de Thévenin	
Capítulo 4. DINAMICA DEL GALVANOMETRO	
4-1. Respuesta transitoria; 4-2. Ecuación diferencial de pares; 4-3. Ecuación diferencial de corrientes; 4-4. Solución general de la ecuación de pares; 4-5. Condiciones en los límites; 4-6. Soluciones no oscilatorias; 4-7. Solución oscilatoria; 4-8. Velocidad de respuesta; 4-9. Decremento logarítmico; 4-10. Determinación de los parámetros; 4-11. Funcionamiento en el estado sinusoidal estacionario; 4-12. Solución estacionaria; 4-13. Resonancia del galvanómetro y ancho de banda de paso bajo; 4-14. Galvanómetro de vibración; 4-15. Relaciones entre las respuestas transitorias y estacionarias	

X Capítulo 5. ERRORES DE MEDIDA	133	Capítulo 11. FORMAS DE ONDA E INSTRUMENTOS DE CORRIENTE ALTERNA	319
5-1. Definiciones; 5-2. Clasificación de errores; 5-3. Eliminación de errores sistemáticos; 5-4. Errores grandes; 5-5. Variación de la cantidad medida; 5-6. Método del voltímetro-amperímetro; 5-7. Errores instrumentales; 5-8. Calibrado de aparatos de corriente continua; 5-9. Errores ambientales; 5-10. Efectos de la temperatura en los instrumentos de corriente continua; 5-11. Errores de observación; 5-12. Paralaje y lectura de instrumentos; 5-13. Errores residuales; 5-14. Forma de evitar errores		da; 10-5. Empleo del teorema de la compensación; 10-6. Aplicaciones del teorema de Thévenin; 10-7. Limitaciones en la sensibilidad del galvanómetro; 10-8. Limitación de la corriente del puente; 10-9. Rango de precisión de un puente fijo; 10-10. Intercambio de la batería y el galvanómetro; 10-11. La técnica de las décadas; 10-12. Puente de hilo; 10-13. Puente de límite; 10-14. Puente doble de Kelvin; 10-15. Puente doble de Kelvin desequilibrado	
Capítulo 6. ESTADISTICA Y ERRORES	157	Capítulo 12. INSTRUMENTOS QUE SIGUEN UNA LEY CUADRATICA	358
6-1. La media de datos primarios; 6-2. Desviaciones; 6-3. La dispersión de los datos primarios; 6-4. Desviación normal; 6-5. Datos agrupados; 6-6. Normalización de las ordenadas de los histogramas; 6-7. Probabilidad; 6-8. Curvas continuas de las distribuciones; 6-9. Formas integrales; 6-10. La curva gaussiana de error; 6-11. Tablas de probabilidad		11-1. Valor medio de una onda periódica; 11-2. Valor eficaz de ondas periódicas; 11-3. Series de Fourier; 11-4. Respuesta del galvanómetro a una entrada sinusoidal; 11-5. Respuesta del galvanómetro a una onda cuadrada. (Análisis en el dominio temporal); 11-6. Respuesta del galvanómetro a una onda cuadrada. (Análisis en el dominio de la frecuencia); 11-7. Instrumentos rectificadores; 11-8. Instrumento rectificador simple y doble; 11-9. Instrumentos rectificadores en puente; 11-10. Características de la escala de instrumentos rectificadores; 11-11. Análisis del voltímetro de diodo; 11-12. Instrumentos de termopar	
Capítulo 7. COMBINACIONES DE ERRORES	188	Capítulo 13. ANALISIS DE LOS PUENTES DE CORRIENTE ALTERNA	397
7-1. Media de la suma de dos grupos; 7-2. Variación de la suma de dos grupos; 7-3. Extensiones e interpretaciones; 7-4. Desviación normal con respecto a la media; 7-5. Errores de resultados calculados; 7-6. Desviación normal aproximada de resultados calculados; 7-7. Límite aproximado de error de resultados obtenidos; 7-8. Formas funcionales especiales; 7-9. Ejemplos de combinaciones de desviaciones normales; 7-10. Límite de error en el ajuste de un control		12-1. Ley de la deflexión media; 12-2. Fuerza y energía; 12-3. Ejemplos de fuerza y energía; 12-4. Voltímetro electrostático; 12-5. Instrumentos de hierro móvil; 12-6. Electrodinamómetro; 12-7. Amperímetros y voltímetros electrodinámicos; 12-8. Principios del vatímetro electrodinámico; 12-9. Errores inherentes a la conexión vatimétrica; 12-10. Análisis del vatímetro en operación sinusoidal; 12-11. Compensación de la reactancia de la bobina de potencial; 12-12. Aplicaciones especiales del instrumento electrodinámico	
Capítulo 8. MEDIDAS POR METODOS DE DEFLEXION	207	Capítulo 14. TRATAMIENTO DE DATOS	436
8-1. Medidas directas e indirectas; 8-2. Métodos de medida; 8-3. Métodos directos generales de deflexión; 8-4. Ohmétros serie; 8-5. Ohmétros Shunt; 8-6. Errores de óhmetro por envejecimiento de la batería; 8-7. Métodos indirectos generales de deflexión; 8-8. Anulación de los efectos de la resistencia de un amperímetro; 8-9. Influencia del voltímetro de escala múltiple; 8-10. Método de la media deflexión; 8-11. Determinación de la resistencia interna de una batería; 8-12. Métodos de comparación; 8-13. Comparación de dos resistencias; 8-14. Métodos de sustitución; 8-15. Método diferencial; 8-16. Voltímetro diferencial; 8-17. Amperímetro diferencial; 8-18. Galvanómetro diferencial		13-1. Puente de corriente alterna desequilibrado; 13-2. Aplicación del teorema de la compensación; 13-3. Lugar de círculos del detector de voltaje; 13-4. Lugar del puente de resonancia; 13-5. Convergencia al equilibrio; 13-6. Derivada de una cantidad compleja; 13-7. Sensibilidad del puente; 13-8. Medida de desplazamiento por el cambio de la capacidad; 13-9. Funciones de transferencia de voltaje; 13-10. Función de transferencia de voltaje del puente de Wien; 13-11. Aproximación de banda estrecha	
Capítulo 9. MEDIDA POR METODOS DE CERO	245	Bibliografía	469
9-1. El método de cero; 9-2. Métodos generales de cero; 9-3. Voltímetro de retroceso; 9-4. Métodos de comparación; 9-5. Principios potenciométricos; 9-6. Aplicaciones del potenciómetro; 9-7. Análisis del potenciómetro; 9-8. Análisis de los errores del potenciómetro; 9-9. Limitaciones de la sensibilidad del galvanómetro; 9-10. La disposición en puente; 9-11. Puentes de corriente alterna; 9-12. Clasificación de los puentes de corriente alterna; 9-13. Aplicaciones de los puentes; 9-14. El método de sustitución; 9-15. El método diferencial; 9-16. Métodos combinados cero-deflexión		Solución de algunos problemas	471
Capítulo 10. ANALISIS DE LOS PUENTES DE CORRIENTE CONTINUA	285	Índice	479
10-1. Puente de Wheatstone desequilibrado: solución exacta; 10-2. Desarrollo de los determinantes; 10-3. Algunas interpretaciones de la solución exacta; 10-4. Puente de Wheatstone desequilibrado: solución approxima-			

CAPITULO 1

INTRODUCCION

El ingeniero ha de enfrentarse inevitablemente con medidas, tanto si las utiliza simplemente como herramientas para obtener información, como si llega a verse interesado en estudios fundamentales de teoría de la medida. Debe estar familiarizado con aparatos, métodos, limitaciones, técnicas y posibilidades de exactitud de las medidas. No obstante, es imposible estar al corriente en todas las ramificaciones de esta materia altamente desarrollada. Una aproximación eficaz es conocer los conceptos fundamentales de la medida y algunos métodos de comprobada utilidad. Un apoyo firme en los principios constituye la estructura que soporta y engendra la comprensión necesaria para la solución de problemas concretos.

Lo importante es aprender la disciplina del pensamiento analítico. Sin esta disciplina, el progreso individual en cualquier campo científico se verá probablemente frustrado, y las oportunidades de perfeccionamiento serán escasas. Con el dominio de esta disciplina, los horizontes son prácticamente ilimitados.

1-1. Desarrollo y alcance de las medidas eléctricas. El desarrollo de la ciencia ha sido inseparable del desarrollo de las medidas. Las leyes de la naturaleza han sido descubiertas después que se encontraron medios para detectar y medir las magnitudes físicas. Las teorías científicas no han sido aceptadas sin reservas hasta que fueron confirmadas por las medidas. Evidentemente, el papel de las medidas está íntimamente ligado con todo el conocimiento que se ha obtenido y ha sido utilizado en las ciencias físicas. Las medidas siguen siendo indispensables como parte intrínseca del método científico y del conocimiento.

Las leyes de la electricidad representan un desarrollo histórico relativamente moderno dentro del campo de las ciencias físicas. La mayoría de estas leyes fueron descubiertas en la última parte del siglo XVIII y a principios del siglo XIX, y han estado estrechamente relacionadas con el desarrollo de medios para detectar y medir magnitudes eléctricas. Los hombres dedicados a las primeras investigaciones en este periodo, muchos de los cuales eran físicos, no podrán ser fácilmente olvidados porque sus nombres han venido a designar unidades y dimensiones concretas de

magnitudes eléctricas y de otras magnitudes físicas. Algunos de los nombres más destacados, citados por orden cronológico, son:

- William Gilbert (1540-1603)
- Charles Augustin de Coulomb (1736-1806)
- James Watt (1736-1819)
- Alessandro Volta (1745-1827)
- André Marie Ampère (1775-1836)
- Hans Christian Oersted (1777-1851)
- Karl Friedrich Gauss (1777-1855)
- George Simon Ohm (1787-1854)
- Michael Faraday (1791-1867)
- Joseph Henry (1797-1878)
- Wilhelm Eduard Weber (1804-1891)
- James Prescott Joule (1818-1889)
- William Thomson, primer barón Kelvin (1824-1907)
- James Clerk Maxwell (1831-1879)

Aunque estos hombres hayan sido responsables en gran parte de los desarrollos fundamentales, ha habido otros muchos que han trabajado y han contribuido al desarrollo de la electricidad en general, así como del campo concreto de las medidas eléctricas. Muchos de los instrumentos que se emplean hoy son los mismos esencialmente que los proyectados originalmente por estos científicos. Pocos métodos y técnicas de medida son nuevos, en el sentido de que las mismas ideas fundamentales fueron empleadas en los primeros desarrollos. Se recomienda al estudiante que examine las vidas y contribuciones de estos hombres.

El periodo de los progresos iniciales es fascinante. En nuestros días, que disponemos de instrumentos sensibles y de fuentes de energía eléctrica seguras, que se dan por supuestas con toda naturalidad, es difícil apreciar las dificultades y limitaciones de equipo con las que se enfrentaron estos hombres. Su éxito abrumador al probar los misterios de la electricidad, haciendo frente a tales dificultades, es ciertamente una muestra de la capacidad de la mente humana. Otros aspectos atractivos del desarrollo de las medidas eléctricas se refieren a la relación entre las matemáticas y la física, al desenvolvimiento de las relaciones entre las magnitudes eléctricas y mecánicas, y al hecho de que las ideas clásicas formen todavía la piedra angular en la cual se basa mucha de la práctica corriente.

El campo de las medidas eléctricas ha mostrado, en su breve historia, un crecimiento extraordinario. En la última parte del siglo XIX fueron diseñados muchos instrumentos diferentes y métodos para su empleo. El galvanómetro, instrumentos rectificadores y de termopar, instrumentos de medida de hierro móvil y electrodinámicos, y otros muchos, tomaron forma al menos en esbozo. Se concibieron el puente eléctrico, el potenció-

metro y otros instrumentos de método de cero. A principios del siglo XX los instrumentos se hicieron más refinados, y su realización en forma comercial permitió que los métodos de medida se extendieran. Estos desarrollos, combinados con la creciente facilidad para obtener fuentes de energía eléctrica, crearon un ambiente en el cual fue más fácil perfeccionar las medidas eléctricas. La inventiva e ingenio de muchos hombres dio lugar a nuevas aplicaciones a medida que se extendía el alcance y empleo de la electricidad. Coinciendo con este aumento de la actividad, se hizo cada vez más evidente que los que en todo el mundo participaban en ella necesitaban un lenguaje común con el que comparar y extender sus exploraciones y descubrimientos. Afortunadamente existió una colaboración internacional fructífera respecto al establecimiento de unidades y patrones internacionales.

La medida de magnitudes no eléctricas por medios eléctricos comenzó a recibir mayor atención a principios de este siglo y marcó el comienzo de una de las más vigorosas áreas de desarrollo y aplicación de instrumentos. Estos desarrollos fueron, y continúan siéndolo, ayudados sustancialmente por la introducción de los dispositivos electrónicos. La indicación y registro de magnitudes no eléctricas se ha extendido considerablemente y actualmente comprende una gran variedad de magnitudes de muy diversos campos tales como *fluidos* (conductividad, densidad, concentración de iones hidrógeno, humedad, nivel de líquidos, presión, velocidad de flujo, viscosidad), *calor* (radiación, temperatura), *luz* (flujo lumínoso, energía radiante, espectros), *mecánica* (aceleración, desplazamiento, distancia, equilibrio dinámico, fuerza, dureza, velocidad, vibración), *sonido* (presión acústica, intensidad), *tiempo* (cuenta, frecuencia) y otros. En este texto se presentan ejemplos de la medida eléctrica de algunas de estas magnitudes.

La era de la instrumentación ha llegado. No solo merecen atención la indicación y el registro, sino que el cálculo electrónico combinado con el control automático está invadiendo e incrementando numerosos campos. Estos desarrollos son de gran alcance en lo que se refiere a los adelantos de la tecnología. Tales sistemas permiten que las medidas y manipulaciones rutinarias se realicen automáticamente sin necesidad de que un operador humano les preste apenas atención. Pueden ser rápidas, seguras y exactas. Los desarrollos en el campo de la electrónica, cuando están aplicados al campo de las medidas, permiten extender la gama de frecuencias y llevar la sensibilidad de los aparatos hasta los límites del «ruido». De este modo se ensancha el campo de acción de la investigación en lo que se refiere a medidas eléctricas.

La investigación en instrumentación electrónica se basa fundamentalmente en métodos y principios viejos y no eclipsa los aspectos tradicionales de las medidas eléctricas. Cuando se necesitan resultados de gran precisión, no hay todavía nada que pueda sustituir a la habilidad experi-

mental y al esfuerzo creador. Por otra parte, existen incontables problemas de medida en el área de la poca precisión que precisan un trabajo de medida individual empleando métodos e instrumentos que han sido desarrollados a lo largo de los últimos cien años. El desarrollo de nuevos aparatos eléctricos de medida, destinados a la misma finalidad que instrumentos hoy en uso, sigue siendo de interés en la actualidad. La aplicación de los principios conocidos a problemas nuevos, el perfeccionamiento de los materiales y otros aspectos de las medidas eléctricas son de un interés fundamental en un laboratorio moderno.

1-2. Naturaleza de las medidas y patrones eléctricos. Medir es determinar la cantidad de una magnitud en comparación con otra magnitud similar. Por ejemplo, si hay dos corrientes distintas en un circuito, puede medirse cada una de ellas con el fin de determinar su relación. A menos que se pretenda una comparación cuantitativa, el problema no pertenece al dominio de las medidas. Así, por ejemplo, la pretensión de determinar la naturaleza intrínseca de una corriente eléctrica pertenece al campo de la física o de la filosofía. Pero la determinación de una corriente en comparación con 1,0 amp de corriente es una actividad propia de medida.

En principio puede aportarse cualquier base racional para la intercomparación de magnitudes medidas, y de hecho así se hace algunas veces dentro de la estructura limitada de una investigación concreta. Sin embargo, el empleo general de diferentes bases de comparación conduciría a un estado caótico y sería una traba para el progreso. La comunicación de los resultados y el intercambio de ideas se verían seriamente constreñidos. Fue la comprobación de esta dificultad la que condujo a que el campo de las medidas se desarrollara y condujera a un acuerdo internacional que aceptara unos patrones con los cuales pudieran ser comparadas las medidas eléctricas. Mientras que los aparatos empleados en un experimento dado pueden estar muy lejos del patrón fundamental, la unidad en la cual están calibrados proceden de un patrón fundamental que se mantiene y emplea con propósitos de calibración.

Los patrones físicos fundamentales son longitud, masa y tiempo. El patrón de longitud es la distancia entre dos señales hechas sobre una cierta barra de metal; el de masa, el peso de un cierto cilindro de metal; el de tiempo, una fracción específica de un día solar medio. Estos patrones están relacionados con las magnitudes eléctricas por medio de leyes físicas, tales como la ley de fuerza que se presenta en la Sec. 3-3. Los *patrones eléctricos absolutos* son aquellos que se miden en función de las tres magnitudes fundamentales. El último paso en la evolución de los patrones eléctricos fue la adopción por todo el mundo, en 1948, de los patrones eléctricos absolutos.

Los patrones eléctricos que existían antes de 1948 no estaban basados en las magnitudes fundamentales longitud, masa y tiempo. Consistían en dispositivos reproducibles con exactitud, medidos en *unidades internacio-*

nales. El ohmio internacional era la resistencia de una columna específica de mercurio; el amperio internacional se basaba en la deposición electrolítica de una solución de nitrato de plata; el voltio internacional se basaba en la diferencia de potencial de una pila de cadmio. Estos patrones consistían en una superación de otros que habían sido desarrollados previamente y que habían resultado defectuosos. Por ejemplo, un patrón anterior del ohmio consistía en la resistencia de una cierta bobina de hilo de una aleación de platino y plata, y un patrón anterior de diferencia de potencial se basaba en una pila de cinc. De este modo, los patrones absolutos actuales representan el producto de un proceso continuamente evolutivo en busca de una mayor constancia, reproducibilidad y exactitud. Los patrones absolutos recientemente adoptados difieren muy poco (del orden del 0,033 al 0,05 por 100) de los patrones internacionales anteriores. Estas diferencias son despreciables a menos que se pretenda una exactitud muy elevada.

La medida de los patrones absolutos (o de los patrones internacionales precedentes) es extremadamente laboriosa y larga. Por ejemplo, la determinación absoluta de la corriente implica la medida de la fuerza entre dos bobinas por medio de una balanza en un sistema muy elaborado y conocido con toda precisión. Por tanto, se presenta la necesidad de *patrones secundarios*, más convenientes para ser empleados en la calibración de otros aparatos. Estos patrones secundarios, que periódicamente son comprobados por comparación con medidas absolutas, consisten en hilos de resistencia para la resistencia y pilas de cadmio para la diferencia de potencial. La intercomparación entre múltiples unidades patrón conservadas en los Estados Unidos en el National Bureau of Standards es mejor que una parte por millón, mientras que los patrones absolutos tienen una exactitud de algunas partes por millón. Así las magnitudes a las que se refieren fundamentalmente todas las medidas eléctricas son conservadas dentro de unos límites que alcanzan la exactitud exigida en la mayoría de las medidas que se realizan hoy en día.

1-3. Papel de la fuerza en las medidas eléctricas. Las magnitudes eléctricas que se desean medir suelen ser carga, corriente, diferencia de potencial, resistencia, capacidad, inductancia y muchas otras. Casi invariabilmente, en el curso de la medida de estas magnitudes, se ve implicada la fuerza mecánica. La fuerza es el vehículo por medio del cual se suministra la información útil. Puede parecer anómalo el encontrar que las medidas eléctricas están realmente basadas en la mecánica. Sin embargo, es la fuerza mecánica asociada con cargas estacionarias o en movimiento la que permite que la electricidad sea detectada, medida y puesta en servicio.

Del análisis del movimiento de cada uno de los instrumentos de medida presentados en este texto se desprende evidentemente que es una fuerza mecánica que actúa sobre el elemento móvil la responsable de su

deflexión. Esto es cierto en todo instrumento del tipo de deflexión. Cuando la fuerza es relacionada con una magnitud eléctrica, se acostumbra a decir que la magnitud eléctrica está siendo medida. Pero lo que se quiere significar, más precisamente, es que la fuerza está siendo empleada para medir una magnitud eléctrica. Así, se puede considerar a la mayoría de las medidas eléctricas como el proceso de relacionar fuerzas mecánicas con magnitudes eléctricas de las cuales dependen.

La fuerza sirve fundamentalmente como un mecanismo para transferir la información eléctrica, que está fuera del alcance directo de la percepción humana, a regiones donde las potencias sensitivas del hombre son aplicables y seguras. La indicación de la aguja de un amperímetro puede ser apreciada por los medios visuales del hombre en una décima de una división de la escala, y esto puede representar una milionésima de amperio o menos. Empleando la capacidad humana para sentir el calor, sin la ayuda de conversión en fuerza, puede tenerse en la mano un hilo por el que circule una corriente y tal vez apreciar un cambio en un factor 10 de la corriente, debido al cambio en el calentamiento producido en el cable. Evidentemente, éste no es un procedimiento cuantitativamente satisfactorio. Una situación semejante se presenta para muchas de las magnitudes físicas que son medidas, incluyendo igualmente las no eléctricas.

Es una suerte que la actividad eléctrica se manifieste en función de fuerza mecánica. Si no fuera así, muchos fenómenos eléctricos no podrían ser detectados. Por supuesto, algo los haría todavía aparentes, por ejemplo la luz o calor producidos por el filamento de una lámpara incandescente cuando se le aplica una corriente. Pero la exploración de los aspectos cuantitativos de los fenómenos eléctricos se vería grandemente limitada sin las fuerzas que pueden emplearse para convertir la actividad eléctrica en cosas sensibles a la percepción humana. Esto sugiere que bien puede haber otros fenómenos físicos todavía no descubiertos y que el ser humano desconoce actualmente por completo. Si tales fenómenos existen, están fuera del alcance de la sensación directa, y todavía han de ser traídos al dominio de la percepción. ¿Qué fenómenos no detectados esperan ser descubiertos? Esta forma de pensar pone de manifiesto las profundas inferencias de los aparatos de medida. Estos son algo más que mecanismos que permiten la comparación cuantitativa. En muchos casos son aparatos que hacen posible la observación.

1-4. El arte de medir. Medir consiste mucho más en realizar un trabajo de creación que en seguir unos procedimientos rutinarios establecidos. Por ejemplo, dos individuos enfrentados con un mismo problema de medida pueden seguir procedimientos completamente diferentes y llegar a resultados diferentes aunque los esfuerzos de ambos estuvieran encaminados a conseguir respuestas objetivas. Es inevitable que ciertas materias pertenezcan al dominio de la técnica y constituyan una especie

de artesanía. La situación no es muy distinta de la que se presenta en otros campos del arte, donde un conjunto de conglomerado de cosas se combinan para crear un producto final.

Una de las características de las medidas que debe tenerse en cuenta, que hace en parte un arte de la medida, es que todas las observaciones están sujetas a error. Estos errores deben ser evaluados críticamente. Deben explorarse todas las condiciones que puedan influir en la corrección de los resultados, deben comprenderse y remediararse en todo lo posible. Es indispensable un conocimiento profundo del método y del aparato empleados. Normalmente es necesario un análisis teórico detallado. Aun cuando este libro insista en los aspectos analíticos de las medidas, debe tenerse presente que para una buena realización de las mismas no basta, ni mucho menos, con conocer la teoría en la que se apoyan. La experiencia es un elemento significativo para el cual a menudo no hay sustituto. Sin embargo, de todos los factores que intervienen en el éxito de un experimento, la comprensión de la teoría subyacente es lo que probablemente contribuye más a la obtención de buenos resultados.

El investigador debe elegir un método entre los que conoce, de acuerdo con factores tales como exactitud exigida, aparatos disponibles, coste del esfuerzo total, tiempo disponible para obtener los resultados, facilidad para realizar las medidas y destreza del personal que va a efectuarlas. Estas condiciones son a menudo antagónicas. Una vez seleccionado el método óptimo, el experimento debe planearse con detalle y remediar todos los defectos que se prevean. El aparato que va a ser empleado debe estudiarse críticamente hasta ser perfectamente comprendido en sus aspectos manipulativo, características básicas, exactitud y margen de operación. Deben planearse las técnicas apropiadas, preparar de antemano el tratamiento de datos, y deben realizarse e interpretarse los análisis teóricos referentes a todos los factores pertinentes.

En la ejecución de las medidas deben tenerse en cuenta muchas prácticas de laboratorio y «recetas» para evitar falsos resultados. Los contactos eléctricos deben ser firmes, las soldaduras bien hechas, los contactos deslizantes estar en buenas condiciones. Es necesaria una continua alerta para percibir los defectos del equipo. El investigador experimentado mantiene una constante vigilancia y una actitud de desconfianza hacia todos los detalles. Cuando aparezcan dificultades con campos extraños que interaccionen con el equipo debe intentarse poner remedio. Si se desea terminar el trabajo, deben tomarse ciertas precauciones de protección y seguridad del equipo y personal. Todos estos factores, y otros, se enlazan de forma compleja, contribuyendo al resultado final. También contribuyen a la satisfacción que se deriva del trabajo bien hecho.

En las medidas eléctricas de tipo corriente, las exigencias de exactitud son de primordial importancia para determinar el cuidado que debe ponerse en ellas. Una exactitud del orden de unos pocos por ciento se ob-

tiene fácilmente con un equipo moderno sin necesidad de excesivos cuidados ni técnicas difíciles. Para obtener una exactitud del orden del 1 por 100 es generalmente necesario el uso de correcciones y poner bastante cuidado en los métodos y procedimientos seguidos. Exactitudes del orden del 0,1 por 100 piden un exceso de trabajo meticuloso en todos los detalles. A menudo son necesarios métodos especiales para evitar el empleo de instrumentos de deflexión que, con pocas excepciones, son incapaces de dar resultados tan exactos. Por debajo del orden del 0,1 por 100 de exactitud, deben emplearse técnicas especiales de métodos de gran precisión. Patrones exactos, métodos de sustitución, cuidadoso control del ambiente, pruebas exhaustivas de reproducibilidad, análisis estadístico de datos y otras técnicas se hacen indispensables si quieren obtenerse buenos resultados. De este modo, la exactitud exigida es a menudo la primera indicación del carácter de la medida. Esto no quiere decir que pueda haber despreocupación ni con las medidas más groseras, pues siempre hay lugar para las equivocaciones.

Con mucha frecuencia la diferencia entre un experimento ejecutado cuidadosamente que conduce a resultados seguros y un intento concebido pobemente que da lugar a respuestas problemáticas reside en esa ineluctable cualidad llamada técnica. A lo largo de este texto están espaciados ejemplos de diferentes técnicas de medida. Se aconseja al estudiante que las comprenda claramente y que piense sobre ellas críticamente. En conjunto, consiste en lo que puede llamarse prácticas inteligentes, que presentan cierta superioridad y ventajas definidas sobre primeras aproximaciones que puedan proyectarse. Son a menudo sutiles y desarrollables solo después de un estudio profundo de métodos y procedimientos, o quizás después de repetidos fallos en repetidos intentos en el laboratorio. Este dominio de la técnica no se adquiere siempre necesariamente con facilidad. Una norma útil, pero a menudo descuidada, es la de planear el tratamiento de los datos de antemano, antes de realizar el experimento real. Esto tiene la ventaja de que exige un análisis teórico antes de obtener los resultados, y proporciona otras ventajas secundarias. Además, un planteamiento previo ayuda a llevar adelante el experimento indicando órdenes de valores que van a ser medidos, regiones en las que concentrar los datos experimentales y sensibilidad de las contribuciones de diversas magnitudes a la exactitud total.

Aun cuando la técnica es una materia fugaz puede aprenderse mucho con el ejemplo de las prácticas que otros han encontrado satisfactorias. Sin embargo, una parte muy importante de la técnica puede aprenderse solo con la experiencia, como son ciertos aspectos de mantenimiento y manipulativos del equipo o simplemente cómo habría que sacudir vigorosamente un instrumento para hacer desaparecer una señal errática.

1-5. Creación e ideas. Cuando ha tomado contacto con una nueva idea, ¿se ha preguntado alguna vez si podría habersele ocurrido a

usted? ¿Se ha entretenido alguna vez con el pasatiempo intelectual de intentar encontrar un camino mejor para realizar un objetivo deseado?

El campo de las medidas eléctricas está lleno de nuevos problemas que exigen soluciones nuevas y piden considerable atención. A lo largo del texto están espaciados muchos ejemplos de ideas viejas que han resultado útiles. Ellas reflejan un pensamiento claro y astuto de otras gentes en el pasado. También se examinan ciertas mejoras ingeniosas en instrumentos y métodos, algunos de los cuales son difíciles de mejorar en la práctica corriente. Muchas de estas ideas serán aplicables a problemas del futuro, y es una buena cosa analizarlas y comprenderlas. Una vez dominadas, solo queda reconocer cómo pueden ser incorporadas en una situación nueva.

Desgraciadamente no existe ninguna fórmula para el pensamiento creador, para la producción de nuevas ideas o para el descubrimiento de mejores soluciones a problemas nuevos. Si tal fórmula existiera, estaría extremadamente explotada. Sin embargo, puede desarrollarse el hábito de pensar analíticamente y de formular nuevas ideas. Se requiere una mente aguda, inquisitiva y bien entrenada. Poco se sabe acerca de la estimulación de ideas creadoras. Ni siquiera ha sido establecido que la completa comprensión del problema sea un ingrediente necesario. Sin embargo, la demanda de ideas de ese tipo y las oportunidades de aplicarlas no tienen precedente y merecen ser cultivadas.

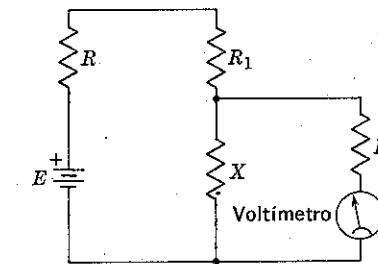


FIG. 1-1. Medida de resistencias por el método de deflexión.

Para sugerir una línea de pensamiento que ilustre la evolución de una idea supongamos que hay que proyectar un método de gran exactitud para medir una resistencia. Puede descartarse inmediatamente un método de voltímetro-amperímetro, porque el resultado depende de la calibración y calidad de *dos* instrumentos. Además, ciertos errores (que son corregibles) son inherentes a este método, como se describe en la Sec. 5-6. Puede hacerse un segundo intento empleando el circuito de la Fig. 1-1. La batería de f.e.m., *E*, bien conocida, se selecciona para que tenga una resistencia interna, *R*, que sea despreciable frente a *R*₁ + *X*, siendo *R*₁

una resistencia conocida con gran exactitud y X la resistencia que se quiere determinar. Además, se selecciona el voltímetro para que tenga una resistencia, R_v , que sea muy grande comparada con X . A éste se le llama un método de medida por deflexión. La lectura del voltímetro, V , se obtiene por la regla del divisor de tensión.

$$V = \frac{X}{X + R_1} E \quad R \ll (R_1 + X), R_v \gg X$$

Despejando X :

$$X = \frac{R_1 V}{E - V} \quad (1-1)$$

De esta manera X puede calcularse a partir de la lectura V y de los valores conocidos de E y R_1 . Por ejemplo, si la lectura es la mitad de E , entonces es $X = R_1$.

Aunque este método puede ser útil para medidas groseras de X , su exactitud está severamente limitada por diversos factores:

1. Toda la confianza se deposita en la deflexión del voltímetro, y esto entraña errores de calidad y de calibración.
2. Para que el voltímetro marque una lectura debe pasar una corriente por él. Esto introduce cierto error, aun cuando la corriente sea muy pequeña. En otras palabras, el efecto de R_v no es nunca enteramente despreciable. Este error también cambia para diferentes valores de X , si se emplea el mismo voltímetro para todas las medidas.
3. La resistencia interna de una fuente de f.e.m. no es nunca cero, y ello introduce un pequeño error en la Ec. (1-1).
4. En la práctica, el valor de la f.e.m. de una fuente de la que se saca corriente resulta ser una magnitud inestable, que depende del tiempo e historia de la fuente.

No caben objeciones al conocimiento que se pide de la resistencia R_1 . Una resistencia es algo que puede ser estable y bien conocido en la práctica, con tal de que no se haga pasar por ella una corriente excesiva.

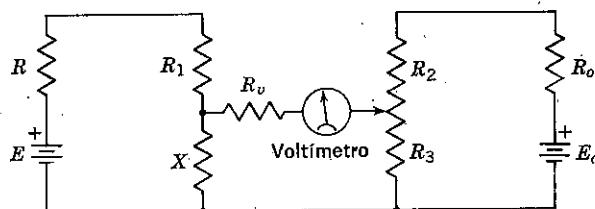


FIG. 1-2. Medida de resistencias por el método de cero usando dos baterías.

INTRODUCCION

Después de algunas consideraciones, puede llegarse a concebir el circuito de la Fig. 1-2 para superar simultáneamente la primera y segunda dificultades. Aquí, una segunda f.e.m., E_0 , de resistencia interna, R_0 , despreciable, se emplea para obtener una tensión ajustable que pueda ser opuesta a la diferencia de potencial entre los extremos de X . El contacto deslizable se ajusta hasta que la lectura en el voltímetro se hace *cero*. Entonces, ni la calibración del voltímetro ni su resistencia intervienen en la determinación de X . Esto se llama un método de cero de medida. Cuando el cursor se ajusta para $V = 0$, la caída de potencial a través de X es igual que a través de R_3 . Entonces,

$$\frac{XE}{R_1 + X} = \frac{R_3 E_0}{R_2 + R_3} \quad R \ll (R_1 + X), R_0 \ll (R_2 + R_3)$$

Despejando X :

$$X = \frac{R_1}{\frac{E}{E_0} \left(1 + \frac{R_2}{R_3} \right) - 1} \quad (1-2)$$

Solamente las *relaciones* E/E_0 y R_2/R_3 necesitan ser conocidas con exactitud, así como el valor de R_1 . La relación de resistencias y R_1 pueden ser conocidas en la práctica con buena exactitud. Pero las dos fuerzas electromotrices, dado que ambas han de suministrar una corriente, no son magnitudes estables, ni lo es su relación. Además, las resistencias internas deben ser ambas pequeñas. El método admite todavía perfeccionamientos, pero al menos no depende ya de la calibración del voltímetro y no precisa un voltímetro de resistencia elevada. De hecho, cualquier detector sensible de corriente continua serviría para este propósito en el circuito de la Fig. 1-2.

Profundizando más, se puede llegar finalmente a la idea de modificar la disposición de la Fig. 1-2, empleando la misma batería para E y E_0 . La relación E/E_0 de la Ec. (1-2) sería forzosamente la unidad. Resulta en consecuencia el circuito de la Fig. 1-3. Cuando la lectura del voltímetro se hace cero después de ajustar el cursor, la diferencia de potencial en X es la fracción $X/(R_1 + X)$ de la tensión E_a , aplicada a $R_1 + X$. La diferencia de potencial en R_3 es igual a la fracción $R_3/(R_2 + R_3)$ de la misma tensión aplicada E_a . Por tanto,

$$\frac{XE_a}{R_1 + X} = \frac{R_3 E_a}{R_2 + R_3}$$

La tensión aplicada, E_a , se elimina y la solución de X es

$$X = \frac{R_3}{R_2} R_1 \quad (1-3)$$

Esto está de acuerdo con la Ec. (1-2) cuando $E = E_0$. La relación R_3/R_2 y el valor de R_1 pueden ser conocidos con considerable exactitud. El resultado no depende del conocimiento de E , y su resistencia interna, R , no necesita ser pequeña, puesto que no afecta a la relación de la Ec. (1-3). Además, el resultado es independiente de la calibración del voltímetro, así como de su resistencia. Puede admitirse que ésta es verdaderamente

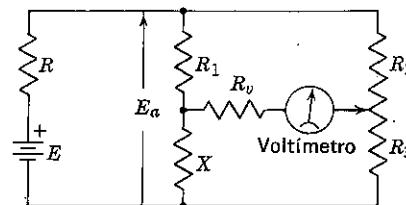


FIG. 1-3. Medida de resistencias por el método de cero usando una batería.

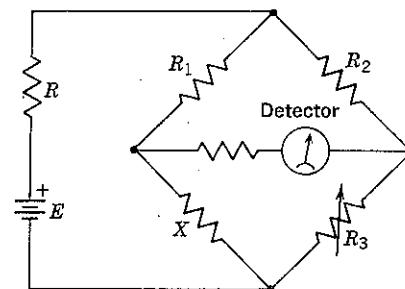


FIG. 1-4. Puente de Wheatstone.

una disposición poco corriente. Sus ventajas y limitaciones se analizan con detalle en el Cap. 10.

El circuito de la Fig. 1-3 es el conocido puente de Wheatstone, dibujado de manera más habitual en la Fig. 1-4. Fue sugerido primeramente por S. Hunter Christie en 1833, pero no mereció ninguna atención hasta que Charles Wheatstone lo aplicó a la medida de resistencias en 1843. Desde entonces ha llegado a ser una de las más valiosas formas de circuito en el campo de las medidas, y es empleado ampliamente en muchas aplicaciones. No está limitado a resistencias, y los cuatro brazos pueden estar constituidos por gran variedad de diferentes elementos de circuito. Desde cierto punto de vista, consiste en un circuito constituido por elementos de circuito, conectados entre cuatro nudos de todas las maneras posibles. Cómo llegó Christie a esta idea siguiendo la secuencia indicada en las Figs. 1-1 a 1-3 es una cuestión discutible. Sin embargo, es una línea de pensamiento plausible. Quizá pueda usted pensar en otra.

1-6. Incertidumbres y teorías. Un hecho significativo de las medidas es que el «verdadero» valor de una magnitud medida no es nunca conocido con absoluta certeza. Los fenómenos físicos y las leyes que los describen son estadísticos por naturaleza. Siempre muestran pequeñas fluctuaciones que en último término impiden la determinación del verdadero valor de una magnitud. Estas materias se discuten en los Caps. 5 a 7.

Puede resultar desconsolador encontrarse con un límite superior por encima del cual no es posible pasar. Afortunadamente, en la mayoría de los fenómenos macroscópicos las incertidumbres son completamente despreciables, y éste es el caso de la mayoría de las aplicaciones de in-

geniería. Pero al seguir una magnitud más y más de cerca, se alcanza inevitablemente el límite del «ruido» de fluctuaciones aleatorias. Esta característica intrínseca de las magnitudes físicas requiere una actitud y estado mental que sean apropiados a la situación. Así, la magnitud *cero* se escribe muy ligeramente en el análisis teórico, pero no existe experimentalmente. Por ejemplo, la lectura del voltímetro en el circuito de la Fig. 1-3 nunca puede reducirse exactamente a cero. Este aspecto de las magnitudes medidas es preciso tenerlo tanto más en cuenta cuanto mayor sea la exactitud que se busca. En el último análisis hay que darse por contentos con los mejores valores «verdaderos» estimados, y a menudo son necesarios procedimientos elaborados para llegar al valor más probable de una magnitud.

Merece ser comentada la potencia de la medida como factor decisivo en el desarrollo de la teoría. Una teoría se afirma únicamente si todas las medidas, sin excepción, son concordantes con ella. Por supuesto, es posible darse cuenta de que pueden encontrarse inconsecuencias con una teoría supersimplificada, pero esto no implica necesariamente que la explicación teórica no sea conocida. Al igual que en matemáticas, en física basta una sola excepción para señalar un fallo. Si un resultado no es explicable por teorías aceptadas, aun cuando otros fenómenos sean bien explicados, es señal de que hay que revisar la teoría o restringirla. El hecho importante es que basta un solo caso para producir el trastorno. Esto representa una exigencia extrema de la teoría. El descubrimiento debe, por supuesto, ser reproducible y confirmado por trabajadores competentes y objetivos. Ello exige normas rigurosas, gran integridad y completa objetividad en la realización de las medidas.

1-7. Terminología y notación. La terminología referente a varios puntos de este texto no es uniforme en la terminología sobre electricidad. Tres de estos puntos son particularmente destacables y pueden ser engorrosos sin una breve explicación.

a) *Control*. El término «control» se emplea en este libro para describir una resistencia de tres terminales en la cual un terminal es un contacto deslizante ajustable independientemente. En los ejemplos de medida de resistencia de las Figs. 1-2 y 1-3 se empleó un control. Este dispositivo de tres terminales es llamado con frecuencia, incorrectamente, potenciómetro. Los potenciómetros son aparatos más elaborados, compuestos de elementos de circuito y generadores (de c. c. o de c. a.) que se emplean para medidas de precisión de diferencias de potencial. Por otra parte, a la resistencia de tres terminales se le llama algunas veces divisor de tensión o divisor de potencial. Esta terminología no distingue entre los dispositivos ajustables y no ajustables. Así, dos resistencias fijas en serie con una derivación en su unión, constituye un divisor de tensión, pero no es un control, tal como el término se emplea en este texto. Un téostato es una resistencia variable de dos terminales. Cuando uno de los terminales

nales fijos de un control no se emplea, puede llamársele reóstato.

b) *Corriente*. Corriente de conducción es una magnitud *escalar* instantánea definida como la carga neta (media) que pasa por una sección transversal dada de una región por unidad de tiempo. La carga fluye a través de la sección transversal, y la corriente es un número que describe la variación del flujo de carga. Hay que aclarar que la carga fluye, no la corriente. Sin embargo, mucha literatura se refiere al «flujo» de corriente incorrectamente. Pero la corriente *es* el flujo y, en consecuencia, semejante expresión implica literalmente que el flujo fluye. En este texto se evita el empleo del término flujo de corriente.

c) *Tensión*. La diferencia de potencial entre dos puntos es una magnitud escalar instantánea, definida como el trabajo hecho por la unidad de carga al moverse desde un punto al otro. El término tensión, que con tanta frecuencia se encuentra en la literatura sobre electricidad, tiene un significado menos preciso. Realmente se ha convertido en un término cada vez más vago debido a sus diversos usos. A pesar de esta dificultad, el término tensión se emplea aquí como sinónimo de diferencia de potencial. Es cuestión de economía de palabras, que evita la repetida referencia a los dos puntos entre los cuales existe la diferencia de potencial. No habrá lugar a confusiones, puesto que generalmente queda claro por el contexto qué dos puntos están siendo considerados cuando se emplea la palabra tensión.

Se ha intentado utilizar la notación aceptada para todas las magnitudes y emplear símbolos que sean claros y precisos. Es imposible, sin crear símbolos nuevos y extraños, o emplear subíndices enojosos, conseguir que cada símbolo represente una sola magnitud. Se considera innecesaria una lista completa de símbolos, pero vale la pena mencionar algunas normas generales.

En general, todas las magnitudes complejas (que representan estados estacionarios, corrientes, tensiones, impedancias, admitancias, etc.) han sido representadas en letra negrita. Asimismo, todas las magnitudes vectoriales tridimensionales se escriben también en letra negrita. No habrá ambigüedad alguna derivada del empleo de letra negrita para estos dos grupos diferentes, puesto que nunca aparecen al mismo tiempo en el texto vectores y magnitudes complejas. Es muy importante distinguir claramente entre estas magnitudes y las escalares que puedan estar relacionadas con ellas, pero que en ningún caso pueden intercambiarse con ellas.

Los valores instantáneos que son funciones del tiempo se representan por letras minúsculas. Las magnitudes fijas, tales como valor medio o valor de pico, vienen expresadas por letras mayúsculas. Aunque pueda emplearse el mismo símbolo para magnitudes diferentes en distintas partes del texto, su significado quedará claro por el contexto. Por ejemplo, *p* representa a la potencia instantánea en el Cap. 2, pero se emplea

para probabilidad en el Cap. 6; *W* designa al trabajo en el Cap. 2, pero representa a la anchura de la bobina de un galvanómetro en el Cap. 3. Algunos símbolos se emplean exclusivamente para representar a la misma magnitud a lo largo de todo el texto. Estos corresponden en la mayoría de los casos a acuerdos bien establecidos, incluyendo $\epsilon = 2,7183$, $\pi = 3,1416$, *q* = carga instantánea y ω = frecuencia angular en radianes por segundo. El símbolo θ se ha reservado para la deflexión angular de un instrumento indicador. Para los logaritmos se distingue claramente entre \ln = logaritmo en base e y \log = logaritmo en base 10.

1-8. Comprobación dimensional y conversión de unidades. El análisis dimensional es un valioso método general para explorar limitaciones y relaciones entre variables de un sistema físico. Algunas veces se le llama principio de similitud. Dos derivaciones relativamente secundarias de este método son particularmente útiles en análisis rutinarios. Estas son: 1) comprobación de las dimensiones de las ecuaciones y 2) cambio de un sistema de unidades a otro.

Cualquier relación funcional simple entre magnitudes físicas debe ser homogénea dimensionalmente; es decir, todos los términos de la ecuación deben tener las mismas dimensiones. Se desprende de aquí que, al sumar o restar dos términos que representen magnitudes físicas, ambos deben tener las mismas dimensiones. Esta propiedad de las ecuaciones proporciona una regla que sirve a menudo para ahorrar tiempo de análisis al desarrollar fórmulas teóricas. Equivocaciones en operaciones algebraicas o de otro tipo pueden detectarse inmediatamente aplicando una comprobación de homogeneidad dimensional. Además, es generalmente fácil de identificar el término equivocado y seguir el error.

Por ejemplo, supongamos que en el curso de un análisis un trozo de la ecuación que se desarrolla es

$$\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_5} + \sqrt{R_6^2 + R_7^2}$$

donde el símbolo *R* representa resistencia en ohmios. Evidentemente hay un error, puesto que el primer término no tiene dimensiones, mientras que los otros tienen dimensiones de ohmios. Probablemente en una etapa anterior se olvidó inadvertidamente una resistencia que multiplicaba a R_1/R_2 . Una prueba tan simple como ésta evita a menudo mucho trabajo cuando se persigue un resultado final. Habría que preguntarse continuamente si las expresiones son homogéneas dimensionalmente. Es uno de los aspectos más sencillos de comprobar y más reveladores de una ecuación, y sirve para descubrir el error en un número de casos sorprendente. El análisis dimensional es también particularmente útil porque permite allanar dificultades en problemas donde aparecen cambios de unidades, que a veces son muy engorrosos. En estos casos, la regla para cambiar de

un conjunto de unidades a otro consiste simplemente en escribir las fórmulas dimensionales conocidas entre las magnitudes que intervienen. Como ilustración, consideremos la conversión de una velocidad angular de 100 radianes por minuto en grados por segundo. Puesto que el radian contiene aproximadamente 57,3 grados, y un minuto contiene 60 segundos, resulta

$$100 \frac{\text{rad}}{\text{min}} = 100 \frac{57,3 \text{ grad}}{60 \text{ seg}} = 95,5 \frac{\text{grad}}{\text{seg}}$$

En esta expresión, cada unidad ha sido remplazada por un número equivalente de unidades diferentes. En efecto, las unidades no deseadas se eliminan, y queda

$$100 \frac{\text{rad}}{\text{min}} \times 57,3 \frac{\text{grad}}{\text{rad}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ seg}} = 95,5 \frac{\text{grad}}{\text{seg}}$$

Este método es general y directo. Nótese que es completamente innecesario, y generalmente indeseable, expresar primero todas las unidades en función de unidades fundamentales.

El mismo método puede aplicarse para determinar dimensiones equivalentes de una magnitud dada. Esto puede realizarse con relativamente pocas fórmulas físicas elementales que contengan las unidades en cuestión. Por ejemplo, para encontrar las dimensiones equivalentes de

$$\frac{L}{R} = \frac{\text{henrio}}{\text{ohmio}}$$

se recurre a la ley de Ohm y a la relación que define la autoinducción:

$$v = Ri \quad v = L \frac{di}{dt}$$

Claramente se ve que R tiene dimensiones de voltio por amperio y L de voltio-segundo por amperio. Por tanto,

$$\frac{\text{henrio}}{\text{ohmio}} = \frac{\text{voltio-seg}}{\text{amp}} \times \frac{1}{\text{voltio/amp}} = \text{seg}$$

1-9. Materias omitidas. Cualquier libro que se refiera a un campo tan polimórfico como las medidas eléctricas no puede abarcar todos los aspectos del tema. Sin embargo, este libro está más limitado que otros en cuanto a las materias que trata. Esto es debido a que se insiste sobre

todo en conceptos y análisis. Debe tenerse presente que muchos aspectos que se encuentran en los tratados tradicionales, son o bien completamente omitidos o simplemente mencionados de pasada. Existe mucha literatura sobre estos asuntos, que el estudiante puede consultar si quiere estudiarlos.

Entre los aspectos generales que se pasan por alto se encuentran la descripción detallada y construcción de equipos de medida y de las componentes que forman parte de estos equipos. Así, se excluye el proyecto y construcción de resistencias patrón (de precisión), apantallamiento de puentes de c. a., información sobre pilas patrón y otros temas semejantes. No se habla de aparatos comerciales ni de sus características de manejo. Solamente se analizan unos pocos tipos básicos de instrumentos, y no se insiste sobre otros muchos tipos que son frecuentemente utilizados. Aunque se describen ciertas aplicaciones de instrumentos y métodos, para hacer el análisis significativo, no se ha pretendido, sin embargo, incluir muchas aplicaciones generales de este campo. En general, no se tratan principios ni equipos electrónicos, ni medidas en alta frecuencia. Efectos parásitos, tales como diferencias de potencial de contacto, capacidades residuales y otros, algunas veces importantes en la práctica, no son estudiados.

Algunos de los temas concretos que se han omitido y que han aparecido en muchos textos en el pasado son medidas magnéticas, instrumentos transformadores, medidas de energía, medidas y circuitos polifásicos. No se analizan tampoco instrumentos tan clásicos como galvanómetros y potenciómetros de corriente alterna.

Podría parecer que se han omitido muchos más temas que los que se tratan, y realmente éste es el caso. Sin embargo, se confía en que, con una cuidadosa selección de materias, los conceptos e ideas principales en el campo de las medidas eléctricas hayan sido tratados.

CAPITULO 2

REVISION DEL ANALISIS DE CIRCUITOS LINEALES

Se presenta una sinopsis de los conceptos fundamentales sobre circuitos que se utilizan en este texto para tener una referencia a mano y para concretar la terminología y convenios sobre circuitos que va a emplearse. No se pretende que sea nada más que una revista condensada y un breve sumario de una materia que seguramente el lector ha estudiado antes. No se tratan ramificaciones del tema altamente desarrollado del análisis lineal de circuitos. Se supone un conocimiento previo de ecuaciones diferenciales, álgebra compleja y uso de determinantes para resolver sistemas de ecuaciones.

2-1. Definiciones. Se toman como unidades fundamentales (no definibles) longitud, masa, tiempo y carga. Sus unidades en el sistema mks son el metro, kilogramo, segundo y culombio, respectivamente. Fuerza y trabajo son magnitudes mecánicas definidas en función de longitud, masa y tiempo. Sus unidades en el sistema mks son newton y julio, respectivamente. A continuación se definen las tres magnitudes primarias, escalares, eléctricas, de teoría de circuitos.

Corriente de conducción, i , es una magnitud escalar instantánea definida como la carga neta (media), dq , que pasa por una sección transversal dada de un circuito en un tiempo dt .

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{amp (culombio por seg)}$$

Diferencia de potencial, v , entre dos puntos es una magnitud escalar instantánea definida como el trabajo, dW , hecho sobre una carga dq , al moverla desde un punto al otro.

$$v = \frac{dW}{dq} \quad \text{voltio (julio por culombio)}$$

Los términos *diferencia de potencial* y *tensión* se emplean como sinónimos en el texto.

Potencia eléctrica, p , es una magnitud escalar instantánea definida como el trabajo, dW , hecho en un tiempo dt , para llevar una carga a través de la diferencia de potencial antes mencionada.

$$p = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dq} \frac{dq}{dt} = vi \quad \text{vatio (julio por seg)}$$

La potencia es también igual al producto vi , como se indica, donde v es la diferencia de potencial entre los puntos por los que entra y sale i .

El *valor medio* de una función del tiempo, $f(t)$, entre t_1 y t_2 se define por

$$F_{av} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \quad (2-1)$$

y puede aplicarse a i , v o p .

El *valor eficaz* de una función del tiempo, $f(t)$, entre los instantes t_1 y t_2 , está definido por

$$F_{rms} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 dt} \quad (2-2)$$

y puede aplicarse a i o v , pero potencia eficaz no es una definición útil.

Si $f(t) = f(t + T)$, entonces $f(t)$ es una función periódica de periodo T . Si en las definiciones anteriores no se especifica el intervalo $t_2 - t_1$, y su $f(t)$ es una función periódica, se sobrentenderá que el intervalo de tiempo es un periodo.

2-2. Leyes de Kirchhoff. Las dos leyes experimentales de Kirchhoff son piedras angulares de la teoría de circuitos. La ley de la corriente de Kirchhoff, unida a la conservación de la carga, establece que la suma de todas las corrientes que concurren en un nudo (o unión) es igual a cero.

$$\sum i_k = 0 \quad \text{en cualquier nudo, considerando todas las } i_k$$

La ley de la tensión de Kirchhoff, junto a la conservación de la energía (o trabajo), establece que la suma de todas las tensiones a lo largo de una malla (o lazo) cerrada es cero.

$$\sum v_k = 0 \quad \text{a lo largo de cualquier malla cerrada, considerando todas las } v_k$$

En ambas leyes hay que tener en cuenta los signos algebraicos de las corrientes y tensiones, y el convenio de signos empleado en cada caso particular.

2-3. Elementos de circuitos de dos terminales. Los dispositivos eléctricos prácticos pueden aproximarse en diverso grado por elementos lineales idealizados, o por combinaciones de elementos, definidos más adelante. Las tensiones y corrientes definidas antes son aplicables en todos los casos a los dos terminales del elemento, como se muestra en la Fig. 2-1.

Una *resistencia constante* es un dispositivo de dos terminales en el cual la relación tensión-corriente es constante.

$$v = Ri$$

La resistencia, R , tiene la dimensión ohmio = voltio por amperio. Puesto que $i = dq/dt$, puede escribirse también

$$q = \frac{1}{R} \int v dt = G \int v dt$$

donde $G = 1/R$ es la conductancia de la resistencia R .

Una *capacidad constante* es un dispositivo de dos terminales en el cual la relación de carga a tensión es constante.

$$q = Cv$$

La capacidad, C , tiene la dimensión faradio = culombio por voltio. Empleando $i = dq/dt$, esto puede escribirse también

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad \text{o} \quad v = \frac{1}{C} \int i dt$$

Una *inductancia constante* es un dispositivo de dos terminales en el cual la relación de tensión a derivada respecto al tiempo de la corriente es constante.

$$v = L \frac{di}{dt}$$

La autoinducción, L , tiene la dimensión henrio = voltio-segundo por amperio. Esto puede escribirse también

$$i = \frac{1}{L} \int v dt$$

Una *fuente de tensión constante* (o generador) es un dispositivo de dos terminales en el cual $v(t) = e(t)$ es independiente de la corriente $i(t)$,

que pasa a través del dispositivo. La flecha situada al lado del generador en la Fig. 2-1 indica la dirección de las tensiones crecientes, y está dirigida de menos a más.

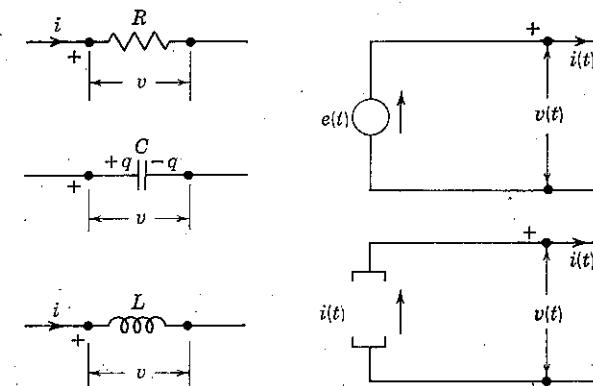


FIG. 2-1. Elementos de circuito de dos terminales.

Una *fuente de corriente constante* (o generador) es un dispositivo de dos terminales en el cual $i(t)$ es independiente de la tensión, $v(t)$, entre los extremos del dispositivo. La flecha situada al lado del generador de corriente en la Fig. 2-1 indica la dirección del flujo de carga positivo.

2-4. Ecuaciones de circuitos y soluciones. Los circuitos eléctricos prácticos pueden aproximarse en distinto grado por elementos de circuito de dos terminales interconectados, o combinaciones de ellos. Las ecuaciones de circuitos son ecuaciones diferenciales que relacionan la carga instantánea, corriente y tensión. Las ecuaciones son lineales con coeficientes constantes cuando solo aparecen en el circuito elementos de dos terminales, constantes y bilaterales.

Las ecuaciones de circuitos surgen de la aplicación de las dos leyes de Kirchhoff, en combinación con la definición de dispositivos de dos terminales. Por ejemplo, en los tres elementos de la Fig. 2-2 (a), conec-

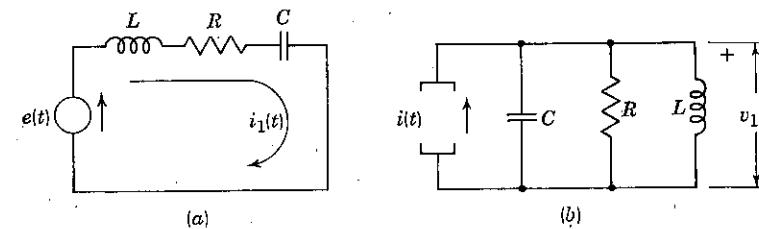


FIG. 2-2. Circuitos duales.

tados en serie con una fuente de tensión constante, $e(t)$, la ley de la corriente de Kirchhoff pone de manifiesto que por cada elemento debe pasar

la misma corriente $i_1(t)$. La ley de la tensión conduce a la ecuación

$$L \frac{di_1}{dt} + Ri_1 + \frac{1}{C} \int i_1 dt = e(t) \quad (2-3)$$

Para tres elementos conectados en paralelo con una fuente de corriente constante, $i(t)$, la ley de la tensión de Kirchhoff muestra que en todos los elementos existe la misma diferencia de potencial, $v_1(t)$. De la aplicación de la ley de corriente al circuito de la Fig. 2-2 (b) resulta

$$C \frac{dv_1}{dt} + Gv_1 + \frac{1}{L} \int v_1 dt = i(t)$$

Estos dos circuitos son *duales*, puesto que sus ecuaciones pueden derivarse unas de otras intercambiando C y L , G y R , L y C , v_1 e i_1 , e $i(t)$ y $e(t)$. El concepto de dualidad es útil para unificar principios de las ecuaciones de circuitos; puede también ahorrar mucho tiempo al resolver problemas de circuitos.

Por muy complicada que sea la interconexión de elementos de dos terminales pueden aplicarse las leyes de Kirchhoff para obtener las ecuaciones del circuito. En general, éstas son ecuaciones simultáneas entre las tensiones y corrientes en todos los elementos. Si todos los elementos son conocidos y están especificadas todas las condiciones de contorno (tales como valores iniciales de cargas y corrientes para todos los elementos), entonces estas ecuaciones pueden resolverse siempre para las corrientes y tensiones de cada elemento. Debido a que las ecuaciones llegan a ser numerosas y complicadas para una disposición compleja de elementos interconectados, se emplean técnicas especiales para escribir las ecuaciones. Las ecuaciones de malla, o ecuaciones duales de los nudos, pueden utilizarse para sistematizar y organizar las ecuaciones y su manipulación. Estas ecuaciones se derivan directamente de las leyes de Kirchhoff.

La solución de las ecuaciones de circuito para cada corriente o tensión dependiente consiste generalmente en un término transitorio y un término estacionario. Por ejemplo, en el circuito simple de la Fig. 2-3 se supone que Q_0 representa la carga en C antes de que se cierre el

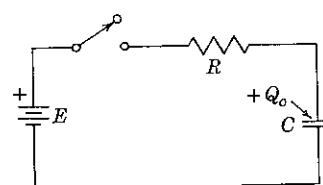


FIG. 2-3. Carga de un condensador.

interruptor. El generador de tensión constante, E , no depende del tiempo. Si el interruptor se cierra en el instante $t = 0$, la ley de la corriente de Kirchhoff indica que la corriente $i = dq/dt$ en cada elemento es la misma para $t \geq 0$. La ley de la tensión conduce, para $t \geq 0$, a la ecuación

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \quad q = Q_0 \text{ en } t = 0$$

La solución completa para q es

$$q = CE - (CE - Q_0)e^{-t/RC} \quad t \geq 0 \quad (2-4)$$

El término estacionario es CE . La parte restante de la solución es el término transitorio, que llega a ser despreciable comparado con CE cuando $t \rightarrow \infty$.

En circuitos más elaborados puede resultar considerablemente complejo determinar soluciones de ecuaciones diferenciales simultáneas, especialmente si los generadores de tensión y de corriente no son funciones simples del tiempo. Pueden aplicarse técnicas tales como la transformada de Laplace para obtener la solución de ecuaciones simultáneas semejantes.

2-5. Soluciones en el estado estacionario sinusoidal. La solución estacionaria (integral particular) de una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes es fácil de encontrar si los generadores son funciones sinusoidales del tiempo. El empleo de magnitudes complejas para representar los estados estacionarios de corrientes o tensiones permite transformar las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas. Solo se obtiene la solución estacionaria, de modo que las condiciones de contorno (iniciales) de las variables no intervienen y no es necesario conocerlas.

La base del método $e^{j\omega t}$, como se le llama algunas veces, se describe aquí para una ecuación de segundo orden. El mismo razonamiento puede emplearse para extender los resultados a ecuaciones de órdenes más elevados, a sistemas de ecuaciones y, por superposición lineal, a cualquier número de funciones sinusoidales de excitación. En este último caso, es especialmente importante darse cuenta de que las magnitudes complejas son funciones de la frecuencia; por tanto, es generalmente necesario un conjunto diferente de números complejos para cada frecuencia.

Consideremos las dos ecuaciones diferenciales de segundo orden siguientes:

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = A \cos(\omega t + \phi) \quad (2-5)$$

$$a \frac{d^2y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = A \sin(\omega t + \phi) \quad (2-6)$$

Las constantes a, b, c, A, ω y ϕ son las mismas en estas dos ecuaciones. La solución estacionaria para x o y , que pueden ser corrientes o tensiones instantáneas en un circuito dado, puede obtenerse a partir de un único número complejo, sin necesidad de resolver la ecuación diferencial directamente. Para demostrarlo, multipliquemos la Ec. (2-6) por $j = \sqrt{-1}$ y sumemos las dos ecuaciones.

$$\begin{aligned} a \left[\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2(jy)}{dt^2} \right] + b \left[\frac{dx}{dt} + \frac{d(jy)}{dt} \right] + c(x + jy) \\ = A[\cos(\omega t + \phi) + j \operatorname{sen}(\omega t + \phi)] \end{aligned}$$

Definimos $u = x + jy$. Entonces esta ecuación se convierte en

$$a \frac{d^2u}{dt^2} + b \frac{du}{dt} + cu = A e^{j(\omega t + \phi)} \quad (2-7)$$

Tanto x como y pueden obtenerse a partir del número complejo u , que aparece en esta ecuación, por las relaciones

$$x = \operatorname{Re}\{u\} \quad y = \operatorname{Im}\{u\}$$

donde Re significa parte real e Im parte imaginaria. Es éste un método muy práctico para obtener x o y , porque es fácil encontrar la u que satisface la Ec. (2-7). El número complejo u , que es una función de la frecuencia y del tiempo, que satisfará la Ec. (2-7), se sabe que es de la forma

$$u = U e^{j\omega t} \quad \mathbf{U} = U e^{j\psi}$$

donde la magnitud U y el ángulo ψ de \mathbf{U} no son funciones del tiempo. Sustituyendo u en la Ec. (2-7) y realizando las diferenciaciones:

$$[a(j\omega)^2 \mathbf{U} + b(j\omega) \mathbf{U} + c \mathbf{U}] e^{j\omega t} = A e^{j\phi} e^{j\omega t}$$

Eliminando $e^{j\omega t}$ se llega a una ecuación algebraica que puede resolverse para U y ψ .

$$\mathbf{U}(c - a\omega^2 + jb) = A e^{j\phi} = \mathbf{A}$$

El módulo y el ángulo de \mathbf{U} son

$$U = \frac{A}{\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + (jb)^2}} \quad \psi = \phi - \operatorname{tg}^{-1} \frac{jb}{c - a\omega^2}$$

El esquema general está completo. Por ejemplo, si nos dan la Ec. (2-5) y se desea encontrar el estado estacionario de la función del tiempo x , es necesario solamente encontrar U . Esto se consigue fácilmente remplazando la ecuación diferencial por su correspondiente ecuación compleja. De ella se sigue la ecuación algebraica para \mathbf{U} . Multiplicando la U conocida por $e^{j\omega t}$, y extrayendo la parte real, obtenemos x .

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re}\{u\} = \operatorname{Re}\{\mathbf{U} e^{j\omega t}\} \\ &= \frac{A}{\sqrt{(c - a\omega^2)^2 + (jb)^2}} \cos\left(\omega t + \phi - \operatorname{tg}^{-1} \frac{jb}{c - a\omega^2}\right) \end{aligned}$$

Consideraremos como ejemplo un circuito eléctrico de primer orden. Se trata de encontrar la corriente estacionaria en el circuito inductivo de la Fig. 2-4. La ecuación diferencial para la corriente es

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \cos(\omega t + \phi)$$

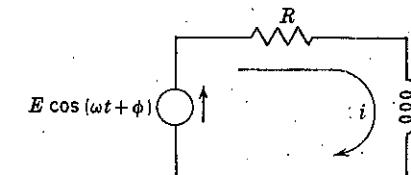


FIG. 2-4. Circuito inductivo.

La ecuación diferencial que remplaza, pero que no es idéntica, a esta ecuación es

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E e^{j(\omega t + \phi)}$$

La magnitud compleja i , que sustituye a la corriente real i , se sabe que es de la forma

$$i = I e^{j\omega t} = I e^{j\psi} e^{j\omega t}$$

La corriente compleja I satisface la ecuación algebraica, de la cual ha sido eliminado $e^{j\omega t}$.

$$L(j\omega)I + RI = E e^{j\phi} = E$$

De este modo se determina \mathbf{I} .

$$\mathbf{I} = \frac{Ee^{i\phi}}{R + j\omega L} \quad I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad \psi = \phi - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

Puesto que la tensión instantánea aplicada al circuito viene dada por

$$e(t) = \operatorname{Re}\{Ee^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{Ee^{i(\omega t+\phi)}\} = E \cos(\omega t + \phi)$$

el estado estacionario de la corriente instantánea debe venir dado por la parte real de \mathbf{i} .

$$i = \operatorname{Re}\{i\} = \operatorname{Re}\{Ie^{i\omega t}\} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos\left(\omega t + \phi - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega L}{R}\right)$$

No hay, por supuesto, nada desconocido en esta solución, pero es importante la base sobre la que ha sido hallada. No son necesarios todos estos pasos para resolver el problema una vez que el método ha sido entendido. Normalmente la ecuación algebraica de la corriente compleja se escribe inmediatamente y se resuelve para la corriente compleja desconocida, \mathbf{I} . A menudo no interesa volver al dominio del tiempo.

Si en el ejemplo anterior el generador de tensión fuera $E \sin(\omega t + \phi)$ tampoco habría complicaciones. En este caso la tensión instantánea viene dada más convenientemente por

$$e(t) = \operatorname{Im}\{Ee^{i\omega t}\} = \operatorname{Im}\{Ee^{i(\omega t+\phi)}\} = E \sin(\omega t + \phi)$$

Por tanto, la corriente instantánea viene dada por la parte imaginaria de $Ie^{i\omega t}$.

Este breve compendio proporciona una base racional para el empleo de magnitudes complejas en circuitos en estado estacionario de alterna. El método no se restringe a problemas de circuitos. Permite hacer una clara distinción entre magnitudes que son reales y las que son complejas, y entre las que son funciones del tiempo y las que no lo son. Aunque la representación geométrica de magnitudes complejas en el plano complejo por medio de fasores puede ser útil para visualizar ciertas relaciones, algunas veces es un punto de vista más engoroso. Las magnitudes complejas pueden manejarse completamente por las reglas del álgebra y no es necesaria la representación compleja.

2-6. Impedancia y admitancia. Si todas las fuentes de tensión constante y de intensidad constante de un circuito formado por elementos de dos terminales constantes son sinusoidales y tienen la misma frecuencia, y si todos los transitorios se han reducido a un nivel despreciable, el circuito está entonces en estado estacionario sinusoidal. Todas las ten-

siones $v(t)$ y todas las corrientes $i(t)$ en el circuito son sinusoidales y de la misma frecuencia. En estas condiciones, pueden representarse por magnitudes complejas, puesto que los únicos caracteres distintivos de una onda senoidal son su amplitud y su fase.

$$v(t) = \operatorname{Re}\{V e^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{V e^{i\phi_1} e^{i\omega t}\} = V \cos(\omega t + \phi_1)$$

$$i(t) = \operatorname{Re}\{I e^{i\omega t}\} = \operatorname{Re}\{I e^{i\phi_2} e^{i\omega t}\} = I \cos(\omega t + \phi_2)$$

La tensión compleja \mathbf{V} y la corriente compleja \mathbf{I} no son funciones del tiempo. Tienen amplitudes V e I y ángulos de fase ϕ_1 y ϕ_2 , respectivamente. Los números complejos representan valores de pico de las magnitudes instantáneas, y este convenio será el que se utilice siempre (mejor que incluir el factor $\sqrt{2}$ como se hace en algunos tratados). Con ϕ_1 y ϕ_2 arbitrarias, éstas son representaciones generales del estado estacionario. Sin embargo, las magnitudes instantáneas pueden también representarse, si se desea, en función de magnitudes complejas, remplazando «Re» por «Im» y «cos» por «sen».

Impedancia y admitancia son conceptos empleados para describir elementos pasivos de circuito en el estado estacionario sinusoidal. Si un dispositivo de dos terminales establece una relación constante entre corriente y tensión complejas, entonces la impedancia compleja del dispositivo viene definida por \mathbf{Z} .

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \quad \mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}}$$

La admitancia compleja \mathbf{Y} es el recíproco de \mathbf{Z} . Nótese que \mathbf{Z} e \mathbf{Y} son, por definición, *independientes* de tensiones y corrientes. Sin embargo, son generalmente funciones de la frecuencia.

En el estado estacionario sinusoidal puede demostrarse que las dos leyes de Kirchhoff son válidas para tensiones y corrientes complejas (véase el Prob. 2-5).

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{I}_k &= 0 && \text{en cualquier nudo, considerando todas las } \mathbf{I}_k \\ \sum \mathbf{V}_k &= 0 && \text{a lo largo de cualquier malla cerrada, considerando} \\ &&& \text{todas las } \mathbf{V}_k \end{aligned} \quad (2-8)$$

Se sigue, por tanto, de la definición de impedancia y de admitancia que, para una resistencia constante R , la impedancia es $\mathbf{Z} = R$ y la admitancia $\mathbf{Y} = 1/R$. Para una capacidad constante C , la impedancia es $\mathbf{Z} = 1/j\omega C$ y la admitancia $\mathbf{Y} = j\omega C$. Para una autoinducción constante L , la impedancia es $\mathbf{Z} = j\omega L$ y la admitancia $\mathbf{Y} = 1/j\omega L$. Además, la aplicación de las leyes de Kirchhoff muestra que para N elementos de dos terminales

conectados en serie, la impedancia de la combinación en serie es

$$Z_s = \sum_{k=1}^N Z_k = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N \quad (2-9)$$

y la admitancia serie viene dada por

$$\frac{1}{Y_s} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{Y_k} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \dots + \frac{1}{Y_N}$$

Similarmente, para N elementos de dos terminales conectados en paralelo, la impedancia de la combinación en paralelo viene dada por

$$\frac{1}{Z_p} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{Z_k} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_N}$$

y la admitancia paralelo es

$$Y_p = \sum_{k=1}^N Y_k = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N \quad (2-10)$$

En general, impedancia y admitancia pueden constar de parte real y de parte imaginaria. Así,

$$Z = Ze^{j\alpha} = R + jX$$

donde el módulo y ángulo de Z en función de su resistencia R y de su reactancia X son

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \frac{X}{R}$$

Similarmente, para la admitancia

$$Y = Ye^{j\beta} = G + jB$$

donde la amplitud y ángulo de Y en función de su conductancia G y de su susceptancia B son

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{B}{G}$$

Para ilustrar la aplicación de algunas de estas relaciones, buscaremos una expresión para la tensión estacionaria en el generador de intensidad de la Fig. 2-5. La admitancia de los dos elementos en paralelo es

$$Y = \frac{1}{R} + j\omega C = \frac{1 + j\omega RC}{R} = \frac{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}{R} e^{j\beta}$$

donde $\operatorname{tg} \beta = \omega RC$. La tensión compleja en el generador de intensidad, y en R o C , es

$$V = \frac{I}{Y} = \frac{RIe^{j\phi}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2} e^{j\beta}} = \frac{RI}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} e^{j(\phi - \beta)}$$

La corriente instantánea está referida a I por

$$i(t) = \operatorname{Im} \{Ie^{j\omega t}\} = I \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

Por tanto, la tensión instantánea es

$$v(t) = \operatorname{Im} \{Ve^{j\omega t}\} = \frac{RI}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \operatorname{sen}(\omega t + \phi - \operatorname{tg}^{-1} \omega RC)$$

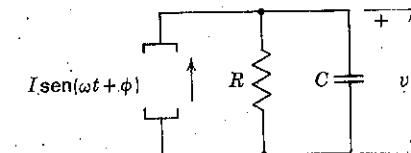


FIG. 2-5. Circuito capacitivo.

2-7. División de tensión y de corriente. Se presentan con tanta frecuencia estos dos casos especiales, contenidos realmente en la sección precedente, que se insiste sobre ellos con pruebas particulares. Las reglas de la división de tensión y de corriente, que se prueban a continuación para el estado estacionario sinusoidal, se aplican repetidamente a lo largo de este texto.

a) *Regla de la división de tensión.* La caída de tensión compleja en la impedancia 1 de dos impedancias conectadas en serie, es igual a la diferencia de potencial entre los extremos de las dos impedancias multiplicada por un factor de reducción. El factor de reducción es igual a la relación entre la impedancia 1 y la suma de las dos impedancias.

Para probar esta regla, consideremos que una tensión compleja V se aplica a las dos impedancias Z_1 y Z_2 conectadas en serie de la Fig. 2-6. Supongamos que V_1 , la caída de potencial en Z_1 , es la tensión deseada.

La intensidad compleja que pasa por la combinación en serie es

$$I = \frac{V}{Z_s} = \frac{V}{Z_1 + Z_2}$$

La tensión V_1 es el producto de Z_1 por esta corriente.

$$V_1 = Z_1 I = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} V \quad (2-11)$$

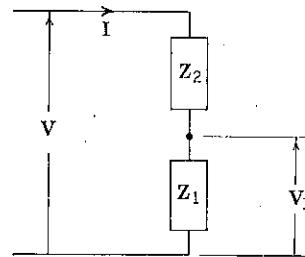


FIG. 2-6. Divisor de tensión.

De este modo queda probada la regla. El factor de reducción es $Z_1/(Z_1 + Z_2)$.

b) *Regla de la división de corriente.* La corriente compleja en la impedancia 1 de dos impedancias conectadas en paralelo es igual a la corriente que entra por su unión multiplicada por un factor de partición. El factor de partición es igual a la razón de la «otra» impedancia a la suma de las dos impedancias.

Para probar esta regla, consideremos una corriente compleja I , que entra por la unión de dos impedancias conectadas en paralelo Z_1 y Z_2 , representadas en la Fig. 2-7. Supongamos que I_1 , la corriente que pasa por Z_1 , es la corriente deseada. La tensión compleja aplicada a la combinación en paralelo es

$$V = Z_p I = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} I$$

La corriente I_1 es la tensión dividida por Z_1 .

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I \quad (2-12)$$

Con esto queda probada la regla. El factor de partición es $Z_2/(Z_1 + Z_2)$.

Estas dos reglas deben recordarse. Son realmente duales, aunque este

hecho se oscurezca por el empleo de impedancias en los dos casos. Remplácese las impedancias de la regla de división de corriente por admitancias, y quedará clara la naturaleza dual de las dos reglas. Entonces en la

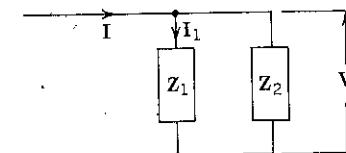


FIG. 2-7. Divisor de intensidad.

división de tensión, la razón de tensiones es igual a la razón de impedancias entre las cuales aparecen las diferencias de potencial, en la división de corriente, la razón de corrientes es igual a la razón de admitancias por las que pasan esas corrientes. La forma de impedancia de la regla de división de corriente es preferida aquí, porque los elementos en paralelo se especifican como impedancias en la mayoría de los circuitos de medida.

2-8. Potencia media. En el estado estacionario sinusoidal, la potencia instantánea es

$$p = vi = V \cos(\omega t + \phi_1) I \cos(\omega t + \phi_2)$$

Con la identidad trigonométrica

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

la potencia instantánea se convierte en

$$p = \frac{VI}{2} [\cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos(2\omega t + \phi_1 + \phi_2)]$$

La potencia media en el periodo $T = 2\pi/\omega$ se obtiene de la Ec. (2-1).

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} p dt$$

donde t_1 es arbitrario y se toma normalmente igual a cero. El primer término de p es constante, y la integral del segundo término de p sobre el periodo es cero. Por tanto,

$$P_{av} = \frac{VI}{2} \cos(\phi_1 - \phi_2) = V_{rms} I_{rms} \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (2-13)$$

El coseno de la diferencia de fase entre v e i es el *factor de potencia*.

La potencia media, que es real, puede formularse en términos de magnitudes complejas. Consideremos la corriente y tensión complejas

$$\mathbf{V} = V e^{j\phi_1} \quad \mathbf{I} = I e^{j\phi_2}$$

El *conjugado* de un número complejo, distinguido por un asterisco, se define remplazando j por menos j . Por tanto,

$$\mathbf{VI}^* = V e^{j\phi_1} I e^{-j\phi_2} = VI e^{j(\phi_1 - \phi_2)}$$

Evidentemente, esto está relacionado con P_{av} por

$$P_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{VI}^*\} \quad (2-14)$$

Si \mathbf{V} e \mathbf{I} son tensión y corriente complejas asociadas por una impedancia $\mathbf{Z} = \mathbf{V}/\mathbf{I}$, entonces

$$P_{av} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{VI}^*\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{ZII}^*\} = \frac{1}{2} I^2 \operatorname{Re}\{\mathbf{Z}\} = \frac{1}{2} I^2 R$$

donde R es la parte real de \mathbf{Z} .

2-9. Ecuaciones de mallas. Las ecuaciones diferenciales de mallas o nudos pueden formularse para circuitos eléctricos sobre una base instantánea. Sin embargo, esta discusión se reducirá al estado estacionario sinusoidal y circuitos lineales bilaterales que contengan generadores constantes. En este caso, las ecuaciones de circuito, en función de tensiones y corrientes complejas, se convierten en sistemas de ecuaciones algebraicas que pueden resolverse por medio de determinantes. Entre las virtudes de las ecuaciones de mallas o nudos está el que el análisis pueda reducirse a un procedimiento rutinario y sistemático y el proporcionar una estructura general que permite formular rápidamente las ecuaciones, minimizando al mismo tiempo las posibilidades de errores algebraicos.

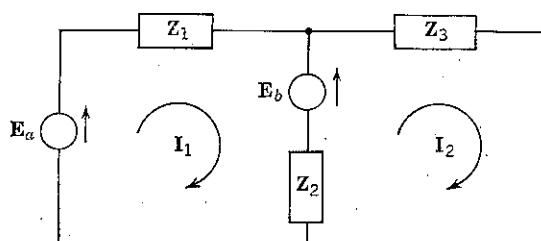


FIG. 2-8. Circuito con dos corrientes de malla independientes.

Un método muy extendido de seleccionar las corrientes de malla consiste en elegirlas todas positivas en la misma dirección en mallas adyacentes sucesivas, incluyendo una rama recorrida ya previamente por una corriente, hasta cubrir todas las ramas. Si solo se desea conocer una corriente de malla en una rama particular, puede volverse a dibujar el circuito si hiciera falta, de manera que esa rama se convierta en una rama exterior. Esto es más fácil que elegir las corrientes de malla de una manera arbitraria para conseguir el mismo resultado.

Presentaremos un circuito que contiene dos corrientes de malla independientes, antes de establecer la formulación general. En el circuito de la Fig. 2-8, dos corrientes en el sentido de las agujas del reloj, I_1 e I_2 , se seleccionan en mallas adyacentes. Se comprueba fácilmente que la ley de la corriente de Kirchhoff se satisface automáticamente para estas corrientes en cada nudo. La ley de la tensión de Kirchhoff conduce, para las mallas 1 y 2, respectivamente, a

$$\begin{aligned} I_1 Z_1 + (I_1 - I_2) Z_2 &= E_a - E_b \\ (I_2 - I_1) Z_2 + I_2 Z_3 &= E_b \end{aligned}$$

El determinante del sistema es

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_1 + Z_2 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix} = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3$$

Las corrientes de malla vienen dadas por la regla de Cramer.

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} E_a - E_b & -Z_2 \\ E_b & Z_2 + Z_3 \end{vmatrix}}{\Delta} \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_1 + Z_2 & E_a - E_b \\ -Z_2 & E_b \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Para un circuito de n mallas es intrínseco a la naturaleza de las corrientes de malla que se cumpla automáticamente la ley de la corriente de Kirchhoff. Tomadas todas las corrientes de malla positivas en la misma dirección resultan las siguientes n ecuaciones cuando se aplica la ley de la tensión de Kirchhoff y se agrupan todos los términos que contienen las mismas corrientes de malla.

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 - Z_{12}I_2 - \cdots - Z_{1n}I_n &= E_1 \\ -Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 - \cdots - Z_{2n}I_n &= E_2 \\ \vdots &\quad \vdots \\ -Z_{n1}I_1 - Z_{n2}I_2 - \cdots + Z_{nn}I_n &= E_n \end{aligned} \quad (2-15)$$

donde I_r es la corriente de malla en la malla r -ésima; $r = 1, 2, 3, \dots, n$; Z_{rr} es la impedancia total común a la malla r (autoimpedancia)

Z_{rk} es la impedancia total común a las mallas r y k (impedancia mutua)

E_r es la suma de las tensiones de todos los generadores contenidos en la malla r , tomadas positivas en la misma dirección de I_r .

El determinante del sistema es

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & -Z_{12} & \cdots & -Z_{1n} \\ -Z_{21} & Z_{22} & \cdots & -Z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -Z_{n1} & -Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix}$$

y es simétrico respecto a la diagonal principal de autoimpedancia, puesto que $Z_{rk} = Z_{kr}$ para impedancias bilaterales. Una corriente de malla cualquiera, I_k , se obtiene insertando la columna de generadores, que aparece en los miembros de la derecha de las ecuaciones de la red, en la columna k -ésima de Δ y dividiendo por Δ .

$$I_k = \frac{\Delta_{1k}E_1}{\Delta} + \frac{\Delta_{2k}E_2}{\Delta} + \cdots + \frac{\Delta_{nk}E_n}{\Delta} \quad (2-16)$$

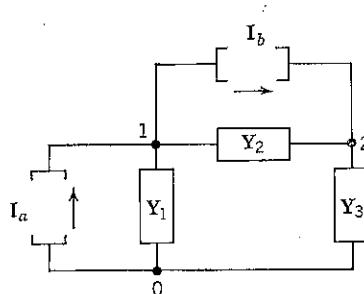


FIG. 2-9. Circuito con dos voltajes de nudo independientes.

donde Δ_{rk} es el cofactor de la fila r -ésima, columna k -ésima de Δ ; $r = 1, 2, 3, \dots, n$.

2-10. Ecuaciones de nudos. Un método práctico de seleccionar las tensiones de nudos es asignar a todas ellas valores positivos con respecto a un nudo de referencia arbitrario. El potencial del nudo de referencia puede ser cualquiera; por conveniencia puede tomarse igual a cero. Se estudiará primero un ejemplo de circuito con dos tensiones de nudo independientes, antes de considerar la formulación general. En el circuito de la Fig. 2-9, dos tensiones de nudo, V_1 y V_2 , toman un valor igual a la caída de potencial desde los nudos 1 y 2 al nudo de referencia 0. Puede comprobarse fácilmente que se satisface la ley de la tensión de Kirchhoff

para estas tensiones de nudo a lo largo de cada malla. La ley de la corriente de Kirchhoff conduce, para los nudos 1 y 2 respectivamente, a

$$\begin{aligned} V_1Y_1 + (V_1 - V_2)Y_2 &= I_a - I_b \\ V_2Y_3 + (V_2 - V_1)Y_2 &= I_b \end{aligned}$$

Agrupando todos los términos que contienen las mismas tensiones de nudo, la forma normal de las ecuaciones de nudos.

$$\begin{aligned} (Y_1 + Y_2)V_1 - Y_2V_2 &= I_a - I_b \\ -Y_2V_1 + (Y_2 + Y_3)V_2 &= I_b \end{aligned}$$

El determinante del sistema es

$$D = \begin{vmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{vmatrix} = Y_1Y_2 + Y_1Y_3 + Y_2Y_3$$

Las tensiones de nudo se obtienen por la regla de Cramer.

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} I_a - I_b & -Y_2 \\ I_b & Y_2 + Y_3 \end{vmatrix}}{D} \quad V_2 = \frac{\begin{vmatrix} Y_1 + Y_2 & I_a - I_b \\ -Y_2 & I_b \end{vmatrix}}{D}$$

Para un circuito con n tensiones de nudo independientes es intrínseco a la naturaleza de dichas tensiones que se cumpla siempre automáticamente la ley de tensión de Kirchhoff. Tomando todas las tensiones de nudo como positivas respecto a la de referencia, resultan las siguientes n ecuaciones cuando se aplica la ley de corriente de Kirchhoff, una vez agrupados todos los términos que contienen las mismas tensiones de nudo.

$$\begin{aligned} Y_{11}V_1 - Y_{12}V_2 - \cdots - Y_{1n}V_n &= I_1 \\ -Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 - \cdots - Y_{2n}V_n &= I_2 \\ &\vdots \\ -Y_{n1}V_1 - Y_{n2}V_2 - \cdots + Y_{nn}V_n &= I_n \end{aligned}$$

donde V_r es la caída de potencial desde el nudo r al nudo de referencia; $r = 1, 2, 3, \dots, n$

Y_{rr} es la admitancia total ligada al nudo r (autoadmitancia)

Y_{rk} es la admitancia total entre los nudos r y k (admitancia mutua)

I_r es la suma de todas las corrientes debidas a los generadores ligados al nudo r , tomadas como positivas en la dirección que va hacia el nudo r .

El determinante del sistema es

$$D = \begin{vmatrix} Y_{11} & -Y_{12} & \cdots & -Y_{1n} \\ -Y_{21} & Y_{22} & \cdots & -Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -Y_{n1} & -Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{vmatrix}$$

y es simétrico respecto a la diagonal principal de autoadmitancias, puesto que $Y_{rk} = Y_{kr}$ para admitancias bilaterales. Cualquier tensión de nudo V_k se obtiene insertando la columna de generadores, que aparecen a la derecha de las ecuaciones de nudos, en la k -ésima columna de D , y dividiendo por D .

$$V_k = \frac{D_{1k}I_1}{D} + \frac{D_{2k}I_2}{D} + \cdots + \frac{D_{nk}I_n}{D} \quad (2-17)$$

donde D_{rk} es el cofactor de la r -ésima fila, k -ésima columna de D ; $r = 1, 2, 3, \dots, n$.

Cualquiera de los dos sistemas de ecuaciones, de mallas o de nudos, pueden escribirse para un circuito dado, y ambos conjuntos de ecuaciones conducen a soluciones idénticas para corrientes y tensiones en cada brazo. Nótese que los determinantes de los sistemas de nudos y de mallas son distintos, $\Delta \neq D$. La elección entre uno u otro método es una cuestión de conveniencia. El método elegido es generalmente el que exige menos ecuaciones.

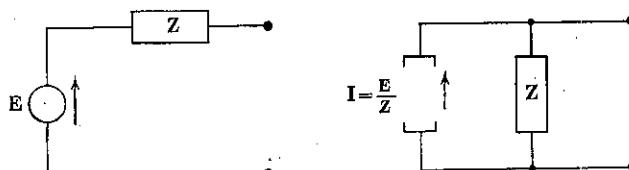


FIG. 2-10. Generadores equivalentes.

Puesto que las ecuaciones de malla contienen generadores de tensión constante y las ecuaciones de nudos generadores de intensidad constante, es preciso disponer de un procedimiento para convertir un tipo de generador en otro. Esto se realiza por la equivalencia indicada en la Fig. 2-10. Las características de los terminales de salida de un generador de tensión constante E , en serie con una impedancia Z , son indistinguibles de las de un generador de corriente constante $I = E/Z$ colocado en paralelo con una impedancia Z . La tensión de salida en vacío de ambos circuitos es E , la corriente de salida en corto circuito es E/Z en los dos casos, y la corriente sacada de los terminales de salida por una impedancia arbitraria Z_1 , conectada entre los terminales de salida, es en ambos casos igual a $E/(Z + Z_1)$.

2-11. Impedancia vista desde la excitación e impedancia de transferencia.

Las razones de cofactores a determinantes de circuito que aparecen en las soluciones de las corrientes de malla I_k y en las soluciones de las tensiones de nudo V_k , son magnitudes importantes que caracterizan al circuito. Los recíprocos de estas razones reciben nombres especiales. Cada razón tiene una interpretación física en el circuito.

La *impedancia vista desde la excitación* de la malla k se define por

$$z_{kk} = \frac{\Delta}{\Delta_{kk}}$$

Si la malla k es la de entrada o salida del circuito, z_{kk} se denomina a menudo *impedancia de entrada*, y es la *impedancia vista desde la excitación «mirando dentro»* de la malla en cuestión. Se demostrará en la Sec. 2-15 para el caso de un circuito con una malla de salida n , que z_{nn} , la *impedancia de entrada o vista desde la excitación de la malla n* , es igual a la *impedancia equivalente de Thévenin*. La interpretación física de z_{kk} reside en la Ec. (2-16). Supongamos que todos los generadores son cero y que entonces se aplica un *único* generador, E_k , en serie con un brazo exterior de la malla k . (La estipulación de una rama exterior no es restrictiva, puesto que el circuito puede volverse a dibujar para que esto se cumpla sin que se altere eléctricamente.) Entonces, según la Ec. (2-16), z_{kk} es la razón de la tensión del generador aplicada E_k a la corriente I_k sacada de este generador, puesto que todos los otros términos en I_k son cero.

La *impedancia de transferencia* entre la malla r y la malla k se define por

$$z_{kr} = \frac{\Delta}{\Delta_{rk}}$$

El significado físico de z_{kr} es también evidente a partir de la Ec. (2-16). Supongamos que todos los generadores son cero y que entonces se aplica un *único* generador E_r en una malla exterior de la malla r . Entonces z_{kr} es la razón de la tensión E_r , aplicada en la malla r , a la corriente I_k que produce en la malla k .

Las impedancias de transferencia z_{kr} y z_{rk} son iguales, porque las impedancias mutuas Z_{kr} y Z_{rk} son iguales para elementos bilaterales. Esto puede demostrarse intercambiando filas y columnas en el cofactor, de acuerdo con las propiedades de los determinantes. Por ejemplo, en el caso de $z_{12} = \Delta/\Delta_{21}$, el cofactor Δ_{21} se obtiene suprimiendo la segunda fila y la primera columna de Δ .

$$\Delta_{21} = - \begin{vmatrix} -Z_{12} & -Z_{13} & \cdots & -Z_{1n} \\ -Z_{32} & Z_{33} & \cdots & -Z_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -Z_{n2} & -Z_{n3} & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix}$$

Remplácese cada impedancia mutua Z_{kr} por Z_{rk} e intercambiense las filas y columnas correspondientes. Estas maniobras no cambian el valor de Δ_{21} que se convierte entonces en

$$\Delta_{21} = - \begin{vmatrix} -Z_{21} & -Z_{23} & -Z_{24} & \cdots & -Z_{2n} \\ -Z_{31} & Z_{33} & -Z_{34} & \cdots & -Z_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -Z_{n1} & -Z_{n3} & -Z_{n4} & \cdots & Z_{nn} \end{vmatrix}$$

El resultado es idénticamente igual a Δ_{12} , como puede verse suprimiendo la primera fila y la segunda columna de Δ . Se ha demostrado, por tanto, que $\Delta_{21} = \Delta_{12}$, de donde se sigue que $\mathbf{z}_{12} = \mathbf{z}_{21}$. Por extensión, puede verse que $\mathbf{z}_{kr} = \mathbf{z}_{rk}$, $r \neq k$.

La admitancia vista desde la excitación y la de transferencia se definen de una manera similar.

$$y_{kk} = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}_{kk}} \quad y_{kr} = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}_{rk}}$$

Para elementos bilaterales $\mathbf{Y}_{rk} = \mathbf{Y}_{kr}$. Por tanto, se sigue que $\mathbf{D}_{rk} = \mathbf{D}_{kr}$, y de aquí que $y_{rk} = y_{kr}$, $r \neq k$.

2-12. Circuitos equivalentes. Una definición de equivalencia de dos circuitos, que sirve tanto para el caso estacionario como para el sinusoidal, y no impone restricción alguna respecto al número de terminales del circuito, es la siguiente:

Dos circuitos son equivalentes si al aplicar un conjunto de tensiones (o intensidades) a los terminales correspondientes de los dos circuitos, las corrientes (o tensiones) resultantes son idénticas para terminales correspondientes de los dos circuitos.

Pueden deducirse de esta definición algunos casos especiales importantes para circuitos pasivos lineales bilaterales, que operan en estado estacionario sinusoidal. Por ejemplo, circuitos con solo dos terminales son equivalentes si sus impedancias de entrada en los dos terminales son idénticas. Así, un circuito de dos terminales, por muy complicado que sea interiormente, puede representarse por una única impedancia a cualquier frecuencia dada.

Una clase importante de circuitos son los llamados de tres terminales, o circuitos con dos pares de terminales (véase Fig. 2-11). Estos circuitos tienen un par de terminales de entrada y salida, pero son circuitos de tres terminales debido a la unión en corto circuito entre uno de los terminales de entrada y uno de los de salida. La aplicación de la definición de equivalencia muestra que, por muy complicado que sea el circuito de tres terminales, se caracteriza solo por tres magnitudes complejas independientes. Estas son las impedancias vista desde la excitación, en los

pares de terminales de entrada y salida y las dos impedancias de transferencia entre las mallas de entrada y salida, que son iguales. Esto quiere decir que solo hacen falta tres impedancias independientes para construir un circuito equivalente; las dos posibles configuraciones se muestran en la Fig. 2-11. Son éstas los conocidos circuitos T y Pi. Para ga-

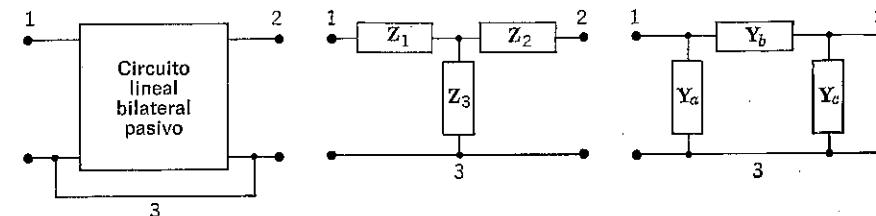


FIG. 2-11. Circuitos de tres terminales.

rantizar la equivalencia de acuerdo con la definición solo es necesario que las impedancias vistas desde la excitación y de transferencia de los circuitos T y Pi sean las mismas que las del circuito original.

Como aplicación de la definición de equivalencia a magnitudes instantáneas consideremos el caso de un circuito de tres terminales que contiene una inductancia mutua, como se muestra en la Fig. 2-12. In-

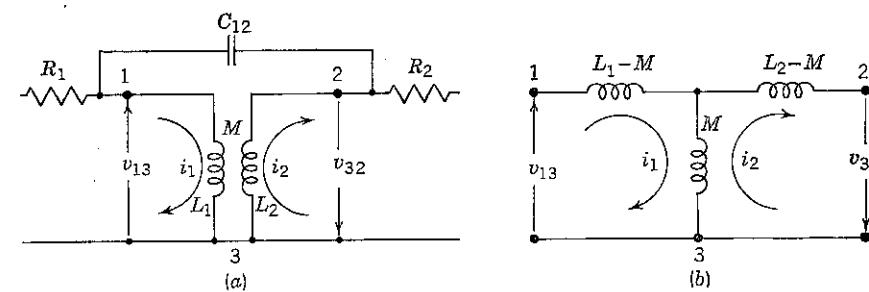


FIG. 2-12. Circuito equivalente de dos bobinas acopladas.

ductancia mutua constante, M , entre dos circuitos magnéticamente acoplados es la relación de la tensión inducida en un circuito y la derivada de la corriente en el otro circuito.

$$e_1 = M_{12} \frac{di_2}{dt} \quad e_2 = M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad M_{12} = M_{21} = M$$

El signo algebraico de M puede ser positivo o negativo, dependiendo de las direcciones del flujo magnético y de las orientaciones relativas de las dos bobinas.

Supongamos que se aplican corrientes instantáneas i_1 e i_2 a los termina-

les de entrada y salida, como se indica en la Fig. 2-12 (a). Las tensiones que aparecen en L_1 y L_2 vienen dadas por las ecuaciones de mallas instantáneas

$$L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} = v_{13} .$$

$$-M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = v_{32}$$

Sumando y restando $M di_1/dt$ de la primera ecuación y $M di_2/dt$ de la segunda, y reagrupando términos

$$(L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{d}{dt} (i_1 - i_2) = v_{13}$$

$$M \frac{d}{dt} (i_2 - i_1) + (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} = v_{32}$$

Pero éstas son las ecuaciones de malla del circuito de la Fig. 2-12 (b), en el cual no hay ninguna inductancia mutua entre las tres autoinducciones. Por tanto, si se aplican las mismas corrientes i_1 e i_2 al circuito T de la Fig. 2-12 (b), precisamente las mismas tensiones entre los terminales de entrada y salida que aparecen en el circuito T, serán las que aparezcan en el circuito original. Por tanto, los dos circuitos son equivalentes.

2-13. Teorema de superposición. El principio de superposición es aplicable a relaciones de causa a efecto en cualquier sistema *lineal*. En esencia, el principio establece que el efecto producido por una causa dada es independiente de todas las otras causas y efectos. En consecuencia, el efecto total de dos o más causas puede obtenerse superponiendo los efectos producidos separadamente por cada causa. Cuando el principio de superposición se aplica a circuitos puede establecerse refiriéndose a generadores de tensión. Existe un planteamiento correspondiente (dual), referido a generadores de corriente constante.

La corriente total que pasa por cualquier elemento de un circuito que contenga elementos pasivos lineales bilaterales y generadores independientes, es igual a la suma algebraica de las corrientes individuales producidas en el elemento por cada uno de los generadores independientes actuando separadamente.

La demostración de este teorema ha sido de hecho expuesta ya para el estado estacionario sinusoidal. Examinemos la corriente de malla I_k en la Ec. (2-16).

$$I_k = \frac{\Delta_{1k} E_1}{\Delta} + \frac{\Delta_{2k} E_2}{\Delta} + \cdots + \frac{\Delta_{nk} E_n}{\Delta}$$

El determinante del sistema y todos los cofactores son constantes. Cada

tensión representa la suma de las tensiones debidas a los generadores en una malla dada. Para una malla r , por ejemplo,

$$E_r = E_a + E_b + E_c + \cdots$$

donde cada término de E_r es un generador de tensión individual, tomado positivo en la misma dirección de I_r . La forma de I_k muestra que si todos los generadores excepto uno son cero, la componente de I_k producida en la malla k por el generador que queda es una constante multiplicada por la tensión del generador. Esto es cierto esté o no el generador en una malla exterior. El teorema queda, pues, demostrado.

2-14. Teorema de reciprocidad. El teorema de reciprocidad se refiere a un intercambio de causa y efecto. En ciertos sistemas restringidos, la relación causa y efecto no se ve afectada por un intercambio tal. Para circuitos eléctricos, el teorema puede establecerse en términos de un generador de tensión constante. Existe un planteamiento correspondiente (dual), referido a un generador de intensidad constante.

Si un generador de tensión constante situado en una rama r de un circuito pasivo lineal bilateral produce cierta corriente en otra rama, k , del circuito, colocado en la rama k produciría la misma corriente en la rama r .

Para el estado estacionario sinusoidal es fácil probar este teorema, utilizando las impedancias de transferencia definidas en la Sec. 2-11. Para simplificar la demostración, sin perder por ello generalidad, volvamos a dibujar el circuito de la manera más conveniente, de forma que las dos ramas consideradas sean ramas exteriores, como en la Fig. 2-13 (a). Cuando E_r es el único generador aplicado en serie con una rama exterior de la malla r -ésima de un circuito de n mallas, la corriente en cualquier otra rama k viene dada según la Ec. (2-16) por

$$I_k = \frac{\Delta_{rk} E_r}{\Delta} = \frac{E_r}{Z_{rk}}$$

Cuando E_r es el único generador aplicado en serie con una rama exterior de la malla k -ésima, en la cual la corriente era I_k , la corriente en la malla r viene dada por

$$I_r = \frac{\Delta_{kr} E_r}{\Delta} = \frac{E_r}{Z_{kr}}$$

Evidentemente, I_k e I_r son iguales, puesto que las impedancias de transferencia Z_{kr} y Z_{rk} son iguales. Queda, pues, demostrado el teorema.

2-15. Teorema de Thévenin. El teorema de Thévenin es una herramienta poderosa para facilitar los cálculos de circuitos y a menudo

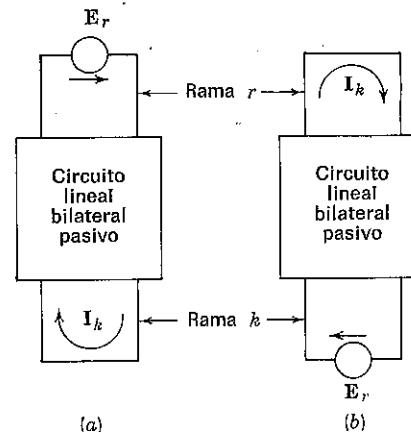


FIG. 2-13. Teorema de la reciprocidad

arroja bastante luz sobre los factores que influyen en el comportamiento del circuito. Establecemos a continuación el teorema, del cual existe una forma correspondiente (dual) referida a un generador de corriente equivalente, llamada teorema de Norton.

Para cualquier frecuencia dada, un circuito que contenga impedancias pasivas lineales bilaterales y generadores constantes puede, visto desde dos terminales cualesquiera, ser remplazado por un generador de tensión, E_0 , en serie con una impedancia Z_i , donde E_0 es la caída de tensión en circuito abierto entre los dos terminales y Z_i es la impedancia de entrada de los dos terminales.

Puede demostrarse este teorema por medio de los determinantes de un sistema de mallas. Para ello supongamos que una impedancia arbitraria Z está conectada a los dos terminales 1-2 del circuito al cual se va a aplicar el teorema [véase la Fig. 2-14 (a)], y designemos a la malla así formada por la enésima del circuito de n mallas. La corriente de la malla I_n , que es la corriente que pasa por Z , viene dada por $I_n = \Delta' / \Delta_z$, donde Δ_z es el determinante de mallas del circuito, incluyendo al elemento auxiliar Z .

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} Z_{11} & -Z_{12} & \cdots & -Z_{1n} \\ -Z_{21} & Z_{22} & \cdots & -Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -Z_{n1} & -Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} + z \end{vmatrix}$$

y Δ' es el determinante que resulta cuando se remplaza a la columna enésima por la columna de las tensiones del generador.

$$\Delta' = \begin{vmatrix} Z_{11} & -Z_{12} & \cdots & E_1 \\ -Z_{21} & Z_{22} & \cdots & E_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -Z_{n1} & -Z_{n2} & \cdots & E_n \end{vmatrix}$$

Nótese que Z no aparece en Δ' . Por otra parte, cuando se desarrolla Δ_z por la enésima columna, puede expresarse por $\Delta_z = \Delta + Z\Delta_{nn}$, donde Δ es el determinante del sistema de mallas con $Z = 0$, y Δ_{nn} es el cofactor de la enésima fila, enésima columna de Δ o Δ_z . Ni Δ ni Δ_{nn} contiene a Z .

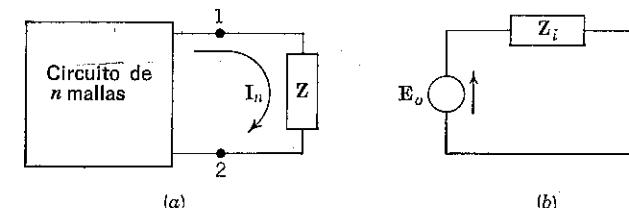


FIG. 2-14. Teorema de Thévenin

La caída de potencial entre los terminales 1 y 2 viene dada por I_4Z . Esta se convierte en la tensión en circuito abierto cuando Z se aproxima a infinito. Por tanto,

$$E_0 = \lim_{Z \rightarrow \infty} I_n Z = \lim_{Z \rightarrow \infty} \frac{\Delta' Z}{\Delta + Z \Delta_{nn}} = \frac{\Delta'}{\Delta_n}$$

Este resultado permite expresar I_n en función de E_0 de la forma siguiente:

$$I_n = \frac{\Delta'}{\Delta_n} = \frac{E_0 \Delta_{nn}}{\Delta + Z \Delta_{nn}} = \frac{E_0}{\Delta/\Delta_{nn} + Z}$$

Pero Δ/Δ_{nn} es la impedancia de entrada de la malla n , designada por Z_i en el establecimiento del teorema. Es la impedancia que se ve mirando desde los terminales 1-2 cuando todos los generadores del circuito han sido remplazados por sus impedancias internas y, naturalmente, suprimida la impedancia Z . Por tanto,

$$I_n = \frac{E_0}{Z_i + Z} . \quad (2-18)$$

Así queda demostrado el teorema.

La Fig. 2-14 (b) es una representación del circuito de la Ec. (2-18), para el caso $Z \rightarrow \infty$. Nótese que la corriente de corto circuito, tanto en el circuito real como en el equivalente, cuando se unen los terminales 1-2, viene dada por $I_{sc} = E_0/Z_i$. Por tanto, hay varias maneras de deducir

por medio de análisis el circuito equivalente de un circuito dado. Un método es, claro está, determinar E_0 y Z_i . Otro es calcular I_{sc} y Z_i o E_0 , de lo cual puede deducirse el circuito equivalente.

Conviene insistir en que el circuito equivalente de Thévenin es válido solamente en tanto que se refiera a los terminales 1-2 y a cualquier circuito externo. Generalmente no da ninguna información sobre las condiciones dentro del circuito original.

2-16. Teorema de compensación. El teorema de compensación permite analizar directamente los cambios en las corrientes o tensiones de circuito originados por un cambio en una impedancia de un circuito. Es especialmente útil en el análisis de puentes, y en capítulos posteriores aparecen muchos ejemplos de su aplicación. El teorema dice lo siguiente:

Si en un circuito formado por impedancias pasivas lineales bilaterales, una impedancia por la que pasa una corriente I es sustituida por una cantidad Z , los cambios en las corrientes del circuito son iguales a los producidos por un generador I_nZ colocado en oposición a I en la rama que contiene a Z .

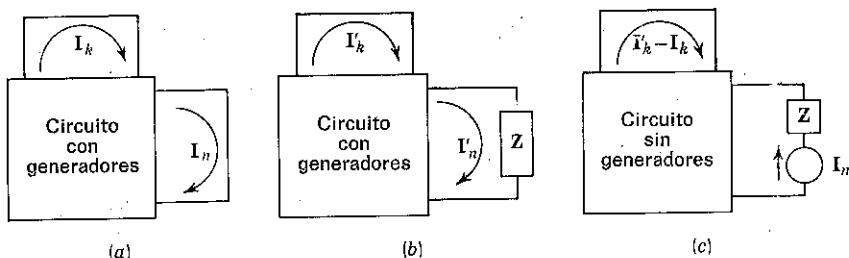


FIG. 2-15. Teorema de la compensación.

A continuación se demuestra este teorema referido a las ecuaciones de mallas. Para simplificar la demostración sin pérdida de generalidad, reorganicemos el circuito de manera que la impedancia que va a ser alterada quede en una rama exterior, como en la Fig. 2-15. Supongamos que esta rama constituye la enésima malla de un circuito de n mallas. Las ecuaciones de mallas, antes de cambiar la impedancia, vienen dadas por la Ec. (2-15). La impedancia que va a ser cambiada está contenida en Z_{nn} , pero no aparece en otra parte en el conjunto de las n ecuaciones de mallas. La corriente en una malla típica viene dada por la Ec. (2-16). No es preciso que la corriente I_k circule por una malla exterior, pero en la Fig. 2-15 se ilustra así para mayor claridad.

Sustituimos ahora Z_{nn} por $Z_{nn} + Z$, como consecuencia de un cambio Z en una rama exterior. (La parte real de Z puede ser positiva o negativa.) Todas las corrientes en todas las mallas variarán a causa de ello.

Empleando primas para designar a las nuevas corrientes, las ecuaciones de mallas son ahora

$$\begin{aligned} Z_{11}I'_1 - Z_{12}I'_2 - \cdots - Z_{1n}I'_n &= E_1 \\ -Z_{21}I'_1 + Z_{22}I'_2 - \cdots - Z_{2n}I'_n &= E_2 \\ \cdots &\cdots \\ -Z_{n1}I'_1 - Z_{n2}I'_2 - \cdots + (Z_{nn} + Z)I'_n &= E_n \end{aligned}$$

El único sitio donde aparece Z es en la enésima fila, enésima columna. La corriente en la malla k -ésima viene dada ahora por

$$I'_k = \frac{\Delta'_{1k}E_1}{\Delta'} + \frac{\Delta'_{2k}E_2}{\Delta'} + \cdots + \frac{\Delta'_{nk}E_n}{\Delta'} \quad (2-19)$$

donde el determinante de mallas modificado es $\Delta' = \Delta + Z\Delta_{nn}$. Nótese que Δ_{nk} no está afectado por el cambio.

Hacemos uso ahora de un ardid. Sumemos el término I_nZ a ambos miembros de la enésima ecuación de mallas del circuito original. Las ecuaciones de mallas son entonces, a partir de la Ec. (2-15),

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 - Z_{12}I_2 - \cdots - Z_{1n}I_n &= E_1 \\ -Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 - \cdots - Z_{2n}I_n &= E_2 \\ \cdots &\cdots \\ -Z_{n1}I_1 - Z_{n2}I_2 - \cdots + (Z_{nn} + Z)I_n &= E_n + I_nZ \end{aligned}$$

Esto no afecta a ninguna de las ecuaciones y no puede, evidentemente, cambiar ninguna de las corrientes originales. Sin embargo, un generador I_nZ ha sido, en efecto, añadido a E_n , y si se agrupan los dos términos en I_n del lado izquierdo de la enésima ecuación, como se muestra, el determinante del circuito original se convierte en el mismo que el del circuito modificado. Por tanto, I_k , todavía la misma corriente, viene dada ahora por

$$I_k = \frac{\Delta'_{1k}E_1}{\Delta'} + \frac{\Delta'_{2k}E_2}{\Delta'} + \cdots + \frac{\Delta'_{nk}(E_n + I_nZ)}{\Delta'}$$

Comparando con la Ec. (2-19), la suma de los n primeros términos de I_k es I'_k . Por tanto,

$$I'_k - I_k = -I_nZ \frac{\Delta_{nk}}{\Delta'} \quad (2-20)$$

Así queda demostrado el teorema. La interpretación de la Ec. (2-20), mostrada gráficamente en la Fig. 2-15 (c), es que un solo generador I_nZ ,

en serie con la malla n del circuito *modificado*, actuando en oposición a la dirección original de \mathbf{I}_n , produce una corriente $\mathbf{I}'_k - \mathbf{I}_k$ en una malla arbitraria, k . Pero éste es el cambio de corriente producido por el cambio Z en el circuito original.

2-17. Forma aproximada del teorema de compensación. El teorema de compensación es a menudo mucho más útil cuando se aplica en su forma aproximada, como se verá más adelante en muchos ejemplos. En la forma aproximada se emplea el mismo generador de compensación IZ , pero se suprime el cambio de impedancia, Z , del circuito de compensación de la Fig. 2-15 (c). La supresión de Z conduce a una simplificación, porque el determinante y todos los cofactores del circuito original son entonces los mismos que los del circuito al cual se aplica IZ . Además, en circuitos puente, el desequilibrio producido por Z es recuperado cuando Z se suprime, lo que da lugar a una notable simplificación de los cálculos.

El factor importante para poder utilizar la forma aproximada del teorema es el conocimiento del error introducido por la aproximación. Puede desarrollarse rápidamente una expresión para el error a partir del análisis precedente del teorema exacto. Sea $\mathbf{I}''_k - \mathbf{I}_k$ el valor aproximado del cambio de corriente en la k -ésima malla, resultante de la aplicación de un generador $-I_n Z$ en la enésima malla con Z suprimida. Puesto que ahora Z_{nn} queda inalterada, de la Ec. (2-20) se sigue que

$$\mathbf{I}''_k - \mathbf{I}_k = -I_n Z \frac{\Delta_{nk}}{\Delta} \quad (2-21)$$

Definimos el error fraccionario de los dos resultados como

$$\delta = \frac{(\mathbf{I}''_k - \mathbf{I}_k) - (\mathbf{I}'_k - \mathbf{I}_k)}{\mathbf{I}'_k - \mathbf{I}_k}$$

Este es el cambio aproximado de corriente menos el cambio exacto, expresado como una fracción del cambio exacto. Sustituyendo los valores dados por las Ecs. (2-20) y (2-21), es

$$\delta = \frac{-I_n Z \Delta_{nk}/\Delta + I_n Z \Delta_{nk}/\Delta'}{-I_n Z \Delta_{nk}/\Delta'} = \frac{\Delta'}{\Delta} - 1$$

Pero $\Delta' = \Delta + Z \Delta_{nn}$. Por tanto, el error fraccionario es

$$\delta = \frac{\Delta + Z \Delta_{nn}}{\Delta} - 1 = Z \frac{\Delta_{nn}}{\Delta} = \frac{Z}{Z_{nn}}$$

La relación Δ/Δ_{nn} es la impedancia de entrada a la malla enésima, Z_{nn} . Así, pues, el error fraccionario introducido al usar la forma aproximada

del teorema de compensación es igual a la relación del cambio de impedancia Z , a la impedancia de entrada de la malla en la cual se ha hecho el cambio.

En circuitos resistivos, la resistencia de entrada r_{nn} de malla n es siempre mayor que cualquier resistencia R_{no} en una rama *aislada* que forma parte de la malla enésima. Por tanto, si se cambia la resistencia de la rama R_{no} en una cantidad $\pm R$, el error fraccionario al usar el teorema aproximado será menor que R/R_{no} .

$$|\delta| = \frac{R}{r_{nn}} < \frac{R}{R_{no}}$$

Así, pues, si el cambio aproximado de corriente en una rama de un circuito resistivo resulta ser 1,0 mA como consecuencia de un cambio del 2 por 100 en una resistencia, el error cometido es menor que 20 μ A.

PROBLEMAS

2-1 (§ 1). Determinar los valores medios y eficaces de las siguientes funciones, entre los dos valores dados de la variable:

- a) $f(x) = a + bx^2 \quad x_1 = 1, x_2 = 3$
- b) $g(t) = \sin kt \quad t_1 = \pi/2k, t_2 = \pi/k$
- c) $h(y) = \ln ay \quad y_1 = 1/a, y_2 = 3/a$

2-2 (§ 4). Demostrar por sustitución directa que la Ec. (2-4) satisface la ecuación diferencial para el circuito de la Fig. 2-3.

2-3 (§ 5). En el circuito de la Fig. 2-3, E es remplazado por un generador $E \sin(\omega t + \phi)$. Determinese una expresión para la corriente estacionaria, siguiendo el método del $e^{j\omega t}$.

2-4 (§ 5). Determinese la solución estacionaria de la siguiente ecuación diferencial por el método de $e^{j\omega t}$.

$$J \frac{d^2y}{dt^2} + D \frac{dy}{dt} + Sy = A \sin \omega t$$

donde J, D, S, A y ω son constantes.

2-5 (§ 6). Demostrar que las leyes de Kirchhoff son válidas para tensiones e intensidades complejas [véase Ec. (2-8)].

2-6 (§ 6). Demostrar la Ec. (2-9).

2-7 (§ 6). Demostrar la Ec. (2-10).

2-8 (§ 8). Si V e I son la tensión y corriente complejas asociadas a una impedancia pasiva, demostrar que la potencia media disipada en la impedancia viene dada por

$$P_{av} = \frac{1}{4} (VI^* + V^*I)$$

2-9 (§ 10). En el circuito de la Fig. 2-9, convertir los generadores de corriente en generadores de tensión y determinar la corriente que pasa por Y_3 por medio del análisis de mallas. Demostrar que el resultado está de acuerdo con el obtenido por análisis de nudos.

2-10 (§ 10). En el circuito de la Fig. 2-8, tomar el terminal más bajo de Z_2 como nudo de referencia, convertir los generadores de tensión en generadores de corriente y determinar una expresión para la tensión de nudo en la unión de Z_1 y Z_3 . Demostrar que el resultado está de acuerdo con el obtenido por análisis de mallas.

2-11 (§ 11). En el circuito de la Fig. 2-8, determinar expresiones para *a)* la impedancia vista desde la excitación de la malla 1, *b)* la impedancia vista desde la excitación de la malla 2, *c)* la impedancia de transferencia desde la malla 1 a la malla 2, y viceversa.

2-12 (§ 12). ¿Qué relaciones deben satisfacerse entre las tres impedancias del circuito T y las tres admitancias del circuito Pi de la Fig. 2-11 para que los dos circuitos sean equivalentes?

2-13 (§ 12). Un generador sinusoidal (de impedancia interna cero), representado por el número complejo E , está conectado entre el terminal izquierdo de R_1 y el nudo 3 del circuito de la Fig. 12-12. Un condensador C está conectado entre el terminal derecho de R_2 y el nudo 3. Para $L_1 = L_2 = L$ y $\omega = 1/2(L - M)C_{12}$, determinar una expresión para la corriente compleja que pasa por C .

2-14 (§ 12). En la Fig. 2-11, designese a la malla de entrada del circuito pasivo lineal bilateral como malla 1, y a la malla de salida como malla n . Demostrar que la impedancia Z_3 del circuito T equivalente viene dada por

$$Z_3 = \frac{\Delta \Delta_{1n}}{\Delta_{11} \Delta_{nn} - \Delta_{1n}^2}$$

donde Δ es el determinante de mallas y Δ_{11} , Δ_{1n} y Δ_{nn} son cofactores del circuito general.

2-15 (§ 13). Determinar una expresión para la corriente I_2 en el circuito de la Fig. 2-8 por aplicación del teorema de superposición; esto es, encontrar la corriente en Z_3 atribuible a E_a con $E_b = 0$, y añadir a esta corriente la atribuible a E_b con $E_a = 0$.

2-16 (§ 14). Se aplica un generador sinusoidal, representado por el número complejo E , entre los terminales 1-3 del circuito Pi de la Fig. 2-11. El generador tiene una impedancia interna Z . Se conecta una impedancia de carga Z_L entre los terminales 2-3. *a)* Determinar una expresión para la corriente que pasa por Z_L . *b)* Demostrar que la misma corriente pasa por Z cuando E es conectada en serie con Z_L .

2-17 (§ 17). El circuito T de la Fig. 2-11 es puramente resistivo, con $Z_1 = 2$ ohmios, $Z_2 = 4$ ohmios y $Z_3 = 6$ ohmios. Se conecta entre los terminales 1-3 una batería de 6 voltios con 1 ohmio de resistencia interna, y entre los terminales 2-3 una carga resistiva de 2 ohmios. *a)* Emplear el teorema de compensación para calcular en cambio en la corriente de la batería que resulta de aumentar en 1 ohmio la resistencia de carga. *b)* Puesto que la impedancia de entrada en el lugar donde se produce el cambio de 1 ohmio es de 8 ohmios, el teorema de compensación aproximado daría un resultado que es 1/8 veces mayor que la respuesta en la parte *a*). Demostrar que es efectivamente así por cálculo directo.

CAPITULO 3

GALVANOMETROS, SHUNTS Y MEDIDORES DE CORRIENTE CONTINUA

El movimiento medidor de d'Arsonval es probablemente el más frecuentemente utilizado de todos los dispositivos indicadores eléctricos. Su funcionamiento se basa en la interacción entre una corriente eléctrica y un campo magnético. Este movimiento constituye la esencia de muchas clases diferentes de instrumentos de deflexión. Dada su importancia, se presentan con detalle sus principios básicos de funcionamiento. Este capítulo está dedicado a la deflexión estática, y en el capítulo siguiente es examinado su comportamiento dinámico.

GALVANOMETROS

Un galvanómetro es un dispositivo electromecánico en el cual se produce un par útil como resultado de la interacción entre una corriente eléctrica, que pasa por la bobina del instrumento y del campo magnético existente en el medio ambiente de la bobina. Existen muchos tipos diferentes de galvanómetros, tales como el galvanómetro de tangentes, el de Helmholtz, el de suspensión, el de imán móvil y el de bobina móvil. El galvanómetro de d'Arsonval pertenece al tipo de bobina móvil e imán permanente, denominado también como movimiento medidor (especialmente en instrumentos transportables). Se emplea ampliamente para dar una medida directa de la corriente eléctrica. Los movimientos de d'Arsonval se emplean en voltímetros y amperímetros de corriente continua, así como en galvanómetros sensibles de pared. También se aplican en muchos instrumentos de c. a. como dispositivo final que produce una lectura observable, después que la corriente alterna ha sido convertida en continua.

3-1. Ventajas del movimiento de d'Arsonval. No es accidental que este tipo de instrumento indicador haya alcanzado una aplicación tan amplia. Sus muchas ventajas lo hacen útil tanto para instrumentos portátiles como para instalaciones permanentes delicadas, si el proyecto es apropiado. Algunas de las propiedades más destacadas de este movimiento son las siguientes: Puede proyectarse para que tenga un consumo de poten-

cia muy bajo, y, sin embargo, sigue siendo inherente a él una elevada razón de par a peso. Puede conseguirse una escala larga con divisiones uniformemente espaciadas (escala uniforme). La operación del instrumento está relativamente libre de efectos de campos magnéticos parásitos, que a menudo existen en el ambiente en el cual se emplean estos instrumentos. Una característica que amplía su campo de aplicación es que pueden proyectarse con facilidad, e incorporarse al instrumento, shunts resistivos que pueden dar un amplio margen de sensibilidad. Además, el movimiento tiene características dinámicas útiles en muchas aplicaciones, entre las cuales son importantes la rápida velocidad de respuesta a un cambio dado en la corriente, y la capacidad de ser amortiguado críticamente, de forma que puedan ser evitados rebasamientos indeseables o inercias a la respuesta. Su elevada sensibilidad, especialmente en la versión de instrumento no portable, permite la medida rápida de corrientes muy pequeñas. Es un método superior al de deposición química en el

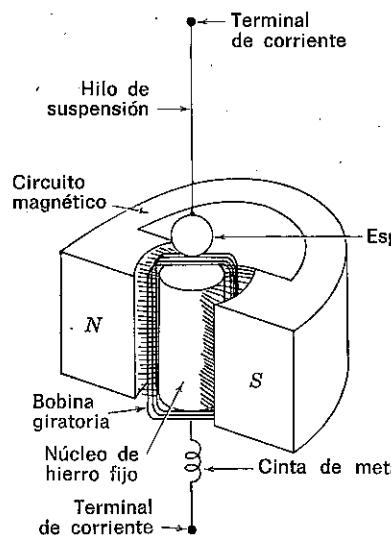


FIG. 3-1. Componentes del galvanómetro de espejo de d'Arsonval.

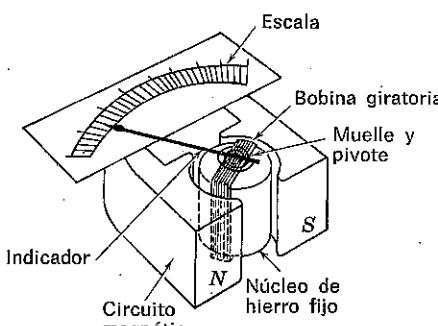


FIG. 3-2. Componentes del medidor de d'Arsonval.

tiempo, que también se emplea para la medida de efectos pequeños. Sacrificando parte de la sensibilidad, es posible proyectar instrumentos portables muy robustos. Todas estas ventajas, junto con su bajo costo, explican por qué es el movimiento preferible en muchas aplicaciones.

Esta lista incuestionable de ventajas constituyen un incentivo para el estudio cuidadoso de los principios de operación de este movimiento. Debe, pues, intentarse un buen entendimiento de las muchas aplicaciones de los movimientos de d'Arsonval.

3-2. Descripción del movimiento. En las Figs. 3-1 y 3-2 se muestran dos versiones diferentes del instrumento de d'Arsonval. El galvanómetro de espejo, que generalmente se monta rígidamente sobre una base exenta de vibraciones, se emplea cuando se necesita mucha sensibilidad, juntamente con una escala larga. Es esencialmente un instrumento de laboratorio, muy delicado y que necesita muchas precauciones para su ajuste y uso. Por el contrario, la versión portable, generalmente encerrada en una caja pequeña, es muy robusta. Normalmente se la puede tratar con bastante brusquedad sin que se dañe, pero naturalmente es preferible tomar algunas precauciones razonables para su empleo.

Aunque los dos movimientos representados son muy diferentes en detalle, fundamentalmente son iguales en principio y tienen los elementos siguientes en común: 1) una bobina móvil, 2) un campo magnético estacio-

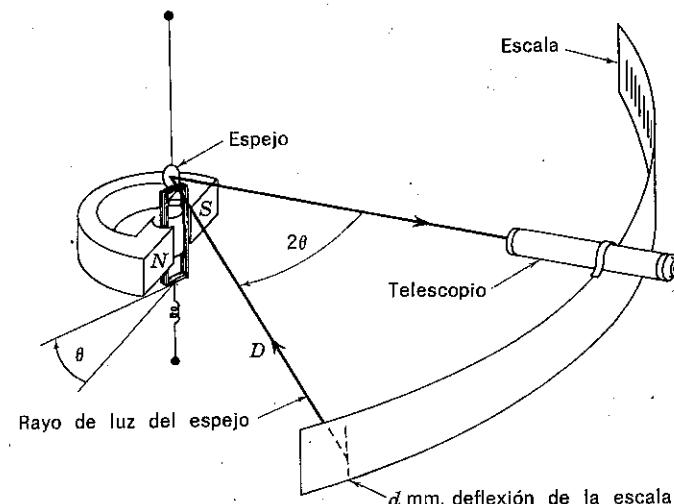


FIG. 3-3. Sistema óptico del galvanómetro de espejo.

nario, 3) un dispositivo que produce un par recuperador sobre la bobina y 4) medios para detectar la deflexión angular de la bobina. En ambos casos los movimientos emplean bobinas compactas de muchas vueltas, y es un imán permanente el que proporciona el campo magnético estacionario, con un núcleo dentro de la bobina (pero no unido físicamente a ella), para dar un campo concentrado de características apropiadas.

En el caso del galvanómetro de espejo, la bobina móvil puede colgar libremente de una suspensión de hilo, de manera que pueda girar alrededor de su eje, como se muestra en la Fig. 3-1. (En algunos proyectos se emplea una doble suspensión tensa.) La suspensión filamentar da también un par recuperador o par de torsión, para contrarrestar la rotación de la bobina producida por el paso de una corriente por ella. Una cinta

metálica unida al extremo de la bobina contribuye, en una pequeña proporción, al par recuperador. La suspensión filamentar y la cinta se emplean también como conductores de la corriente que pasa por la bobina. La posición angular de la bobina puede determinarse por medios ópticos, como se muestra en la Fig. 3-3. Un pequeño espejo, unido rígidamente a la bobina, forma parte del sistema óptico, que comprende también un

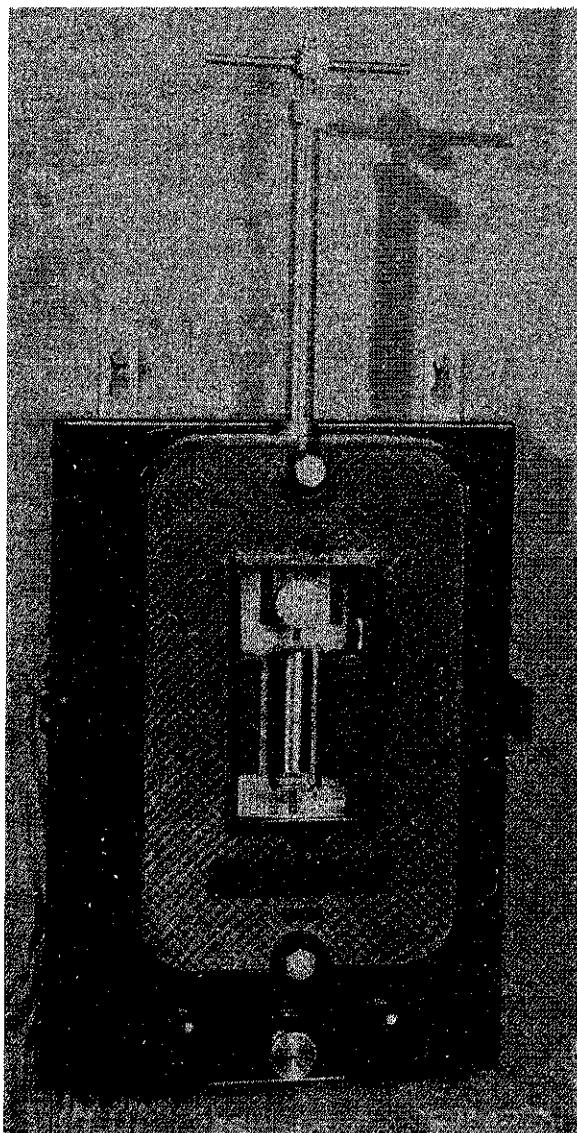


FIG. 3-4. Galvanómetro de espejo. (Cortesía de L. y Northrup Co.)

anteojo y una escala. La escala está iluminada, y los rayos de luz llegan al espejo a través de la escala, y de allí al anteojos, donde el observador ve la imagen de la escala. Otra disposición óptica frecuente consiste en una fuente luminosa cuyos rayos son enfocados, por medio de lentes, sobre el espejo, y de allí reflejados sobre una escala transparente.

En la versión portátil de este galvanómetro, la bobina móvil pivota sobre dos cojinetes de zafiro de muy pequeña fricción y puede girar libremente. El par recuperador se consigue por medio de muelas en espiral unidos a ambos extremos de la bobina y sujetos por el otro extremo a la armadura del instrumento. La corriente llega a la bobina a través de los muelles recuperadores, y los dos extremos del circuito salen al exterior por un par de terminales. La rotación de la bobina se indica directamente sobre una escala por medio de una aguja indicadora, rígidamente unida a la bobina.

Los dos movimientos descritos son representativos, pero hay muchas variantes en cuanto a detalles de construcción y materiales, dependiendo de la aplicación para la cual haya sido proyectado el instrumento. Las

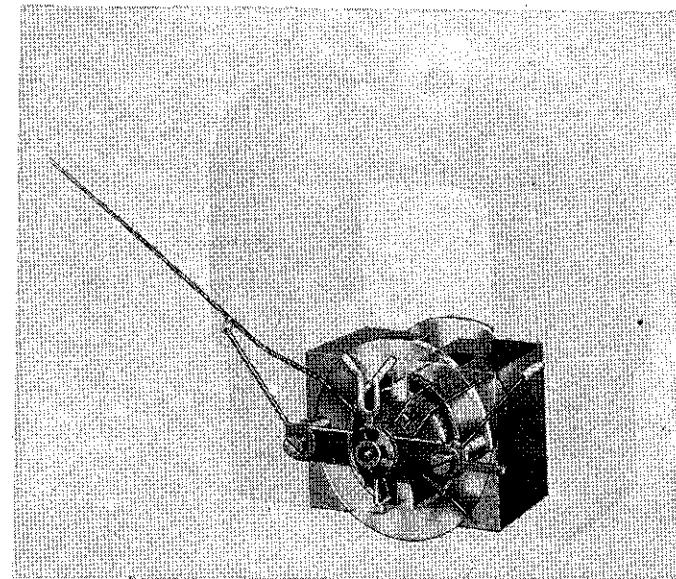


FIG. 3-5. Instrumento de medida pivotada. (Cortesía de Weston Electrical Instrument Corporation.)

Figs. 3-4 y 3-5 muestran fotografías de instrumentos típicos. Las consideraciones prácticas de proyecto, muchas de las cuales son empíricas, constituyen la base de una artesanía de la instrumentación especializada. Se han construido galvanómetros de gran calidad, y continúa el progreso

en respuesta a demandas más precisas. Es posible investigar con algún detalle los principios en los que se basa la operación del galvanómetro haciendo las simplificaciones necesarias. Esto nos lleva a la comprensión de su forma de operación y limitaciones y a la apreciación de algunos factores que influyen en su proyecto.

3-3. Ley fundamental de la fuerza. La ley de la fuerza sobre una carga eléctrica es quizá una de las más significativas en ingeniería eléctrica. Existen dos orígenes diferentes de las fuerzas eléctricas que se ejercen sobre una carga eléctrica. Son llamados «fuerza electrostática» y «fuerza magnética». Los dos campos vectoriales, que en la teoría de la electricidad se postulan como responsables de estas fuerzas, se llaman apropiadamente campos de fuerzas. Estos son la intensidad de campo eléctrico, \mathbf{E} , y la densidad de flujo magnético, \mathbf{B} . En el sistema de unidades mks \mathbf{E} tiene las dimensiones de voltio por metro y \mathbf{B} las de weber por metro cuadrado. La fuerza instantánea sobre una carga puntual de q culombios, que se mueve con una velocidad de v m/seg, está relacionada con los dos campos por la ley

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{newton} \quad (3-1)$$

Esta ecuación se toma frecuentemente como la ecuación que define los dos campos en los desarrollos modernos de la teoría de campos. Si el campo eléctrico es despreciable, o más exactamente, si $q\mathbf{E}$ es despreciable comparado con el producto vectorial $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, entonces se da el caso particular de la Ec. (3-1).

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \mathbf{E} = 0 \quad (3-2)$$

En el caso particular de que las cargas eléctricas se muevan dentro de un conductor, como en la bobina del galvanómetro, la ley de fuerza puede formularse en función de la corriente de conducción en lugar de

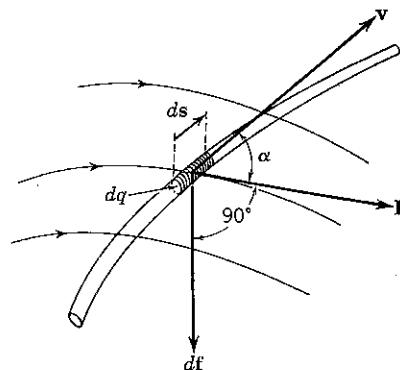


FIG. 3-6. Fuerza sobre un elemento de corriente.

la carga. La Fig. 3-6 muestra una longitud vectorial infinitesimal de un conductor ds , portador de una corriente, que forma un ángulo α con un campo magnético \mathbf{B} . Las cargas en el conductor se mueven realmente de forma muy caótica, pero es corriente en circuitos ordinarios considerar el efecto medio. Se supone que un elemento de carga dq , contenido en una longitud ds del conductor delgado, atraviesa el hilo con una cierta velocidad instantánea $v = ds/dt$. La intensidad de corriente eléctrica es, por definición, $i = dq/dt$, donde dq es la carga que pasa a través de una sección del hilo en un tiempo dt . Multiplicando ambos lados de esta ecuación que define la corriente por ds , resulta

$$i \, ds = \frac{dq}{dt} \, ds = dq \frac{ds}{dt} = dq \, v \quad (3-3)$$

La fuerza instantánea, $d\mathbf{f}$, sobre este elemento infinitesimal, suponiendo $\mathbf{E} = 0$, viene dada por la Ec. (3-2), donde \mathbf{B} es la densidad de flujo magnético en la cual se encuentra dq . De la combinación de las Ecs. (3-2) y (3-3) resulta

$$d\mathbf{f} = i \, ds \times \mathbf{B} \quad \text{newton} \quad \mathbf{E} = 0 \quad (3-4)$$

Esta expresión da el vector fuerza instantánea $d\mathbf{f}$, sobre un elemento de corriente infinitesimal $i \, ds$, situado en un campo magnético \mathbf{B} . La magni-

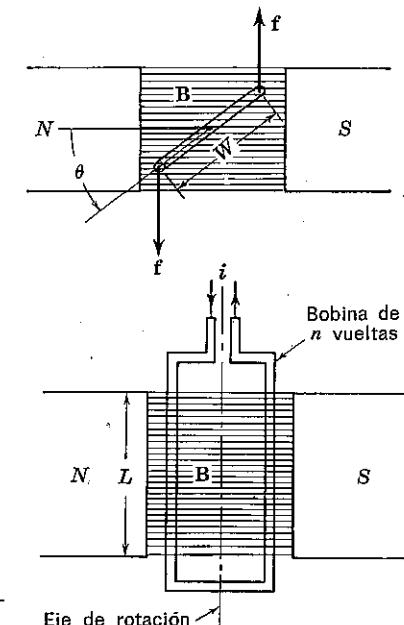


FIG. 3-7. Fuerza sobre la bobina de un galvanómetro.

tud de esta fuerza es $iB \sin \alpha ds$, su dirección es la perpendicular al plano que contiene a ds y \mathbf{B} , y su sentido el de un tornillo que girara desde ds a \mathbf{B} siguiendo el ángulo menor formado por estos dos vectores. La magnitud, dirección y sentido están contenidos en el producto vectorial de la Ec. (3-4).

3-4. Fuerza sobre una bobina en un campo uniforme. La Fig. 3-7 puede servir de ilustración de la determinación de la fuerza ejercida sobre una bobina de un galvanómetro sencillo. Una bobina rectangular de n vueltas, de anchura W , se encuentra en un campo uniforme \mathbf{B} , producido entre dos piezas polares rectangulares de un imán permanente. Por campo «uniforme» entendemos aquel que tiene la misma magnitud y dirección en todos los puntos, dentro del volumen de interés.

Para un análisis elemental, es preciso idealizar el sistema físico. Supongamos que la bobina está constituida por un hilo tan delgado que la sección del arrollamiento es muy pequeña (más exactamente, que la sección de la madeja de hilo es despreciable frente a W). Supongamos además despreciable la difusión del campo \mathbf{B} , es decir, supongamos que el campo está confinado enteramente en un volumen rectangular de sección igual a la de las piezas polares. La bobina por la que pasa la corriente i tiene solamente un grado de libertad, que es la rotación alrededor de un eje situado en el plano de la bobina a una distancia $W/2$ de cada uno de los dos extremos de la bobina.

La fuerza total que actúa sobre un lado de la bobina puede determinarse aplicando la ley fundamental de la fuerza, dada en forma conveniente por la Ec. (3-4). Consideremos un elemento de corriente infinitesimal $i ds$, de una de las n vueltas del lado izquierdo de la bobina, como se muestra en la Fig. 3-8. El vector de fuerza infinitesimal sobre este elemento viene dado por $d\mathbf{f}_1 = i ds \times \mathbf{B}$. La dirección de $d\mathbf{f}_1$ es perpendicular a ds y a \mathbf{B} , y su sentido viene dado por la regla del tornillo de la mano derecha, como se ilustra en la Fig. 3-8. Puesto que el ángulo α comprendido entre ds y \mathbf{B} es de 90° para cualquier ángulo de torsión, θ (véase Fig. 3-7), la magnitud de esta fuerza es $df_1 = iB ds$.

Para obtener la fuerza que actúa sobre un lado de una vuelta de la bobina es necesario sumar vectorialmente todas las fuerzas infinitesimales sobre cada uno de los elementos de los que se compone el lazo. En muchas ocasiones la integración de este vector plantea un problema formidable, pero en este caso es muy sencilla. Puede establecerse la integral definiendo un eje s a lo largo del lado izquierdo de la bobina, dirigido desde el tope al fondo de la misma. Tomando $s = 0$ en el extremo superior del volumen rectangular en el cual está confinado \mathbf{B} . La fuerza sobre una vuelta del lado izquierdo de la bobina viene dada por

$$\mathbf{f}_1 = \int_{s=0}^{s=L} d\mathbf{f}_1 = \int_0^L i ds \times \mathbf{B} \quad (3-5)$$

donde L es la longitud del volumen rectangular que contiene a \mathbf{B} . Para s menor que cero o mayor que L , \mathbf{B} es cero, y, por tanto, $d\mathbf{f}_1$ es cero, aun

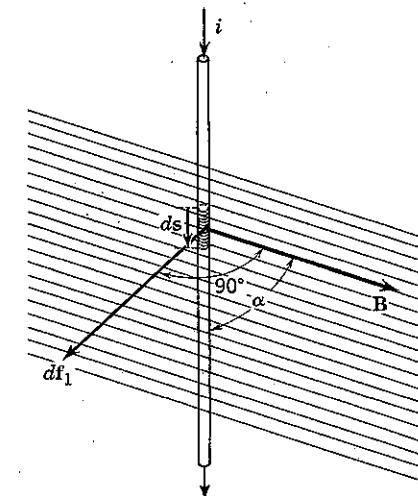


FIG. 3-8. Fuerza sobre un elemento de la bobina del galvanómetro.

cuando la bobina pueda ser más larga que L . Por tanto, los límites de integración indicados darán el resultado correcto, dentro del supuesto de que no hay difusión. Puesto que cada $d\mathbf{f}_1$ tiene la misma magnitud y dirección para cada elemento, siendo α de 90° y estando fijados i y \mathbf{B} , la fuerza \mathbf{f}_1 tiene la misma dirección que $d\mathbf{f}_1$ y su magnitud viene dada por la integral escalar

$$\mathbf{f}_1 = \int_0^L iB ds = iB \int_0^L ds = BiL \quad (3-6)$$

Este resultado es una fórmula familiar para expresar la fuerza que actúa sobre un conductor rectilíneo, perpendicular a un campo uniforme \mathbf{B} . Las restricciones de este resultado y la forma de deducirla a partir de la ley fundamental de la fuerza son conceptualmente más importantes que la fórmula misma BiL . Por esta razón ha sido desarrollada partiendo de los principios primeros. La naturaleza altamente especializada de la Ec. (3-6) se hace evidente considerando las restricciones sucesivas impuestas en el curso de su desarrollo.

El mismo resultado para \mathbf{f}_1 se obtendrá para cada uno de los n filamentos de corriente del lado izquierdo de la bobina. Por tanto, la magnitud de la fuerza total ejercida sobre el lado izquierdo de la bobina de n vueltas es

$$f = nf_1 = nBiL \quad (3-7)$$

y su dirección es mutuamente perpendicular a \mathbf{B} y al lado de la bobina, como se muestra en la Fig. 3-7.

3-5. Par sobre una bobina en un campo uniforme. Un análisis similar del lado derecho de la bobina de n vueltas conduce a una fuerza de la misma magnitud, pero de sentido contrario, pues i está invertida con respecto a \mathbf{B} . Así, cada lado de la bobina experimenta la misma fuerza total $f = nBiL$, pero la resultante total que actúa sobre la bobina de n vueltas es cero. Por tanto, no habrá movimiento de translación. Sin embargo, las dos fuerzas forman un par que produce una rotación.

Para definir la posición angular de la bobina, definamos un ángulo (representado en la Fig. 3-7) y tomemos $\theta = 0$ cuando el plano de la bobina coincide con las líneas de \mathbf{B} . Entonces $\theta = 90^\circ$ cuando el plano de la bobina es perpendicular a las líneas de \mathbf{B} . La fuerza sobre cada lado de la bobina es independiente de θ porque α , i , \mathbf{B} y L no dependen de θ . El par que tiende a hacer girar la bobina un ángulo θ puede formularse seleccionando un eje cualquiera paralelo al eje real de rotación y sumando los productos de f por las distancias de los puntos de aplicación de las fuerzas a dicho eje, que llamaremos brazos de palanca. Por ejemplo, si se toma un eje que pase por el lado derecho de la bobina (véase Fig. 3-7), el brazo de palanca de f que actúa sobre el lado derecho de la bobina es cero, mientras que el de f que actúa sobre el lado izquierdo es $W \cos \theta$. Así, el par es

$$T = fW \cos \theta = nBiLW \cos \theta = nBiA \cos \theta \quad (3-8)$$

donde $A = LW$ es el área de bobina «efectiva», que es menor que el área física de la bobina cuando ésta sobrepasa los confines supuestos del campo \mathbf{B} .

Si resulta confuso determinar el par por medio del eje conveniente seleccionado puede emplearse el eje físico real de rotación, obteniéndose el mismo resultado. Para el eje real de rotación, cada fuerza f actúa con un brazo de palanca igual a $(W/2) \cos \theta$; por tanto, ambas fuerzas contribuyen igualmente al par total. En consecuencia, el par total es dos veces el par producido por una de las fuerzas y viene dado por

$$T = 2 \left(f \frac{W}{2} \cos \theta \right) = fW \cos \theta$$

de acuerdo con la Ec. (3-8).

Supongamos que el ángulo de la bobina θ es cero cuando $i = 0$. Si súbitamente se aplica una corriente constante I , se creará un par T , y si la bobina puede girar libremente se producirá una rotación. Cuando la bobina gira, el par disminuirá, a pesar de que f permanezca constante, porque el brazo de palanca se hace más pequeño cuando θ se approxima

a 90° , anulándose por completo cuando $\theta = 90^\circ$. Así, pues, la bobina experimentará un par variable (dependiente del ángulo). Aunque esto puede producir un rebasamiento inicial de $\theta = 90^\circ$, debido a la instantaneidad de la perturbación y a la inercia de la bobina, ésta oscilará alrededor de la posición $\theta = 90^\circ$ y quedará en reposo en un estado estable de par nulo. Esto ocurrirá para cualquier corriente continua I , lo bastante grande para producir un par que supere la fricción del eje sobre el cual pivota la bobina. Se ve, pues, que este galvanómetro está incompleto. No produce una deflexión angular que esté ligada por una relación única a la corriente de la bobina. La introducción de un par de freno o recuperador proporciona el resultado deseado, como se verá en la sección siguiente.

3-6. Ley de deflexión estática y proyecto. Puede conseguirse un par recuperador para la bobina móvil por muy diversos dispositivos mecánicos de muelle. El proyecto corriente conduce a un par recuperador lineal, proporcional al giro angular del resorte, que viene dado por

$$T_r = S\theta \quad (3-9)$$

donde S es una constante (suponiendo que no se pase del límite elástico del resorte) llamada *constante del resorte*. Sus dimensiones son newton-metro (por radián) en el sistema de unidades mks.

El ángulo de equilibrio de la bobina está determinado por el par aplicado T , producido por la interacción de i y \mathbf{B} , y el par recuperador T_r , originado mecánicamente por el resorte, y está definido por $T = T_r$. Expresando esta igualdad de pares en función de θ , para una corriente $i = I$ resulta

$$nBIA \cos \theta = S\theta$$

Despejando I

$$I = \frac{S\theta}{nBA \cos \theta} = \frac{K\theta}{\cos \theta} \quad (3-10)$$

donde $K = S/nBA$ se llama *constante del aparato* y es fija para un galvanómetro dado. La relación entre la corriente I , variable independiente, y el ángulo de equilibrio θ , variable dependiente, se llama ley de deflexión estática. Para el galvanómetro que ha sido analizado, es evidente que I es una función más bien complicada de θ . Sin embargo, para corrientes pequeñas y los correspondientes valores pequeños de θ , $\cos \theta$ es aproximadamente la unidad e I es aproximadamente proporcional a θ .

A pesar de las muchas suposiciones simplificadoras empleadas en el análisis, es posible profundizar en el significado de los factores importantes que intervienen en el proyecto de un galvanómetro, examinando la constante K del aparato. Al proyectar galvanómetros se busca a me-

nudo una θ grande para una corriente pequeña, es decir, conseguir un instrumento sensible. Esto significa que hace falta una K pequeña. Puesto que $K = S/nBA$, K será tanto más pequeño cuanto menos sea S y mayores n , B y A . En cada caso, sin embargo, existen exigencias que complican la cuestión. Los proyectistas llaman a este fenómeno «ley de la mala idea». Por ejemplo, si se reduce S , el resorte (y, por tanto, todo el aparato en su conjunto) se hace más delicado y frágil. Si n y A se hacen mayores, el peso, tamaño e inercia de la bobina se aumentan y esto se opone al deseo de una bobina pequeña y ligera capaz de dar una respuesta rápida. Una B mayor requiere materiales magnéticos permanentes mejores, que son más caros. También, la operación por encima de ciertos niveles de B con un material magnético dado puede dañar la «permanencia», lo cual produciría inestabilidad de la calibración del galvanómetro. Estos y otros factores no considerados aquí sugieren la dificultad del compromiso de todos los factores, inevitable al proyectar un galvanómetro para una aplicación dada.

3-7. Características de escala. La ley de deflexión de un galvanómetro está en estrecha relación con las características de la escala en la cual se obtienen las lecturas correspondientes a I . En el caso de un instrumento portátil, con una aguja indicadora unida a la bobina, el ángulo de la aguja y el de la bobina están en relación uno a uno. En el caso del

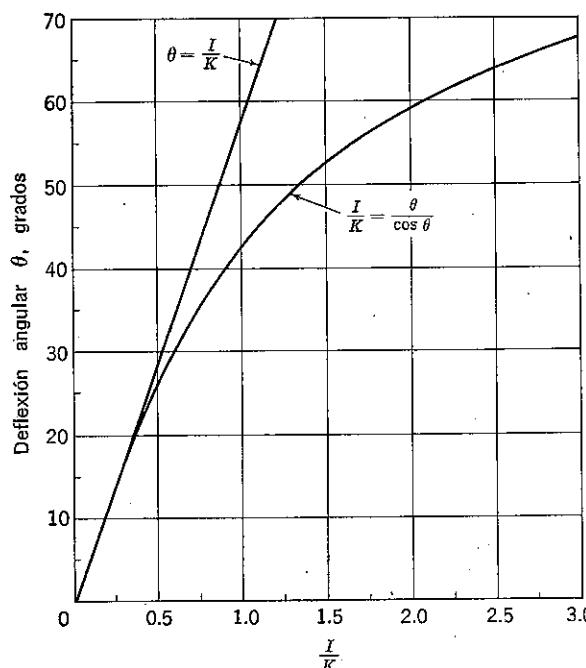


FIG. 3-9. Ley de deflexión del galvanómetro de campo uniforme.

galvanómetro de espejo descrito, el ángulo sobre la escala es dos veces el ángulo de la bobina para una escala que sea un arco de circunferencia centrada en el eje de la bobina (véase Fig. 3-3). Si se emplea una escala recta en lugar de una circular, la lectura de la escala se hace más complicada en función de θ , especialmente cuando θ no es pequeño.

En casos en los que el ángulo de la escala es el producto de alguna constante por θ , la ley de deflexión revela información completa. En la Fig. 3-9 está representada la ley de deflexión para un instrumento de campo uniforme, que indica que para valores pequeños de θ , $I \approx K\theta$, pero el alejamiento de una escala uniforme crece progresivamente a medida que θ se aproxima a 90° . Puede encontrarse una explicación física de la no uniformidad examinando el brazo de palanca con el cual la fuerza f ejerce un par, puesto que el término $\cos \theta$ es responsable del apartamiento de la linealidad. Para θ pequeño, el brazo de palanca ($W/2$) $\cos \theta$ permanece sensiblemente constante, pero cuando θ se aproxima a 90° , el brazo de palanca tiende rápidamente a cero. Cuando se está cerca del límite, f , que es proporcional a I , puede crecer tremadamente, mientras que un incremento angular en θ muy pequeño reduce el brazo de palanca en un porcentaje grande.

Otra forma significativa de presentar la ley de deflexión es en función de la escala real que puede emplearse en conjunción con una aguja indicadora unida directamente a la bobina, como se muestra en la Fig. 3-10.

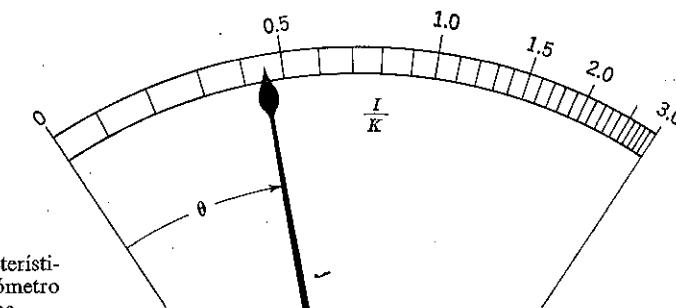


FIG. 3-10. Características de un galvanómetro de campo uniforme.

La porción uniforme de la escala se extiende sobre un arco considerable hacia el extremo cero de la escala. Sin embargo, las lecturas en la escala en función de la corriente que pasa por la bobina, se hacen cada vez más apretadas para valores crecientes de I , tanto que la parte superior de la escala tiene una resolución muy limitada. El valor de θ puede calcularse a partir de la ley de deflexión, después de dar un valor determinado a I . Por ejemplo, la sustitución de $I = cK$, donde c es una constante, en la Ec. (3-10) conduce a $\theta = c \cos \theta$. El valor de θ para cualquier valor numérico concreto de c puede obtenerse a partir de esta ecuación trascendente por un método numérico de ensayo y consideración del error.

Ofrece con frecuencia particular interés la zona en la cual la escala es uniforme. Puede formularse una aproximación de primer orden del apartamiento de la uniformidad para deflexiones pequeñas. En el caso actual de $I = K\theta/\cos \theta$, el desarrollo siguiente convergerá rápidamente para valores pequeños de θ .

$$\begin{aligned} I &= K\theta(\cos \theta)^{-1} \\ &= K\theta \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right)^{-1} = K\theta \left(1 + \frac{\theta^2}{2!} - \frac{5\theta^4}{4!} + \dots\right) \end{aligned} \quad (3-11)$$

Si $(\theta^2/2) \ll 1$, la ley de deflexión viene dada aproximadamente por $I = K\theta$ y la escala es uniforme. Sin embargo, si $\theta^2/2$ es pequeño, pero no despreciable, la diferencia entre la ley lineal y la ley real es, para una aproximación de primer orden,

$$K\theta - K\theta \left(1 + \frac{\theta^2}{2}\right) = -\frac{K\theta^3}{2} \quad (3-12)$$

Expresada como un porcentaje de $K\theta$, da $-100\theta^2/2 = -50\theta^2$ por 100. Así, si la deflexión es 0,1 radián = $5,7^\circ$, el apartamiento de la linearidad es aproximadamente $-50(0,1)^2 = -1/2$ por 100. El signo negativo indica que la deflexión real es menor que la que se obtendría si la ley de deflexión fuera $I = K\theta$.

3-8. Instrumentos de campo radial. El proyecto de campo uniforme no es frecuente, porque el término molesto $\cos \theta$ perturba la relación

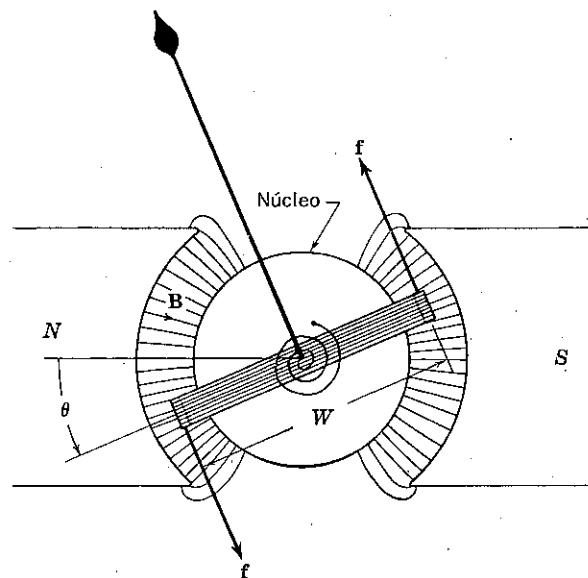


FIG. 3-11. Galvanómetro de campo radial uniforme.

proporcional entre I y θ . En la versión más popular del instrumento de d'Arsonval se emplea un campo *radial uniforme*, como se muestra en la Fig. 3-11, lo que conduce a una escala uniforme. Otra ventaja de esta construcción es que el campo **B** es menos susceptible a efectos magnéticos erráticos externos que en el caso de que no haya núcleo central. La forma del campo se consigue empleando piezas polares curvadas y un núcleo central proyectado de manera que el campo en el entrehielro sea radial. Un campo radial uniforme es constante en magnitud en todas partes dentro de la región de la bobina, pero no es lo mismo que un campo uniforme debido a la dirección variable.

La revisión del análisis de la fuerza ejercida sobre un lado de la bobina, en el caso de campo uniforme, revela que la magnitud de la fuerza viene dada por la misma expresión en el caso del campo radial uniforme. Sin embargo, en el caso de la Fig. 3-11, la dirección de la fuerza sobre el lado de la bobina depende del ángulo de giro de la bobina. **f** permanece perpendicular al plano de la bobina para todo θ dentro del campo de trabajo del campo radial. Por tanto, la magnitud del par que actúa sobre la bobina, debido a las fuerzas **f** en los lados de la bobina, viene dado en este caso simplemente por $T = fW$. Esto no es función de θ , como en el caso del campo uniforme, porque el brazo de palanca es constante para cualquier θ , en tanto que el lado de la bobina esté en una región de campo radial. Así, el hecho esencial conseguido por el campo radial es evitar el brazo de palanca variable, manteniendo la dirección de la fuerza perpendicular al plano de la bobina.

La igualdad de los pares que actúan sobre la bobina, empleando un par recuperador $T_r = S\theta$ como antes, da ahora $fW = S\theta$. Con $fW = nBA$, la ley de deflexión del galvanómetro de campo radial uniforme es

$$I = \frac{S\theta}{nBA} = K\theta \quad (3-13)$$

La constante del aparato K viene dada por la misma expresión que en el caso de campo uniforme. Las lecturas de la escala son ahora proporcionales a I , si se emplea una escala en arco de circunferencia centrada sobre el espejo, con un galvanómetro de pared de este tipo. Similarmente, una escala circular recorrida por una aguja indicadora unida a la bobina, en el caso de un instrumento portátil, es también uniforme cuando está calibrada directamente en función de la corriente. En la práctica no puede conseguirse una uniformidad perfecta de la escala a causa de factores tales como pequeñas irregularidades del campo **B** o fricción variable en los pivotes de soporte.

El dar forma al campo **B** para conseguir la ley de deflexión pretendida es un factor interesante en el proyecto de galvanómetros. Los dos tipos de campos vistos son ejemplos significativos, pero de ningún modo agotan

las posibilidades. Hay muchas ocasiones en las que es deseable un determinado tipo de escala no uniforme. Por ejemplo, un instrumento de medida luminoso comercial, empleado en trabajos fotográficos para determinar tiempo de exposición de la cámara, puede tener la disposición de piezas polares y núcleo que se muestra en la Fig. 3-12. En este caso el campo

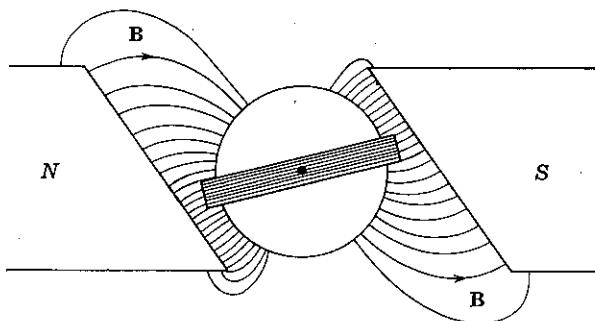


FIG. 3-12. Galvanómetro de campo no uniforme.

es distorsionado deliberadamente de forma muy visible para producir una escala extremadamente no uniforme. El proyecto es compatible con la sensibilidad de película fotográfica tanto como con las características de una fotocélula que genera la corriente que pasa por la bobina cuando está expuesta a una iluminación.

3-9. Sensibilidad del galvanómetro. La relación entre la corriente estacionaria que pasa por la bobina y la deflexión estacionaria que produce es una de las características estáticas fundamentales del galvanómetro. Es útil para la especificación de las características exigidas al galvanómetro en ciertas aplicaciones y para describir a otros trabajadores científicos la sensibilidad del instrumento usado. La sensibilidad del galvanómetro puede ser una cuestión engañosa, debido a la multiplicidad de definiciones existentes. Además está combinada con los shunts resistentes empleados en conjunción con los galvanómetros. Afortunadamente, el asunto de la sensibilidad es bastante menos confuso en el caso de instrumentos portátiles.

Antes de presentar algunas definiciones de sensibilidad, se examinará cualitativamente el significado de *resistencia de amortiguamiento crítico*. El transitorio o características dinámicas de la bobina móvil son controlables por medio de la resistencia situada en el circuito que suministra corriente a la bobina. Un circuito de baja resistencia tiende a amortiguar el movimiento de la bobina, de modo que su comportamiento es lento, mientras que una resistencia elevada en el circuito puede permitir un movimiento oscilatorio prolongado de la bobina. Cómo se produce este interesante efecto se estudiará en el capítulo siguiente. En cualquier caso, el tiempo necesario para que la deflexión se fije en una posición estacionaria es mayor que si se emplea un cierto valor intermedio de resis-

tencia. En la mayoría de las aplicaciones es deseable que el movimiento se estabilice en el menor tiempo posible, y el valor de la resistencia externa necesaria para conseguir este resultado se llama resistencia crítica. Es costumbre colocar un shunt directamente a través de los terminales del galvanómetro de valor tal que produzca amortiguamiento crítico. Se emplea entonces un circuito de resistencia elevada para suministrar corriente al instrumento shuntado. La porción de corriente que se deriva por el shunt, evidentemente no produce par sobre la bobina del galvanómetro. Así, la resistencia del shunt afecta a la relación entre corriente suministrada por la fuente externa y deflexión del instrumento producida. La sensibilidad del galvanómetro viene referida generalmente a la resistencia de amortiguamiento crítico; es decir, se entiende que la sensibilidad del galvanómetro está especificada y medida cuando el instrumento está críticamente amortiguado.

Hay por lo menos tres diferentes clases de definiciones de sensibilidad, empleadas para galvanómetros de espejo. Estas son sensibilidad de corriente, sensibilidad de tensión y sensibilidad de megaohmios. Una definición de sensibilidad de corriente es la razón de la deflexión medida en unidades de escala por unidad de corriente. Puede simbolizarse por $S_I = d/I$, donde d representa deflexión en unidades de escala producida en estado estacionario como resultado de aplicar una corriente continua I al instrumento shuntado. Las escalas de los galvanómetros de espejo están generalmente divididas en milímetros, y S_I se mide a menudo con una corriente normal de $1 \mu\text{A}$. Entonces S_I se especifica como $d \text{ mm}$, entendiendo que la corriente es $I = 1 \mu\text{A}$. Evidentemente, cuanto mayor sea S_I más sensible será el instrumento. Esta definición puede ser insuficiente porque nada prevé la distancia D entre espejo y escala. Para un instrumento dado, S_I es proporcional a D , empleando una escala en arco de circunferencia. Así, si un investigador emplea $D = 50 \text{ cm}$ con un movimiento idéntico al de otro que emplea $D = 1 \text{ m}$, la S_I del primer investigador será la mitad que la del segundo.

Para superar esta dificultad de distancia variable de la escala puede emplearse otra definición de sensibilidad de corriente, S'_I , que tiene en cuenta la distancia de la escala: $S'_I = d/DI$, donde D es la distancia de la escala en metros. La distancia normal de la escala es $D = 1 \text{ m}$. Es frecuente especificar S'_I en función de $d \text{ mm}$, entendiendo que $D = 1 \text{ m}$ e $I = 1 \mu\text{A}$. Si la escala de la distancia del galvanómetro es distinta de 1 m , la deflexión observada en milímetros, resultado de la aplicación de $1 \mu\text{A}$, se corrige apropiadamente.

Todavía se emplea una tercera clase de definición de sensibilidad de corriente. Es esencialmente el recíproco de S_I o S'_I . Es la corriente necesaria para producir una deflexión de una unidad de la escala, y puede o no estar corregida para la distancia de escala normal de 1 m . Se emplea normalmente una deflexión de una unidad de escala de un milímetro.

Nótese que cuanto mayor es la corriente necesaria para producir una deflexión de 1 mm, tanto menos sensible es el instrumento.

Las definiciones de sensibilidad de tensión siguen un modelo similar a las de sensibilidad de corriente. La deflexión producida por una unidad de tensión, un valor normal de $1 \mu\text{V}$, sirve como una definición: $S_V = d/V$. Si se tiene en cuenta la distancia de la escala, se emplea $S'_V = d/DV$ referida otra vez a una distancia normal de escala de 1 m. Similarmente, se emplea también la tensión necesaria para producir una deflexión de una unidad de la escala. Puesto que la fuente de tensión empleada para medir la sensibilidad de tensión tiene generalmente una resistencia interna muy pequeña, se acostumbra a colocar la resistencia de amortiguamiento crítico en series con el instrumento.

La sensibilidad de megaohmios se define como el número de megaohmios que hay que poner en serie con el galvanómetro shuntado para obtener una deflexión de una unidad de la escala cuando se aplica un voltio al circuito total, y referida a una distancia de escala normal de un metro. La resistencia equivalente del galvanómetro shuntado es despreciable comparada con el número de megaohmios, M , necesarios. Por tanto, la corriente aplicada es $1/M \mu\text{A}$ y produce una deflexión de 1 mm. Basta fijarse un poco para darse cuenta que la sensibilidad de megaohmios y S'_I son iguales numéricamente, puesto que S'_I es el número de milímetros de deflexión producidos por $1 \mu\text{A}$.

En la Fig. 3-24 (véase Prob. 3-10) se da una disposición de circuito útil para medir la sensibilidad del galvanómetro.

SHUNTS DE GALVANOMETRO

Además de para obtener amortiguamiento crítico, los shunts se emplean también con galvanómetros para reducir deliberadamente la sensibilidad, lo cual es deseable en muchas aplicaciones. Por ejemplo, cuando un galvanómetro se emplea como detector en un circuito puente, es necesario proteger al galvanómetro contra una corriente excesiva durante los ajustes de equilibrio iniciales. Cuanto más cerca se está del equilibrio del puente, se necesita un incremento correspondiente de sensibilidad. En otras aplicaciones, la versatilidad del galvanómetro puede acrecen-

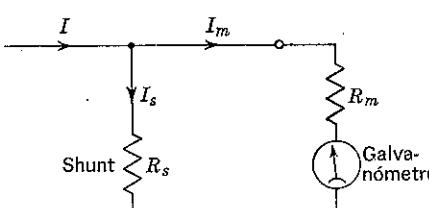


FIG. 3-13. Shunt simple.

tarse considerablemente si hay medios rápidos de cambiar su sensibilidad, de una manera exacta previamente establecida, de modo que se extienda la zona de operación total del instrumento.

3-10. Shunts elementales. Un shunt elemental consiste en una resistencia conectada directamente a través de los terminales de la bobina del galvanómetro (véase Fig. 3-13). La corriente es a menudo (pero no siempre) suministrada por una fuente cuya resistencia interna es grande comparada con la combinación en paralelo de la resistencia del shunt, R_s , y la resistencia de la bobina móvil, R_m .

La corriente del galvanómetro, I_m , viene dada rápidamente por la regla de bifurcación de corriente, multiplicando por $R_s/(R_s + R_m)$ la corriente que llega, I .

$$I_m = \frac{R_s}{R_s + R_m} I = FI \quad (3-14)$$

El factor $F = R_s/(R_s + R_m)$ por el cual está multiplicado I , se llama

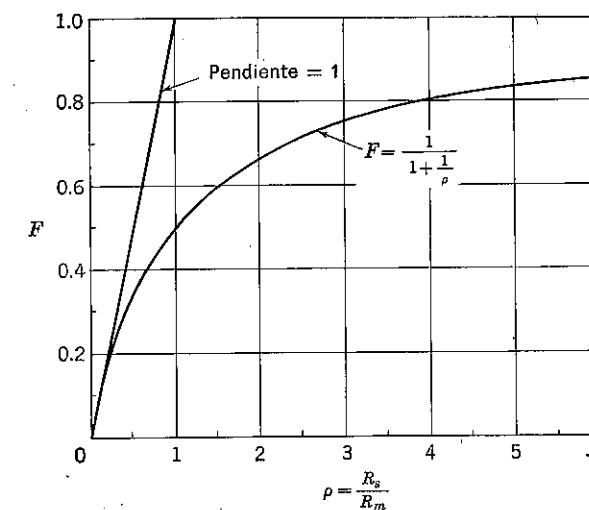


FIG. 3-14. Curva universal del shunt simple.

factor de reducción de corriente. Elegiendo convenientemente R_s este factor puede variar de 0 a 1,0 cuando R_s varía de cero a infinito (sin shunt). La inversa del factor de reducción de corriente, $(R_s + R_m)/R_s$, se llama razón de multiplicación del shunt, puesto que es la cantidad por la cual debe multiplicarse I_m para deducir el valor de I .

La Fig. 3-14 representa el comportamiento del factor de reducción de corriente F en función de la variable independiente sin dimensiones

$\rho = R_s/R_m$. La ecuación de la curva se obtiene haciendo $R_s = \rho R_m$ en la Ec. (3-14), donde $\rho \geq 0$. Entonces

$$F = \frac{I_m}{I} = \frac{\rho R_m}{\rho R_m + R_m} = \frac{1}{1 + 1/\rho} \quad (3-15)$$

Para $\rho \ll 1$ ($R_s \ll R_m$) puede despreciarse el 1 del denominador de F en comparación con $1/\rho$ y $F \approx \rho$; por tanto, la línea es asintótica a la

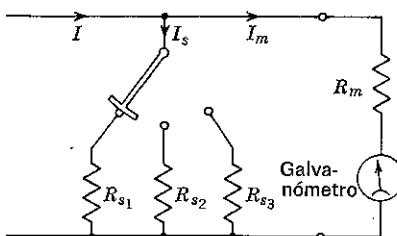


FIG. 3-15. Múltiples shunts simples.

línea recta de pendiente 1 que pasa por el origen. La asintota para $\rho \gg 1$ es $F = 1$, puesto que en este caso $1/\rho$ puede despreciarse en comparación con 1 en el denominador de F . Las dos asintotas se cortan en el punto de abscisa $\rho = 1$.

Puede construirse una disposición de varias resistencias shunt diferentes, como en la Fig. 3-15, de manera que se disponga de distintos valores fijos de R_s con solo una vuelta del commutador.

3-11. Shunt de Ayrton. La principal desventaja del shunt elemental aplicado a un galvanómetro es que el valor de R_s necesario para conseguir la reducción de corriente necesaria no es, en general, compatible con el valor de R_s que da amortiguamiento crítico. Sin embargo, es posible idear un dispositivo empleando dos resistencias externas, de manera que se consiga una amplia zona de factores de reducción, presentándose siempre la resistencia de amortiguamiento crítico entre los terminales del galvanómetro.

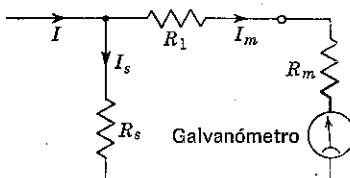


FIG. 3-16. Principio del shunt de Ayrton.

La introducción de la resistencia R_1 en serie con el galvanómetro, como se muestra en la Fig. 3-16, proporciona un grado de libertad extra. Por sencillez, supongamos que la fuente de corriente tiene una impedancia

interna mucho mayor que la combinación en paralelo de R_s y $R_1 + R_m$. Si es R_c la resistencia de amortiguamiento crítico que se necesita entre los terminales del galvanómetro, entonces la única condición en la disposición del shunt es que $R_c = R_1 + R_s$. Esto significa que R_s debe limitarse a valores iguales o menores que R_c . Por otra parte, el factor de reducción de corriente para este shunt es

$$F = \frac{R_s}{R_m + R_1 + R_s}$$

que se obtiene directamente por la regla de bifurcación de corriente. Por tanto, el valor de $R_c = R_1 + R_s$ puede conseguirse para cualquier $R_s \leq R_c$ eligiendo convenientemente R_1 . Al mismo tiempo F puede variar entre los valores $F = 0$ (con $R_s = 0$ y $R_1 = R_c$) y $F = R_c/(R_m + R_c)$ (con $R_s = R_c$ y $R_1 = 0$). Este ejemplo ilustra el principio del shunt de Ayrton.

La disposición corriente, que se muestra en la Fig. 3-17, permite seleccionar distintos factores de reducción de corriente mientras se mantiene

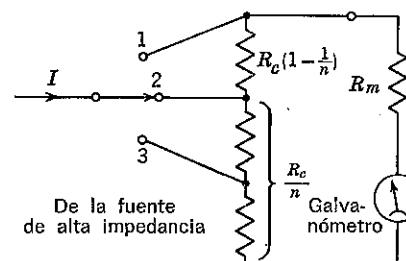


FIG. 3-17. Shunt de Ayrton.

constante la resistencia vista por el galvanómetro. Para cualquier posición, la configuración del circuito es la misma que en la Fig. 3-16. [R_s corresponde a R_c/n y R_1 corresponde a $R_c(1 - 1/n)$.] Para una fuente de alta impedancia, la resistencia vista por el galvanómetro es constante e igual a R_c para cualquier posición del commutador. El factor de reducción de corriente, dado directamente por la regla de bifurcación de corriente, es $F = (R_c/n)/(R_m + R_c)$, donde n es una constante cualquiera igual o mayor que 1,0 y $1/n$ significa la fracción de R_c por la cual pasa la corriente shuntada. Con este valor de F , la corriente de entrada I está relacionada con la corriente que pasa por el instrumento, I_m , por

$$I_m = FI = \frac{R_c}{n(R_m + R_c)} I \quad (3-16)$$

El caso $n = 1$ (posición 1 en la Fig. 3-17) corresponde al caso de shunt elemental analizado en la sección anterior. La razón de multiplicación

$1/F$ del shunt de Ayrton es $n(R_m + R_c)/R_c$, que es n veces la razón de multiplicación de un shunt elemental. Por eso n es llamada potencia relativa de multiplicación. En forma comercial, las posiciones del conmutador se disponen con frecuencia de tal manera que den sucesivos cambios de sensibilidad en razones 10:1.

3-12. Shunts especiales. Si la impedancia de la fuente de la corriente I que llega al shunt de Ayrton no es grande comparada con R_c y R_m en paralelo, las relaciones en las distintas posiciones del conmutador se perturban, y tampoco el amortiguamiento permanece constante. En tales casos puede insertarse, en serie con la fuente, una resistencia externa grande comparada con $R_c R_m / (R_c + R_m)$ para evitar errores, pero esto puede no ser conveniente debido a que los altos niveles de impedancia tienden a ser más sensibles a captar señales erráticas, y también se reduciría la corriente disponible.

Para ilustrar cómo la impedancia de la fuente puede desbaratar la razón, consideremos el shunt de Ayrton de dos posiciones de la Fig. 3-18. La aplicación de la regla de bifurcación de corriente en el caso de una fuente de intensidad constante I , da para el galvanómetro la corriente I_{m1} cuando el conmutador está en la posición 1.

$$I_{m1} = \frac{(R_1 + R_2)I}{R_1 + R_2 + R_m}$$

Cuando el conmutador está en la posición 2 la corriente del galvanómetro viene dada por

$$I_{m2} = \frac{R_2 I}{R_1 + R_2 + R_m}$$

donde se supone que la corriente de entrada es la misma en los dos casos. Esto será aplicable si la impedancia de la fuente de I es muy grande comparada con $R_m(R_1 + R_2)/(R_1 + R_2 + R_m)$. Se ve claramente que la razón de las dos corrientes del galvanómetro es

$$\frac{I_{m1}}{I_{m2}} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \quad (3-17)$$

Ahora, en lugar de una fuente de corriente I , supongamos que una fuente de tensión de impedancia nula (un caso extremo) de f.e.m. E , se aplica al galvanómetro shuntado. Entonces, con el conmutador en la posición 1, la corriente del galvanómetro viene dada por $I'_{m1} = E/R_m$. Cuando el conmutador pasa a la posición 2 la corriente del galvanómetro es $I'_{m2} = E/(R_1 + R_m)$. En este caso la razón de corrientes del galvanómetro es

$$\frac{I'_{m1}}{I'_{m2}} = \frac{R_1 + R_m}{R_m} = 1 + \frac{R_1}{R_m} \quad (3-18)$$

Este es un resultado completamente distinto al del caso de fuente de corriente.

Pueden proyectarse shunts especiales para aplicaciones específicas en las cuales la impedancia de la fuente no es lo bastante grande para satisfacer las condiciones supuestas en el shunt de Ayrton. Además, cuando la fuente tiene una resistencia menor que R_c , pueden idearse shunts especiales para obtener amortiguamiento crítico al mismo tiempo que una razón de reducción de corriente específica. Supongamos que la fuente que suministra la corriente I está representada por una f.e.m. continua E en serie con una resistencia interna R . Si R es menor que R_c , puede añadirse una resistencia R_1 en serie con E como se muestra en la Fig. 3-19 (a), y

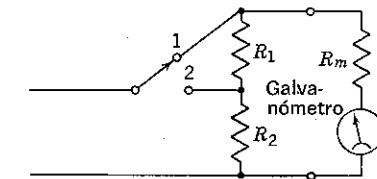


FIG. 3-18. Shunt Ayrton de dos posiciones.

puede utilizarse una resistencia en paralelo R_2 para conseguir la reducción de corriente. Al mismo tiempo, la resistencia vista por el galvanómetro, $R_2(R + R_1)/(R + R_1 + R_2)$, se hace igual a R_c . El circuito de la Fig. 3-19 (b) puede emplearse también para conseguir fines similares.

En los casos en que R es mayor que R_c , pero no lo bastante grande para ser ignorado, podría emplearse un shunt elemental como el de la Fig. 3-13, proyectado de tal modo que la resistencia vista por el galvanómetro, $RR_s/(R + R_s)$, se hiciera igual a R_c , pero la reducción de co-

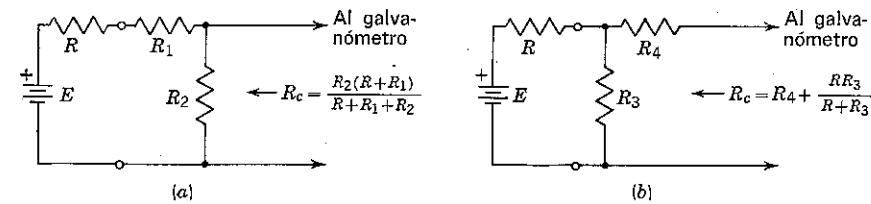


FIG. 3-19. Shunts especiales.

rriente estaría fijada una vez que R y R_c fueran especificadas. Puede emplearse también la disposición que se muestra en la Fig. 3-19 (b) con $RR_3/(R + R_3) \leq R_c$ cuando $R > R_c$. Así, pues, hay gran variedad de posibilidades en casos especiales que pueden deducirse del análisis de circuitos elementales, poniendo en ello un poco de ingenio.

3-13. Atenuadores. Los shunts especiales de la sección precedentes son miembros de una clase mucho más amplia de circuitos llamados ate-

nuadores, que a su vez pertenecen a la familia de circuitos llamada filtros. Se emplean como atenuadores una gran variedad de configuraciones de circuitos resistivos, tales como la sección T, la sección L, la sección H y disposiciones de redes. Estos atenuadores pueden consistir en secciones idénticas conectadas en cadena que permiten cambiar la razón de corriente (o tensión) de salida a corriente (o tensión) de entrada, en incrementos en decibelios iguales a cada paso de un commutador. Mientras los atenuadores especiales de la Sec. 3-12 son normalmente adecuados para satisfacer la mayoría de las necesidades en el uso de galvanómetros, los atenuadores en cadena conmutables se emplean en muchas aplicaciones de medida. Por ejemplo, un atenuador puede sustituir a un circuito desconocido y ser ajustado para dar la misma razón de corriente (o tensión) de entrada a corriente (o tensión de salida) que daba el circuito desconocido. Entonces la atenuación del circuito desconocido debe ser igual a la del atenuador. Otra aplicación corriente del atenuador es en la medida de ganancia en tensión de un amplificador. En este caso el atenuador se coloca en serie con el amplificador y ajustado hasta que la tensión de salida de la combinación en serie es igual a la tensión de entrada. La ganancia en tensión del amplificador es igual entonces en magnitud a la atenuación conocida dada por el atenuador. Las ventajas de estos métodos de medida son que los resultados son independientes de la calibración de los instrumentos indicadores y dependen primordialmente de la exactitud del atenuador.

Un análisis de un atenuador simétrico de sección T sirve para ilustrar los principios. En la Fig. 3-20 se muestra una sección T simétrica elemental, terminada en una resistencia R . La resistencia serie total de la sección T es R_1 . Está dividida en dos partes simétricas, cada una de resistencia $R_1/2$, por la resistencia en paralelo R_2 . La razón de la corriente de carga I_1 a la corriente de entrada I se obtiene inmediatamente por la regla de bifurcación de corriente. El factor de reducción de corriente es llamado en este caso *atenuación*, A , y viene dado por

$$A = \frac{I_1}{I} = \frac{R_2}{R_2 + R + R_1/2} \quad (3-19)$$

Para una resistencia de carga dada, R , la atenuación puede controlarse eligiendo convenientemente R_1 y R_2 . Sin embargo, un número infinito

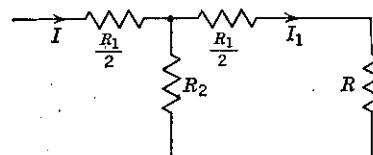


FIG. 3-20. Atenuador en T.

de parejas diferentes de R_1 y R_2 producen la misma A . Por tanto, debe imponerse una segunda condición sobre R_1 y R_2 sin restringir a A .

La segunda condición es que la resistencia de entrada a la sección T cargada sea igual a la resistencia de carga, R . Esta resistencia de entrada se llama en teoría de filtros en general la impedancia *iterativa*. El nombre es apropiado porque, en efecto, se «repite» la resistencia de carga a la entrada de cada sección. Es éste un estado interesante de cosas, pues significa que la resistencia de entrada a un número cualquiera de secciones idénticas en cadena será igual a R , puesto que cada sección presenta la misma resistencia de carga a la sección precedente (véase Fig. 3-21). Por tanto, la atenuación de una sección será la misma si se emplea sola o conectada en cadena con muchas otras secciones idénticas. La condición de resistencia iterativa es

$$R = \frac{R_1}{2} + \frac{R_2(R + R_1/2)}{R_2 + R + R_1/2} \quad (3-20)$$

Multiplicando en cruz y despejando R^2 .

$$R^2 = \frac{R_1^2}{4} + R_1 R_2 \quad (3-21)$$

Especificados R y A , puede proyectarse la sección T (o bloque T), puesto que R_1 y R_2 están unívocamente determinadas. Pueden derivarse ecuaciones convenientes a fines de proyecto resolviendo las Ecs. (3-19) y (3-21) simultáneamente para R_1 y R_2 en función de R y A .

$$R_1 = \frac{2R(1 - A)}{1 + A} \quad R_2 = \frac{2RA}{(1 + A)(1 - A)} \quad (3-22)$$

Resulta interesante que la razón R_1/R_2 dependa solamente de A . Las dos relaciones de la Ec. (3-22) pueden emplearse para proyectar una sección T para cualquier R y A especificadas. Por ejemplo, si $R = 150$ ohmios y $A = 1/2$, que equivale a -6 db, de la Ec. (3-22) se obtiene $R_1 = 100$ ohmios y $R_2 = 200$ ohmios. Si dos de estas secciones idénticas se conectan en cadena y se terminan en $R + 150$ ohmios, la atenuación por sección sigue siendo $1/2$ y la atenuación total es $A^2 = 1/4$ o -12 db. En general, un atenuador de n secciones producirá una atenuación total A^n , lo cual en decibelios es n veces la atenuación en decibelios de cada sección. La resistencia de entrada a cada una de las n secciones conectadas en cadena sigue siendo igual a la resistencia terminal.

Es evidente, según se desprende de este análisis, que existe un único valor de R , dado por la Ec. (3-21), apropiado a un atenuador dado. Si el atenuador no está adaptado a la resistencia R , la lectura del dial en deci-

belios será errónea. Uno de los errores frecuentes cometidos en el laboratorio es emplear el atenuador con una resistencia de carga para la cual no fue proyectado.

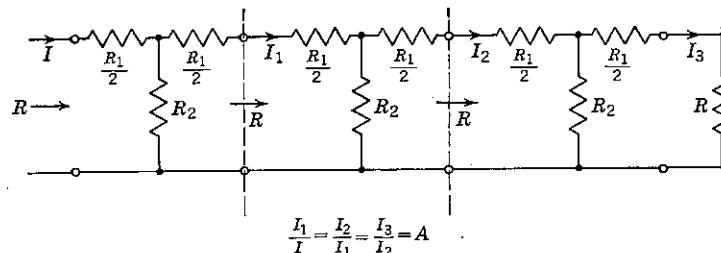


FIG. 3-21. Atenuadores en cascada.

MEDIDORES DE CORRIENTE CONTINUA

Cuando la escala de un medidor de d'Arsonval está calibrada directamente en amperios, el instrumento se llama un amperímetro de c. c.; cuando está calibrada directamente en voltios se llama un voltímetro de c. c. Es posible cubrir un amplio margen de tensión y corriente con el empleo de disposiciones de resistencias externas sencillas, y es fácil y poco costoso proyectar instrumentos de escala múltiple (polímetros). Así el movimiento de d'Arsonval se convierte en una herramienta de medida muy útil y versátil.

3-14. Amperímetros y shunts. Cuando la versión portátil del instrumento de d'Arsonval con aguja indicadora directa y escala, se emplea como amperímetro, utiliza normalmente un shunt elemental (véase Fig. 3-13). El shunt puede estar contenido dentro de la caja del instrumento o conectado directamente entre sus terminales exteriores. La sensibilidad del amperímetro puede especificarse de varias maneras. Una forma común y obvia es la corriente necesaria para producir una deflexión de toda la escala. Esta se emplea ampliamente para amperímetros con shunts internos fijos y escalas marcadas directamente en amperios, miliamperios o microamperios. Por otro lado, a veces se especifica la caída de tensión (generalmente en milivoltios) en el instrumento necesario para producir una deflexión de la escala completa. Si la resistencia del medidor es conocida, puede calcularse de este dato la corriente necesaria para producir una deflexión de la escala completa.

Los shunts que se emplean con los amperímetros pueden describirse también en función de la caída a través del shunt en milivoltios para una deflexión de toda la escala. Algunas veces se da también la resistencia del shunt. Por ejemplo, consideremos un shunt de 100 mV 50 amp, pro-

yectado para emplearse con un instrumento de d'Arsonval de 200 mA. La interpretación de estas especificaciones es que cuando la corriente de llegada (o corriente de línea) es de 50 amp, la caída a través del shunt será de 100 mV y la corriente a través del instrumento medidor será 200 mA, mientras que la corriente a través del shunt es de 49,8 amp. Nótese que la clasificación de 50 amp del shunt no quiere decir que pasen por él exactamente 50 amp cuando se produce una deflexión de toda la escala. Por la ley de Ohm puede verse que la resistencia del instrumento es $0,1/0,2 = 0,5$ ohmios, mientras que la resistencia del shunt es $0,1/49,8 = 0,00201$ ohmios.

Pueden construirse amperímetros de escala múltiple disponiendo un grupo de shunts que den factores de reducción de corriente especificados para diferentes posiciones de un conmutador o para distintas conexiones terminales (véase Fig. 3-22). Generalmente se proyectan bajo el supuesto

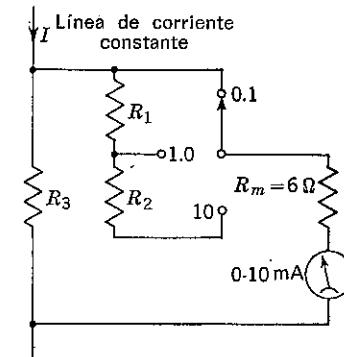


FIG. 3-22. Amperímetro de escala múltiple.

de que la línea en la cual se inserta el amperímetro tiene una impedancia mucho mayor que la mayor resistencia de entrada del amperímetro. Así, pues, en el proyecto y uso del amperímetro se busca una impedancia de entrada que sea lo más pequeña posible.

3-15. Voltímetros. Cuando se coloca una resistencia grande en serie con un instrumento de d'Arsonval, la combinación se llama comúnmente voltímetro. La resistencia en serie se sitúa normalmente dentro de la caja del instrumento. La distinción entre amperímetro y voltímetro se ve, pues, que es bastante sutil. La principal diferencia se encuentra en la resistencia de entrada al instrumento, pero ambos miden esencialmente corriente. La resistencia de entrada de un amperímetro se hace lo menor posible, mientras que la resistencia de entrada de un voltímetro se hace todo lo grande que se pueda.

Los voltímetros pueden clasificarse de distintas maneras. La forma común es por la tensión que es necesario aplicar entre los terminales del instrumento para producir una deflexión de la escala completa. Los vol-

tímetros de una sola escala señalan esta cifra directamente en el extremo superior de la escala en voltios, milivoltios o microvoltios. Otra especificación frecuentemente utilizada es en función de ohmios por voltio. Esta es una forma indirecta de especificar la resistencia en serie interna fija, cuyo valor viene dado por el producto de los voltios necesarios para producir una deflexión completa por la clasificación de ohmios por voltio. Hay que insistir en que la resistencia en serie interna está fija para un determinado rango y *no varía con la lectura del voltímetro* sobre ese rango. La recíproca de la clasificación en ohmios por voltio es igual a la corriente en amperios necesaria para producir una deflexión completa. También se especifica algunas veces la resistencia total del voltímetro. Esta resistencia, combinada con la clasificación en corriente para obtener una deflexión completa, da la tensión necesaria para que se produzca una deflexión de toda la escala.

Pueden construirse voltímetros de escala múltiple disponiendo un grupo de distintas resistencias serie, cada una de las cuales requiere diferente tensión para producir una deflexión completa. En algunos proyectos se emplea una única resistencia con distintas tomas. El rango del voltímetro puede cambiarse por un commutador o empleando distintos terminales para cada rango. Tales voltímetros se proyectan suponiendo que la impedancia que se ve desde los dos puntos del circuito a los cuales se conecta el voltímetro, es mucho más pequeña que la menor resistencia de entrada del voltímetro. Así, al proyectar o emplear un voltímetro, se pretende que tenga una resistencia de entrada lo mayor posible.

3-16. Aplicaciones del teorema de Thévenin. El teorema de Thévenin es particularmente útil en análisis de circuitos, cuando se busca la corriente o tensión de una rama dada del circuito, o cuando se desea conocer el efecto sobre el circuito de la inserción o retirada de un elemento de circuito (tal como un medidor). Haciendo memoria de los distintos métodos

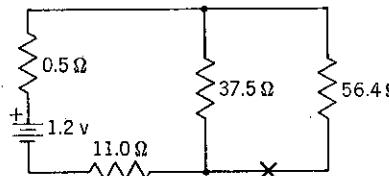


FIG. 3-23. Aplicación del teorema de Thévenin.

de resolución de los problemas de circuitos habrá que tener muy presente el teorema de Thévenin en todas las ocasiones. Con frecuencia ahorra mucho tiempo. Sin embargo, para explotar completamente el teorema es necesario conocer ciertas técnicas y el fácil manejo de este método.

Se presentan aquí dos ejemplos de la aplicación del teorema de Thévenin. Será conveniente resolver los problemas adicionales del final del

capítulo para obtener práctica con el método, y para adquirir un buen conocimiento práctico del teorema.

Ejemplo 1. En el circuito que se muestra en la Fig. 3-23, ¿qué variación de corriente se producirá en la resistencia de 56,4 ohmios cuando se inserte un miliamperímetro con una resistencia de 7,8 ohmios en el punto \times ? ¿Cuál será la lectura del miliamperímetro, suponiendo que no hay error en su calibración?

Solución: Quítense la resistencia de 56,4 ohmios del circuito y desígnense a las conexiones abiertas como terminales 1-2 del circuito equivalente de Thévenin que se desea encontrar. El análisis del circuito a la izquierda de los terminales 1-2 pone de manifiesto, por la regla del divisor de tensión, que la tensión en circuito abierto es

$$E_0 = \frac{37,5(1,2)}{11,0 + 0,5 + 37,5} = 0,92 \text{ voltios}$$

La resistencia de entrada, R_i , se obtiene como la combinación en paralelo de 37,5 ohmios y $(11,0 + 0,5)$ ohmios remplazando la fuerza electromotriz de 1,2 voltios por un corto circuito

$$R_i = \frac{37,5(11,5)}{37,5 + 11,5} = 8,8 \text{ ohmios}$$

Cuando la resistencia de 56,4 ohmios se vuelve a conectar a los terminales 1-2, la corriente en ella será $I = E_0/(R_i + 56,4) = 14,1 \text{ mA}$. Cuando se añade el medidor de 7,8 ohmios de resistencia, la corriente será $I' = E_0/(R_i + 56,4 + 7,8) = 12,6 \text{ mA}$. Así, pues, la disminución de corriente que resulta de la inserción del miliamperímetro es $14,1 - 12,6 = 1,5 \text{ mA}$, y el medidor leerá 12,6 mA.

Ejemplo 2. La tensión entre los terminales 1-2 de un cierto circuito de c. c. es precisamente de 120 voltios sin ninguna conexión externa. Cuando dos voltímetros precisos de 0 a 100 voltios, A y B , se conectan en serie entre los terminales 1-2, el voltímetro A marca 60 voltios y el voltímetro B 48 voltios. El voltímetro A es un instrumento de 500 ohmios por voltio, pero la resistencia del voltímetro B no está especificada. ¿Qué marcará el voltímetro B cuando se conecte solo entre los terminales 1-2?

Solución: Representarse el circuito detrás de los terminales 1-2 por una f.e.m. de c. c., E , en serie con una resistencia, R . Evidentemente $E_0 = E = 120$ voltios. La resistencia del voltímetro A es $R_A = 500$ ohmios por voltio $\times 100$ voltios de la escala completa = 50.000 ohmios. La relación de resistencias de los voltímetros A y B debe ser la misma que la relación de tensiones a través de ellos cuando están conectados en serie; por tanto, $R_A/R_B = 60/48$, de donde $R_B = 40.000$ ohmios. Así, pues, la resistencia total de los dos voltímetros en serie es de 90.000 ohmios, con una caída total de $60 + 48 = 108$ voltios. Por la regla del divisor de tensión se sigue para el caso de voltímetros conectados en serie que $108 = 120(90)/(90 + R)$, de donde $R = 10$ kilohmios. Conocidos R y E se puede encontrar fácilmente la fracción de los 120 voltios que aparecerá a través del voltímetro B (de $R_B = 40.000$ ohmios) cuando se conecte solo; será $40.000/50.000$. Por tanto, el voltímetro B leerá $(\frac{4}{5})120 = 96$ voltios.

PROBLEMAS

3-1 (§ 3). Un conductor rectilíneo largo, por el que pasa una corriente $i = 10 \text{ mA}$, está situado en un campo magnético uniforme $B = 0,1 \text{ weber/m}^2$. El ángulo entre un elemento de corriente $i ds$ del conductor y el campo B es de 20° . ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza por unidad de longitud ejercida sobre el conductor?

3-2 (§ 5). Una bobina circular de n vueltas de radio R está situada en un campo uni-

forme \mathbf{B} y orientada de tal forma que la componente de \mathbf{B} normal al plano de la bobina es cero. Si por la bobina pasa una corriente, i , determíñese una expresión para el par que actúa alrededor del eje de la bobina que es perpendicular a \mathbf{B} y está en el plano de la bobina.

3-3 (§ 6). Si una corriente, I , de K amperios (donde K es la constante del instrumento) pasa por un galvanómetro cuya ley de deflexión es $I = K\theta/\cos \theta$, ¿cuál será el ángulo de rotación, θ , del instrumento?

3-4 (§ 7). Un galvanómetro de espejo que emplea un anteojos y escala tiene un campo uniforme en la región ocupada por la bobina. Se emplea con dos escalas de cero central, bien recta o bien curva con radio de curvatura de un metro; ambas escalas se emplean estando sus centros a una distancia de un metro del espejo, en una dirección perpendicular al campo uniforme. Expréssese la corriente del galvanómetro, I , en función de la deflexión en milímetros, d , para cada caso y demuéstrese que para pequeñas deflexiones el apartamiento de una relación lineal $I = Ad$ (donde A es una constante) cuando se emplea la escala recta es los $-\frac{5}{3}$ de lo que se aparta de la linealidad cuando se emplea una escala curva. Indíquese:

$$\operatorname{tg}^{-1} x = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{2r+1}}{2r+1}$$

3-5 (§ 8). Un galvanómetro de espejo de d'Arsonval que emplea un anteojos y escala tiene un campo radial uniforme en la región ocupada por la bobina. Se emplea con dos escalas de cero central, bien recta o bien curva con radio de curvatura D . Ambas escalas se utilizan con sus centros a una distancia D del espejo, y las dos dan una lectura cero para una corriente nula en la bobina. Si las dos escalas están graduadas con las mismas divisiones, encontrar el ángulo de rotación, θ , del movimiento que da una lectura sobre la escala recta que es 1,2 veces la que se obtiene sobre la escala circular.

3-6 (§ 8). Un galvanómetro de espejo del tipo de d'Arsonval ha de ser proyectado para emplearse con una escala recta, tal que la deflexión sobre la escala sea el producto de una constante por la corriente de la bobina (a escala uniforme). Esto ha de conseguirse por un

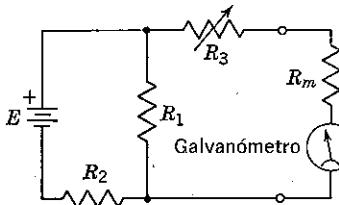


FIG. 3-24. Circuito para medir la sensibilidad del galvanómetro.

proyecto apropiado del imán permanente, tal que el campo magnético en el cual se sitúa la bobina sea radial, pero deliberadamente no uniforme, de forma que produzca el resultado deseado. Especifíquese la ecuación para la magnitud de \mathbf{B} en función del ángulo de giro, θ , de la bobina. ¿Sería práctico producir un campo semejante en un instrumento real?

3-7 (§ 9). Un galvanómetro de espejo que emplea una escala a una distancia $D = 50$ cm tiene una resistencia de bobina de 50 ohmios y necesita un shunt externo de 100 ohmios para amortiguamiento crítico. Cuando se aplica al instrumento críticamente amortiguado una corriente de $10 \mu\text{A}$ se produce una deflexión de 3 mm. Calcular las sensibilidades de corriente S_I y S'_I , las sensibilidades de tensión S_V y S'_V y la sensibilidad de megaohmios.

3-8 (§ 9). Los siguientes cambios en un galvanómetro de espejo de d'Arsonval, ¿aumentarán, disminuirán o no afectarán a la sensibilidad de megaohmios? a) Un incremento de la distancia entre escala y espejo. b) Un incremento de la densidad de flujo producido por el imán permanente. c) Un incremento en la rigidez del hilo de suspensión. d) Un incremento

del número de vueltas de la bobina. e) Un incremento del momento de inercia del sistema móvil.

3-9 (§ 9). Un galvanómetro está conectado a un circuito serie de 100 ohmios de resistencia (incluyendo la resistencia del galvanómetro), y da una deflexión de 10 cm sobre una escala (1 división = 1 mm) situada a 50 cm del espejo, cuando se aplica $50 \mu\text{V}$ al circuito. a) Calcular la sensibilidad de megaohmios del galvanómetro. b) ¿Qué ángulo gira el espejo cuando pasan por el galvanómetro $0,03 \mu\text{A}$?

3-10 (§ 9). Se ensaya un galvanómetro en el circuito de la Fig. 3-24. Cuando $R_3 = 450$ ohmios la deflexión es 150 mm. Cuando $R_3 = 950$ ohmios la deflexión es 75 mm. Encuentre la resistencia y sensibilidad de corriente del galvanómetro. $E = 1,5$ voltios, $R_1 = 1,0$ ohmios, $R_2 = 2.500$ ohmios.

3-11 (§ 9). La sensibilidad de megaohmios de un galvanómetro A es 20 megaohmios y la sensibilidad de corriente de un galvanómetro B es $0,1 \times 10^{-6}$ amp/div. Las lecturas en A pueden estimarse con una exactitud de $\pm \frac{1}{2}$ de división y las lecturas en B con $\pm 0,2$ divisiones. ¿Qué galvanómetro permite hacer medidas más precisas?

3-12 (§ 10). Proyéctese un conjunto comutable de tres shunts para un galvanómetro de resistencia $R_m = 100$ ohmios y sensibilidad de corriente de 10 mm, de forma que puedan conseguirse sensibilidades de corriente de 5 mm, 1 mm y 0,1 mm. Supóngase que la corriente será suministrada siempre por un circuito de resistencia interna muy superior a 50 ohmios.

3-13 (§ 10). ¿Por qué es deseable el empleo de un commutador de tipo corto circuito en la disposición del shunt de la Fig. 3-15?

3-14 (§ 10). La sensibilidad de corriente de un galvanómetro shuntado (considerando el shunt como parte integral del instrumento) viene dada por

$$S = \frac{2 + 0,02R_s}{R_s}$$

donde S es la sensibilidad del instrumento en microamperios por división de la escala, y R_s es la resistencia del shunt conectado directamente entre los terminales del galvanómetro. Se supone que la impedancia de la fuente es muy grande frente a R_s . a) ¿Cuál es la sensibilidad de corriente cuando no se emplea ningún shunt externo? b) ¿Cuál es la sensibilidad de corriente del instrumento cuando se emplea un shunt de 200 ohmios? c) ¿Cuál es la resistencia del propio galvanómetro?

3-15 (§ 11). El galvanómetro de la Fig. 3-17 tiene una resistencia de 100 ohmios y una sensibilidad de corriente cuando no está amortiguado de $0,06$ mm. Se le quiere amortiguar críticamente con el shunt de Ayrton mostrado. El valor necesario de la resistencia de amortiguamiento crítico es $R_c = 500$ ohmios. Indíquense los valores que deben tener las resistencias conectadas a las tomas del commutador para que el circuito del galvanómetro tenga tres sensibilidades en la relación 1:10:100. ¿Cuál es la máxima sensibilidad de corriente del instrumento shuntado?

3-16 (§ 11). La intensidad, I , llega al shunt de Ayrton de la Fig. 3-17 desde una f.e.m. E , en serie con una resistencia $R = 500$ ohmios y no de una fuente de alta impedancia. Empleando los valores numéricos dados en el Prob. 3-15 comprendiendo los valores de las resistencias dados por las respuestas, determiníñense las relaciones de las corrientes de galvanómetro para las tres posiciones del commutador.

3-17 (§ 12). Quiere medirse la corriente de salida de un generador de c. c. de 10 ohmios de resistencia interna con un galvanómetro de d'Arsonval cuya bobina tiene una resistencia de 90 ohmios y que necesita un shunt de 280 ohmios para estar críticamente amortiguado. ¿Qué valores y qué disposición hay que dar a dos resistencias que se inserten entre el generador y el galvanómetro para obtener amortiguamiento crítico así como una corriente de galvanómetro que sea exactamente $\frac{1}{10}$ de la corriente dada por el generador?

3-18 (§ 13). Verifíquese la Ec. (3-22).

3-19 (§ 13). Represéntense las curvas de diseño R_1/R y R_2/R respecto de A para un atenuador simétrico de sección T. ¿Para qué valor de A es $R_1 = R_2$?

3-20 (§ 13). Un atenuador simétrico de sección T está proyectado para producir una atenuación de 3 db cuando se emplea con una resistencia de carga $R = 1.000$ ohmios. ¿Cuál es la atenuación real cuando esta sección T se emplea equivocadamente con una carga de 2.000 ohmios?

3-21 (§ 13). Diseñese un atenuador simétrico en T, con dos secciones para usarlo con una carga de 500 ohmios de modo que la atenuación sea de 1,5 y 3,0 db. ¿Cuál es la atenuación total de las dos secciones si se usa erróneamente con una carga de 600 ohmios?

3-22 (§ 14). Para un instrumento de 50 mV, 1 mA, se diseña un shunt de 0,1 A, 50 mV. a) ¿Qué tanto por ciento de error se cometerá en la lectura de la corriente si se usa este shunt en un instrumento de 50 mV, 10 mA? b) ¿Cuál será la resistencia de un shunt de 0,1 amp, 50 mV, para un instrumento de 50 mV, 10 mA?

3-23 (§ 14). Para medir una corriente constante se usa un shunt de resistencia desconocida y dos amperímetros. El amperímetro A tiene un rango de 0 a 10 amp y una resistencia de 0,005 ohmios. Cuando el instrumento A se conecta en paralelo con el shunt, se lee 7,54 amp. Cuando el instrumento B se conecta en paralelo con el shunt (habiendo desconectado el A), la lectura es de 4,16 amp. ¿Cuál es la corriente constante?

3-24 (§ 14). Un instrumento de c. c. de 0 a 10 amp tiene una resistencia interna de 6 ohmios. Se convierte en un amperímetro de varios rangos usando la disposición shunt de la Fig. 3-22. a) ¿Qué valores de R_1 , R_2 y R_3 se precisan para obtener una deflexión de fondo de escala para intensidades de 0,1, 1,0 y 10 amp en las posiciones correspondientes del conmutador? b) ¿Cuál es la máxima disipación de potencia que se exige a cada una de estas tres resistencias en condiciones normales de funcionamiento?

3-25 (§ 14). Un conjunto de shunts de 50 mV, designado para usarse con un instrumento de 40 mA, incluye los siguientes shunts: 100 amp, 5 amp, 1 amp y 0,5 amp. a) ¿Cuál es el tanto por ciento de error en cada rango cuando se usan en un instrumento de 10 mA, 50 mV? b) ¿Qué resistencia se puede conectar en serie con el instrumento de 10 mA para que se mida correctamente con el shunt de 1 amp? (El shunt se conecta a la combinación serie de instrumento y resistencia.) c) Análogamente si se conecta la resistencia a la combinación shunt-instrumento.

3-26 (§ 14). Dos amperímetros A y B, Fig. 3-25, se usan en paralelo para medir una corriente de 26 amp. La resistencia de los hilos usados para la conexión no es despreciable y, por consiguiente, la división de corriente entre los dos amperímetros es diferente en las

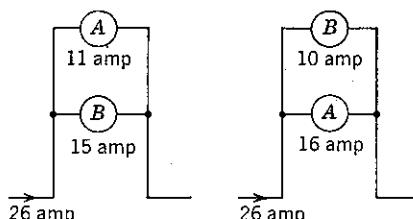


FIG. 3-25. Conexión en paralelo de amperímetros.

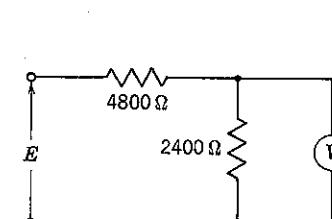


FIG. 3-26. Medida con voltímetro.

dos conexiones que se muestran. Se sabe que la resistencia del instrumento A es de 0,01 ohmios. Hallar la resistencia del amperímetro B.

3-27 (§ 15). El voltímetro de 1.200 ohmios V , que aparece en la Fig. 3-26, marca 19 V. Hallar E .

3-28 (§ 15). Tres voltímetros de c. c. se conectan en serie con una fuente de 120 V. Las especificaciones de los voltímetros son las siguientes: voltímetro A, 100 V, 5 mA; voltímetro

B, 100 V, 250 ohmios por voltio; voltímetro C, 15.000 ohmios, 10 mA. a) ¿Cuántos ohmios por voltio tiene el voltímetro A? b) ¿Cuál es la intensidad de fondo de escala del voltímetro B? c) ¿Cuál es el rango de voltaje del voltímetro C? d) ¿Qué voltaje leerá cada voltímetro?

3-29 (§ 15). Se conectan en serie dos voltímetros. El voltímetro A tiene una deflexión de fondo de escala de 100 V y una sensibilidad de 1.000 ohmios por voltio. El voltímetro B es un instrumento de 1 mA y un fondo de escala de 150 V. El voltímetro B marca 57 V, pero el indicador del A está mal ajustado, de modo que no se puede saber su lectura. ¿Cuál es el voltaje total aplicado a ambos voltímetros?

3-30 (§ 15). El voltio-ohmio-miliampímetro Simpson, modelo 260, tiene rangos en c. c. de 2,5, 10, 50, 250, 1.000 y 5.000 V de fondo de escala. El instrumento posee 20.000 ohmios por voltio. a) ¿Cuál es la resistencia de entrada del voltímetro en cada uno de los anteriores rangos? b) Si se usara en la mayor sensibilidad que permiten las anteriores especificaciones, ¿cuál sería la sensibilidad de corriente en microamperios por fondo de escala?

3-31 (§ 16). Cuando el voltio-ohmio-miliampímetro del Prob. 3-30 se conecta a un circuito lineal, se lee 5 V en la escala de 10 V y 1,5 V en la escala de 50 V. ¿Cuál sería la lectura en la escala de 250 V y cuál es el voltaje sin carga del circuito?

3-32 (§ 16). Dos voltímetros precisos de 0 a 25 V se conectan en paralelo entre los puntos 1 y 2 de un circuito de c. c. lineal. El voltímetro A lee 20 V y es un instrumento de 1.000 ohmios por voltio y el B de 2.000 ohmios por voltio. Desconectando el voltímetro A, el B marca 22 V. ¿Cuál sería la corriente de corto circuito de un hilo conectado entre 1 y 2?

3-33 (§ 16). Uno de los elementos de un circuito lineal de c. c. es una resistencia de 25.000 ohmios. Cuando se conecta en serie con esta resistencia un voltímetro de 0 a 100 V, 500 ohmios por voltio, éste marca 50 V. Cuando el mismo voltímetro es conectado en paralelo, marca 32,5 V. Calcular la potencia disipada en la resistencia cuando se retira el voltímetro del circuito.

3-34 (§ 16). Entre los puntos 1 y 2 de un circuito de c. c. se conecta una resistencia de 60.000 ohmios. Se dispone de dos voltímetros precisos; el A es un instrumento de 0 a 75 V que requiere una corriente de 5 mA para producir una deflexión de fondo de escala. Marca 60 V conectado en paralelo con la resistencia. Cuando este voltímetro A se remplaza por el B, éste marca 90 V. Cuando se aplican ambos voltímetros simultáneamente el B marca 45 V. a) ¿Qué voltaje existe cuando no se aplica ningún voltímetro? b) ¿Qué voltaje existirá entre los puntos 1 y 2 cuando se desconecta del circuito la resistencia de 60.000 ohmios (sin conectar ningún voltímetro)?

CAPITULO 4

DINAMICA DEL GALVANOMETRO

El conocimiento de las leyes y circuitos que regulan la deflexión estática de los galvanómetros y aparatos de medida de continua resulta útil, pero no representa en modo alguno un completo entendimiento de este importante movimiento. Frecuentemente es necesario abarcar el problema del movimiento de la bobina suspendida, sin duda más complicado, obteniendo de esta manera una apreciación más completa de los usos y limitaciones de los galvanómetros. En este capítulo se presentan los principios fundamentales en que se basa el comportamiento dinámico de los galvanómetros, al mismo tiempo que algunas soluciones típicas.

El estudio de la dinámica del galvanómetro es altamente interesante para el técnico dado que comprende el comportamiento de un sistema electromecánico. El valor de este análisis, más que en la información sobre galvanómetros y sus soluciones específicas, quizás resida en los conceptos y métodos de formular e interpretar ecuaciones de un sistema ligeramente complicado. Por tanto, esperamos que se estudie con interés, ya que los métodos aquí empleados se encuentran con gran frecuencia en problemas técnicos.

4-1. Respuesta transitoria. La respuesta transitoria de los movimientos de d'Arsonval es una materia de considerable interés práctico. Supóngase que una batería de f.e.m. E en serie con una resistencia R

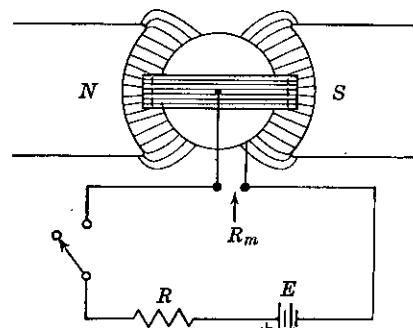


FIG. 4-1. Circuito para actuar sobre un galvanómetro.

es utilizada para producir un movimiento en un campo radial uniforme, como aparece en la Fig. 4-1. Si la bobina, con el interruptor abierto, está inicialmente en reposo en la posición $\theta = 0$, y se cierra el interruptor en el instante $t = 0$, el movimiento angular resultante de la bobina puede ser de las siguientes formas. La bobina puede girar de forma muy lenta acercándose gradualmente a la deflexión final, θ_s (estado estacionario), que corresponde a la corriente estacionaria $I = E/(R + R_m)$. Puede también girar un tanto bruscamente y pararse rápidamente en θ_s , sin sobrepasar nunca este valor. Asimismo, puede comenzar con un movimiento rápido sobre pasando con mucho inicialmente el valor θ_s y oscilando por encima y por debajo de dicho valor, θ_s , durante un prolongado periodo de tiempo, con amplitud decreciente. Estas posibilidades, representadas gráficamente en la Fig. 4-2, que se observan con facilidad en el laboratorio, son significativas y nos dan una indicación de la complejidad del problema.

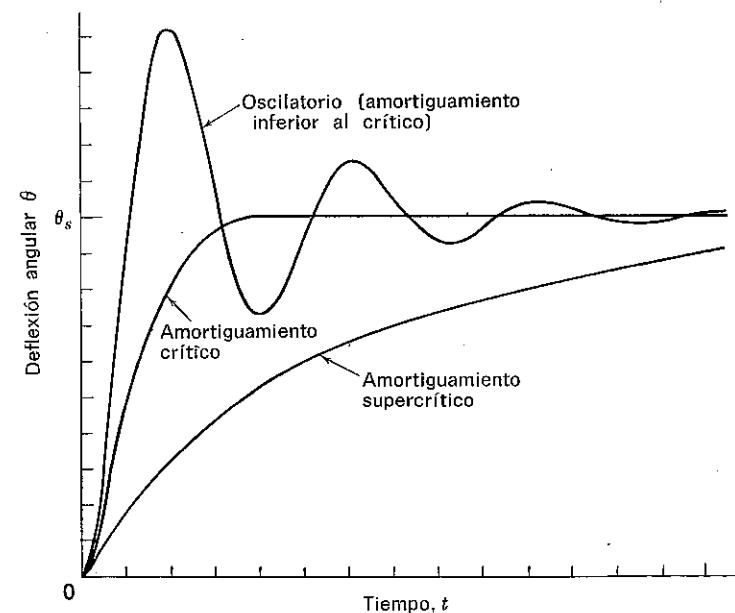


FIG. 4-2. Formas del comportamiento de un galvanómetro.

La forma del comportamiento queda determinada por una serie de factores inherentes al movimiento de d'Arsonval, tales como constante del instrumento, K ; momento de inercia del sistema suspendido, J , y el efecto amortiguador del aire sobre la bobina móvil. Pero, sin embargo, el valor de la resistencia *externa*, R , tiene también, como se demostrará,

un efecto pronunciado en el comportamiento dinámico. Así, pues, el comportamiento transitorio puede ser controlado, hasta cierto punto, por el usuario del instrumento.

En algunos casos el comportamiento deseado es similar al que aparece en la curva de amortiguamiento crítico de la Fig. 4-2 que representa la consecución de la deflexión estacionaria en el mínimo tiempo sin llegar a sobrepasarla. Esta forma de comportamiento puede conseguirse normalmente eligiendo adecuadamente el valor de R . El logro del amortiguamiento crítico es importante en los galvanómetros muy sensibles para evitar la pérdida innecesaria de tiempo por movimiento lento u oscilación prolongada antes de llegar a la deflexión estacionaria θ_s .

4-2. Ecuación diferencial de pares. Se puede encontrar una descripción matemática del movimiento angular de la bobina del galvanómetro recurriendo a lo que en mecánica clásica se llama «dinámica del sólido rígido». La ecuación básica que corresponde a tal movimiento es

$$\sum_{k=1}^N T_k = \frac{d\mathbf{H}}{dt} \quad (4-1)$$

donde T_k es uno de los N pares externos que actúan sobre el sólido y \mathbf{H} es el momento angular del mismo. El hecho de que el par exterior resultante con respecto a cualquier punto sea igual a la variación en el tiempo del momento angular respecto a ese punto, se deduce de las leyes de Newton para el movimiento. Se recordará que la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre un cuerpo es igual a la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento del mismo,

$$\sum_{k=1}^N \mathbf{f}_k = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$$

El vector momento angular \mathbf{H} toma una forma muy simple cuando se trata de la bobina del galvanómetro. Se supone que la bobina es un cuerpo rígido sujeto de tal forma que solo tiene un grado de libertad, rotación pura y un eje de rotación coincidente con el eje de simetría de la bobina. En este caso, \mathbf{H} tiene solamente una componente, dirigida a lo largo del eje de rotación, que viene dada por $H = J d\theta/dt$. J es el momento de inercia del sistema móvil con respecto a su eje de rotación y θ es el desplazamiento angular de la bobina, definido en el Cap. 3. La derivada con respecto al tiempo de θ es, por supuesto, la velocidad angular de la bobina.

Cualquier par externo T_k que actúa sobre el galvanómetro tiene solo

componente paralela al eje de rotación. El par exterior resultante está constituido, como mínimo, por tres pares distintos.

$$\sum_{k=1}^3 T_k = T - T_r - T_a \quad (4-2)$$

El par aplicado, T , que resulta de la acción que sobre la corriente del galvanómetro ejerce el campo magnético \mathbf{B} existente en el entrehierro. El par recuperador T_r , producido por la suspensión. El par retardador T_a , producido por la resistencia del aire al movimiento de la bobina. Estos dos últimos pares actúan en oposición al par aplicado; de aquí el signo negativo. El par recuperador, según se dijo en el Cap. 3, $T_r = S\theta$, donde S es la constante elástica. Para un instrumento de campo radial uniforme, como también se ha visto, el par aplicado es $T = nBiA$, para cualquier θ dentro del campo de trabajo. Hay que hacer notar que en la fórmula anterior el valor I de la corriente estacionaria, que se utilizaba en el Cap. 3, se ha remplazado por el valor i de la corriente instantánea, que varía con el tiempo durante el transitorio. El par retardador debido a la fricción se ha despreciado en la Ec. (4-2), siendo aceptable esta omisión en el caso del galvanómetro de espejo que emplea suspensión de hilo. Sin embargo, en los instrumentos que emplean bobinas pivotadas, el par de fricción en los pivotes es, muchas veces, un factor no despreciable.

Así, pues, la ecuación de pares que se debe cumplir en este caso es

$$T - T_r - T_a = \frac{d}{dt} \left(J \frac{d\theta}{dt} \right) = J \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (4-3)$$

En la Ec. (4-3) se supone que J es constante, lo cual está justificado para suspensiones de hilo, pero introduce un pequeño error en el caso de suspensiones de muelle en espiral. Cualquier cambio en la forma del muelle al girar produce pequeñas variaciones de J . Teniendo en cuenta que la masa del muelle suele ser pequeña en comparación con la masa de la bobina, incluso este efecto puede despreciarse. Sustituyendo en la Ec. (4-3) las expresiones obtenidas para T y T_r , y teniendo en cuenta que la constante del instrumento se ha definido como $K = S/nBA$, la ecuación de pares queda:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + T_a + S\theta = \frac{S}{K} i \quad (4-4)$$

La expresión generalmente utilizada para el par debido al amortiguamiento del aire, T_a , está basada en la hipótesis, no demostrada, del *amortiguamiento viscoso*, la cual define que T_a es proporcional a la velocidad angular de la bobina. Así, pues, $D_a d\theta/dt$ puede ser usada como

una aproximación del valor de T_a , siendo D_a una constante de proporcionalidad llamada *coeficiente de amortiguamiento por aire*. El grado en que esta aproximación es aplicable al sistema no es crítico por regla general. El amortiguamiento debido al aire representa frecuentemente una pequeña parte del amortiguamiento total de la bobina móvil, cuya totalidad es, muchas veces, asimilable a un efecto de frenado magnético que se estudiará en la siguiente sección. El amortiguamiento se consigue en muchos instrumentos mediante un núcleo metálico sobre el que se devana la bobina. Las corrientes parásitas inducidas en este núcleo al moverse la bobina producen un par de amortiguamiento. Dicho amortiguamiento se desprecia en todo este capítulo.

Sustituyendo T_a se obtiene la siguiente ecuación diferencial de pares:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + D_a \frac{d\theta}{dt} + S\theta = \frac{S}{K} i \quad (4-5)$$

Esta ecuación no puede ser resuelta todavía, puesto que i es una función de θ que se ha de determinar. Solamente una parte de la corriente instantánea total, que aparece en la Ec. (4-5) es una función independiente de θ . Esto es debido a que la f.e.m. cinética inducida en la bobina como resultado de su movimiento a través del campo magnético, depende de θ y, por tanto, i es, a su vez, dependiente de θ .

4-3. Ecuación diferencial de corrientes. La ecuación de las corrientes instantáneas en la bobina del galvanómetro se puede determinar analizando el circuito de la Fig. 4-3, en que aparece el circuito eléctrico de la Fig. 4-1. Se reconocerá que no se pierde en generalización al considerar un voltaje, E , en serie con una resistencia, R , aplicado al galvanómetro. El teorema de Thévenin demuestra que todo circuito lineal de c. c. se puede representar en esta forma. En el circuito de la Fig. 4-3, R_m representa la resistencia de la bobina, L_m su coeficiente de autoinducción y e_m la f.e.m. cinética inducida en la bobina cuando se mueve a través del campo magnético. Cuando se cierra el interruptor, aplicando la ley de Kirchhoff para el voltaje, se obtiene:

$$E - e_m = i(R + R_m) + L_m \frac{di}{dt} \quad (4-6)$$

El signo algebraico asociado a e_m viene determinado por la ley de Lenz que establece que la f.e.m. inducida debe tener una polaridad tal que se oponga a la causa que la produce. Así, pues, mientras i aumenta desde cero, e_m debe actuar oponiéndose y tendiendo a reducir la f.e.m. neta que actúa en el circuito. Una vez establecido el signo, solo queda hallar la magnitud de e_m .

En muchos galvanómetros prácticos, el coeficiente de autoinducción

de la bobina es tan pequeño que se puede despreciar el término $L_m di/dt$. A continuación se demostrará que i no puede cambiar instantáneamente, aunque se desprecie L_m , debido a la f.e.m. cinética, e_m . El despreciar L_m

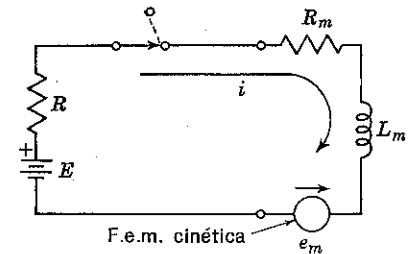


FIG. 4-3. Circuito del galvanómetro.

produce una considerable simplificación al eliminar la derivada de la corriente de la Ec. (4-6). Así, pues, se admitirá que $L_m = 0$.

El efecto de la f.e.m. cinética puede ser muy pronunciado, aunque se haya despreciado la caída de tensión $L_m di/dt$. Como caso extremo, supóngase que la bobina del galvanómetro está volviendo hacia cero, desde una deflexión apreciable, y que se cortocircuitan los terminales de la bobina bruscamente. La bobina sufrirá una súbita deceleración (especialmente si R_m es pequeña), pudiendo incluso ser tan brusca que la bobina se pare prácticamente en esa posición. Este frenado magnético se puede comprender cualitativamente observando que la corriente de corto circuito producida por la f.e.m. cinética da lugar a un par opuesto al movimiento de la bobina. Cuanto menor sea R_m , mayor será la corriente y el par asociado. Cuando la bobina empieza a moverse se «autofrena» al generar una e_m que se opone al movimiento. Este efecto de amortiguamiento se aprovecha en la práctica. Mediante la conveniente manipulación de un cortocircuitador se puede bloquear un galvanómetro que esté oscilando alrededor de cero sin más que cerrar el cortocircuitador en el instante justo en que la bobina llega a la posición de ángulo cero. El efecto de esta técnica es reducir el tiempo necesario para estabilizar el instrumento en la posición de equilibrio. También se utiliza el cortocircuitar los terminales del galvanómetro cuando se está moviendo para evitar una deflexión excesiva de la bobina y el deterioro consiguiente.

La magnitud de la f.e.m. cinética puede determinarse partiendo de la definición de f.e.m.

$$e = \oint \frac{\mathbf{f}}{q} \cdot d\mathbf{s} \quad (4-7)$$

La f.e.m., e , es la integral a lo largo de una línea cerrada de la fuerza por unidad de carga. El vector $d\mathbf{s}$ representa un elemento de longitud de la línea de integración. Como $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ representa un trabajo, e puede consi-

derarse también como la integral a lo largo de una línea cerrada del trabajo por unidad de carga.

Dividiendo la Ec. (3-1) relativa a la fuerza por q , y sustituyendo en la Ec. (4-7):

$$e = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$$

que puede separarse en la suma de dos integrales lineales

$$e = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

la primera de las cuales es cero, puesto que la integral de un campo electrostático a lo largo de cualquier línea cerrada es cero. La integral que queda es la f.e.m. cinética

$$e_m = \oint \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (4-8)$$

La integral lineal de la Ec. (4-8) puede calcularse para una bobina de galvanómetro de n espiras, que se mueve a una velocidad radial v en un campo radial uniforme \mathbf{B} , como aparece en la Fig. 4-4. Para cada

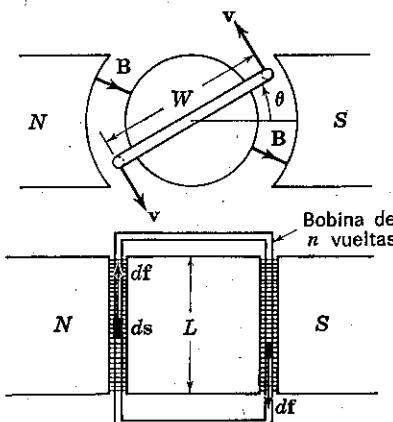


FIG. 4-4. Esquema de la f.e.m. cinética.

elemento diferencial $d\mathbf{s}$ de la bobina que esté dentro del campo \mathbf{B} puede verse que \mathbf{v} y \mathbf{B} son perpendiculares entre sí y constantes en un instante dado. Por tanto, $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ tiene como módulo vB y su sentido es hacia arriba en la parte izquierda de la bobina y hacia abajo en la derecha para el caso de la Fig. 4-4. Así, pues, las fuerzas debidas al movimiento de la bobina actúan en la dirección del conductor sobre las cargas del mismo y siempre en el mismo sentido siguiendo el devanado de las n espiras. La línea de integración para una espira incluye la longitud $2L$ más otra

longitud a lo largo de la cual \mathbf{B} es cero si se desprecia el efecto de borde. Puesto que $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ tiene la misma dirección que $d\mathbf{s}$ a lo largo de la longitud efectiva de integración $2L$, el producto escalar de la Ec. (4-8) no introduce término trigonométrico. Sin embargo, el signo del producto depende de que $d\mathbf{s}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ tengan el mismo u opuesto sentido y de la dirección de la línea de integración. El signo de e_m ya se estableció en la Ec. (4-6). La magnitud de la f.e.m. cinética para una espira es, según se ha visto: $vB(2L)$. Por tanto, para n espiras

$$e_m = 2nBLv \quad (4-9)$$

La Ec. (4-9) se puede deducir, quizás de forma menos satisfactoria, integrando adecuadamente la ley de Faraday

$$\text{f.e.m. inducida} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

donde Φ es el flujo magnético expresado en webers. Un conductor de longitud efectiva L de una parte de la bobina que se mueva con velocidad radial $v = dx/dt$ barre un área $da = L dx$ en un tiempo dt . Así, pues, $da/dt = L dx/dt = Lv$. Si \mathbf{B} es constante y perpendicular a da , el flujo cortado en el tiempo dt es $d\Phi = B da$. Por tanto, la magnitud de la f.e.m. en un conductor es

$$\frac{d\Phi}{dt} = B \frac{da}{dt} = BLv$$

Hay $2n$ conductores como el estudiado de longitud efectiva L y cuyas f.e.m. inducidas son de la misma polaridad. Por tanto, la magnitud de la f.e.m. inducida total es $2nBLv$, de acuerdo con la Ec. (4-9).

La f.e.m. cinética puede expresarse en función de θ , teniendo en cuenta que $dx = (W/2) d\theta$, donde W es la anchura total de la bobina. Por tanto,

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{W}{2} \frac{d\theta}{dt}$$

y introduciendo este valor de v en la Ec. (4-9)

$$e_m = 2nBL \frac{W}{2} \frac{d\theta}{dt} = nBA \frac{d\theta}{dt} = \frac{S}{K} \frac{d\theta}{dt} \quad (4-10)$$

donde $K = S/nBA$ es la constante del instrumento y $A = LW$ es el área efectiva de la bobina. Introduciendo este resultado en la Ec. (4-6), con

$L_m = 0$, se obtiene la función deseada que relaciona i con θ .

$$i(R + R_m) = E - \frac{S}{K} \frac{d\theta}{dt} \quad (4-11)$$

Sustituyendo este valor de i en la Ec. (4-5)

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + D_a \frac{d\theta}{dt} + S\theta = \frac{S}{K} \frac{E}{R + R_m} - \frac{S^2}{K^2(R + R_m)} \frac{d\theta}{dt}$$

Para simplificar esta ecuación se saca factor común $d\theta/dt$ y se define como *coeficiente de amortiguamiento*

$$D = D_a + \frac{S^2}{K^2(R + R_m)} \quad (4-12)$$

que comprende el amortiguamiento debido al aire más el debido a e_m . Cuando θ alcanza un valor estacionario, $d\theta/dt = 0$ y $e_m = 0$. Entonces la corriente continua en la bobina es, según la Ec. (4-11),

$$I = \frac{E}{R + R_m} \quad (4-13)$$

Finalmente, usando los valores D e I , la ecuación del par en función de θ queda en la forma

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \frac{d\theta}{dt} + S\theta = \frac{S}{K} I \quad (4-14)$$

4-4. Solución general de la ecuación de pares. Las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden en coeficientes constantes tales como la Ec. (4-14), se encuentran frecuentemente en los estudios técnicos. Un ejemplo conocido para el lector es la Ec. (2-3) para la corriente de malla del circuito serie *RLC* que aparece en la Fig. 2-2 (a).

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e(t) = E$$

Siendo $i = dq/dt$:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

Que tiene exactamente la misma forma que la Ec. (4-14). Evidentemente, la analogía entre las magnitudes del circuito eléctrico y las del galvanómetro electromecánico es

Galvanómetro.....	θ	J	D	S	SI/K	$d\theta/dt$
Círculo serie <i>RLC</i>	q	L	R	$1/C$	E	i

Esta analogía ayuda a formarse una idea previa y familiar de los resultados del estudio del galvanómetro. Por ejemplo, el efecto de D en el galvanómetro es análogo al de R en el circuito serie θ y q son análogos; y puede esperarse que haya una contrapartida a la frecuencia de resonancia del circuito serie $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ que vendrá en la forma de $\sqrt{S/J}$, sin más que remplazar L por J y C por $1/S$ en ω_0 . Esta analogía será útil para el lector aun cuando a continuación no volverá a ser utilizada.

La solución general de cualquier ecuación diferencial lineal en coeficientes constantes consiste en la suma de un término estacionario (integral particular) y un término transitorio (función complementaria). Debe contener constantes arbitrarias en un número igual al orden de la ecuación diferencial. Las constantes arbitrarias pueden evaluarse a partir de las condiciones de contorno (iniciales), para cada caso particular. Para un segundo miembro constante, como sucede en la Ec. (4-14), el término estacionario se obtiene simplemente imponiendo la condición de que la variable independiente permanezca constante. El término transitorio es la solución de la ecuación *homogénea* que resulta de hacer igual a cero el segundo miembro.

Por tanto, la solución general de la Ec. (4-14) debe ser de la forma

$$\theta = \theta_s + \theta_t$$

donde θ_t es el término transitorio que tiende a cero cuando t tiende a infinito, y θ_s es el término estacionario, o sea el valor final de θ cuando θ_t tiende a cero. El término estacionario se obtiene haciendo $\theta = \theta_s$ constante, de donde $d\theta/dt = 0$ y $d^2\theta/dt^2 = 0$. Entonces la Ec. (4-14) queda $S\theta_s = SI/K$ o

$$\theta_s = \frac{I}{K} = \frac{E}{K(R + R_m)} \quad (4-15)$$

Que es la ley de la deflexión estática deducida anteriormente en la Ec. (3-13).

El término transitorio es una solución de la ecuación homogénea:

$$J \frac{d^2\theta_t}{dt^2} + D \frac{d\theta_t}{dt} + S\theta_t = 0 \quad (4-16)$$

que, como se sabe, se puede expresar en forma exponencial. Así, pues, será válida una solución $\theta_t = Ae^{pt}$, en que A = constante, supuesto que

se escoge apropiadamente el valor de p . Para hallar valores aceptables de p , se introduce $\theta_t = Ae^{pt}$ en la Ec. (4-16), obteniendo

$$Ae^{pt}(Jp^2 + Dp + S) = 0$$

Esta ecuación se debe satisfacer para cualquier valor de t . La solución $A = 0$ es trivial, ya que $\theta_t = 0$, obviamente satisface la Ec. (4-16), pero carece de interés. Igualmente para la solución $p \rightarrow -\infty$. Por tanto, los valores adecuados de p vendrán dados por la solución de la llamada ecuación característica, $Jp^2 + Dp + S = 0$. Obteniéndose las dos raíces siguientes:

$$p_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \frac{S}{J}} \quad p_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \frac{S}{J}} \quad (4-17)$$

donde $\alpha = D/2J$. Cuando p_1 y p_2 no son iguales, es evidente que tanto $\theta_t = Ae^{p_1 t}$ como $\theta_t = Be^{p_2 t}$, siendo B una constante distinta de A , satisfarán la Ec. (4-16). La suma de ambas soluciones también debe satisfacer la Ec. (4-16) debido a su linearidad. Por tanto, $\theta_t = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$ es la solución transitoria que contiene el número requerido de constantes arbitrarias para una ecuación de segundo orden. Así, pues, la solución general de la Ec. (4-14) es

$$\theta = \theta_s + Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t} \quad p_1 \neq p_2 \quad (4-18)$$

donde θ_s viene dado por la Ec. (4-15).

Por otra parte, si $p_1 = p_2 = -\alpha$, lo que ocurre cuando $D^2/4J^2 = S/J$, θ_t tiene únicamente una constante arbitraria, ya que resultará $\theta_t = (A + B)e^{-\alpha t}$. Por tanto, θ_t no está completa en este caso particular. El término transitorio completo se puede obtener a partir de la forma utilizada para $p_1 \neq p_2$, sin más que hacer $p_2 = p_1 + \Delta$, donde $\Delta \rightarrow 0$.

$$\theta_t = \lim_{p_2 \rightarrow p_1} (Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} [e^{p_1 t}(A + Be^{\Delta t})]$$

Desarrollando en serie $e^{\Delta t}$ y sacando factor común $e^{p_1 t}$:

$$\theta_t = e^{p_1 t} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ A + B \left[1 + \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2!} + \dots \right] \right\}$$

Despreciando todos los términos en $(\Delta t)^2$ y de orden superior y hallando límites

$$\theta_t = e^{p_1 t}(C + Gt)$$

donde las constantes $C = A + B$ y $G = B\Delta$ se conservan finitas cuando $\Delta \rightarrow 0$. Por tanto, la solución general de la Ec. (4-14) para el caso de raíces iguales es

$$\theta = \theta_s + Ce^{-\alpha t} + Gte^{-\alpha t} \quad p_1 = p_2 = -\alpha \quad (4-19)$$

4-5. Condiciones en los límites. Las constantes que aparecen en las soluciones generales de la Ec. (4-14) son arbitrarias en el sentido de que pueden tener cualquier valor finito sin perder la validez de la solución. Sin embargo, no son arbitrarios en los sistemas en que se especifican las condiciones de funcionamiento de forma única y precisa. Estas condiciones corresponden a las relaciones entre θ y t y son conocidas como condiciones en los límites. Si están especificadas para el instante inicial del transitorio se llaman *condiciones iniciales*. A continuación se desarrollan dos ejemplos de aplicación de diferentes condiciones iniciales para la solución general con objeto de aclarar el procedimiento de obtención de las constantes arbitrarias. Se necesitan dos condiciones independientes para obtener el valor de las dos constantes arbitrarias. Las dos condiciones deben ser independientes, ya que si una puede derivarse de la otra, por la relación entre θ y t , solamente se podrá calcular una de las dos constantes.

Ejemplo 1. Bobina en reposo en posición de cero. Supóngase que las dos condiciones iniciales especificadas son, para $t = 0$, $\theta = 0$ y $d\theta/dt = 0$. Este es el caso de un galvanómetro en la posición de cero, cuya bobina está en reposo antes de cerrar el interruptor de la Fig. 4-1. Intuitivamente puede observarse que estas dos condiciones son independientes, ya que la lectura inicial del galvanómetro no depende de la velocidad angular de la bobina en el instante inicial. Por ejemplo, supóngase que la bobina está oscilando libremente con el circuito abierto y que se cierra el interruptor en el preciso instante que en θ es 0. Entonces $\theta = 0$ y $t = 0$, pero $d\theta/dt \neq 0$. Por el contrario, la bobina puede estar en reposo en el instante $t = 0$, pero ajustada de forma que tenga un desplazamiento angular fijo distinto de cero. Entonces $d\theta/dt = 0$ y $t = 0$, pero $\theta \neq 0$.

Una prueba analítica de la independencia de las dos condiciones es demostrar que el par de constantes arbitrarias puede ser establecido sin ninguna ambigüedad aplicando dichas condiciones. Considerese el caso de raíces desiguales. Imponiendo las condiciones $\theta = 0$ y $t = 0$ en la Ec. (4-18), resulta $0 = \theta_s + A + B$. Igualmente, haciendo $d\theta/dt = 0$ y $t = 0$, se obtiene $0 = Ap_1 + Bp_2$. Así, pues, se han obtenido dos ecuaciones independientes en A y B . Una vez resueltas para A y B , y sustituyendo en la Ec. (4-18), se obtiene

$$\theta = \theta_s \left(1 + \frac{p_2 e^{p_1 t}}{p_1 - p_2} + \frac{p_1 e^{p_2 t}}{p_2 - p_1} \right) \quad p_1 \neq p_2 \quad (4-20)$$

En el caso de raíces iguales, haciendo $\theta = 0$ y $t = 0$ en la Ec. (4-19), se obtiene $0 = \theta_s + C$. Para $d\theta/dt = 0$ y $t = 0$, resulta $0 = -\alpha C + G$. Así, pues, las constantes arbitrarias resultan: $C = -\theta_s$, $G = -\alpha\theta_s$, y la Ec. (4-19) queda

$$\theta = \theta_s(1 - e^{-\alpha t} - \alpha t e^{-\alpha t}) \quad p_1 = p_2 = -\alpha \quad (4-21)$$

Así, pues, no existe arbitrariedad en las soluciones de θ , en las Ecs. (4-20) y (4-21) que están ahora totalmente definidas en función de los parámetros del sistema J , D , S , K , E , R y R_m .

Ejemplo 2. Paso a un nuevo estado de reposo a partir de la deflexión estacionaria. Supóngase que el interruptor de la Fig. 4-1 ha permanecido cerrado durante largo tiempo, de forma que θ ha alcanzado el valor estacionario θ_s y la velocidad de la bobina es cero. Entonces se introduce repentinamente entre los terminales del galvanómetro una resistencia R_1 en el momento $t = 0$. Las condiciones iniciales son $\theta = \theta_s$ y $d\theta/dt = 0$ para $t = 0$. Sería incorrecto introducir estas condiciones iniciales en las soluciones halladas para la Ec. (4-14), puesto que ésta contiene el término $I = E/(R + R_m)$, que pertenece al circuito de la Fig. 4-1. En el presente caso, el valor final de la corriente estacionaria, producida por E , es: $I_1 = E/(R + R_p)$, donde $R_p = R_1 R_m / (R_1 + R_m)$, y la corriente estacionaria a través del galvanómetro, una vez que ha llegado a la nueva posición de reposo, será $I' = R_1 I_1 / (R_1 + R_m)$ (utilizando la regla de suma de corrientes) en lugar de I . Evidentemente, la Ec. (4-14) se puede usar si I se sustituye por I' y si θ se considera como el valor instantáneo de θ comenzando en el momento en que se introduce R_1 . Entonces para el caso de $p_1 \neq p_2$, haciendo $\theta = \theta_s$ y $t = 0$ en la Ec. (4-18), una vez remplazada I por I' , se obtiene $\theta_s = I'/K + A + B$. Haciendo $d\theta/dt = 0$ y $t = 0$ se obtiene $0 = Ap_1 + Bp_2$. Resolviendo para A y B y sustituyendo en la Ec. (4-18).

$$\theta = \left(\theta_s - \frac{I'}{K} \right) \left(\frac{p_2 e^{\alpha t}}{p_2 - p_1} + \frac{p_1 e^{\alpha t}}{p_1 - p_2} \right) + \frac{I'}{K} \quad p_1 \neq p_2 \quad (4-22)$$

Puede comprobarse fácilmente que para $\alpha \neq 0$ resulta $\theta = \theta_s$ para $t = 0$ y $\theta = I'/K$ para $t \rightarrow \infty$. Si la resistencia shunt aplicada, R_1 , es cero, o si $R \rightarrow \infty$ (interruptor de la Fig. 4-1, abierto), entonces $I' = 0$. Por tanto, la bobina vuelve desde $\theta = \theta_s$ a una deflexión cero, ya que p_1 y p_2 tienen partes reales negativas.

4-6. Soluciones no oscilatorias. Hay tres formas posibles para las raíces p_1 y p_2 según la relación que haya entre D^2 y $4SJ$.

1. Si $\alpha^2 > S/J$ ($D^2 > 4SJ$), entonces p_1 y p_2 son desiguales, reales y negativas, puesto que $\sqrt{\alpha^2 - (S/J)}$ no es cero, y es más pequeña en magnitud que α . En este caso, $p_1 = -\alpha + \beta$, y $p_2 = -\alpha - \beta$, siendo $\beta = \sqrt{\alpha^2 - (S/J)}$.

2. Si $\alpha^2 = S/J$ ($D^2 = 4SJ$), entonces p_1 y p_2 son iguales, reales y negativas; $p_1 = p_2 = -\alpha$.

3. Si $\alpha^2 < S/J$ ($D^2 < 4SJ$), entonces p_1 y p_2 son números complejos conjugados. En este caso, $p_1 = -\alpha + j\omega$, y $p_2 = -\alpha - j\omega$, siendo $\omega = \sqrt{(S/J) - \alpha^2} = j\beta$.

Las primeras dos posibilidades corresponden a los casos de amortiguamiento supercrítico y crítico, respectivamente. En el caso de amortiguamiento supercrítico, la deflexión θ viene dada como una función del tiempo, por la Ec. (4-18), con $p_1 = -\alpha + \beta$ y $p_2 = -\alpha - \beta$. Ambos son números reales, calculables a partir de D/J y S/J , mediante la Ec. (4-17). Expresando la Ec. (4-18) en función de α y β

$$\theta = \theta_s + e^{-\alpha t} (A e^{\beta t} + B e^{-\beta t}) \quad (4-23)$$

El resultado para θ en el caso de un galvanómetro superamortiguado,

con la bobina inicialmente en posición cero y en reposo, viene dado en la Ec. (4-20), que, puesta en función de α y β , resulta

$$\frac{\theta}{\theta_s} = 1 - \frac{e^{-\alpha t}}{2\beta} [(\alpha + \beta)e^{\beta t} + (\beta - \alpha)e^{-\beta t}] \quad (4-24)$$

Introduciendo las funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} \beta t = \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2} \quad \cosh \beta t = \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2}$$

puede expresarse también

$$\frac{\theta}{\theta_s} = 1 - e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{senh} \beta t + \cosh \beta t \right) \quad (4-25)$$

El resultado para el caso de un galvanómetro superamortiguado que vuelve a un nuevo reposo desde una posición inicial estacionaria, viene dado por la Ec. (4-22). Expresada en función de α y β , resulta

$$\theta = \left(\theta_s - \frac{I'}{K} \right) \frac{e^{-\alpha t}}{2\beta} [(\alpha + \beta)e^{\beta t} + (\beta - \alpha)e^{-\beta t}] + \frac{I'}{K} \quad (4-26)$$

Que expresada en forma hiperbólica queda

$$\theta = \left(\theta_s - \frac{I'}{K} \right) e^{-\alpha t} \left(\frac{\alpha}{\beta} \operatorname{senh} \beta t + \cosh \beta t \right) + \frac{I'}{K} \quad (4-27)$$

En el caso del amortiguamiento crítico θ viene dado por la Ec. (4-19). Si la bobina está inicialmente en reposo en $\theta = 0$, alcanza la deflexión final θ_s , de acuerdo con la Ec. (4-21).

En la Fig. 4-5 aparecen varios ejemplos del comportamiento no oscilatorio de θ , en función del tiempo, en el caso de galvanómetros inicialmente en reposo en la posición cero. Dado que el grado de amortiguamiento depende de la relación entre α y $\sqrt{S/J}$, es conveniente definir un *coeficiente de amortiguamiento*, k , sin dimensiones de la forma

$$k = \frac{\alpha}{\sqrt{S/J}} = \alpha \sqrt{\frac{J}{S}} \quad (4-28)$$

Para amortiguamiento crítico $k = 1$, y para el supercrítico $k > 1$. Las curvas de la Fig. 4-5 indican que θ tiende a θ_s más rápidamente para el amortiguamiento crítico que para el supercrítico. Usando la definición

de coeficiente de amortiguamiento relativo, en la Ec. (4-28), se deduce que

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - \frac{S}{J}} = \sqrt{\frac{S}{J}} \sqrt{k^2 - 1} \quad (4-29)$$

Si $k^2 \gg 1$, entonces α y β son aproximadamente iguales, siendo β siempre menor que α . El coeficiente de amortiguamiento relativo k puede también expresarse en función de α y β eliminando $\sqrt{S/J}$ entre las Ecs. (4-28) y (4-29).

$$k = \alpha \sqrt{\frac{J}{S}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\beta/\alpha)^2}} \quad (4-30)$$

4-7. Solución oscilatoria. La tercera posibilidad para las raíces p_1 y p_2 se obtiene cuando $\alpha^2 < S/J$ ($D^2 < 4SJ$). Entonces p_1 y p_2 son raíces complejas conjugadas, $p_1 = -\alpha + j\omega$ y $p_2 = -\alpha - j\omega$. Este es el caso oscilatorio o de subamortiguamiento inferior al crítico y es de la mayor utilidad bajo el punto de vista práctico, puesto que un galvanómetro subamortiguado da una mayor velocidad de respuesta que en el caso de amortiguamiento crítico. También es útil trabajar con una pequeña oscilación alrededor de la posición de equilibrio, cuando se están tomando lecturas reales (y no detectando la posición de cero), ya que da al operador una prueba de que el movimiento de la bobina es normal y no está afectado por ningún rozamiento anormal.

En el caso oscilatorio es interesante expresar la Ec. (4-18) en forma trigonométrica. Sustituyendo $p_1 = -\alpha + j\omega$ y $p_2 = -\alpha - j\omega$ en el último transitorio de la Ec. (4-18).

$$\theta_t = e^{-\alpha t} (A e^{j\omega t} + B e^{-j\omega t})$$

Puesto que $e^{\pm j\omega t}$ es compleja y θ_t debe ser real, ya que representa una magnitud física, se deduce que A y B deben ser complejas. Sea $A = a + jb$ y $B = c + jd$. Entonces, como $e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$, resulta

$$\theta_t = e^{-\alpha t} [(a + jb)(\cos \omega t + j \sin \omega t) + (c + jd)(\cos \omega t - j \sin \omega t)]$$

La parte imaginaria debe ser 0 para todo valor de t .

$$(b + d) \cos \omega t + (a - c) \sin \omega t = 0$$

Así, pues, $a = c$ y $b = -d$. En otras palabras, A y B son complejos conjugados, $A = B^*$.

La parte real de θ_t , que es lo que queda, vale

$$\theta_t = 2e^{-\alpha t} (c \cos \omega t + d \sin \omega t)$$

Expresando esto como una función trigonométrica simple, y añadiendo θ_s ,

$$\theta = \theta_s + M e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \gamma) \quad (4-31)$$

donde $M = 2\sqrt{c^2 + d^2}$ y $\gamma = \tan^{-1} c/d$. Esta equivalencia trigonométrica de la Ec. (4-18), que contiene dos constantes arbitrarias, M y γ , demuestra claramente que el término transitorio es una sinusode amortiguada.

La frecuencia angular de la oscilación es $\omega = \sqrt{(S/J) - \alpha^2}$, donde $\alpha = D/2J$. De donde el periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{(S/J) - \alpha^2}} \quad (4-32)$$

El periodo libre se define como el valor de T sin amortiguamiento ($\alpha = 0$ o $D = 0$), y es más pequeño que T . Es una magnitud teórica útil, pero que no se puede conseguir exactamente en la práctica debido al pequeño amortiguamiento del aire.

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{S/J}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{S}} \quad (4-33)$$

Se utiliza la relación de estos períodos

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\sqrt{S/J}}{\sqrt{(S/J) - \alpha^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2 J/S}} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \quad (4-34)$$

donde k es el coeficiente relativo de amortiguamiento definido en la Ec. (4-28) que, en el caso oscilatorio, es menor que 1.

Se pueden obtener otras relaciones útiles entre los diversos parámetros. Por ejemplo,

$$\frac{\omega}{\alpha} = \frac{2\pi}{\alpha T} = \frac{T_0}{\alpha T} \sqrt{\frac{S}{J}} = \frac{T_0}{k T} = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{k} \quad (4-35)$$

y también

$$\sqrt{\alpha^2 + \omega^2} = \sqrt{\frac{S}{J}} = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\alpha}{k} \quad (4-36)$$

Para el caso particular de un galvanómetro, inicialmente en reposo, en la posición cero, activado en el instante $t = 0$, se pueden aplicar a la Ec. (4-31) las condiciones iniciales. [El resultado también se puede obte-

ner de la Ec. (4-24) con $\beta = j\omega$.] Haciendo $\theta = 0$ y $t = 0$ en la Ec. (4-31) se obtiene $0 = \theta_s + M \operatorname{sen} \gamma$. La derivada con respecto al tiempo de la Ec. (4-31) es

$$\frac{d\theta}{dt} = M e^{-\alpha t} [\omega \cos(\omega t + \gamma) - \alpha \operatorname{sen}(\omega t + \gamma)]$$

Haciendo $d\theta/dt = 0$ y $t = 0$, se obtiene

$$0 = \omega \cos \gamma - \alpha \operatorname{sen} \gamma \quad \text{o} \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega}{\alpha}$$

Consecuentemente,

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} = \frac{T_0}{T} \quad \text{y} \quad M = \frac{-\theta_s}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{-\theta_s T}{T_0}$$

Así, pues, el resultado para θ con constantes arbitrarias, calculadas en función de estas condiciones iniciales, es

$$\theta = \theta_s \left[1 - \frac{T}{T_0} e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \left(\omega t + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega}{\alpha} \right) \right] \quad (4-37)$$

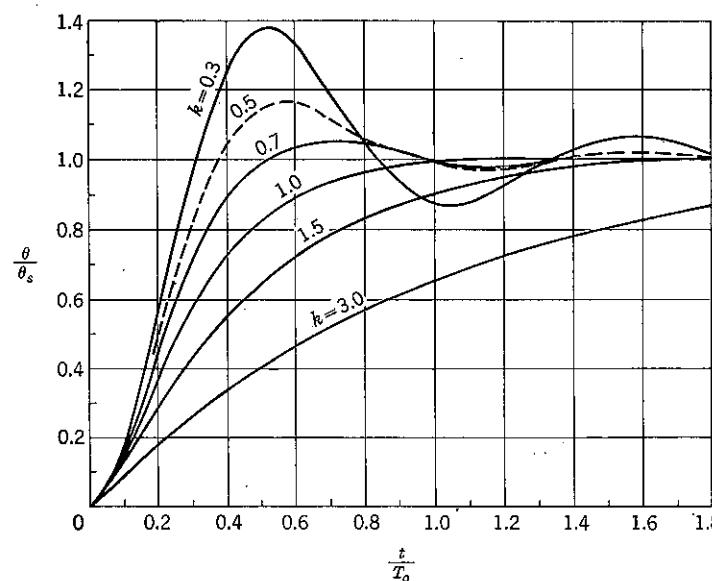


FIG. 4-5. Curvas de comportamiento de un galvanómetro.

En la Fig. 4-5 aparecen algunos ejemplos del comportamiento oscilatorio de θ en función del tiempo para el caso de un galvanómetro inicialmente en reposo en la posición cero, tomando como variables las

magnitudes sin dimensiones θ/θ_s , t/T_0 y el coeficiente de amortiguamiento relativo k . Estas curvas son universales y pueden usarse sin tener en cuenta los valores específicos de los parámetros del galvanómetro. Se observa que las oscilaciones se hacen más prolongadas a medida que disminuye k . Para k aproximándose a 1 (amortiguamiento crítico), θ alcanza más rápidamente la posición θ_s .

4-8. Velocidad de respuesta. El acercamiento de θ a θ_s puede ser estudiado con más detalle y comparado analíticamente con el caso de amortiguamiento crítico, definiendo en primer lugar la cantidad

$$\Delta = 1 - \frac{\theta}{\theta_s} \quad (4-38)$$

Que es la desviación relativa de θ con respecto a su valor final θ_s . La expresión para Δ en el caso oscilatorio se deduce de la Ec. (4-37).

$$\Delta = \frac{T}{T_0} e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega t + \gamma) \quad (4-39)$$

La desviación relativa para el caso del amortiguamiento crítico. Se obtiene de la Ec. (4-21)

$$\Delta_c = e^{-\alpha_c t} (1 + \alpha_c t) \quad \alpha_c > \alpha \quad (4-40)$$

donde el valor α_c del amortiguamiento crítico es mayor que α en el caso del amortiguamiento subcrítico. Se puede demostrar que $\Delta = \Delta_c$ para

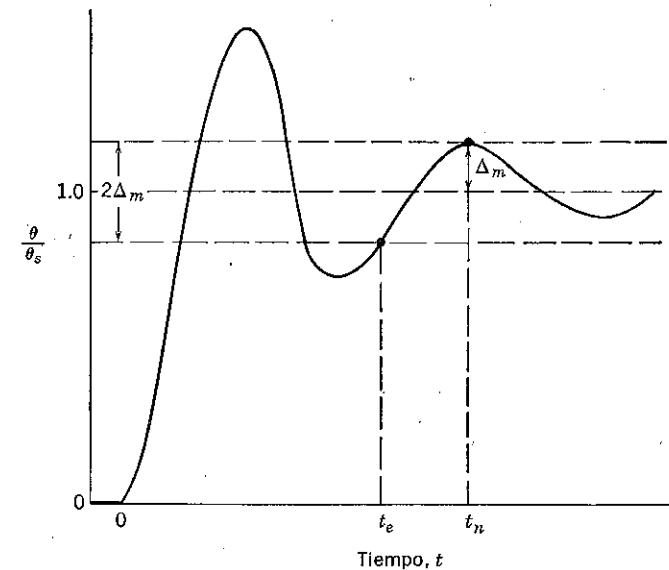


FIG. 4-6. Velocidad de respuesta.

$t = 0$, siendo $\operatorname{sen} \gamma = T_0/T$, ya que todas las curvas de la Fig. 4-5 parten del punto $\theta = 0$ y $t = 0$.

El acercamiento *initial* de θ a θ_s es más rápido en el caso oscilatorio que para el amortiguamiento crítico, como se indica en las curvas de la Fig. 4-5. Pero a medida que pasa el tiempo, θ sobrepasa a θ_s y oscila alrededor de ella, y cabe preguntarse: ¿Cuándo llega θ antes a alcanzar y permanecer dentro de una fracción determinada de θ_s ? ¿En el caso oscilatorio o en el de amortiguamiento crítico?

La respuesta a esta pregunta se complica por el hecho de que Δ es una magnitud oscilatoria. La deflexión θ puede pasar a través de una zona determinada, alrededor de θ_s muchas veces, antes de quedarse permanente en ella (véase Fig. 4-5). Los instantes, t_n , para los que el valor de Δ es máximo o mínimo, se pueden hallar igualando a cero la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (4-39).

$$\frac{d\Delta}{dt} = 0 = \frac{T}{T_0} e^{-\alpha t_n} [\omega \cos(\omega t_n + \gamma) - \alpha \operatorname{sen}(\omega t_n + \gamma)]$$

Así, pues, t_n debe satisfacer

$$\operatorname{tg}(\omega t_n + \gamma) = \frac{\omega}{\alpha} = \operatorname{tg} \gamma \quad \text{o} \quad t_n = \frac{n\pi}{\omega} = \frac{nT}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Por tanto, para $t = t_n$, $\operatorname{sen}(\omega t_n + \gamma) = \pm T_0/T$ y el valor máximo de Δ se obtiene de la Ec. (4-39).

$$|\Delta_m| = e^{-\alpha t_n} = e^{-\alpha n T/2} \quad (4-41)$$

Considérese ahora una zona determinada de $\pm \Delta_m$ a ambos lados de $\theta/\theta_s = 1$, como aparece en la Fig. 4-6. En el caso oscilatorio θ entrará en esta zona en el instante $t_e < t_n$ y permanecerá en esta zona para todo t posterior. La cuestión es si Δ_c es mayor o igual que el valor de Δ_m para $t = t_e$. Como una aproximación aceptable, el valor de Δ_c para $t = t_n$ puede considerarse comparable al de Δ_m . Esto viene dado por la Ec. (4-40) haciendo $t = t_n$.

$$\Delta_c = e^{-\alpha c t_n} (1 + \alpha_c t_n) \quad \alpha_c > \alpha \quad (4-42)$$

Hallando la relación entre las Ecs. (4-42) y (4-41) se obtiene

$$\frac{\Delta_c}{|\Delta_m|} = e^{-(\alpha_c - \alpha)t_n} (1 + \alpha_c t_n)$$

lo que demuestra que $\Delta_c > |\Delta_m|$ para $t = t_n$, si $(\alpha_c - \alpha)$ es suficientemente pequeño. Por tanto, para el instante t_e , Δ_c es aún mayor que el valor de Δ_m para la misma diferencia entre α_c y α . Así, pues, se ve que la velocidad

de respuesta del caso oscilatorio puede ser mayor que la del de amortiguamiento crítico.

Mediante cálculos detallados a base de las principales ecuaciones que se han obtenido hasta ahora, se demuestra que en el caso del amortiguamiento crítico, la separación de θ con respecto a θ_s se hace un 10 por 100 de θ_s ($\Delta = 0,1$) en el momento $0,6T_0$ aproximadamente. El tiempo más corto para conseguir esta separación del 10 por 100 se produce en el caso oscilatorio, en que resulta $0,4T_0$ para un coeficiente de amortiguamiento relativo $k = 0,6$. El tiempo mínimo para que θ entre y permanezca en una zona del ± 1 por 100 alrededor de θ_s , se obtiene con un coeficiente de amortiguamiento relativo aproximadamente igual a 0,8 y tiene un valor de unos dos tercios del periodo libre T_0 . En el amortiguamiento crítico el tiempo requerido para alcanzar esta misma zona resulta ser mayor y aproximadamente igual al periodo libre.

4-9. Decremento logarítmico. El decremento logarítmico λ , es una magnitud usada para describir la cadencia con que desaparecen las oscilaciones del galvanómetro, viene definido por

$$\lambda = \ln \frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} \quad (4-43)$$

y es el logaritmo neperiano de la relación de dos elongaciones sucesivas, la enésima y la $(n + 1)$. Una elongación es la *magnitud* de la desviación máxima entre el valor instantáneo de θ y el valor estacionario alrededor del que oscila θ , para cualquier semiciclo de oscilación determinado. Por tanto, una oscilación es, por definición, una cantidad positiva. La definición de λ implica que la relación de dos elongaciones sucesivas cualesquiera sea constante como se demostrará a continuación.

La Fig. 4-7 es una representación gráfica de las elongaciones θ_n y θ_{n+1} para el caso de un galvanómetro inicialmente en reposo. Se puede ver cualitativamente que si θ_{n+1} es solo ligeramente menor que θ_n , las oscilaciones son más prolongadas y el valor numérico de λ es pequeño. Por otra parte, si θ_{n+1} es bastante menor que θ_n , las oscilaciones se amortiguan rápidamente y el valor numérico de λ es grande. Así, pues, λ es una medida inversa de las oscilaciones y directa del amortiguamiento. Cuanto menor sea λ mayores y más prolongadas serán las oscilaciones (menor amortiguamiento), mientras que a mayor λ corresponderán menores oscilaciones de más corta duración (mayor amortiguamiento).

Se puede desarrollar una fórmula para λ en función de los parámetros del galvanómetro. Esto es interesante, ya que λ se puede medir fácilmente y relacionarse entonces con los parámetros del galvanómetro cuya determinación sea más complicada. La Ec. (4-31) describe el comportamiento de θ en el tiempo para el caso oscilatorio, antes de introducir las condiciones en los límites. Los instantes t_n para los que θ es máximo o mínimo

pueden hallarse igualando a cero la derivada con respecto al tiempo de la Ec. (4-31).

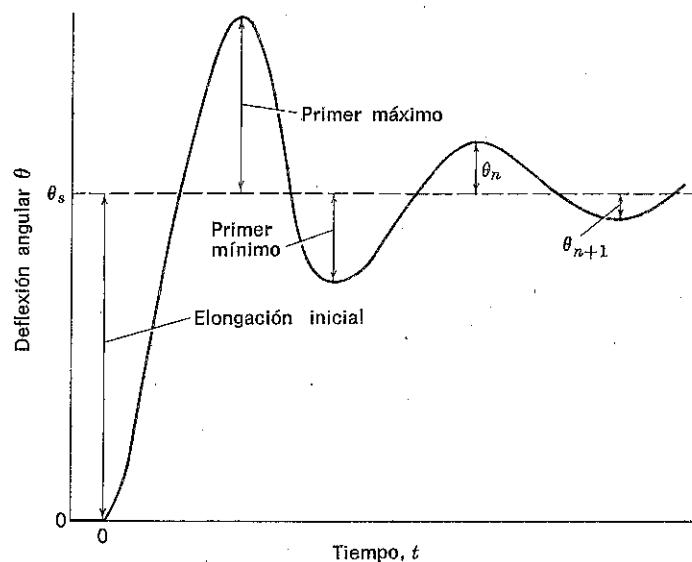


FIG. 4-7. Elongaciones.

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 = M\epsilon^{-\alpha t_n} [\omega \cos(\omega t_n + \gamma) - \alpha \sin(\omega t_n + \gamma)]$$

De aquí que t_n debe cumplir

$$\operatorname{tg}(\omega t_n + \gamma) = \frac{\omega}{\alpha} = \operatorname{tg} \gamma \quad \text{y} \quad t_n = \frac{n\pi}{\omega} = \frac{nT}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Estos tiempos son, por supuesto, los mismos que se hallaron y en los que la desviación fraccional alcanzaba valores máximos y mínimos. Los máximos y mínimos están igualmente espaciados en el tiempo, con una separación de $T/2$, siendo T el periodo.

El valor instantáneo de θ_n para t_n (instante de la enésima elongación) se obtiene de la Ec. (4-31) y vale

$$\theta_n = |\theta - \theta_s| = M\epsilon^{-\alpha t_n} |\operatorname{sen}(\omega t_n + \gamma)|$$

que puede corresponder tanto a un máximo como a un mínimo. Las barras significan valor absoluto que está implícito en la definición de

elongación. La elongación siguiente tendrá lugar para $t = t_n + T/2$ y se puede hallar también a partir de la Ec. (4-31).

$$\theta_{n+1} = M\epsilon^{-\alpha t_n} \epsilon^{-\alpha T/2} |\operatorname{sen}(\omega t_n + \pi + \gamma)|$$

donde $\omega T/2 = \pi$. Esta elongación será un mínimo de θ , si la anterior fue un máximo y viceversa. La relación de las dos elongaciones sucesivas es

$$\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} = \epsilon^{\alpha T/2} = e^\lambda$$

puesto que los dos senos son iguales en valor absoluto y de opuesto signo. Por tanto,

$$\lambda = \frac{\alpha T}{2} = \frac{DT}{4J} \quad (4-44)$$

y esto se cumplirá para cualesquier dos elongaciones sucesivas, ya que este desarrollo se hizo a partir de una elongación arbitraria para $t = t_n$.

El primer instante en que $d\theta/dt = 0$, lo que representa el primer instante en que aparece una elongación, es $t = 0$. Sin embargo, normalmente se llama primera elongación al primer máximo, representado en la Fig. 4-7. Pero considerar la primera elongación para $t = 0$ es perfectamente legítimo y puede utilizarse para determinar λ . Para un galvanómetro inicialmente en reposo, la primera elongación para $t = 0$ vale θ_s . La segunda elongación es $\theta_m - \theta_s$, donde θ_m significa el valor máximo de θ que tiene lugar para $t = T/2$. Así, pues,

$$\lambda = \ln \frac{\theta_s}{\theta_m - \theta_s} \quad (4-45)$$

Esto establece que λ es el logaritmo neperiano de la relación entre la deflexión final y el primer máximo. De la misma forma, si se anula repentinamente la corriente para $t = 0$ en un galvanómetro con una lectura inicial estacionaria, λ viene dado por el logaritmo neperiano de la relación entre la deflexión inicial estacionaria y el primer mínimo. También se deduce de la Ec. (4-45) que el mayor máximo fraccional aparecerá para $t = T/2$, y vale

$$\frac{\theta_m - \theta_s}{\theta_s} = e^{-\lambda} = e^{-\alpha T/2}$$

Este resultado está de acuerdo con la Ec. (4-41) para $n = 1$.

Otra expresión de λ se basa en la propiedad demostrada en la Ec. (4-44), consistente en que la relación entre dos elongaciones sucesivas es constante.

$$\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} = \frac{\theta_{n+1}}{\theta_{n+2}} = \dots = \frac{\theta_{n+r-1}}{\theta_{n+r}}$$

Si estas r relaciones iguales se multiplican entre sí, se obtiene evidentemente:

$$\left(\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}}\right)^r = \frac{\theta_n}{\theta_{n+r}}$$

Así, pues,

$$\lambda = \ln \frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} = \frac{1}{r} \ln \frac{\theta_n}{\theta_{n+r}} \quad (4-46)$$

La expresión de λ en la Ec. (4-44) en función de los parámetros del galvanómetro permite desarrollar otras relaciones, una de las cuales particularmente útil es la relación con el periodo. De la Ec. (4-36),

$$\alpha^2 + \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \omega_0^2$$

Así, pues,

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\alpha T}{2\pi}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2$$

Por tanto,

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2} \quad (4-47)$$

Esto demuestra que la relación de valores entre λ y π es importante. Por ejemplo: si $\lambda = \pi$, la relación entre el periodo real T y el periodo teórico sin amortiguamiento, T_0 , es $T/T_0 = \sqrt{2}$.

La relación entre λ y el coeficiente de amortiguamiento relativo, k , se deduce fácilmente de las Ecs. (4-47) y (4-34).

$$\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 = \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 - 1 = \frac{1}{1 - k^2} - 1 = \frac{k^2}{1 - k^2}$$

Por tanto,

$$\lambda = \frac{\pi k}{\sqrt{1 - k^2}} \quad (4-48)$$

Por ejemplo, si $k = 1/\sqrt{2}$, entonces $\lambda = \pi$. De la misma manera se pueden desarrollar otras muchas ecuaciones en las que interviene λ .

4-10. Determinación de los parámetros. Los parámetros del galvanómetro J , D , S y K que aparecen en la Ec. (4-14) pueden ser determinados por varios métodos indirectos, ya que son muy difíciles de obtener directamente. En general, la idea es determinar suficientes cantidades de fácil medida, que permitan el cálculo de los cuatro parámetros utilizando las relaciones que se han desarrollado para los casos oscilatorios y de

amortiguamiento crítico. (El caso del amortiguamiento supercrítico no interesa aquí.) En la práctica, los métodos empleados dependen, en cierta manera, del tipo del galvanómetro. A fin de aclarar ideas se demostrará que es posible determinar J , D , S y K por métodos indirectos en función de cantidades de fácil medida.

La determinación de K puede lograrse con independencia de los otros parámetros. Como se demostró en la deflexión estacionaria

$$I = \frac{E}{R + R_m} = K\theta_s$$

Las cuatro cantidades E , R , R_m y θ_s son de fácil medida, por tanto, K puede ser hallada. Por ejemplo: se puede medir exactamente E con un potenciómetro; R se puede medir en un laboratorio mediante una caja de resistencias de décadas; la resistencia del galvanómetro R_m se determina fácilmente por el método de la semideflexión (véase Prob. 3-10). Finalmente, θ_s puede relacionarse directamente con la lectura de la escala; por ejemplo, en un galvanómetro de espejo, con escala en arco, la lectura en la escala vendrá dada por $d = 2D\theta_s$, en que D es la distancia entre la escala y el espejo.

Los tres parámetros restantes están íntimamente ligados y hace falta una serie de medidas para separarlos. Veamos un ejemplo. El galvanómetro puede ser activado a partir de un estado inicial cero, haciéndole oscilar alrededor de θ_s . Se puede medir entonces el decremento logarítmico λ y el periodo T —el primero observando las elongaciones y el segundo utilizando un cronómetro para medir la duración de un determinado número de elongaciones completas—. Con el galvanómetro separado de su posición de equilibrio se puede abrir el circuito, con lo que oscilará alrededor de cero con un amortiguamiento debido solamente al aire, ya que $R \rightarrow \infty$. De esta forma el decremento logarítmico λ_a se puede medir. Finalmente se puede ajustar la resistencia externa R , hasta conseguir el amortiguamiento crítico. Esto se realiza activando varias veces el galvanómetro a partir de su posición inicial de reposo, utilizando diferentes valores de R , hasta conseguir que desaparezca prácticamente el primer máximo. Las cantidades medidas λ , T , λ_a y R_c (resistencial total requerida para el amortiguamiento crítico) permiten calcular los parámetros del galvanómetro J , D y S , así como el coeficiente de amortiguamiento debido al aire, D_a , como se verá a continuación.

Si λ y T están determinados, S/J se puede calcular de las relaciones

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2} \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{S}}$$

La relación D/J también se podrá hallar, ya que

$$\lambda = \frac{\alpha T}{2} = \frac{D}{J} \frac{T}{4}$$

En el caso de que solo exista amortiguamiento por aire, se puede usar λ_a en unión del valor calculado para S/J , con objeto de hallar D_a/J , puesto que

$$\lambda_a = \frac{D_a}{J} \frac{T_a}{4} = \frac{D_a}{2J} \pi \sqrt{\frac{J}{S}} \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_a}{\pi}\right)^2}$$

Por tanto, S/J , D/J y D_a/J se pueden calcular a partir de las medidas de λ , T y λ_a .

El coeficiente de amortiguamiento, D , viene dado por

$$D = D_a + \frac{S^2}{K^2(R + R_m)}$$

Para el caso especial del amortiguamiento crítico, $R_c = R + R_m$, se calcula por medida directa. Por tanto,

$$D_c = D_a + \frac{S^2}{K^2 R_c}$$

donde D_c representa el valor de D para el amortiguamiento crítico. Si se divide por J

$$\frac{D_c}{J} = \frac{D_a}{J} + \frac{S}{J} \frac{S}{K^2 R_c}$$

Para el amortiguamiento crítico, el coeficiente de amortiguamiento relativo, k , vale uno y, por tanto, $\alpha = \sqrt{S/J} = D_c/2J$. Así, pues, $D_a/J = 2\sqrt{S/J}$ es conocido, ya que lo es S/J . De aquí que se puede calcular S , ya que D_a/J , K y R_c han sido ya previamente determinados. Entonces J , D y D_a son de cálculo inmediato. Una función explícita que relaciona S con las cantidades determinadas en este ejemplo es

$$S = \frac{K^2 T R_c}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \left(1 - \frac{\lambda_a}{\sqrt{\pi^2 + \lambda_a^2}}\right) \quad (4-49)$$

4-11. Funcionamiento en el estado sinusoidal estacionario. Existen muchas aplicaciones de los movimientos de d'Arsonval en que el galvanómetro es activado por fuentes que varían irregularmente con el tiempo.

Muchas veces se utilizan para la medida de corrientes y voltajes aperiódicos en gran variedad de circuitos y máquinas eléctricas. También tienen muchas aplicaciones en conexión con transductores, instrumentos para convertir magnitudes físicas, tales como presión, temperatura, humedad y otras, en señales eléctricas que dan una medida de la correspondiente magnitud física. También se utilizan los galvanómetros en medidas biológicas sobre animales y seres humanos, cuyos corazones, cerebros y nervios producen señales eléctricas que se pueden medir, pero que varían irregularmente con el tiempo. En muchas de estas aplicaciones conviene registrar automáticamente las deflexiones obteniendo de esta manera un registro permanente del resultado, lo que permite su posterior análisis. Normalmente esto se consigue con galvanómetros de espejo dirigiendo un rayo de luz enfocado sobre el espejo que lo refleja a una cinta móvil de papel fotográfico. A medida que varía θ el punto luminoso se mueve proporcionalmente sobre el papel en dirección perpendicular al desplazamiento del mismo. De esta manera se obtiene un gráfico de θ en función del tiempo. En instrumentos de bobina pivotada es normal utilizar una plumilla (más bien que una aguja indicadora), que escribe directamente en una carta que se desplaza perpendicularmente a la oscilación de la plumilla.

Las características más importantes de un galvanómetro utilizado para registrar señales de variación irregular pueden deducirse conociendo la respuesta transitoria para una perturbación repentina. El comportamiento de la bobina al ir de una posición de equilibrio dada a otra distinta, aunque no es igual a su movimiento en el caso de una señal irregular, puede interpretarse correctamente. Magnitudes tales como velocidad de respuesta y periodo (o frecuencia) de oscilación permiten juzgar la fidelidad con que el galvanómetro seguirá a una señal irregular. Por ejemplo, si la variación de señal más rápida que se quiere registrar requiere un intervalo de tiempo largo en comparación con el tiempo de recuperación del galvanómetro, se puede esperar un registro fidedigno. El tiempo de recuperación se define, algunas veces, como el tiempo necesario para que θ varíe desde el 10 por 100 al 90 por 100 de θ_s , partiendo de $\theta = 0$.

Por otra parte, se puede utilizar un punto de vista totalmente distinto: las características de respuesta del estado estacionario. Estas son las características de un galvanómetro al que se aplica una señal sinusoidal. Magnitudes tales como el ancho de banda y el cambio de fase se consideran entonces como indicativos del funcionamiento del galvanómetro cuando se comparan con señales irregulares. Estas magnitudes del estado estacionario en realidad no dan ninguna información fundamental más que las magnitudes transitorias. Por supuesto, la respuesta del estado estacionario y la transitoria están intimamente ligadas y se pueden predecir una de otra, aunque, no obstante, frecuentemente se utilizan las magnitudes de estado estacionario. Consecuentemente se hará un breve

estudio del funcionamiento del galvanómetro en el estado alternativamente estacionario. También se compararán las características del estado estacionario y del transitorio.

El punto de partida básico del análisis debe ser la ecuación diferencial en θ . Si se aplica al galvanómetro un voltaje $E_p \operatorname{sen} \omega t$, en lugar de una fuerza electromotriz continua E , en serie con una resistencia R , la Ec. (4-14) queda

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \frac{d\theta}{dt} + S\theta = \frac{SE_p \operatorname{sen} \omega t}{K(R + R_m)} = \frac{SI_p}{K} \operatorname{sen} \omega t \quad (4-50)$$

que se obtiene simplemente sustituyendo en la Ec. (4-14) E por $E_p \operatorname{sen} \omega t$. Puede comprobarse que este procedimiento es correcto, revisando cada paso del desarrollo de la Ec. (4-14) y viendo que nada ha cambiado excepto E . Incluso la f.e.m. cinética e_m tiene la misma forma, $(S/K) d\theta/dt$, para cualquier señal aplicada. También se puede ver que nuevamente se desprecia la autoinducción de la bobina del galvanómetro, L_m . El símbolo ω representa la frecuencia angular de la fuente de voltaje sinusoidal y es totalmente independiente de las características del galvanómetro. No es la misma ω utilizada en el análisis del transitorio.

La solución general de la Ec. (4-50) consta de un término de estado estacionario y de otro transitorio. Por ser de interés solamente la respuesta para el estado estacionario, se desprecia el término transitorio. Al aplicar al galvanómetro el voltaje $E_p \operatorname{sen} \omega t$, variará con oscilación forzada un tanto irregular aunque llegará a estabilizarse en una vibración sinusoidal estacionaria de la misma frecuencia que la fuente. Esto es de esperar debido a la existencia de amortiguamiento y a que la ecuación diferencial es lineal con coeficientes constantes. Este es el movimiento periódico que constituye la respuesta en estado estacionario sin incluir el transitorio intermedio.

4-12. Solución estacionaria. La solución estacionaria de la Ec. (4-50) se puede calcular utilizando el método $e^{j\omega t}$ explicado en la Sec. 2-5. Sea la ecuación compleja

$$J \frac{d^2u}{dt^2} + D \frac{du}{dt} + Su = \frac{SI_p}{K} e^{j\omega t}$$

Las dos razones para utilizar esta ecuación son que θ está relacionada en forma sencilla con u , mediante

$$\theta = \operatorname{Im} \{u\} = \operatorname{Im} \{Ue^{j\omega t}\}$$

y también que la deflexión angular compleja U se obtiene fácilmente. Sustituyendo $Ue^{j\omega t}$ en la ecuación diferencial compleja, y eliminando $e^{j\omega t}$, resulta la siguiente ecuación algebraica en U :

$$(j\omega)^2 J U + j\omega D U + S U = \frac{SI_p}{K}$$

despejando U :

$$U = \frac{SI_p}{K[S - \omega^2 J + j\omega D]} = U e^{-j\psi}$$

De esta forma se obtiene la solución estacionaria buscada para θ .

$$\theta = \operatorname{Im} \{Ue^{j\omega t}\} = \frac{SI_p}{K \sqrt{(S - \omega^2 J)^2 + (\omega D)^2}} \operatorname{sen} \left(\omega t - \operatorname{tg}^{-1} \frac{\omega D}{S - \omega^2 J} \right) \quad (4-51)$$

Otro procedimiento para el cálculo de θ , que, aunque más pesado, es menos sofisticado que la solución $e^{j\omega t}$, se basa en considerar que la Ec. (4-50) es lineal y tiene coeficientes constantes. Por tanto, la solución estacionaria para θ debe poderse expresar en la forma $\theta = \theta_p \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$. La sustitución directa de esta expresión de θ y su primera y segunda derivada en la Ec. (4-50) permite calcular el valor máximo y el ángulo de fase de θ . El resultado concuerda con la Ec. (4-51).

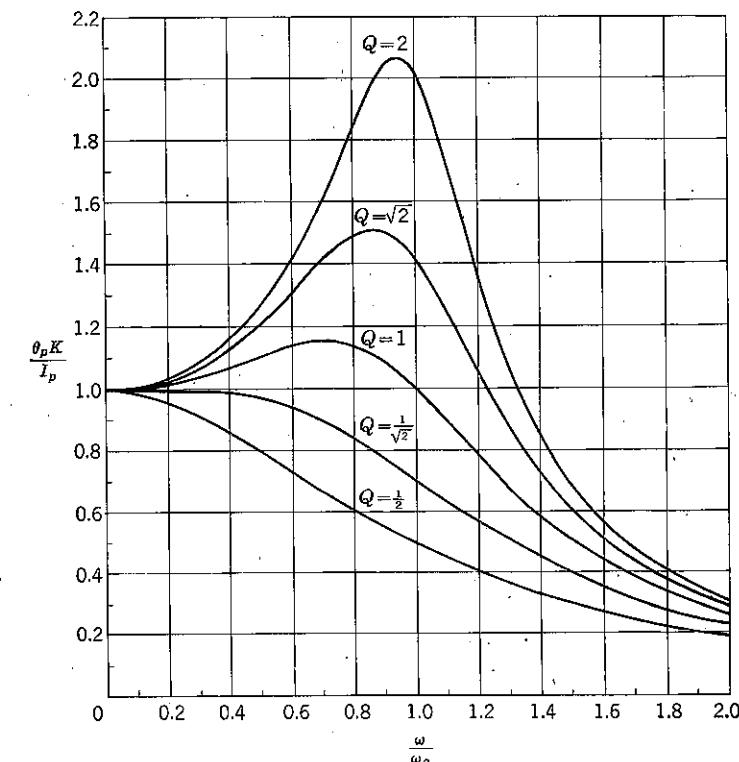


FIG. 4-8. Características de amplitud para el estado estacionario.

Aún puede utilizarse un tercer procedimiento basado en la analogía con el circuito serie *RLC*, mencionado en la Sec. 4-4. Los conceptos de impedancia compleja y corriente compleja se pueden emplear con gran utilidad, sirviéndonos del mismo método básico empleado para conseguir la Ec. (4-51). Al seguir este método se debe tener en cuenta que θ es análoga a la carga q en el condensador C .

La Ec. (4-51) puede expresarse en una forma mucho más útil introduciendo las magnitudes

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{S}{J}} \quad Q = \frac{\omega_0 J}{D} = \frac{S}{\omega_0 D} = \frac{\sqrt{SJ}}{D} \quad (4-52)$$

que en circuito análogo *RLC* corresponden a la frecuencia de resonancia $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ y a la Q del circuito, $Q = \omega_0 L/R$. Nótese que el periodo de ω_0 es exactamente el mismo que el periodo libre T_0 definido en el análisis del transitorio. También $1/Q$ es igual a dos veces el coeficiente de amortiguamiento relativo, k , utilizado en el análisis del transitorio.

La sustitución de ω_0 y Q en la Ec. (4-51) conduce, después de algunas operaciones, a las siguientes expresiones para θ_p —valor máximo de θ — y ψ —ángulo de fase de θ —:

$$\theta_p = \frac{I_p Q}{K \frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (4-53)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{Q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)} \quad (4-54)$$

Estos resultados, aunque parecen ser más complicados que la Ec. (4-51), son realmente más fáciles de interpretar. Por una parte, expresar θ en función de cantidades adecuadas; ω_0 y Q . Por otra parte, ω siempre aparece en combinación de ω_0 , en la forma ω/ω_0 , que es una variable normalizada de frecuencia. Finalmente, para una sensibilidad estática dada, I_p/K , se ve claramente que tanto θ_p como ψ son funciones solamente de dos cantidades, Q y ω/ω_0 .

En las Figs. 4-8 y 4-9 aparecen las características de θ_p (el valor máximo de θ) y ψ (ángulo de fase de θ) como funciones de ω/ω_0 para distintos valores de Q . Las magnitudes normalizadas $\theta_p K/I_p$ y ω/ω_0 permiten utilizar estas curvas sin tener en cuenta los valores particulares de los parámetros del galvanómetro. Se puede apreciar que, para pequeñas Q (amortiguamiento relativo k , grande), el valor máximo θ_p disminuye en forma regular con la frecuencia. Para un valor grande de Q (amortiguamiento relativo k , pequeño), el fenómeno de resonancia aparece en las proximidades de ω_0 . A mayor valor de Q , el máximo de la respuesta

se acerca más a ω_0 y aumenta el máximo de resonancia. El ángulo ψ es positivo para todos los valores de Q , es decir, que θ siempre va retrasado con respecto al voltaje aplicado. Es interesante hacer notar que $\psi = 90^\circ$ para $\omega = \omega_0$ con cualquier valor de Q .

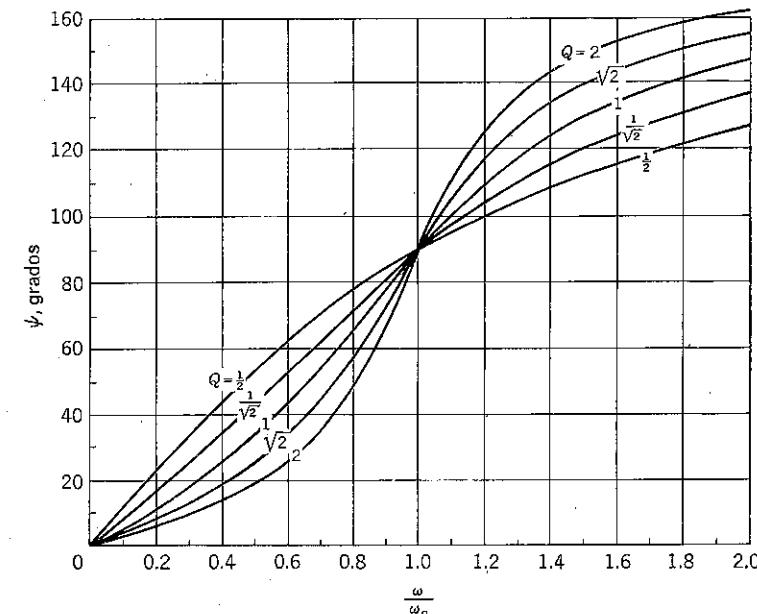


FIG. 4-9. Características de fase para el estado estacionario.

4-13. Resonancia del galvanómetro y ancho de banda de paso bajo.

El voltaje de la fuente $E_p \operatorname{sen} \omega t$ da lugar a una vibración forzada en estado estacionario del galvanómetro. Si el galvanómetro está subamortiguado, tenderá a oscilar tanto más rigurosamente cuanto más cercana sea la frecuencia aplicada a la frecuencia propia de oscilación del galvanómetro. Este efecto de resonancia puede ser muy pronunciado.

La frecuencia para la que las vibraciones forzadas dan una amplitud máxima se obtiene igualando a cero la derivada de θ_p con respecto a ω . Se puede usar como técnica matemática la variable normalizada de frecuencia $x = \omega/\omega_0$. Por otra parte, solamente es necesario diferenciar el denominador de θ_p , ya que θ_p es máximo cuando el denominador es mínimo. También se cumplirá que para el máximo valor de x , para el que el denominador es mínimo, el cuadrado del mismo será mínimo. Así, pues, las raíces de x en la siguiente ecuación darán los resultados buscados.

$$\frac{d}{dx} (x^2 + Q^2 x^4 - 2Q^2 x^2 + Q^2) = 0 = 2x + 4Q^2 x^3 - 4Q^2 x$$

Definiendo ω_m como el valor de ω para el que θ es máximo, resulta

$$x_m = \frac{\omega_m}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad y \quad x_{m1} = \frac{\omega_{m1}}{\omega_0} = 0 \quad (4-55)$$

La raíz $x_{m1} = 0$ da el valor de θ_p para la frecuencia cero. La que representa un mínimo cuando ω_m es real, y un máximo cuando ω_m es imaginario. Para $Q^2 \gg \frac{1}{2}$, ω_m está muy próximo a ω_0 . Para valores menores de Q , $\omega_m < \omega_0$. El máximo de la curva de respuesta decrece desde ω_0 hasta $\omega = 0$, a medida que Q disminuye. El máximo desaparece totalmente para $Q^2 \leq \frac{1}{2}$, y entonces θ_p es un máximo para $\omega_{m1} = 0$. Esto puede observarse en la Fig. 4-8.

El valor máximo de θ_p se obtiene introduciendo ω_m/ω_0 en la Ec. (4-53). Operando, resulta:

$$\theta_{pm} = \frac{I_p}{K} \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \quad (4-56)$$

El valor máximo de θ , θ_{pm} , aumenta, como puede observarse al aumentar Q . Para $Q^2 \gg \frac{1}{4}$ es aproximadamente

$$\theta_{pm} = \frac{I_p Q}{K} \quad Q^2 \gg \frac{1}{4} \quad (4-57)$$

y esto es Q veces la respuesta estática. Para valores menores de Q , θ_{pm} tiende a disminuir, como se ve en la Fig. 4-8. Es interesante hacer notar que para $Q^2 = \frac{1}{2}$, $\theta_{pm} = I_p/K$. Esto está de acuerdo con el valor de θ_p para $\omega = 0$, como era de esperar, ya que la localización del máximo de resonancia tiende hacia $\omega_m = 0$, cuando $Q^2 \rightarrow \frac{1}{2}$.

Las curvas de la Fig. 4-8 indican que el galvanómetro puede ser considerado como un filtro de paso bajo. El ancho de banda del paso bajo, BW, del galvanómetro se puede definir como la gama de frecuencias para las que θ_p es igual o mayor que una fracción determinada del máximo valor de θ con $\omega = 0$. El $100/N$ por 100 del ancho de banda es la frecuencia para la que la respuesta ha disminuido a $1/N$ veces de la correspondiente a $\omega = 0$ ($N \geq 1$). Se puede obtener una expresión para el $100/N$ por 100 del ancho de banda, $\theta_p = I_p/NK$ en la Ec. (4-53) y resolviendo para $x = \omega/\omega_0$. Resulta para x la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^4 + x^2 \left(-2 + \frac{1}{Q^2} \right) + 1 - N^2 = 0$$

Resolviendo mediante la fórmula cuadrática y despreciando las raíces extrañas:

$$x = \frac{BW}{\omega_0} = \left[1 - \frac{1}{2Q^2} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right)^2 + N^2 - 1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4-58)$$

El hecho de que exista una sola raíz físicamente posible para $N \geq 1$ demuestra que la respuesta nunca llega a ser menor que I_p/K , excepto en los extremos de las curvas correspondientes a la alta frecuencia. Sea un ejemplo numérico, en el que, haciendo $N = 2$ y $Q = 1$, obtendremos de la Ec. (4-58) $x = 1.5$. Esto indica que el 50 por 100 del ancho de banda es un 50 por 100 mayor que ω_0 , para $Q = 1$. En otras palabras, para $\omega = 1.5 \omega_0$, la respuesta adquiere la mitad del valor correspondiente a la frecuencia cero, lo que se puede ver en la curva de la Fig. 4-8. Si $2Q^2 \gg 1$, $1/2Q^2$ se puede despreciar en comparación con la unidad, y resulta como expresión simplificada del ancho de banda

$$BW = \omega_0 \sqrt{1 + N} \quad Q^2 \gg \frac{1}{2}, N \geq 1 \quad (4-59)$$

El ángulo de fase de ψ para la frecuencia ω_n se obtiene sustituyendo ω_m en la Ec. (4-54).

$$\operatorname{tg} \psi_m = \sqrt{2(2Q^2 - 1)} \quad \omega = \omega_m$$

Para $Q^2 \gg \frac{1}{2}$ la $\operatorname{tg} \psi_m$ es igual a $2Q$, por lo que ψ_m es solo ligeramente menor que la $\operatorname{tg} 90^\circ$, en el valor máximo de resonancia. Para $Q^2 = \frac{1}{2}$, el ángulo de fase es cero, ya que corresponde a $\omega_m = 0$.

Cuando $\omega \ll \omega_0$, ω/ω_0 se puede despreciar en comparación con ω_0/ω en el denominador de la Ec. (4-54), con lo que resulta:

$$\operatorname{tg} \psi \approx \psi = \frac{\omega}{Q\omega_0} \quad \omega \ll \omega_0$$

Por tanto, ψ es proporcional a ω en una gama limitada de frecuencias próxima a cero. La pendiente de la característica de fase para pequeños valores de ω/ω_0 es inversamente proporcional a Q . Las curvas de la Fig. 4-9 indican que, aunque ω sea demasiado grande para poder realizar la aproximación anterior, se puede considerar que la característica de fase es prácticamente proporcional a ω , siempre que Q tenga un valor de aproximadamente $1/\sqrt{2}$.

4-14. Galvanómetro de vibración. El agudo pico de resonancia que tiene el galvanómetro para valores grandes de Q posee dos características especiales. En primer lugar, la respuesta del galvanómetro para la frecuencia ω_0 puede ser mucho mayor que para $\omega = 0$. En segundo lugar el galvanómetro se comporta esencialmente como un filtro de paso de banda muy selectivo. El galvanómetro de vibración es aquel que aprovecha estas dos características favorables. El más comúnmente usado es una modificación del galvanómetro de d'Arsonval en el que se usa una suspensión ajustable y tirante para variar S de forma que ω_0 pueda sintonizarse a la frecuencia angular de la fuente, ω . También se construye con

un momento de inercia J lo suficientemente pequeño como para conseguir valores de ω_0 de hasta 1.800 radianes por segundo (300 cps). Los galvanómetros de vibración de este tipo son capaces de dar un valor de Q de hasta 150 o más, con lo que se consigue una gran sensibilidad al

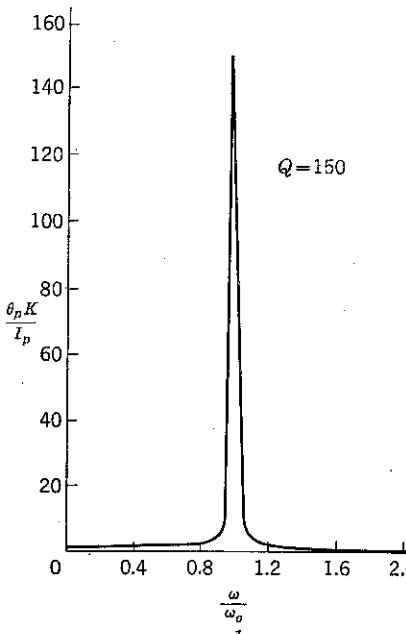


FIG. 4-10. Característica de amplitud de un galvanómetro de vibración.

mismo tiempo que una discriminación excelente para los armónicos de la fuente. Este galvanómetro se usa principalmente como un detector muy sensible de c. a. para puentes de baja frecuencia. Usualmente está equipado con un espejo reflector y una fuente luminosa. Cuando el galvanómetro está en reposo aparece en la escala una delgada línea de luz brillante. Al aplicar una señal la línea se transforma en una banda mientras está vibrando la bobina del galvanómetro. Es conveniente una fuente luminosa intensa, ya que el brillo de la banda disminuye rápidamente al aumentar la deflexión.

La curva de respuesta para un galvanómetro de vibración con $Q = 150$ se representa en la Fig. 4-10. El agudo pico de resonancia se puede analizar a partir de las relaciones desarrolladas en la sección precedente. De la Ec. (4-55) se deduce que el máximo de respuesta ocurre para $\omega = \omega_0$ en este caso de alto valor de Q . Por otra parte, la Ec. (4-57) muestra que la deflexión máxima es $I_p Q / K$, que es 150 veces el valor de la deflexión estática en el caso de la Fig. 4-10.

La forma en que la respuesta disminuye con la frecuencia se puede estudiar mediante la Ec. (4-53). Puesto que θ_p disminuye de forma tan

acusada cuando ω se separa de ω_0 solamente un pequeño porcentaje de ω_0 , se justifica el empleo de una aproximación de banda estrecha. Definamos

$$\delta = \frac{\omega}{\omega_0} - 1 \quad (4-60)$$

que es la desviación relativa de ω con respecto al valor de resonancia ω_0 . Cuando $\omega = \omega_0$, $\delta = 0$; y cuando $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, $\delta = \Delta\omega/\omega_0$. Representando ω/ω_0 en función de δ en la Ec. (4-53) se obtiene una considerable simplificación para valores pequeños de δ . Desarrollando ω_0/ω resulta:

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{1 + \delta} = (1 + \delta)^{-1} = 1 - \delta + \delta^2 + \dots$$

en donde se pueden despreciar los términos en δ^2 y de orden superior con un error pequeño si $\delta \ll 1$. Entonces la diferencia entre las dos relaciones de frecuencia casi iguales pasa a ser

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \approx 1 + \delta - (1 - \delta) = 2\delta$$

Por otra parte, el factor ω/ω_0 que multiplica a K en la Ec. 4-53 puede sustituirse por la unidad si $\delta \ll 1$. Así, pues, la Ec. (4-53) se convierte en

$$\theta_p = \frac{I_p Q}{K \sqrt{1 + 4Q^2\delta^2}} \quad \delta \ll 1 \quad (4-61)$$

De esta ecuación se deduce que θ_p alcanza su valor máximo $I_p Q / K$ para $\delta = 0$. También, para $\delta = \pm 1/2Q$ (que es solamente un cambio de $\pm 1/3$ por 100 en la frecuencia para $Q = 150$), θ_p disminuye a $1/\sqrt{2} = 0,707$ veces su valor máximo (véase Fig. 4-11). En otras palabras, la respuesta disminuye 3 db por debajo de su valor máximo para $\omega_1/\omega_0 = 1 - 1/2Q$ y para $\omega_2/\omega_0 = 1 + 1/2Q$. Así, pues, la anchura de banda de 3 db es la diferencia entre ω_2 y ω_1 .

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q} \right) - \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q} \right) = \frac{\omega_0}{Q} \quad (4-62)$$

El hecho de que Q sea igual a la frecuencia de resonancia dividida por el ancho de banda de 3 db no es sorprendente, ya que ésta es una de las definiciones de Q . La definición del ancho de banda de 3 db empleada aquí es, por supuesto, diferente del ancho de banda de paso bajo definido en la sección anterior.

Si se determina la respuesta del galvanómetro de vibración para $\omega = 2\omega_0$, se obtendrá una idea cuantitativa de la excelente discriminación existente para los armónicos de la fuente. La Ec. (4-61) no debe utilizarse para este cálculo, ya que es válida solamente para pequeños valores de δ . En su lugar, utilizando la Ec. (4-53) y sustituyendo ω por $2\omega_0$ resulta

$$\theta_p = \frac{I_p Q}{2K \sqrt{1 + 9Q^2/4}} \quad \omega = 2\omega_0 \quad (4-63)$$

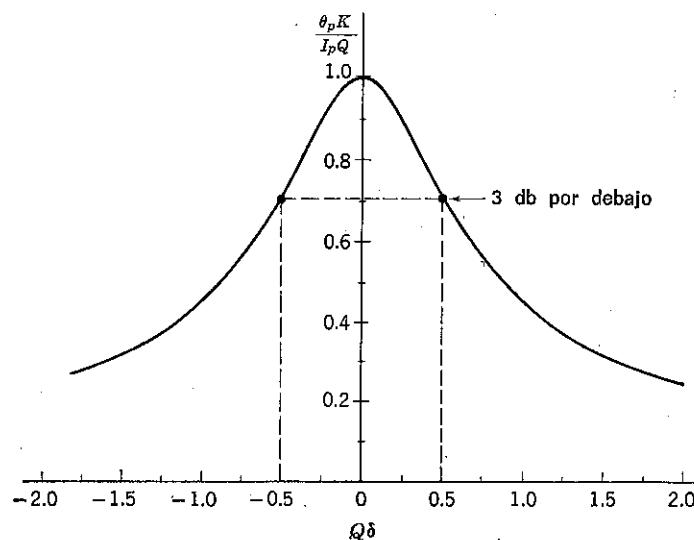


FIG. 4-11. Curva universal de aproximación por banda estrecha.

Para el caso de alto valor de Q , esto muestra que θ_p disminuye a $I_p/3K$ para $\omega = 2\omega_0$. La respuesta máxima para $\omega = \omega_0$ es $3Q$ veces este valor, o 450 para la curva de la Fig. 4-10. Por tanto, se ve que la atenuación del segundo armónico para $Q = 150$ es muy importante: 53 db.

4-15. Relaciones entre las respuestas transitorias y estacionarias. Para aclarar la relación entre las respuestas transitoria y estacionaria se puede estudiar la resonancia en el estado estacionario y el amortiguamiento crítico en el transitorio. Se ha visto que el pico de resonancia desaparece para $Q^2 = 1/2$. El amortiguamiento correspondiente para que no se produzca pico de resonancia en una vibración forzada es $D = \sqrt{2SJ}$, según se deduce de la Ec. (4-52). Sin embargo, en el análisis del transitorio existe amortiguamiento crítico para $D = D_c = \sqrt{4SJ}$. Este amortiguamiento se obtiene multiplicando por $\sqrt{2}$ el máximo valor permisible de D para el que no se da pico de resonancia en el estado estacionario. En otra palabra, el máximo valor permisible de Q para que no

exista pico de resonancia en el estado estacionario es $1/\sqrt{2} = 0,707$; por otra parte, el valor de Q que corresponde al amortiguamiento crítico en el transitorio es $1/2$. Por tanto, aun cuando en la curva de respuesta en frecuencia correspondiente al estado estacionario no aparezca pico de resonancia, puede encontrarse un pequeño máximo en la respuesta transitoria. El amortiguamiento para $Q = 1/\sqrt{2}$ representa un sistema subamortiguado de coeficiente de amortiguamiento relativo $k = 1/\sqrt{2} = 0,707$.

Se pueden deducir otras relaciones entre el funcionamiento estacionario y el transitorio. Quizá se haya visto una similitud entre la frecuencia correspondiente al máximo de la respuesta de estado estacionario, ω_m , y la frecuencia de oscilación en la respuesta transitoria de un galvanómetro subamortiguado. Para estudiar esto, nótese que ω_m viene dado por

$$\omega_m = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \sqrt{\frac{S}{J} - 2\alpha^2}$$

La frecuencia de oscilación en el caso transitorio subamortiguado es $\omega = \sqrt{(S/J) - \alpha^2}$. Es interesante ver que estos dos resultados no son totalmente iguales.

Como ejemplo final, se calculará la relación entre Q y el decremento logarítmico. La relación entre el coeficiente de amortiguamiento relativo, k , y el decremento logarítmico, λ , desarrollada en el análisis transitorio, está dada por la Ec. (4-48). Puesto que $1/Q = 2k$, se deduce que

$$\lambda = \frac{\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

Así, pues, cuando se emplea el valor máximo permisible de Q , para el que no existe pico de resonancia, $Q^2 = 1/2$, el decremento logarítmico correspondiente en el transitorio es $\lambda = \pi$. Para $Q < 1/2$, λ se hace imaginaria, lo que es natural, ya que $Q = 1/2$ corresponde al amortiguamiento crítico.

Estas y otras muchas relaciones entre las características transitorias y estacionarias muestran la íntima conexión entre ellas. En principio, para estudiar el comportamiento dinámico de los galvanómetros pueden utilizarse características de cualquiera de los dos tipos.

PROBLEMAS

4-1 (§ 3). Desarrollar la ecuación diferencial de los pares para un galvanómetro de campo radial uniforme, cuando la autoinducción, L_m , de la bobina no es despreciable. Comprobar que el resultado se reduce a la Ec. (4-14) si $L_m \rightarrow 0$. [Diferenciar la Ec. (4-5).]

4-2 (§ 5). Es fácilmente imaginable que un galvanómetro con una deflexión inicial y velocidad inicial cero no dará lectura cero al suprimir la corriente. Sin embargo, el Ejem-

pl 2 de la Sec. 4-5 da $\theta = 0$ para este caso. ¿En qué punto del desarrollo de las ecuaciones se excluyó esta posibilidad para θ y cómo puede modificarse la Ec. (4-14) a fin de que incluya dicha posibilidad?

4-3 (§ 5). En la Ec. (4-18) imponen las condiciones de contorno $d\theta/dt = A_0$ y $\theta = \theta_0$ para $t = 0$. Determinar la ecuación para θ en función de las constantes A_0 y θ_0 , eliminando las constantes arbitrarias A y B . Comparar este resultado con la Ec. (4-20).

4-4 (§ 6). La bobina del galvanómetro de la Fig. 4-1 está en reposo en $\theta = 0$ antes de que se cierre el interruptor. Cerrado éste en el instante $t = 0$, el movimiento de la bobina queda críticamente amortiguado. Demostrar que para $t = \sqrt{J/S}$ la separación entre la deflexión instantánea y la deflexión estacionaria θ_s es $2/\epsilon$ veces este último valor, siendo $\epsilon = 2,7183$.

4-5 (§ 7). Deducir la Ec. (4-37), sustituyendo $\beta = j\omega$ en la Ec. (4-24).

4-6 (§ 7). El galvanómetro de la Fig. 4-1 tiene un periodo libre $T_0 = 2$ seg y un amortiguamiento debido al aire despreciable ($D_a = 0$). Cuando $R + R_m = 100$ ohmios, dicho galvanómetro tiene un periodo $T = 4$ seg. ¿Cuál es la resistencia total $R + R_m$ necesaria para amortiguar críticamente este galvanómetro?

4-7 (§ 7). Un galvanómetro con amortiguamiento debido al aire despreciable ($D_a = 0$) necesita una resistencia externa $R = 300$ ohmios para el amortiguamiento crítico (véase Fig. 4-1). Cuando la resistencia externa es $R = 600$ ohmios, el periodo del galvanómetro es $T = 7$ seg. La resistencia del galvanómetro es $R_m = 100$ ohmios. ¿Cuál es el periodo libre T_0 del galvanómetro?

4-8 (§ 7). Cuando se cierra el interruptor del circuito del galvanómetro de la Fig. 4-1, en que $R_m = 50$ ohmios y $R = 100$ ohmios, la deflexión en función del tiempo viene dada por la ecuación

$$\theta = 0,4 - 0,8e^{-\sqrt{3}t} \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$$

a) ¿Cuál es el valor máximo de θ ? b) ¿Qué valor de R se necesita para el amortiguamiento crítico? Supóngase $D_a = 0$.

4-9 (§ 7). Repítase el Prob. 4-8 para

$$\theta = 0,100 - 0,128e^{-4t} \cos(5t - 38,67^\circ)$$

4-10 (§ 7). En el circuito de la Fig. 4-1, $E = 10^{-3}$ V y $R + R_m = 100$ ohmios. Después de cerrar el interruptor en el instante $t = 0$ con el galvanómetro inicialmente en reposo, la deflexión alcanza un valor máximo $\theta_m = 0,604$ radianes para $t = \pi/2$ seg estabilizándose para $\theta_s = 0,500$ radianes. Supuesto un campo radial uniforme y parámetros constantes, a) obténgase la ecuación para la deflexión θ en función de t con *todas* las constantes evaluadas numéricamente; b) si el momento de inercia, J , de la bobina móvil es $2,4 \times 10^{-9}$ newton-metro-seg² por radián, ¿cuál es el valor numérico del coeficiente de amortiguamiento por aire D_a ? (Determinense las unidades de D_a) Supóngase que no existen más amortiguamientos que los debidos al aire y al circuito.

4-11 (§ 8). Un galvanómetro críticamente amortiguado se encuentra inicialmente en reposo con deflexión cero. Se activa mediante el circuito de la Fig. 4-1 para $t = 0$. Calcular el tiempo, en función de T_0 , necesario para que la deflexión alcance el 99 por 100 del valor correspondiente al estado estacionario.

4-12 (§ 8). Si la Fig. 4-1 representa un galvanómetro de d'Arsonval subamortiguado, con campo radial uniforme y bobina de autoinducción despreciable y se cierra el interruptor, calcúlese la expresión general del tiempo transcurrido entre el momento en que θ pasa por su valor estacionario y el momento en que alcanza el máximo (o mínimo) inmediato.

4-13 (§ 9). El periodo medido en un galvanómetro es $T = 18,6$ seg, y la razón de dos elongaciones sucesivas es 1,62. ¿Cuál es el periodo libre T_0 ?

4-14 (§ 9). Un galvanómetro de espejo de d'Arsonval con campo magnético radial uniforme tiene una escala circular a 1 m del espejo. Este galvanómetro se ajusta a cero (lectura cero en la escala para corriente cero a través del galvanómetro), y entonces se conecta al circuito de la Fig. 4-12. Con el interruptor cerrado, la deflexión estacionaria en la escala es de 100 mm. En el instante $t = 0$ se abre repentinamente el interruptor y el sistema comienza a oscilar como aparece en la figura, llegando a cero en el primer mínimo para $t = 1$ seg. a) Calcúlese la sensibilidad para la corriente, S_I , del galvanómetro. b) Calcúlese d_s , deflexión final en milímetros, cuando $t \rightarrow \infty$. c) Despreciando el amortiguamiento del aire D_a , calcúlese el valor numérico de la constante S del muelle de suspensión.

4-15 (§ 9). La deflexión de un galvanómetro de d'Arsonval con campo radial uniforme viene dada, en función del tiempo, por

$$\theta = 0,218 - 0,244e^{-0,50t} \sin(t + 63,5^\circ)$$

Calcúlese el valor máximo de θ y el decremento logarítmico λ .

4-16 (§ 9). El interruptor de la Fig. 4-1 se cierra para $t = 0$ con un galvanómetro inicialmente en reposo en la posición cero, cuya sensibilidad es $0,1 \mu\text{A}$ por mm. La deflexión

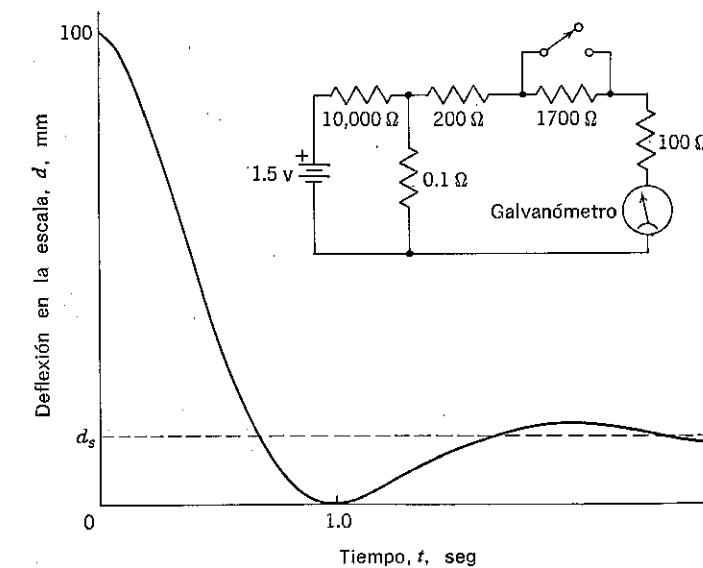


FIG. 4-12. Comportamiento transitorio de un galvanómetro.

oscilatoria alcanza un máximo de 80 mm seguido de un mínimo de 40 mm a partir de cero. a) Calcúlese $I = E/(R + R_m)$. b) Hállese el decremento logarítmico.

4-17 (§ 9). El interruptor de la Fig. 4-1 se cierra sobre un galvanómetro subamortiguado, apareciendo una deflexión para el primer máximo de 20 mm. La deflexión del cuarto máximo es de 15 mm y aparece 20 seg después del primer máximo. La deflexión final estacionaria es de 10 mm. Calcúlese el decremento logarítmico λ y el periodo T del galvanómetro.

4-18 (§ 9). Un operador activó un galvanómetro muy subamortiguado estando interesado en medir la deflexión total d_1 del primer máximo. Sin embargo, perdió esta lectura. En su lugar leyó la deflexión total $d_2 = 50$ mm del primer mínimo y la del segundo máximo $d_3 = 70$ mm (véase Fig. 4-7). Entonces calculó d_1 . Calcúlese cómo lo hizo.

4-19 (§ 10). Compruébese la Ec. (4-49).

4-20 (§ 12). Demostrar que la solución de θ obtenida por sustitución directa de $\theta = \theta_p \sin(\omega t + \phi)$ en la Ec. (4-50) es la misma que la obtenida en la Ec. (4-51) por el método de $e^{j\omega t}$

4-21 (§ 12). Demostrar que la Ec. (4-51) puede ponerse en la forma de las Ecs. (4-53) y (4-54), usando las relaciones dadas por la Ec. (4-52).

4-22 (§ 12). Demostrar que la Ec. (4-53) se puede escribir en la forma

$$\theta_p = \frac{I_p Q \omega_0}{K \omega} \sin \psi$$

4-23 (§ 12). Demostrar que $\theta_p = I_p Q / K$ cuando $\omega/\omega_0 = 1$ y comprobar estos cinco puntos en las curvas de la Fig. 4-8.

4-24 (§ 13). Para valores de Q entre $1/\sqrt{2}$ y 5, calcular y dibujar la curva θ_{pm} en función del valor de ω/ω_0 para el que existe máximo, que es el lugar geométrico de los picos de resonancia de la Fig. 4-8.

4-25 (§ 13). Calcular la anchura de banda de paso bajo del 90 por 100 para un galvanómetro de d'Arsonval con $Q = \sqrt{2}$.

4-26 (§ 13). Según se dice en la Sec. 11-4, para evitar la distorsión de fase, el ángulo de fase ψ de la respuesta del galvanómetro debe ser proporcional a ω/ω_0 . Para $Q = 1/\sqrt{2}$ la Fig. 4-9 muestra que casi se cumple esta condición. Calcular la diferencia entre ψ y $\pi\omega/2\omega_0$ para una gama de valores de ω/ω_0 entre 0 y 1 y dibújense los resultados. ¿Cuál es la desviación máxima de ψ a partir de la relación proporcional y para qué valor de ω/ω_0 ocurre?

4-27 (§ 13). El ángulo de fase ψ de la salida del galvanómetro es proporcional a ω para pequeños valores de ω/ω_0 . Para $Q = 2$, determinese el valor de ω/ω_0 para el que ψ se desvía en 5° de la relación proporcional.

4-28 (§ 14). La frecuencia angular aplicada a un galvanómetro de vibración con $Q = 50$ es $\omega = 1,1\omega_0$. ¿Cuál es el porcentaje de error en la respuesta calculada utilizando la aproximación de banda estrecha de la Ec. (4-61), comparada con la obtenida de la Ec. (4-53)?

4-29 (§ 14). Calcular la capacidad de atenuación en db para el segundo armónico de un galvanómetro de vibración con $Q = 100$.

4-30 (§ 15). Demostrar que el producto del coeficiente de amortiguamiento D y el periodo T de un galvanómetro subamortiguado viene dado por $4\pi J/\sqrt{4Q^2 - 1}$.

CAPITULO 5

ERRORES DE MEDIDA

Para apreciar exactamente el tema «errores de medida» se requiere normalmente una experiencia profunda de laboratorio en que el técnico se encuentra con difíciles problemas de medida de alta precisión, y nada puede sustituir esta experiencia, que puede ser de mucha ayuda y esclarecer notablemente los problemas. En última instancia, el realizar una medida exacta representa una imposibilidad, pero, sin embargo, se pueden cubrir muchas etapas antes de llegar a este límite. No pretendemos que este capítulo pueda sustituir la experiencia; tampoco es comparable a una explicación teórica. Más aún, para llegar al fondo de la materia hace falta más que el tipo casual de medidas realizadas en trabajos de baja precisión.

El conseguir un resultado preciso no consiste solamente en colección y conectar algunos aparatos y realizar lecturas. Para este trabajo se necesita un esfuerzo casi increíble. El técnico debe comprender totalmente la teoría de la medida y tener un íntimo conocimiento de las características del equipo empleado. Es posible que tenga que desarrollar nuevas teorías e instrumentos que no se encuentran realizados. Debe minimizar y corregir las influencias que determinados factores tengan sobre los resultados. Una vez que se han tenido en cuenta los factores más importantes, siguen surgiendo otros de menor importancia que deben ser soslayados. Debe usar de ingenio y cuidado, y con frecuencia utilizar técnicas tortuosas y hábiles para alcanzar su objetivo. Algunas veces necesita realizar experiencias auxiliares para localizar y evaluar las fuentes de error. Debe pensar sobre lo que ha hecho, o va a hacer, estudiando cada paso con actitud de duda y desconfianza sin continuar hasta estar convencido de que todo lo realizado está perfecto. Debe vivir el problema.

Una vez terminado su trabajo —límite arbitrario, puesto que no existe realmente un fin para su trabajo— ha adquirido normalmente un conocimiento tan completo de la totalidad del problema que la satisfacción del deber cumplido es ciertamente una recompensa. Si no ha realizado debidamente su trabajo puede encontrarse en una embarazosa situación; tal es el caso del que presentó sus descubrimientos en una reunión profesional.

Había un joven de Purdue
que tenía muchas cosas que comunicar nuevas y ciertas.
Pero las que eran ciertas no eran nuevas,
y las que eran nuevas no eran ciertas.

En un nivel de estudios elementales es difícil penetrar con profundidad en esta compleja materia que en muchos aspectos es un arte. Normalmente los errores de medida se estudian seriamente por primera vez en laboratorios de estudios superiores o en la experiencia profesional del ingeniero. Por tanto, las aspiraciones de este libro son modestas. El tipo de errores que pueden surgir se exponen mediante ejemplos tomados principalmente de los capítulos anteriores. En el Cap. 6 se presenta una introducción a métodos estadísticos que pueden aplicarse a errores inevitables. Finalmente, en el Cap. 7 se hace una introducción al cálculo de errores de resultados obtenidos a partir de magnitudes medidas.

Hay dos razones principales para estudiar los errores de medida: 1) hallar la forma de reducirlos y 2) estudiar cómo puede calcularse la veracidad de los resultados.

5-1. Definiciones. En toda medida existe error. Si la precisión del equipo de medida es la conveniente, independientemente de su exactitud, siempre se observará una discrepancia entre los resultados de dos medidas.

Aun cuando estas afirmaciones puedan parecer extrañas para entenderlas correctamente debe tenerse en cuenta que las palabras *error*, *precisión*, *exactitud* y *discrepancia* han de ser aceptadas según el significado que normalmente se les asigna cuando se trata de medidas.

Error: incertidumbre estimada

Precisión: definición nítida

Exactitud: proximidad al valor real

Discrepancia: diferencia entre dos resultados

En el uso normal la palabra «error» puede tener cierto sentido desagradable. Puede significar confusión, ofensa moral o creencia equivocada. En el sentido extremo de la confusión, normalmente implica ignorancia, estupidez e incluso culpabilidad. Cuando se trata de medidas eléctricas nunca tiene ninguno de estos sentidos. No hay nada vergonzoso en el error de medida; de hecho el omitir la expresión del error no es buena práctica, ya que no hay medida libre del mismo. El objetivo en las medidas es tener en cuenta todo aquello que contribuye al error final, despreciando en cambio errores demasiado pequeños. Cuantitativamente el error de medida se expresa, normalmente, utilizando una medida aceptada de la incertidumbre que se define matemáticamente. La más corriente de tales medidas en el trabajo científico es la desviación patrón, pero otras veces se utilizan otras de las que trataremos en el Cap. 6.

Normalmente la diferencia entre las palabras «precisión» y «exactitud» es vaga. El diccionario inevitablemente introduce una de ellas en la definición de la otra. Este estado de cosas necesita de una aclaración imprescindible en el campo de las medidas, donde ambas tienen significados totalmente distintos. Un instrumento puede tener gran precisión, gracias a que su escala sea distinta con divisiones muy finas y claramente legible. Al mismo tiempo su exactitud puede ser mala; por ejemplo, debido a un defecto interno o desajuste. Un claro ejemplo es un galvanómetro de espejo cuyo campo está alterado en el entrehierro por la presencia de limaduras de hierro, recogidas inadvertidamente. En tal galvanómetro se pueden obtener lecturas en la escala con precisión de una fracción de milímetro, pero el valor correspondiente de la corriente de bobina deducido utilizando la sensibilidad para la corriente del instrumento sin alterar puede ser muy diferente del valor real.

La palabra precisión también se utiliza en metrología para describir la compatibilidad o reproductibilidad de los resultados. Hay una cantidad llamada el índice de precisión, definida en el Cap. 6, que describe el derriame o dispersión alrededor de un valor central de los distintos resultados de una misma medida. Alta precisión significa una gran proximidad entre los resultados repetidos, mientras que baja precisión significa una amplia dispersión de los mismos. De nuevo insistimos en que no existe necesariamente relación entre la precisión, utilizada en este sentido, y la exactitud del resultado. Todas las medidas repetitivas pueden estar polarizadas en el mismo sentido por algún efecto sistemático que produce una desviación del resultado medido con respecto a la verdad. Por ejemplo, un amperímetro utilizado con un shunt diseñado, para un movimiento diferente del amperímetro, puede ser utilizado repetidamente para medir la misma corriente. Es posible realizar lecturas de escala muy precisas, consiguiendo medidas de gran concordancia entre sí, pero todas ellas serían indicaciones inexactas del valor de la corriente, puesto que el uso de un shunt inadecuado introduce un desplazamiento sistemático de todas las medidas.

Finalmente, la palabra «discrepancia» necesita un comentario a pesar de su claro significado en el uso corriente. La dificultad normal es la falta de una distinción clara entre discrepancia y error. Por ejemplo, la discrepancia entre el valor medido para la resistencia por unidad de longitud de un hilo de cobre standard y el valor que aparece en las tablas no es necesariamente un error de medida. Las características del cobre utilizado para este experimento pueden ser diferentes de las del utilizado para confeccionar las «tablas». Como un ejemplo más, de la importancia de distinguir entre discrepancia y error citaremos que las discrepancias existentes entre medidas repetidas de la misma cantidad pueden constituir solamente una pequeña parte del error de las medidas. Finalmente, si dos personas obtienen resultados diferentes para la misma cantidad se

puede decir que existe discrepancia entre ambos resultados, pero el error introducido por cualquiera de ellos puede ser mayor que dicha discrepancia.

Aun cuando hay otras palabras que deben entenderse con claridad, las cuatro mencionadas deben servir para que el lector caiga en la cuenta de la necesidad de utilizar una terminología precisa para conseguir un entendimiento exacto de los errores.

5-2. Clasificación de errores. Dado que los errores pueden nacer de muy distintas causas, existen muchas formas distintas de clasificarlos. Dos amplias categorías que con frecuencia se utilizan son «sistemáticos» y «residuales». Errores sistemáticos son aquellos que, en principio, pueden evitarse o corregirse. Estos son debidos a causas tales como confusiones, defectos de instrumentos, influencias del ambiente, mala técnica de medida y hábitos del observador. Errores residuales son aquellos que inevitablemente permanecen aunque se eliminen todos los sistemáticos.

Estos dos términos pueden ser confusos. Los errores residuales no son necesariamente los que permanecen en el resultado final. Aun en el mejor de los experimentos el resultado final suele contener ambos tipos de errores. Los errores sistemáticos no son necesariamente constantes, ya que pueden variar con las condiciones del experimento y comportarse de forma irregular, fluctuando con el tiempo. Dado que los errores sistemáticos pueden, en principio, ser reducidos o corregidos, quizá fuese mejor expresión errores «corregibles» o «determinados».

Es útil considerar cuatro categorías de errores sistemáticos:

a) *Errores grandes.* Consisten en confusiones tales como mala lectura de instrumentos, ajuste incorrecto de los aparatos, utilización impropia de los instrumentos, confusiones de cómputo y otros.

b) *Errores instrumentales.* Son defectos de los instrumentos tales como errores de calibrado, defectos internos, elementos internos inestables, partes desgastadas o defectuosas y otros.

c) *Errores ambientales.* Son influencias físicas sobre la persona, el equipo que utiliza, o la magnitud que se mide. Tales errores se pueden atribuir a temperatura, presión, humedad, disturbios atmosféricos, etcétera.

d) *Errores del observador.* Son debidos a hábitos del observador tales como técnica imperfecta, juicio inexacto, forma peculiar de realizar las observaciones y otros.

Los errores residuales no pueden subdividirse en categorías convenientes, ya que son motivados por gran variedad de causas. Algunos de ellos pueden ser completamente desconocidos en un experimento dado. Estos errores incontrolables no se pueden evitar en ninguna medida y con frecuencia producen extrañas fluctuaciones que no siguen regla alguna. Frecuentemente están producidos por la combinación errática de gran número de pequeños efectos, algunos de los cuales tienen causas

conocidas y otros no. En muchos casos el experimentador no puede suprimir estos efectos sin alterar al mismo tiempo la magnitud que está tratando de medir.

5-3. Eliminación de errores sistemáticos. La gran cantidad de formas en que pueden presentarse es una prueba de la vigilancia, imaginación y mente inquisitiva que debe poseer el experimentador. Si éste es competente y responsable adopta una postura vigilante y de duda ante todo aquello que pueda de alguna forma influir en su resultado. Un descuido y toda su labor puede quedar anulada.

Aunque sería posible ajustarse a una técnica organizada para evitar los errores sistemáticos, sin embargo, con la experiencia esto se consigue de forma intuitiva y que parece casual. Para el principiante conviene indicar al menos algunas etapas del proceso. Primero y más importante, es necesario descubrir que existe un error o que se debe esperar su existencia, lo cual depende mucho de la habilidad y experiencia del investigador. En la Sec. 5-14 se sugieren varios métodos. Segundo, es conveniente hacer una estimación cuantitativa de la influencia que el error sistemático puede tener en la cantidad que se mide. Esto puede conseguirse mediante un experimento auxiliar o piloto, o puede, algunas veces, deducirse por análisis teórico. Tercero, se valora la importancia del error en función de la exactitud total deseada y del costo y dificultad de las posibles alternativas para evitarlo. Finalmente, si es conveniente, se estudian los medios de eliminar o disminuir el error. Esto puede ser simple cuestión de sustituir el equipo defectuoso; puede ser necesario introducir controles adicionales en las condiciones del experimento; o incluso puede ser necesario cambiar totalmente el método de medida.

Cada uno de estos cuatro pasos puede constituir un problema muy complicado. En ciertos casos, alguno de ellos puede resultar sencillo y trivial, pero cuanta más exactitud se deseé, mayor esfuerzo será necesario. El punto en que el proceso total se hace difícil, depende en gran parte de la exactitud deseada y de la naturaleza de la magnitud que se mide. En el caso de medidas eléctricas de baja frecuencia una exactitud del orden del 1 por 100 suele necesitar de muchas correcciones y esfuerzos, mientras que si la exactitud que se desea es del orden de 0,1 por 100 o más, ya representa un enorme problema.

La habilidad para detectar la presencia de un error sistemático es de la mayor importancia. Por esta razón conviene estudiar más a fondo las clases de errores sistemáticos que pueden encontrarse en cada una de las cuatro categorías. Algunas veces, el conocimiento general de los distintos tipos de errores que pueden ocurrir sirve al operador para descubrirlos.

5-4. Errores grandes. Generalmente, se considera que estos errores grandes son tan obvios y claros, que no merece la pena estudiarlos. Sin embargo, siempre que interviene el factor humano es inevitable cometer alguna vez graves errores. Quizá el problema no consista tanto en elimi-

narlos totalmente, lo que sería deseable, aunque probablemente imposible, sino en esperarlos y corregirlos siempre que aparezcan. Aunque muchos de los errores grandes se encuentran fácilmente, algunos son sorprendentemente escurridizos. Más aún: a veces es tan difícil corregirlos que resulta más sencillo el repetir la medida.

Uno de los grandes errores que se comete con más frecuencia es complicado, ya que puede introducirse por una multitud de caminos invisibles que se escapan a la atención de la persona. Este error es el de variar o alterar la magnitud que se quiere medir, por el mismo acto de medirla. Dado que el principiante suele caer frecuentemente en este tipo de error, y dado que es tan frecuente, se discute con más amplitud en la Sec. 5-5.

Otro gran error frecuente y algunas veces difícil de encontrar es lo que puede llamarse un error teórico. Este tipo de error es el cometido cuando para calcular una magnitud a partir de los valores medidos se utiliza una ecuación basada en hipótesis que no se cumplen en el experimento. Se da un ejemplo en la Sec. 5-6. Otra forma de introducir este tipo de error es aquella en que el tratamiento teórico de los resultados se realiza con datos obtenidos en unas condiciones que no concuerdan con los supuestos implícitos en la teoría utilizada. Por ejemplo, el aplicar la estadística de distribución normal, que se presenta en el próximo capítulo, a datos que no están normalmente distribuidos.

Existe una gran variedad de errores grandes que se pueden atribuir a descuido o malos hábitos, tales como la falsa lectura de los instrumentos, tomando un resultado diferente de la medida real, o haciendo un ajuste incorrecto de los mismos. Considérese el caso de un voltímetro de escala múltiple que utiliza distintas designaciones numéricas en cada posición del selector de escala para una misma posición de la aguja sobre la escala. Algunas veces se hace la lectura de valores que no corresponden comúnmente a la escala en que está trabajando el instrumento. Otras veces, al trabajar en grupo, una lectura de 74,3 V, realizada por una persona, es anotada por otra como 73,4 V, sobre todo si se hace apresuradamente. El tornillo de ajuste de un instrumento, que normalmente tiene la función de conseguir la indicación cero cuando el instrumento no está energizado, es otra fuente en potencia de errores grandes. Si no se ajusta exactamente, todas las lecturas quedan falseadas. Las confusiones de este tipo, y existen muchas más, pueden parecer demasiado sencillas para mencionarse; sin embargo, ¿qué persona no los ha cometido alguna vez?

Otra categoría de errores grandes corresponde a la utilización de un instrumento en aplicaciones para las que no ha sido concebido, o en las que se exceden sus límites de funcionamiento. Por ejemplo, de un amperímetro de corriente continua no puede esperarse una buena lectura de una corriente alterna de 60 cps. En este caso el error sería fácilmente detectado cuando se observase la indicación cero, o la vibración de la aguja alrededor de cero. Sin embargo, hay muchos otros casos en que

los resultados falsos pueden confundir a una persona no precavida. Por ejemplo, si se utiliza un generador de impulsos (oscilador) para producir una fuente sinusoidal, la exactitud de todas las indicaciones de los instrumentos puede depender de la pureza de la forma de onda. Sin embargo, el oscilador puede estar sobrecargado de tal manera, por encima de su capacidad, que la señal parezca una onda cuadrada.

No son extraños los errores cometidos en el cómputo de los resultados. Esta posibilidad está presente, se hagan los cálculos a mano, con regla de cálculo, calculadora o cualquier otro sistema. El error puede introducirse de infinitas formas y lo peor es que la misma persona puede cometer exactamente los mismos errores al repetir los cálculos. Existen muchas técnicas matemáticas para hacer comprobaciones distintas con los resultados obtenidos. El que otra persona repita los mismos cálculos es de gran ayuda en muchas ocasiones.

5-5. Variación de la cantidad medida. Existen dos sistemas generales para medir una cantidad, según se haga por métodos directos o indirectos. Estos son:

1. Medir la cantidad de forma que no varíe a causa del método empleado.
2. Aceptar la idea de que la magnitud va a variar con el proceso de medida, medir la magnitud alterada, y entonces corregir la variación.

El primer sistema no puede conseguirse estrictamente. Siempre existe algún efecto, por muy pequeño que sea, producido sobre la magnitud que se mide, al cambiar las circunstancias que le rodean, por el hecho de la medida. Sin embargo, este método es útil en muchos casos prácticos en que las variaciones son tan pequeñas que no se pueden detectar, o son inferiores a los errores permisibles. El segundo método es quizás el sistema más frecuente si se considera todo el campo de medidas en conjunto.

Es esencial darse cuenta de que la cantidad medida queda inevitablemente alterada durante el proceso de medida. Hay muchos casos en el desarrollo científico y de la ingeniería en que este efecto fue pasado por alto o ignorado, y hoy día ocurre repetidamente, tanto en los laboratorios de enseñanza como en los profesionales. Algunas veces es difícil saber hasta qué punto se ha cambiado la cantidad que se está midiendo. Un ejemplo interesante, lejos del campo de medidas eléctricas, pero que, sin embargo, se puede aplicar en este caso, se dio cuando se trató de obtener una medida del rendimiento de un grupo de obreros de fábrica. Se estudió un grupo elegido durante un cierto tiempo con resultados más bien desconcertantes. Se encontró que el rendimiento del grupo iba creciendo regularmente durante la prueba, ya que el grupo se fue esforzando más y más intensamente al percibir la atmósfera de atención que les rodeaba por parte de tantas personas importantes. No hace falta indicar que se aprendió mucho acerca del comportamiento humano, pero no tanto acerca de su rendimiento normal.

En las medidas eléctricas hay muchos caminos para determinar el grado en que la magnitud ha variado. Por ejemplo, si se sospecha que una resistencia que se desea medir queda afectada por la corriente que pasa a través de ella durante la prueba, pueden determinarse sus valores para distintas intensidades de corriente y compararse. El utilizar dos métodos independientes puede ser de gran ayuda en algunos casos, especialmente cuando se sabe que la magnitud está sujeta a distintas condiciones en las dos pruebas. En la Sec. 5-14 se sugieren otras técnicas. En el Cap. 8 se presentan varios ejemplos en que voltajes y corrientes de circuitos eléctricos se alteran con la inserción de un amperímetro o la conexión de un voltímetro. Todos ellos son ejemplos típicos de medidas eléctricas de magnitudes que se alteran al ser medidas. Aun cuando son casos corrientes, a menudo se pasa por alto la variación.

5-6. Método del voltímetro-amperímetro. Un ejemplo sencillo del error teórico se presenta en el método de medir una resistencia de corriente continua con voltímetro y amperímetro. Este es un método comúnmente utilizado de medida de resistencia, cuando no se requiere una exactitud muy alta, dado que los aparatos que se necesitan son fácilmente asequibles. Si se mide el voltaje, V , entre los extremos de la resistencia, y la corriente, I , que la atraviesa, la resistencia desconocida, X , viene dada por

$$X = \frac{V}{I} \quad (5-1)$$

supuesto que el amperímetro y el voltímetro son ideales. Esto implica que la resistencia del amperímetro, R_a , y la del voltímetro, R_v , deben ser estrictamente cero e infinito, respectivamente. Se comete un error teórico, si se aplica la Ec. (5-1) cuando los supuestos sobre las resistencias

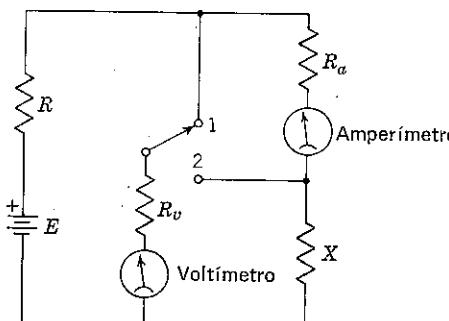


FIG. 5-1. Método del voltímetro- amperímetro para la medida de resistencias.

de los aparatos no se satisfacen (Se desprecian todas las otras fuentes de errores tales como calibrado incorrecto de instrumentos, calentamiento de la resistencia, X , y efecto de dispersión de campo.)

La Fig. 5-1 muestra dos formas posibles de conectar el voltímetro y el amperímetro para obtener lecturas simultáneas. [Las lecturas simultáneas constituyen una técnica muy conveniente para soslayar las fluctuaciones en la fuente de corriente continua de f.e.m. E , y resistencia interna, R . Se pueden conseguir métodos en que los aparatos se conectan uno tras otro, pero éstos también están sujetos a errores teóricos, si X se calcula a partir de los valores leídos introducidos en la Ec. (5-1). Ver Prob. 5-4.] Si la resistencia del amperímetro es cero, y la del voltímetro infinito, las lecturas serán idénticas para ambas posiciones del interruptor, y la Ec. (5-1) puede usarse con propiedad en ambos casos. Para instrumentos no ideales, un análisis del circuito nos lleva a una expresión cuantitativa de los errores que resultarían de la incorrecta aplicación de la Ec. (5-1).

a) *Interruptor en la posición 1.* El amperímetro indica la corriente que atraviesa X , pero la lectura del voltímetro es superior en una cantidad igual a la caída a través del amperímetro. Sea I_1 la lectura del amperímetro y V_1 la del voltímetro. La errónea aplicación de la Ec. (5-1) conduce al falso resultado de $X_1 = V_1/I_1$, en donde X_1 es la resistencia «aparente» y que se sabe es incorrecta. Sea I_x la corriente a través de X . Entonces $I_1 = I_x$, $V_1 = I_x(X + R_a)$ y se ve que X_1 es

$$X_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{I_x(X + R_a)}{I_x} = X + R_a$$

Por tanto, el tanto por ciento de error δ_1 en X_1 es

$$\delta_1 = \frac{(X_1 - X)100}{X} = 100 \frac{R_a}{X} \quad (5-2)$$

Este es un error positivo puesto que la resistencia aparente calculada de la Ec. (5-1) es mayor que la resistencia real, ya que la lectura del voltímetro es por exceso. Se puede calcular la magnitud del error si se conoce R_a . Por ejemplo, si $R_a = 0,01X$, el error es del 1 por 100. El valor de R_v no importa en este caso.

b) *Interruptor en la posición 2.* El voltímetro indica la caída de tensión a través de X , pero la lectura del amperímetro es más alta en un valor igual a la corriente que pasa por el voltímetro. Sea I_2 la lectura del amperímetro y V_2 la del voltímetro. La aplicación incorrecta de la Ec. (5-1) lleva al falso resultado de $X_2 = V_2/I_2$. Sea $I_v = V_2/R_v$ la intensidad a través del voltímetro. Entonces $I_2 = I_v + V_2/R_v$, $V_2 = V_x$ y X_2 resulta

$$X_2 = \frac{V_2}{I_2} = \frac{V_x}{I_x + V_x/R_v} = \frac{1}{1/X + 1/R_v} = \frac{X}{1 + X/R_v}$$

Por tanto, el error en tanto por ciento δ_2 en X_2 es

$$\delta_2 = \frac{(X_2 - X)100}{X} = \left(\frac{1}{1 + X/R_v} - 1 \right) 100 = -\frac{100}{1 + R_v/X} \quad (5-3)$$

Este es un error negativo, puesto que la resistencia aparente calculada a partir de la Ec. (5-1) es, en este caso, menor que la resistencia real, ya que la lectura del amperímetro es mayor que la corriente que atraviesa X . La magnitud del error puede calcularse si se conoce R_v . Por ejemplo, si $R_v = 100X$, el error es alrededor de -1 por 100. El valor de R_a no interviene en este caso.

En muchos casos se pueden encontrar instrumentos que dan lecturas de tensión y corriente, cuya relación da un resultado suficientemente exacto a partir de la Ec. (5-1). Sin embargo, siempre existe algún error con cualquiera de las disposiciones de los instrumentos. La disposición que produce el menor error para dos instrumentos dados y un valor dado de X , suponiendo que se utiliza la Ec. (5-1), puede definirse rápidamente. Si $X/R_a > (1 + R_v/X)$, se debe utilizar la posición 1; en caso contrario, la posición 2 del interruptor.

5-7. Errores instrumentales. Hay un gran número de métodos de medida en que la deflexión real del instrumento da un resultado numérico. Estos métodos de deflexión son muy asequibles a errores instrumentales, en contraste con los métodos en que se utiliza una indicación de cero como base para comparar una cantidad desconocida con una cantidad patrón exactamente conocida. Los errores sistemáticos debidos a irregularidades o defectos del instrumento empleado para hacer la medida son normalmente esperados. Por tanto, normalmente suelen evitarse los métodos de deflexión cuando se busca una exactitud extremadamente alta. A pesar del tremendo desarrollo conseguido en los últimos veinte años, los errores instrumentales son aún inevitables, y el operador debe decidir si dichos errores son lo suficientemente pequeños como para poder ser aceptados en un caso determinado.

Muchos errores instrumentales quedan cubiertos bajo la denominación genérica de «fallo de calibrado», que se refiere a la diferencia entre las lecturas de escala y el valor real de la magnitud que produce la lectura. Los errores de calibrado pueden ser un fallo de construcción de un instrumento nuevo, pueden ser producidos por el desgaste y deterioro de elementos internos del instrumento, o pueden ser provocados por un abuso en la utilización del instrumento, en el que sufren sus componentes internos.

Para cada tipo de instrumento existe un elevado número de causas productoras de error, cuyo detalle depende de la clase particular del aparato. El operador con experiencia siempre tomará las debidas precauciones para asegurarse de que el aparato que utiliza trabaja normalmente y no contribuye a producir errores excesivos. De muchas maneras se

pueden realizar pruebas críticas de los instrumentos para comprobar su buen funcionamiento y exactitud. Algunas veces se pueden detectar los fallos de los instrumentos con pruebas sencillas en que se estudia su comportamiento en cuanto a su erradicidad, inestabilidad y falta de reproducción se refiere. Un método de fácil aplicación es comparar el instrumento con otro similar, o mejor, del que se sabe su buen comportamiento. Para corregir los defectos de un instrumento comercial es recomendable el devolverlo al fabricante para su calibrado y reparación.

Para aclarar algunos defectos de instrumentos que pueden perturbar las medidas, se pueden citar varias causas de errores en los instrumentos de bobina móvil de d'Arsonval, que se han estudiado en los capítulos precedentes. Los errores pueden ser producidos por un anormal rozamiento de los pivotes, resultantes de rodamientos desgastados. Incluso si el pivote y los rodamientos están en buenas condiciones, pueden producirse errores por esta causa en algunos instrumentos si se utilizan con una orientación física para la que no han sido diseñados. Los muelles que dan el par recuperador pueden variar con la edad y el uso. El shunt de un amperímetro o la resistencia serie de un voltímetro puede cambiar su valor correcto si han sido forzados, como pudiera ser una gran sobrecarga. El campo magnético en el entrehierro puede ser permanentemente alterado como resultado de que el instrumento haya sido expuesto a un intenso campo magnético externo en algún momento de su vida. También hay otros efectos magnéticos que pueden producir errores, tal como el utilizar desmontado un instrumento que esté diseñado para ser montado en panel metálico. La corrosión de partes metálicas delicadas puede producir el mal funcionamiento, tales como los hilos de las bobinas y los muelles. Finalmente, citaremos un ejemplo un tanto oculto de una fuente de errores en un instrumento de alta calidad (que normalmente emplea un espejo montado en el plano de la escala para evitar el error de paralaje). Este tipo de instrumento normalmente tiene graduaciones de escala ligeramente irregulares para compensar, por ejemplo, pequeñas irregularidades del campo magnético. La escala está hecha a mano durante su calibrado en fábrica. Si se tuerce la aguja de tal instrumento, aún puede ser puesto a cero con el tornillo de ajuste apropiado, pero entonces la escala deja de tener exactitud y se necesita un nuevo calibrado.

Es prácticamente imposible que el operador esté al tanto en todas las dificultades posibles que puede tener un instrumento. Pero es conveniente tener un conocimiento general de las características, posibilidades y limitaciones del instrumento, siendo así capaz de discernir cuando los errores resultan excesivos para un determinado propósito.

5-8. Calibrado de aparatos de corriente continua. Los voltímetros y amperímetros de corriente continua pueden calibrarse de muchas maneras, de forma que se puedan aplicar correcciones a sus lecturas. Los mejores métodos de gran exactitud utilizan un potenciómetro como ins-

trumento básico de medida. El principio del potenciómetro aparece en la Sec. 9-5. Para los fines de este estudio se puede considerar como un instrumento capaz de una exacta medida de pequeñas tensiones (del orden de un voltio), sin necesitar de una corriente apreciable en sus terminales. Este valioso instrumento de precisión se acerca mucho a las necesidades de un voltímetro ideal de resistencia infinita.

En las Figs. 5-2 y 5-3 se representan los circuitos para calibrar un

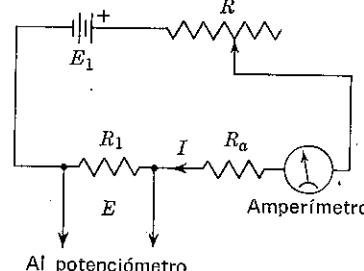


FIG. 5-2. Calibrado de un amperímetro mediante un potenciómetro.

amperímetro y un voltímetro. En el caso del amperímetro, R_1 , es una resistencia patrón desconocida con exactitud capaz de soportar las corrientes correspondientes al alcance del amperímetro, sin sobrecarga. La tensión, E , a través de R_1 se mide mediante un potenciómetro, sin necesidad de corriente alguna. La corriente del amperímetro, I , viene simplemente dada por

$$I = \frac{E}{R_1} \quad (5-4)$$

en que E y R_1 se pueden conocer con mucha exactitud. El reóstato, R , puede ser dispuesto de forma que se obtengan corrientes que cubran

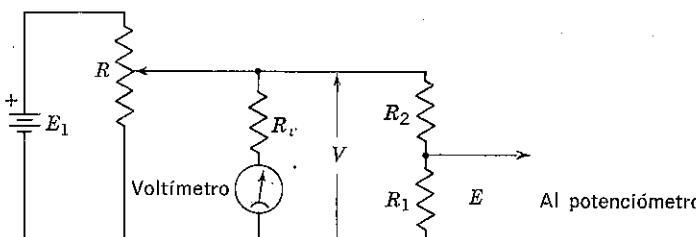


FIG. 5-3. Calibrado de un voltímetro mediante un potenciómetro.

todo el alcance del amperímetro. Para cada posición de R se puede establecer la corriente del amperímetro utilizando la Ec. (5-4) y compararse con la lectura observada en la escala del amperímetro.

En el caso del calibrado del voltímetro se pueden utilizar las resistencias R_1 y R_2 para subdividir la caída de potencial en el voltímetro en una relación tal que se adapte a las características del potenciómetro. La caída de potencial V en el voltímetro queda así relacionada con el valor E , medido por el potenciómetro (que no exige corriente de paso a su través), mediante la ecuación

$$V = \frac{(R_1 + R_2)E}{R_1} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) E \quad (5-5)$$

Así, pues, para relacionar E con V , lo único que influye es la relación entre R_2 y R_1 , que puede conocerse con gran exactitud. El control que existe en R permite cubrir todo el alcance del voltímetro. Para cada posición de R se puede determinar V en la Ec. (5-5), y el resultado compararse con la lectura del voltímetro que se desea calibrar.

En ambos métodos hay una serie de medidas prácticas que contribuyen a conseguir buenos resultados. Por ejemplo, el suministro de tensión, E_1 , debe ser estable de forma que no varíen las condiciones durante el ensayo, y R puede consistir en dos elementos variables de forma que se pueda tener ajuste fino y grueso.

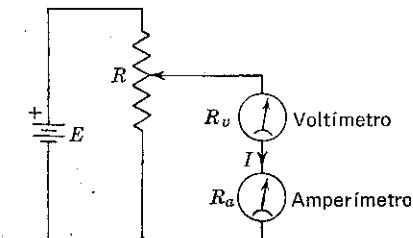


FIG. 5-4. Calibrado de voltímetro-ampémetro.

Se puede utilizar otros métodos de calibrado dependiendo del equipo disponible y de la exactitud que se necesite. Por ejemplo, supóngase que se quiere calibrar un voltímetro de resistencia conocida. Si se tiene un amperímetro muy exacto que, además, cubra el campo de intensidades del voltímetro, se puede utilizar el sencillo método que aparece en la Fig. 5-4. En esencia, lo que se hace es comparar el voltímetro con el amperímetro. La caída de potencial V en el voltímetro viene dada por $V = IR_v$, en que I es la corriente leída en el amperímetro y R_v es la resistencia del voltímetro; dos magnitudes que posiblemente pueden ser conocidas con buena exactitud. De forma similar, se puede también utilizar un voltímetro de gran exactitud para calibrar un amperímetro.

Si la corriente que necesita el voltímetro para dar una deflexión de final de escala es mayor que la corriente admisible del amperímetro,

entonces se puede utilizar una resistencia de décadas de gran exactitud, R_1 , en unión del amperímetro que aparece en la Fig. 5-5. La caída de tensión, V , en el voltímetro viene dada por $V = I(R_1 + R_a)$, de forma que también necesita conocerse la resistencia del amperímetro R_a (que

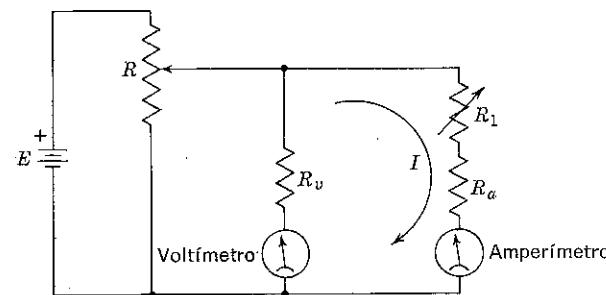


FIG. 5-5. Calibrado de voltímetro-ammetero.

en algunos casos puede ser despreciable si se compara con R_1). Por tanto, el control, R , puede variarse para producir deflexiones en todo el campo del voltímetro, y, conocidas y fijadas R_1 y R_a , se puede encontrar el valor de V , a partir de lecturas en el amperímetro. También se puede utilizar este sistema para calibrar un amperímetro a partir de un voltímetro.

Otra técnica que puede ser utilizada con la disposición de la Fig. 5-5 es la de realizar todas las medidas con un valor fijo de la corriente del amperímetro, dejando así el calibrado dependiendo de un solo punto de su escala. Se puede ajustar el valor del control, R , para diferentes valores fijos de R_1 , de forma que se produzca una lectura predeterminada en el amperímetro. En este caso, se puede calcular V como antes, pero entonces I será constante y R_1 será variable, aunque conocida. Por supuesto, será muy conveniente el aplicar ambos sistemas para comprobar que existe un mismo resultado por ambos métodos.

Con el último método, el calibrado del voltímetro no se obtendría necesariamente para determinados puntos de su escala, ya que R_1 es variable solo a saltos. Aunque este calibrado en puntos determinados es conveniente, no es realmente necesario. En los dos casos se hace necesaria la interpolación entre los puntos realmente medidos. Un ejemplo de curva de corrección aparece en la Fig. 5-6. La corrección en cada uno de los puntos indicados es igual a la diferencia entre el valor calculado para V y la lectura realizada en el voltímetro. Es típica la forma dentada de la curva de corrección que se obtiene. También es normal encontrar que la corrección en voltios tiene el mismo orden de magnitud a lo largo de toda la escala. Esto significa que el error expresado en tanto por ciento de la lectura es menor cuanto más grande es la lectura. La exactitud de la mayoría de los instrumentos se da como el tanto por ciento de error para

deflexión a final de escala. De aquí se deduce que el instrumento puede muy bien tener errores mayores en tanto por ciento para lecturas más pequeñas. Por tanto, no es buena práctica el utilizar las medidas de un instrumento próximas a cero; las tres cuartas partes superiores de la escala son consideradas normalmente como aceptables.

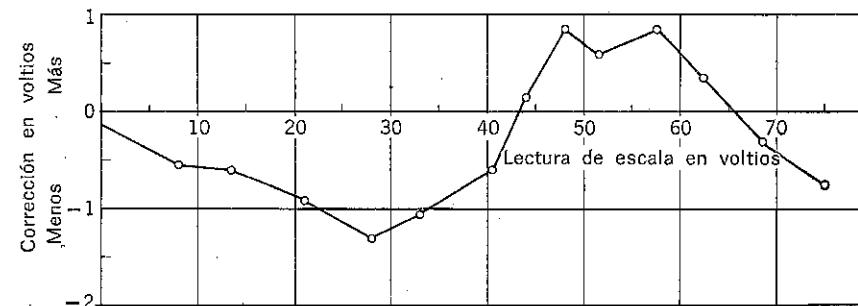


FIG. 5-6. Curva de corrección de un voltímetro.

5-9. Errores ambientales. El ambiente físico en que se realiza un experimento puede tener considerable influencia sobre los resultados obtenidos. Este hecho tiene un amplio campo de posibilidades. En un día húmedo y caluroso, la persona puede sentirse impaciente; la cantidad medida puede cambiar sus características con el tiempo, en el campo biológico pudiera ser el *crecimiento*; los instrumentos utilizados pueden quedar afectados por vibraciones del edificio. Una lista de algunas influencias ambientales incluye temperatura, presión, humedad, vibraciones mecánicas, fluctuaciones del voltaje de suministro y un cúmulo de otras variantes. Si el grupo es de alta sensibilidad, los resultados pueden variar del día a la noche, y sería recomendable una cámara oscura. Para un equipo sensible al ruido acústico se necesitaría una sala con aislamiento acústico. Cuando los efectos del ambiente impiden la consecución de la exactitud deseada, deben tenerse en cuenta estos y muchos otros factores.

Estos breves comentarios dan una idea de la gran diversidad de los errores ambientales. Cada experimentador tiene sus propias anécdotas sobre cómo pudo detectar con sus delicados instrumentos lejanos tranvías, o cómo sus aparatos podían usarse para deducir en qué piso se había parado el ascensor del edificio. También se mencionan los puntos en que daba el sol.

Aunque los errores ambientales son llamados sistemáticos, es obvio que no tienen que ser constantes. Por supuesto, es corriente, aunque no siempre, que sean muy caprichosos en su comportamiento, y el eliminarlos puede no ser sencillo. Para controlar el ambiente se utilizan medios muy elaborados. Baños a temperatura constante, salas presurizadas y

salas apantalladas no son sino unos pocos de los muchos métodos de control utilizados. En las medidas eléctricas se incluyen precauciones de todos estos tipos, tales como utilizar pares de cables trenzados para evitar la captación de campos dispersos, instrumentos diseñados con compensación térmica, resistencias patrón con refrigeración por aceite, y paredes metálicas para el apantallado de partes delicadas. La práctica y la suerte juegan un papel importante cuando se trata de ganar la batalla al medio ambiente.

5-10. Efectos de la temperatura en los instrumentos de corriente continua. La influencia de la temperatura produce un error ambiental al que se ha dedicado gran atención en el diseño de los instrumentos de corriente continua descritos en los capítulos precedentes. Se ha encontrado que un movimiento de d'Arsonval está sujeto a, por lo menos, tres clases de efectos térmicos. Estos se producen en el muelle recuperador, el campo magnético del entrehierro y la resistencia de la bobina. A medida que aumenta la temperatura se reduce el par recuperador del muelle para una deflexión determinada, mientras que se debilita ligeramente el campo magnético. Estos dos cambios tienen efectos opuestos en la sensibilidad como puede verse en la constante del instrumento, $K = S/nBA$. El efecto del muelle es unas dos veces el efecto del campo, y un efecto resultante típico es aproximadamente del 0,02 por 100 por disminución de un grado en K ; esto es, a medida que aumenta la temperatura hay un aumento de la deflexión para una corriente determinada. La resistencia de la bobina, si está hecha de hilo de cobre, por ejemplo, aumenta casi linealmente con la temperatura a razón de un 0,4 por 100 por cada grado centígrado. Al diseñar los instrumentos de alto precio se tienen en cuenta, y se trata de utilizar, dispositivos de shunts y materiales que den un coeficiente total de temperatura cero en función de las características del instrumento en los terminales externos. En algunos casos esta meta se consigue casi totalmente.

Sin tratar de entrar en pequeños detalles, es posible estudiar algunos ejemplos elementales de los efectos mencionados. Por ejemplo, supóngase un voltímetro que contiene una resistencia serie con un coeficiente de temperatura del 0,05 por 100 por grado centígrado. Si la resistencia es grande absorberá tanto la resistencia de la bobina como la resistencia eléctrica de los muelles recuperadores a través de los que pasa la corriente de la bobina. Por tanto, en cálculos someros se pueden ignorar estas últimas resistencias. Para una temperatura dada, la ley de la deflexión del instrumento de campo radial viene dada por $I = K\theta$. Si R es el valor de la resistencia serie, la caída de tensión en el voltímetro vendrá dada por

$$V = RI = RK\theta \quad (5-6)$$

Si se aumenta la temperatura en, por ejemplo, $20^\circ C$, entonces R aumenta

en un 1 por 100, mientras que K disminuye en un 0,4 por 100. Por tanto, para la misma deflexión, θ , la tensión viene dada ahora por

$$V' = 1,01R(0,996K\theta) = 1,006RK\theta \quad (5-7)$$

Así, pues, las caídas de tensión en el instrumento para la misma deflexión varía en un 0,6 por 100, y el instrumento medirá menos para temperaturas mayores. Este ejemplo tan simplificado demuestra que con una elección adecuada del coeficiente de temperatura para R se puede conseguir una completa compensación de la temperatura, aunque deberán tenerse en cuenta factores adicionales.

Si el mismo instrumento móvil se utiliza como amperímetro, sin shunt, entonces, para un aumento de temperatura de $20^\circ C$, la lectura será superior en un 0,4 por 100 para la misma corriente, y la resistencia del instrumento aumentará aproximadamente en un 8 por 100. Si en paralelo con el movimiento se coloca un shunt sencillo de resistencia R_s , con el mismo coeficiente de temperatura que la resistencia serie usada en el caso del voltímetro, se verá que el cambio en la resistencia de la bobina compensará el cambio de la constante del instrumento. De aquí que, para cálculos aproximados, puede suponerse que la constante del instrumento es independiente de la temperatura. La corriente del instrumento, I_m , para una temperatura dada, viene dada por

$$I_m = \frac{R_s}{R_s + R_m} I = \frac{I}{1 + R_m/R_s} \quad (5-8)$$

Si la temperatura aumenta en $20^\circ C$, la resistencia de la bobina, R_m , aumenta en un 8 por 100, mientras que la resistencia del shunt aumenta solamente en un 1 por 100. Por tanto, para la misma corriente de línea, la corriente del instrumento vendrá dada por

$$I'_m = \frac{I}{1 + 1,08R_m/1,01R_s} = \frac{I}{1 + 1,07R_m/R_s} \quad (5-9)$$

Así, pues, I'_m es menor que en caso de menor temperatura; la lectura será baja. El tanto por ciento de diferencia dependerá de la relación R_m/R_s . Por ejemplo, si $R_m/R_s = 10$, la diferencia es del 6 por 100. A causa de la gran simplificación puede parecer, en este ejemplo, que sería fácil conseguir una compensación total de la temperatura utilizando un shunt con el mismo coeficiente de temperatura que el de la resistencia del instrumento. En la práctica hay otros factores que no se han tenido en cuenta aquí que no permiten una solución tan sencilla del problema.

5-11. Errores de observación. El propio observador, por mucho ingenio que ponga en elegir sus métodos, puede, sin darse cuenta, contribuir a introducir errores en los resultados debidos a sus hábitos o sus

inherentes limitaciones de observación. El juicio humano también interviene al estimar las fracciones de una división en la lectura de un instrumento. También se necesita enjuiciar un resultado aislado que se obtiene en una serie de medidas repetidas de la misma magnitud, y que parece muy diferente de las otras. Se debe decidir si aceptar o descartar el resultado. El observador puede introducir un error sistemático por un sentido especial del tiempo, haciendo una medida demasiado pronto o demasiado tarde. También puede introducir errores de paralaje al leer un instrumento en una línea o ángulo distinto del utilizado para ser calibrado. Su técnica experimental puede estar afectada a causa de su propio temperamento. Por ejemplo, al ajustar un control para una determinada lectura del instrumento puede impacientarse cuando el control es solamente aproximado, en lugar de persistir incansable hasta conseguir el control exacto. Si la indicación de una magnitud que se está detectando ha permanecido estable durante un largo periodo de tiempo, puede no apercibirse de que ha cambiado más de los límites aceptables.

El lector caerá en la cuenta de otra gran variedad de ejemplos de errores de observación. Estos pueden ser disminuidos adhiriéndose a métodos rígidos, permaneciendo alerta, e insistiendo en que el trabajo se realice correctamente. Aún se pueden reducir más haciendo intervenir a más de un observador. El experimentador está sujeto a ciertos hábitos que son parte de su equipo como ser humano y que no pueden evitarse. Se encuentra un ejemplo de las apreciaciones humanas en el estudio realizado sobre las indicaciones de la aguja en escalas de instrumentos. Los observadores normalmente pueden *apreciar* hasta una décima de una división de escala. Los errores de las apreciaciones dependen de un gran número de factores tales como anchura de la aguja, anchura de la línea de división, nivel de iluminación, contraste y distancia entre las líneas de la escala. Es interesante el hallazgo de que el observador tiende a producir un tipo característico de error en sus apreciaciones y este tipo es diferente para diferentes individuos.

A menudo se pasa por alto la relación entre los errores de observación y el tratamiento estadístico de los resultados. Las medidas repetidas de la misma magnitud pueden dar útiles interpretaciones estadísticas sujetas a que cada resultado haya sido obtenido con la misma especialización y cuidado. Lo que hace falta no es solamente especialización y cuidado, sino un nivel uniforme de calidad todo el tiempo.

Este capítulo de errores de observación puede ser fascinante para aquellos que se interesan por las curiosas limitaciones de los sentidos humanos. En la técnica moderna el problema se ataca introduciendo controles automáticos y equipo de registro automático, que elimina el elemento humano, con muchas ventajas. Sin embargo, aún falta mucho para que la necesidad de apreciación de los errores de observación pueda ser netamente despreciada.

5-12. Paralaje y lectura de instrumentos. Un observador que incline la cabeza hacia un lado al tomar una lectura de escala de un instrumento puede introducir un error de paralaje si su línea de mira no es perpendicular al plano de la escala. Para el calibrado de los instrumentos se utiliza siempre la dirección perpendicular. Los instrumentos de gran calidad van siempre provistos de un espejo en el plano de la escala, de forma que la aguja pueda ser alineada con su imagen en el espejo, antes de verificar la lectura.

A continuación se da un ejemplo en términos analíticos para la escala no uniforme de la Fig. 3-10. Se vio que la ley de deflexión de este instrumento era

$$I = \frac{K\theta}{\cos \theta} \quad (5-10)$$

Supóngase que se introduce un pequeño error, $d\theta$, en el valor de θ . El tamaño de $d\theta$ depende del ángulo entre la línea de mira del observador y la normal a la escala, y de la distancia entre la aguja y la escala. Puesto que la escala no es uniforme, el error en la corriente para un determinado error angular de observación dependerá de la magnitud de la deflexión. En este caso particular, a mayor deflexión, mayor será el error en la corriente para valor dado de $d\theta$. Así, pues, un error de paralaje no produce necesariamente un error constante en la magnitud que se mide.

La diferencial de la Ec. (5-10) representa la forma en que se relacionan $d\theta$ y el error correspondiente en la lectura de la corriente, dI .

$$dI = \frac{K}{\cos \theta} (1 + \theta \operatorname{tg} \theta) d\theta \quad (5-11)$$

Para deflexiones del instrumento cercanas a cero, $\operatorname{tg} \theta \approx \theta$ y $\cos \theta \approx 1$, de esta forma resulta aproximadamente

$$dI = K(1 + \theta^2) d\theta \quad \theta \ll 1 \quad (5-12)$$

En que se ve que el error en la corriente debido a un error angular fijo, $d\theta$, es mayor (parabólicamente) a medida que aumenta la deflexión θ , partiendo de cero.

La Ec. (5-11) puede expresarse convenientemente en forma fraccional, o unitaria, dividiendo ambos términos por I .

$$\frac{dI}{I} = (1 + \theta \operatorname{tg} \theta) \frac{d\theta}{\theta} \quad (5-13)$$

Es casi inmediato el que el error fraccional de la corriente, dI/I , aumenta para una $d\theta$ fija a medida que θ se acerca a cero y a medida que θ se apro-

xima a 90° . Esto significa que hay algún valor de θ para el que el error fraccional de la corriente sea mínimo, suponiendo que se comete el mismo error, $d\theta$, para todas las lecturas. El cálculo de este mínimo se propone al lector en el Prob. 5-10.

Puede ser importante, para trabajos de gran exactitud, el encontrar los errores cometidos en la lectura de los instrumentos. Quizá sea conveniente eliminar las personas que no dan resultados exactos y constantes. Se puede realizar, a modo complementario, un experimento auxiliar, para evaluar esta fuente de errores. Por ejemplo, se puede utilizar el circuito de la Fig. 5-7 para probar la habilidad de un observador para reproducir las posiciones de un voltímetro para una lectura determinada. Es un circuito muy útil porque las *diferencias* entre varias tentativas de colocar la lectura en el mismo punto de la escala pueden determinarse rápidamente y con gran sensibilidad. La tensión E suministra la corriente para la deflexión del voltímetro, que es ajustada por el examinando mediante el control, R . La batería, E_1 , y las dos resistencias conocidas, R_0 y R_2 , sirven como referencia estable con la que se compara lo conseguido por el observador. Por tanto, E_1 debiera ser una batería nueva de baja resistencia interna R_1 , y debe ser comprobada periódicamente.

Se pide a la persona que se examina que ponga el voltímetro a un valor deseado mediante el uso de R . Entonces el operador cierra el interruptor y ajusta R_2 hasta que se obtiene indicación de cero en el amperímetro.

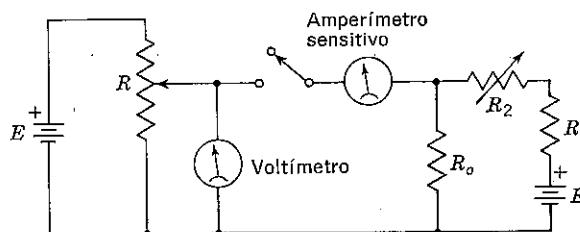


FIG. 5-7. Circuito para medir la reproducibilidad de las lecturas.

rímetro de gran sensibilidad. Con esto se consigue que la caída de tensión en R_0 sea la misma que la caída en el voltímetro. Después se abre el interruptor y se altera la posición de R . La persona sujeta a examen debe ahora reajustar R al mismo valor que antes. Una vez que lo ha hecho, de nuevo se cierra el interruptor. Si el amperímetro no marca cero quiere decir que no ha conseguido reproducir la lectura inicial, suponiendo que E_1 , R_1 , R_0 y R_2 no han variado. El operador ajusta R_2 en una cantidad conocida, ΔR_2 , hasta obtener una lectura cero en el amperímetro. Con esto la caída de tensión en R_0 será de nuevo igual a la del voltímetro.

El error relativo en el ajuste del examinando puede determinarse analizando el circuito. La tensión inicial en el voltímetro será $E_1 R_0 / (R_0 + R_1 + R_2)$, mientras que la segunda tensión es $E_1 R_0 / (R_0 + R_1 + R_2 + \Delta R_2)$.

El error relativo, δ , viene dado por la diferencia entre la segunda tensión y la inicial, dividido por la tensión inicial.

$$\delta = \frac{\frac{E_1 R_0}{R_0 + R_1 + R_2 + \Delta R_2} - \frac{E_1 R_0}{R_0 + R_1 + R_2}}{\frac{E_1 R_0}{R_0 + R_1 + R_2}} = \frac{-\Delta R_2}{R_0 + R_1 + R_2 + \Delta R_2} \quad (5-14)$$

El signo negativo indica que, si R_2 es aumentada (ΔR_2 positivo), el segundo ajuste será más bajo que el inicial. Si $\Delta R_2 + R_1$ es muy pequeño comparado con $R_0 + R_2$, puede despreciarse en el denominador. Este prueba que se puede repetir muchas veces para estudiar el conjunto de resultados y obtener así una indicación más segura de su comportamiento.

Se puede utilizar un sistema más conveniente para obtener una lectura directa de la diferencia entre los dos ajustes de tensión. En serie con el amperímetro se coloca una gran resistencia de valor conocido. Entonces se ajusta R_2 después del primer intento del examinando, como antes. La corriente del amperímetro producida por el segundo ajuste de tensión se multiplica por la gran resistencia en serie para obtener la diferencia de tensión. No hace falta ajustar de nuevo R_2 . El resultado es aproximado a menos que la resistencia en serie sea muy grande comparada con la suma de la resistencia de entrada mirando a la derecha, hacia R_0 , y la resistencia de entrada mirando a la izquierda, hacia el voltímetro. Esto se llama, con propiedad, un método diferencial de medida. En la Sec. 8-16 se hace un análisis detallado de un circuito muy parecido.

5-13. Errores residuales. El resultado de cada medida contiene indefectiblemente errores sistemáticos, a pesar de las precauciones más delicadas. Si hipotéticamente se supone que se han eliminado enteramente todos los errores sistemáticos, o que son tan pequeños que se puedan despreciar, aún quedan ciertos errores inevitables producidos por causas intrínsecamente asociadas a la cantidad que se mide o a los aparatos utilizados. Estos errores se llaman residuales, y algunas veces, accidentales, caóticos, o falta de certeza. El término «accidental» sugiere que estos errores nacen de una combinación arbitraria de gran número de pequeños sucesos, tales como los choques moleculares. La palabra «caótico» implica una naturaleza errática y un comportamiento irregular que no sigue pauta alguna. La expresión «falta de certeza» denota el efecto que los errores residuales producen en la determinación de la cantidad que se mide.

Cuando se conoce la causa de estos errores, puede en algunos casos reducirse su efecto. Por ejemplo, se sabe que una causa de errores extraños en los galvanómetros de d'Arsonval es el caótico bombardeo de la bobina móvil por las moléculas de aire. El movimiento browniano resul-

tante en la bobina, que se puede observar en sistemas de alta sensibilidad extremadamente delicados, es extraordinariamente pequeño y no suele causar inconvenientes. Sin embargo, se puede pensar en alojar el instrumento en una cámara de vacío para reducir este efecto. (Por esta razón se podría aducir que el movimiento browniano es, después de todo, un error ambiental, pero no suele clasificarse como tal.) Aun cuando no se conozcan las causas de los errores residuales, algunas veces se puede, por medios empíricos, suprimir parcialmente estos efectos extraños sin afectar, a su vez, la cantidad que se mide.

La importancia de los errores residuales en las medidas eléctricas es normalmente muy pequeña, en las experiencias bien diseñadas (eso no es verdad en todos los campos de medidas). Por esta razón no se suelen tener en cuenta en los trabajos de baja exactitud. Sin embargo, empiezan a cobrar importancia a medida que se pide mayor exactitud. Por ejemplo, para trabajos de poca exactitud, se pueden utilizar con gran éxito tubos de vacío en instrumentos de electrónica, pero tales aparatos pasan a ser totalmente inadecuados para casos de alta exactitud. Los efectos caóticos inherentes a los tubos, apreciables en las irregularidades de la emisión de los electrones desde el cátodo, pueden ser inadmisibles. De la misma manera, la f.e.m. que resulta de la agitación térmica de los electrones en el interior de una resistencia, llamada normalmente el voltaje de «ruido» puede ser una causa de falta de certeza en muchos tipos de medidas eléctricas y está inevitablemente ligada a cada resistencia. El cuadrado del voltaje de ruido viene dado por

$$e^2 = 4RkT \Delta f \quad \text{voltios}^2 \quad (5-15)$$

donde R es la resistencia en ohmios, k es la constante de Boltzmann ($1,38 \times 10^{-23}$ julios por $^{\circ}\text{K}$), T es la temperatura en grados Kelvin y Δf es la anchura de banda en ciclos por segundo. Si lo permiten las otras condiciones se puede reducir el potencial de ruido térmico disminuyendo la temperatura, el valor de la resistencia o el ancho de banda. Por supuesto, estos remedios solo se pueden aplicar si no afectan a la magnitud que se mide. Aparte de la falta de certeza creada en los trabajos de gran exactitud, las fluctuaciones extrañas también son importantes para determinar el límite superior práctico del funcionamiento que se puede obtener en los aparatos eléctricos. Por ejemplo, el límite superior utilizable de amplificación, en amplificadores electrónicos de tensión (instrumentos que producen una tensión de salida mayor que la de entrada), se determina fundamentalmente por el «ruido» asociado con la entrada del amplificador.

Las faltas de certeza introducidas por los errores residuales que se escapan al experimentador, pueden tratarse aplicando métodos estadísticos. Una vez reducidos a un límite tolerable los errores sistemáticos, el

procedimiento normal es realizar numerosas pruebas repetidas de la misma cantidad, poniendo en cada una el máximo de experiencia y cuidado. Un estudio estadístico del conjunto, o dispersión, de los resultados lleva a estudiar la cantidad que se puede creer sea la más exacta de todas las medidas individuales. La técnica estadística puede ser utilizada, tanto si los resultados están dispersos simétricamente como si lo están asimétricamente, a partir de un valor central. Un tipo de dispersión simétrica que se encuentra frecuentemente se llama distribución normal. Sin embargo, al aplicar métodos estadísticos propios de distribuciones normales a resultados que no están normalmente distribuidos, se comete un error teórico.

5-14. Forma de evitar errores. A continuación se da un sumario de algunos puntos que pueden ayudar a conseguir una mejor exactitud. La importancia de estos puntos depende de la exactitud que se necesite, y de lo que signifique el problema de medida en cuanto a tiempo y dinero.

a) *Conocimiento.* Es insustituible un perfecto entendimiento de las características, limitaciones y funcionamiento normal de cada parte de los aparatos utilizados, así como el entendimiento teórico de todas las facetas del problema de medida en sí mismo. (El experimentador debe ser capaz de evaluar la consistencia de distintos métodos en términos matemáticos cuantitativos, y debe poder imaginar métodos alternativos. Las estimaciones teóricas de los resultados que se puedan anticipar deben compararse con los resultados reales.)

b) *Técnicas.* Algunas de las muchas técnicas que se pueden emplear incluyen la sustitución de un aparato sospechoso por otro similar, intercambio de dos instrumentos similares, el cambio deliberado de un parámetro para observar su influencia aislada en el resultado, el uso de dos métodos diferentes por separado para medir la misma magnitud, el uso de varias personas, la observación y control de las condiciones para mantenerlas dentro de los debidos límites, y las medidas repetidas de la misma cantidad.

c) *Disciplina.* Utilizar procedimientos planeados precisamente, trabajar cuidadosamente y sin prisas, anotar todos los valores directamente y en forma ordenada, tomar nota de todos los detalles de las condiciones y de la disposición del experimento.

PROBLEMAS

5-1 (§ 4). El instrumento de campo uniforme y escala no uniforme de la Fig. 3-7 tiene una constante $K = 1,0$ amp por radián. El instrumento no ha sido ajustado a «cero» correctamente; para intensidad cero, marca $I = 0,1$ amp. Cuando se activa el instrumento, indica una corriente $I = 1,50$ amp. Hállese el valor real de la corriente.

5-2 (§ 5). Para medir la corriente continua en un cable se conecta en serie un instrumento de 5 amp e indica 4,0 amp. Cuando se sustituye el instrumento de 5 amp por otro

de 10 amp, la lectura es de 4,2 amp. Se sabe que ambos aparatos son exactos y cada uno da deflexión de fin de escala para una caída de tensión interna de 50 mV. ¿Cuál es el valor de la corriente en el cable cuando no hay conectado ningún instrumento?

5-3 (§ 5). La tensión entre terminales de una red lineal de corriente continua se mide primero con el voltímetro *A*, con alcance de 10 V a final de escala, 500 ohmios por voltio y entonces (después de desconectar *A*) con el voltímetro *B*, de 20 V y 500 ohmios por voltio. El instrumento *A* indica 10 V y el *B* 10,9 V. ¿Cuál es la tensión en vacío entre los dos terminales?

5-4 (§ 6). Con el interruptor de la Fig. 5-1 en la posición 2, el voltímetro (de resistencia R_v) da una lectura V_1 cuando el amperímetro está cortocircuitado. Al quitar el voltímetro del circuito, el amperímetro (de resistencia R_a) indica una corriente I_1 , cuando se le quita el cortocircuito. Supóngase E y R constantes. a) Hallar la relación entre V_1/I_1 y la resistencia X . b) Si $R = 0$, ¿es correcto el resultado de V_1/I_1 ?

5-5 (§ 6). En el método del voltímetro-amperímetro (véase Fig. 5-1), demuéstrese que si $\sqrt{R_a} \ll 2\sqrt{R_v}$, lo que ocurre normalmente, entonces el valor de X necesario para dar la misma magnitud de error para ambas posiciones del interruptor es la media geométrica de R_a y R_v .

5-6 (§ 6). Si se utiliza la media de los dos valores de la resistencia deducidos de la Ec. (5-1) para las dos posiciones del interruptor de la Fig. 5-1, ¿cuál será el tanto por ciento de error del resultado? ¿Para qué valor de X , en función de R_a y R_v , resultará la media exactamente igual a X ?

5-7 (§ 8). Un voltímetro de 0 a 50 V se calibra usando el circuito de la Fig. 5-5. R_1 se ajusta a cada uno de los valores de la tabla siguiente, y entonces se ajusta el control R para cada R_1 , para producir una lectura 1,0 mA en el amperímetro exacto, cuya resistencia es $R_a = 8,0$ ohmios. También se dan las lecturas correspondientes del voltímetro para cada valor de R_1 .

R_1 , kilohmios	Lectura del voltímetro, voltios
10,00	9,7
20,00	19,5
30,00	29,9
40,00	40,2
50,00	49,8

Trácese la curva de corrección del tipo que aparece en la Fig. 5-6.

5-8 (§ 8). Para la curva de corrección de la Fig. 5-6, hallar la corrección del voltímetro como porcentaje de la lectura de escala para cada uno de los puntos experimentales indicados.

5-9 (§ 10). En el ejemplo del amperímetro de la Sec. 5-10, incluyase el cambio de la constante del instrumento en 0,02 por 100 por grado centígrado, y supóngase $R_m/R_s = 2$. a) Determinar la relación entre corrientes de línea tales que se obtenga la misma deflexión del instrumento en las dos temperaturas que difieren 20° C entre sí. b) Compárese este resultado con el obtenido si se ignora el cambio de K .

5-10 (§ 12). Si el pequeño error angular de paralaje, $d\theta$, es constante para todas las lecturas del instrumento de campo uniforme discutido en la Sec. 5-12, ¿para qué deflexión angular, θ , del instrumento es mínimo el error en tanto por ciento de la corriente correspondiente?

5-11 (§ 12). Determinar la expresión del error fraccional en la prueba de reproductibilidad de ajuste de instrumento que se describe en la Sec. 5-12, si R_0 cambia a $R_0 + \Delta R_0$, en lugar de ser R_0 el que varía, ¿qué ajuste, R_0 o R_2 , es más sensible para un error dado al reajustar la lectura del instrumento?

5-12 (§ 14). Dar un ejemplo de un error de medida eléctrica, y su clasificación, que pueda evitarse usando cada uno de los métodos enumerados bajo «técnicas» para evitar errores en la Sec. 5-14.

CAPITULO 6

ESTADISTICA Y ERRORES

La aplicación de métodos estadísticos a los datos de medidas es un procedimiento muy común. Permite estimar el mejor valor de una cantidad entre los determinados repetida y separadamente, y da medidas analíticas de la falta de certeza de los resultados finales. El efecto combinado de los errores de varias cantidades independientes a partir de las cuales se calculan otros resultados también puede ser estimado cuantitativamente. Además de estas aplicaciones independientes, la estadística también sirve para hacer predicciones. Por supuesto que otra técnica que tiene gran valor es la posibilidad de estimar, a partir de datos de muestra, lo que se puede esperar en casos que no han sido explícitamente estudiados con detalle. Más aún, la naturaleza estadística del mundo físico, a menudo solo puede entenderse en términos estadísticos; así, pues, la estadística es un tema fundamental por sí mismo.

Muchos experimentos necesitan un gran número de medidas antes de que comiencen a tener algún significado los métodos e interpretaciones estadísticos. También es esencial que todos los errores sistemáticos sean pequeños en comparación con los errores residuales, especialmente porque el tratamiento estadístico de datos no puede compensar un error fijo presente en todas las medidas.

6-1. La media de datos primarios. Sean v_1, v_2, \dots, v_n un grupo de n determinaciones independientes de una cantidad. Se utiliza el símbolo v_i (en que $i = 1, 2, \dots, n$), ya que cada uno de los v_i miembros de un grupo se llama, en estadística, *un variante*. El conjunto de n variantes constituye los *datos primarios*. Los v_i pueden diferir uno de otro a causa de errores sistemáticos o residuales.

Se pueden describir estos datos de muchas formas. Un método es tabular todos ellos y pasarlo al supervisor. Esto pondrá a prueba su paciencia, especialmente a causa de que lo que él quiere es conocer el resultado en forma concreta. Otro sistema es dar unas cuantas características sobresalientes de los datos. Aunque menos completo que la tabulación total, con esto se consigue brevedad y utilidad, si se hace bien, y, normalmente, no hay pérdida de información significativa en los datos.

La media de un grupo de variantes, v_i , se define como

$$\bar{v} = \frac{1}{n} (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \quad (6-1)$$

Es decir, la suma de todas las variantes individuales dividida por el número total de variantes. La media es sinónima de la expresión «media aritmética». El número único \bar{v} da una de las más importantes características de los datos, y en algunos casos pudiera ser todo lo que se necesita. Pero la información detallada contenida en los datos en bruto se pierde si solamente se presenta \bar{v} .

La media no representa necesariamente el «mejor valor» de la cantidad medida. Por ejemplo, si, para empezar, los datos en bruto no eran de fiar, y estaban muy influenciados por errores sistemáticos, aún se podría calcular la media a partir de la ecuación definida (6-1), aun cuando no tendría un gran significado. Por otra parte, si se cree que las diferencias entre los v_i son enteramente atribuibles a errores residuales, normalmente la media se supone que es el «valor más probable» o el «mejor valor» de la cantidad. Para justificar esta interpretación es necesario asegurarse que todos los errores, grandes errores, instrumentales y ambientales se han reducido a niveles aceptables, y que cada v_i ha sido determinada con la misma pericia y cuidado utilizando técnicas humanas libres de errores polarizados.

Con frecuencia se utilizan otras cantidades únicas, en lugar de la media, para describir el grupo entero de n variantes. La mediana de un grupo de variantes es igual a aquella variante para la cual hay igual número de variantes mayores y menores que ella. Es decir, si se hace una lista de las variantes, en orden de valor ascendente o descendente, la mediana está situada en la mitad de la lista (si n es par la mediana está situada entre dos variantes, si estas dos variantes no son iguales). El modo de un grupo de variantes son aquellas variantes que se dan con más frecuencia que el resto. Un grupo de variantes puede tener más de un modo, pero si uno de ellos es mucho más general que los otros, los modos menores algunas veces se ignoran, especialmente si son atribuibles a variaciones residuales. Cuando las variantes presentan un solo modo, se llaman unimodales.

La media, mediana y modo de un determinado grupo de variantes no son necesariamente iguales numéricamente. En las medidas electrónicas la cantidad que normalmente se utiliza es la media.

6-2. Desviaciones. Desde el punto de vista estadístico, la media tiene un significado más amplio que el que tiene la media aritmética según la idea de escuela primaria. Las bases para utilizar el término «mejor valor» o «valor más probable» pueden encontrarse en los términos de cantidades llamadas desviaciones. El estudio de las desviaciones nos introduce en el papel fijado por la media.

Sea v un número arbitrario, deducido de cada una de las n variantes. La desviación de una variante, v_i , a partir de este número arbitrario v , se define como $y_i = v_i - v$. Es sencillamente la diferencia entre la variante y algún otro número, y puede ser una cantidad positiva o negativa. Se puede hacer una lista de las desviaciones de las n variantes.

$$y_1 = v_1 - v, \quad y_2 = v_2 - v, \dots, \quad y_n = v_n - v$$

La suma de las n desviaciones es

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = \sum_{i=1}^n y_i = (v_1 + v_2 + \dots + v_n) - nv$$

Ahora bien, si el número v tiene la propiedad de que la suma de desviaciones es igual a cero

$$0 = (v_1 + v_2 + \dots + v_n) - nv$$

y el v resultante es

$$v = \frac{1}{n} (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = \bar{v}$$

Así, pues, se ve que la media es aquel número para el que la suma de las desviaciones es cero. Como tal se puede pensar en él como en el «mejor valor» de la cantidad, alrededor del cual tienen las mismas posibilidades de ocurrir las desviaciones positivas y negativas, dando un total cero.

La desviación de la variante v_i se designará por

$$x_i = v_i - \bar{v} \quad (6-2)$$

Cuyo desarrollo constituye una prueba de que la suma de las desviaciones alrededor de la media debe ser cero para cualquier grupo de n variantes.

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad (6-3)$$

En otras palabras, la suma de las desviaciones de las variantes menores que la media es siempre precisamente igual en magnitud a la suma de las desviaciones de las variantes mayores que la media.

Otro punto de vista, basado en los cuadrados de las desviaciones, también conduce a un satisfactorio razonamiento para el «valor más probable». Es una práctica normal en estadística el desarrollar relaciones matemáticas por métodos en los que se impone un mínimo en la suma de los cuadrados de las desviaciones. Por ejemplo, el método de los mí-

nimos cuadrados para acoplar una curva a un grupo dado de puntos, el «mejor» acoplamiento se consigue exigiendo que la suma de los cuadrados de las desviaciones entre la curva y los puntos dados sea mínima.

Aplicando el principio de los mínimos cuadrados, se puede demostrar que la media es el número con respecto al cual la suma de los cuadrados de las desviaciones es mínima. Esto puede comprobarse tomando las desviaciones a partir de cualquier número v , y averiguar entonces qué valor v da un mínimo en la suma de los cuadrados de las desviaciones.

Desígnese la desviación de una variante, v_i , con respecto a una v arbitraria por $y_i = v_i - v$, como antes. El cuadrado de la desviación es

$$y_i^2 = (v_i - v)^2 = v_i^2 - 2v_i v + v^2$$

La suma, S , de los cuadrados de todas las n desviaciones es

$$S = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 - 2v \sum_{i=1}^n v_i + nv^2$$

Ahora, sea v variable y búsquese el valor de v que hace S mínimo, haciendo $dS/dv = 0$. Puesto que todas las v_i son constantes

$$\frac{dS}{dv} = -2 \sum_{i=1}^n v_i + 2nv = 0$$

Así, pues, para un mínimo en la suma de los cuadrados de las desviaciones

$$v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i = \bar{v}$$

A causa de esta propiedad, es por lo que la media puede ser llamada el «valor más probable».

Debe hacerse notar que estas propiedades de la media, basadas en las relaciones con las desviaciones, *no aseguran* que la media sea la mejor estimación de la cantidad que se mide. Estas mismas propiedades se mantienen rigurosamente para cualquier determinado grupo de variantes, sean éstas o no dignas de crédito, independientemente de cómo se distribuyen las variantes. Por supuesto, estas propiedades se mantienen para cualquier grupo arbitrario de n números.

6-3. La dispersión de los datos primarios. Cuando para sumarizar los datos primarios se utiliza un solo número (tal como la media), se pierden todos los detalles de las n variantes. Es corriente expresar los resultados en la forma

$$\bar{v} \pm \delta$$

(6-4)

como la manera más sencilla de dar más información. La cantidad δ da información acerca de la extensión en que difieren las variantes entre sí. Comúnmente se utilizan cuatro cantidades por lo menos para δ , y cada una de ellas da información relativa a la extensión o dispersión de los datos con respecto a la media. Estas medidas dan mucha aclaración principalmente cuando los datos son unimodales.

El *límite de error*, L , se define como el valor de $\delta = L$ tal que todas las variantes del grupo de datos están comprendidas entre $\bar{v} - L$ y $\bar{v} + L$. No hay razón alguna para que los límites de error superior e inferior sean iguales para un grupo dado de variantes. Algunas veces se utiliza el límite mayor para las dos. Dado que $\bar{v} \pm L$ comprende todas las variantes, se ve que el límite de error representa una cantidad que cubre ampliamente la extensión de los datos.

Si se quiere se pueden utilizar límites de error desiguales. De hecho, en algunos casos, tales como tolerancias en piezas de máquinas, se acostumbra a especificar límites desiguales en una dimensión. Por ejemplo, la especificación $2,500^{+0,002}_{-0,010}$ significa que las piezas que cumplen esta especificación estarán comprendidas entre 2,490 y 2,502. Una vez fabricadas y medidas las piezas, la media no tiene por qué ser igual a 2,500. En este caso, 2,500 se llama el valor *nominal*.

El *error probable*, P , se define como el valor de $\delta = P$ para el que la mitad de las variantes están comprendidas entre $\bar{v} - P$ y $\bar{v} + P$. Así, pues, las variantes incluidas entre $\bar{v} \pm P$ representan la mitad de las variantes que más se aproximan a la media. En este grupo no hay razón para que haya un número igual de variantes que estén por encima y por debajo de la media, como en el caso de las variantes distribuidas simétricamente con respecto a la media. Por supuesto, P nunca puede ser mayor que el límite de error, L .

Hay otras dos cantidades usadas para δ que se definen en función de las desviaciones a partir de la media, x_i . La *desviación media*, A , es el valor de $\delta = A$ definida en función de las magnitudes de las desviaciones por la fórmula

$$A = \frac{1}{n} (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (6-5)$$

Las barras a los lados de x_i significan el valor absoluto de x_i , que es el valor de x_i , suprimiendo el signo menos si lo tiene. Por supuesto, es importante esta supresión del signo; de otra forma la Ec. (6-3) daría cero. Así, pues, A es la media aritmética de las n desviaciones en valor absoluto. Mientras que la desviación media nunca excede el límite de error, L , puede ser igual, mayor o menor que el error probable, P , dependiendo de cómo estén distribuidas las variantes.

Una cuarta definición de δ se llama desviación normal, σ , y es la que

se utiliza corrientemente en la mayoría de los trabajos científicos. Esta se estudia más a fondo en la Sec. 6-4.

Las cuatro posibilidades de δ son generalmente desiguales numéricamente para un grupo dado de variantes. Por tanto, es importante saber qué definición de δ se utiliza para un resultado que se ha dado en la forma de la Ec. (6-4). En ausencia de una definición puede suponerse que δ es la desviación normal, aun cuando los técnicos utilizan a menudo P . A pesar de las diferencias entre estas varias δ , todas ellas poseen las siguientes propiedades:

1. Si todas las desviaciones, x_i , son cero, $\delta = 0$.
2. Todas las n variantes y sus desviaciones correspondientes están incluidas.
3. Las dimensiones de δ son las mismas que las de \bar{v} .

Esta tercera propiedad sugiere que el resultado de las n determinaciones pueden expresarse en función de cantidades fraccionarias adimensionales, de la forma:

$$\bar{v} \pm \delta = \bar{v} \left(1 \pm \frac{\delta}{\bar{v}} \right) \quad (6-6)$$

La cantidad δ/\bar{v} es una medida adimensional fraccionaria de la extensión con que las variantes difieren de su media. Los errores en tanto por ciento, que se utilizan frecuentemente, son 100 veces mayores que estos errores fraccionarios.

6-4. Desviación normal. La *desviación normal*, σ , es el valor de $\delta = \sigma$, definida en función de los cuadrados de las desviaciones a partir de la media por

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (6-7)$$

El cuadrado de la desviación normal es llamado *variancia*, σ^2 . Puesto que en la definición de σ se utilizan los cuadrados de las desviaciones, quedan eliminados automáticamente los signos negativos de las desviaciones. Más aún, las desviaciones mayores quedan más reflejadas que las pequeñas. Por esta razón, la desviación normal es corrientemente mayor que la desviación media, A , y que el error probable, P . Por tanto, da una medida más conservadora de la dispersión de los datos, sin ser tan pesimista como L .

Esencialmente, la desviación normal es una cantidad de raíz cuadrática media y, por tanto, familiar al ingeniero eléctrico en contacto con tensiones y corrientes alternas. Por supuesto, si $n \gg 1$, la desviación normal es numéricamente igual a la desviación raíz cuadrática media, desviación eficaz, definida sustituyendo $n - 1$, por n , en σ . Incluso con n tan pequeña como 25, la desviación eficaz es solo un 2 por 100 menor

que la desviación normal. Por esta razón, a veces se llama desviación normal a la desviación eficaz. Esto no deja de ser razonable, ya que σ normalmente es pequeña comparada con \bar{v} y la distinción entre ambas pasa a ser una materia secundaria de un error en el error. Sin embargo, se considera como una buena práctica el utilizar la cantidad más conservadora, σ , especialmente para pequeños valores de n .

Resulta natural el preguntarse por qué no se acepta generalmente la desviación eficaz, que es más sencilla. La razón para el factor $n - 1$, más bien que n , se basa en el hecho de que \bar{v} no es una magnitud independiente, sino derivada de las variantes. Por ejemplo, para $n = 2$ se puede calcular la media y dos desviaciones, pero las dos desviaciones son iguales en magnitud. Por tanto, solamente hay una desviación independiente para $n = 2$. Por extensión, hay $n - 1$ desviaciones independientes para n variantes. Esto explica el porqué de utilizar el factor $n - 1$, en lugar de n , que también resulta indicado por otras consideraciones estadísticas que no se estudian aquí.

Finalmente, es conveniente hacer notar, al contrario de lo que se afirma en muchos tratados técnicos sobre errores, que la cantidad utilizada para δ , con más frecuencia es la desviación normal y no el error probable. Aun cuando el error probable fue el más popular en su día en los Estados Unidos, ahora muchos técnicos lo han rechazado en aquellos campos en que se utiliza el tratamiento estadístico de datos. En resumen, hoy día todos los resultados científicos se dan en función de la desviación normal, pero, sin embargo, los libros de texto técnicos van atrasados respecto a la práctica.

6-5. Datos agrupados. Cuando las variantes están reunidas entre sí formando subcategorías, se dice que los datos están agrupados. Muchas veces se utilizan los datos agrupados por dos razones muy importantes: 1) se puede reducir mucho la cantidad necesaria de cálculo para determinar \bar{v} y σ , especialmente cuando n es grande, y 2) los datos pueden ser presentados en forma gráfica con lo que se pueden deducir fácilmente sus características más sobresalientes. También son dignos de estudiarse los datos agrupados por razones de concepto. Con este estudio se abre un camino lógico para estudiar las funciones de probabilidad y distribución, que son conceptos muy útiles.

Los datos agrupados se forman a partir de los datos primarios de la siguiente forma. El intervalo total en que están comprendidas todas las variantes se subdivide en intervalos menores llamados *gamas*. Las gamas se escogen normalmente iguales en longitud y se especifican con sus *puntos medios*. Todas las variantes en una gama dada son agrupadas y reciben el mismo valor que el punto medio de la gama. Este es el punto clave que simplifica los cálculos sin perder gran cosa en exactitud. Si las gamas elegidas son pequeñas en comparación con el intervalo total, se consigue una exactitud excelente, pero significa tener más gamas para cubrir todo

el intervalo, y, por tanto, más cálculo. Cuanto mayores sean las gamas, menor será el cálculo, pero habrá una pérdida en exactitud. Por tanto, la elección de las gamas es una cuestión de estudiar un compromiso conveniente entre la exactitud deseada y el esfuerzo de cálculo. Para evitar la duda sobre la gama a que pertenece una variante, es conveniente que no existan variantes cuyo valor coincida con el punto extremo de una gama. Si algunas variantes coinciden con los puntos extremos de una gama, pueden adjudicarse la mitad a la gama alta y la otra mitad a la baja.

Sea v_r el punto medio de la gama r -ésima de anchura Δv_r . El número de variantes, n_r , que pertenecen a la gama Δv_r , se llama frecuencia de la variable y se representa por $f(v_r) = n_r$. Se utiliza una notación funcional, ya que n_r es una función de v_r que cambia en pequeñas cantidades al variar r en sus valores integrales. Puesto que $f(v_r)$ es simplemente el número de ocurrencias de v_r en la gama Δv_r , es siempre un número entero. Para un total de R gamas que cubren el intervalo total de las variantes

$$\sum_{r=1}^R n_r = \sum_{r=1}^R f(v_r) = n \quad (6-8)$$

Esta fórmula representa el hecho de que la suma del número de variantes en cada una de las gamas debe ser igual al número de variantes, n .

Las variantes en una gama, Δv_r , están generalmente distribuidas por encima y por debajo del punto medio de la gama, v_r . Por tanto, se puede asignar a cada una de estas variantes el valor v_r sin caer normalmente en errores graves, si se han escogido adecuadamente las gamas. Entonces la suma de todas las variantes viene dada por

$$\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{r=1}^R v_r n_r = \sum_{r=1}^R v_r f(v_r) \quad (6-9)$$

Sustituyendo este resultado en la Ec. (6-1), se ve que la media viene dada aproximadamente en función de los puntos medios de las gamas y de la frecuencia de las variantes, por

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^R v_r f(v_r) \quad (6-10)$$

La desviación entre un punto medio de gama, v_r , y la media es $x_r = v_r - \bar{v}$, y habrá n_r desviaciones iguales pertenecientes a las variantes a que se ha

dado el valor v_r , en la gama Δv_r . En consecuencia, la suma de las magnitudes de todas las desviaciones viene dada aproximadamente por

$$\sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{r=1}^R |v_r - \bar{v}| n_r = \sum_{r=1}^R |x_r| f(v_r) \quad (6-11)$$

y la suma de los cuadrados de las desviaciones en función de los datos agrupados será aproximadamente

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{r=1}^R (v_r - \bar{v})^2 n_r = \sum_{r=1}^R x_r^2 f(v_r) \quad (6-12)$$

Así, pues, la desviación media de la Ec. (6-5) viene aproximadamente dada por

$$A = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^R |x_r| f(v_r) \quad (6-13)$$

y la variación [el cuadrado de la Ec. (6-7)] en función de los datos agrupados está dada aproximadamente por

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{r=1}^R x_r^2 f(v_r) \quad (6-14)$$

En la Tabla 6-1 se hace un resumen detallado de los cálculos para los datos primarios y para los datos agrupados para un grupo de 20 variantes. Las variantes se han colocado en orden ascendente. Los puntos medios de las gamas son números enteros que varían entre 100 y 108, y se utilizan gamas iguales, $\Delta v_r = 1.0$. Así, por ejemplo, las tres variantes en el intervalo 104 ± 0.5 están en la gama $r = 5$, y se les asigna el valor del punto medio de la gama $v_r = 104$, y la frecuencia $f(v_r) = 3$. Incluso con un pequeño número de resultados $n = 20$, la economía en el cálculo que representa agrupar los datos, se hace evidente a la vista de la Tabla 6-1. Para mayores valores de n aún es mayor. Más aún, se ve que los resultados de los cálculos de la media, \bar{v} , la desviación media, A , y la desviación normal, σ , a partir de los datos primarios, o agrupados utilizando las ecuaciones que se han estudiado, resultan muy parecidos en este ejemplo.

En la Fig. 6-1 se da un desarrollo gráfico de los datos agrupados. Es un gráfico escalonado en que la altura de los escalones son las frecuencias, $f(v_r)$ y su anchura coincide con las gamas Δv_r . Esta representación gráfica recibe el nombre de *histograma* o gráfico de distribución de frecuencias. Da una figura de fácil estudio de la distribución de las variantes. Esto se

TABLA 6-1. EJEMPLO DE DATOS AGRUPADOS

Datos primarios*			Datos agrupados**							
<i>i</i>	<i>v_i</i>	<i>x_i</i>	<i>x_i²</i>	<i>r</i>	<i>v_r</i>	<i>f(v_r)</i>	<i>v_rf(v_r)</i>	<i>x_r</i>	<i>x_rf(v_r)</i>	<i>x_r²f(v_r)</i>
1	100,4	-4,0	16,0	1	100	1	100	-4,3	-4,3	18,5
				2	101	0	0	-3,3	0	0
2	101,9	-2,5	6,3	3	102	2	204	-2,3	-4,6	10,6
3	102,2	-2,2	4,8							
4	102,8	-1,6	2,6							
5	103,0	-1,4	2,0							
6	103,3	-1,1	1,2	4	103	4	412	-1,3	-5,2	6,8
7	103,3	-1,1	1,2							
8	103,9	-0,5	0,3							
9	104,3	-0,1	0	5	104	3	312	-0,3	-0,9	0,3
10	104,3	0	0							
11	104,9	0,5	0,3							
12	104,9	0,5	0,3							
13	105,2	0,8	0,6	6	105	5	525	0,7	3,5	2,5
14	105,3	0,9	0,8							
15	105,4	1,0	1,0							
16	105,7	1,3	1,7							
17	106,1	1,7	2,9	7	106	3	318	1,7	5,1	8,7
18	106,4	2,0	4,0							
19	107,0	2,6	6,8	8	107	1	107	2,7	2,7	7,3
20	107,6	3,2	10,2	9	108	1	108	3,7	3,7	13,7
Sumas	2.088,0	14,5	63,0	20	2.086	...	15	68,4
		-14,5						-15		

$$* \text{ Datos primarios: } \bar{v} = \frac{2.088,0}{20} = 104,40$$

$$A = \frac{2(14,5)}{20} = 1,45$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{63}{19}} = 1,8$$

$$P = 1,1, L = \begin{cases} -4,0 \\ +3,2 \end{cases}$$

$$** \text{ Datos agrupados: } \bar{v} = \frac{2.086}{20} = 104,3$$

$$A = \frac{2(15)}{20} = 1,5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{68,4}{19}} = 1,9$$

ha conseguido suprimiendo la representación de las variables individuales en una gama dada. Una representación gráfica de cada variante individual aparece debajo del histograma representada por segmentos levantados en cada valor de v_i . El último sistema de presentar datos se utiliza algunas veces, pero puede verse que es menos interesante para la visión de conjunto.

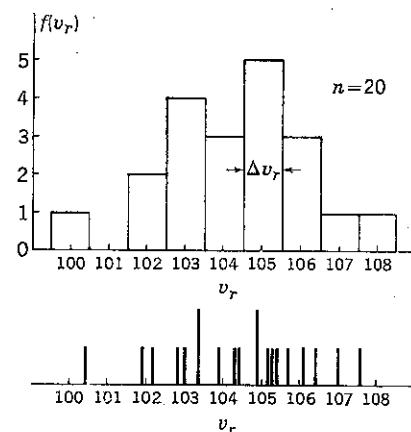


FIG. 6-1. Histograma de los datos agrupados de la Tabla 6-1.

6-6. Normalización de las ordenadas de los histogramas. Puesto que la altura de los escalones del histograma es igual al número de ocurrencias de v_i en una gama dada, se puede suponer que al crecer n también crecerá la altura. Por ejemplo, si n se duplica, $n = 40$, el histograma será similar al que aparece en la Fig. 6-2, que, aunque hipotética, representa lo que se daría prácticamente. La variación de un escalón a otro se ha hecho menor en cierto grado y el intervalo total sobre el que se encuentran ahora las variantes es ligeramente mayor que en el caso $n = 20$. Por tanto, el número de ocurrencias de v_i en cada gama no se ha doblado exactamente.

La comparación de estos dos histogramas se ve algo dificultada por tener altura de escalones en uno que son mayores en general que en el otro. Si se utiliza un procedimiento de normalización más lógica se consigue un resultado mejor. Si en un histograma determinado se divide la altura de cada escalón por su valor de n , entonces los dos histogramas tendrán la misma escala de altura de escalones facilitándose así la comparación. La altura normalizada de escalones para cada histograma es igual a la fracción del número total de variantes correspondientes a una gama dada. En la Fig. 6-3 aparecen histogramas normalizados mostrando la $f(v_r)/n$. Es claro que si aumenta n aún más, las alturas de los escalones del histograma de la Fig. 6-2 aumentarán, pero las del histograma normalizado tendrán alturas comparables a los casos de la Fig. 6-3,

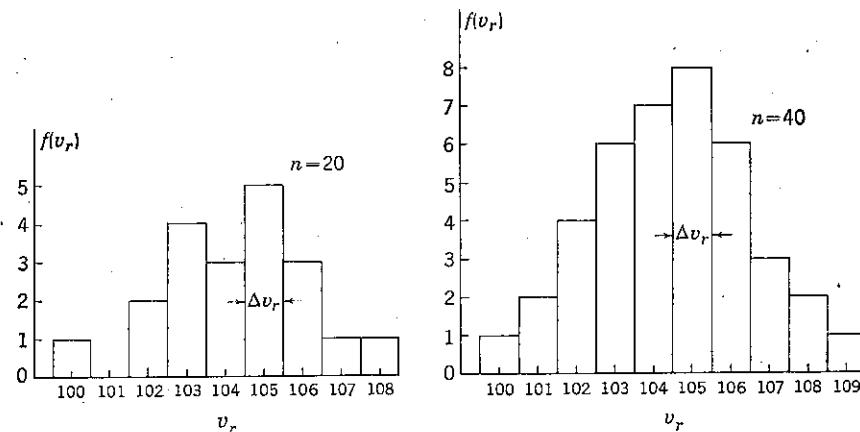
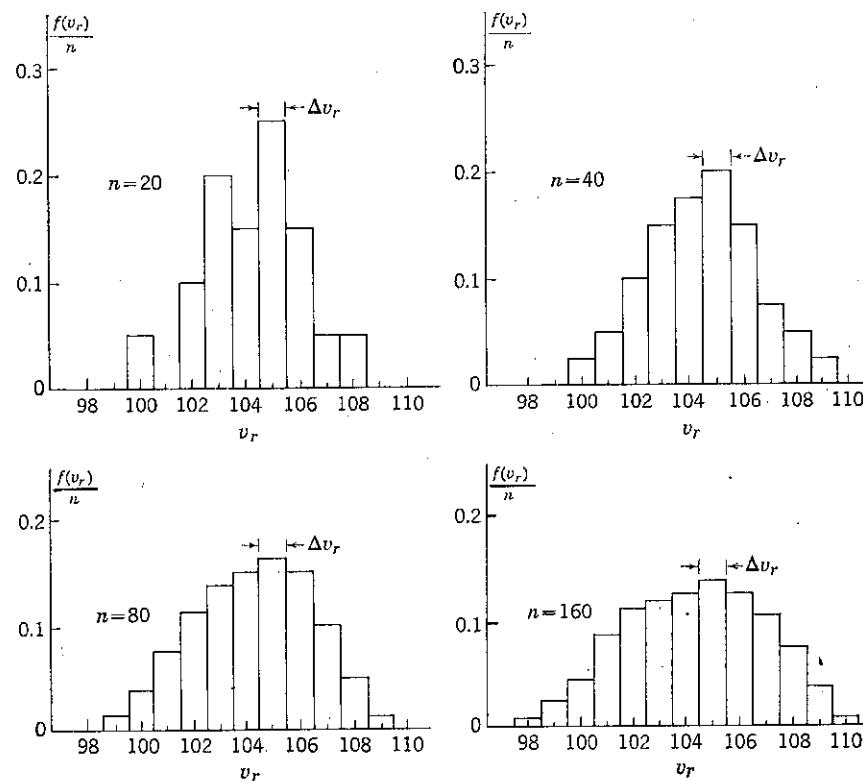
FIG. 6-2. Efectos de aumentar n sobre un histograma.

FIG. 6-3. Histogramas normalizados.

suponiendo que Δv_r permanece constante. En estadística, el valor $f(v_r)/n$ es muy significativo. Como se verá en la próxima sección, es igual a la probabilidad de ocurrencia de una variante en la gama Δv_r . Por esta razón el histograma normalizado se llama histograma de probabilidad y se utiliza para $f(v_r)/n$ la expresión *distribución de probabilidad*, como podría esperarse al utilizar la expresión de distribución de la frecuencia para $f(v_r)$.

6-7. Probabilidad. Es corriente definir la probabilidad en función de «eventos». Eventos pueden ser una gran variedad de cosas. Ejemplos sencillos son los números en un par de dados o los colores de bolas blancas y negras. Las variantes también pueden ser eventos, lo que quiere decir que la probabilidad puede ser aplicada a casi todas las magnitudes mensurables. La probabilidad se define en función de los eventos con las únicas condiciones de que los eventos sean igualmente probables e independientes. Eventos igualmente probables son aquellos en los que no hay forma de decir exactamente cuál de todos los eventos posibles entre los que se consideran ocurrirá en un momento determinado. Eventos independientes son aquellos en que la ocurrencia de uno no afecta a la ocurrencia de los otros.

Supóngase que de un total E de eventos independientes e igualmente probables se consideran como más favorables un cierto número, E_i , de ellos. La probabilidad de que ocurra un evento favorable se define como

$$p(E_i) = \frac{E_i}{E} \quad (6-15)$$

en que $p(E_i)$ se llama «probabilidad de ocurrencia de E_i », o más brevemente, «probabilidad de E_i ». Si E consiste en k porciones separadas que cubren todos los eventos posibles, entonces

$$E = E_1 + E_2 + \cdots + E_k = \sum_{i=1}^k E_i \quad (6-16)$$

Así, pues, se ve que E_i puede, como máximo, ser igual a E y, por tanto, $p(E_i)$ nunca puede ser mayor que la unidad. Más aún,

$$\sum_{i=1}^k p(E_i) = \sum_{i=1}^k \frac{E_i}{E} = 1,0 \quad (6-17)$$

que determina que la suma de las probabilidades de todos los eventos posibles debe ser igual a la unidad. Así, pues, en el caso de un número finito de eventos, una probabilidad igual a uno implica «certeza», y una probabilidad igual a cero implica «imposibilidad».

La definición de probabilidad puede aplicarse a los datos agrupados

para ver que $f(v_r)/n$ es la probabilidad de que una variante caiga en la gama Δv_r . Supóngase que cada una de las 20 variantes de la Tabla 6-1 se escribe en un trozo de papel, que los 20 papeles se colocan en un sombrero. ¿Cuál es la probabilidad de extraer un papel cuya variante esté en la gama Δv_r ? En este caso, los eventos son las variantes y los eventos favorables son aquellas variantes que pertenecen a la gama Δv_r .

De la definición de probabilidad,

$$p(v_r) = \frac{n_r}{n} = \frac{f(v_r)}{n} \quad (6-18)$$

donde $n_r = f(v_r)$ es el número de papeles que hay en el sombrero, marcados con variantes de la gama Δv_r , y n es el número total de papeles en el sombrero. Con esto se ve claramente que las alturas de los escalones del histograma son, cuando están divididos por n , iguales a la probabilidad. Más aún, de la Ec. (6-17) se deduce que

$$\sum_{r=1}^R p(v_r) = \sum_{r=1}^R \frac{f(v_r)}{n} = \frac{n}{n} = 1,0 \quad (6-19)$$

Esto quiere decir que las 20 variantes deben corresponder a algún lugar del intervalo total compuesto por todas las gamas R .

En la Fig. 6-3 se hace evidente que $p(v_r)$ depende en cierta manera de n , especialmente para pequeños valores de n . A medida que aumenta n , la relación $f(v_r)/n$, que es la probabilidad, tiende a disminuir, ya que el intervalo total, sobre el que se encuentran las variantes, tiende a aumentar. Pero $f(v_r)/n$ tiende a ser más estable al aumentar n . Para un valor finito de n , no importa cuál, $f(v_r)/n$ sigue dependiendo en cierta forma de n .

6-8. Curvas continuas de las distribuciones. La dependencia de la distribución de frecuencia $f(v_r)$ del número de variantes se evita en gran parte dividiendo $f(v_r)$ por n . Sin embargo, se pueden poner aún objeciones a la distribución de probabilidad resultante, $p(v_r)$. Mientras que las alturas de los escalones se han ido haciendo relativamente independientes de n , aún dependen mucho de la gama Δv_r . Por ejemplo, si en un determinado histograma de probabilidad se duplican todas las gamas Δv_r , la altura de todos los escalones se hará el doble aproximadamente. Esto es así ya que la frecuencia $f(v_r)$ será aproximadamente el doble al duplicarse la gama, mientras que n permanece igual. De la misma manera, si se reducen a la mitad las gamas, las alturas de los escalones quedarán aproximadamente reducidas a la mitad. En la Fig. 6-4 se da una representación gráfica de este efecto.

Para un número finito de variantes, las alturas de los escalones no son exactamente proporcionales a Δv_r , debido a la diseminación de la v_i indi-

vidual, en las gamas. Por ejemplo, considérense dos escalones adyacentes de desigual altura que cubren una gama de $2 \Delta v_r$. Si se utiliza una nueva gama que cubra estos mismos escalones, el escalón que cubra ($2 \Delta v_r$) tendrá una altura igual a la suma de las alturas de los dos escalones desiguales adyacentes. Para grandes valores de n , la relación entre la altura del escalón y Δv_r tiende a ser constante, supuesto que Δv_r no es demasiado pequeño.

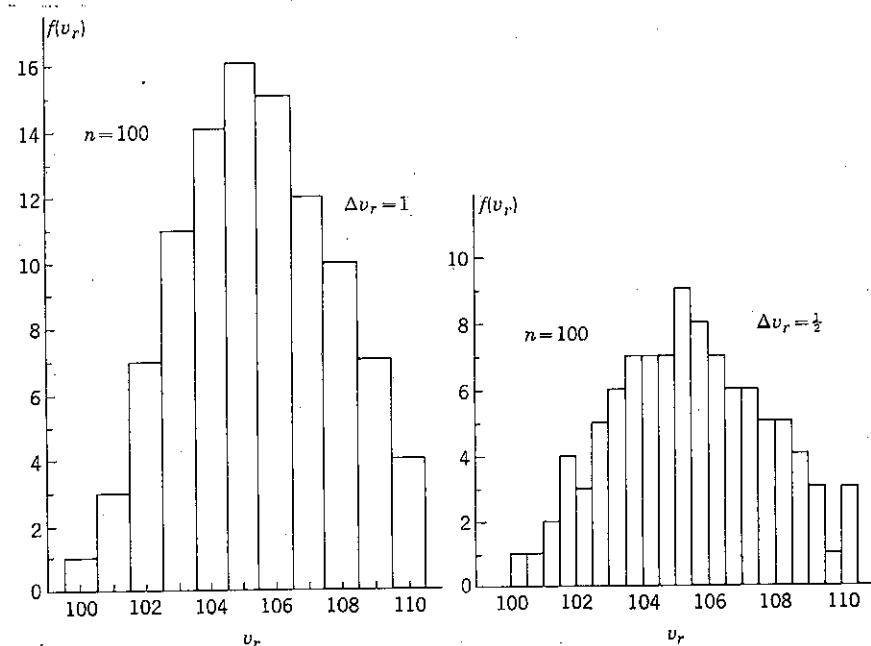


FIG. 6-4. Efectos del cambio de Δv_r sobre un histograma.

Se puede definir una función que es aproximadamente invariable con respecto a n y a Δv_r , dividiendo $p(v_r)$ por Δv_r .

$$y(v_r) = \frac{p(v_r)}{\Delta v_r} = \frac{f(v_r)}{n \cdot \Delta v_r} \quad (6-20)$$

Es llamado *función distribución-probabilidad*. Se puede realizar un gráfico escalonado de $y(v_r)$ respecto de v_r . En la Fig. 6-5 se presenta un ejemplo. El contorno envolvente del gráfico escalonado resultante será relativamente independiente de n y Δv_r . Para grandes valores de n y pequeños valores de Δv_r , las anchuras de los escalones serán muy pequeñas resultando en saltos muy pequeños entre escalones adyacentes. Así, pues,

$y(v_r)$ se aproxima a una curva suave a medida que n aumenta y Δv_r disminuye, supuesto que Δv_r no es demasiado pequeño.

La función distribución-probabilidad, $y(v_r)$, o la curva continua correspondiente, $y(v)$, se encuentra con mucha frecuencia en la estadística. Consecuentemente, es muy importante entender su relación con la probabilidad. En el caso de un histograma de distribución-probabilidad, la probabilidad de que una variante corresponda a la gama Δv_r , viene dada por la «altura» del escalón colocado sobre la gama Δv_r . Pero en el caso de la función distribución-probabilidad, la probabilidad de que una variante corresponda a la gama Δv_r , viene dada por el «área» del escalón colocado sobre la gama Δv_r . Esto resulta claro estudiando la Ec. (6-20).

$$p(v_r) = y(v_r) \Delta v_r = \text{área del escalón de altura } y(v_r) \text{ y base } \Delta v_r \quad (6-21)$$

Para hallar la probabilidad de que una variante corresponda a una gama que es una integral múltiple de Δv_r , solamente es necesario sumar

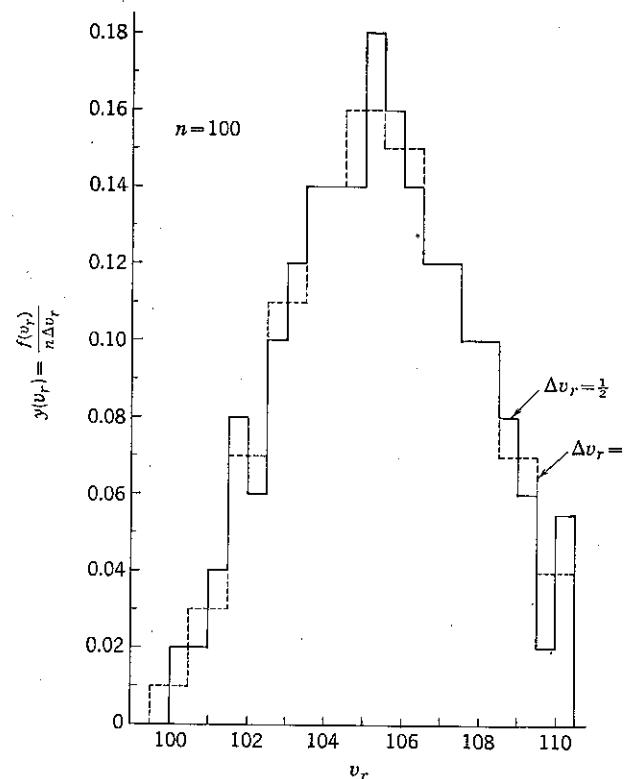


FIG. 6-5. Funciones distribución-probabilidad para los histogramas de la Fig. 6-4.

las probabilidades de cada escalón. Esto se deduce de la Ec. (6-15) en que se ve que con $p(E_1) = E_1/E$ y $p(E_2) = E_2/E$, la probabilidad de que E_1 y E_2 se encuentren es

$$\frac{E_1 + E_2}{E} = \frac{E_1}{E} + \frac{E_2}{E} = p(E_1) + p(E_2) \quad (6-22)$$

Esto puede ser generalizado para cualquier número de gamas. Por tanto, el encontrar la probabilidad de que una variante corresponda a un intervalo que es grande en comparación de Δv_r puede formularse como la suma de muchas áreas de pequeños escalones. Para expresarlo gráficamente supóngase que se quiere hallar la probabilidad de encuentro de las variantes existentes entre los puntos medios de dos gamas v_1 y v_k , que se representan en la Fig. 6-6. Para simplificar, supóngase que el intervalo entre v_1 y v_k se subdivide en k intervalos iguales, Δv . Esto se justifica, si n es grande, ya que se ha definido deliberadamente que la función distribución-probabilidad es relativamente independiente de la anchura de la gama. Así, pues, no hay restricción alguna en la diferencia

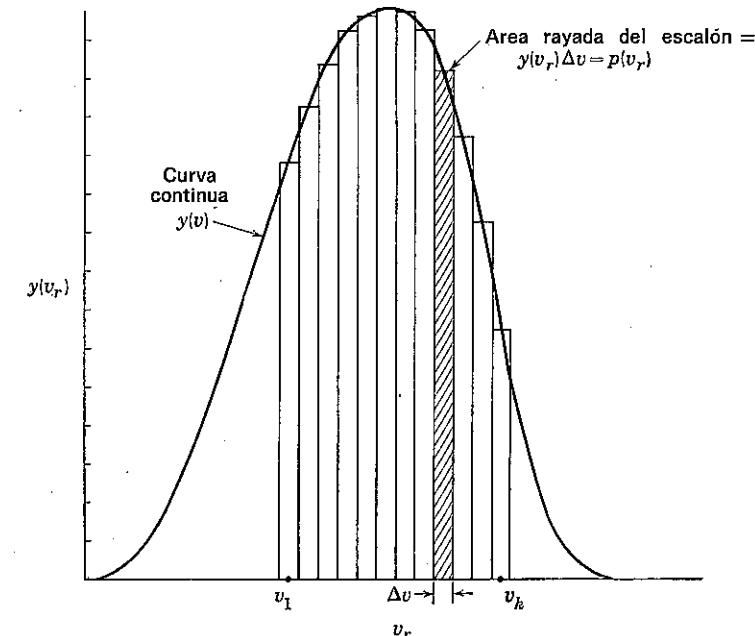


FIG. 6-6. Determinación de la probabilidad en un intervalo finito.

entre los puntos medios de gama v_1 y v_k . Llámese $p(v_1, v_k)$ a la probabilidad de encontrar una variante en la gama existente entre v_1 y v_k . Entonces

$$\begin{aligned} p(v_1, v_k) &= p(v_1) + p(v_2) + \dots + p(v_k) \\ &= y(v_1) \Delta v + y(v_2) \Delta v + \dots + y(v_k) \Delta v \\ &= \sum_{r=1}^k y(v_r) \Delta v \end{aligned} \quad (6-23)$$

6-9. Formas integrales. La sumatoria de la Ec. (6-23) puede expresarse en forma integral, haciendo que Δv tienda a cero. Se puede utilizar la definición del cálculo integral:

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \sum_{r=1}^k y(v_r) \Delta v = \int_{v_1}^{v_k} y(v) dv \quad (6-24)$$

en que $y(v)$ es la función continua aproximada de las alturas de los escalones. Por tanto, la probabilidad de que una variante caiga entre v_1 y v_k viene dada en la forma integral por

$$p(v_1, v_k) = \int_{v_1}^{v_k} y(v) dv \quad (6-25)$$

Hay dos casos especiales dignos de comentario en este importante resultado. Si $v_k = v_1 + dv$, entonces la probabilidad de encontrar una variante en la gama dv , entre v_1 y $v_1 + dv$, es

$$p(v_1, v_1 + dv) = y(v) dv \quad (6-26)$$

que es la forma diferencial de la Ec. (6-25). La probabilidad de encontrar una variante en algún sitio de la gama $-\infty < v < \infty$ debe ser 1,0. Ya que esto corresponde a $v_1 \rightarrow -\infty$ y $v_k \rightarrow \infty$, de la Ec. (6-25) se deduce que

$$p(-\infty, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} y(v) dv = 1,0 \quad (6-27)$$

El área comprendida por la función distribución-probabilidad debe ser igual a uno.

Se pueden desarrollar otras relaciones integrales considerando el límite de la suma, sustituyendo $y(v_r)$ por la función $y(v)$. La media puede expresarse como una integral, comenzando por la Ec. (6-10)

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{\text{todos } r} v_r f(v_r) = \sum_{\text{todos } r} v_r p(v_r) = \sum_{\text{todos } r} v_r y(v_r) \Delta v$$

Pasando al límite, con $\Delta v \rightarrow 0$,

$$\bar{v} = \int_{-\infty}^{\infty} v y(v) dv \quad (6-28)$$

Del mismo modo, la desviación media puede expresarse en forma integral, a partir de la Ec. (6-13).

$$A = \frac{1}{n} \sum_{\text{todos } r} |x_r| f(v_r) = \sum_{\text{todos } r} |v_r - \bar{v}| y(v_r) \Delta v$$

y si $\Delta v \rightarrow 0$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} |v - \bar{v}| y(v) dv \quad (6-29)$$

Para la forma integral de la variación, comenzando con la Ec. (6-14),

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{\text{todos } r} x_r^2 f(v_r) = \sum_{\text{todos } r} (v_r - \bar{v})^2 y(v_r) \Delta v$$

y siendo $\Delta v \rightarrow 0$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (v - \bar{v})^2 y(v) dv \quad (6-30)$$

Para obtener una expresión integral para el error probable, P , se especifican dos límites, v_1 y v_k , que son simétricos con respecto a la media y entre los que se encuentran la mitad de las variantes. La probabilidad de encontrar una variante entre tales límites es un medio, puesto que son favorables la mitad de los eventos. Con $v_1 = \bar{v} - P$, $v_k = \bar{v} + P$ y $p(v_1, v_k) = 1/2$ sustituidos en la Ec. (6-25), queda la expresión integral del error probable

$$\frac{1}{2} = \int_{\bar{v}-P}^{\bar{v}+P} y(v) dv \quad (6-31)$$

Las formas integrales que se han desarrollado se pueden aplicar a una gran variedad de funciones distribución-probabilidad, $y(v)$, siendo la única restricción la que presenta la Ec. (6-27). Estas relaciones se han desarrollado suponiendo que n es bastante grande, y Δv_r bastante pequeño, de forma que se obtenga una función distribución-probabilidad esencialmente continua. De esta manera, se puede expresar en forma integral el límite de la suma. Un punto de vista alternativo consiste en definir las distintas cantidades \bar{v} , A , σ y P en función de funciones distribución-

probabilidad, usando las relaciones integrales que se han hallado hasta ahora. El caso de un n finito se puede considerar entonces como una aproximación del caso teórico continuo.

6-10. La curva Gaussiana de error. Hasta ahora, todo el desarrollo de este capítulo puede aplicarse a varias formas de la función distribución-probabilidad, $y(v)$. Las definiciones y relaciones obtenidas pueden ser aplicadas a datos multimodales, a distribuciones oblicuas (asimétricas respecto a \bar{v}) y a muchas otras.

Hay numerosas funciones, $y(v)$, que han demostrado su utilidad en la práctica. Entre éstas se encuentran las distribuciones t , F , de Poisson y de Bernoulli. Examinaremos con detalle una función distribución-probabilidad conocida con varios nombres, tales como distribución gaussiana, ley gaussiana de error y curva de error normal. Muchas veces da una buena descripción de muchos resultados que se encuentran en la naturaleza y que están afectados de errores extraños. Las medidas repetidas y realizadas con gran cuidado siguen en muchos casos esta particular distribución. La ecuación de esta función distribución-probabilidad es

$$y(v) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(v-\bar{v})^2} \quad h > 0 \quad (6-32)$$

El factor h es llamado *índice de precisión* y se discutirá más adelante. Esta función distribución-probabilidad puede deducirse de consideraciones teóricas por distintos métodos. Es conveniente que el lector consulte uno de los muchos textos en que se puede encontrar este desarrollo.

En la Fig. 6-7 se ve una curva de $y(v)$ en función de v . Se ve que la distribución gaussiana es una curva de forma convenientemente centrada sobre \bar{v} . Sea $x = v - \bar{v}$ la desviación a partir de la media. Este cambio de variable representa un desplazamiento del origen de las abscisas a cero para $v = \bar{v}$, según se ve en la Fig. 6-7. A causa de que este desplazamiento no cambia la forma de la función, normalmente se expresa en función de x como

$$y(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \quad h > 0 \quad (6-33)$$

Debido a su utilidad en aplicaciones de probabilidad, conviene destacar cuatro características de $y(x)$ o $y(v)$.

a) *Valor máximo.* Fácilmente se ve que el valor máximo de $y(x)$ es $h/\sqrt{\pi}$ y se da para $x = 0$ (o $v = \bar{v}$).

b) *Simetria.* Si se sustituye x por $-x$ en $y(x)$, el valor de $y(x)$ permanece el mismo. Por tanto, $y(x)$ es una función par, simétrica con respecto a $x = 0$ (o $v = \bar{v}$).

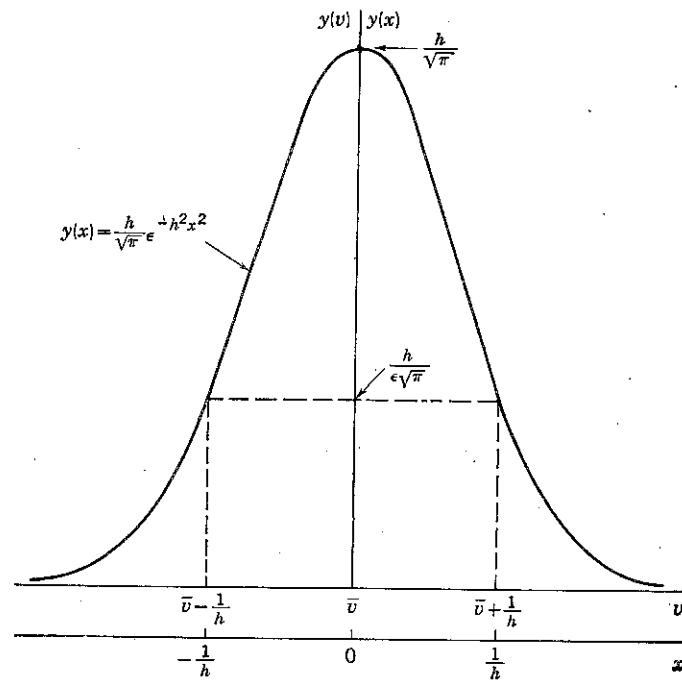


FIG. 6-7. Curva de error gaussiano.

c) *Área comprendida.* El área total comprendida por la curva gaussiana viene dada por

$$\text{Área total} = \int_{-\infty}^{\infty} y(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-h^2x^2} dx$$

Utilizando una tabla de integrales, resulta

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \quad a > 0 \quad (6-34)$$

$$\text{Por tanto,} \quad \text{Área total} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2h} \right) = 1,0$$

El resultado unitario del área comprendida por la curva de error gaussiana no podrá esperarse, ya que la Ec. (6-27) es válida para muy distintas curvas de distribución. Por supuesto, en el desarrollo teórico de la curva de error gaussiana el factor multiplicador $h/\sqrt{\pi}$ se deduce imponiendo que se satisfaga la Ec. (6-27).

d) *Anchura.* Si se eligen valores convenientes de $x = \pm 1/h$, enton-

ces la función $y(x)$ cae, como se ve claramente, a un $1/e$ de su máximo valor, $h/\sqrt{\pi}$, cuando $x = \pm 1/h$. Por tanto, para valores grandes de h , la curva es estrecha y el máximo es alto. Para h pequeño la curva es ancha y el máximo bajo. En cualquier caso, el área permanece constante o igual a 1,0.

Cada una de estas cuatro características tiene una interpretación correspondiente en probabilidad cuando $y(v)$ representa una función distribución-probabilidad de un grupo de variantes. En la Ec. (6-25) veímos que la probabilidad de que una variante corresponda a una gama entre v_1 y v_k viene dada por

$$p(v_1, v_k) = \int_{v_1}^{v_k} y(v) dv \quad (6-35)$$

y representa el área comprendida por la función distribución-probabilidad entre las ordenadas v_1 y v_k . La misma probabilidad puede expresarse en función de las desviaciones haciendo $x_1 = v_1 - \bar{v}$, $x_k = v_k - \bar{v}$ y $dv = dx$.

$$p(v_1, v_k) = p(x_1, x_k) = \int_{x_1}^{x_k} y(x) dx \quad (6-36)$$

a) *Valor máximo.* La probabilidad de que una variante caiga en una gama centrada sobre la media es mayor que la probabilidad de que una variante caiga en cualquier otra gama de igual tamaño.

b) *Simetria.* La probabilidad de que una variante caiga en una gama dada alrededor de una desviación x es idéntica a la probabilidad de que una variante caiga en una gama con desviación $-x$.

c) *Area comprendida por una curva.* La probabilidad de que una variante caiga en la gama $-\infty < x < \infty$ es igual a uno. [Esto no es privativo de la curva gaussiana; véase la Ec. (6-27).]

d) *Anchura.* La probabilidad de que una variante caiga dentro de una gama dada se hace menor a medida que aumenta la desviación de la gama. Para una desviación determinada x , la probabilidad es menor cuanto mayor es el valor de h , y viceversa. Así, pues, se hace razonable el término *índice de precisión*. Un valor grande de h representa una gran precisión de los datos, ya que la probabilidad de ocurrencia de las variantes en una gama dada disminuye rápidamente a medida que aumenta la desviación; las variantes se agolpan en una zona estrecha. Un pequeño valor de h significa una baja precisión de los datos, ya que la probabilidad de encuentro de variantes en una gama dada disminuye gradualmente al aumentar la desviación. Las variantes están distribuidas sobre una zona muy ancha.

Si se evalúan las formas integrales de la función especificada $y(v)$, se pueden encontrar otras propiedades de la curva gaussiana de error. Las integrales definidas, que se dan a continuación, sacadas de tablas de

integrales, resultan muy útiles si se añaden a la que se dio en la Ec. (6-34):

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad (6-37)$$

que, cambiando necesariamente la variable, nos dan relaciones numéricas definidas entre los valores A , σ y h . Las integraciones detalladas se presentan como problemas al final del capítulo.

De la Ec. (6-28) resulta

$$\bar{v} = \int_{-\infty}^{\infty} v y(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} v \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(v-\bar{v})^2} dv \quad (6-38)$$

que confirma que $\bar{v} = \bar{v}$. Esto es, la media de $y(v)$ es \bar{v} .

De la Ec. (6-29)

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} |v - \bar{v}| y(v) dv = 2 \int_0^{\infty} x \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx \quad (6-39)$$

en donde se ve que $A = 1/h\sqrt{\pi}$.

De la Ec. (6-30)

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (v - \bar{v})^2 y(v) dv = 2 \int_0^{\infty} x^2 \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} dx \quad (6-40)$$

que demuestra que $\sigma^2 = 1/2h^2$.

El error probable queda determinado por la forma integral dada en la Ec. (6-31), usando la tabla de probabilidad que aparece en la siguiente sección, apareciendo que el resultado es $P = 0,4769/h$.

Así, pues, se ve que A , σ y P tienen valores específicos en función de h , y están relacionados únicamente entre sí. Para la curva gaussiana de error, la desviación normal es mayor que la desviación media, que, a su vez, es mayor que el error probable. Con frecuencia se utilizan las siguientes relaciones, de las muchas que se pueden formar a partir de los resultados

$$\frac{P}{\sigma} = 0,6744 \quad \frac{\sigma}{A} = 1,253 \quad (6-41)$$

El índice de precisión, h , está relacionado con magnitudes que se pueden calcular directamente de los datos primarios, y puede ser determinado para cualquier grupo de variantes normalmente distribuidas. A veces resulta útil la representación gráfica de la curva de error gaussiano superpuesta al histograma de los datos agrupados, para dar una idea gráfica de la forma en que las variantes se ajustan a la función de probabilidad normal.

6-11. Tablas de probabilidad. La probabilidad de que una variante esté comprendida entre v_1 y v_k está dada por las Ecs. (6-25) y (6-32) en la forma siguiente:

$$p(v_1, v_k) = \int_{v_1}^{v_k} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(v-\bar{v})^2} dv \quad h > 0 \quad (6-42)$$

Supuesto que la curva de error gaussiano es una aproximación razonable de la función probabilidad-distribución de las variantes. A partir de los datos primarios se pueden calcular los parámetros $h = 1/\sqrt{2}\sigma$ y \bar{v} .

El desarrollo de esta integral es muy complicado. Sin embargo, el amplio uso de la curva de error gaussiano ha justificado la tabulación de los resultados. Estas tablas pueden utilizarse para evaluar cualquier integral una vez que se han definido los límites, sin que sea necesario conocer \bar{v} y h . Para mayor facilidad, se cambia la variable v por otra variable distinta y normalizada de forma que resulte útil para cualquier valor particular de h y \bar{v} .

La probabilidad dada en la Ec. (6-42) depende de cuatro parámetros, v_1 , v_k , h y \bar{v} . Se puede reducir este número haciendo las siguientes sustituciones. Sea $x = v - \bar{v}$ y $t = \sqrt{2}h(v - \bar{v}) = \sqrt{2}hx = x/\sigma$. Estas sustituciones trasladan el origen de la curva de forma que su máximo coincide con $x = 0 = t$, e introducen una abscisa que se mide en unidades de σ . Esto es así porque la desviación, x , es igual a σt ; es decir, $x = \sigma t$, $t = 1$; $x = 2\sigma t$, $t = 2$. Con estas sustituciones la probabilidad queda:

$$p(v_1, v_k) = p(t_1, t_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_k} e^{-t^2/2} dt \quad (6-43)$$

en que $t_1 = \sqrt{2}h(v_1 - \bar{v})$ y $t_k = \sqrt{2}h(v_k - \bar{v})$, que también puede expresarse

$$p(t_1, t_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_k} e^{-t^2/2} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_1} e^{-t^2/2} dt \quad (6-44)$$

Cada una de las integrales de la Ec. (6-44) es una función de un solo parámetro, t_k o t_1 . En consecuencia, los valores de la integral

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt \quad (6-45)$$

pueden tabularse, como en la Tabla 6-2, y utilizarse para hallar la probabilidad dentro de unos límites especificados, t_1 o t_k . Los valores de la tabla de la integral representan el área comprendida por la curva de error gaussiano entre $t = 0$ y $t = t_1$, como se ve en la Fig. 6-8. Puesto que la

TABLA 6-2. AREAS DE LA CURVA GAUSSIANA DE ERROR
La tabla de los valores del área comprendida por la curva entre las ordenadas $t = 0$ y t . Ejemplo: Área = 0,1331 para $t = 0,34$.

t	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,7	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3079	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4430	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4485	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4700	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4762	0,4767
2,0	0,4773	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4865	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4980	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4983	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,5000	0,5000	0,5000

curva es simétrica, se puede utilizar la misma tabla para desviaciones negativas; sustituyendo t por $-t$ en la Ec. (6-45), p no varía.

El lector debe tener en cuenta que las tablas de probabilidad de la curva de error gaussiano no son siempre iguales. Algunas tabulan dos veces el área representada por la Ec. (6-45), son, por tanto, la probabilidad de encuentro entre desviaciones simétricas con respecto a la media. En otros casos se utiliza un factor de normalización de abscisa diferente; por ejemplo, se utiliza la variable $u = t/\sqrt{2}$ en lugar de t . En este caso la abscisa se mide en unidades de $1/h$, puesto que $x = u/h$. Otra variación es la de las tablas que dan el área entre $t = -\infty$ y t .

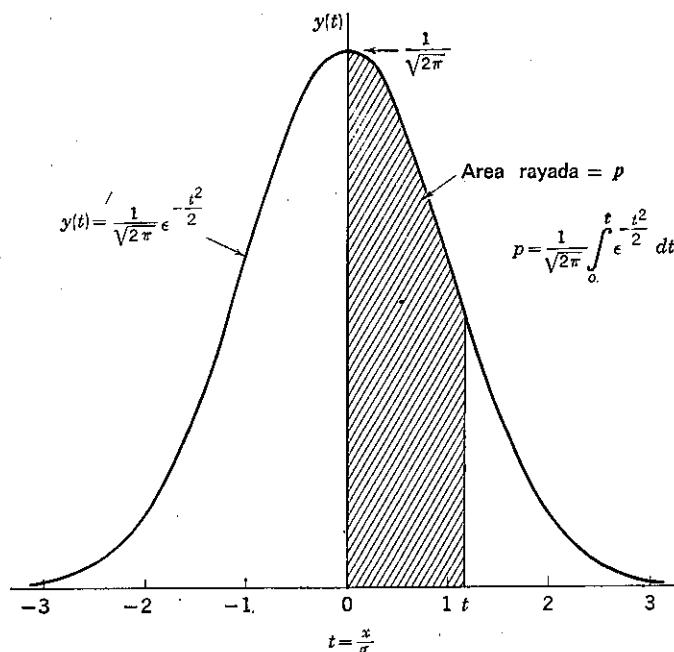


FIG. 6-8. Representación gráfica de la probabilidad.

A continuación se dan varios ejemplos de uso de la Tabla 6-2. Se supone que la función distribución-probabilidad de las variantes es la función de error gaussiano. Supóngase que se quiere encontrar la probabilidad de que una variante caiga entre $\bar{v} - \sigma$ y $\bar{v} + \sigma$. Las desviaciones correspondientes a estos límites son $x_1 = 0$ y $x_k = \sigma$, respectivamente. Por tanto, $t_1 = 0$ y $t_k = x_k/\sigma = 1$. Así, pues, la probabilidad vendrá dada por la integral

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-t^2/2} dt \quad (6-46)$$

La tabla da el resultado $p = 0,3413$, para $t = 1,0$. A causa de la simetría de la curva gaussiana de error, se deduce que existe la misma probabilidad para una variante entre los límites $\bar{v} - \sigma$ y \bar{v} . Por tanto, la probabilidad de que una variante caiga entre los límites $\bar{v} + \sigma$ y $\bar{v} - \sigma$ es la suma de estas dos probabilidades iguales, 0,6826. Puesto que el área total comprendida por la curva es igual a uno, quiere decir que el 68 por 100 de todas las variantes cae entre más o menos una desviación normal a partir de la media. Utilizando la tabla de la misma manera para $x = \pm 3\sigma$ aparece que $p = 0,9974$. Por tanto, solo hay 2,6 probabilidades entre mil de que v_i caiga fuera de tres desviaciones normales a partir de la media.

Otra forma de utilizar la tabla es para determinar la expresión del error probable en función de σ (o h). Este es el caso inverso del anterior, ya que se sabe que el área entre límites simétricos respecto de la media debe ser un medio y hay que hallar el valor de t correspondiente. La mitad de esta área simétrica se encuentra a la derecha del origen, por tanto, el valor de t deseado está dado en la tabla frente a un área de 0,2500. En la tabla se ve que la interpolación se hace necesaria, ya que los dos valores más próximos de t son 0,67 y 0,68 para áreas de 0,2486 y 0,2518, respectivamente. Por interpolación lineal,

$$t = 0,67 + \frac{0,0014}{0,0032} (0,01) = 0,67 + 0,0044 = 0,6744 = \frac{P}{\sigma} \quad (6-47)$$

Como otro ejercicio más, se puede hallar la probabilidad de que una variante caiga entre los límites $\bar{v} - 0,85\sigma$ y $\bar{v} + 1,76\sigma$. Las áreas de interés están representadas en la Fig. 6-9. Para hallar el área A_1 a la izquierda del origen, véase en la curva para $t = 0,85$, $A_1 = 0,3023$. Para hallar el área A_2 a la derecha del origen se ve en la tabla para $t = 1,76$, $A_2 = 0,4608$. La probabilidad de que una variante caiga entre los dos límites dados es la suma de las dos áreas, 0,7631. De estas mismas cifras se deduce que la probabilidad de que una variante caiga entre las desviaciones $x = 0,85\sigma$ y $1,76\sigma$, será la diferencia entre $0,4608 - 0,3023 = 0,0585$. Para variantes entre desviaciones $x = -0,85\sigma$ y $-1,76\sigma$, vale el mismo resultado. También se puede ver que la probabilidad de que una variante caiga en la gama entre $x = 1,76\sigma$ y $x = \infty$, viene dada por el área $A_3 = 0,5000 - A_2 = 0,0392$.

Como ejemplo final, considérese el criterio de Chauvenet para descartar una variante que parece haber caído fuera de límites razonables sin razón aparente. Este criterio consiste en que se debe rechazar la variante si su probabilidad de ocurrencia es menor de $1/2n$, siendo n el número total de variantes. ¿Cuántas desviaciones de la media debe tener la variante para ser rechazada como falsa? Para el caso de $n = 100$, el valor correspondiente de $1/2n = 0,005$. Así, pues, para hallar la desviación que debe ser sobrepasada para rechazar una variante es

necesario hallar el valor de t que representa los límites para los que el área comprendida por la curva es 0,995, o un área mitad de 0,4975. El valor de t hallado en la tabla es $t = 2,81$. Así, pues, si una varian-

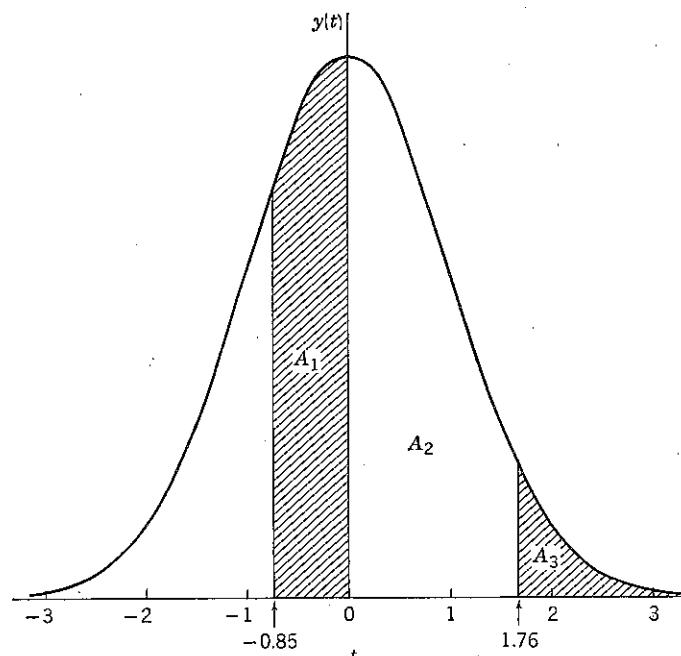


FIG. 6-9. Representación de cálculo de probabilidades.

te dudosa cae alejada de la media más de 2,8 desviaciones normales en una muestra de 100 variantes, debe ser rechazada. Este criterio de rechazar variantes da una desviación mayor cuanto mayor es n . El criterio de Chauvenet, o cualquier otro, para rechazar datos, debe utilizarse con mucha precaución. Siempre existe el peligro de rechazar un dato válido que pudiera ser el único de interés real en el grupo.

PROBLEMAS

6-1 (§ 1). El cálculo de la media, \bar{v} , algunas veces resulta más sencillo eligiendo un número conveniente, K , y calculando la media mediante la fórmula

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - K) + K$$

Demostrar que \bar{v} en esta fórmula es el mismo definido en la Ec. (6-1) para cualquier número arbitrario, K .

6-2 (§ 2). Considerense los nueve primeros enteros, de 1 a 9, como un grupo de variantes. a) Hallar la media. b) Demostrar que la suma de las desviaciones a partir de la media es cero. c) Hallar la suma de los cuadrados de las desviaciones con respecto a la media. d) Demostrar que la suma de los cuadrados de las desviaciones con respecto a 4 es mayor que el valor obtenido en c).

6-3 (§ 4). El cálculo de desviación eficaz se facilita a menudo eligiendo un número adecuado, K , y utilizando la fórmula

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - K)^2 - (K - \bar{v})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Demostrar que esta fórmula es idéntica a la establecida para la desviación eficaz

$$\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

para cualquier valor arbitrario de K .

6-4 (§ 4). Al medir con un potenciómetro una f.e.m. se obtuvieron los cinco siguientes resultados independientes en voltios: 1,485, 1,478, 1,480, 1,482 y 1,483. Suponiendo que todas las lecturas tienen el mismo peso, averiguar cuál será el valor más conveniente para la f.e.m. y el porcentaje de la desviación normal.

6-5 (§ 5). Calcular \bar{v} , A y σ para las variantes dadas en la Tabla 6-1 formando cuatro grupos con puntos medios de gama 101, 103, 105 y 107. Comparar con los resultados de la parte inferior de la Tabla 6-1.

6-6 (§ 5). Una resistencia de valor nominal de 1.000 ohmios fue medida 60 veces en las mismas condiciones. Los datos se agruparon como sigue:

Valor de la resistencia, ohmios	Número de veces que se obtuvo
993 o menos	0
994	1
995	2
996	4
997	7
998	10
999	13
1.000	10
1.001	7
1.002	3
1.003	2
1.004	0
1.005	1
1.006 o más	0

a) Hallar la mediana, el modo y la media. b) Calcular la desviación normal. c) ¿Qué porcentaje de las lecturas está dentro de dos desviaciones normales de la media?

6-7 (§ 9). Una función distribución-probabilidad viene dada por

$$y = \frac{k}{2} e^{-\frac{1}{2}|x|}$$

en que $|x|$ significa la magnitud de x , y $k > 0$ es una constante. a) Demostrar que el área total comprendida por la curva es la unidad. b) Determinar la relación existente entre k y el error probable. c) ¿Es útil esta función de distribución?

6-8 (§ 10). Demostrar que la integral de la Ec. (6-38) resulta valer \bar{v} .

6-9 (§ 10). Calcular la integral de la Ec. (6-39) y demostrar que, para una curva normal $A = 1/\sqrt{\pi} h$.

6-10 (§ 10). Calcular la integral de la Ec. (6-40) y demostrar que, para una curva normal, $\sigma = 1/\sqrt{2} h$.

6-11 (§ 10). Demostrar que los puntos de inflexión de la curva gaussiana de error tienen lugar para $x = \pm\sigma$.

6-12 (§ 11). Para un lote de 1.000 resistencias se especifica un valor $R = 92,2 \pm 0,1$ ohmios. Calcular cuántos de ellos tendrán un valor comprendido en la gama $R = 92,2 \pm 0,15$ ohmios. Supóngase una distribución normal.

6-13 (§ 11). Un galvanómetro subamortiguado de d'Arsonval fue conectado 100 veces distintas bajo las mismas condiciones experimentales cuidadosamente controladas, y se leyó en cada caso la deflexión máxima. Las lecturas tuvieron una distribución normal con respecto a un valor medio de 26,3 mm, con un *error probable* de 2,5 mm. Calcular cuántas de las 100 lecturas habrán tenido un valor superior a 30 milímetros.

6-14 (§ 11). En un taller se fabricaron 25.000 varillas de acero de 0,400 pulgadas de longitud nominal que no debieran exceder de 0,401 pulgadas ni ser más cortas de 0,398 pulgadas, es decir, la especificación de error era

$$0,400^{+0,001}_{-0,002} \text{ pulgadas}$$

Se encontró que 2.000 de las varillas eran demasiado largas para entrar en un calibre de 0,401 pulgadas. Averiguar la cantidad de entre las 23.000 restantes que cumplirían con la especificación, suponiendo una distribución normal.

6-15 (§ 11). En una prueba de aptitud escolar se obtuvieron los siguientes resultados para una selección de 100 alumnos:

Número de estudiantes...	0	5	25	40	24	6	0
Notas recibidas entre ...	0-50	50-70	70-90	90-110	110-130	130-150	150 en adelante

Suponiendo que la selección anterior se ha realizado al azar entre un grupo de 2.000 estudiantes que hicieron la prueba, ¿cuántos recibirían una nota superior a 150?

6-16 (§ 11). Un fabricante de resistencias recibió un pedido para 50.000 resistencias de precisión de 10.000 ohmios de valor nominal, que no debían exceder de 10.025 ohmios ni ser menores de 9.950 ohmios. El fabricante hizo un lote de prueba de 1.000 resistencias y halló que 80 de ellas excedían los 10.025 ohmios. Suponiendo una distribución normal: a) Averiguar el número de las 920 resistencias restantes que cumplirían con la especificación. b) Hallar el número total de resistencias que tendrán que fabricarse para obtener las 50.000 pedidas según la especificación, suponiendo que el lote de la muestra de 1.000 resistencias es representativo (suponer que el lote de 1.000 resistencias se tiró después de la prueba).

6-17 (§ 11). En una fábrica se hicieron 10.000 cojinetes de bolas para un cierto pedido. El cliente había especificado un diámetro del cojinete de $0,1000^{+0,001}_{-0,005}$ pulgadas, siendo las tolerancias dadas los límites de error. Los 10.000 cojinetes fueron comprobados con una criba de «pasa-no pasa», que admitía diámetros de 0,101 pulgadas o menores. Hubo 200 que no pasaron. ¿Cuántos de los restantes 9.800 se ajustarían a lo pedido? (Suponer distribución normal.)

6-18 (§ 11). Utilizando el criterio de Chauvenet para rechazar una variante aislada

que dé una gran desviación, determinar suficientes puntos para dibujar una curva de $|v_m - \bar{v}|/\sigma$ en función de n , para distintos valores de n entre 20 y 200. La magnitud que debe sobrepasar la desviación de la variante para ser descartada es $|v_m - \bar{v}|$.

6-19 (§ 11). Una corriente utilizada para electrolisis fue medida 1.000 veces con el mismo equipo y en idénticas condiciones. Ninguna medida fue superior a 255 amp y ninguna menor de 245 amp. La media aritmética de todas las lecturas fue 250 amp. Se encontró que la siguiente curva de distribución normal se aproximaba mucho al histograma de los datos agrupados:

$$y(I) = \sqrt{\frac{0,2826}{\pi}} e^{-0,2826(I-250)^2}$$

a) Hallar la desviación normal. b) Si se considera que la ecuación teórica anterior es *exactamente igual* a la distribución normal de la corriente, ¿cuántas lecturas se desviaron menos de una desviación normal de la media y cuántas menos que tres desviaciones normales? c) ¿Cuál es la probabilidad de que la 1.001-ava lectura tuviera una desviación menor que dos tercios de la desviación normal con respecto a la media?

6-20 (§ 11). En una región en que se desea construir una nueva central se tomaron los siguientes datos de la demanda de energía. Los datos se tomaron en 10 días laborables elegidos al azar.

Día	Demanda máxima, megavatios	Día	Demanda máxima, megavatios
1	2,0	6	2,9
2	1,2	7	1,8
3	2,1	8	1,6
4	2,3	9	2,0
5	3,1	10	2,6

a) Dibújese el histograma de estos datos. b) Determinar la desviación normal y la media. c) ¿Qué capacidad (en megavatios) debe tener la nueva central si se quiere que pueda suministrar toda la energía necesitada en la región durante el 84 por 100 de los días laborables, y necesitando solamente importar energía del exterior el 16 por 100 restante de los días laborables? Supóngase que la demanda futura puede predecirse a partir de los datos anteriores mediante una curva de distribución normal.

COMBINACIONES DE ERRORES

que se llama un grupo suma. Hay un total de nk variantes distintas en el grupo suma para todas las posibles combinaciones de i y j . Por tanto, la media del grupo suma es

$$\bar{s} = \frac{1}{nk} \sum_{i,j} (v_i + w_j) = \frac{1}{nk} \sum_{i,j} v_i + \frac{1}{nk} \sum_{i,j} w_j \quad (7-2)$$

en que $\sum_{i,j}$ indica la sumatoria a lo largo de toda i y j . Pero

$$\sum_{i,j} v_i = k \sum_{i=1}^n v_i = kn\bar{v}$$

$$\text{De igual modo } \sum_{i,j} w_j = n \sum_{j=1}^k w_j = nk\bar{w}$$

Por tanto, queda probada que la media de la suma de dos grupos de variantes es igual a la suma de las medias de cada grupo.

$$\bar{s} = \bar{v} + \bar{w} \quad (7-3)$$

7-2. Variación de la suma de dos grupos. El resultado anterior se utiliza para demostrar que la variancia del grupo suma, $s_{ij} = v_i + w_j$, es aproximadamente igual a la suma de las variancias de v_i y w_j . La variancia del grupo v_i es

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2$$

y la variancia del grupo w_j es

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k (w_j - \bar{w})^2$$

la variancia del grupo suma tiene un valor muy cercano a

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{nk} \sum_{i,j} (s_{ij} - \bar{s})^2 = \frac{1}{nk} \sum_{i,j} (v_i + w_j - \bar{v} - \bar{w})^2 \quad (7-4)$$

utilizando el resultado de la Sec. 7-1. Recuérdese de la anterior discusión del factor $n - 1$ en la desviación normal, que la desviación en un grupo $v_i - \bar{v}$ tiene un grado de libertad menos que el número de variantes del grupo. Por tanto, en las desviaciones $s_{ij} - \bar{s}$ hay evidentemente menos grados de libertad que nk . En este desarrollo, sin embargo, se supone

CAPITULO 7

COMBINACIONES DE ERRORES

La desviación normal y la media para un grupo de variantes dado puede calcularse como se indicó en el capítulo anterior. El grupo de variantes puede describirse brevemente en la forma $\bar{v} \pm \sigma$. La media se supone que es el mejor valor de la cantidad, y para un grupo normalmente distribuido, habrá un 68 por 100 aproximadamente de variantes comprendidas entre $\pm \sigma$ de la media.

Se hace necesario un estudio posterior del tratamiento estadístico para juzgar sobre la incertidumbre de la media en sí, y del error que se puede esperar en una cantidad, calculada a partir de otras que tienen ya errores definidos. Ambas materias están ligadas muy íntimamente, y ambas requieren el estudio y las combinaciones de grupos de variantes.

7-1. Media de la suma de dos grupos. Como paso preliminar, se establecerá el resultado intuitivo y aceptable de que la suma de dos grupos independientes de variantes tiene una media igual a la suma de las medias de cada grupo. La prueba consiste en escribir la suma y luego dividir por el número total. La notación sumatoria es muy útil, pero el lector podrá preferir el escribir toda la suma detallada, puesto que resulta complicada por el hecho de intervenir dos grupos de variantes.

Sea v_1, v_2, \dots, v_n un grupo de n variantes, y w_1, w_2, \dots, w_k un grupo independiente de k variantes, en que k y n no son necesariamente iguales. La media del primer grupo es

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

y la del segundo

$$\bar{w} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k w_j \quad j = 1, 2, \dots, k$$

La suma de dos variantes, una del grupo v_i y otra del w_j , será

$$s_{ij} = v_i + w_j \quad (7-1)$$

que tanto n como k son mucho mayores que 1, en cuyo caso el error introducido en la Ec. (7-4) es despreciable.

El lector puede encontrar conveniente el que se detallen los cuadros de las desviaciones. Utilizaremos las sumatorias para este caso. Desarróllense

$$\sum_{i,j} (v_i - \bar{v} + w_j - \bar{w})^2 = \sum_{i,j} (v_i - \bar{v})^2 + 2 \sum_{i,j} (v_i - \bar{v})(w_j - \bar{w}) + \sum_{i,j} (w_j - \bar{w})^2$$

pero $\sum_{i,j} (v_i - \bar{v})^2 = k \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2 = k(n-1)\sigma_v^2 \approx kn\sigma_v^2$

de la misma forma $\sum_{i,j} (w_j - \bar{w})^2 = n \sum_{j=1}^k (w_j - \bar{w})^2 = n(k-1)\sigma_w^2 \approx nk\sigma_w^2$

y también $\sum_{i,j} (v_i - \bar{v})(w_j - \bar{w}) = \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v}) \sum_{j=1}^k (w_j - \bar{w}) = 0$

puesto que la suma de las desviaciones aparte de la media vale cero. Por tanto, la variancia de la suma es muy aproximadamente

$$\sigma_s^2 = \sigma_v^2 + \sigma_w^2 \quad (7-5)$$

Así, pues, queda demostrado que la variancia de la suma de dos grupos es aproximadamente igual a la suma de las variancias de cada grupo.

El significado de σ_s es, básicamente, el mismo que el de σ_v o σ_w . Por ejemplo, con una distribución normal, el 68 por 100 aproximadamente de las nk variantes del grupo suma cae dentro del $\pm\sigma_s$ de la media de la suma. Por el contrario, si se elige una variante al azar de v_i , y otra de w_j , su suma tiene el 68 por 100 de probabilidades de estar en la gama $\pm\sigma_s$ de la media de la suma, suponiendo que la distribución sea normal.

7-3. Extensiones e interpretaciones. El resultado de la variancia de la suma de dos grupos es la piedra angular en que se basa todo el estudio siguiente. Por esto, es importante estudiar sus extensiones e interpretar los resultados obtenidos desde el punto de vista de la probabilidad.

Las relaciones para la diferencia entre dos grupos se siguen directamente de los desarrollos realizados anteriormente, y pueden obtenerse con solo sustituir w_j por $-w_j$. En este caso el grupo diferencia es $d_{ij} = v_i - w_j$. También se sigue que la media de la diferencia entre dos grupos es igual a la diferencia de las medias de dichos grupos:

$$\bar{d} = \bar{v} - \bar{w} \quad (7-6)$$

Más aún, examinando los distintos pasos seguidos para obtener la variancia, se ve que la variancia de la diferencia entre dos grupos es aproxi-

madamente igual a la diferencia de las variancias de cada grupo, como antes:

$$\sigma_d^2 = \sigma_v^2 + \sigma_w^2 \quad (7-7)$$

Todos estos resultados se pueden extender con facilidad a más de dos grupos de variantes independientes. Por tanto, para p grupos independientes de desviación normal $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ la variancia del grupo suma formado al sumar un miembro de cada grupo, viene dada aproximadamente por

$$\sigma_s^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_p^2 \quad (7-8)$$

Como interpretación de este resultado, se ve que si se elige al azar una variante de cada uno de los p grupos, la probabilidad de que la suma de ellas caiga dentro del $\pm\sigma_s$ a partir de la media del grupo combinado es del 68 por 100 aproximadamente, supuesto que la distribución es normal. Así, pues, se tiene una medida de la posibilidad de que las variables elegidas al azar permanezcan dentro de una gama dada a partir de la media de todas las posibles combinaciones de variables elegidas.

Aún cabe hacer una extensión más, si se considera que la desviación normal de un grupo de variantes c veces mayor que un grupo original, siendo c una constante, es c veces la desviación normal del grupo original. La demostración es sencilla. La desviación normal del grupo original es

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2}$$

Si cada una de las v_i de este grupo se multiplica por c , entonces la media de este nuevo grupo es $c\bar{v}$, y la desviación normal de este nuevo grupo es

$$\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (cv_i - c\bar{v})^2} = c\sigma_v \quad (7-9)$$

que es c veces la desviación normal del grupo original.

Lo que se utiliza para hacer una extensión de la Ec. (7-8). Considérese p grupos independientes. Fórmese un grupo suma consistente en una variante de cada uno de los p grupos y, más aún, multiplíquese cada una de las variantes por una constante diferente, al definir el grupo suma (c_1 para el primer grupo, c_2 para el segundo, \dots, c_p para el p -ésimo grupo). De las Ecs. (7-8) y (7-9) se deduce que la variancia de este grupo suma es aproximadamente

$$\sigma_s^2 = (c_1\sigma_1)^2 + (c_2\sigma_2)^2 + \dots + (c_p\sigma_p)^2 \quad (7-10)$$

Este resultado final lo utilizaremos para establecer la desviación normal a partir de la media, y también al discutir las combinaciones de errores que aparecen en el cálculo de cantidades.

7-4. Desviación normal con respecto a la media. Es razonable esperar que la media de un grupo de variantes dé un valor más digno de confianza de la cantidad que el que pueda dar una sola variable. Para verlo con más claridad, supóngase que se hacen n determinaciones repetidas de la misma cantidad. El grupo de n variantes tiene una sola media que se puede calcular. Si se obtiene un segundo grupo de determinaciones adicionales de la misma cantidad, este segundo grupo tiene una media que normalmente difiere algo de la del primer grupo. Sin embargo, la diferencia entre las dos medias debe ser menor que la existente entre las variantes de ambos grupos, suponiendo que todas las determinaciones se hicieran con la misma habilidad e interés. Si este razonamiento se extiende a un gran número de grupos, el gran número de medias correspondientes constituirán por sí mismas un grupo. La dispersión de estas medias con respecto a su promedio será menor que la dispersión observada en las variantes individuales de un grupo dado con respecto a su promedio. En otras palabras, la desviación normal de la media será menor que la desviación normal de una variante independiente.

Se puede obtener, por otro procedimiento, una expresión cuantitativa de la desviación normal de la media. Desde un punto de vista estadístico, cada una de las n variantes de un grupo dado puede ser considerada como elegida al azar entre un gran grupo de desviaciones normales σ . (Este gran grupo se llama «populación», en estadística.) De acuerdo con esto, la media de un grupo de n variantes

$$\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i = \frac{v_1}{n} + \frac{v_2}{n} + \cdots + \frac{v_n}{n} \quad (7-11)$$

puede ser considerada como una de las muchas sumas posibles consistentes en n variantes elegidas al azar de n grupos, con una misma desviación normal, σ . Cada una de las variantes elegidas se multiplica por la misma constante $c = 1/n$, antes de formar la suma, \bar{v} . La variancia del grupo suma, del que \bar{v} es un miembro típico, es igual a la suma de las variancias de cada uno de los n grupos, y viene dada por la Ec. (7-10) haciendo cada una de las constantes igual a $1/n$ y cada una de las variancias igual a σ^2 .

$$\sigma_{\bar{v}}^2 = \left(\frac{\sigma}{n}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\sigma}{n}\right)^2 = n \left(\frac{\sigma}{n}\right)^2 \quad (7-12)$$

Pero ésta es la variancia de \bar{v} . Por tanto, la desviación normal de la media es

$$\sigma_{\bar{v}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (7-13)$$

De esta forma, utilizando razonamientos estadísticos, fue posible deducir una fórmula para la desviación de la media, sin necesidad de obtener y analizar un gran grupo de medias distintas, ahorrando trabajo con el razonamiento.

El lector atento verá una dificultad potencial en aplicar la Ec. (7-13) a un grupo de n variantes. La desviación normal que aparece en la Ec. (7-13) es la desviación normal de todo el lote de todas las posibles variantes y no es necesariamente igual a la desviación normal de un grupo de n variantes elegidas al azar entre todo el lote. Sin embargo, si la muestra es grande, $n \gg 1$, es lógico esperar que la desviación normal del grupo sea razonablemente próxima de la del lote completo. Por tanto, al objeto de estimar la desviación normal de la media, se puede aplicar la Ec. (7-13) con la desviación normal del grupo de n variantes.

De la Ec. (7-13) se puede deducir un importante principio práctico, observando que la desviación normal de la media disminuye relativamente despacio al aumentar n . Por ejemplo, un aumento de 100 veces en n dará solamente una mejora 10 veces mayor en la incertidumbre estimada de la media. Por tanto, normalmente hay un número n al que se llega en la práctica y que no merece aumentarse para una mejora relativamente pequeña de la exactitud.

Con un ejemplo se interpretarán mejor estos resultados. Si la desviación normal de un grupo *normal* de 100 variantes es 1,0 y la media es 8,0, entonces el 68 por 100 de las variantes estarán entre 7,0 y 8,0 y la desviación normal de la media es $1,0/\sqrt{100} = 0,1$. La probabilidad de que una variable cualquiera de las 100 esté entre 7,0 y 9,0 es del 68 por 100. Más todavía, también es del 68 por 100 la probabilidad de que la media de un nuevo grupo de 100 variantes de la misma población esté entre 7,9 y 8,1.

También resulta útil algunas veces otra interpretación un poco más complicada. Si un grupo *normal* de variantes tiene una media $\bar{v} \pm \sigma_{\bar{v}}$, entonces hay un 68 por 100 de probabilidades de que otro grupo con una media \bar{w} entre $\bar{v} + \sigma_{\bar{v}}$ y $\bar{v} - \sigma_{\bar{v}}$ provenga de una población con la misma media. Por ejemplo, supóngase que un día un experimento arroja una media de 100 ± 2 ohmios, siendo 2 ohmios la desviación normal con respecto a la media. Una semana más tarde se obtiene una media de 96 ohmios. Dado que la segunda media difiere de la primera en dos desviaciones normales solo hay aproximadamente una probabilidad de 0,05 de que las condiciones del experimento no hayan cambiado durante la semana.

7-5. Errores de resultados calculados. Un problema que se encuentra frecuentemente es el de la estimación del error en una cantidad que se ha calculado mediante una función conocida de varias variables de las que se conoce el propio error. Por ejemplo, el valor de la potencia media, P , disipada en una resistencia, R , se puede calcular midiendo la corriente, I , que circula por la resistencia, R , mediante la conocida fórmula $P = I^2 R$. El problema consiste en hallar el error de P si se conocen los errores de R e I .

En general, cada una de las cantidades medidas que entran en juego para el cálculo de un resultado está sometida a error. Si se especifican estos errores es posible calcular el error del resultado hallado. Esto es así para cualquier relación funcional y para cualquier número de variables independientes. Excepto en casos muy sencillos, es aconsejable hacer una estimación aproximada del error, en el resultado hallado.

Como ejemplo sencillo, supóngase que $I_1 = 100 \pm 2$ amp e $I_2 = 200 \pm 5$ amp y que se quiere determinar el error de la suma $I = I_1 + I_2$. Si los errores dados son límites de error, L , se pueden calcular fácilmente los valores máximo y mínimo de I .

$$\begin{aligned}I_{\max} &= 102 + 205 = 307 \text{ amp} \\I_{\min} &= 98 + 195 = 293 \text{ amp}\end{aligned}$$

En consecuencia, $I = 300 \pm 7$ amp. Los límites de error del 2 por 100 en I_1 y del 2,5 por 100 en I_2 dan como resultado, en este caso, un error límite del 2,3 por 100 de I . Si los errores dados son desviaciones normales σ , entonces se puede utilizar la Ec. (7-5) para calcular la desviación normal de la suma I .

$$\sigma_I = \sqrt{2^2 + 5^2} = 5,4 \text{ amp}$$

Por tanto, $I = 300 \pm 5,4$ amp. Las desviaciones normales del 2 por 100 en I_1 y del 2,5 por 100 en I_2 , dan en este caso una desviación normal del 1,8 por 100 en I . Utilizar σ , en lugar de L , da un resultado más optimista aunque, sin embargo, razonable, ya que la probabilidad de que tanto I_1 como I_2 estén en los puntos extremos del error es muy pequeña.

En otro ejemplo, supóngase que $V = 100 \pm 12$ V y que $I = 10 \pm 2$ amp y se desea hallar el error en la resistencia $R = V/I$. Si los errores dados son límites, L , los valores máximos y mínimos de R se pueden hallar nuevamente con facilidad.

$$R_{\max} = \frac{112}{8} = 14,0 \text{ ohmios}$$

$$R_{\min} = \frac{88}{12} = 7,3 \text{ ohmios}$$

Con lo que $R = 10,0^{+4,0}_{-2,7}$ ohmios. En este caso los límites de error son desiguales.

Si los errores dados son desviaciones normales, el problema se complica, incluso en este sencillo caso, para encontrar la desviación de R , a menos que se utilice un método aproximado. La sensibilidad de R a los cambios de V y de I no es la misma, y más aún, se deben tener en cuenta las distintas posibilidades de varias combinaciones de V e I . En la siguiente lección se da un método aproximado para resolver este problema, y el de otras formas funcionales.

7-6. Desviación normal aproximada de resultados calculados. Se puede desarrollar una fórmula aproximada que permita estimar la desviación normal de un resultado hallado mediante una función dada en que intervienen un número cualquiera de variables independientes cuya desviación normal es conocida.

Sea w una función conocida de dos variables independientes u y v .

$$w = f(u, v) \quad (7-14)$$

Si $u = u_0$ y $v = v_0$ son valores medidos de las variables, entonces el resultado hallado es $w = w_0 = f(u_0, v_0)$. El cambio en w debido a cambios infinitesimales $du = u - u_0$ y $dv = v - v_0$ viene dado por la diferencial total de w .

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)_{u_0, v_0} du + \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)_{u_0, v_0} dv \quad (7-15)$$

En que las derivadas parciales se evalúan para $u = u_0$ y $v = v_0$. du y dv son desviaciones de las constantes u_0 y v_0 . Por tanto, si u_0 y v_0 representan las medias de las cantidades medidas, du y dv son desviaciones con respecto a dichas medias. Aunque la Ec. (7-15) solo es válida para cambios infinitesimales, sin embargo, es aproximada para pequeñas desviaciones. Se supone que la función se puede expresar en esta forma lineal sin necesidad de términos de orden superior de la serie de Taylor.

Las desviaciones du y dv pueden considerarse como dos grupos independientes de variables, cada uno de los cuales está multiplicado por una constante diferente en la Ec. (7-15), y sumados para dar la dw . Por tanto, podemos utilizar la Ec. (7-10) para expresar la variación de dw en función de las variaciones de las desviaciones.

$$\sigma_{dw}^2 \approx \left[\left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)_{u_0, v_0} \sigma_{du} \right]^2 + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)_{u_0, v_0} \sigma_{dv} \right]^2 \quad (7-16)$$

Se puede demostrar que las variaciones de las desviaciones, dw , du y dv , son iguales a las variaciones de w , u y v , respectivamente. Por ejemplo,

$u = u_0 + du$ puede ser considerado como la suma de dos grupos de variantes, el primero de los cuales es constante, y por tanto, tiene una variación cero, y el segundo tiene una variación σ_{du}^2 . De la Ec. (7-5) se deduce que

$$\sigma_u^2 = \sigma_{u_0}^2 + \sigma_{du}^2 = \sigma_{du}^2$$

Igualmente, de $v = v_0 + dv$ se deduce que

$$\sigma_v^2 = \sigma_{v_0}^2 + \sigma_{dv}^2 = \sigma_{dv}^2$$

y de $w = w_0 + dw$

$$\sigma_w^2 = \sigma_{w_0}^2 + \sigma_{dw}^2 = \sigma_{dw}^2$$

Por tanto, la relación existente entre las variaciones de u , v y w es

$$\sigma_w^2 \approx \left[\left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)_{u_0, v_0} \sigma_u \right]^2 + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)_{u_0, v_0} \sigma_v \right]^2 \quad (7-17)$$

Este resultado aproximado puede ser aplicado a más variables. El resultado es aproximado, ya que la Ec. (7-15) solamente es válida para desviaciones infinitesimales y porque la Ec. (7-5) es solo aproximada para pequeño número de variantes.

En el resultado final, Ec. (7-17), las derivadas parciales hacen el papel de factores de peso determinados por la dependencia funcional de w con respecto a u y v y de las constantes u_0 y v_0 . La raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las variaciones en juego, da una desviación normal que tiene en cuenta la improbabilidad de que «tanto» u como v estén muy lejos de sus valores u_0 y v_0 . El lector debe tener en cuenta la necesidad de que u y v sean variables independientes.

Una solución aproximada para el último ejemplo de la Sec. 7-5 se puede obtener en seguida partiendo del estudio realizado. En primer lugar apliquemos la Ec. (7-17) al problema $R = V/I$.

$$\sigma_R^2 \approx \left[\left(\frac{\partial R}{\partial V} \right)_{V_0, I_0} \sigma_V \right]^2 + \left[\left(\frac{\partial R}{\partial I} \right)_{V_0, I_0} \sigma_I \right]^2 \quad (7-18)$$

donde $V_0 = 100$ V, $\sigma_V = 12$ V, $I_0 = 10$ amp, $\sigma_I = 2$ amp, $R_0 = V_0/I_0 = 10$ ohmios. Una vez determinadas y calculadas las derivadas parciales de la Ec. (7-18), se puede hallar fácilmente la desviación normal de R

$$\frac{\partial R}{\partial V} = \frac{1}{I} \quad \left(\frac{\partial R}{\partial V} \right)_{V_0, I_0} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$\frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{V}{I^2} \quad \left(\frac{\partial R}{\partial I} \right)_{V_0, I_0} = -\frac{100}{100} = -1,0$$

y, por tanto, $\sigma_R^2 \approx [0,1(12)]^2 + [-1,0(2)]^2 = 5,44$

De aquí que $R = 10 \pm 2,3$ ohmios. En este caso, una desviación normal del 12 por 100 en V y del 20 por 100 en I se unen, para dar una desviación normal del 23 por 100 en R . Como era de esperar, el resultado es menos pesimista que en el caso del límite de error en el que los límites de error porcentuales resultaban +40 por 100 y -27 por 100.

Nótese en este ejemplo que los factores de peso asignados a las derivadas parciales difieren en magnitud de 10 a 1, mientras que las contribuciones de σ_V y σ_I a σ_R son de magnitud comparable 1,2 y 2,0, respectivamente. Esto prueba que la Ec. (7-17) sirve para indicar cuál de las variables de una función contribuye más al error del resultado y, por tanto, sirve de guía para mejorar la exactitud del resultado final. En este ejemplo, para reducir σ_R es más importante reducir el error de I que el de V .

7-7. Límite aproximado de error de resultados obtenidos. En muchos casos se pueden determinar los límites de error de una cantidad calculada, estudiando la función conocida e introduciendo en ella los valores máximos y mínimos de las variables para obtener los dos resultados extremos. En los dos ejemplos anteriores fue esto lo que se hizo. Sin embargo, con funciones más complicadas no siempre resulta inmediato el camino que se debe seguir y pueden salir al paso cálculos extensos. La solución diferencial que se utilizó para la desviación normal en la Sec. 7-6 también se puede aplicar para el límite de error. Un resultado de la aproximación diferencial consiste en que los dos límites de error siempre resultan iguales en magnitud.

Las desviaciones infinitesimales du y dv de la Ec. (7-15) pueden ser consideradas como límites de error de las variables u y v reconocidas como u_0 y v_0 , respectivamente. El utilizar la Ec. (7-15) en esta forma resulta de nuevo aproximado, puesto que los límites de error pueden ser pequeños, pero no infinitesimales. Estudiando la Ec. (7-15) se puede ver que dw tiene su máximo cuando ambos términos son máximos en magnitud y numéricamente positivos, y su mínimo cuando ambos términos son máximos en magnitud y numéricamente negativos. Por tanto, el límite de error de w es

$$L_w \approx \left| \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)_{u_0, v_0} L_u \right| + \left| \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)_{u_0, v_0} L_v \right| \quad (7-19)$$

donde las barras indican valor absoluto. Este resultado puede extenderse fácilmente a más variables. La Ec. (7-19) es similar a la (7-17) por tener factores de peso de las derivadas parciales para cada límite de error, pero, sin embargo, no contiene la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la Ec. (7-17). Por tanto, es más pesimista.

Es útil ver el resultado de aplicar esta fórmula aproximada en el ejemplo de $R = V/I$ que se calculó antes con detalle y exactitud. Aplicando a este ejemplo la Ec. (7-19)

$$L_R \approx \left| \left(\frac{\partial R}{\partial V} \right)_{V_0, I_0} L_V \right| + \left| \left(\frac{\partial R}{\partial I} \right)_{V_0, I_0} L_I \right|$$

y sustituyendo los valores numéricos del ejemplo, con $L_V = 12 \text{ V}$ y $L_I = 2 \text{ amp}$, resulta

$$L_R \approx |0,1(12)| + |-1,0(2)| = 3,2$$

Así, pues, $R = 10,0 \pm 3,2 \text{ ohmios}$, lo que resulta más pesimista que en el caso de la desviación normal en que era $\pm 2,3 \text{ ohmios}$. Sin embargo, este resultado está aproximadamente de acuerdo con el obtenido exactamente y es casi igual al promedio de las magnitudes de los límites exactos de error.

7-8. Formas funcionales especiales. Para evitar una duplicación del trabajo merece la pena estudiar de una vez para siempre las formas funcionales que aparecen frecuentemente. El estudio de algunos casos concretos también servirá para entender más a fondo la utilización de la Ec. (7-17) que puede aplicarse a cualquier función representable por una aproximación lineal en un pequeño intervalo.

a) *Suma y diferencia.* Sea $w = u \pm v$. Entonces $\partial w / \partial u = 1$ y $\partial w / \partial v = \pm 1$. Sustituyendo en la Ec. (7-17)

$$\sigma_w^2 \approx \sqrt{\sigma_u^2 + \sigma_v^2} \quad (7-20)$$

La desviación normal de la suma o diferencia de dos variables es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las desviaciones normales de las variables. Este resultado puede extenderse fácilmente a más variables.

b) *Producto simple.* Sea $w = uv$. Entonces $\partial w / \partial u = v$ y $\partial w / \partial v = u$. Sustituyendo en la Ec. (7-17)

$$\sigma_w^2 \approx v^2 \sigma_u^2 + u^2 \sigma_v^2 = u^2 v^2 \left(\frac{\sigma_u^2}{u^2} + \frac{\sigma_v^2}{v^2} \right)$$

Y de aquí $\frac{\sigma_w}{w} \approx \sqrt{\left(\frac{\sigma_u}{u} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_v}{v} \right)^2}$ (7-21)

La desviación fraccional normal del producto de dos variables es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las desviaciones fraccionales normales de las variables. Igualmente este resultado se puede extender a más variables.

c) *Cociente simple.* Sea $w = u/v$. Entonces

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{1}{v} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$$

Sustituyendo en la Ec. (7-17)

$$\sigma_w^2 \approx \frac{1}{v^2} \sigma_u^2 + \frac{u^2}{v^4} \sigma_v^2 = \frac{u^2}{v^2} \left(\frac{\sigma_u^2}{u^2} + \frac{\sigma_v^2}{v^2} \right)$$

$$\text{Y por tanto, } \frac{\sigma_w}{w} \approx \sqrt{\left(\frac{\sigma_u}{u} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_v}{v} \right)^2} \quad (7-22)$$

Este resultado es idéntico al caso b).

d) *Potencia simple.* Sea $w = u^a$, siendo a una constante. Entonces

$$\frac{\partial w}{\partial u} = au^{a-1} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial v} = 0$$

Sustituyendo en la Ec. (7-17)

$$\sigma_w^2 \approx a^2 u^{2a-2} \sigma_u^2 = u^{2a} a^2 \frac{\sigma_u^2}{u^2}$$

$$\text{Y por tanto, } \frac{\sigma_w}{w} \approx a \left(\frac{\sigma_u}{u} \right) \quad (7-23)$$

La desviación fraccional normal de una cantidad elevada a una potencia es a veces la desviación fraccional de la cantidad base.

Los tres resultados anteriores pueden generalizarse en una forma única

$$w = \frac{u^a v^b}{x^c} \quad (7-24)$$

en la que a , b y c son constantes. La Ec. (7-24) puede diferenciarse directamente, pero es más sencillo pasando a logaritmos

$$\ln w = alnu + blnv - clnx$$

y diferenciando

$$\frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial u} = a \quad \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial v} = b \quad \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial x} = -c$$

Sustituyendo en la Ec. (7-17)

$$\sigma_w^2 \approx \left(\frac{wa}{u}\right)^2 \sigma_u^2 + \left(\frac{wb}{v}\right)^2 \sigma_v^2 + \left(-\frac{wc}{x}\right)^2 \sigma_x^2$$

$$\text{Y por tanto, } \frac{\sigma_w}{w} \approx \sqrt{a^2 \left(\frac{\sigma_u}{u}\right)^2 + b^2 \left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2 + c^2 \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2} \quad (7-25)$$

Para el producto sencillo, $c = 0$, $a = 1$, $b = 1$; para el cociente sencillo, $b = 0$, $a = 1$, $c = 1$; para la potencia sencilla, $c = 0$, $b = 0$.

De la misma forma pueden desarrollarse casos especiales de la fórmula de límite de error.

7-9. Ejemplos de combinaciones de desviaciones normales. A continuación se dan varios ejemplos de combinación de errores para desviaciones normales dadas, con el fin de aclarar mejor la forma en que se han de utilizar los resultados obtenidos.

a) *Resistencias en serie.* Se conectan en serie dos resistencias.

$$R_1 = 200 \pm 3 \text{ ohmios} \quad \text{y} \quad R_2 = 300 \pm 6 \text{ ohmios}$$

en las que los errores son las desviaciones normales de los valores medios dados. Vamos a hallar la desviación normal (aproximada) de la resistencia equivalente, $R_s = R_1 + R_2$. Este es el caso a), especial, de la Sec. 7-8. Por tanto, aplicando la Ec. (7-20)

$$\sigma_{R_s} \approx \sqrt{3^2 + 6^2} = 6,7 \text{ ohmios}$$

Por lo que $R_s = 500 \pm 6,7$ ohmios. Una desviación normal del 1,5 por 100 en R_1 y del 2 por 100 en R_2 da una desviación normal del 1,3 por 100 en R_s .

b) *Resistencias en paralelo.* Si se conectan las dos resistencias de a) en paralelo vamos a hallar la desviación normal (aproximada) de la resistencia equivalente.

La resistencia equivalente es

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Este no es el caso especial c) de la Sec. 7-8, ya que el numerador y el denominador de R_p no son independientes. Pasemos a la Ec. (7-17) y en primer lugar halemos las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_p}{\partial R_1} &= \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2 & \left(\frac{\partial R_p}{\partial R_1} \right)_{\text{promedio}} &= \left(\frac{300}{500} \right)^2 = 0,36 \\ \frac{\partial R_p}{\partial R_2} &= \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)^2 & \left(\frac{\partial R_p}{\partial R_2} \right)_{\text{promedio}} &= \left(\frac{200}{500} \right)^2 = 0,16 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la Ec. (7-17)

$$\sigma_{R_p}^2 \approx [0,36(3)]^2 + [0,16(6)]^2 = 2,09$$

Por tanto, $R_p = 120 \pm 1,4$ ohmios. Una desviación normal del 1,5 por 100 en R_1 y 2 por 100 en R_2 da una desviación normal del 1,2 por 100 en R_p . Es curioso observar que mientras que R_1 es la resistencia más exacta, su contribución al error de R_p es mayor que la de R_2 . Esto se debe a que siendo R_1 menor que R_2 tiene una influencia mayor sobre R_p .

Como ejercicio, el lector puede realizar de nuevo este ejemplo para las conductancias $G_1 = 1/R_1$ y $G_2 = 1/R_2$.

c) *Carga de un condensador.* Un condensador $C = 1,0 \pm 0,1 \mu\text{F}$ es cargado a $V = 20 \pm 1 \text{ V}$, siendo los errores las desviaciones normales. Hallar la carga del condensador y su desviación normal (aproximada).

Puesto que $Q = CV$, éste es el caso especial b) de la Sec. 7-8 en el que se utilizan las desviaciones unitarias. La desviación normal de C es de un 10 por 100 y la de V de un 5 por 100. En consecuencia, la desviación normal unitaria de Q viene dada por la Ec. (7-21).

$$\frac{\sigma_Q}{Q} \approx \sqrt{(0,1)^2 + (0,05)^2} = 0,11$$

o 11 por 100. Puesto que $Q = 20 \times 10^{-6}$ culombios, resulta que $\sigma_Q = 2,2 \times 10^{-6}$ culombios.

d) *Influencia de la temperatura sobre la resistencia.* La resistencia R de un hilo de cobre viene dada por

$$R = r_0[1 + \alpha(t - 20)]$$

donde $r_0 = 4$ ohmios $\pm 0,2$ por 100 es la resistencia del hilo a 20°C , $\alpha = 0,004$ por grado centígrado ± 1 por 100 es el coeficiente de temperatura del cobre y $t = 25 \pm 1^\circ \text{C}$ es la temperatura real del hilo. Los errores citados se refieren a desviaciones normales. Encontrar la resistencia R y su desviación normal (aproximada).

La ecuación puede escribirse como la suma de los tres términos

$$R = r_0 + r_0\alpha t - 20r_0\alpha$$

Sin embargo, no se puede aplicar aquí el caso especial a) de la Sec. 7-8, ya que los tres términos no son independientes. Tendremos que utilizar la Ec. (7-17) y hallar primero las derivadas parciales.

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial r_0} &= 1 + \alpha(t - 20) & \left(\frac{\partial R}{\partial r_0}\right)_{\text{promedio}} &= 1 + 0,004(25 - 20) = 1,02 \\ \frac{\partial R}{\partial \alpha} &= r_0(t - 20) & \left(\frac{\partial R}{\partial \alpha}\right)_{\text{promedio}} &= 4(25 - 20) = 20 \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= r_0\alpha & \left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_{\text{promedio}} &= 4(0,004) = 0,016\end{aligned}$$

en que $\sigma_{r_0} = 8 \times 10^{-3}$ ohmios (0,2 por 100), $\sigma_\alpha = 4 \times 10^{-5}$ por grado

$$\sigma_R^2 \approx (1,02\sigma_{r_0})^2 + (20\sigma_\alpha)^2 + (0,016\sigma_t)^2$$

en que $\sigma_{r_0} = 8 \times 10^{-3}$ ohmios (0,2 por 100), $\sigma_\alpha = 4 \times 10^{-5}$ por grado centígrado (1 por 100) y $\sigma_t = 1^\circ\text{C}$. Con estos valores

$$\sigma_R^2 \approx (67 + 64 + 3) \times 10^{-8} = 134 \times 10^{-8}$$

El valor medio de R es

$$R = 4[1 + 0,004(25 - 20)] = 4,08 \text{ ohmios}$$

Por tanto, $R = 4,08 \pm 0,3$ por 100.

7-10. Límite de error en el ajuste de un control. Como ejemplo final sobre la aplicación del cálculo aproximado del límite de error, se expone a continuación un caso que necesita de análisis de circuito. En

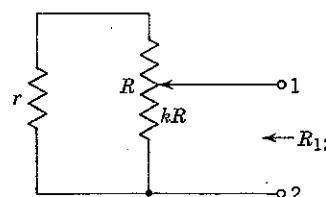


FIG. 7-1. Control shunt.

el circuito de la Fig. 7-1, a una resistencia de control, R , se le pone en paralelo una resistencia fija, r , para producir distintos tipos de variación de resistencia entre los puntos 1 y 2. La fracción de la resistencia de control que aparece directamente entre los puntos 1 y 2 es designada por k , siendo $0 \leq k \leq 1,0$. El problema es encontrar el límite de error de la resistencia de entrada, R_{12} , a partir de los límites de error R , r , y el ajuste del contacto móvil, k . Los resultados dependen en buena parte de la relación de magnitudes de r y R . Teniendo en cuenta que ésta es una disposición muy útil que puede afinar realmente el control, haremos un estudio general antes de resolver un ejemplo numérico.

La resistencia R_{12} viene dada por la resultante de dos resistencias en paralelo, una de las cuales es kR , en el circuito de la Fig. 7-1, y la otra es $r + (1 - k)R$. Por tanto,

$$R_{12} = \frac{kR[r + (1 - k)R]}{r + R}$$

Haciendo $\rho = r/R$ tenemos

$$R_{12} = \frac{kR[\rho R + (1 - k)R]}{\rho R + R} = \frac{Rk(1 + \rho - k)}{1 + \rho} \quad (7-26)$$

En la Fig. 7-2 se representa gráficamente la relación entre las cantidades adimensionales R_{12}/R y k para distintos valores de ρ . Es evidente que se pueden dar variadas características de la resistencia. La pendiente de las curvas es muy interesante y viene dada por

$$\frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{R_{12}}{R} \right) = \frac{\partial}{\partial k} \left[\frac{k(1 + \rho - k)}{1 + \rho} \right] = 1 - \frac{2k}{1 + \rho} \quad (7-27)$$

Así, pues, para $\rho = \infty$ (r desconectada) la pendiente es constante e igual a 1. Para $\rho = 0$ (r corto circuito) la pendiente es $1 - 2k$ y, por tanto,

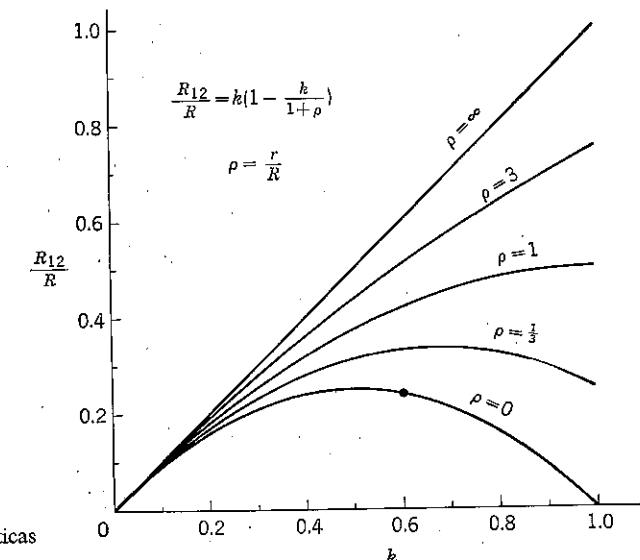


FIG. 7-2. Características del control shunt.

es cero para $k = 1/2$, que es un punto máximo de R_{12}/R . El valor máximo de $R_{12}/R = 1/4$ puede calcularse a partir de la Ec. (7-26) con $\rho = 0$

y $k = \frac{1}{2}$. Para $\rho = 1$ ($r = R$) la pendiente es $1 - k$ y, por tanto, cero para $k = 1$. Para $\rho > 1$ la pendiente siempre es positiva, ya que k no puede ser mayor de 1. La Fig. 7-2 sugiere la forma complicada en que las desviaciones de ρ y de k pueden afectar a R_{12}/R , dependiendo de los valores reales de ρ y k .

Como un ejemplo específico, supóngase $R = 10.000 \pm 100$ ohmios, $r = 0$ y $k = 0,6 \pm 0,03$, donde las desviaciones dadas son límites de error (éste es el punto marcado en la curva de la Fig. 7-2 para $\rho = 0$). Se pueden seguir dos procedimientos para calcular el límite de error en R_{12} , que, para $r = 0$, viene dado por

$$R_{12} = Rk(1 - k) = R(k - k^2) \quad (7-28)$$

Estudiando cuidadosamente la Ec. (7-28) se puede hacer un cálculo exacto para determinar las combinaciones más desfavorables de R y k . La pendiente de la curva $\rho = 0$ en la Fig. 7-2 para $k = 0,6$ es negativa. Por tanto, las combinaciones más desfavorables de R y k se dan cuando R es grande y k pequeña y viceversa. Por tanto,

$$\begin{aligned} R_{12\max} &= 10.100(0,57)(1 - 0,57) = 2.475 \text{ ohmios} \\ R_{12\min} &= 9.900(0,63)(1 - 0,63) = 2.307 \text{ ohmios} \end{aligned}$$

Así, pues, $R_{12} = 2.400 \pm 75$ ohmios y los límites de error son desiguales. Aplicando la Ec. (7-19) se puede hacer un cálculo aproximado evitando el estudio anterior, pero sacrificando algo de exactitud. Las derivadas parciales necesarias son

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{12}}{\partial R} &= k(1 - k) & \left(\frac{\partial R_{12}}{\partial R} \right)_{\text{promedio}} &= 0,6(1 - 0,6) = 0,24 \\ \frac{\partial R_{12}}{\partial k} &= R(1 - 2k) & \left(\frac{\partial R_{12}}{\partial k} \right)_{\text{promedio}} &= 10^4(1 - 1,2) = -0,2 \times 10^4 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la Ec. (7-19) se obtiene

$$L_{R_{12}} \approx |0,24(100)| + |-0,2 \times 10^4(0,03)| = 84$$

Por tanto, $R_{12} = 2.400 \pm 84$ ohmios. Los límites son bastante parecidos a los del cálculo anterior e iguales al valor promedio de los dos límites de error desiguales.

PROBLEMAS

7-1 (§ 2). Demostrar que el resultado de la Ec. (7-5) se mantiene válido para los cuadrados de los errores probables o para los cuadrados de las desviaciones normales.

7-2 (§ 4). Se divide al azar en dos partes iguales un gran grupo de variantes normalmente distribuidas, de desviación normal σ . a) ¿Cuál es la desviación normal de cada uno de los dos grupos menores? b) ¿Cuál es la relación entre la desviación normal de la media de un grupo mitad y la desviación normal de la media del grupo original? c) ¿Cuál es la desviación normal de un grupo suma que tenga como un miembro típico la suma de una variante cualquiera elegida entre la mitad de las variantes y otra también cogida al azar de entre la otra mitad?

7-3 (§ 4). El valor de una resistencia patrón, determinado mediante métodos de alta precisión, resultó ser $1,0000 \pm 0,03$ por 100 (desviación típica de la media). Seis meses más tarde, la resistencia fue medida de nuevo siguiendo métodos idénticos y se obtuvo el resultado medio de 0,9998. ¿Cuál es la probabilidad de que la resistencia patrón no haya variado?

7-4 (§ 4). Una caja contiene 49 «pequeños fusibles» nominalmente idénticos. Se mide por separado, con la misma técnica y cuidado, la resistencia de cada fusible. El análisis de los datos de una distribución normal con un valor medio para la resistencia igual a 200 ohmios y una desviación normal de 7 ohmios. Si la caja citada es una entre un grupo grande de cajas, cada una con 49 fusibles de la misma resistencia nominal y elegida al azar del mismo lote de producción, ¿cuál es la probabilidad de encontrar entre este grupo una caja cuyo valor medio de resistencia sea menor de 197 ohmios?

7-5 (§ 6). Se conectan en paralelo dos resistencias $R_1 = 400 \pm 40$ y $R_2 = 600 \pm 80$ ohmios. Los errores dados son desviaciones normales. ¿Cuál es la resistencia resultante y su desviación normal?

7-6 (§ 6). La caída de voltaje en una resistencia de desviación normal 0,1 por 100 debe mantenerse dentro de $\pm 0,2$ por 100 de su valor medio. ¿Cuál debe ser la exactitud del voltmetro que se utilice en serie para medir la corriente?

7-7 (§ 8). Se determinaron la caída de voltaje V y la corriente I en una resistencia con la misma exactitud porcentual. El error en la resistencia calculada por $R = V/I$ es del 1 por 100. ¿Con qué exactitud se habían calculado V e I ?

7-8 (§ 8). Hallar una expresión para σ_w en función de σ_u si $w = kln\mu$, siendo k una constante.

7-9 (§ 8). Hallar una expresión para L_w en términos de L_u , L_v y L_x , para la función de la Ec. (7-24), y demostrar que para los tres casos especiales de la Sec. 7-8 se puede reducir a los mismos resultados allí obtenidos.

7-10 (§ 9). La corriente I en una resistencia de 50 ± 5 ohmios (desviación normal) se mide y da $I = 10$ amp ± 5 por 100 de desviación normal. a) Calcular la potencia disipada en la resistencia y su desviación normal. b) Estudiar si el error en la corriente influye sobre el de la potencia más que el de la resistencia o al contrario.

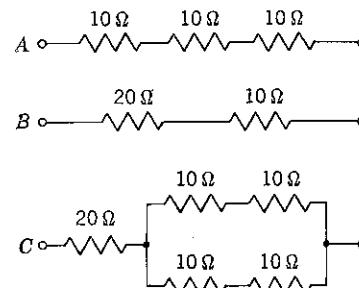


FIG. 7-3. Conexiones para una resistencia de 30 ohmios.

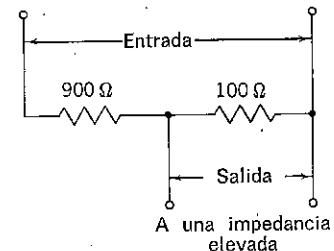


FIG. 7-4. Divisor de tensión.

7-11 (§ 9). Se dispone de cinco resistencias, una de 20 ohmios y cuatro de 10 ohmios cada una. La desviación normal de la de 20 ohmios es del 5 por 100 y la de cada una de las de 10 ohmios del 10 por 100. En la Fig. 7-3 se ven tres conexiones posibles de estas resistencias. ¿Qué conexión es la mejor para obtener una resultante de 30 ohmios con el mínimo error? ¿Cuál es la desviación normal de esta conexión más favorable?

7-12 (§ 9). El divisor de voltaje de la Fig. 7-4 se utiliza para dar una salida igual a un décimo de la entrada. La desviación normal de la relación entre salida y entrada debe ser 0,1 por 100 o menor. Se dispone de una resistencia de precisión de 100 ohmios con 0,02 por 100 de desviación normal. ¿Cuál es la máxima desviación normal permisible en la resistencia de 900 ohmios?

7-13 (§ 9). La ley de deflexión de un galvanómetro de d'Arsonval de campo uniforme es $I = K\theta/\cos \theta$. Si se sabe que el ángulo θ de deflexión es de $15^\circ \pm 0,1^\circ$ (desviación normal), ¿cuál es la desviación normal en tanto por ciento de la corriente I ?

7-14 (§ 9). Se realizó un ensayo para determinar exactamente el periodo T , y la relación entre el amortiguamiento total y el momento de inercia, D/J , en un galvanómetro de d'Arsonval subamortiguado con campo radial uniforme e inductancia despreciable en la bobina. Empezando en reposo con deflexión cero, d , se cerró el interruptor de la Fig. 4-1 en el momento $t = 0$. Se midieron la deflexión máxima, d_m , y el tiempo, t_m , en que se produjo. Cuando el galvanómetro dejó de oscilar, se midió la deflexión de estado estacionario, d_s . Todo este proceso se repitió 20 veces con los resultados de la tabla siguiente. En cada caso se observó una deflexión final $d_s = 20,0$ mm.

Ensayo n. ^o	d_m mm	t_m seg	Ensayo n. ^o	d_m mm	t_m seg
1	27,6	2,8	11	30,1	3,1
2	23,7	3,1	12	26,4	2,8
3	26,0	2,9	13	27,8	2,9
4	28,3	3,0	14	25,2	3,2
5	27,1	2,9	15	27,4	3,0
6	29,2	3,0	16	24,6	3,1
7	24,8	3,0	17	28,7	3,0
8	28,0	3,1	18	29,0	2,8
9	27,2	2,9	19	26,2	3,2
10	25,9	3,2	20	26,8	3,0

Calcular la desviación normal y la media de T y de D/J .

7-15 (§ 10). Calcular los límites de error exactos y aproximados de la resistencia de entrada R_{12} de la Fig. 7-1, para $R = 10.000 \pm 100$ ohmios (límite de error), $k = 0,3 \pm 0,03$ (límite de error) y $r = 0$.

7-16 (§ 10). Repetir el Prob. 7-15 siendo $k = 0,5 \pm 0,03$ (límite de error).

CAPITULO 8

MEDIDAS POR METODOS DE DEFLEXION

Se han ideado un gran número de distintos métodos de medida que han resultado útiles. En ellos se utiliza una amplia gama de técnicas y enfoques, usando todos los tipos de aparatos. En un caso determinado, para elegir entre todo este grupo deben sopesarse todos los factores que intervienen, exactitud pedida, costo, tiempo, conveniencia y disponibilidad de instrumentos.

Para constituir una base para un estudio completo se describen dos tipos de medidas, directas e indirectas. Aun cuando la distinción entre estos dos tipos no es fundamental permite irse adentrando en un problema tan amplio. Los métodos de medida se clasifican en dos grandes categorías, métodos de deflexión y métodos de cero. Aquí trataremos de subdividirlos a su vez en otros tipos básicos. Se describen varios métodos de deflexión de uso extendido, así como unos cuantos métodos especiales. Principalmente se presentan ejemplos en los campos eléctricos de corriente continua y de baja frecuencia. Sin embargo, el lector debe considerar que en las medidas eléctricas de alta frecuencia, y en otros campos experimentales, se siguen métodos y conceptos similares.

Este capítulo da una perspectiva de algunas de las posibilidades que existen para realizar las medidas del tipo deflexión. Esperamos que su variedad sea suficiente para estimular la imaginación e inventiva del lector. Los ejemplos representan el producto colectivo de estudios individuales realizados por la curiosidad y el deseo de conseguir algo mejor. Queda mucho campo por descubrir todavía. Trataremos de hacer un estudio y análisis profundo, al mismo tiempo que una idea general del amplio problema, ya que ambas cosas son necesarias para captar bien los principios de esta materia.

8-1. Medidas directas e indirectas. Las medidas directas son aquellas en que el resultado deseado es obtenido inmediatamente en la forma de datos primarios. Por ejemplo, si se trata de determinar la corriente de un circuito, puede medirse directamente con un amperímetro. Las medidas indirectas son aquellas en que el resultado buscado es obtenido por cálculo a partir de los datos primarios, como una operación separada, utilizando una fórmula o una ley física que relacione las cantidades me-

didas con la cantidad que se desea obtener. Por ejemplo, si se quiere determinar la caída de tensión en una resistencia, se puede medir la resistencia y la corriente que la atraviesa, calculándola mediante el producto de ambas cantidades medidas.

Normalmente, las medidas directas son más convenientes y rápidas que las indirectas. En consecuencia deben ser las elegidas siempre que cumplan con todos los requisitos exigidos por el problema de medida. Como aclaración, un voltímetro que da medidas directas de potencia es preferible, desde el punto de vista de conveniencia, al cálculo de la potencia a base de medir el voltaje y la corriente. Sin embargo, puede ocurrir que la exactitud posible con la medida directa sea menor que la que se puede conseguir con la indirecta. Esto puede parecer extraño, ya que los distintos pasos necesarios para la medida indirecta van acumulando errores, pero puede quedar aclarado estudiando un poco más a fondo las medidas directas.

La distinción entre medidas directas e indirectas es de gran importancia práctica, pero realmente hay poca diferencia fundamental entre ambas. En muchos casos la medida directa se hace con un instrumento que responde a las mismas cantidades que habrían de ser medidas en el caso indirecto, pero que hace el cálculo automáticamente. Considérese un voltímetro cuya escala ya tiene en cuenta el cálculo del producto de la corriente y la resistencia; este voltímetro da una lectura de la caída de tensión, pero es un amperímetro en serie con una resistencia conocida. De la misma manera se puede hacer un voltímetro cuya aguja presenta una deflexión que depende del producto de las corrientes que atraviesan dos bobinas separadas. Si la corriente de una bobina es la de la carga, y la de la otra bobina es proporcional a la tensión de la carga (se puede utilizar una resistencia conocida en serie), entonces se puede calibrar la escala en vatios, pero —en esencia— este instrumento de lectura directa no mide directamente potencia. En los métodos directos de este tipo la seguridad depende del instrumento al realizar el cálculo que habría de hacerse por separado de haber utilizado el método indirecto. Teniendo en cuenta que el «cálculo» del instrumento, siempre contiene algún error, se verá claro por qué las medidas indirectas —que no implican error en el cálculo— pueden ser susceptibles de mayor exactitud. Más aún, algunos instrumentos de lectura directa se han diseñado por conveniencia principalmente, y no pretenden tener una gran exactitud.

Un interesante ejercicio mental es el de pasar revista a varias medidas directas y descubrir que cada una de ellas supone un cálculo automático en el instrumento, que, de otra forma, habría tenido que ser realizado separadamente, de utilizar medidas indirectas. Este principio se puede aplicar en medidas tan directas como la de longitud (con una regla), o intervalo de tiempo (con un cronómetro), aun cuando la simplicidad del cálculo puede ser causa de que se pase por alto en estos casos.

8-2. Métodos de medida. Se pueden realizar medidas directas e indirectas utilizando dos métodos generales:

1. **Métodos de deflexión**, en que la deflexión de un instrumento da la base para determinar la cantidad.

2. **Métodos de cero**, en que la indicación nula o cero de un instrumento lleva a determinar la cantidad a partir de otras condiciones conocidas. Los métodos de deflexión que dan una lectura directa de la cantidad descansan en el calibrado del instrumento. Sin embargo, algunos métodos de deflexión no hacen uso del calibrado del instrumento, sino que simplemente se sirven de él para conseguir la misma lectura bajo dos grupos de condiciones distintas. La distinción principal entre los métodos de deflexión y de cero es que en los primeros, en el instrumento de hecho se produce una deflexión, mientras que en los segundos la indicación es tan próxima a cero como sea posible.

Normalmente los métodos de deflexión son instintivamente aceptables con una somera explicación, mientras que algunos métodos de cero tienden a ser más oscuros y complicados. Los métodos de cero a menudo son capaces de dar mayor precisión que los de deflexión, y en trabajos de gran exactitud son normalmente preferidos. Los métodos de deflexión están expuestos a errores instrumentales, especialmente cuando se depende del calibrado de los aparatos. Los métodos de cero algunas veces necesitan de múltiples manipulaciones para obtener una indicación de cero, mien-

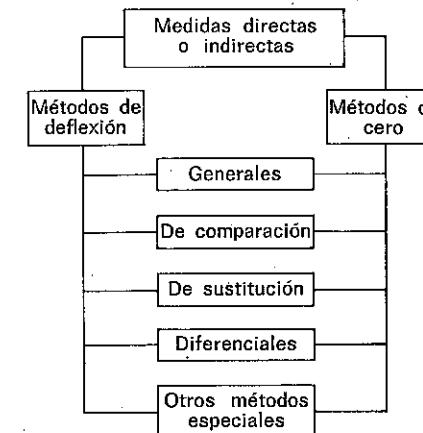


FIG. 8-1. Métodos de medida.

tras que los de deflexión pueden ser muy rápidos. Sin embargo, hay algunos métodos de cero que son en la realidad más fáciles y rápidos de ejecutar que los de deflexión. Más aún, hay instrumentos de control automático, comercialmente asequibles, que mantienen el cero continuamente

bajo condiciones cambiantes, y que eliminan la necesidad de manipulaciones.

Se trata de clasificar los métodos de deflexión y de cero dentro de las subdivisiones que se indican en la Fig. 8-1. La primera categoría «generales» incluye una variedad de métodos que no encajan propiamente en ningún otro sitio. Los métodos de deflexión generales serán los primeros en estudiarse en este capítulo. Los métodos básicos de uso general incluyen el método de comparación, de sustitución y el diferencial. Estos se estudiarán más tarde en este capítulo y en el siguiente. Hay muchos otros métodos con nombres especiales, que se indican en la parte inferior de la Fig. 8-1, que merecen ser comentados aquí.

Con frecuencia los métodos reciben el nombre de la persona asociada a su desarrollo. Esto es particularmente así, en los circuitos puente en que para describir el circuito se utilizan nombres tales como Wheatstone, Kelvin, Schering, Campbell, Wien y *muchos* otros. Pero los métodos de puente son básicamente métodos de comparación, y así se clasificarán en la Fig. 8-1. Las denominaciones personales, aunque merecidas, en ocasiones crean confusión desde el punto de vista de los principios que en ellos se utilizan.

Por otra parte, hay métodos adicionales, que no aparecen específicamente en la Fig. 8-1, que merecen denominación especial basada en el principio utilizado. Por ejemplo, el método balístico en que un impulso repentino mecánico o eléctrico produce un resultado mensurable. El método balístico se utiliza para determinar el flujo magnético induciendo una f.e.m. de corta duración en un circuito de un galvanómetro. La carga que fluye en el circuito es proporcional al cambio en las concatenaciones del flujo y puede determinarse por la deflexión de un galvanómetro balístico.

Hay muchos métodos difíciles de clasificar a partir de sus denominaciones normales. Por ejemplo, hay métodos de resonancia, heterodinos, de retroalimentación, de línea de transmisión, de alternador, y muchos otros. Un estudio cuidadoso de los principios en que se basan puede revelar que pertenecen con propiedad a alguna de las categorías de la Fig. 8-1. También pueden representar una combinación de dos métodos separados, como en el caso del método del puente de resonancia que será estudiado más adelante. La realidad es que el campo de las medidas se ha desarrollado en tantas direcciones diferentes que es casi imposible organizarlos dentro de grupos definidos. El entendimiento del método en sí, es, por supuesto, mucho más importante que decidir su clasificación. Sin embargo, esta clasificación puede ser útil para organizar las ideas y resaltar la similitud que existe entre métodos del mismo tipo básico.

8-3. Métodos directos generales de deflexión. En primer lugar se discutirán las medidas directas que utilizan métodos generales de deflexión. En el Cap. 3 ya se presentaron dos casos: el amperímetro (calibrado

para leer corrientes) y el voltímetro (calibrado para leer voltajes). Otros ejemplos incluyen los óhmetros (calibrados para leer resistencias) y vatímetros (calibrados para leer potencias). El óhmetro se estudia en las siguientes secciones, mientras que el vatímetro electrodinamométrico se estudia en el Cap. 12. También se pueden realizar medidas directas con instrumentos tales como frecuencímetros, fasímetros, medidores de vatios-hora, de factor de potencia, de capacitancia, de ángulo Z y un gran número de otros valores.

El óhmetro es un instrumento muy utilizado para medir rápidamente la resistencia a la corriente continua de elementos eléctricos pasivos o redes, mediante el método de deflexión directa. De los muchos tipos diferentes solo se estudian aquí los óhmetros serie y shunt que utilizan los movimientos de d'Arsonval. Se hará especial mención de capítulos tales como los principios en que están basados, sus escalas no uniformes y los errores debidos a cambios en sus pilas.

8-4. Ohmétros serie. El principio del óhmetro serie se ve al estudiar la Fig. 8-2. Un instrumento móvil de d'Arsonval de campo radial uniforme en serie con una batería y una resistencia externa, R_1 , constituyen la disposición básica (el uso de una resistencia en paralelo con el instrumento móvil se discutirá más tarde). El circuito se completa con una resistencia cuyo valor, X , quiere determinarse, conectada a los terminales de entrada del óhmetro. Existe una relación definida entre la corriente en el instrumento y el valor de X . En esta relación también entran los parámetros E (f.e.m. de la batería), R (la resistencia interna de la batería), R_m (la resistencia del aparato móvil) y R_1 . Si estos parámetros son fijos, la escala del instrumento puede calibrarse directamente en ohmios. Para $X = 0$ (terminales de entrada en corto circuito) se eligen

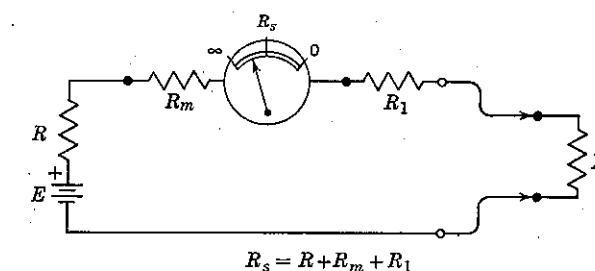


FIG. 8-2. Ohmímetro serie.

los valores de E , R , R_1 y R_m de forma que el aparato dé deflexión máxima. Para $X \rightarrow \infty$ (en vacío) la corriente en el instrumento es cero. Por tanto, la escala en ohmios es «inversa», teniendo el « ∞ » a la izquierda y el «0» a la derecha. Más todavía, la escala no es uniforme, a pesar del hecho de que la deflexión angular es proporcional a la corriente en el instrumento.

Para cualquier valor de X , la corriente del instrumento, I_x , viene dada por

$$I_x = \frac{E}{R + R_m + R_1 + X} = \frac{E}{R_s + X} \quad (8-1)$$

en que R_s es la resistencia de entrada resultante del óhmetro. La Ec. (8-1) demuestra que para $X \rightarrow \infty$, $I_x = 0$, y para $X = 0$, $I_0 = E/R_s$, que es la corriente necesaria para la deflexión total en un instrumento correctamente ajustado. Ahora bien, I_x puede expresarse en función de la corriente de escala total, I_0 , que es una constante

$$I_x = \frac{E/R_s}{1 + X/R_s} = \frac{I_0}{1 + \rho} \quad \rho = \frac{X}{R_s} \quad (8-2)$$

en que ρ es el valor fraccional de X comparado con la resistencia de entrada del óhmetro. En esta ecuación se ve que cuando $\rho = 1$, $I_x = I_0/2$; es decir, la deflexión es de mitad de escala cuando $X = R_s$.

La escala en ohmios puede estudiarse en función de las cantidades adimensionales $F = I_x/I_0$, que es la deflexión de escala unitaria, y $\rho = X/R_s$, que es proporcional a la variable X .

$$F = \frac{1}{1 + \rho} \quad (8-3)$$

Nótese cómo la adecuada definición de los términos han dejado esta ecuación reducida a su esencia. Además, es una ecuación universal, ya que es válida con independencia de los valores específicos de los parámetros del circuito de la Fig. 8-2.

En la Fig. 8-3 se ve la forma en que varía F de forma inversa y no uniforme con ρ . La pendiente de la curva viene dada por

$$\frac{dF}{d\rho} = \frac{-1}{(1 + \rho)^2} \quad (8-4)$$

Esto demuestra que, para todos los valores de $\rho > 0$, la pendiente es siempre negativa. Por tanto, la tangente a la curva en $\rho = 0$ también pasa por el punto $\rho = 1$, $F = 0$, en que la deflexión de escala unitaria es $1/2$. El cambio de F para una variación dada en ρ depende de ρ —a mayor ρ , menor cambio en F . Esto es debido a que a mayor ρ , la magnitud de la pendiente disminuye paulatinamente.

La curva de la Fig. 8-3 puede convertirse en una deflexión angular, como aparece en la Fig. 8-4. Esta figura representa la apariencia real de la escala del óhmetro, pero se ha perdido generalización por la necesidad

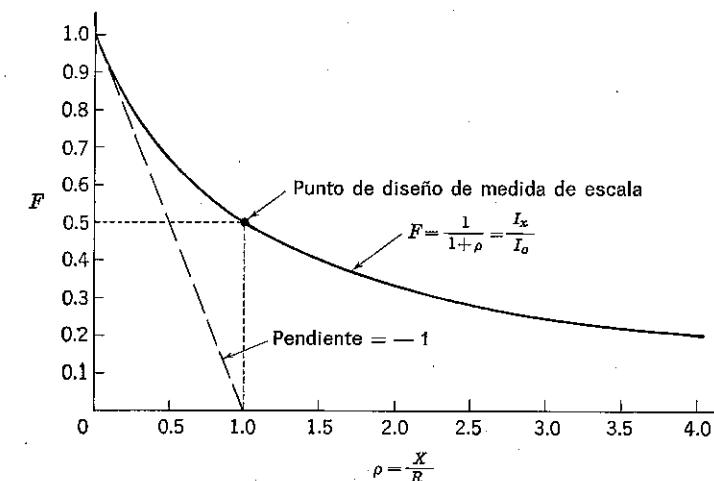


FIG. 8-3. Curva de deflexión universal para el óhmetro serie.

de especificar el recorrido angular total de la aguja, que se ha tomado como 100° . La ley de deflexión del movimiento es $I_x = K\theta_x$, en que K es la constante del instrumento. De aquí se sigue que F y θ_x son proporcionales, $\theta_x = (I_0/K)F$. A consecuencia de la falta de linearidad de la escala, su lectura se hace más inexacta para valores de X que sean mucho mayores que el de media escala, R_s , en que $\rho = 1$. Sin embargo, R_s puede ser controlado por el diseñador del aparato, ya que depende de la resistencia externa, R_1 , que puede modificarse. Sin embargo, para cada valor de R_1 , el aparato debe estar diseñado de forma que dé deflexión total de la escala, para $X = 0$. Esto se puede conseguir de diversas formas en

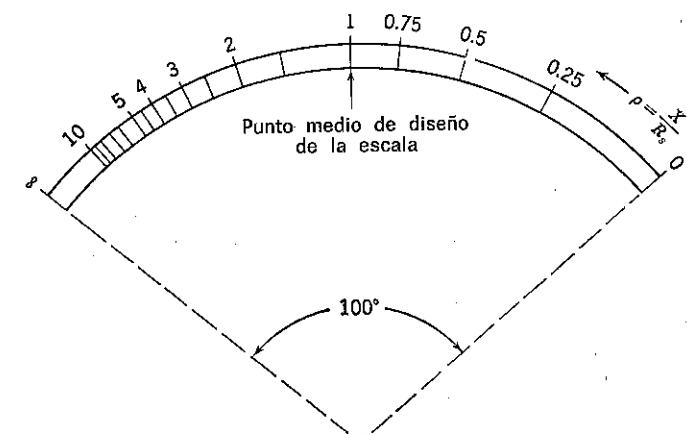


FIG. 8-4. Escala del aparato para un óhmetro serie.

los óhmetros de escala múltiple, usando pilas distintas para cada valor diferente de R_1 , o utilizando shunts en paralelo con el instrumento móvil, que se cambian para cada valor de R_1 .

8-5. Ohmetro shunt. El mínimo valor de diseño del punto medio de la escala de un óhmetro serie queda establecido por el mínimo valor que se puede conseguir en su resistencia equivalente de entrada, $R_s = R + R_m + R_1$. Con $R_1 = 0$, el valor resultante R_s puede ser demasiado alto para permitir determinar con exactitud resistencias muy pequeñas. Hay otra disposición alternativa, dada en la Fig. 8-5, que es apta para

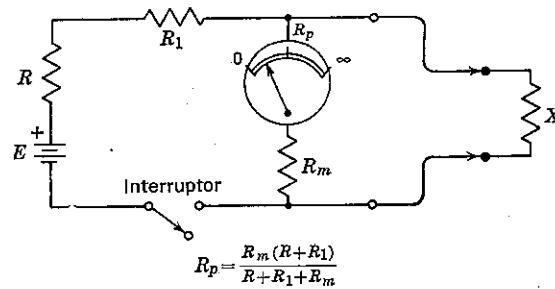


FIG. 8-5. Ohmetro shunt.

medir pequeñas resistencias. Se llama óhmetro shunt, dado que se coloca una resistencia desconocida, X , en paralelo con el instrumento móvil. El circuito permanece cerrado al quitar X y, por tanto, se coloca un interruptor para evitar la descarga de la batería cuando no se utiliza el instrumento. Los parámetros E , R , R_m y R_1 se eligen de forma que el instrumento móvil dé deflexión total de escala cuando se quita X . Para $X = 0$, la corriente del instrumento es cero, ya que su resistencia R_m está puenteadas en corto circuito. Por tanto, la escala de este instrumento es el inverso de la del óhmetro serie, lo que sirve de fácil medio de identificación exterior de los dos instrumentos. La escala del óhmetro shunt tampoco es uniforme, a pesar de que se utiliza un instrumento móvil de campo radial uniforme, según se puede deducir analizando el circuito.

Para cualquier valor de X , la corriente del aparato, I_x , puede deducirse utilizando la regla de suma de corrientes: $X/(R_m + X)$ por la corriente de la batería. La corriente de la batería para cualquier X es

$$I_b = \frac{E}{R + R_1 + R_m X / (R_m + X)} \quad (8-5)$$

De aquí se deduce que la corriente del aparato es

$$I_x = \frac{X}{R_m + X} I_b = \frac{EX}{(R_m + X)(R + R_1) + R_m X} \quad (8-6)$$

En esta ecuación se puede ver que para $X = 0$, $I_0 = 0$, y para $X \rightarrow \infty$,

$$I_\infty = \frac{E}{R + R_1 + R_m} \quad (8-7)$$

que representa la deflexión final de escala en un instrumento correctamente ajustado. Como en el caso del óhmetro serie, es conveniente definir unas cantidades adimensionales apropiadas con las que se obtengan resultados fáciles y universales. Definamos $F = I_x/I_\infty$, la deflexión de escala unitaria, y dividamos la Ec. (8-6) por la Ec. (8-7).

$$\begin{aligned} F &= \frac{I_x}{I_\infty} = \frac{(R + R_1 + R_m)X}{(R_m + X)(R + R_1) + R_m X} \\ &= \frac{(R + R_1 + R_m)X}{R_m(R + R_1) + (R + R_1 + R_m)X} \end{aligned} \quad (8-8)$$

Ahora conviene definir una resistencia equivalente.

$$R_p = \frac{R_m(R + R_1)}{R + R_1 + R_m}$$

que, de nuevo, es la resistencia de entrada equivalente del óhmetro. Finalmente, con $\rho = X/R_p$, que es el valor fraccional de X , con respecto a R_p , la Ec. (8-8) queda en la forma

$$F = \frac{X}{R_p + X} = \frac{1}{1 + 1/\rho} \quad (8-9)$$

Esta ecuación universal es cierta para cualquier valor de los parámetros del circuito de la Fig. 8-5. De ella se puede sacar información para entender y diseñar el óhmetro. En ella se ve, por ejemplo, que para $\rho = 0$, $F = 0$; para $\rho \rightarrow \infty$, $F = 1$ (deflexión de final de escala); y el valor de ρ que corresponde a la deflexión de media escala, $F = 1/2$, se ve claramente que es $\rho = 1$. Esto significa que la deflexión de media escala se produce cuando X es igual a la resistencia de entrada del óhmetro.

En la Fig. 8-6 se hace la representación gráfica de esta ecuación universal. La curva es esencialmente el reverso de la del óhmetro serie de la Fig. 8-3. Por supuesto, la pendiente de la curva del óhmetro shunt es la misma que la del óhmetro serie, excepto por el signo.

$$\frac{dF}{d\rho} = \frac{1/\rho^2}{(1 + 1/\rho)^2} = \frac{1}{(1 + \rho)^2} \quad (8-10)$$

Por tanto, la escala del óhmetro shunt tiene las mismas características de no uniformidad que la del óhmetro serie, pero al contrario. En la

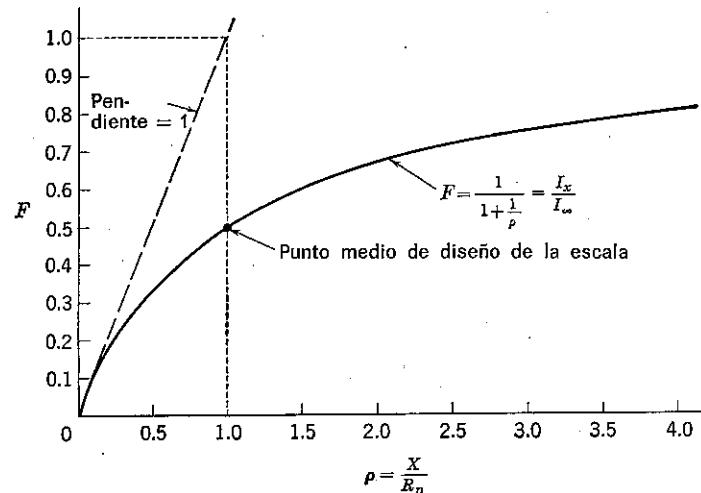


FIG. 8-6. Curva de deflexión universal para el ohmetro shunt.

Ec. (8-10) se ve que la pendiente de la curva de la Fig. 8-6 es siempre positiva para todos los valores de $\rho > 0$. La pendiente para $\rho = 0$ es $+1$. La tangente a la curva en el punto $F = 0$, $\rho = 0$, corta a la asíntota de la curva para $\rho \gg 1$, en la ordenada $\rho = 1$, en que la deflexión fraccionaria real de la escala es $1/2$.

La curva universal de la Fig. 8-6 puede convertirse en deflexión angular, θ , como aparece en la Fig. 8-7, utilizando $\theta_x = (I_\infty/K)F$. Es evidente la contracción de la escala para valores de X mayores que R_p ; la lectura se hace más inexacta a medida que aumenta ρ . Sin embargo, como en el caso del ohmetro serie, el valor diseñado de la media escala puede escogerse dando un valor conveniente a los parámetros del circuito que también mantenga I_∞ con el valor necesario para la deflexión de final de escala. Los ohmímetros shunt de escala múltiple se pueden diseñar de varias maneras, utilizando baterías diferentes para cada escala, o utilizando resistencias conectadas en serie con el movimiento, para las distintas escalas. Los fundamentos son los mismos que en el caso del ohmetro serie.

Se ve que los ohmímetros serie y shunt son instrumentos complementarios, el primero adecuado para grandes resistencias y el último para las pequeñas. Con este par de instrumentos se pueden medir resistencias desde microohmios a megaohmios, con una exactitud razonable del orden de un pequeño tanto por ciento. Una de las mayores razones para la limitación de la exactitud, aparte de las limitaciones inherentes de los instrumentos de deflexión, que dependen del calibrado de la escala, se estudia en la siguiente sección. Fácilmente se observa el deterioro de la batería del ohmetro con el uso y la edad.

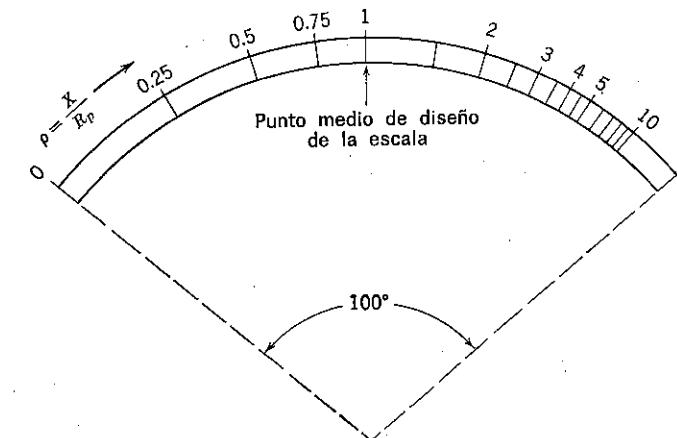


FIG. 8-7. Escala del ohmetro shunt.

8-6. Errores del ohmetro por envejecimiento de la batería. De los análisis anteriores resulta evidente que los ohmímetros necesitan de un ajuste inicial anterior a su utilización. Específicamente, I_0 en el caso serie, o I_∞ en el caso shunt, debe producir deflexión de final de escala, si se quiere que el calibrado de la escala del ohmetro sea utilizado directamente. En el instrumento existe un ajuste para realizar esto, y para permitir la utilización de una misma batería sobre una amplia gama del valor de E y R , antes de que se haga necesario retirarla. Al cambiar E y R , debido al envejecimiento de la batería, I_0 o I_∞ puede ser ajustado a sus valores de final de escala, mediante uno de los elementos del circuito. Sin embargo, esto introduce un error en el calibrado fijo de la escala, que depende de todos los elementos del circuito. A continuación se dan ejemplos del análisis de este error para dos tipos de ajustes en los ohmímetros serie.

El ajuste de corriente de final de escala del ohmetro serie de la Fig. 8-8 (a) se realiza con la resistencia variable R_1 . Antes de medir una resistencia, X , se cortocircuitan los terminales ($X = 0$), y se ajusta R_1 para dar deflexión de final de escala. La corriente de fin de escala, I_0 , viene dada por

$$I_0 = \frac{E}{R + R_1 + R_m} = \frac{E}{R_s} \quad (8-11)$$

La conexión posterior de una resistencia desconocida, X , produce una corriente

$$I_x = \frac{E}{R_s + X} = \frac{I_0 R_s}{R_s + X} \quad (8-12)$$

Supóngase que se ha calibrado el óhmetro correctamente en todo el alcance de su escala para los valores E , R , R_1 y R_m . Supóngase que, entonces,

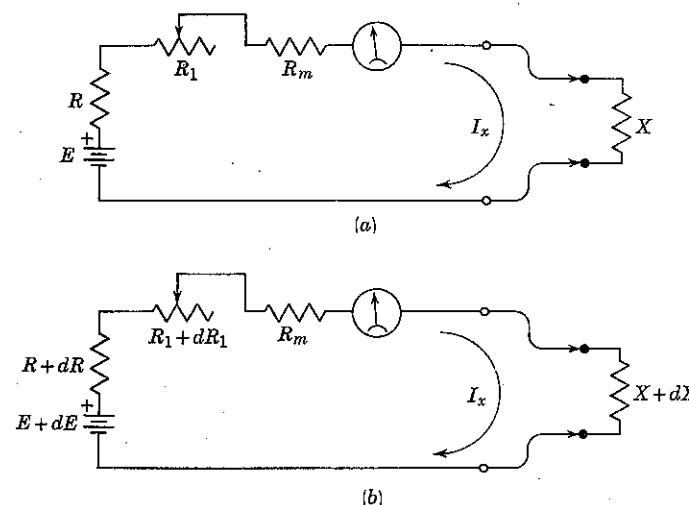


FIG. 8-8. Ajuste serie del óhmetro serie.

ces, debido al envejecimiento de la batería, su f.e.m. cambia a $E + dE$, y su resistencia interna cambia a $R + dR$. En la utilización normal se ajusta R_1 a un valor $R_1 + dR_1$ de forma que se obtenga la misma deflexión de escala con los terminales en corto. Esta corriente viene dada por

$$I_0 = \frac{E + dE}{R + dR + R_1 + dR_1 + R_m} \quad (8-13)$$

que es la misma I_0 que en la Ec. (8-11). Sin embargo, la corriente I'_x , para una X dada será ahora

$$I'_x = \frac{E + dE}{R + dR + R_1 + dR_1 + R_m + X} \quad (8-14)$$

Esta corriente no es la misma que la de la Ec. (8-12) para el mismo valor de X . Por tanto, el calibrado tendrá un error.

Resulta difícil obtener una expresión del error existente en la lectura hecha de la resistencia, ya que la escala no es uniforme. El cambio de la lectura de resistencia para un cambio dado de I_x dependerá mucho de la parte de la escala en que se efectúa la lectura. Este obstáculo se puede salvar mediante un ingenioso sistema de análisis. Introduzcase un cambio en X que haga que I'_x coincida con el valor de la Ec. (8-12) como se indica en el diagrama de la Fig. 8-8 (b). Entonces, el error de X se ob-

tendrá directamente de dX sin necesidad de luchar con la desuniformidad de la escala. Con este sistema es posible hallar el cambio de X , dX , que corresponde a los cambios dE y dR de la batería, y el correspondiente cambio dR_1 .

Se justifica el trabajar con diferenciales cuando se trata solamente de cambios pequeños. El cambio de I_x resultante de los cambios dE , dR y dR_1 , se aparta deliberadamente introduciendo un cambio dX en X . Por tanto, la diferencial de la Ec. (8-12) es cero

$$dI_x = 0 = I_0 \left[\frac{\partial}{\partial R_s} \left(\frac{R_s}{R_s + X} \right) dR_s + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{R_s}{R_s + X} \right) dX \right] \quad (8-15)$$

en que I_0 es constante gracias al ajuste de R_1 . Dado que la resistencia del instrumento es constante, $dR_m = 0$ y $dR_s = dR + dR_1$. Hallando las derivadas parciales, la Ec. (8-15) resulta

$$\frac{X dR_s}{(R_s + X)^2} - \frac{R_s dX}{(R_s + X)^2} = 0$$

$$\frac{dX}{X} = \frac{dR_s}{R_s} = \frac{d(R + R_1)}{R + R_1 + R_m} \quad (8-16)$$

Este resultado también se puede expresar en función de dE . De la Ec. (8-11) $I_0 dR_s = dE$. Por tanto,

$$\frac{dX}{X} = \frac{dR_s}{R_s} = \frac{dE}{E} \quad (8-17)$$

El error relativo de X es igual al cambio relativo en la f.e.m. de la batería. Así, pues, el error en X puede ser de magnitud mensurable cuando se utiliza R_1 para el ajuste de la corriente de final de escala. Por esta razón, el control de ajuste, S , que aparece en el circuito del óhmetro serie de la Fig. 8-9 es normalmente preferido, ya que los errores que introduce son más pequeños que el caso analizado. Esto era de esperar dado que la resistencia serie equivalente del óhmetro es bastante insensible a S , puesto que R_m es normalmente mucho más pequeño que R_1 . Al mismo tiempo la corriente del instrumento es bastante susceptible al valor de S .

La corriente del instrumento para cualquier X en el circuito de la Fig. 8-9 viene dada por la ley de repartición de corriente: $S/(R_m + S)$ veces la corriente de la batería I_b .

$$I_b = \frac{E}{R + R_1 + R_m S / (R_m + S) + X} = \frac{E}{M + X} \quad (8-18)$$

en que M es la resistencia de entrada equivalente del óhmetro. Así, pues,

$$I_x = \frac{S}{R_m + S M + X} \frac{E}{M + X} \quad (8-19)$$

La corriente para la deflexión de final de escala, I_0 , obtenida ajustando S , se puede hallar haciendo $X = 0$ en la Ec. (8-19).

$$I_0 = \frac{SE}{(R_m + S)M} \quad (8-20)$$

Por tanto, I_x , en función de I_0 es

$$I_x = \frac{I_0 M}{M + X} \quad (8-21)$$

Que es exactamente la misma que en el ejemplo anterior, la Ec. (8-12).

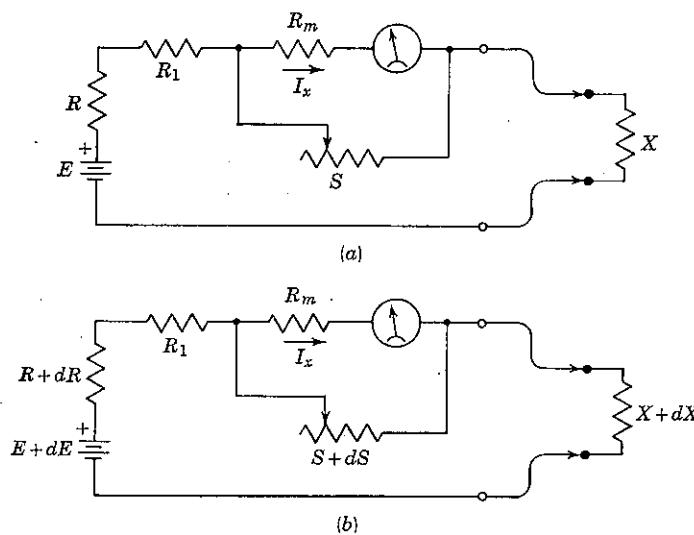


FIG. 8-9. Ajuste shunt del óhmetro serie.

El error en X , resultante del envejecimiento de la batería, puede obtenerse con el mismo sistema diferencial empleado antes. Supóngase que el óhmetro está correctamente calibrado en toda su escala para los valores E , R , R_1 , R_m y S . Cuando la f.e.m. de la batería pasa a ser $E + dE$, y su resistencia pasa a ser $R + dR$, se ajusta S a $S + dS$ de forma que se mantenga la misma I_0 . El cambio en I_x que resulta de los cambios dE , dR y dS se tiene en cuenta introduciendo un cambio dX en X . Entonces, la diferencial de la Ec. (8-21) es cero. Dado que las Ecs. (8-21) y (8-12) son de la misma forma, se deduce que el error relativo de X es de la misma forma que la Ec. (8-16).

$$\frac{dX}{X} = \frac{dM}{M} \quad (8-22)$$

Este resultado puede expresarse en función de dR y dS calculando dM/M .

$$M = R + R_1 + \frac{R_m S}{R_m + S}$$

en que R_1 y R_m son constantes. Consecuentemente,

$$dM = dR + \left(\frac{R_m}{R_m + S} \right)^2 dS \quad (8-23)$$

En el Prob. 8-12 se propone al lector la demostración de que la Ec. (8-22) en función de dR y dE es

$$\frac{dX}{X} = \frac{1}{R + R_1} \left[dR - \left(\frac{R_m S}{R_m + S} \right) \frac{dE}{E} \right] \quad (8-24)$$

A causa de que R_1 es normalmente grande en relación a R_m , se deduce de este análisis que los errores de calibrado debidos al envejecimiento de la batería pueden reducirse mucho utilizando el circuito de la Fig. 8-9. Hay otro método que produce aún menos errores y que utiliza un instrumento móvil especial. Se puede diseñar un shunt ajustable de hierro dulce a través de las piezas polares del movimiento que controle la sensibilidad del instrumento cambiando la magnitud del campo B en el entrehierro. A medida que envejece la batería se pone a cero el instrumento cambiando su constante, $K = S/nBA$, sin necesidad de cambiar ningún elemento del circuito. Entonces, si dR es pequeño comparado con $R_1 + R_m$, el error introducido por el envejecimiento de la batería es despreciable.

8-7. Métodos indirectos generales de deflexión. Las medidas indirectas que utilizan los métodos generales de deflexión son ampliamente usadas. Un ejemplo es el método voltiamperimétrico para determinar la resistencia, que se describe en la Sec. 5-6. Otro ejemplo sencillo, ya mencionado también, es la medida de la caída de tensión en una resistencia conocida para averiguar la corriente que pasa por ella. Aquí se presentan otros varios ejemplos adicionales en el campo de las medidas de corriente continua.

No obstante, los métodos generales de deflexión no se circunscriben a aplicaciones de corriente continua. Un caso elemental de corriente alterna es la determinación de la inducción mutua, M , entre dos bobinas mediante un método voltiamperimétrico de corriente alterna. El amperímetro se coloca para medir la corriente eficaz aplicada a una bobina, mientras que el voltímetro, conectado a través de la otra bobina, mide la f.e.m. inducida (con error pequeño si la impedancia del voltímetro es grande comparada con la de la segunda bobina). Si la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$ es conocida se puede calcular M por la relación entre la lectura del voltímetro y la del amperímetro que es igual a ωM .

Otro método clásico, que no se estudiará aquí con detalle, es el mé-

todo de pérdida de carga para determinar la resistencia de pérdida de un condensador de capacidad conocida, utilizando un galvanómetro balístico. Se basa en la fórmula teórica para la pérdida de carga, q , en un condensador, C , en paralelo con su resistencia de descarga, R .

$$q = Q_0 e^{-t/RC} \quad (8-25)$$

en que Q_0 es la carga del condensador en el momento $t = 0$ [véase la Ec. (2-4) con $E = 0$]. Primero se carga el condensador a Q_0 inmediatamente se descarga a través del galvanómetro balístico, cuya deflexión es proporcional a Q_0 . De nuevo se carga el condensador a Q_0 , y se le deja descargarse a través de su resistencia de descarga, durante un periodo de tiempo t , descargándolo de nuevo a continuación a través del galvanómetro balístico. La segunda deflexión es proporcional a $Q_0 e^{-t/RC}$. Dividiendo la primera deflexión por la segunda se puede calcular la resistencia desconocida, R , por ser el cociente: $e^{t/RC}$, en que t y C son conocidas. En la Sec. 14-7 se estudia un ejemplo detallado de este método, utilizando un voltímetro electrostático.

Estos dos ejemplos dan una idea de la diversidad de los métodos generales de deflexión, teniendo en cuenta que hay muchísimos más que no se mencionan.

8-8. Anulación de los efectos de la resistencia de un amperímetro. Se ha insistido en que la inserción de un amperímetro en un circuito para medir la corriente da un resultado falso si no es despreciable la resistencia del aparato. Por ejemplo, supóngase que se quiere medir la corriente del

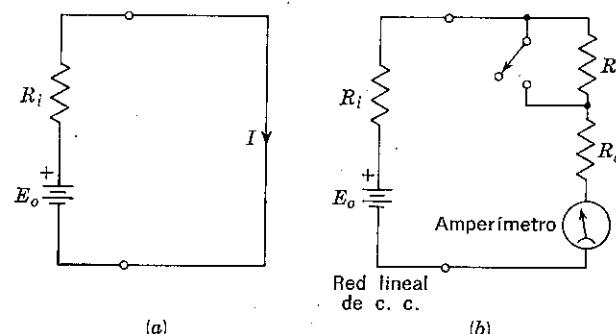


FIG. 8-10. Determinación de una corriente sin modificarla.

circuito de la Fig. 8-10 (a), con un amperímetro de resistencia equivalente, R_a , incluido el shunt. Sea E_0 y R_i los valores que representan la red productora de la corriente de rama, I . Si se introduce el amperímetro en esta rama, indicará una corriente que es menor que I , suponiendo un calibrado perfecto del instrumento. La corriente que se quiere hallar es E_0/R_i , mientras que la medida es $E_0/(R_i + R_a)$. Si se conocen R_i y R_a

se puede multiplicar la corriente medida por $(1 + R_a/R_i)$ para corregir este error sistemático. En caso de que $R_a \ll R_i$ se puede despreciar la corrección.

En muchos casos no se conoce R_i . Cuando se inserta un amperímetro en un circuito de éstos, siempre existirá la duda sobre la proximidad de la medida al valor sin modificar que se busca, especialmente porque no hay ninguna pista externa que sirva de guía al técnico. Se puede utilizar un sencillo método indirecto para determinar I , sin conocer R_i ni E_0 . En serie con el amperímetro y puenteado con un interruptor, se coloca una resistencia auxiliar, R , como se ve en la Fig. 8-10 (b). Se hacen lecturas con el interruptor abierto y cerrado, a partir de las cuales se puede calcular I . Aun cuando no hace falta conocer E_0 ni R_i , se supone que son constantes.

Cuando está abierto el interruptor de la Fig. 8-10 (b), el amperímetro responde a una corriente

$$I_1 = \frac{E_0}{R_i + R + R_a} \quad (8-26)$$

Cuando R está en corto, la corriente pasa a ser, con $R = 0$,

$$I_2 = \frac{E_0}{R_i + R_a} \quad (8-27)$$

que es mayor que I_1 . Eliminando E_0 y R_i entre estas dos ecuaciones y sustituyendo $I = E_0/R_i$, se halla fácilmente

$$I = \frac{I_1 I_2}{\frac{R_a}{R} (I_1 - I_2) + I_1} \quad (8-28)$$

Con las dos lecturas I_1 e I_2 se puede calcular I , con solo saber la relación R_a/R . Sin embargo, en algunos casos el cálculo puede no ser necesario. Si ambas lecturas son prácticamente iguales, la Ec. (8-28) da $I = I_1 = I_2$. Esto se produce cuando $(R + R_a) \ll R_i$, y da seguridad de que la corriente no ha sido modificada por la inserción del amperímetro.

Si se tiene una resistencia igual a la del instrumento, se simplifican los resultados. Con $R = R_a$, la Ec. (8-28) queda

$$I = \frac{I_1 I_2}{2I_1 - I_2} \quad R = R_a \quad (8-29)$$

Se puede también usar un método que utiliza una resistencia en paralelo con el amperímetro, como se hace evidente en el Prob. 8-17.

8-9. Influencia del voltímetro de escala múltiple. Siempre que se realicen medidas con un voltímetro se debe tener en cuenta la modifica-

ción introducida en la cantidad medida. Si se conoce la resistencia de entrada entre los dos terminales a que se conecta el voltímetro, se puede hacer una corrección de la lectura, supuesto que se conoce su resistencia. Como ejemplo, supóngase que se mide la tensión entre los terminales 1 y 2 de la Fig. 8-11, con objeto de determinar E_0 , tensión en vacío. Si la malla tiene una resistencia de entrada R_i , y la del voltímetro es R_v , la lectura será $E_0 R_v / (R_i + R_v)$ suponiendo un calibrado perfecto. Esta lectura es menor que E_0 . Pero si R_i y R_v son conocidas, se puede hallar E_0 multiplicando la lectura por $(1 + R_i/R_v)$. Si $R_v \gg R_i$ se puede despreciar la corrección.

En el caso de que no se conozca, R_i no es evidente con la lectura del voltímetro, si la corriente que circula por él ha causado o no una caída apreciable de tensión en la resistencia de entrada de la malla. Sin embargo, se puede determinar E_0 indirectamente sin conocer R_i , mediante un sistema similar al descrito para el amperímetro en la sección anterior. Este método es fácil de realizar con un voltímetro de escala múltiple, aun cuando, como en el caso de un amperímetro, también se puede utilizar una resistencia externa.

En la Fig. 8-11 se ve un voltímetro de doble escala conectado entre los terminales 1 y 2. En la escala 1, la resistencia del voltímetro es R_v ; en la escala n es nR_v . Por tanto, las escalas del voltímetro están en la proporción $n : 1$. Por la regla de distribución de tensiones la lectura del voltímetro en la escala 1 viene dada por

$$V_1 = \frac{R_v E_0}{R_i + R_v} \quad (8-30)$$

La lectura del voltímetro en la escala n es

$$V_2 = \frac{n R_v E_0}{R_i + n R_v} \quad (8-31)$$

y será normalmente mayor que V_1 , puesto que $n > 1$. La proporción entre estas dos lecturas es

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_i + n R_v}{n(R_i + R_v)} \quad (8-32)$$

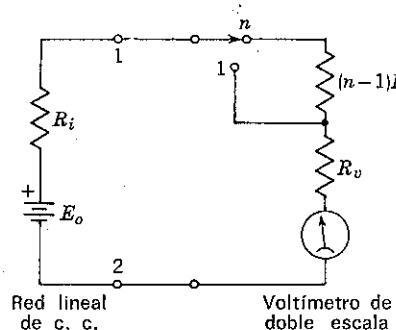


FIG. 8-11. Determinación de una tensión sin modificar.

Despejando R_i en la Ec. (8-32) y sustituyendo en la Ec. (8-30), la tensión deseada E_0 toma la expresión

$$E_0 = \frac{(n - 1)V_1 V_2}{n V_1 - V_2} \quad (8-33)$$

Por tanto, se puede hallar E_0 a partir de las lecturas V_1 y V_2 , sabiendo la relación de escala, n . Si $R_v \gg R_i$, entonces nR_v no influye en la malla, de forma que ambas lecturas serán iguales en estas condiciones. Por supuesto, si $V_1 = V_2$, la Ec. (8-33) da $E_0 = V_1 = V_2$. Esto proporciona una comprobación de la influencia, muy útil, aun cuando sea un resultado negativo. Si se dispone de un voltímetro con relación 2:1 entre escalas, el cálculo de E_0 es particularmente sencillo, puesto que entonces E_0 viene dado por

$$E_0 = \frac{V_1 V_2}{2V_1 - V_2} \quad n = 2 \quad (8-34)$$

También se puede usar otro método utilizando una resistencia en paralelo con el voltímetro, como se indica en el Prob. 8-19.

8-10. Método de la media deflexión. En los ejemplos siguientes se sugiere un método útil para determinar la resistencia de aparatos de corriente continua. Mediante una resistencia auxiliar conocida y el instrumento en sí, se puede determinar indirectamente la resistencia del instrumento en función de la deflexión y de la resistencia. Este método puede aplicarse a cualquier aparato de medida de corriente continua. El procedimiento que se debe seguir es activar el instrumento de forma que se produzca una deflexión legible. Entonces se reduce la deflexión, insertando, en serie con el instrumento, una resistencia conocida. Si se ajusta la resistencia serie de forma que su inserción provoca la mitad de la deflexión inicial, el cálculo puede ser muy fácil, sencillamente la resistencia del aparato es igual a la resistencia serie. Sin embargo, este sencillo resultado depende de que la resistencia de entrada de la fuente de corriente sea muy pequeña comparada con la del instrumento, como se demostrará a continuación.

La resistencia, R_v , de un voltímetro, que aparece en la Fig. 8-12, puede determinarse utilizando la resistencia serie auxiliar R_1 . La corriente para el voltímetro es suministrada por una f.e.m. E de resistencia interna R . Con el interruptor abierto, la lectura del voltímetro, por la relación del divisor de tensión, será:

$$V_1 = \frac{R_v E}{R_v + R_1 + R} \quad (8-35)$$

Con el interruptor cerrado, la lectura es mayor, y puede obtenerse haciendo $R_1 = 0$ en la Ec. (8-35).

$$V_2 = \frac{R_v E}{R_v + R} \quad (8-36)$$

en que se supone que tanto E como R son constantes. Se puede hallar la relación V_1/V_2 y despejar la resistencia del voltímetro R_v , con el siguiente resultado:

$$R_v = \frac{R_1 V_1}{V_2 - V_1} - R \quad (8-37)$$

Si $R_v \gg R$ queda simplificado en

$$R_v = \frac{R_1}{V_2/V_1 - 1} \quad R_v \gg R \quad (8-38)$$

Por tanto, R_v se puede calcular a partir de la relación entre las dos lecturas y el valor conocido R_1 . Más aún, si $V_2/V_1 = 2$, entonces $R_v = R_1$, y éste es entonces llamado método de la *media deflexión*, ya que al introducir R_1 , la deflexión se hizo la mitad. Sin embargo, en la Ec. (8-37) se pue-

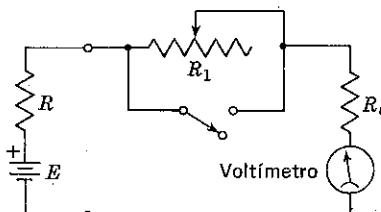


FIG. 8-12. Determinación de la resistencia de un voltímetro.

de ver que el resultado hallado por el método de la media deflexión es mayor que la resistencia real del voltímetro en una cantidad igual a R . Esto se ve también claramente estudiando el circuito original. Con el interruptor cerrado, la resistencia total del circuito es $R_v + R$. Es obvio que la resistencia total debe ser duplicada para reducir la corriente a la mitad, por tanto, $R_1 = R_v + R$, para la deflexión mitad.

Se puede hacer un estudio similar para un amperímetro de resistencia R_a . Teniendo en cuenta que el voltímetro de la Fig. 8-12 es, básicamente, un instrumento para medir corrientes, las lecturas de caídas de tensión pueden dividirse por R_v para obtener la corriente del instrumento. Por tanto, el resultado para el amperímetro se sigue fácilmente de la Ec. (8-37), sustituyendo R_v por R_a y las lecturas de voltaje por las correspondientes lecturas de corriente.

$$R_a = \frac{R_1 I_1}{I_2 - I_1} - R \quad (8-39)$$

I_1 es la corriente con el interruptor abierto, e $I_2 > I_1$ es la corriente con el interruptor cerrado. De nuevo, si $R_a \gg R$ y se ha elegido R_1 de forma que $I_1 = I_2/2$, entonces $R_a = R_1$, con lo que se obtiene el método de la media deflexión. Dado que la resistencia del amperímetro es mucho menor que la del voltímetro, la condición impuesta a R es mucho más estricta en este caso. Esto es una oculta fuente de errores, ya que en la práctica se pueden realizar las dos lecturas de corriente y calcular R_a mediante la fórmula hallada, omitiendo R . No hay una indicación clara de si se debe tener en cuenta R . Para obtener resultados exactos es conveniente utilizar una fuente cuya baja resistencia sea conocida.

Se puede utilizar un método parecido utilizando una resistencia en paralelo con el instrumento como se propone en el Prob. 8-20.

8-11. Determinación de la resistencia interna de una batería. El interesante problema de determinar la resistencia interna de una batería sirve como ejemplo final de medidas indirectas empleando métodos generales de deflexión. La dificultad principal asociada a esta determinación es el peligro de sobrecargar y estropear la batería. Esto se debe a que es necesario sacar de la batería una corriente suficientemente grande como para que produzca una caída de tensión apreciable en su resistencia interna. Con el método que se da a continuación se pueden obtener resultados satisfactorios, supuesto que se utiliza una buena técnica para evitar el deterioro de la batería. Sin embargo, puede ser preferible utilizar el método que se describe en la Sec. 8-16.

En la Fig. 8-13 aparece la batería de f.e.m. E , cuya resistencia interna, R , se quiere determinar. La tensión entre terminales de la batería se puede medir con un voltímetro para distintos valores de un reóstato de carga de baja resistencia, R_L , conectando ambos directamente entre los terminales de la batería. El interruptor permite la conexión momentánea de R_L cuando se quiere hacer la lectura de la tensión, evitando así el extraer una corriente excesiva durante un periodo prolongado de tiempo.

La tensión entre terminales de la batería, bajo carga, viene dada por la lectura del voltímetro, V , cuando está cerrado el interruptor. Aplicando la ley de distribución de tensiones, resulta

$$V = \frac{ER_L R_v / (R_L + R_v)}{R + R_L R_v / (R_L + R_v)} = \frac{ER_L}{R(1 + R_L/R_v) + R_L} \quad (8-40)$$

Si $R_v \gg R_L$, lo que será verdad casi siempre, entonces la Ec. (8-40) queda

$$V = \frac{ER_L}{R + R_L} \quad R_v \gg R_L \quad (8-41)$$

Representando V en función de R_L , suponiendo que E y R son constantes, resulta la Fig. 8-14. Si $R_L \gg R$, V tiende a E . Cuando $R_L = R$,

$V = E/2$. Cuando $R_L \ll R$, $V \approx ER_L/R$, y la curva se acerca en el origen asintóticamente a una recta de pendiente E/R . Esta curva, basada en la Ec. (8-41), demuestra que la tensión entre terminales de la batería no disminuye en forma sustancial con la resistencia de la carga hasta que

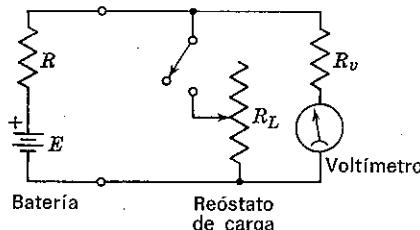


FIG. 8-13. Determinación de la resistencia de una batería.

R_L se hace comparable con R . Esto resulta lógico, ya que V es distinto de E solamente a causa de la caída de tensión en R . La batería típica tiene una resistencia interna muy pequeña, de forma que $R_L = R$ representa una extracción de corriente extremadamente elevada. Probablemente no es aconsejable el cargar tan fuertemente una batería. Por tanto, normalmente nos vemos confinados a las porciones más altas de la curva, que es una región relativamente insensible para tomar medidas, de forma que será conveniente hacer varias medidas con distintos valores de R_L para hallar un promedio.

Un buen método experimental y una buena técnica de análisis se obtienen expresando la Ec. (8-41) en forma lineal en función de $1/V$ y $1/R_L$.

$$\frac{1}{V} = \frac{R + R_L}{ER_L} = \left(\frac{R}{E}\right) \frac{1}{R_L} + \frac{1}{E} \quad (8-42)$$

Si se representa $1/V$ en función de $1/R_L$, esta ecuación indica que la curva será una línea recta de pendiente R/E y que corta a las ordenadas en el valor $1/E$ como se ve en la Fig. 8-15. Se pueden determinar experimentalmente varios puntos tales como A, B, C, D . La línea recta trazada por ellos dará el valor de R . Por ejemplo, se puede medir en primer lugar E quitando R_L . Esto nos da el punto $1/E$, para $1/R_L = 0$, suponiendo que $R_v \gg R$. Entonces se pueden conectar momentáneamente distintos valores de R_L , durante el tiempo necesario para hacer la lectura en cada caso. La línea recta hallada puede extenderse hasta $2/E$, cuya ordenada da $1/R$ por extrapolación. Esto nos da un valor de R ponderado, en el que todos los puntos experimentales pueden ser comprobados por análisis gráfico.

Aunque es un ejemplo sencillo, nos da idea de cómo la técnica y el método pueden ayudar a conseguir buenos resultados experimentales con un mínimo de esfuerzo. Más aún; así se consigue al mismo tiempo

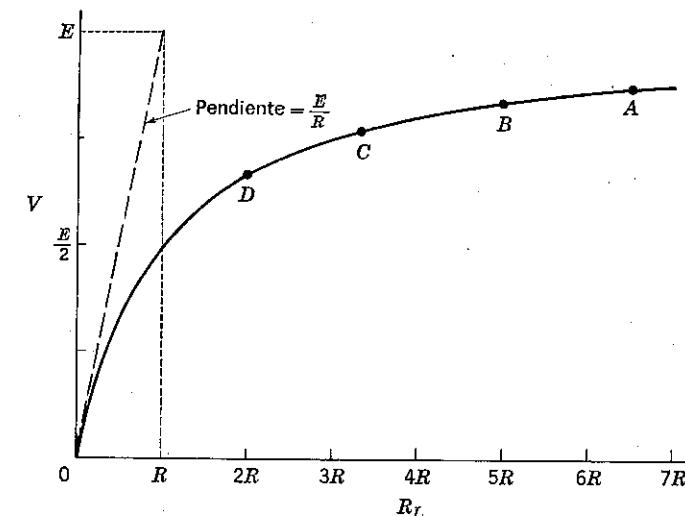


FIG. 8-14. Tensión entre terminales de una batería cargada.

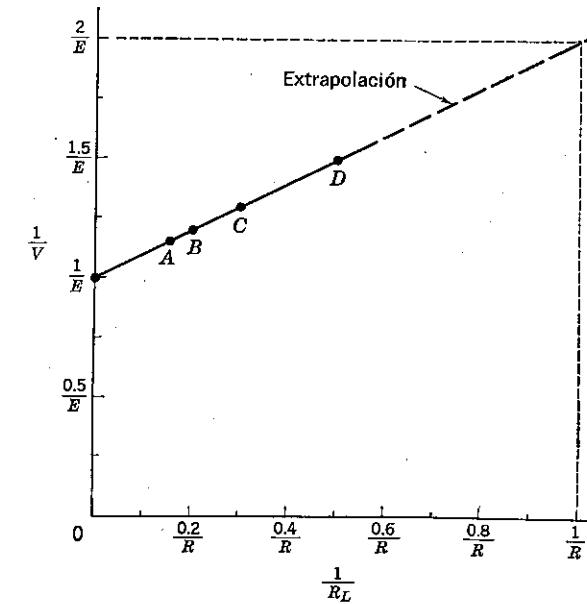


FIG. 8-15. Gráfico lineal para la carga de una batería.

una prueba de los resultados, ya que si un punto experimental no cae en una línea recta, como teóricamente se espera, es una prueba de que algo está mal. Quizá E y R varían con la carga, o el valor de R_L es quizás demasiado bajo para la carga, incluso en condiciones intermitentes. El lector hará bien en estudiar este ejemplo con vistas a utilizar un sistema

semejante en otros casos. En el Cap. 14 se presentan otros ejemplos.

8-12. Métodos de comparación. Un sistema obvio de medida es la comparación directa de dos cantidades iguales. Las dos cantidades comparadas pueden ser cantidades eléctricas, elementos o instrumentos. Puesto que el proceso de medida en sí es básicamente un proceso de comparación, se podría argüir que todas las medidas son esencialmente métodos de comparación. Mientras que es cierto que todas las medidas son de naturaleza comparativa, la expresión «método de comparación» solamente se aplica cuando las dos cantidades iguales que se comparan se pueden conseguir de forma inmediata. Así, pues, si se mide una corriente con un amperímetro, la corriente medida se está comparando en principio con el patrón absoluto de corriente del National Bureau of Standards. Sin embargo, el patrón absoluto no se utiliza en la realización de la medida y, por tanto, no se considera como método de comparación. El punto esencial es que las dos cantidades que se comparan deben coexistir en el experimento.

En la Sec. 5-8 se describe el calibrado de un voltímetro mediante un amperímetro, y da un ejemplo del método de comparación. Las dos cantidades comparadas son las corrientes del voltímetro y del amperímetro. Otros ejemplos incluyen la comparación de lecturas de dos amperímetros en serie, atravesados por la misma corriente. De la misma manera, se pueden conectar dos voltímetros directamente en paralelo con el fin de compararlos. La mayoría de los métodos de comparación siguen estas líneas tan sencillas, y, sin embargo, este método es utilísimo, ya que hay muchos casos en que una comparación directa es muy reveladora.

Hay algunos métodos de comparación que, aunque parecen sólidos en principio, entrañan serias dificultades prácticas cuando se realizan a base de deflexiones, como se verá en la sección siguiente. Una dificultad es la imposibilidad de que los instrumentos utilizados sean ideales. Por esta razón, la mayoría de los métodos de comparación se realizan utilizando técnicas de cero, como se describirá en el Cap. 9. Sin embargo, hay ciertos métodos de comparación de deflexión que son seguros, como en el caso de la comparación de instrumentos mencionado antes.

8-13. Comparación de dos resistencias. En la Fig. 8-16 se ve un método de comparación entre dos resistencias. Se utiliza un voltímetro de resistencia R_v para comparar la caída de tensión en R_1 con la caída de tensión en R_2 , teniendo en cuenta que la caída de tensión en las resistencias es proporcional a ellas. Sin embargo, a menos que la resistencia del voltímetro sea bastante alta, esta proporcionalidad puede ser distorsionada. Con la posición 1 del interruptor, la lectura del voltímetro viene dada por la razón del divisor de tensión.

$$V_1 = \frac{ER_1R_v/(R_1 + R_v)}{R + R_2 + R_1R_v/(R_1 + R_v)} \quad (8-43)$$

De la misma forma, con la posición 2 del interruptor

$$V_2 = \frac{ER_2R_v/(R_2 + R_v)}{R + R_1 + R_2R_v/(R_2 + R_v)} \quad (8-44)$$

Dividiendo estas dos ecuaciones y operando, resulta

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1}{R_2} \left[\frac{R_v + R_2(R_1 + R)/(R_2 + R_1 + R)}{R_v + R_1(R_2 + R)/(R_2 + R_1 + R)} \right] \quad (8-45)$$

Se ve claramente que esta relación no es —en general— igual a la relación entre las resistencias, aun cuando ambas resistencias llevan la misma corriente si se retira el voltímetro del circuito. Sin embargo, si R_v es suficientemente grande en comparación con la resultante en paralelo

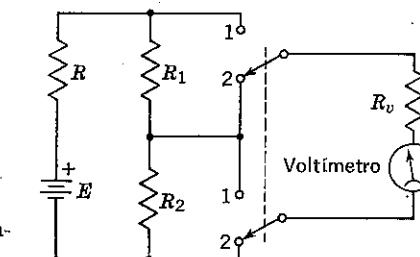


FIG. 8-16. Comparación de la caída de tensión en dos resistencias.

de $(R_1 + R)$ y R_2 , así como en comparación con la resultante de $(R_2 + R)$ y R_1 , la relación viene dada aproximadamente por

$$\frac{V_1}{V_2} \approx \frac{R_1}{R_2} \quad R_v \text{ grande} \quad (8-46)$$

Por tanto, las resistencias pueden compararse si se comparan las lecturas, suponiendo que R_v es suficientemente grande. Es interesante hacer notar que, si tanto R_1 como R_2 son muy grandes comparadas con R , la relación entre corchetes de la Ec. (8-45) tiene como valor la unidad para cualquier valor de R_v . Entonces, la Ec. (8-46) está muy cerca de ser exacta, aun cuando V_1 y V_2 por sí mismos no son iguales a las caídas de tensión reales en R_1 y R_2 . En otro caso especial $R_1 = R_2$ y la Ec. (8-45) demuestra que V_1 y V_2 serán iguales para cualquier valor R y R_v , dada la simetría del circuito. También, en este caso, la Ec. (8-46) da un resultado exacto, aun cuando V_1 y V_2 son, individualmente, menores que las caídas de tensión en R_1 y R_2 .

8-14. Método de sustitución. El método de sustitución es capaz de dar una medida muy exacta de una cantidad desconocida en función de un patrón igual conocido con el que se compara directamente. El mé-

todo en principio es muy sencillo, y, sin embargo, muy útil. Puede evitar errores debidos al calibrado de los instrumentos y a los efectos de la carga que introduce. Más aún, también se evitan los errores imputados a la resistencia de los terminales, a la f.e.m. térmica de los contactos eléctricos y a otras causas. No obstante, puede ser grande el precio pagado para evitar todos estos errores. Se debe disponer de un patrón conocido del mismo valor de la cantidad desconocida que se quiere medir. (En ciertos casos de cero, el patrón necesario no tiene que ser precisamente igual a la cantidad desconocida. Véase la Sec. 9-14.)

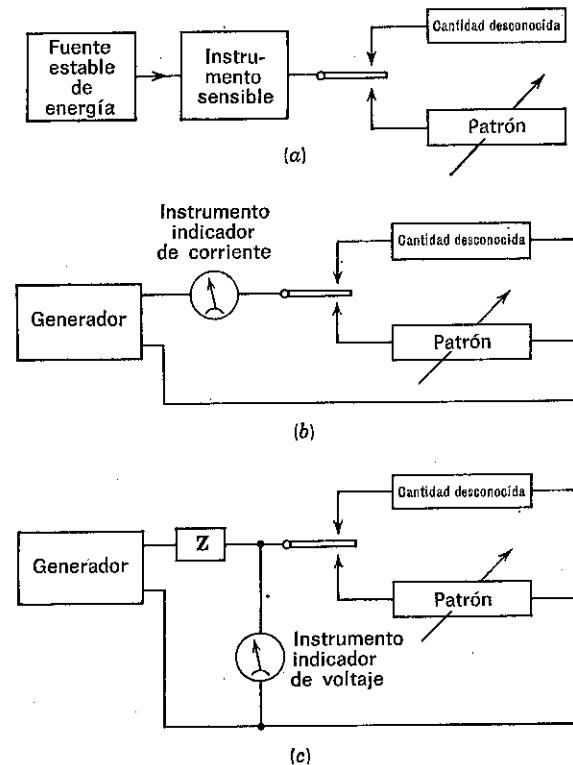


FIG. 8-17. Métodos de sustitución.

La idea fundamental del método de sustitución es remplazar la cantidad desconocida por un patrón, ajustado de tal forma que los efectos que produce al ser introducido no se pueden distinguir de los producidos por la cantidad desconocida. Por tanto, el método de sustitución puede ser considerado como un caso especial del método de comparación. En el método de sustitución la cantidad desconocida es literalmente remplazada por el patrón con que se compara y el patrón no se energiza ni mide simultáneamente, como suele ocurrir en el método de comparación.

En la Fig. 8-17 (a) se da un diagrama en líneas generales de las características esenciales del método de sustitución. La fuente de energía puede ser una batería o un generador de corriente alterna o corriente continua, o prácticamente cualquier fuente de señales. La necesidad principal es la de que la fuente sea constante, durante el periodo de tiempo necesario para realizar la medida. Esto no constituye una condición muy estricta, ya que se pueden realizar dos medidas en secuencia muy rápida, y la carga de la fuente durante las dos medidas, de la cantidad desconocida y el patrón, es prácticamente igual. Se puede utilizar cualquier instrumento que dé una medida *sensitiva* del paso de energía desde la fuente a la carga (desconocida o patrón) para dar una idea de la diferencia entre la cantidad desconocida y el patrón. Este instrumento no necesita ser calibrado, ya que la *diferencia* que indica queda reducida a cero en el ajuste final del patrón. El procedimiento consiste en ajustar el patrón por pasos sucesivos, según sea necesario, hasta que el instrumento sensible da la misma lectura sea cual sea la carga conectada. Entonces se deduce que la cantidad desconocida y el patrón son iguales.

En la Fig. 8-17 se dan dos sistemas generales para el método de sustitución en que se utilizan instrumentos sensibles a la corriente o a la tensión. El instrumento sensible a la corriente puede ser un amperímetro, voltímetro, galvanómetro, medidor de corriente alterna o cualquier otro instrumento que responda a la corriente. La cantidad desconocida y el patrón pueden ser cualquier par de instrumentos similares tales como resistencias, condensadores o inductancias. Como ejemplo específico, el generador puede ser una batería, conectada a través de un galvanómetro para medir una resistencia desconocida en función de un patrón, tal como una caja de resistencias de décadas. Cuando se ajusta la caja de décadas de tal forma que se produce la misma deflexión del galvanómetro, en cualquiera de las posiciones del interruptor, resulta que la resistencia desconocida es igual a la de la caja de décadas. Esta determinación es independiente del calibrado del galvanómetro, así como de las caídas de tensión en los terminales y de efectos parásitos, puesto que, tanto la cantidad desconocida como el patrón, están medidos bajo las mismas condiciones del circuito.

Mientras que este método se acerca al ideal, para trabajos muy exactos, resulta también muy sencillo para medidas no tan exactas. Por ejemplo, un óhmetro de cuyo calibrado no se puede fiar mucho, puede ser utilizado para medir una resistencia desconocida de forma muy satisfactoria. El óhmetro es conveniente, ya que contiene en sí tanto el generador como el instrumento sensitivo. Se puede conectar, en primer lugar, la resistencia desconocida, y sustituida después por una resistencia conocida que produce la misma deflexión. De esta forma se determina la cantidad desconocida, aun cuando el óhmetro no esté perfectamente calibrado, no pueda ser puesto a cero con propiedad, tenga shunts defectuosos, o

un cúmulo de otros defectos. Mientras que produzca una deflexión que sea sensitiva a la resistencia conectada a través de sus terminales, puede ser utilizado para determinar una resistencia con el método de sustitución.

Aun cuando la disposición del interruptor no sea una parte intrínseca de este método, es cuestión de práctica. Desconectándolo se puede eliminar del circuito la cantidad desconocida, y conectar en su lugar el patrón. Sin embargo, la carga de la fuente de alimentación cambia durante un periodo apreciable de tiempo, durante la sustitución, y asimismo, el periodo de tiempo que existe entre las dos medidas puede producir un cambio. El cambio de la cantidad desconocida por el patrón puede conseguirse de forma muy rápida con un interruptor que da solamente un cambio momentáneo de carga en la fuente de energía. Este es el sistema preferido. Se suele utilizar un interruptor capaz de un accionamiento muy rápido de forma que, después del ajuste final del patrón, se puede cambiar repetidas veces del valor desconocido al patrón sin que se aprecie cambio alguno en la lectura del instrumento sensitivo.

8-15. Método diferencial. En muchas medidas, el cambio de una cantidad a partir de su valor inicial es de la máxima importancia. Más aún, el cambio puede constituir solamente un pequeño porcentaje del valor de la cantidad en sí. Para estas aplicaciones el método diferencial es muy adecuado. La idea general de este método es, en primer lugar, conseguir un dispositivo que equilibre el valor inicial de la cantidad, de forma que el instrumento que indique el cambio esté inicialmente ajustado a una lectura de cero. Por tanto, cualquier cambio en la cantidad queda reflejado por una lectura del indicador. Resulta esencial que el sistema utilizado para equilibrar el valor inicial de la cantidad sea estable; de otra forma, los subsiguientes cambios indicados por el instrumento sensitivo pueden quedar interferidos por el cambio de referencia.

De nuevo este método es fundamentalmente un método de comparación. Se compara una cantidad ligeramente variable con una cantidad fija de referencia. Se diferencia del método de comparación por su capacidad de producir una medida directa de dos cantidades casi iguales.



FIG. 8-18. Método diferencial.

Un diagrama funcional del método diferencial es presentado en la Fig. 8-18. La cantidad que puede cambiar puede ser una tensión, una resistencia o cualquier otra cantidad eléctrica. Puede variar por encima y por debajo del valor dado por la referencia estable. El instrumento

sensitivo responde adecuadamente, dando una medida diferencial positiva o negativa entre el valor de referencia y la cantidad cambiante.

El método diferencial resulta particularmente útil cuando el instrumento sensitivo da una medida directa de la variación sin necesidad de cálculo o corrección posterior. Esto resulta difícil de conseguir algunas veces debido a la extracción de corriente por parte del instrumento indicador cuando actúa como carga del sistema. En la mayoría de los casos, la impedancia del instrumento sensible debiera ser grande en comparación con la impedancia resultante del sistema con la cantidad cambiante y con la referencia estable. El que se puedan o no despreciar los efectos de carga por diferencia entre los niveles de impedancia depende de cada caso particular.

8-16. Voltímetro diferencial. El método diferencial se adapta muy bien a la medida de las características de regulación de un suministro de corriente continua. Si la variación de tensión de vacío a plena carga es solamente un pequeño porcentaje de la tensión de vacío, un voltímetro ordinario conectado a través de los terminales de salida no da una indicación adecuada del cambio. Se puede utilizar un voltímetro diferencial como el que aparece en la Fig. 8-19. La referencia estable viene dada por una batería, y el control, R_2 , puede utilizarse para ajustar a cero la lectura del voltímetro cuando se quita la carga del suministro, R_L . En estas condiciones, la tensión en los terminales 3-4 es igual a la de vacío, E , de la fuente. Si después se carga la fuente con diferentes valores de R_L , se cambia la tensión entre los terminales. Si R_v es suficientemente grande, el voltímetro indicará directamente el cambio de tensión desde el valor de vacío, supuesto que la referencia permanece estable. Este circuito es esencialmente el mismo que el que se mencionó con motivo de los errores en el ajuste de instrumentos en la Sec. 5-12.

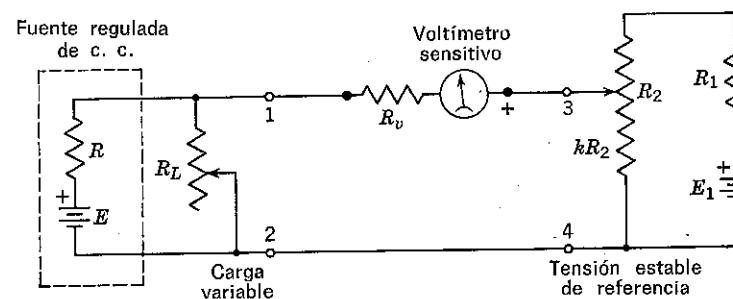


FIG. 8-19. Voltímetro diferencial.

Si $R_v \rightarrow \infty$, el sistema de referencia queda aislado de la fuente, y el voltímetro dará directamente la diferencia deseada de tensión sin error de carga. Sin embargo, cualquier voltímetro real tiene una resistencia

finita, de forma que será necesario obtener un criterio cuantitativo para determinar los efectos de carga de R_v . El teorema de Thévenin es útil para hacer un análisis más rápido. El circuito equivalente de la fuente aparece en la Fig. 8-20, en que se incluye R_L como parte de la fuente de tensión cuyo cambio se quiere medir. La tensión en vacío, mirando los terminales 1-2, es

$$E_0 = \frac{R_L E}{R + R_L} \quad (8-47)$$

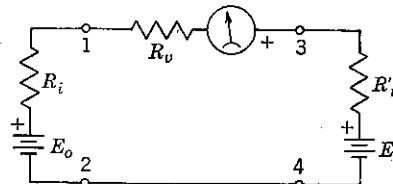


FIG. 8-20. Circuito equivalente de Thévenin de la Fig. 8-19.

en que E es la tensión de suministro en vacío ($R_L \rightarrow \infty$), y R es la resistencia resultante de la fuente sin carga. Claramente se ve que la resistencia resultante de la fuente con carga es

$$R_i = \frac{R R_L}{R + R_L} \quad (8-48)$$

El circuito equivalente de la fuente de referencia se obtiene de forma similar y aparece en la Fig. 8-20. La tensión en vacío entre los terminales 3-4 es

$$E'_0 = \frac{k R_2 E_1}{R_2 + R_1} \quad (8-49)$$

y la resistencia resultante vista desde los terminales 3-4 es

$$R'_i = \frac{k R_2 [R_2(1 - k) + R_1]}{R_2 + R_1} \quad (8-50)$$

En estas ecuaciones, E_1 es la f.e.m. de la batería de referencia, R_1 su resistencia interna y k es la fracción de la resistencia de control, R_2 , colocada directamente entre los terminales 3 y 4.

Fácilmente se aprecia la utilidad del teorema de Thévenin, ya que con la razón del divisor de tensión se obtiene inmediatamente una expresión de la lectura del voltímetro. Con la polaridad del voltímetro que

aparece en las Figs. 8-19 y 8-20, la lectura del voltímetro viene dada por

$$V = \frac{(E'_0 - E_0) R_v}{R_i + R_v + R'_i} \quad (8-51)$$

Supóngase ahora que, quitando R_L , se ajusta k para dar una lectura cero del voltímetro. La Ec. (8-51) pasa a ser, con $R_L \rightarrow \infty$, $E_0 = E$ y $R_i = R$,

$$0 = \frac{(E'_0 - E) R_v}{R + R_v + R'_i} \quad (8-52)$$

Por tanto, $E'_0 = E$, y el valor correspondiente de k puede obtenerse de la Ec. (8-49). Dado que R'_i también queda fijado por este ajuste, también puede ser hallado mediante la Ec. (8-50). Si llamamos R_0 a este valor fijado:

$$R_0 = \frac{E}{E_1} \left(1 - \frac{E}{E_1} \right) (R_2 + R_1) \quad (8-53)$$

Entonces V viene dado, para cualquier valor de R_L , en función de su ajuste inicial, por

$$V = \frac{[E - R_L E / (R + R_L)] R_v}{R_i + R_v + R_0} = \frac{ER}{R + R_L} \left[\frac{1}{1 + (R_i + R_0) / R_v} \right] \quad (8-54)$$

en que R_i está dado por la Ec. (8-48).

En este resultado final se puede ver que si $R_v \rightarrow \infty$, la lectura del voltímetro es $V = ER / (R + R_L)$. Esta es la diferencia real entre la tensión de suministro en vacío y su valor en carga. Por tanto, la lectura del voltímetro es siempre proporcional a su diferencia real, aun cuando R_v no sea infinita. La Ec. (8-54) demuestra que se debe satisfacer la siguiente desigualdad si R_v tuviera un efecto despreciable en la lectura V .

$$R_v \gg \frac{RR_L}{R + R_L} + \frac{E}{E_1} \left(1 - \frac{E}{E_1} \right) (R_2 + R_1) \quad (8-55)$$

Esto significa que la resistencia del voltímetro debe ser grande en comparación con la suma de las resistencias resultantes de la fuente en carga y del sistema de referencia. En este caso la lectura del voltímetro daría el cambio real de tensión.

Si R_v es grande, pero no despreciable, habría de obtenerse un término de corrección de primer grado, desarrollando el término de error de la Ec. (8-54) por el desarrollo binómico.

$$\left(1 + \frac{R_i + R_0}{R_v} \right)^{-1} = 1 - \frac{R_i + R_0}{R_v} + \dots$$

Entonces el error fraccional, δ , en la lectura del voltímetro es

$$\delta = \frac{ER/(R + R_L) - V}{ER/(R + R_L)} \approx \frac{R_i + R_0}{R_v} \quad (8-56)$$

Puesto que el error es positivo, la lectura V es menor que la que se obtendría con un voltímetro ideal.

8-17. Amperímetro diferencial. Se puede utilizar un sistema parecido para conseguir un amperímetro diferencial que dé indicaciones directas de las pequeñas variaciones de la corriente, I , en la Fig. 8-21. Para simplificar, supóngase que la resistencia fija, S , es mucho menor que la impedancia de la fuente de corriente I . Entonces podemos aplicar el an-

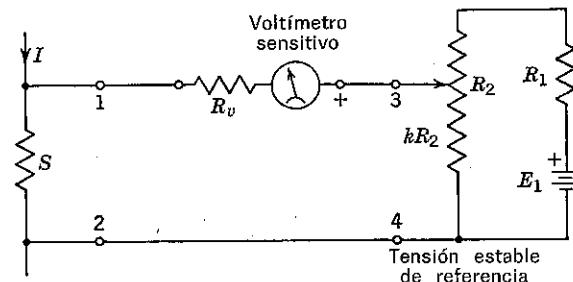


FIG. 8-21. Amperímetro diferencial.

lisis precedente directamente, sustituyendo E_0 por IS y R_i por S . La lectura del voltímetro se obtiene de la Ec. (8-51).

$$V = \frac{(E'_0 - IS)R_v}{S + R_v + R'_i} \quad (8-57)$$

Si ahora ajustamos k para dar $V = 0$ para la corriente I , entonces $E'_0 = IS$ y $R'_i = R_0$ son fijas. De la Ec. (8-53) se obtiene el valor de R_0 con $E = IS$.

$$R_0 = \frac{IS}{E_1} \left(1 - \frac{IS}{E_1} \right) (R_2 + R_1) \quad (8-58)$$

Por tanto, un cambio de I a $I + \Delta I$, en que ΔI no es necesariamente pequeño, producirá un cambio en la lectura del voltímetro

$$\Delta V = \frac{-S \Delta I}{1 + (S + R_0)/R_v} \quad (8-59)$$

Donde se ve que el cambio de tensión es proporcional al cambio de corriente. Más aún, si $R_v \gg (S + R_0)$ el cambio real de la corriente a

partir de su valor I (siendo $V = 0$) puede hallarse dividiendo la lectura del voltímetro por S .

Una de las aplicaciones del amperímetro diferencial es el control de una corriente que debe mantenerse entre límites muy estrechos de un valor fijo I . La fuente de referencia debe dar, por supuesto, una variación en tanto por ciento mucho más pequeña que la variación porcentual permisible en la corriente que se debe controlar.

8-18. Galvanómetro diferencial. Se puede diseñar un tipo especial de galvanómetro para ser utilizado en medidas diferenciales. Los fundamentos de su funcionamiento son los mismos que los de un tipo normal de d'Arsonval, pero va equipado con dos bobinas aisladas entre sí y arrolladas en forma íntimamente superpuesta sobre el mismo núcleo. Las dos bobinas están hechas de la forma más parecida posible. Normalmente se utiliza una bobina de «ajuste de cero» para eliminar el pequeño desequilibrio residual entre las dos bobinas que siempre se encuentra en la práctica.

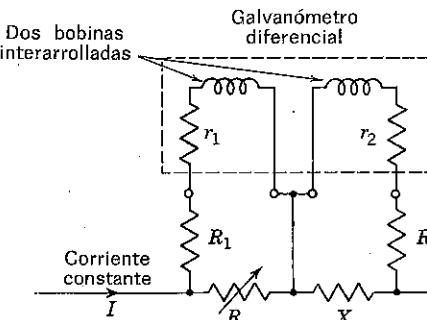


FIG. 8-22. Aplicación del galvanómetro diferencial.

El galvanómetro diferencial puede ser utilizado para medir pequeños cambios en resistencia que resultan por los efectos de calentamiento debidos a la corriente. En la Fig. 8-22 se conecta una bobina de resistencia r_1 a través de una resistencia R_1 , a una resistencia ajustable con compensación térmica, R . Esta resistencia es capaz de soportar grandes corrientes sin efectos apreciables en su resistencia. La resistencia X , que se quiere probar, se conecta a través de R_2 a la otra bobina de resistencia r_2 . La porción de corriente constante de entrada I , que pasa por la bobina a través de R , viene dada, según la ley de repartición de corrientes, por

$$I_1 = \frac{RI}{R + R_1 + r_1} \quad (8-60)$$

De la misma forma, la corriente en la otra bobina es

$$I_2 = \frac{XI}{X + R_2 + r_2} \quad (8-61)$$

Cuando $I_1 = I_2$ el galvanómetro correctamente ajustado dará deflexión cero, en cuyo caso se pueden igualar las Ecs. (8-60) y (8-61), y despejar X .

$$X = R \frac{R_2 + r_2}{R_1 + r_1} \quad (8-62)$$

Para un valor dado inicial de X se puede ajustar R para que satisfaga esta ecuación de forma que se produzca la lectura de cero. Después, dado que X cambia debido al calentamiento producido por el paso de la corriente, cambiará la corriente I_2 , pero I_1 permanecerá constante.

El cambio de I_2 resultante de un pequeño cambio, dX , en X , viene dado por la diferencial de la Ec. (8-61).

$$dI_2 = \frac{(R_2 + r_2)I dX}{(X + R_2 + r_2)^2} \quad (8-63)$$

Puesto que el galvanómetro responde a dI_2 , su deflexión puede utilizarse como una medida de dX . Si $(R_2 + r_2) \gg X$, la Ec. (8-63) queda reducida a

$$dI_2 = \frac{I dX}{R_2 + r_2} \quad (R_2 + r_2) \gg X \quad (8-64)$$

Con I conocida y constante, se pueden relacionar sencillamente las lecturas con dX en este caso. En la práctica esta desigualdad se satisface fácilmente en muchos casos. Esto es conveniente, ya que I_2 es despreciable con respecto a I , y la corriente a través de X permanece sustancialmente la misma a pesar de los cambios en X .

Fácilmente se pueden ver otras aplicaciones del galvanómetro diferencial. Por ejemplo, se puede utilizar el circuito de la Fig. 8-22 para determinar X en función de la resistencia conocida R . Efectivamente, si en la Ec. (8-62) $R_1 + r_1 = R_2 + r_2$, entonces R y X son iguales cuando el galvanómetro dé reflexión cero. Este es en realidad un método de cero para determinar una resistencia. En el capítulo siguiente se discuten métodos semejantes con más detalle.

PROBLEMAS

8-1 (§ 4). En el óhmetro serie de la Fig. 8-2, $E = 1,5$ V, $R = 1,0$ ohmios, $R_m = 10$ ohmios, y el aparato de medida tiene 10 mA de fondo de escala. a) ¿Qué valor ha de tener R_1 para dar deflexión total de escala para $X = 0$? b) ¿Qué valor de X daría deflexión mitad de escala? c) Demostrar que la deflexión del aparato (en relación con la máxima) representada en función del logaritmo de X/R_s es una curva simétrica.

8-2 (§ 4). Un óhmetro serie consta de una batería de 3 V en serie con una resistencia de 60.000 ohmios y con el instrumento móvil del aparato de medida. Accidentalmente se

conecta a un circuito «activo» como indica la Fig. 8-23. ¿Qué resistencia indicará el óhmetro? Supónganse despreciables las resistencias del aparato y de la batería frente a los 60.000 ohmios.

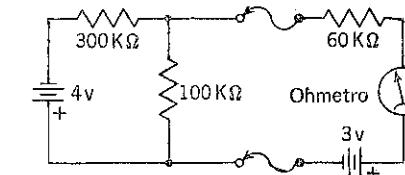


FIG. 8-23. Ohmetro conectado a un circuito «activo».

8-3 (§ 4). Para comparar dos óhmetros serie idénticos se conectan simultáneamente a una resistencia de 1.000 ohmios, como se ve en la Fig. 8-24. ¿Cuáles son las lecturas de los óhmetros?

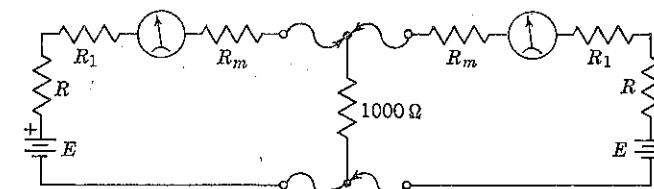


FIG. 8-24. Comparación de óhmetros idénticos.

8-4 (§ 4). Un óhmetro serie, que tiene un centro de escala de diseño, de 5.000 ohmios, tiene su batería gastada, pero no se quiere cambiar. En lugar de eso se decide utilizarlo tal «como está», aun cuando mide 500 ohmios en lugar de cero cuando está cortocircuitado. Cuando se conecta a la resistencia que se desea medir, da una lectura de 30.000 ohmios. ¿Cuál es el valor real de la resistencia?

8-5 (§ 4). La falta de certeza en la lectura de la deflexión angular de la aguja de óhmetro serie con movimiento lineal de d'Arsonval es el 1 por 100 del ángulo total entre cero y final de escala. Sobre qué campo de valores de X , colocada entre los terminales, esta falta de certeza dará un error menor del 10 por 100 en la determinación de X ? Dése la respuesta como múltiplo de R_s que es el valor de diseño de media escala del óhmetro.

8-6 (§ 5). En la Fig. 8-25 aparece un óhmetro de un tipo no corriente. La deflexión fraccionaria de final de escala del óhmetro se define como $F = I_x/I_0$, en que I_x es la corriente

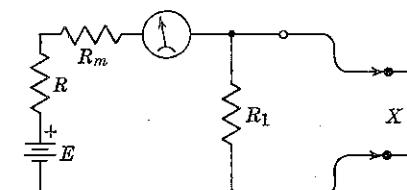


FIG. 8-25. Circuito de óhmetro no corriente.

del aparato para cualquier valor de X , e I_0 es la corriente de final de escala que ocurre cuando $X = 0$. a) Trácese la curva de F en función de X , y especifiquense los valores de F para $X = 0$ y $X \rightarrow \infty$, en función de R_1 , R_m y R . b) ¿Para qué valor de X (en función de R_1 , R_m

y $R)F = \frac{1}{2}$? c) En la curva de F en función de X , demostrar que la relación entre la pendiente para $X = 0$ y la pendiente para otro valor de X , viene dada por $(1 + Gx)^2$, en que G es la conductancia de entrada del óhmetro.

8-7 (§ 5). Diseñar un circuito de óhmetro shunt con un punto medio de escala proyectado de 20 ohmios, utilizando una batería de 1,5 V y un instrumento móvil de 50 mV, 500 mA. Incluyase un medio para ajustar el circuito, a fin de compensarlo cuando envejezca la batería.

8-8 (§ 6). Un óhmetro serie consta de una batería de 4,5 V, una resistencia fija de 4.000 ohmios, otra variable de 1.000 ohmios y un instrumento de 1 mA y con resistencia de 50 ohmios. a) ¿Cuál es el valor de diseño de media escala para este óhmetro? b) Si se conecta la misma resistencia variable de 1.000 ohmios en paralelo (en lugar de en serie) con el instrumento móvil, produciendo así un óhmetro serie de ajuste-shunt, ¿cuál será ahora la resistencia que produzca desviación de media escala?

8-9 (§ 6). Un óhmetro de doble escala ha sido diseñado de acuerdo con la Fig. 8-26. Hay un interruptor, que no aparece en la figura, que indica «alta-baja». Cuando el interruptor está en la posición «alta», la resistencia desconocida queda conectada entre A y B, dejando C y D en vacío. Cuando el interruptor está en la posición «baja», la resistencia desconocida se conecta entre C y D, quedando A y B en corto circuito. El aparato tiene un instrumento móvil de 1 mA y 50 mV. Si las resistencias de 50 ohmios y de 1.000 ohmios permanecen invariables en las dos posiciones del interruptor, ¿cuáles son las lecturas de media escala en cada caso?

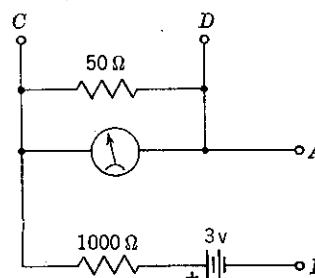


FIG. 8-26. Parte del circuito de un óhmetro.

8-10 (§ 6). Un óhmetro serie del tipo que aparece en la Fig. 8-9 utiliza un instrumento móvil de 100 μ A que tiene una caída de tensión para final de escala de 5 mV. Supóngase que la resistencia de las pilas es despreciable comparada con $R_1 = 7.500$ ohmios. a) Especificar los valores máximo y mínimo del shunt, S , necesario para conseguir poner a «cero» el óhmetro, con una batería que tiene, «nueva», un voltaje $E = 1,5$ V, y de 1,1 V cuando está «envejecida». b) Suponiendo un calibrado perfecto del óhmetro para $E = 1,5$, calcular la lectura en la escala cuando se mide una resistencia de 8.000 ohmios estando las pilas en su mínima tensión ($E = 1,1$ V).

8-11 (§ 6). Determinar, para el óhmetro serie de la Fig. 8-9, una expresión para el cambio, dS , en la resistencia shunt, S , necesario para restablecer la corriente del instrumento a fin de escala, si la f.e.m. de las pilas cambia en una pequeña cantidad, dE , y su resistencia en dR .

8-12 (§ 6). Derivar la Ec. (8-24).

8-13 (§ 6). Se quiere diseñar un óhmetro de doble escala, utilizando un instrumento móvil de d'Arsonval de 20 μ A y 12 ohmios; una pila seca de f.e.m. inicial $E = 6$ V y resistencia inicial $R = 1$ ohmio y el circuito de la Fig. 8-27. Con el interruptor bipolar en la posición 1, la lectura de media escala deberá ser 1.000 ohmios. En la posición 2, la lectura de media escala deberá ser 100.000 ohmios. La pila deberá utilizarse hasta que E haya bajado

aproximadamente 5 V, en cuyo momento R habrá subido a 20 ohmios. En este momento ya será necesario cambiar la pila, ya que no se podrá obtener el «cero» en el ajuste inicial del instrumento. Especificar los valores de las resistencias R_1 , R_2 , S_1 , S_2 y S que se necesitarán para realizar este diseño.

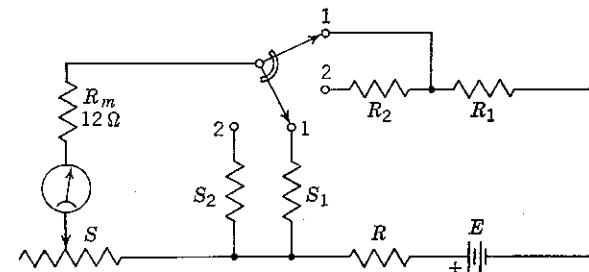


FIG. 8-27. Diseño de un óhmetro de doble escala.

8-14 (§ 7). Refiérese al análisis del voltímetro-amperímetro que se presenta en la Sec. 5-6. Deducir una regla algebraica cuantitativa en función de las lecturas del instrumento para determinar cuál de las dos posiciones del interruptor da una mejor aproximación, si la resistencia desconocida, X , se calcula mediante la relación entre las lecturas del voltímetro y del amperímetro. La regla debe expresarse en función de las cuatro lecturas observadas solamente: V_1 , I_1 , V_2 , I_2 . Supóngase que la resistencia de la pila es cero, $R = 0$.

8-15 (§ 7). En el método de pérdida de carga para determinar la resistencia de descarga, se mide la relación entre la primera y segunda deflexión del galvanómetro balístico, y da $6,0 \pm 1$ por 100 cuando se utiliza un tiempo de descarga $t = 100$ seg ± 1 por 100. La capacidad, C , es $1,0 \mu\text{F} \pm 1$ por 100. Todos los errores expresados son desviaciones normales. Calcúlese la resistencia de descarga, R , y su desviación normal.

8-16 (§ 8). Comprobar la Ec. (8-28).

8-17 (§ 8). Con objeto de corregir la reducción de corriente debida a la inserción de un amperímetro, se utiliza una resistencia auxiliar, R , en paralelo con un amperímetro de resistencia R_a . Se hacen lecturas I_1 e I_2 con la resistencia en paralelo, R , desconectada y conectada, respectivamente. Encontrar una fórmula mediante la cual, y en función de las cantidades conocidas I_1 , I_2 , R y R_a , se pueda hallar la corriente de corto circuito que existía antes de conectar el amperímetro.

8-18 (§ 9). Comprobar la Ec. (8-33).

8-19 (§ 9). Con objeto de corregir la reducción de tensión debida a la inserción de un voltímetro, se utiliza una resistencia auxiliar, R , en paralelo con un voltímetro de resistencia R_v . Se hacen lecturas V_1 y V_2 con la resistencia R en paralelo desconectada y conectada respectivamente. Hallar una fórmula mediante la cual, y en función de las cantidades conocidas, V_1 , V_2 , R y R_v , se pueda hallar la tensión, en vacío, que existía antes de conectar el voltímetro.

8-20 (§ 10). Se utiliza una resistencia auxiliar R_1 en paralelo con un amperímetro, con objeto de determinar su resistencia, R_a . Se realizan las lecturas I_1 e I_2 con la resistencia R_1 desconectada y conectada respectivamente. a) Hallar una expresión de R_a en función de I_1 , I_2 , R_1 y la resistencia R . b) ¿En qué condiciones se puede realizar mejor el método de media deflexión?

8-21 (§ 11). Utilizando el circuito de la Fig. 8-13, se determina indirectamente la resistencia interna, R , de una batería. Se realizan cinco lecturas de voltímetro, en voltios, con los correspondientes valores de R_L en ohmios, entre paréntesis, como sigue $5,00(\infty)$, $4,45(1,00)$, $4,00(0,50)$, $3,77(0,40)$, $3,50(0,30)$. Hágase una determinación ponderada de R usando el método gráfico de la Fig. 8-15, y compárese este resultado con la media de los cuatro resultados calculados. Supóngase que R_v es mucho mayor que R_L y R .

8-22 (§ 13). ¿De qué forma varía la Ec. (8-42), si no se desprecia la resistencia del voltímetro? ¿Cuál es el significado gráfico del efecto de R_v ?

8-23 (§ 13). Compruébese la Ec. (8-45).

8-24 (§ 13). En el circuito de la Fig. 8-16, $R \gg R_1$ y $R \gg R_2$. Hallar una expresión aproximada para el error relativo que implica el uso de la Ec. (8-46), si R_v es grande comparada con R_1 y R_2 , pero no lo suficientemente grande como para ser despreciado.

8-25 (§ 17). En el amperímetro diferencial de la Fig. 8-21, se ajusta k para dar $V = 0$ cuando la caída de tensión en S es IS . Hallar una expresión para la relación entre el cambio de la lectura del voltímetro debido a un cambio dI en I , y el cambio en la lectura del voltímetro debido a un cambio dS en S .

8-26 (§ 18). En el circuito del galvanómetro diferencial de la Fig. 8-22, se ajusta R para la deflexión cero del galvanómetro para una corriente constante I . ¿Cuál será el cambio en la lectura del galvanómetro si I pasa a ser $I + \Delta I$, permaneciendo constantes todos los otros parámetros? ΔI no es necesariamente pequeño comparado con I .

8-27 (§ 18). En el circuito del galvanómetro diferencial de la Fig. 8-22, $I = 20$ mA y es constante, $R_2 + r_2 = 10X$, y R se ajusta para la deflexión cero del galvanómetro. Entonces X se aumenta en un 10 por 100 a $1,1X$. La sensibilidad del galvanómetro es 0,1 mm por μ A. Hallar la exacta deflexión del galvanómetro y compárese con los resultados aproximados obtenidos de las Ecs. (8-63) y (8-64).

CAPITULO 9

MEDIDA POR METODOS DE CERO

Aunque los métodos de medida por deflexión son ventajosos por su rapidez y comodidad son incapaces de proporcionar la precisión que se requiere en muchos casos. Frecuentemente hay que recurrir a los métodos de medida por cero si se quiere mejorar la precisión. Algunos métodos de medida por cero incluso presentan ventajas operativas sobre los métodos por deflexión. En este capítulo se describen varias aplicaciones de los métodos de cero en c. c. y baja frecuencia. Servirán para indicar los principios básicos y propiedades de las medidas por cero.

9-1. El método de cero. En el método de cero se determina una cantidad a partir de otras magnitudes conocidas cuando un instrumento marca cero. Precisa que la sensibilidad del instrumento sea adecuada, pero no requiere calibración. Por tanto, se encuentra libre de errores achacables a la calibración del instrumento.

Los resultados obtenidos con el método de cero dependen de otras condiciones del sistema. Por ejemplo, los elementos del circuito o sus relaciones se suponen conocidos por algún procedimiento. Corrientes, voltajes o frecuencias se suponen estables en muchas ocasiones. Tales condiciones deben influir inevitablemente, y el resultado no puede considerarse más seguro que las condiciones «conocidas». Existe un riesgo al emplear métodos de cero; pues las desviaciones de las condiciones que se suponen conocidas no se manifiestan siempre por sí mismas. El método de cero puede realizarse sin dificultad aparente, dejando al experimentador desapercibido de un resultado erróneo. La diferencia entre resultados legítimos e ilegítimos, en todas las medidas, se puede atribuir la mayor parte de las veces a la técnica y sagacidad del experimentador, pero muy particularmente en el método de cero.

Por sucesivos ajustes experimentales suele acercarse a las condiciones en las que se obtiene el cero. En las últimas etapas de ajuste la sensibilidad del detector de cero debe ser tal que detecte el menor cambio de cualquier magnitud que afecte al cero. Esto algunas veces requiere sensibilidad extrema. Sin embargo, si en las etapas iniciales se usara la misma sensibilidad, el instrumento podría quedar permanentemente dañado por excesiva sobrecarga. En consecuencia, el procedimiento usual es

ajustar la sensibilidad del detector conforme se va alcanzando el cero. Esto se efectúa fácilmente mediante shunts. Todas las operaciones manuales pueden dominarse con un poco de práctica, y no es preciso que sean demasiado engorrosas o largas, si se opera con juicio y destreza.

Debe entenderse claramente que un nulo o *indicación de cero* no significa que se ha obtenido un resultado matemáticamente cero. Siempre existe una desviación del cero, aunque puede no ser observable en el detector de cero empleado. Aumentando la sensibilidad se manifestará esta desviación experimentalmente. La desviación de cero puede atribuirse a la deriva de la corriente o a la inestabilidad de los elementos del circuito. Aun eliminando tales efectos quedan otros efectos residuales como el ruido térmico de las resistencias, pequeñas f.e.m. que aparecen en la unión de metales diferentes, o fluctuaciones inherentes al instrumento. Estos efectos establecen un límite superior para la sensibilidad. En una situación determinada la sensibilidad que se emplee no debe ser superior a la precisa para detectar los cambios significativos más pequeños. Elevar la sensibilidad es el método más torpe y lento de alcanzar el cero. Con un diseño experimental adecuado es posible controlar las condiciones de modo que se pueda utilizar una sensibilidad adecuada sin serias perturbaciones debidas a los efectos residuales.

9-2. Métodos generales de cero. La mayoría de los métodos de cero se clasifican en dos categorías: por comparación o sustitución (ver Fig. 8-1). Sin embargo, existen métodos especiales y también algunos métodos combinación de cero y deflexión. Algunos métodos no pertene-

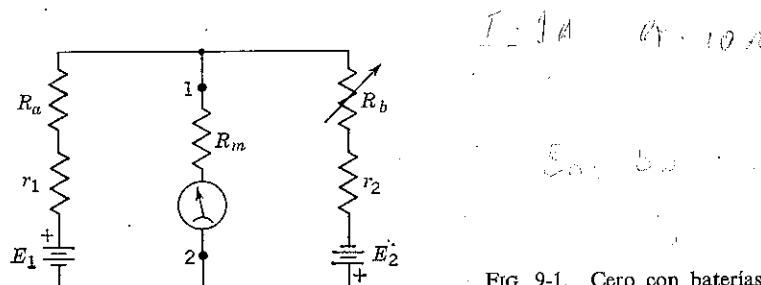


FIG. 9-1. Cero con baterías auxiliares.

necen a ninguna categoría particular y se les designa como métodos generales.

El sencillo circuito de la Fig. 9-1 puede producir un cero a través de los terminales 1-2 y puede usarse para medir las f.e.m. y resistencia interna de las baterías, variando las cargas. La corriente que atraviesa el indicador, de resistencia R_m , se puede obtener por análisis de mallas o nudos o bien aplicando el teorema de Thévenin. Usando el teorema de

Thévenin el instrumento puede eliminarse y la corriente que circula en el sentido de las agujas del reloj es

$$I = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2}$$

donde $R_1 = r_1 + R_a$ y $R_2 = r_2 + R_b$. Por tanto, el voltaje en circuito abierto entre los terminales 1 y 2 es

$$E_0 = E_1 - IR_1 = \frac{E_1 R_2 - E_2 R_1}{R_1 + R_2} \quad (9-1)$$

La resistencia de entrada R_i entre los terminales 1-2 se obtiene remplazando las baterías por sus resistencias internas r_1 y r_2 . Entonces R_1 está en paralelo con R_2 y

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (9-2)$$

Establecido el circuito equivalente, según el teorema de Thévenin, la corriente a través del instrumento viene dada por

$$I_m = \frac{E_0}{R_i + R_m} \quad (9-3)$$

Cuando $E_0 = 0$, la corriente en el instrumento es cero. Esto ocurre cuando R_b se ajusta para que cumpla la relación

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_1 + R_a}{r_2 + R_b} = \frac{R_1}{R_2} \quad (9-4)$$

como puede verse en la Ec. (9-1). La Ec. (9-4) se llama la condición de cero. Puede hacerse fácilmente que las resistencias externas R_a y R_b sean mucho mayores que r_1 y r_2 , respectivamente. Entonces la condición de cero es aproximadamente

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_a}{R_b} \quad R_a \gg r_1, R_b \gg r_2 \quad (9-5)$$

Varias aplicaciones del circuito son evidentes. Por ejemplo, si se conoce la relación de R_a a R_b que produce un cero, la relación entre las f.e.m. queda establecida la Ec. (9-5). Esta relación se determina en condiciones de corriente, I , igual para ambas baterías. Obtenida la relación de f.e.m. y mediante otros pequeños valores conocidos de R_a y R_b se pueden determinar las resistencias de las baterías, estableciendo otros ceros, usando la Ec. (9-4). Por otra parte, con diversos valores de R_a y R_b siempre muy

superiores a r_1 y r_2 se puede investigar la relación de f.e.m. con diversas corrientes en las baterías.

No es preciso realizar un análisis completo del circuito si solo se busca la condición de cero. El cero requerido se puede incluir en el cálculo y obtenerse directamente la condición de cero. Por ejemplo: corriente cero a través de R_m en el circuito de la Fig. 9-1 implica que el voltaje entre los terminales 1-2 sea cero. Por tanto, con una corriente circulando en el sentido de las agujas del reloj, como antes,

$$E_1 - IR_1 = 0 \quad \text{y} \quad E_2 - IR_2 = 0$$

Trasponiendo la f.e.m. y dividiendo desaparece la I dando la Ec. (9-4) inmediatamente. Esta técnica se usará cuando se busque la condición de cero solamente, ya que ella conduce al resultado rápida y simplemente.

Para ilustrar esta técnica aún más, la condición de cero para el circuito de la Fig. 9-2 puede obtenerse directamente con el siguiente razonamiento: Existe cero cuando la corriente I_m a través del instrumento es cero. Entonces el voltaje en la parte inferior kR del control R viene dado simplemente por $E_1 kR / (R + r_1)$ y debe ser igual a E_2 . De aquí la condición de cero es

$$E_2 = \frac{E_1 kR}{R + r_1} \quad (9-6)$$

Más difícil habría sido deducir la expresión general de I_m y después igualarla a cero. Si $R \gg r_1$, la condición de cero queda en $E_2 = kE_1$. Por

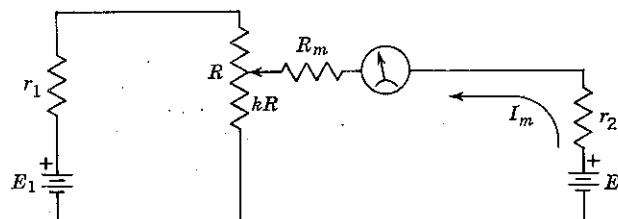


FIG. 9-2. Cero con baterías opuestas.

tanto, conocidos E_1 y k la f.e.m. de E_2 se determina con independencia de su resistencia interna r_2 , pues no se toma corriente de la batería cuando $I_m = 0$.

Este circuito es virtualmente igual al usado en los métodos diferenciales del capítulo precedente, pero aquí se usa exclusivamente en condiciones de cero. La acusada analogía entre los métodos de cero y los diferenciales se discutirá con detalle en la Sec. 9-15. Por otra parte, el circuito de la Fig. 9-2 está muy relacionado al potenciómetro, que se discutirá posteriormente.

El dejar de lado las soluciones fuera del cero no debe dar la impresión de que tales soluciones no tienen importancia; por el contrario, contienen valiosa información pensando en la sensibilidad, precisión y estabilidad del dispositivo de cero. Frecuentemente el comportamiento del circuito fuera de cero es más bien complejo y se emplean métodos especiales de análisis. El teorema de la compensación, particularmente, es un instrumento muy útil, como se demostrará.

Otros muchos métodos generales se usan en la práctica, tanto en medidas precisas como groseras. Para dar un atisbo de sus posibilidades

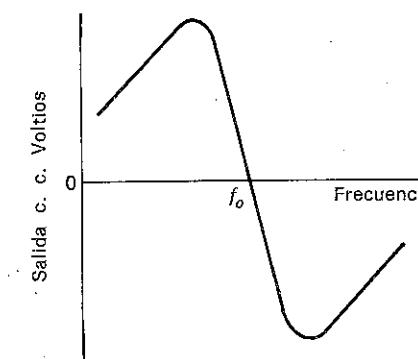


FIG. 9-3. Característica del discriminador.

daremos un ejemplo más, en forma cualitativa. Un elemento llamado discriminador, empleado en la detección de señales moduladas en frecuencia, puede usarse como base de un método de cero para determinar la frecuencia. Los elementos básicos de un discriminador son circuitos resonantes y rectificadores, diseñados para producir un voltaje de salida en c. c. de la forma indicada en la Fig. 9-3, como función de la frecuencia de entrada al discriminador. Este sistema puede emplearse para ajustar un oscilador a la frecuencia central f_0 , al obtener una lectura nula en un voltímetro conectado a la salida del discriminador. En tanto no sea necesario un método preciso, será muy útil como rápido procedimiento de ajuste en una cadena de producción, en la que un gran número de osciladoras deben ponerse a la misma frecuencia con un mínimo de complicación. Cuando la salida del oscilador alimenta al discriminador simplemente se ajustará con un destornillador el oscilador hasta que la indicación del voltímetro sea cero.

9-3. Voltímetro de retroceso. En la mayoría de los métodos de cero el indicador produce una salida que, a menos que se cumpla la condición de cero, siempre es distinta de cero. En tal caso ajustando en una dirección un parámetro el indicador *cruzará* el cero, quedando entonces definido el cero de una forma clara y aguda. Sin embargo, algunos mé-

todos de cero disponen de un cero «unilateral», por ejemplo, el utilísimo voltímetro de retroceso. En esta ocasión el ajuste en una dirección hace disminuir la indicación al aproximarse al cero por un lado, pero permanece la indicación alcanzada en la condición de cero, al sobrepasar esta condición. Es menos deseable que el cero claramente definido, en los casos más convencionales. Pero la capacidad del voltímetro de retroceso

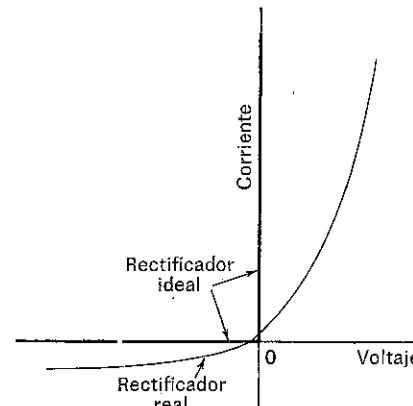


FIG. 9-4. Características del rectificador.

para medir valores de pico de señales, cualquiera que sea su forma, compensa esta desventaja.

El voltímetro de retroceso emplea un dispositivo llamado rectificador. Los rectificadores son útiles en varias clases de instrumentos y nos referiremos a ellos en capítulos posteriores. Un *rectificador ideal* es un elemento de dos terminales no lineal, que presenta resistencia nula para una polaridad de la tensión aplicada, llamada tensión directa, y resistencia infinita para la polaridad opuesta, llamada tensión inversa. La característica tensión-corriente aparece en la Fig. 9-4. La pendiente en la curva tensión-corriente es igual a la inversa de la resistencia del rectificador. En la práctica los rectificadores difieren del ideal, como aparece en la característica de la Fig. 9-4. Relaciones típicas de la resistencia inversa a la directa son más bien del orden de 50:1 a 100:1, en lugar de infinito. Ni la resistencia inversa ni la directa son constantes, sino que varían con la tensión aplicada. Naturalmente, si se aplica una tensión, directa o inversa, demasiado grande el rectificador llega a ruptura y a daño permanente. En algunos circuitos existe una pequeña corriente incluso cuando la tensión aplicada es cero, si el rectificador se encuentra en un circuito cerrado. Se la llama «corriente opaca».

Un diodo de vacío, representado esquemáticamente en la Fig. 9-5, es un tipo práctico de rectificador, en el cual los electrones, en sentido contrario a i , pasan del catodo a la placa bajo la influencia del campo

eléctrico producido en la válvula por el voltaje directo. Se requiere tensión de filamentos para producir emisión termoiónica en el catodo y ésta es la primera desventaja del diodo. Otro tipo de rectificadores puede

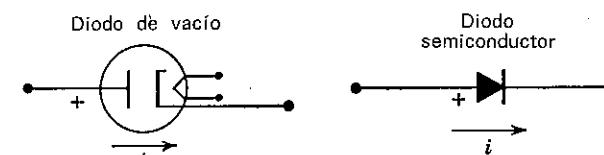


FIG. 9-5. Símbolos del rectificador.

obtenerse usando un metal en contacto con un semiconductor. Este tipo no tiene filamento. El símbolo de esta clase de rectificador aparece también en la Fig. 9-5. La punta de un fino alambre metálico, apoyada sobre un cristal de germanio o silicio, es el tipo de punta de «contacto». Otra forma, un disco de cobre con un depósito de óxido de cobre, se usa frecuentemente en instrumentos, pues muchas unidades rectificadoras se pueden disponer de un modo compacto.

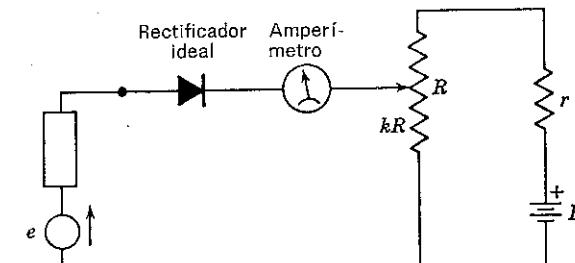


FIG. 9-6. Voltímetro de retroceso.

Un circuito de voltímetro de retroceso que utiliza un rectificador ideal únicamente es el de la Fig. 9-6. Un voltaje e , de cualquier forma de onda, se aplica en serie con el rectificador con el propósito de medir un valor de pico. La caja en serie con e contiene un circuito arbitrario que puede asociarse con e . Una tensión inversa controlable se introduce en serie con el rectificador por medio de la batería y el control kR . El rectificador conducirá, toda vez que e es una subida de tensión en la dirección de la flecha junto a e , si el valor de e excede al voltaje en kR . La unidireccional corriente resultante puede detectarse con el sensible amperímetro de c. c. El voltaje inverso puede aumentarse aumentando k hasta que la deflexión del amperímetro sea cero. En este instante la tensión en kR es igual a la tensión de pico de e . La lectura del amperímetro sigue siendo cero si k se aumenta aún más, ya que e no puede superar al voltaje inverso de kR . A causa de la naturaleza unilateral de este cero, una técnica apropiada es aumentar k deliberadamente más allá del primer punto en que se ob-

serva cero y entonces deslizar k al contrario hasta que el amperímetro simplemente se mueve. De aquí el nombre de «retroceso».

Este circuito permite la determinación del valor de pico de e independientemente de su forma de onda e independientemente de los elementos del circuito interno. En la práctica se puede disponer un voltímetro en kR para obtener una lectura directa del valor de pico de e . Si e es una señal alterna el último rastro de la señal en kR se pierde al ajustar k para corriente de rectificador nula. Por tanto, un oscilógrafo calibrado se puede conectar en kR y el amperímetro y voltímetro son innecesarios. Esta es una técnica especialmente útil cuando e es un corto pulso, pues entonces la corriente media en el amperímetro es pequeña incluso antes de que k se acerque al punto de cero. Un oscilógrafo de alta ganancia permite observar los últimos vestigios del pulso en kR al aumentar k . Circuitos más sensibles que combinan rectificación y amplificación se usan en la práctica, pero los principios de operación son los mismos que los descritos.

9-4. Métodos de comparación. Cuando se emplea un método de comparación, en el método de cero se pueden evitar los efectos de carga hallados a menudo cuando el mismo método se usaba en deflexión. Además no se tiene en cuenta la calibración del instrumento. Por tanto, el método de cero por comparación puede ser muy preciso y requiere pocas o ninguna corrección. Como todos los métodos son fundamentalmente comparativos, debe introducirse con cuidado. En el método de comparación dos cantidades análogas que coexisten en el experimento se comparan directamente. Aunque el voltímetro de retroceso de la sección precedente compara dos voltajes, no está clasificado como un método de comparación. Hay una distinción clara entre el voltaje estacionario en kR y el valor de pico de un voltaje e que varía con el tiempo. Una vez más la clasificación está lejos de ser menos importante que la comprensión de un método determinado.

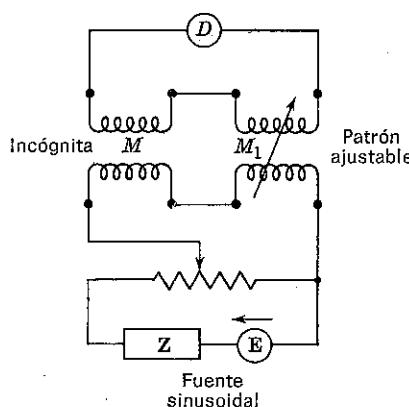


FIG. 9-7. Medida de inductancia mutua.

El método de comparación es simple, pero eficaz. Quizá es el usado con más frecuencia en medidas de precisión. Combinados con técnicas de cero algunos circuitos son complicados, pero otros son bastante elementales, como ilustra la Fig. 9-7. Aquí se utiliza un método de comparación por cero, para medir una inductancia mutua desconocida, M , en función de una inductancia mutua patrón, M_1 , ajustable hasta el valor M . Una fuente sinusoidal proporciona la misma corriente a los primarios conectados en serie de las bobinas desconocida y patrón. Los voltajes inducidos en los secundarios, conectados en serie oposición, serán iguales y opuestos cuando M_1 se ajusta para que el detector D marque cero. Ahora la condición de cero es $M_1 = M$, pues las corrientes del principio son iguales y, desde luego, tienen la misma frecuencia. Ni la impedancia de la fuente ni del detector impiden esta conclusión.

9-5. Principios potenciométricos. El potenciómetro es uno de los elementos más importantes en la medida de tensiones de c. c. Compára por cero una f.e.m. desconocida con la de una pila patrón. La medida es independiente de la resistencia interna de ambas, y se realiza con el intermedio de una relación de resistencias, que se conoce muy exactamente. Hay una multitud de tipos de potenciómetro, de uso general y especiales. Se encuentran entre ellos el potenciómetro de Leeds y Northrup tipo K, el Rubicón tipo B, el Brown, el Brooks, el Diesselhorst, el Wenner y el White. Drysdale, Gall, Jarson, Pederson y otros han construido potenciómetros para c. a., pero no trataremos de ellos.

La mayoría de los potenciómetros operan con los mismos principios básicos. Podemos describirlos usando el potenciómetro de cursor representado en la Fig. 9-8. La batería de f.e.m. E , llamada batería de trabajo, proporciona una intensidad de trabajo I , controlable mediante la longitud de alambre resistivo R , que abarca el cursor. Con el interruptor del galvanómetro en la posición de pila patrón, s , se obtiene una indicación de cero en el galvanómetro ajustando el contacto móvil a la posición 1, puesto que las polaridades de E y E_s son compatibles. Entonces la caída de tensión en el hilo entre los puntos 0 y 1, de resistencia R_{01} , será igual a la f.e.m. en la pila patrón.

$$E_s = IR_{01} \quad (9-7)$$

En esta condición de cero no se toma corriente de la pila patrón. Poniendo el interruptor a la posición de f.e.m. desconocida, x , en general será preciso poner el contacto móvil en una posición distinta, la 2, por ejemplo, para obtener una indicación de cero en el galvanómetro. La caída de tensión en el hilo entre los puntos 0 y 2, de resistencia R_{02} , es igual a la f.e.m. desconocida E_x .

$$E_x = IR_{02} \quad (9-8)$$

Tampoco se toma corriente de E_x cuando el galvanómetro marca cero. Si la corriente I no ha cambiado en el tiempo que transcurre entre la obtención de ambos nulos, desaparece en el cociente de las Ecs. (9-7) y (9-8). Entonces

$$\frac{E_s}{E_x} = \frac{R_{01}}{R_{02}}$$

y podemos comparar la f.e.m. desconocida y la de la pila patrón, en función del cociente de dos resistencias del hilo.

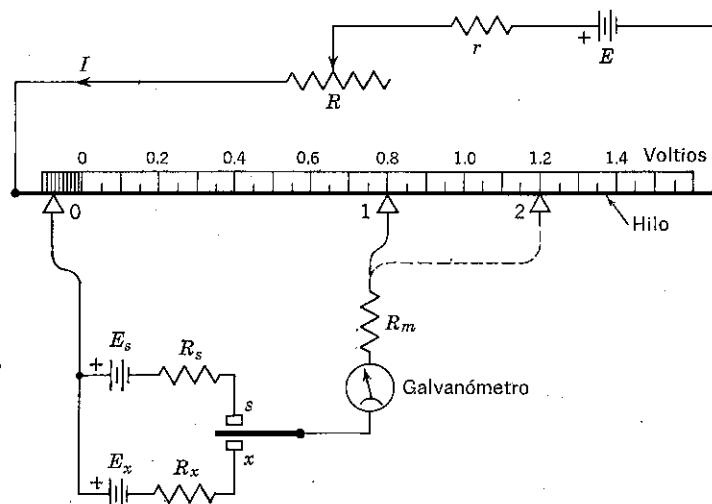


FIG. 9-8. Pontenciómetro de cursor.

Naturalmente, los potenciómetros proporcionan una lectura directa de la f.e.m. desconocida, E_x , en voltios. Se puede construir un potenciómetro de cursor de lectura directa usando un hilo de resistencia uniforme, con una escala uniforme de voltaje, adyacente al hilo; como aparece en la Fig. 9-8. El procedimiento para calibrar es, en primer lugar, situar el cursor a la posición de la escala correspondiente al valor conocido de la pila patrón. Estos valores son del orden de 1,0174 a 1,0205 V para las pilas patrón más comúnmente usadas. Entonces, con el interruptor del galvanómetro en la posición s , la corriente I se ajusta hasta que el galvanómetro marque cero, por medio de R . Se dice entonces que el potenciómetro está normalizado, o sea, que la corriente I es tal que las lecturas de la escala coinciden con las caídas de tensión en el hilo. Por consiguiente, en cualquier otra posición del cursor se puede leer directamente en voltios. Naturalmente, cualquier derivada de la corriente de trabajo I , de su valor

normalizado, producirá un error sistemático en las lecturas de la escala. Es aconsejable un ajuste periódico, ya que no se puede saber al medir E_x si I ha cambiado. Debe advertirse que el potenciómetro es siempre un instrumento de cocientes, aunque puede calibrarse para proporcionar voltios directamente.

9-6. Aplicaciones del potenciómetro. El potenciómetro es capaz de medir con cinco cifras exactas (precisión del 0,01 por 100). Además, las pilas patrón son muy satisfactoriamente patrones de tensión, como se mencionó en la Sec. 1-2. La combinación de estos dos factores sugiere que el potenciómetro es uno de los instrumentos de precisión más fundamentales, en medidas de c. c. Se usan ampliamente como voltímetro de precisión, especialmente cuando no es tolerable tomar corriente de la fuente a medir.

El potenciómetro puede sustituir al voltímetro en varios ejemplos precedentes. Por ejemplo, puede sustituir al voltímetro de la Fig. 8-11 para medir el voltaje en circuito abierto E_0 , sin tomar corriente apreciable. Puede usarse en el circuito de la Fig. 8-16 para determinar el cociente de dos resistencias sin alterar la igualdad de corriente en ambas resistencias. O puede usarse para medir una corriente con precisión si mide la caída de tensión en una resistencia precisa. Finalmente, se usa con frecuencia en la calibración de voltímetros y amperímetros, como se describe en la Sec. 5-8. Se indicó que un divisor de tensión o caja de voltios puede usarse para extender el rango del potenciómetro, el cual es inherentemente bajo a causa del escaso voltaje de la pila patrón. La caja toma corriente de la fuente que se mide, pero esto no introduce error al calibrar un voltímetro. Cuando hay que hacer mínima la corriente tomada, se deben emplear altos valores de resistencia en la caja de voltios.

Otra aplicación para la cual el potenciómetro es muy útil es en la medida de temperaturas por medio de un termopar. La f.e.m. producida por un termopar es del orden de 1 mV y depende de la diferencia de temperaturas entre la soldadura fría y la caliente. Si se usa un voltímetro sensible para medir esta pequeña f.e.m. la caída de tensión en los hilos del termopar, producida por la corriente del voltímetro, puede producir grandes errores. Especialmente ocurre así cuando los hilos son largos, caso frecuente en instalaciones remotas. Por otra parte, el rango de bajo voltaje del potenciómetro, combinado con la capacidad de medir f.e.m. con precisión, sin tomar apreciable corriente, hacen que su aplicación a este caso sea natural. Naturalmente, hay potenciómetros especiales portables, diseñados específicamente para tales medidas en el mercado. Tienen un rango de voltaje como máximo de 100 mV.

Hay otras muchas aplicaciones útiles en varios campos. Por ejemplo, se usa el potenciómetro en el campo de la química para medir la concentración de iones hidrógeno (pH). En cualquier aplicación donde esté relacionada a una magnitud de interés una f.e.m. de corriente continua pe-

queña puede usarse el potenciómetro. También se ha extendido la utilidad del potenciómetro en instrumentos registradores que encuentran el equilibrio por sí mismos. Estos potenciómetros, controlados por un motor eléctrico, tienen muchas aplicaciones cuando se desea un registro permanente de forma continua y automática.

9-7. Análisis del potenciómetro. La condición de cero para el potenciómetro de cursor se obtuvo fácilmente sin necesidad de hallar la corriente del galvanómetro. Pero la condición de nulo no responde a preguntas tan interesantes como:

1. ¿Cómo cambiará la lectura del potenciómetro con un pequeño cambio de la corriente de trabajo?

2. ¿Qué sensibilidad del galvanómetro se precisa para detectar un pequeño cambio en la posición del contacto móvil?

3. Con una sensibilidad del galvanómetro dada, ¿qué error se comete en la posición del cero en función de la deflexión del galvanómetro más pequeña que se pueda observar?

Las respuestas a tales preguntas proporcionan una valiosa información que contribuye a apreciar cuantitativamente las exigencias y limitaciones del potenciómetro. El potenciómetro debe analizarse en condiciones próximas al cero, en las que la corriente en el galvanómetro es pequeña, pero no cero. Varias aproximaciones son posibles. La solución completa de la corriente del galvanómetro se puede obtener por análisis de mallas o nudos o aplicando el teorema de Thévenin. Sin embargo, cuando solo se buscan pequeñas desviaciones de la condición de cero, los teoremas de teoría de circuitos tales como el de superposición, reciprocidad y especialmente el de compensación son muy útiles herramientas de análisis, como veremos. De momento se pueden encontrar por inspección la mayoría de los resultados finales, sin análisis complicado. Sin embargo, las técnicas de análisis se desarrollan para el comparativamente simple circuito del potenciómetro, pues serán necesarias para circuitos más complicados que estudiaremos después.

El circuito básico de un potenciómetro de cursor aparece en la Fig. 9-9, estando el interruptor del galvanómetro en la posición x de la Fig. 9-8. Para el análisis se introducen símbolos que representan a las resistencias de la Fig. 9-8, como sigue: $B = R + r$ y $G = R_m + R_x$. La resistencia M es la porción de resistencia del hilo que se encuentra en el circuito del galvanómetro, mientras que N es el resto de resistencia del hilo.

La corriente en el galvanómetro I_g se puede obtener para cualquier valor de los elementos del circuito que aparecen en la Fig. 9-9, por rutinarios análisis de mallas. Las ecuaciones de malla para las corrientes de malla que aparecen en la Fig. 9-9 son

$$\begin{aligned} I(B + M + N) - I_g M &= E \\ -IM + I_g(M + G) &= -E_x \end{aligned}$$

El determinante es

$$\Delta = \begin{vmatrix} B + M + N & -M \\ -M & M + G \end{vmatrix} = M(B + N) + G(B + M + N)$$

y I_g viene dada por

$$I_g = \frac{\begin{vmatrix} B + M + N & E \\ -M & -E_x \end{vmatrix}}{\Delta}$$

La expresión completa de I_g es

$$I_g = \frac{EM - E_x(B + M + N)}{M(B + N) + G(B + M + N)} \quad (9-9)$$

La condición de cero es un caso particular de este resultado, imponiendo la condición $I_g = 0$. La condición de cero es evidentemente

$$EM = E_x(B + M + N) \quad (9-10)$$

La Ec. (9-9) contiene toda la información referente a la influencia de

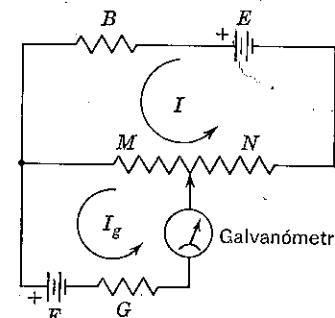


FIG. 9-9. Circuito del potenciómetro.

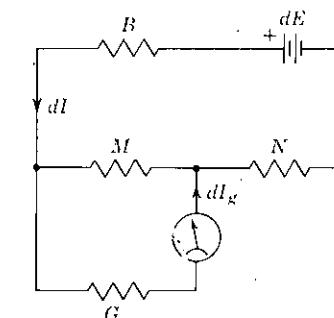


FIG. 9-10. Aplicación del teorema de la superposición al potenciómetro.

los parámetros del circuito en I_g . Un pequeño cambio producido en I_g al cambiar un poco algún parámetro del circuito puede obtenerse examinando la diferencial de la Ec. (9-9). Por ejemplo, el cambio de I_g que produce cambiar la f.e.m. de la batería de trabajo de E a $E + dE$ viene dado por

$$dI_g = \frac{\partial I_g}{\partial E} dE \quad (9-11)$$

Si la derivada parcial se calcula en la condición de cero, dI_g es la corriente

del galvanómetro, pues I_g es cero antes del cambio dE . Diferenciando la Ec. (9-9), queda

$$dI_g = \frac{M dE}{\Delta} \quad (9-12)$$

El mismo resultado puede obtenerse directamente del circuito original sin usar la solución general de I_g aplicando el teorema de superposición. Si E cambia a $E + dE$, los cambios en todas las corrientes serán las intensidades producidas por dE como f.e.m. única en el circuito de la Fig. 9-10. Este circuito se puede resolver directamente en dI_g con poca dificultad. La corriente dI a través de dE es

$$dI = \frac{dE}{B + N + MG/(M + G)}$$

La regla del reparto de corrientes da dI_g ,

$$dI_g = \frac{M}{M + G} dI = \frac{M dE}{(M + G)(B + N) + MG} \quad (9-13)$$

Como el denominador es Δ este resultado es igual al obtenido de la solución completa de I_g en la Ec. (9-12).

Otro ejemplo: hallar el cambio de la corriente del galvanómetro si primeramente se satisface la condición de cero y entonces B cambia a $B + dB$. La solución se obtiene por la diferencia apropiada de la Ec. (9-9).

$$dI_g = \left(\frac{\partial I_g}{\partial B} \right)_0 dB \quad (9-14)$$

donde el subíndice cero indica que la derivada parcial ha de evaluarse en la condición de cero. La derivada parcial es algo más complicada en este caso.

$$\frac{\partial I_g}{\partial B} = \frac{-E_x \Delta + [E_x(B + M + N) - EM](M + G)}{\Delta^2}$$

Sin embargo, en condiciones de cero el segundo término del numerador es cero. Por tanto, el cambio en la corriente del galvanómetro debida a un cambio dB es

$$dI_g = \frac{-E_x dB}{\Delta} = \frac{-EM dB}{\Delta(B + M + N)} \quad (9-15)$$

Una vez más puede obtenerse este resultado directamente del circuito sin necesidad de resolver en I_g . Empleamos en este caso el teorema de la

compensación. Si B cambia a $B + dB$ el cambio que experimentan las corrientes del circuito puede calcularse insertando la fuerza electromotriz $I dB$, como muestra la Fig. 9-11. I es la corriente de la batería original en condiciones de cero, dada simplemente por

$$I = \frac{E}{B + M + N} \quad (9-16)$$

Como dB es infinitésimo se desprecia frente a B . Entonces los circuitos de las Figs. 9-10 y 9-11 son básicamente iguales, y la corriente dI_g se obtiene inmediatamente de la Ec. (9-13) remplazando dE por $-IdB$.

$$dI_g = \frac{-MI dB}{\Delta} = \frac{-ME dB}{\Delta(B + M + N)}$$

Este resultado concuerda exactamente con la Ec. (9-15), a pesar del uso de una forma aproximada del teorema de la compensación, en el que se

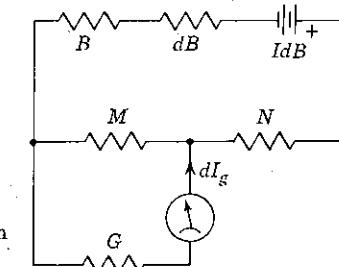


FIG. 9-11. Aplicación del teorema de la compensación al potenciómetro.

emplea el valor de B en vez de $B + dB$. Esto se debe a que el error de la aproximación, dado en el Cap. 2, desaparece en los cambios infinitesimales considerado aquí.

Más difícil es el problema de encontrar el cambio que produce en la corriente del galvanómetro un pequeño cambio en la posición del contacto móvil. Si M aumenta al movimiento del cursor N debe disminuir exactamente la misma cantidad. Por tanto, el cambio en la corriente del galvanómetro de su cero vendrá dada como sigue:

$$dI_g = \left(\frac{\partial I_g}{\partial M} \right)_0 dM + \left(\frac{\partial I_g}{\partial N} \right)_0 dN = \left[\left(\frac{\partial I_g}{\partial M} \right)_0 - \left(\frac{\partial I_g}{\partial N} \right)_0 \right] dM \quad (9-17)$$

Aquí M cambia a $M + dM$, con el correspondiente cambio de N a $N + dN = N - dM$. Las derivadas parciales de I_g respecto a M y N son bastante complicadas, como en el caso de la Ec. (9-14). Sin embargo, el in-

troducir la condición de nulo proporciona una simplificación análoga. Estas derivadas son, calculadas en el cero,

$$\left(\frac{\partial I_g}{\partial M}\right)_0 = \frac{E - E_x}{\Delta} \quad \left(\frac{\partial I_g}{\partial N}\right)_0 = -\frac{E_x}{\Delta}$$

Por consiguiente, el cambio de la corriente del galvanómetro de cero es

$$dI_g = \frac{E dM}{\Delta} \quad (9-18)$$

Aplicando el teorema de la compensación del circuito original obtendremos el mismo resultado. Los cambios en todas las corrientes originado por un cambio en la posición del cursor vendrán dados por el circuito de la Fig. 9-12 (a), en donde se ignoran los cambios dM y dN en las resistencias. Además $I dM = -I dN$. Cambíense los generadores de tensión a generadores de corrientes, como aparece en la Fig. 9-12 (b). Utilizando la regla de reparto de corrientes puede darse directamente el cambio de la corriente del galvanómetro.

$$dI_g = \left[\frac{M(B+N)/(M+B+N)}{G + M(B+N)/(M+B+N)} \right] I dM \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{B+N} \right)$$

Simplificando este resultado, por álgebra ordinaria, y usando el valor de I de la Ec. (9-16), se verá que concuerda exactamente con la Ec. (9-18).

Las técnicas analíticas desarrolladas en estos ejemplos son útiles en el análisis de fuentes. Merece la pena adiestrarse en las técnicas que son

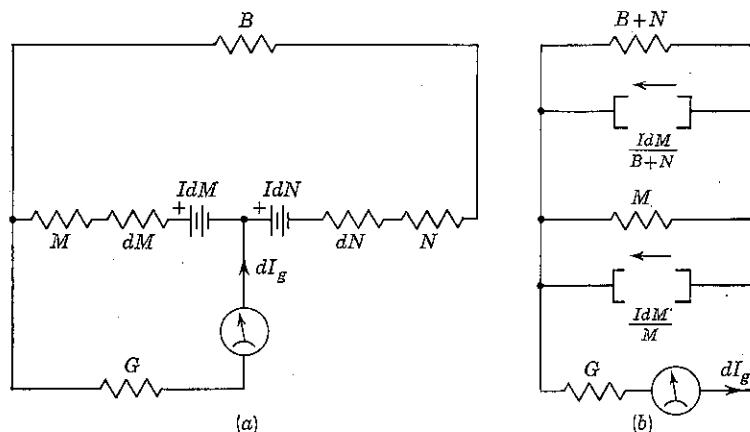


FIG. 9-12. Análisis del potenciómetro para pequeños movimientos del cursor.

útiles particularmente para determinar pequeños cambios en los circuitos. Aunque el método, usado ahora, es eléctrico, se desprende de estos ejemplos que el uso de los teoremas puede llevar menos trabajo que aplicar el método diferencial a la solución completa. Especialmente ocurre así cuando el problema consiste solamente en hallar el cambio de corriente producido por el cambio de un elemento particular.

9-8. Análisis de los errores del potenciómetro. Los resultados y métodos de la sección precedente pueden usarse para valorar algunos de los errores que surgen con el uso del potenciómetro. Los errores se expresan en forma más significativa hablando de error de la cantidad a medir E_x . Los errores causados por cambios en el circuito son particularmente importantes, pues se supone implícitamente que la corriente de trabajo I no cambia de su valor «normalizado» cuando medimos E_x . Ya que la «estandardización» no tiene lugar al mismo tiempo que medimos E_x , siempre existe la posibilidad de que la corriente de trabajo se haya desviado del valor correcto.

El mismo sistema de análisis usado en los óhmétros se puede aplicar aquí para producir un cambio en la corriente del galvanómetro dI_g en un cambio equivalente dE_x en la f.e.m. desconocida. La idea general es compensar el cambio en dI_g producido por cambio en E , B , M y N mediante un cambio ficticio en E_x .

Para desarrollar esta idea es preciso conocer el cambio que produce en I_g un cambio de E_x a $E_x + dE_x$. La diferencial de la expresión completa puede usarse como antes.

$$dI_g = \left(\frac{\partial I_g}{\partial E_x} \right)_0 dE_x = -\frac{(B+M+N) dE_x}{\Delta} \quad (9-19)$$

Este resultado puede obtenerse también sin necesidad de resolver para I_g , aplicando el teorema de superposición al circuito original. Si E_x cambia a $E_x + dE_x$ el cambio que se produce en todas las intensidades será igual a las creadas por dE_x como única f.e.m. en el circuito de la Fig. 9-13.

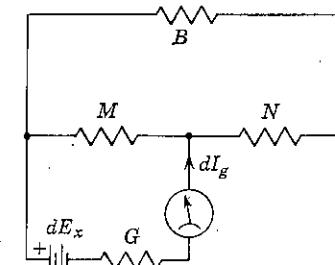


FIG. 9-13. Aplicación del teorema de la superposición al potenciómetro.

Se ve inmediatamente que el cambio a la corriente del galvanómetro es

$$\begin{aligned} dI_g &= \frac{-dE_x}{G + M(N + B)/(M + N + B)} \\ &= \frac{-(M + N + B) dE_x}{G(M + N + B) + M(N + B)} \end{aligned}$$

resultado que concuerda con la Ec. (9-19).

Para ilustrar la técnica de análisis de errores, supóngase que inicialmente el galvanómetro está a cero y entonces la batería de trabajo E cambia a $E + dE$. El cambio que resulta en la corriente del galvanómetro se puede compensar permitiendo a E_x cambiar a $E_x + dE_x$ de modo que el cambio *resultante* en la corriente del galvanómetro sea cero. El correspondiente enunciado matemático es

$$dI_g = 0 = \left(\frac{\partial I_g}{\partial E} \right)_0 dE + \left(\frac{\partial I_g}{\partial E_x} \right)_0 dE_x$$

Realmente esto representa la superposición en los dos circuitos de las Figs. 9-10 y 9-13. Usando las Ecs. (9-12) y (9-19) se obtiene

$$0 = \frac{M dE}{\Delta} - \frac{(B + M + N) dE_x}{\Delta}$$

$$\text{Por tanto, } dE_x = \frac{M}{M + B + N} dE = \frac{E_x}{E} dE$$

habiendo aplicado la condición de cero, Ec. (9-10). Esto significa que el error relativo de E_x es igual al cambio relativo de E , que es igual al cambio relativo de I .

$$\frac{dE_x}{E_x} = \frac{dE}{E} = \frac{dI}{I} \quad (9-20)$$

Por consiguiente, si la f.e.m. de la batería de trabajo cambia el c por 100 del valor que tenía cuando el potenciómetro estaba normalizado, la corriente de trabajo cambiará el c por 100 y la determinación de E_x tendrá un error del c por 100.

Aunque las técnicas analíticas basten por sí solas, este resultado podía haberse deducido por inspección directa del circuito original de la Fig. 9-9. Si E cambia a $E + dE$ y se ignora el pequeño cambio en la corriente del galvanómetro, la corriente que recorre B , M y N cambiará el mismo tanto por ciento que cambió E . Por tanto, el mismo tanto por ciento que varía la caída de tensión en M será igual al tanto por ciento de variación de E . Ya que E_x es igual a la caída de tensión en M , el tanto por ciento de error de E_x será igual al tanto por ciento que varía E .

Como segundo ejemplo supóngase que está en cero y entonces cambia B a $B + dB$. El cambio de la corriente del galvanómetro viene dado por la Ec. (9-15). Cambiemos E_x a $E_x + dE_x$ de modo que tenga lugar un cambio en la corriente del galvanómetro igual y opuesto al anterior; entonces según la Ec. (9-19)

$$dI_g = 0 = -\frac{E_x dB}{\Delta} - \frac{(B + M + N) dE_x}{\Delta}$$

que puede considerarse como la superposición de los dos circuitos compensativos de las Figs. 9-11 y 9-13. Por tanto, el error relativo de E_x es

$$\frac{dE_x}{E_x} = \frac{-dB}{B + M + N} = \frac{dI}{I} \quad (9-21)$$

y es igual en magnitud al cambio dB relativo a la resistencia total del circuito de la batería del trabajo. El signo negativo indica que un aumento de B dará como resultado una E_x menor que su valor verdadero. Esto es razonable, ya que un aumento de B hace disminuir la corriente de trabajo. Por tanto, el efecto que producen en la determinación de E_x pequeños cambios en la resistencia interna r de la batería de trabajo (véase Fig. 9-8) puede reducirse usando un reóstato estable de resistencia elevada con relación a r . De nuevo puede deducirse la Ec. (9-21) razonando directamente sobre el circuito de la Fig. 9-9, sin análisis elaborados.

Finalmente puede obtenerse el error debido a un pequeño error en la posición del cursor, utilizando los resultados anteriores y técnicas análogas. Si el cursor se mueve ligeramente de su posición de equilibrio al punto $M + dM$ (N debe cambiar a $N - dM$), dI_g viene dada por la Ec. (9-18). Suprímase dI_g cambiando dE_x , como antes. En otras palabras, superponganse los circuitos de las Figs. 9-12 y 9-13.

$$dI_g = 0 = \frac{E dM}{\Delta} - \frac{(B + M + N) dE_x}{\Delta}$$

Usando la condición de cero, Ec. (9-10), se elimina E y queda

$$\frac{dE_x}{E_x} = \frac{dM}{M} \quad (9-22)$$

Como M es proporcional a la longitud física del hilo uniforme, se deduce de este resultado que conviene un hilo largo. Si el cursor se separa de la posición correcta de cero una longitud fija, el error relativo que resulta en E_x se hace más vulnerable a una desviación dada en la posición dM , pues M inevitablemente se hace menor al disminuir E_x .

Todos los resultados de esta sección se podrían haber obtenido razonando directamente sobre el circuito sin análisis elaborados. Las técnicas analíticas son valiosas, no obstante, y el potenciómetro ha sido el vehículo que ha servido para introducirlas. Aunque ha sido como matar pulgas a cañonazos, algún día nos encontraremos un elefante.

Hay otras muchas fuentes de error en el uso de potenciómetros, que pueden tener importancia en trabajos de alta precisión. Entre éstas se encuentran pequeñas fuerzas f.e.m. producidas por diferencias de potencial de contacto, deriva térmica causada por el cambio en la resistencia con la temperatura y otros pequeños efectos que no tratamos aquí.

9-9. Limitaciones de la sensibilidad del galvanómetro. Un galvanómetro poco sensible indicará cero en un amplio rango de posiciones del cursor, pues la pequeña corriente producida fuera del cero es insuficiente para mover la bobina. Esto produce una incertidumbre en la determinación de E_x . Si se aumenta la sensibilidad del galvanómetro las posiciones del cursor que indican cero reducen su rango. Sin embargo, siempre hay una ligera incertidumbre en la situación del cursor, que depende de la habilidad del operador para detectar la deflexión más pequeña que se pueda discernir en el galvanómetro. Ocurre así incluso cuando el galvanómetro se desconecta intermitentemente en ajuste final del cero, a fin de comparar la deflexión cuando está en el circuito y fuera de él.

La sensibilidad del galvanómetro puede expresarse en función de la corriente más pequeña que produce una desviación del cero observable. Se llama la menor corriente discernible, y la deflexión correspondiente se conoce como la *menor deflexión discernible*. El cambio de la corriente del galvanómetro de cero debido a un pequeño cambio en la posición del cursor se encontró en la Ec. (9-18). Si dI_g en esta ecuación es la menor corriente discernible, entonces dM es el rango del cursor en ohmios en que no se detecta desviación del cero. Este rango puede medirse fácilmente en la práctica simplemente desviando el cursor. Si se encuentra que el rango es demasiado grande, debe instalarse un galvanómetro más sensible.

Es útil expresar la menor corriente discernible en función de E_x . Esto se puede hacer usando la Ec. (9-22) que relaciona un cambio de M a un cambio en E_x . Introduciendo la Ec. (9-22) en la Ec. (9-18) y usando la condición de cero para eliminar E queda

$$dI_g = \frac{EM}{\Delta} \frac{dE_x}{E_x} = \frac{(B + M + N) dE_x}{\Delta} \quad (9-23)$$

Esto muestra explícitamente en qué forma la menor corriente discernible aparece como un error en la determinación de E_x . Como $(B + M + N)$ es siempre menor que Δ , el factor que multiplica a dE_x siempre es menor que 1 miliohmio. Como ejemplo numérico supóngase que en un caso

particular es igual a 0,1 miliohmio. Si E_x tiene que determinarse con una parte en 10^4 , dE_x es 10^{-4} V y la menor corriente discernible en el galvanómetro debe ser al menos $10 \mu\text{A}$ para evitar errores imputables a la limitación de sensibilidad del galvanómetro.

9-10. La disposición en puente. Los puentes son unos de los dispositivos que más se usan en el campo de las medidas. Además las aplicaciones de los puentes se ramifican en un área extensísima. La disposición en puente no se usa solo para medir parámetros de circuitos, sino también se emplea en aplicaciones tales como sensibles instrumentos selectores, aparato de control y en filtros.

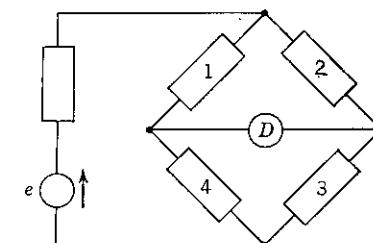


FIG. 9-14. Circuito del puente de cuatro brazos.

Por otra parte, en muchos dispositivos eléctricos que no se consideran ordinariamente puentes, puede encontrarse por análisis cuidadoso que existe un puente. El puente de cuatro brazos es capaz de comparar por método de cero los elementos de sus cuatro brazos. El método del puente para determinar resistencias, inductancias, capacidades o induc- tancias mutuas, básicamente es un método de comparación. La disposición en puente que aparece en la Fig. 9-14 consiste en cuatro brazos conectados en serie, en ciclo cerrado, y numerados en sentido horario 1, 2, 3, 4. Una fuente de energía se aplica entre dos conexiones diagonalmente opuestas, de los cuatro brazos y un detector D entre las dos restantes. Las numerosas ventajas de esta ingeniosa disposición se desarrollarán gradualmente.

Cuando se usa el puente en medidas comparativas se varía uno o más parámetros hasta que el detector marque cero. Se dice entonces que el puente está equilibrado. Los parámetros variables pueden ser elementos de circuito contenidos en los brazos, o parámetros asociados a la fuente de energía, tales como la frecuencia. La magnitud que interesa conocer se establece a partir de las condiciones conocidas en que se obtiene el cero.

La forma más sencilla de puente es la llamada puente de Wheatstone. Su fuente de energía es una batería, los cuatro brazos son resistencias y el detector es un dispositivo sensible a la tensión o a la corriente. En la Fig. 9-15 la batería de f.e.m. E está en serie con la resistencia, B ; la resistencia del detector se designa G (de galvanómetro), y una de las resis-

tencias de los brazos del puente, que llamaremos X , se determina usando el puente. La condición de cero se halla fácilmente, sin obtener la solución general de la corriente del galvanómetro, imponiendo que la corriente en el galvanómetro sea cero. Entonces pueden deducirse directamente las relaciones que deben cumplir los parámetros. Si es $I_g = 0$, la tensión entre los extremos de la rama del galvanómetro debe ser cero. Esto significa que la caída de tensión en N debe ser igual que en X . También debe ser igual la caída de tensión en M que en P . Expresando cualquiera de estas dos condiciones (que no son independientes, pues la suma de todos los voltajes, recorriendo los cuatro brazos, debe ser cero) obtendremos la condición de cero. Por ejemplo, la caída de tensión en N es igual

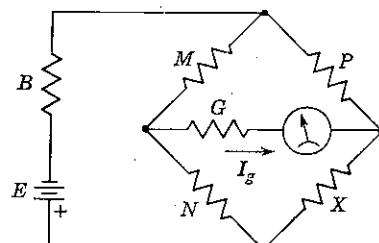


FIG. 9-15. Puente Wheatstone.

a $N/(N + M)$ veces el voltaje entre los puntos opuestos del puente a los que está conectado el generador. La caída de tensión en X es igual a $X/(X + P)$ veces el mismo voltaje. Por análogo razonamiento se deduce que $M/(M + N)$ debe ser igual a $P/(P + X)$. Por tanto, la condición de cero se puede expresar de cualquiera de las formas

$$\frac{N}{N + M} = \frac{X}{X + P} \quad \frac{M}{M + N} = \frac{P}{P + X}$$

Multiplicando en cruz y simplificando se obtiene la condición de cero en ambos casos.

$$MX = NP \quad (9-24)$$

¡Qué simple! En condiciones de equilibrio los productos de resistencias opuestas en el puente deben ser iguales, cualesquiera que sean E , B y G . Si conocemos los valores de M , N y P en el equilibrio, podemos calcular X . Supongamos a M y N fijos y variemos P hasta que $I_g = 0$. Entonces multiplicando P por N/M obtenemos X , a la relación de los brazos fijos llamamos relación de brazos; X se compara con P usando esa relación. Análogamente si M y P son fijos, y ajustamos N para obtener el equilibrio P/M es la relación por la que hay que multiplicar N para obtener X . Se pueden adquirir comercialmente puentes de Wheatstone de

lectura directa en los que ajustes decimales del brazo variable dan el valor de X directamente.

Hay que resaltar dos importantes propiedades del puente. Una de ellas surge del desarrollo de la condición de cero [Ec. (9-24)]. La condición de cero se cumple cualquiera que sea el voltaje aplicado al puente. Es decir, que en principio el equilibrio es independiente de la corriente que recorre los brazos del puente. En la práctica hay efectos tales como el calentamiento, la dependencia con la corriente de las diferencias de

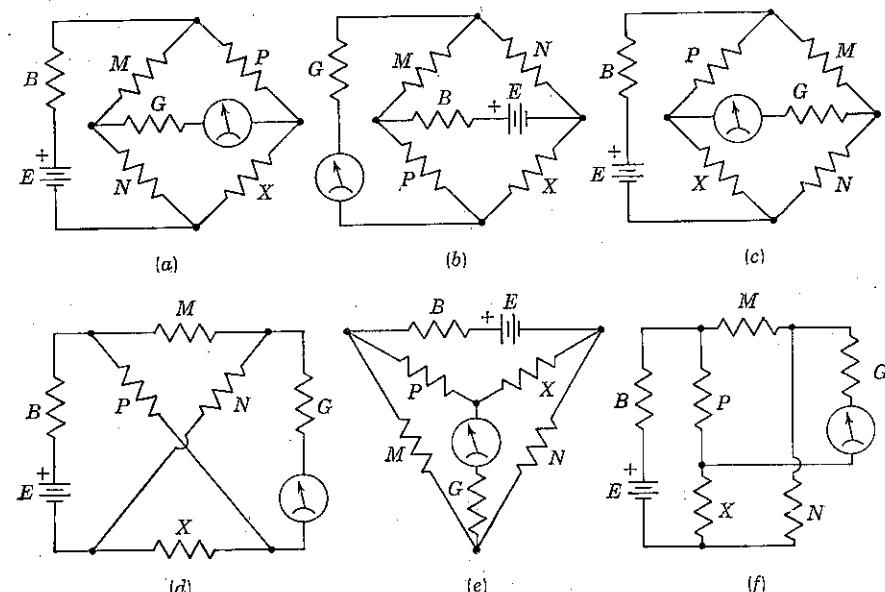


FIG. 9-16. Circuitos en puentes idénticos.

potencial de contacto, y otros que invalidan esta imposición. Pero en principio el puente no requiere la normalización que precisaba el potenciómetro. La segunda propiedad es que intercambiando el detector y el generador no cambia la condición de equilibrio (aunque cambia la sensibilidad del puente, como veremos en el Cap. 10). Para demostrarlo efectúese el cambio, hágase $I_g = 0$ y se encontrará por un método similar al ya empleado que $M/(M + P) = N/(N + X)$ y $P/(M + P) = X/(N + X)$. Aunque son distintas a las obtenidas anteriormente, estas relaciones conducen a la misma condición de cero, Ec. (9-24).

Como punto final vemos en la Fig. 9-16 un ejemplo de las muchas formas en que puede dibujarse el mismo puente. El llamado circuito cruzado de la Fig. 9-16 (d) es en realidad un puente. Su flexibilidad en el dibujo no es, por supuesto, exclusiva de los circuitos resistivos de c. c. ni solo de los puentes. A menudo el encontrar un diagrama bien dibujado,

que exprese lo que tiene el ingeniero en la cabeza, es un problema complicado.

9-11. Puentes de corriente alterna. El puente de Wheatstone, aunque es muy usado en medida de resistencia; no es más que una forma muy particular del caso general, representado en la Fig. 9-14. Un puente de c. a. de la misma forma que el de la Fig. 9-14 aparece en la Fig. 9-17. Se usa para corrientes alternas sinusoidales, de modo que pueden emplearse números complejos para estudiar su comportamiento. La fuente de energía es un generador sinusoidal caracterizado por el voltaje complejo E en serie con su impedancia interna Z_g . Puede ser un oscilador de audio, o de radiofrecuencia, una dinamo, o muchas otras formas. Cada uno de los cuatro brazos viene representado por una impedancia pasiva compuesta de elementos R , L , C , M . El detector, de impedancia Z_d , puede ser cual-

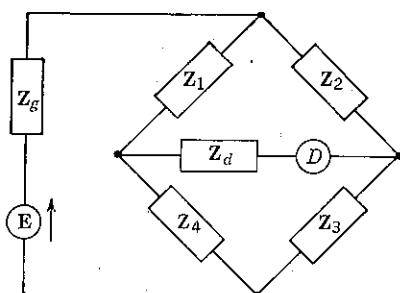


FIG. 9-17. Puente de alterna de cuatro brazos.

quier instrumento de medida de tensión o corriente, sensible a la frecuencia del generador. Puede ser un galvanómetro de vibrador (Sec. 4-14), un instrumento de c. a. de cualquier tipo, como un voltímetro a válvula o de rectificador; un par de auriculares, un oscilógrafo, un receptor de transmisiones y otros muchos. En la práctica se usa un transformador en la rama del detector o del generador, a fin de poder referir a tierra las señales de línea.

La condición de cero para este puente puede expresarse, a una frecuencia dada, en función de las impedancias complejas de las ramas. La condición de cero es que el indicador marque cero, lo que significa que el voltaje en la rama del detector debe ser cero. Entonces, razonando como antes, la caída de tensión en Z_4 debe ser igual a la caída en Z_3 (o bien que la caída en Z_1 debe ser igual a la de Z_2). Su caída de tensión en Z_4 es igual a la tensión entre los puntos diagonales del puente, multiplicada por $Z_4/(Z_1 + Z_4)$. La caída en Z_3 es igual a $Z_3/(Z_2 + Z_3)$ veces el mismo voltaje. Por tanto,

$$\frac{Z_4}{Z_1 + Z_4} = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} \quad (o \quad \frac{Z_1}{Z_1 + Z_4} = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3})$$

Multiplicando en cruz y simplificando adecuadamente se obtiene la condición de cero

$$Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4 \quad (9-25)$$

Los productos de las resistencias situadas en brazos opuestos del puente son iguales en la condición de equilibrio, independientemente de los valores de E , Z_g y Z_d . Esta conclusión es similar a la obtenida para el puente de Wheatstone, que, desde un punto de vista teórico, es un caso particular del puente de c. a. Asimismo es válida la conclusión de que la Ec. (9-25) no depende de la tensión aplicada, y la posibilidad de intercambiar el detector o el generador sin modificar la condición de cero. Sin embargo, causas no consideradas aquí, tales como el caldeo de los elementos, y capacidades parásitas, hacen que estas suposiciones solo sean aproximadas en el laboratorio.

Las analogías entre el puente de Wheatstone y el puente de c. a. son engañosas, pues la condición de cero es muy distinta al implicar cantidades complejas. Una ecuación compleja se satisface únicamente si son iguales *separadamente* la parte real e imaginaria de un lado y otro de la ecuación. Entonces es que la Ec. (9-25) contiene en realidad dos condiciones de equilibrio *independientes*. Se deben cumplir ambas para obtener un cero.

Las *dos* condiciones de equilibrio pueden hacerse explícitas de muchas formas. Por ejemplo, simbólicamente

$$\operatorname{Re}\{Z_1 Z_3\} = \operatorname{Re}\{Z_2 Z_4\} \quad y \quad \operatorname{Im}\{Z_1 Z_3\} = \operatorname{Im}\{Z_2 Z_4\}$$

Si las impedancias vienen dadas en forma cartesiana $Z_k = R_k + jX_k$, siendo $k = 1, 2, 3, 4$, entonces la Ec. (9-25) queda en la forma

$$(R_1 + jX_1)(R_3 + jX_3) = (R_2 + jX_2)(R_4 + jX_4)$$

Podemos obtener las condiciones de equilibrio igualando las partes reales e imaginarias de esta ecuación.

$$\begin{aligned} \text{Reales:} \quad & R_1 R_3 - X_1 X_3 = R_2 R_4 - X_2 X_4 \\ \text{Imaginarias:} \quad & X_1 R_3 + X_3 R_1 = X_2 R_4 + X_4 R_2 \end{aligned}$$

Es interesante hacer constar que si todas las reactancias son cero, se reduce al caso del puente resistivo. La ecuación de las partes reales se queda en la condición de cero del puente de Wheatstone, $R_1 R_3 = R_2 R_4$, y la ecuación de las partes imaginarias se satisface idénticamente.

Si las impedancias vienen en forma exponencial $Z_k = Z_k e^{j\alpha_k}$, donde $k = 1, 2, 3, 4$, la ecuación de equilibrio queda

$$Z_1 Z_3 e^{j(\alpha_1 + \alpha_3)} = Z_2 Z_4 e^{j(\alpha_2 + \alpha_4)}$$

Las dos condiciones de equilibrio pueden expresarse como

$$Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4 \quad \text{y} \quad \alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4$$

o en la forma

$$\text{Reales: } Z_1 Z_3 \cos(\alpha_1 + \alpha_3) = Z_2 Z_4 \cos(\alpha_2 + \alpha_4)$$

$$\text{Imaginarias: } Z_1 Z_3 \operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_3) = Z_2 Z_4 \operatorname{sen}(\alpha_2 + \alpha_4)$$

También puede expresarse en función de las admitancias del puente: $Y_k = 1/Z_k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Entonces la ecuación de equilibrio se convierte en

$$\frac{1}{Y_1} \frac{1}{Y_3} = \frac{1}{Y_2} \frac{1}{Y_4} \quad \text{o} \quad Y_1 Y_3 = Y_2 Y_4$$

Los productos de las admitancias situadas en brazos opuestos son iguales en equilibrio. Es evidente que el conjunto de ecuaciones de equilibrio con admitancias es similar al de impedancias. También es muy útil y posible en algunos casos usar impedancias en algunos brazos y admitancias en otros.

No importa cómo sea la forma de las condiciones de equilibrio, sino que hay que satisfacer dos condiciones independientes, en vez de una sola, como en el caso resistivo. Esto significa que generalmente se precisan dos elementos aceptables para conseguir el equilibrio. Es evidente, asimismo, que por emplearse magnitudes complejas, cada una de las cuales tiene parte real e imaginaria, hay ocho magnitudes implicadas en la condición cero. Seis deben conocerse y las dos restantes determinarse a partir del equilibrio del puente; una por cada ecuación independiente de equilibrio. Por supuesto, alguno de estos seis elementos puede despreciarse. Por ejemplo, si un brazo contiene una capacidad prácticamente pura, la parte real de la impedancia de ese brazo es cero. Además debe conocerse la frecuencia en algunos casos.

9-12. Clasificación de los puentes de corriente alterna. Hay una infinidad de combinaciones de impedancias en puente que pueden satisfacer la ecuación de equilibrio, algunas solo con interés teórico y una gran variedad de puentes útiles. Cada uno tiene ventajas particulares con respecto a factores tales como facilidad de ajuste, comodidad, coste, precisión respecto a ciertos tipos medibles, posibilidad de conexión de efectos

parásitos y susceptibilidad a los mismos. Algunos de estos circuitos pueden clasificarse en dos categorías llamadas puentes de *cociente de brazos* y de *productos de brazos*. Son circuitos que solo tienen dos elementos ajustables para conseguir el equilibrio y en los que cada ajuste sirve para satisfacer independientemente una de las dos condiciones de equilibrio. Sin embargo, estos dos tipos no agotan las posibilidades y existen muchos puentes útiles que no pertenecen a ninguna de estas categorías.

El puente de cociente de brazos tiene dos elementos de circuitos ajustables conectados en serie, situados en un brazo adyacente al brazo desconocido y el *cociente* de las impedancias situadas en los otros dos brazos es o puramente real o puramente imaginario. Si se considera a Z_3 la impedancia del brazo desconocido, el brazo 2 o el 4 son el brazo adyacente. Elijamos arbitrariamente al brazo 4 como el doblemente ajustable que contiene a $Z_4 = R_4 + jX_4$. Entonces, despejando Z_3 en la Ec. (9-25),

$$Z_3 = \frac{Z_2}{Z_1} (R_4 + jX_4) \quad (9-26)$$

donde Z_2/Z_1 es una *relación* fija y conocida, real o imaginaria, y R_4 y X_4 se pueden ajustar independientemente para verificar la parte real e imaginaria de la ecuación de equilibrio.

El puente de producto de brazos contiene dos elementos ajustables conectados en paralelo, situados en el brazo opuesto al desconocido y el *producto* de las impedancias situadas en los brazos restantes es o puramente real o puramente imaginario. Siendo Z_3 la impedancia desconocida, como antes, expresando los elementos ajustables del brazo 1 en forma de admitancias, $Y_1 = G_1 + jB_1$, queda

$$Z_3 = Z_2 Z_4 (G_1 + jB_1) \quad (9-27)$$

donde $Z_2 Z_4$ es una cantidad fija y conocida, real o imaginaria, y G_1 y B_1

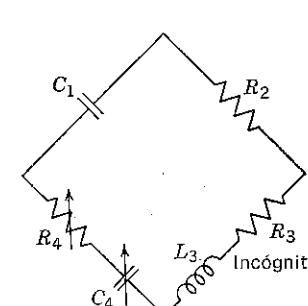


FIG. 9-18. Puente de Owen (tipo cociente de brazo).

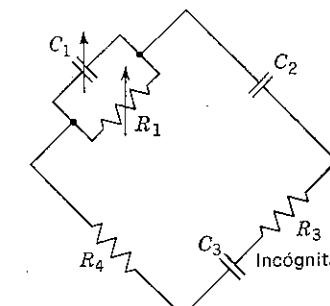


FIG. 9-19. Puente de Schering (tipo producto de brazos).

pueden ajustarse independientemente para cumplir las partes real e imaginaria de la ecuación de equilibrio.

Un ejemplo de puente de cociente de brazos aparece en la Fig. 9-18. Es el puente de Owen usado con frecuencia en la medida de inductancias (y de su resistencia asociada). No aparecen ni el generador ni el detector, puesto que la condición de equilibrio no varía al intercambiarlos. La impedancia desconocida, Z_3 , viene dada según la Ec. (9-26) por

$$Z_3 = R_3 + j\omega L_3 = j\omega C_1 R_2 \left(R_4 + \frac{1}{j\omega C_4} \right) \quad (9-28)$$

donde es evidente la forma de cociente de brazos; Z_2/Z_1 es imaginaria pura. Igualando partes reales e imaginarias obtenemos las dos condiciones de equilibrio

$$R_3 = \frac{C_1 R_2}{C_4} \quad L_3 = C_1 R_2 R_4 \quad (9-29)$$

El equilibrio del puente es independiente de la frecuencia en este caso, y R_3 y L_3 vienen dados en función de los elementos ajustables C_4 y R_4 , respectivamente. El producto $C_1 R_2$ se supone conocido.

Un ejemplo del tipo producto de brazos aparece en la Fig. 9-19. Es el puente de Schering usado para medir capacidades (y la resistencia de pérdidas asociadas). La impedancia desconocida Z_3 según la Ec. (9-27) vendrá dada por

$$Z_3 = R_3 + \frac{1}{j\omega C_3} = \frac{R_4}{j\omega C_2} \left(\frac{1}{R_1} + j\omega C_1 \right) \quad (9-30)$$

Igualando parte real e imaginaria

$$R_3 = \frac{R_4 C_1}{C_2} \quad C_3 = \frac{C_2 R_1}{R_4}$$

De nuevo desaparece la frecuencia en la condición de equilibrio y R_3 y C_3 vienen dados en función de los elementos independientemente ajustables, C_1 y R_1 , respectivamente. El cociente C_2/R_4 se supone conocido.

Hay muchos otros tipos de puente que no pertenecen a ninguno de los dos descritos y además en algunos puentes el equilibrio depende de la frecuencia. El puente de Hay, usado para medir bobinas de Q elevada, aclara ambos puntos. El producto de las impedancias situadas en brazos opuestos es, en el puente de la Fig. 9-20,

$$(R_3 + j\omega L_3) \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) = R_2 R_4 \quad (9-31)$$

Igualando partes reales e imaginarias

$$R_1 R_3 + \frac{L_3}{C_1} = R_2 R_4 \quad \omega L_3 R_1 - \frac{R_3}{\omega C_1} = 0$$

Resolviendo simultáneamente para R_3 y L_3 ,

$$R_3 = \frac{\omega^2 C_1^2 R_1 R_2 R_4}{1 + (\omega R_1 C_1)^2} \quad L_3 = \frac{C_1 R_2 R_4}{1 + (\omega R_1 C_1)^2}$$

El equilibrio depende de la frecuencia y además los elementos ajustables aparecen en ambas ecuaciones. Si la Q de la bobina es elevada, L_3 casi

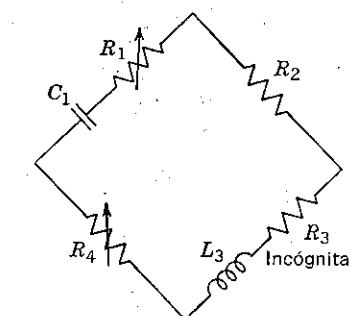


FIG. 9-20. Puente de Hay.

es independiente de la frecuencia. Puede verse en la parte imaginaria de la condición de equilibrio dónde $\omega L_3/R_3 = 1/\omega R_1 C_1$ es mucho mayor que la unidad para una bobina de Q elevada. Entonces $L_3 \approx C_1 R_2 R_4$ es esencialmente independiente de la frecuencia y R_4 , sola, puede ajustarse para satisfacer esta ecuación.

Otros varios tipos de puente aparecen en la Fig. 9-21 para ilustrar mejor sobre la gran variedad de posibilidades. En cada caso los elementos que tienen el subíndice x pueden considerarse desconocidos en el análisis. Los dos circuitos inferiores de la Fig. 9-21 no parecen ser puentes de cuatro brazos, pero realmente sí lo son. Cambiando el triángulo en estrella en el puente de Anderson aparecerá la naturaleza de puente de cuatro brazos. En el caso del puente tipo Carey-Foster modificado, usando el circuito T-equivalente a las bobinas acopladas (véase Fig. 2-12) se verá que la inductancia mutua, M_x , es un elemento simple en el brazo 3.

9-13. Aplicaciones de los puentes. El puente de Wheatstone es el método comúnmente usado en medidas precisas de resistencias en c. c., en función de una relación de resistencias conocida y una resistencia patrón. El puente es de uso cómodo y rápido, el resultado está libre de errores achacables a la batería o a la resistencia del galvanómetro y no requiere calibración del galvanómetro. Su precisión solo está limitada fundamentalmente por la precisión con que se conocen la solución y el

patrón. Debido a la limitada sensibilidad del galvanómetro y a la resistencia de los conductores, la precisión alcanzable disminuye en resistencias superiores a un megaohmio e inferiores a un ohmio. Sin embargo, hay puentes útiles para estos dos extremos, el puente doble de Kelvin

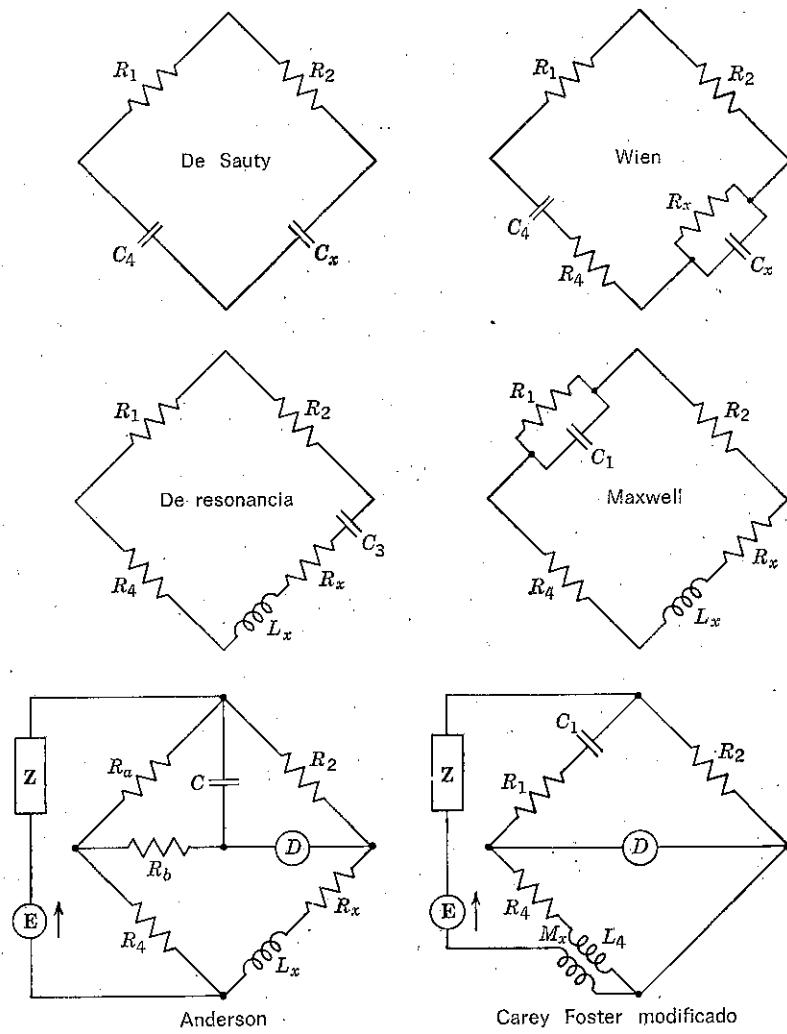


FIG. 9-21. Puentes de corriente alterna.

para resistencias pequeñas y varios tipos de puentes para valores de megaohmios. También hay muchos puentes especiales de c. c. para propósitos particulares, tal como la comparación de dos resistencias casi iguales. Los puentes de corriente continua también sirven para medir magnitudes físicas que afectan a la resistencia. Por ejemplo, los puentes de c. c.

se usan para medir la temperatura (termómetro de resistencia) basados en la relación conocida entre la resistencia de un metal, como el platino, y su temperatura. La elevación de temperatura de una dinamo puede medirse, midiendo la resistencia del devanado de campó, fría y caliente, y usando el coeficiente de temperatura del cobre. Pruebas de esfuerzo, basadas en el cambio de resistencia cuando actúan tensiones mecánicas, son también muy útiles.

Los puentes de corriente alterna son más versátiles y en consecuencia tienen más aplicaciones que los puentes de c. c. Se usan en medidas precisas de resistencia en c. a., inductancia, capacidad e inductancia mutua, en función de patrones conocidos y relaciones conocidas de elementos, como muestran los anteriores ejemplos. La existencia de generadores de ondas muy puras y estables sobre un gran rango de frecuencias, acompañado del equipo sensible de detección, ha conducido a una completa explotación del principio del puente en medidas de c. a. de todas clases. La autoinducción de bobinas puede medirse independientemente de su resistencia; análogamente las pérdidas en el dielectrico de los condensadores puede separarse de la capacidad. Además, puede superponerse a la corriente alterna una corriente continua en una bobina, y medir de esta forma la permeabilidad y saturación de los núcleos de hierro en los que está bobinada la autoinducción en estudio. Los puentes proporcionan uno de los métodos más apropiados de medida de inducción mutua y coeficiente de acople entre dos bobinas. Cuando el equilibrio depende de la frecuencia el puente puede usarse para medir frecuencia en función de elementos conocidos. Incluso es útil el puente para medir parámetros tales como la ganancia, la resistencia dinámica de placa y la transconductancia de válvulas de vacío. Se usa también para medir la conductividad de líquidos, sumergiendo una célula especial en el líquido.

Aparte de la medida de parámetros, los puentes se usan en muchas aplicaciones. La salida del detector en condiciones ligeramente desequilibradas puede ser una señal elevada frente a un pequeño cambio en uno de los brazos del puente. Esta propiedad hace del puente un delicado elemento sensible. Por ejemplo, es frecuente el uso del puente en servomecanismos para obtener el error de la respuesta del sistema. La salida del detector producida por un pequeño cambio en la capacidad de uno de los brazos puede usarse como base en una medida de espesor, un sistema de alarma contra robo, o un dispositivo de medida de presión. Esto apenas es un esbozo de la profusión de ideas que han desarrollado diseñadores imaginativos.

Además los puentes son útiles como agudos filtros que pasan una señal de una diagonal a la opuesta de una forma selectiva que depende del diseño del puente. En este caso la característica del puente es su función de transferencia: Como se hizo notar en la Fig. 9-16, los filtros cruzados son fundamentalmente puentes. Los puentes se usan como filtros

selectivos en el lazo de realimentación de amplificadores y osciladores; el oscilador de Wien es un ejemplo clásico. En estas aplicaciones la diferencia de fase entre la señal de entrada y la de salida, en las dos diagonales del puente, tiene gran importancia.

Otras aplicaciones distintas a las mencionadas son algunos circuitos realmente gobernados por los principios de los puentes, aunque no se les conoce ordinariamente como puentes. Por ejemplo, circuitos para trazar líneas equipotenciales, que emplean un electrolito en el que se introduce una punta de prueba que produce una lectura de cero cuando se mueve por una línea equipotencial, son básicamente puentes. Los dos brazos del puente son, en este caso, la resistencia equivalente del electrolito, pero esto no cambia el principio. Otro ejemplo es el amplificador de potencia en push-pull que emplea en realidad un circuito tipo puente, en el que hay un par de generadores equilibrados en dos brazos adyacentes. Tales circuitos eliminan el zumbido de la fuente de alimentación, debido a que el puente que hay implicado está equilibrado y, por tanto, la señal de zumbido no produce señal apreciable en las terminales de salida del circuito. Los voltímetros de válvula de vacío operan de una forma muy similar.

Estas aplicaciones representan una parte muy importante de la ingeniería eléctrica y requieren un estudio cuidadoso. En los capítulos siguientes y problemas adjuntos se realiza un análisis detallado de las características de los puentes relativos a muchas de las aplicaciones mencionadas.

9-14. El método de sustitución. Usando un método de cero por sustitución se pueden obtener resultados esencialmente tan precisos como el patrón disponible. Se encuentran errores despreciables debidos a incertidumbres en otros elementos del circuito y se minimizan los efectos parásitos. El principio general de sustitución se discutió en la Sec. 8-14, relativa a los métodos de deflexión. La principal diferencia cuando se realiza por el método de cero es la posibilidad de una comparación más sensible del patrón y la incógnita. Esto implica la dificultad práctica, no frecuente en el método de deflexión, de obtener un patrón casi igual a la incógnita, cosa virtualmente inalcanzable. Una pequeña diferencia entre el patrón y la incógnita puede estar dentro del umbral de observación en el método de deflexión, pero en el método de cero esta diferencia será muy amplificada y no producirá un cero. Naturalmente, esto significa que la precisión accesible operando con el método de cero es mayor que basados en la deflexión.

El método de institución, con un pequeño cambio, para soslayar la anterior dificultad es aún un práctico y extremadamente útil método de cero. Desde luego, representa la máxima precisión accesible. Un ejemplo, usando un puente como dispositivo de cero, nos mostrará los principios básicos. En el sencillo puente de DeSauty de la Fig. 9-21, una capacidad,

C_x , se mide en función de la relación de resistencias y la capacidad conocida, C_4 . Supóngase que se consigue el equilibrio empleando un valor ajustable de R_1 , con R_2 y C_4 fijos. Entonces cuando se ha equilibrado el puente, variando R_1 , C_x vendrá dado por

$$C_x = \frac{R_1 C_4}{R_2} \quad (9-32)$$

El error en la determinación de C_x será al menos igual a los errores combinados de los tres elementos del puente. Si se supone una sensibilidad amplia en el detector, también habrá errores debidos a efectos tales como la capacidad parásita y la inductancia de los conductores.

Si se determina C_x por sustitución usando este puente, la disposición de la Fig. 9-22 es la adecuada. El condensador patrón, C_s , puede sustituirse por C_x usando el interruptor. Se supone que el condensador patrón puede variarse por saltos discretos, pero *no es variable de un modo continuo*. Este es el caso de los patrones de alta precisión usuales. El puente se equilibra primeramente con C_x en el brazo 3 ajustando R_1 y aplicando la Ec. (9-32). A continuación se remplaza a C_x por C_s , ajustándolo a continuación en etapas para obtener la mínima salida en el detector. En el uso habitual en que se emplea un detector de alta sensibilidad no se hallará un cero exactamente, pues C_s no es capaz de variar de un modo continuo. Sin embargo, podemos cambiar R_1 ligeramente, una cantidad conocida ΔR_1 , para conseguir el cero. Entonces

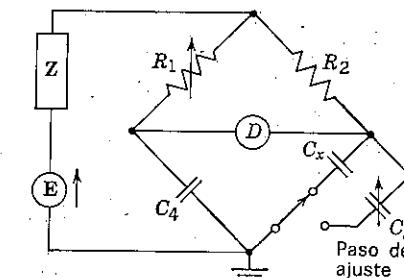


FIG. 9-22. Puente de sustitución.

$$C_s = \frac{(R_1 + \Delta R_1)C_4}{R_2} = C_x + \frac{\Delta R_1 C_4}{R_2} \quad (9-33)$$

Por tanto, la relación de C_s a C_x es

$$\frac{C_s}{C_x} = 1 + \frac{\Delta R_1}{R_1} \quad (9-34)$$

La incertidumbre en esta relación es mucho menor que en el caso de la Ec. (9-32). Supongamos, por ejemplo, que ΔR_1 es el 2 por 100 de R_1 y

que R_1 se conoce con una precisión de 0,1 por 100. Entonces la relación de C_s a C_x se conoce con un 0,002 por 100 y los valores de C_4 y R_2 no influyen. Piense en esto. La relación se conoce con una precisión de 20 partes en millón en este ejemplo.

Aunque pueden emplearse técnicas distintas a éstas, este ejemplo ilustra sobre la forma en que se reduce el error a un nivel muy bajo en el método de sustitución, usualmente suficiente para aprovechar la precisión del patrón con que se compara la incógnita. El método de sustitución puede llevar a niveles de error de una o dos partes por millón si se dispone de un patrón suficientemente próximo a la incógnita y se emplean buenas técnicas.

9-15. El método diferencial. En el Cap. 8 se presentó un método diferencial, en el que la deflexión de un instrumento conducía a la diferencia entre dos cantidades. Estos métodos son muy útiles, pero pueden entrañar errores debidos a los efectos de carga del indicador. Los inherentes errores del instrumento de deflexión también constituyen una limitación importante. Aunque la indicación del método diferencial es la diferencia entre dos cantidades, puede desearse en algunos casos mayor precisión que la proporcionada por los métodos de deflexión. El método de cero tiene el inconveniente de requerir ajustes de cero para cada resultado diferencial, pero produce un aumento en la sensibilidad y precisión.

Un cero inicial es intrínseco a todo método diferencial, como se mostró en el Cap. 8. De aquí que cualquier dispositivo de cero puede usarse como un método diferencial de deflexión, usando la salida del detector como una indicación del cambio de la cantidad. Por otra parte, si ajustamos el circuito para obtener un cero al compensar el cambio en la cantidad, no hay distinción, en principio, del método de comparación por cero. Solo existe una diferencia en el detalle. Generalmente, los métodos de comparación por cero que tienen rango restringido para operar solamente sobre pequeñas diferencias entre dos cantidades caen en la clasificación de diferenciales. Los dispositivos usados incorporan elementos especialmente diseñados que proporcionan control preciso y diales de lectura directa de pequeñas diferencias. Entre ellos se encuentran algunos potenciómetros diferenciales y puentes especiales de c. c. usados para comparar dos resistencias casi iguales, como son los de varias soluciones, puentes de cursor, y puentes de límite. El ejemplo del método de sustitución presentado en la sección precedente puede considerarse como un método diferencial de cero en el cual el cambio $\Delta R_1/R_1$ puede leerse directamente como la diferencia entre C_s y C_x .

Un ejemplo sencillo de un método diferencial de cero aplicado a la medida de temperatura usando un termopar aparece en la Fig. 9-23. El circuito es esencialmente el mismo que el del voltímetro diferencial de la Fig. 8-19 y realmente es una porción de un circuito potenciométrico. La resistencia de control R es muy inferior a las resistencias R_1 y R_2 de modo

que la caída total en R es pequeña en comparación con la f.e.m. E . La situación angular del contacto de control puede leerse directamente en

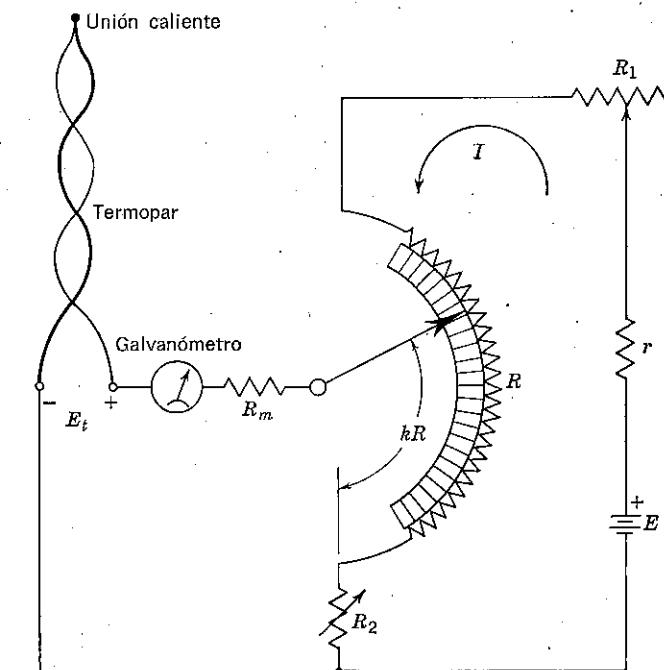


FIG. 9-23. Medida diferencial de temperaturas.

el dial asociado. Cuando el control R se ajusta para un cero (corriente en el galvanómetro cero) la f.e.m. del termopar viene dada por

$$E_t = I(R_2 + kR)$$

donde k es la fracción de R en la parte inferior del control. Cuando, debido a un cambio en la temperatura de la unión del termopar, E_t cambia a $E_t + \Delta E_t$, k se reajusta a $k + \Delta k$, de modo que el cero se restablece. Entonces

$$E_t + \Delta E_t = I(R_2 + kR + \Delta kR)$$

Evidentemente el cambio de la f.e.m. del termopar es proporcional al cambio de k .

$$\Delta E_t = IR \Delta k$$

Si normalizamos a I en función de una pila patrón (como en el potenciómetro convencional) y permanece constante, el dial puede calibrarse di-

rectamente en grados. Esto sería una calibración de propósito muy especial restringida a un solo tipo de termopar. Mayor flexibilidad se consigue calibrando el dial directamente en microvoltios y la temperatura se hallaría refiriéndose a la característica temperatura-f.e.m. del tipo de termopar usado.

El mismo circuito puede usarse, por deflexión, fiándose de la calibración del galvanómetro y usando una posición fija k . Si el galvanómetro es suficientemente sensible la caída de tensión producida en los hilos del termopar no afectará seriamente a E_t .

9-16. Métodos combinados cero-deflexión. Algunas veces es necesario o deseable usar el método de cero y deflexión combinados. Dos ejemplos de tal combinación se describen aquí.

Las bobinas con núcleo de hierro usadas como choques o filtros llevan frecuentemente corriente continua funcionando normalmente. Esta corriente continua aumenta la densidad de flujo en el núcleo y altera la permeabilidad magnética, y, por tanto, la inductancia. En consecuencia,

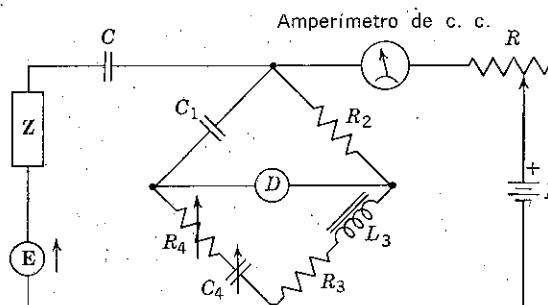


FIG. 9-24. Medida de inductancia con c. c. superpuesta.

es deseable el estudio de la forma en que la inductancia es afectada por la corriente continua. Puede usarse un puente para medir la inductancia, mientras un amperímetro indica simultáneamente la corriente en la inductancia. Un puente de Hay modificado se usa en la práctica, pero un ejemplo más sencillo, basado en el puente de Owen, aparece en la Fig. 9-24. Las ecuaciones de equilibrio de este puente son las de la Ec. (9-29). La corriente continua que proporciona a la bobina la fuente de c. c. E se controla mediante R . El condensador C bloquea el generador de señal E de la corriente continua. Para cada valor de R puede equilibrarse el puente y determinarse L_3 según $L_3 = C_1 R_2 R_4$. La corriente continua correspondiente a L_3 la indica el amperímetro. Esta es la idea general, pero muchos factores prácticos, no mencionados, tienen importancia para el desarrollo de las medidas.

Una combinación más íntima de los métodos de deflexión y cero aparece en la Fig. 9-25. Este circuito se puede usar para medir la resistencia y sensibilidad del galvanómetro, sin necesidad de un instrumento

de cero. Aunque el galvanómetro está en un brazo del puente de Wheatstone, se puede usar indirectamente para indicar el equilibrio del puente. La corriente del galvanómetro depende en general de que el interruptor de la rama del detector esté abierto o cerrado. Sin embargo, cuando el puente está equilibrado la corriente que pasa por el interruptor es cero en ambos casos y la corriente del galvanómetro no variará.

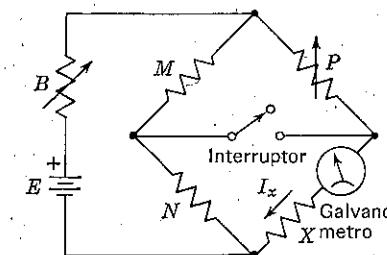


FIG. 9-25. Puente combinación de cero y deflexión.

El reóstato B puede ajustarse para conseguir la deflexión deseada del galvanómetro, mientras que la resistencia variable P puede usarse para obtener el equilibrio. La resistencia X del galvanómetro en equilibrio está dada por $X = NP/M$. La fracción de la intensidad de la batería que pasa a través del galvanómetro es:

$$\frac{M + N}{M + N + P + X} = \frac{M}{M + P} \quad (9-35)$$

ya que $MX = NP$. Por tanto, la intensidad del galvanómetro en equilibrio es

$$I_x = \frac{M}{M + P} \left(\frac{E}{B + R} \right) \quad (9-36)$$

donde R es la resistencia equivalente en paralelo de $(M + N)$ y $(P + X)$. La resistencia X viene dada conociendo los valores de M , N y P necesarios para obtener el equilibrio y además I_x se puede calcular si se conocen E y B . Entonces puede calcularse la sensibilidad del galvanómetro a partir de la deflexión observada.

PROBLEMAS

9-1 (§ 2). Determinar la expresión general de la corriente I_m , en el circuito de la Fig. 9-2. Probar que esta expresión es cero cuando se satisface la Ec. (9-6).

9-2 (§ 5). Un potenciómetro de cursor se usa para medir la tensión entre dos puntos de cierto circuito de c. c. La lectura del potenciómetro es 1,5 V. Un voltímetro de 20.000 ohmio/voltio indica 0,25 V en la escala de 2,5 V cuando se conecta entre los mismos puntos del circuito. ¿Cuál es la resistencia de entrada al circuito entre los dos puntos?

9-3 (§ 6). Un potenciómetro de $\pm 0,0001$ V (desviación standard) de precisión se usa para medir la corriente que atraviesa una resistencia patrón de $0,1000$ ohmio $\pm 0,1$ por 100 (desviación standard). Se miden $0,2514$ V de caída de tensión en la resistencia. ¿Qué corriente circula y con qué precisión se ha determinado?

9-4 (§ 7). El potenciómetro de cursor de la Fig. 9-8 se usa para medir una f.e.m. E_x de resistencia interna R_x . La sensibilidad del galvanómetro es $0,1 \mu\text{A}/\text{mm}$ y su resistencia R_m es igual a 50 ohmios. Primeramente se normaliza el potenciómetro mediante una pila patrón, estableciendo $I = 0,02$ amp. Se pasa entonces a la posición x y se ajusta hasta obtener una deflexión cero en el galvanómetro. Leemos $1,0200$ V. El cursor se mueve entonces a la posición de $1,0201$ V y se observa una deflexión en el galvanómetro de $8,0$ mm. ¿Qué valor tienen E_x y R_x ?

9-5 (§ 8). Probar que $dE/E = dI/I$ con M , N y B constantes; y también que $dI/I = -dB/(B + M + N)$ con E , M y N constantes, según indican las Ecs. (9-20) y (9-21), respectivamente.

9-6 (§ 8). Se normaliza un potenciómetro de cursor y entonces se usa para medir una f.e.m. desconocida, E_x . Cuando se obtiene el cero la corriente ha disminuido debido al calentamiento del hilo. $M + N$ ha sufrido un incremento total de resistencia dR , uniformemente distribuido por el hilo. Supóngase que B y E en la Fig. 9-9 no han cambiado. Determinarse la expresión del error relativo de E_x en función de dR .

9-7 (§ 8). Se obtiene un cero en el circuito de la Fig. 9-1. Para simplificar supóngase que $R_a \gg r_1$ y $R_b \gg r_2$. a) Si R_b cambia a $R_b + dR$, determinarse la expresión del cambio que resulta en la corriente a través de R_m , dI_m . b) Comenzando con un cero E_1 cambia a $E_1 + dE$. Determinar la expresión del cambio correspondiente de R_b que restaura el cero.

9-8 (§ 9). En el circuito potenciométrico de la Fig. 9-9, $E = 3,2$ V, $I = 1,0$ mA cuando $I_g = 0$, $(M + N) = 3.000$ ohmios, $G = 2.000$ ohmios y la sensibilidad del galvanómetro es $10 \mu\text{A}/\text{mm}$. El potenciómetro se equilibra cuando $M = 200$ ohmios. a) Determinar E_x . b) ¿Cuáles son los límites de error en la medida de E_x si la menor deflexión discernible en el galvanómetro es $0,1$ mm?

9-9 (§ 9). Se desea medir una f.e.m. desconocida que tiene una resistencia interna de 1.000 ohmios con una precisión de, al menos, 1 por 100. Se usa un potenciómetro de cursor con una batería de trabajo de 12 V y una intensidad de trabajo normalizada de $I = 0,02$ amp, junto con un galvanómetro de $50 \mu\text{A}/\text{mm}$ de sensibilidad y menor deflexión discernible $0,1$ mm. El resultado de la medida de la f.e.m. desconocida es $0,220$ V. a) Suponiendo que el potenciómetro en sí es perfecto, determinar si se ha conseguido la precisión del 1 por 100. b) ¿Cómo se hallaría la respuesta rápidamente si usted estuviera midiendo en el laboratorio?

9-10 (§ 9). En el circuito potenciométrico de la Fig. 9-9 se sabe por la normalización que cuando $I_g = 0$, $I = 20$ mA $\pm 0,1$ por 100. Además $(B + M + N) = 100$ ohmios. Las posiciones del cursor se conocen con $\pm 0,05$ ohmios. El galvanómetro tiene una resistencia de 200 ± 2 ohmios, una sensibilidad de $100 \mu\text{A}$ por división, y una deflexión mínima perceptible de $0,1$ de división. Todas las incertidumbres se dan como desviaciones standard. a) Cuando el potenciómetro se usa para medir E_x , que aproximadamente es 1 V, ¿cuál es la expresión de la desviación standard de la medida? b) ¿Qué valor de R_x , la resistencia interna de E_x , hace la desviación standard de la medida igual a $0,01$ V?

9-11 (§ 10). Se sabe que una resistencia no lineal X sigue la ley $X = A + CI$, donde A es el valor de X con corriente nula, I es la corriente a través de X y C una constante. Se usa el puente de Wheatstone de la Fig. 9-15, con $M = 200$ ohmios, $E = 10$ V y $B = 0$, para determinar A y C . Con $N = 100$ ohmios se precisa un valor de $P = 110$ ohmios para equilibrar el puente. Con $N = 200$ ohmios el valor preciso para el equilibrio es $P = 60$ ohmios. Calcular A y C .

9-12 (§ 10). Se usa el puente de Wheatstone de la Fig. 9-26, normalmente para medir una resistencia desconocida conectada a los terminales $A-B$. Sin embargo, en este problema se aplica un voltaje controlado por k ($0 \leq k \leq 1$) entre A y B en lugar de la resistencia pa-

siva usual. Especifíquese en qué rango de k el equilibrio del puente es imposible, aunque R_1 varíe de cero a infinito.

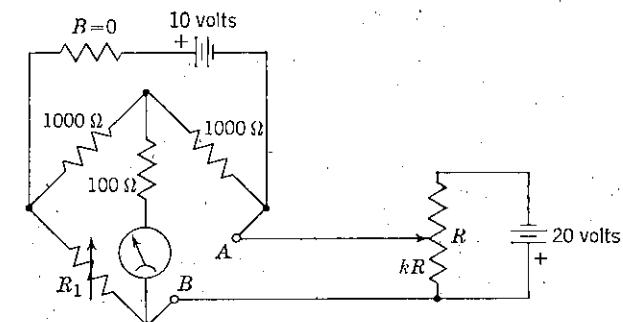


FIG. 9-26. Circuito activo en un brazo de un puente de Wheatstone.

9-13 (§ 11). El puente de c. a. de la Fig. 9-27 se usa para medir una inductancia desconocida L_x , que tiene una resistencia inherente R_x . Los parámetros del puente son $R_1 = 20.000$ ohmios, $R_2 = 50.000$ ohmios, $C_2 = 0,003 \mu\text{F}$, $\omega = 10^5$ rad/seg. C_1 es ajustable de $10 \mu\text{F}$ a $150 \mu\text{F}$ y R_4 es ajustable de 0 a 10.000 ohmios. a) Probar que las ecuaciones de equilibrio resistivo y reactivo son independientes. Obtener las expresiones de R_x y L_x en función de ω , R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , C_1 y C_2 . b) Determinarse los máximos valores de R_x y L_x medibles con los parámetros dados.

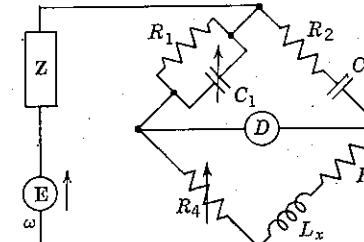


FIG. 9-27. Puente del Prob. 9-13.

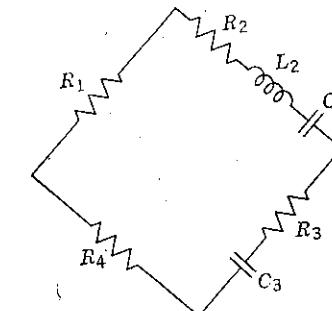


FIG. 9-28. Puente del Prob. 9-17.

9-14 (§ 12). En el puente de DeSauty de la Fig. 9-21: a) Obténgase las ecuaciones de equilibrio. b) ¿Cuántos ajustes son precisos para determinar cualquier valor de C_x ?

9-15 (§ 12). Obténganse las ecuaciones de equilibrio del puente de resonancia de la Fig. 9-21.

9-16 (§ 12). Probar que las ecuaciones de equilibrio del puente de Maxwell de la Fig. 9-21 no dependen de la frecuencia.

9-17 (§ 12). a) Determinar las ecuaciones de equilibrio del puente de la Fig. 9-28. b) ¿En qué rango de frecuencias no es posible el equilibrio, variando R_1 , R_3 , R_4 o C_3 ? c) Si $C_2 R_1 > C_3 R_4$, puede equilibrarse el puente?

9-18 (§ 12). El puente de Wien de la Fig. 9-21 se equilibra a una frecuencia angular ω_0 . a) Obténgase la expresión de ω_0 en función de los parámetros del puente. b) Si hay una capacidad parásita C_2 en paralelo con R_2 el puente no se equilibra a la frecuencia ω_0 , sino a ω_1 . Determinar la expresión de ω_0/ω_1 . c) Si todas las resistencias son de 1.000 ohmios y

$C_x = C_4 = 500 \mu\mu F$, ¿qué porcentaje difiere el cociente ω_0/ω_1 de la unidad, cuando $C_2 = 1 \mu\mu F$, y qué valor tiene R_x ?

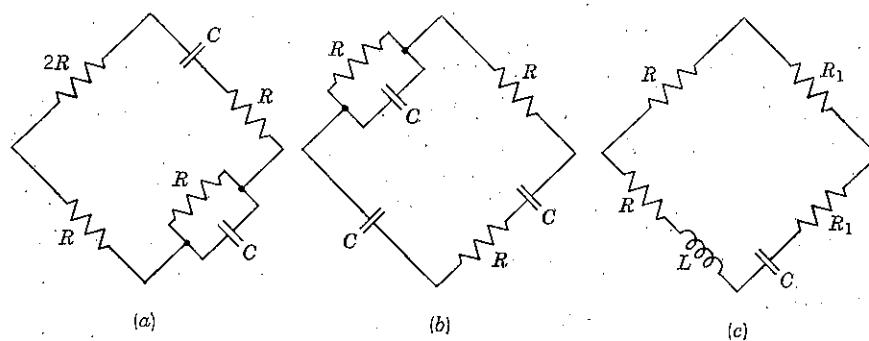


FIG. 9-29. Puentes del Prob. 9-19.

9-19 (§ 12). ¿A qué frecuencias se equilibran los tres puentes de la Fig. 9-21?

9-20 (§ 12). Obtener las ecuaciones de equilibrio del puente de Carey-Foster modificado de la Fig. 9-21.

9-21 (§ 12). En el puente de Anderson de la Fig. 9-21: a) Determinar las ecuaciones de equilibrio y despejar R_x y L_x . b) ¿Es posible hallar dos ajustes de resistencia independientes que permitan alcanzar el equilibrio? c) Si se intercambian el generador y el detector, ¿se pueden aplicar las mismas ecuaciones de equilibrio?

9-22 (§ 16). Verifíquese la Ec. (9-35).

9-23 (§ 16). Se mide la resistencia y la sensibilidad del galvanómetro en el circuito de la Fig. 9-25. Se ajusta la resistencia P hasta que el galvanómetro indica la misma corriente con el interruptor cerrado o abierto y se ajusta B a 48.200 ohmios para obtener una deflexión del galvanómetro de 80 mm. El valor ajustado de P es 3.000 ohmios. Los brazos de relación se fijan en $M = 2.000$ ohmios y $N = 1.000$ ohmios. $E = 1,0$ V. a) Calcúlese la resistencia del galvanómetro, X . b) Calcúlese la sensibilidad del galvanómetro en microamperios por milímetro.

CAPITULO 10

ANALISIS DE LOS PUENTES DE CORRIENTE CONTINUA

La configuración del puente consiste en tres mallas, y su análisis general es algo complicado, incluso en el caso puramente resistivo. Puede simplificarse algo ignorando la resistencia B de la batería y así se hace en muchos estudios del puente. Sin embargo, esta resistencia puede afectar al funcionamiento del puente. Por eso, la resistencia B se incluye en este capítulo. Se presentan varios análisis del puente de Wheatstone, incluida la solución completa por mallas y la aproximación por el teorema de la

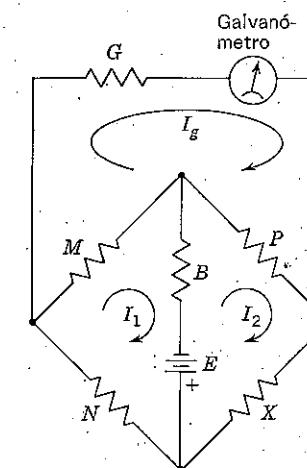


FIG. 10-1. Corriente de malla en el puente de Wheatstone.

compensación, que es muy valioso para el puente ligeramente desequilibrado. Se aplica también el teorema de Thévenin, pero es una herramienta menos útil que el teorema de la compensación.

Se estudia la influencia de la sensibilidad del galvanómetro y de la limitación de la corriente en los brazos del puente, así como la dependencia de la precisión del puente con el tamaño de la incógnita a medir. Se investiga el efecto de intercambiar los circuitos de la batería y el galvanó-

metro. También se analizan el puente de hilo, puente de límite y doble puente de Kelvin.

Este capítulo proporciona una excelente oportunidad de ejercitarse en algunas técnicas muy útiles en el diseño y aplicación de los puentes. Además es la oportunidad de relacionar los resultados matemáticos con su significado físico. Aunque el álgebra es algo laboriosa, esperamos que el estudiante sepa distinguir entre complejidad y perplejidad.

10-1. Puente de Wheatstone desequilibrado: solución exacta. Puede obtenerse la solución completa de la corriente en el galvanómetro, para cualquier valor de los parámetros del puente usando el rutinario análisis de circuitos. El puente de Wheatstone de la Fig. 9-15 aparece en la Fig. 10-1 con el galvanómetro en otra rama, por comodidad en el análisis por mallas. Suponiendo unas corrientes circulatorias en sentido de las agujas del reloj I_1 , I_2 e $I_3 = I_g$, las ecuaciones de malla son

$$\begin{aligned}(M + B + N)I_1 - BI_2 - MI_g &= E \\ -BI_1 + (B + P + X)I_2 - PI_g &= -E \\ -MI_1 - PI_2 + (M + P + G)I_g &= 0\end{aligned}$$

El determinante de mallas es

$$\Delta = \begin{vmatrix} M + B + N & -B & -M \\ -B & B + P + X & -P \\ -M & -P & M + P + G \end{vmatrix}$$

La corriente del galvanómetro viene dada por

$$I_g = \frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} M + B + N & -B & E \\ -B & B + P + X & -E \\ -M & -P & 0 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Esta es la solución exacta y completa de I_g , válida para cualquier valor de E , B , M , N , P , X y G . Transformaremos el resultado en una forma más utilizable.

10-2. Desarrollo de los determinantes. Los determinantes Δ y Δ' se pueden desarrollar con técnicas diversas. Sin embargo, el álgebra es engorrosa en extremo si no se manejan con cuidado los determinantes, antes de realizar su desarrollo. Por ejemplo, el valor de Δ' no cambia si se suman a la fila 1 las filas 2 y 3. Así

$$\Delta' = \begin{vmatrix} N & X & 0 \\ -B & B + P + X & -E \\ -M & -P & 0 \end{vmatrix} = E \begin{vmatrix} N & X \\ -M & -P \end{vmatrix}$$

Con dos ceros en la columna 3, el resultado se obtiene fácilmente desarrollando por la 3.^a columna. Entonces

$$\Delta' = E(MX - NP) \quad (10-1)$$

El equilibrio del puente se define por $I_g = 0$ y X se considera la variable, en el análisis. Sea $X = X_0$ el valor de X necesario para el equilibrio. Como Δ no es infinito para valores finitos de los parámetros, Δ' debe ser cero. Por tanto, según Ec. (10-1)

$$MX_0 = NP \quad (10-2)$$

Los productos de las resistencias en brazos opuestos son iguales en equilibrio; resultado bien conocido. Esta condición de equilibrio no depende de E , B y G , y no varía al intercambiar las ramas del detector y la batería. Si X no es igual a X_0 , se puede representar por

$$X = X_0 + R$$

donde R representa la desviación, grande o pequeña, en el valor que verifica la Ec. (10-2). La Ec. (10-1) puede expresarse en función de la variable R

$$\Delta' = E(MX_0 + MR - NP) = EMR \quad (10-3)$$

usando la Ec. (10-2).

El determinante del circuito, Δ , puede expresarse en función de R con poco trabajo descomponiéndolo primero en la suma de dos determinantes. $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} M + B + N & -B & -M \\ -B & B + P + X_0 & -P \\ -M & -P & M + P + G \end{vmatrix}$$

que no depende de R , y

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} M + B + N & 0 & -M \\ -B & R & -P \\ -M & 0 & M + P + G \end{vmatrix}$$

que es proporcional a R . Con dos ceros en la columna 2, Δ_2 puede desarrollarse inmediatamente por la segunda columna

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= R \begin{vmatrix} M + B + N & -M \\ -M & M + P + G \end{vmatrix} \\ &= R[M(P + G) + (B + N)(M + P + G)] \quad (10-4)\end{aligned}$$

El determinante Δ_1 puede transformarse para conseguir una fila con dos ceros por los pasos que se describen. Los intentos de desarrollarlo directamente conducen a resultados excesivamente engorrosos, de modo que vale la pena poner algo de inteligencia en estos cambios simplificadores. Súmense las columnas 1 y 2 a la columna 3, súmese la columna 2 a la columna 1 y déjese la columna 2 inalterada. Entonces multiplíquese la fila 1 por P/M y el determinante por M/P a fin de mantener a Δ_1 en su valor. En este punto el resultado intermedio es

$$\Delta_1 = \frac{M}{P} \begin{vmatrix} (M+N)P/M & -BP/M & NP/M \\ P+X_0 & B+P+X_0 & X_0 \\ -M-P & -P & G \end{vmatrix}$$

Ahora restese la fila 2 de la fila 1. Esto produce dos ceros en la fila 1, teniendo en cuenta la Ec. (10-2). Desarrollando por la segunda columna y simplificando con la Ec. (10-2) queda

$$\Delta_1 = M \left(B + P + X_0 + \frac{BP}{M} \right) \left(G + N + X_0 + \frac{GN}{M} \right) \quad (10-5)$$

La solución de I_g puede expresarse ahora en forma algebraica en función de los parámetros del puente, usando las Ecs. (10-3) a (10-5). Una instructiva forma del resultado final completo es

$$I_g = \frac{E}{(B+P+X_0+BP/M)(G+N+X_0+GN/M)} \left[\frac{R}{1+kR} \right] \quad (10-6)$$

$$\text{donde } k = \frac{M(P+G)+(B+N)(M+P+G)}{M(B+P+X_0+BP/M)(G+N+X_0+GN/M)}$$

10-3. Algunas interpretaciones de la solución exacta. Es provechoso reconocer inmediatamente algunos aspectos de la solución general de I_g , con vistas a futuras aplicaciones. El factor k es siempre positivo, pues M, P, N, X_0, G y B son siempre mayores que cero. Además, en muchos puentes el orden de magnitud de k es $1/X_0$. Dos grandes ejemplos demuestran esta propiedad. Por ejemplo, si *todas* las resistencias son iguales a X_0 ,

$$k = \frac{8X_0^2}{X_0(4X_0)(4X_0)} = \frac{1}{2X_0}$$

Análogamente, si G y B son despreciables en comparación a las otras resistencias y si M, P, N y X_0 son iguales

$$k = \frac{MP+N(M+P)}{M(P+X_0)(N+X_0)} = \frac{3}{4X_0}$$

Aunque no puede decirse nada fijo, k no difiere demasiado de $1/X_0$.

Si el puente solo está ligeramente desequilibrado, $kR \ll 1$ y el factor $1 + kR$ de la Ec. (10-6) es próximo a la unidad. Esto simplifica la expresión de la corriente considerablemente. Además, I_g es entonces proporcional a R . El hecho de que k es a menudo del orden de $1/X_0$, significa que cuando R difiere de X_0 en un pequeño porcentaje, la corriente en el galvanómetro es proporcional a R . Por tanto, la relación de un pequeño cambio de I_g a partir de cero, ΔI_g , a un pequeño cambio de su valor de equilibrio de X_0 , $\Delta X = R$, es una constante dada por

$$\frac{\Delta I_g}{\Delta X} = \frac{E}{[B(1+P/M)+P+X_0][G(1+N/M)+N+X_0]} \quad kR \ll 1 \quad (10-7)$$

Se demuestra más tarde que este mismo resultado se obtiene usando el teorema de la compensación sin necesidad de conocer la solución de I_g .

La pendiente de la curva I_g-X en el punto $I_g = 0$, donde $X = X_0$, es dI_g/dX , y viene dada exactamente por la Ec. (10-7). Esta pendiente se conoce como la *sensibilidad de corriente* del puente. La Ec. (10-7) muestra que la sensibilidad de corriente siempre aumenta disminuyendo la resistencia del galvanómetro G , disminuyendo la resistencia del circuito de batería, B , y aumentando la f.e.m. de la batería E . La *sensibilidad de voltaje* del puente es G veces la sensibilidad de corriente y es el cambio en la caída de tensión en el galvanómetro producida por un pequeño cambio de X de su valor de equilibrio. La sensibilidad de voltaje aumenta con un *aumento* de G , una disminución de B y un aumento de E . Para una f.e.m. de la batería E dada, la máxima sensibilidad de corriente viene dada por la Ec. (10-7) con $G = 0 = B$

$$\left(\frac{dI_g}{dX} \right)_0 = \frac{E}{(P+X_0)(N+X_0)} = \frac{E}{X_0 S}$$

donde S es la suma de las cuatro resistencias de los brazos del puente en equilibrio.

$$S = M + N + P + X_0 \quad (10-8)$$

La máxima sensibilidad de voltaje corresponde a $B = 0$ y $G \rightarrow \infty$ y se obtiene también de la Ec. (10-7).

$$G \left(\frac{dI_g}{dX} \right)_0 = \frac{EM}{(P+X_0)(M+N)} = \frac{EP}{(P+X_0)^2}$$

Posteriormente se desarrollarán en este capítulo otras conclusiones a

partir de la solución general. El hecho de que los resultados más interesantes se obtienen cuando $kR \ll 1$, lo que significa que se desecha parte de la solución general, sugiere que debe haber un método más directo de obtener la solución del puente ligeramente desequilibrado. Este es el caso de la sección siguiente.

10-4. Puente de Wheatstone desequilibrado: solución aproximada. El cambio que produce en la corriente del galvanómetro, un pequeño cambio de X de un valor de equilibrio, puede obtenerse sin la solución general de I_g . El teorema de la compensación, juntamente con el de la reciprocidad, conducen a una elegante solución. Esta aproximación directa del problema del puente ligeramente desequilibrado, utiliza técnicas aproximadas de análisis de circuitos que son muy útiles para resolver una variedad de problemas. En muchos casos, esta aproximación proporciona la herramienta más expeditiva cuando la solución general no es accesible o resulta demasiado engorrosa.

Cuando el puente de la Fig. 10-1 está equilibrado ($I_g = 0$), la corriente que pasa por X_0 se obtiene fácilmente, multiplicando la corriente de la batería por el factor $(M + N)/S$, donde S tiene el valor definido por la Ec. (10-8). Sea I_x la corriente de rama que atraviesa X_0 en dirección opuesta a I_2 , según la Fig. 10-1. Entonces, en equilibrio

$$I_x = \frac{E}{B + (M + N)(P + X_0)/S} \left[\frac{M + N}{S} \right] = \frac{E(M + N)}{BS + (M + N)(P + X_0)} \quad (10-9)$$

Si X_0 cambia a $X_0 + R$, el cambio en todas las corrientes del circuito puede obtenerse aplicando el teorema de la compensación. Introduzcase la f.e.m. de «compensación» $I_x R$, de la Fig. 10-2, donde I_x viene dada por la Ec. (10-9) y es la corriente que pasaba por X_0 antes de cambiar. El cambio de la corriente del galvanómetro puede obtenerse exactamente a partir del circuito de la Fig. 10-2. Este circuito es casi tan complicado como el circuito original, así que parece que no se ha conseguido nada. Sin embargo, si R es pequeña en comparación con X_0 , el caso más importante, entonces se simplifica. Con $R = \Delta X$, la resistencia ΔX puede despreciarse en comparación con X_0 , pero, por supuesto, permanece la f.e.m., $I_x \Delta X$.

La simplificación no es aparente en la Fig. 10-2, pero sí en el circuito de la Fig. 10-3, donde se ha aplicado el teorema de la reciprocidad, «intercambiando» la f.e.m. $I_x \Delta X$ y la corriente ΔI_g . Se sabe por el teorema de reciprocidad que, si en la Fig. 10-2, la f.e.m. $I_x R$ en la rama X produce una corriente ΔI_g en la rama G , esta f.e.m. colocada en la rama G producirá la misma corriente, ΔI_g , en la rama X . El valor de este teorema es ahora patente, pues despreciando ΔX comparado con X_0 , la f.e.m. $I_x \Delta X$ en la Fig. 10-3 está aplicada a un puente equilibrado. Por tanto,

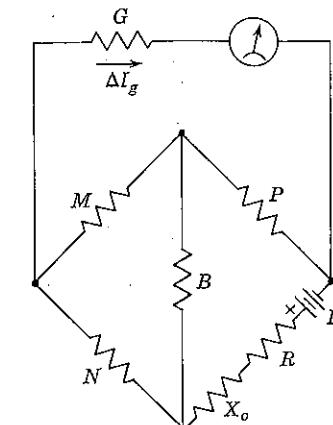


FIG. 10-2. Aplicación del teorema de la compensación al puente de Wheatstone.

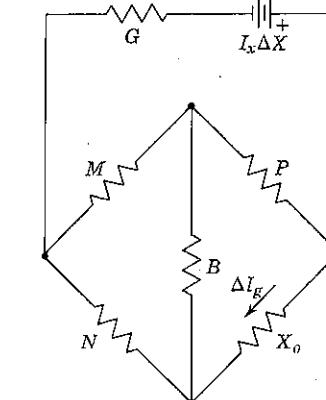


FIG. 10-3. Aplicación del teorema de la reciprocidad al circuito de la Fig. 10-2.

la corriente por B es cero (en la aproximación de este método) y puede asignarse cualquier valor a B que convenga a los propósitos de análisis. Como ejemplo, hagamos $B \rightarrow \infty$ en el circuito de la Fig. 10-3 y ΔI_g puede obtenerse inmediatamente por la regla de reparto de corriente.

$$\Delta I_g = \frac{I_x \Delta X}{G + (M + P)(N + X_0)/S} \left[\frac{M + P}{S} \right] = \frac{I_x \Delta X (M + P)}{GS + (M + P)(N + X_0)} \quad (10-10)$$

El mismo resultado puede obtenerse en el circuito de la Fig. 10-3 con $B = 0$ o con «cuálquier» valor de B . Por otra parte, la Ec. 10-10 puede obtenerse de la Fig. 10-2 con $R = \Delta X$ despreciable en comparación con X_0 , para cualquier valor de B .

La solución aproximada para ΔI_g queda completa en estos términos. Sólo resta introducir I_x de la Ec. (10-9) en la Ec. (10-10) y simplificarlo en la forma mejor. Introduciendo I_x de la Ec. (10-9) queda

$$\Delta I_g = \frac{E(M + N)(M + P) \Delta X}{[BS + (M + N)(P + X_0)][GS + (M + P)(N + X_0)]} \quad (10-11)$$

Dividiendo el numerador y denominador por $(M + N)(M + P)$ y usando las relaciones

$$\frac{S}{M + N} = 1 + \frac{P}{M} \quad \frac{S}{M + P} = 1 + \frac{N}{M} \quad (10-12)$$

que se demuestran fácilmente a partir de $MX_0 = NP$. El resultado final para ΔI_g es

$$\Delta I_g = \frac{E \Delta X}{[B(1 + P/M) + P + X_0][G(1 + N/M) + N + X_0]} \quad (10-13)$$

Este resultado concuerda con la Ec. (10-7), obtenida a partir de la solución general de I_g . El término suprimido por el uso aproximado del teorema de la compensación, y es el denominador $1 + kR = 1 + k \Delta X$. El error del resultado aproximado de la Ec. (10-13) es, según se probó en el Cap. 2, a lo más, igual a $\Delta I_g (\Delta X/X_0)$. Por ejemplo, si ΔX es un 1 por 100 de X_0 la corriente del galvanómetro dada por la Ec. (10-13), no puede diferir en más del 1 por 100 y usualmente menos de la corriente exacta.

Al aplicar el teorema de la compensación a los brazos del puente, no es necesario repetir el razonamiento relativo a B , habiéndolo hecho una vez. En adelante, puede omitirse a B en el circuito de compensación, y el circuito resuelto directamente para el pequeño cambio producido en la corriente por la f.e.m. de compensación.

El teorema de compensación, desde luego no está restringido a X , puede aplicarse a cualquier resistencia que cambia. Dos aplicaciones triviales son interesantes, pues muestran que el equilibrio no es afectado por un cambio de B o G , lo cual tiene que ocurrir, pues la ecuación de equilibrio $MX_0 = NP$ es independiente de B o G . En el caso de cambiar B a $B + \Delta B$, la f.e.m. de compensación en serie con $B + \Delta B$ es $I_b \Delta B$, donde I_b es la corriente de la batería en equilibrio del puente. Esta f.e.m. se aplica a un puente equilibrado (sin aproximación) y, por tanto, produce una ΔI_g cero. En el caso de cambiar G a $G + \Delta G$, la f.e.m. de compensación en serie con $G + \Delta G$ es $I_g \Delta G$, donde I_g es la corriente en el galvanómetro con el puente equilibrado, la cual es cero. Por tanto, la f.e.m. de compensación es cero y no hay cambio en ninguna de las corrientes del puente.

10-5. Empleo del teorema de la compensación. Un puente de Wheatstone, con $B = 100$ ohmios, $N = 100$ ohmios, $M = 200$ ohmios, $P = 300$ ohmios, $G = 200$ ohmios y $E = 28$ voltios, está equilibrado. Entonces se cambió X_0 un 4 por 100. Calcular la corriente del galvanómetro.

La solución se obtendrá directamente usando la forma aproximada del teorema de la compensación y se comprobará con la solución exacta. Los productos de las resistencias en brazos opuestos deben ser iguales en equilibrio, así que $X_0 = 150$ ohmios. La corriente de batería en equilibrio [ver Fig. 10-4 (a)] se determina por la resistencia de batería de 100 ohmios, en serie con 300 y 450 ohmios en paralelo, en total equivalentes a una resistencia en serie de 280 ohmios. De aquí, $I_b = 28/280 = 0,1$ amp. Usando un factor de reparto de corrientes de $350/750 = 0,4$, la corriente que pasa por X_0 en equilibrio es $I_x = 40$ mA. Si X_0 cambia un 4 por 100,

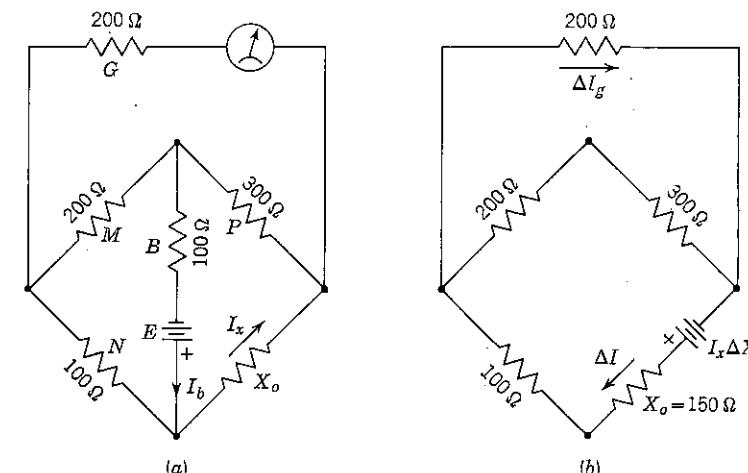


FIG. 10-4. Aplicación del teorema de la compensación a un puente desequilibrado.

$\Delta X = 0,04(150) = 6$ ohmios. Por tanto, la f.e.m. de compensación que aparece en la Fig. 10-4 (b) es $0,04(6) = 0,24$ V. La resistencia equivalente de dos resistencias conectadas en serie, de 100 y 150 ohmios, y una resistencia equivalente de 143 ohmios (500 ohmios en paralelo con $G = 200$ ohmios) es de 393 ohmios. Noten que no se considera la resistencia de la batería B . La corriente tomada de la f.e.m. de 0,24 V es $\Delta I = 0,24/393 = 0,61$ mA. Cinco séptimos de esta corriente pasan por G . Por tanto, $\Delta I_g = 0,436$ miliamperios.

La aplicación del teorema de la compensación reduce el número de operaciones, cuando se buscan resultados numéricos. La solución $\Delta I_g = 0,436$ mA es aproximada, pero no puede tener un error superior al 4 por 100, es decir, mayor de 0,0174 mA. Puede comprobarse numéricamente sustituyendo todos los datos en la fórmula exacta, Ec. (10-6). El valor de k es

$$k = \frac{200(500) + 200(700)}{200(700)(550)} = \frac{240}{200(385)} = 0,00312$$

Como $R = \Delta X = 6$ ohmios, entonces $kR = 0,0187$, pequeño en comparación con 1, así vemos que la aproximación es buena. Usando este valor de kR en la Ec. (10-6) el cambio exacto de la corriente viene dado por

$$\Delta I_g = \frac{28}{385 \times 10^3} \left[\frac{6}{1,0187} \right] = \frac{0,436}{1,0187} = 0,429 \text{ mA}$$

La solución aproximada es 0,007 mA (1,6 por 100) superior al valor exacto, y este error es menor que la mitad del valor máximo posible, 4 por 100.

(Nótese que la respuesta aproximada aparece en el numerador del último cociente.)

10-6. Aplicaciones del teorema de Thévenin. Otra posibilidad de análisis es usar el teorema de Thévenin para hallar la corriente del galvanómetro del puente de Wheatstone desequilibrado. Aunque puede obtenerse una solución exacta usando este teorema, como ocurría en el caso del teorema de la compensación si no se despreciaba R en el circuito de

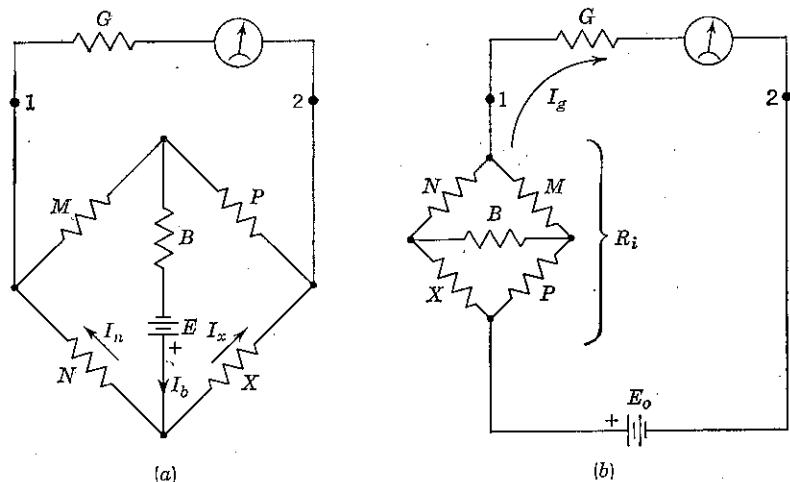


FIG. 10-5. Aplicación del teorema de Thévenin.

la Fig. 10-2, la solución aproximada es más sencilla. El resultado aproximado que se obtiene usando el teorema de Thévenin concuerda con el obtenido por el teorema de la compensación.

Quítense el galvanómetro de resistencia G de los dos terminales 1-2, de la Fig. 10-5 (a), entre los cuales se va a hallar el circuito equivalente de Thévenin. El voltaje de circuito abierto E_0 , considerando una caída de tensión del terminal 1 al 2, viene dado por $XI_x - NI_n$, donde I_x e I_n son las corrientes de rama que pasan por X y N , respectivamente, con G quitado. La corriente I_x viene dada por la Ec. (10-9) remplazando X_0 por X , e I_n se obtiene de forma similar.

$$I_n = \frac{E(P + X)}{B(M + N + P + X) + (M + N)(P + X)}$$

Esta expresión tiene el mismo denominador que I_x . La diferencia en el numerador de E_0 , será, por tanto,

$$E[X(M + N) - N(P + X)] = E(MX - NP)$$

y de aquí, $E_0 = \frac{E(MX - NP)}{B(M + N + P + X) + (M + N)(P + X)}$ (10-14)

Evidentemente, el voltaje de circuito abierto es cero con el puente en equilibrio ($MX_0 = NP$).

La resistencia equivalente de Thévenin R_i , es la resistencia de entrada en las terminales 1-2, con $E = 0$. Puede representarse como muestra la Fig. 10-5 (b). Una expresión de R_i se puede obtener usando la transformación estrella a triángulo. La corriente del galvanómetro viene dada por

$$I_g = \frac{E_0}{R_i + G} \quad (10-15)$$

donde E_0 viene dada por la Ec. (10-14). Esta es la solución exacta, pero se precisa la expresión de R_i .

Si el puente solo está ligeramente desequilibrado, entonces $X = X_0 + \Delta X$ y la Ec. (10-14) es aproximadamente

$$E_0 = \frac{EM \Delta X}{BS + (M + N)(P + X_0)} \quad (10-16)$$

donde se ha usado X_0 en vez de $X + \Delta X$ en el denominador, pero en el numerador se conserva la porción de X , ΔX . Esto está justificado porque el denominador de la Ec. (10-14) cambia muy poco al cambiar X una pequeña cantidad, pero en el rango en que MX y NP son muy próximos el numerador es muy sensible a un pequeño cambio de X .

La resistencia de entrada R_i puede hallarse fácilmente para el puente ligeramente desequilibrado. Si el puente de la Fig. 10-5 (b), que constituye R_i , está casi equilibrado, la caída de tensión en B es casi cero. El valor de B , en consecuencia, tendrá poca influencia en R_i . Despreciando ΔX en comparación a X_0 , esta aproximación es la misma que se empleó con el teorema de la reciprocidad en la Fig. 10-3. Entonces puede emplearse cualquier valor de B para calcular R_i . $B = 0$ ó $B \rightarrow \infty$ son elecciones satisfactorias, y ambas conducen al mismo valor de R_i . Con $B \rightarrow \infty$,

$$R_i = \frac{(M + P)(N + X_0)}{S} \quad (10-17)$$

El cambio de la corriente del galvanómetro respecto a su valor cero de equilibrio será pequeño. Llámemoslo ΔI_g . Sustituyendo E_0 , de la Ec. (10-16), y R_i de la Ec. (10-17), en la Ec. (10-15).

$$\begin{aligned} \Delta I_g &= \frac{EM \Delta X}{BS + (M + N)(P + X_0)} \left[\frac{1}{G + (M + P)(N + X_0)/S} \right] \\ &= \frac{EMS \Delta X}{[BS + (M + N)(P + X_0)][GS + (M + P)(N + X_0)]} \end{aligned} \quad (10-18)$$

Este resultado concuerda exactamente con el obtenido aplicando el teorema de la compensación, Ec. (10-11), ya que $MS = (M + N)(M + P)$, como indica la Ec. (10-12).

El teorema de Thévenin puede aplicarse directamente a los puentes sin tener en cuenta fórmulas ya obtenidas, como se hace en el ejemplo del teorema de la compensación de la Sec. 10-5. Sin embargo, se encontrarán dificultades de cálculo al determinar E_0 para el puente ligeramente desequilibrado, a menos de emplear técnicas cuidadosas. Para comprobarlo, intentemos resolver el ejemplo de la Sec. 10-5, usando el teorema de Thévenin. Si $B = 0$, se simplifica algo, pero aún así E_0 es la diferencia de dos números grandes casi iguales. Cuando se usa el teorema de Thévenin para hallar ΔI_g se puede recurrir a la fórmula de la Ec. (10-16) para obtener E_0 . Esto tiene la enorme desventaja de requerir una correspondencia entre los símbolos usados en ella y los del puente dado y puede producirse un embrollo de notación. A causa de las dificultades de cálculo que tiene E_0 , úsese el teorema de la compensación, que da directamente los cambios de interés. Sin embargo, el teorema de Thévenin puede ser útil en los casos en que la resistencia R_i que presenta el puente al galvanómetro, es de interés primordial.

10-7. Limitaciones en la sensibilidad del galvanómetro. La sensibilidad del galvanómetro se puede expresar en función de la corriente más pequeña que produce una desviación observable en el galvanómetro, como se discutió en la Sec. 9-9. La menor deflexión discernible asociada a esta corriente es de alrededor de una décima de división. La desviación de la corriente de cero inobservable, produce un error en la determinación de la resistencia desconocida X . Este error se combina con los atribuibles a incertidumbres en los tres brazos conocidos del puente.

Si dos brazos del puente de Wheatstone son fijos, el tercer brazo puede ajustarse para obtener el equilibrio del puente con una X determinada. Pequeños cambios por encima y debajo del valor requerido para $I_g = 0$, pueden no producir deflexiones observables. Esta incertidumbre en el ajuste de uno de los brazos puede expresarse directamente en función de la correspondiente incertidumbre en X_0 por el mismo análisis usado previamente. Con propósitos de análisis fijemos los tres brazos del puente y consideremos que X es variable. Cuando X_0 cambia por una pequeña cantidad, dX , tal que produce la menor corriente discernible dI_g , entonces dI_g puede relacionarse directamente con dX .

La menor deflexión discernible en el galvanómetro, usualmente se produce con un cambio muy pequeño en los brazos del puente. Esto está dispuesto así por el usuario del puente deliberadamente, para evitar excesivos errores por esta causa. En consecuencia, el error en el resultado aproximado obtenido usando el teorema de la compensación, Ec. (10-13), es despreciable bajo estas condiciones y puede usarse para expresar dI_g en función de dX . Análogamente puede usarse el resultado exacto, Ecu-

ción (10-6), con $R = dX$ y remplazando el factor $1 + k dX$ por 1. Por tanto, el error dX , en X_0 achacable a la menor corriente discernible en el galvanómetro, dI_g , viene dada por

$$dX = \frac{dI_g}{E} \left[B \left(1 + \frac{P}{M} \right) + P + X_0 \right] \left[G \left(1 + \frac{N}{M} \right) + N + X_0 \right] \quad (10-19)$$

resolviendo Ec. (10-13), (10-6) o (10-7) en dX . Esta expresión puede dividirse por X_0 para obtener el error relativo de X_0 . La Ec. (10-19) está sujeta naturalmente a $MX_0 = NP$, que puede usarse para eliminar X_0 si se desea.

Como ejemplo sencillo, supónganse todas las resistencias iguales a $X_0 = 1.000$ ohmios y $E = 16$ V. Entonces,

$$dX = 16X_0^2 \frac{dI_g}{E} = 10^6 dI_g$$

Si la menor corriente discernible en el galvanómetro es $1 \mu\text{A}$, la determinación de X_0 tendrá un error del 0,1 por 100 en este caso. Un galvanómetro más sensible producirá un error menor por esta causa.

10-8. Limitación de la corriente del puente. El error en la determinación de X_0 producido por la limitación de sensibilidad del galvanómetro es inversamente proporcional a la f.e.m. de la batería E , como muestra la Ec. (10-19). De aquí que el error de X_0 puede reducirse aumentando E . Teóricamente, aumentando E hasta infinito se reducirá el error debido a la sensibilidad del galvanómetro a cero. Sin embargo, existe un límite superior por encima del cual no es posible reducir el error por este medio.

La limitación a menudo surge a causa de la corriente máxima que puede circular por el puente. Puede ser una limitación severa, pues las resistencias muy exactamente conocidas no toleran una corriente excesiva sin llegar a sobrecalentamiento e inestabilidad. Por tanto, el valor de E debe restringirse consecuentemente. Las corrientes que pasan por los brazos del puente ($M + N$) y ($P + X$) son desiguales en equilibrio, por lo general. La resistencia con menor capacidad de corriente establece el límite superior a la máxima corriente permisible proporcionada al puente completo por E . De aquí que consideremos la máxima corriente de batería, I_{bm} , mejor que la máxima f.e.m. de batería. Esta corriente puede obtenerse con un número infinito de combinaciones de B y E .

Examinando la Ec. (10-19), se observa que si B se reduce y E se aumenta, sin exceder de I_{bm} , el error dX se reduce. Con $B = 0$ se tienen las condiciones más favorables y con E en el valor máximo permisible, se tiene el error mínimo de X_0 .

$$dX_{\min} = \frac{dI_g}{E_{\max}} (P + X_0) \left[G \left(1 + \frac{N}{M} \right) + N + X_0 \right] \quad B = 0 \quad (10-20)$$

Este error se reduce todavía más reduciendo la resistencia G del galvanómetro. La Ec. (10-20) puede expresarse directamente en función de I_{bm} . Si $B = 0$ y E tiene el máximo valor permisible, entonces la corriente proporcionada al puente es la mayor permisible. Consta de dos componentes, una a través de $M + N$ y otra a través de $P + X_0$.

$$I_{bm} = \frac{E_{\max}}{M+N} + \frac{E_{\max}}{P+X_0} = \frac{SE_{\max}}{(M+N)(P+X_0)} = \frac{(M+P)E_{\max}}{M(P+X_0)}$$

Introduciendo este valor de E_{\max} en la Ec. (10-20).

$$dX_{\min} = \frac{dI_g(1+P/M)[G(1+N/M)+N+X_0]}{I_{bm}} \quad (10-21)$$

Este resultado, en función del valor fijo I_{bm} , no contiene ni E ni B . Demuestra claramente que un aumento en E con el correspondiente aumento de B requerido para no pasar de la máxima corriente permisible I_{bm} no afecta a dX_{\min} .

10-9. Rango de precisión de un puente fijo. En un puente de Wheatstone dado el error en la determinación del valor de una resistencia desconocida, X_0 , depende del valor de X_0 . Por ejemplo, en el caso especial de la Sec. 10-7, dX depende de X_0^2 . En general, hay un amplio rango en el que se obtiene gran precisión, pero la incertidumbre en la determinación de X_0 puede llegar a ser excesiva si X_0 es demasiado grande o demasiado pequeño, para un puente dado.

Considérese un específico puente de Wheatstone con brazos de relación fijos M y P , con un galvanómetro de menor corriente discernible dI_g y resistencia G , y una batería fija de resistencia B y f.e.m. E . Este puente puede usarse para medir distintos valores de X_0 variando N hasta satisfacer la ecuación de equilibrio $MX_0 = NP$. El error ΔX , para cualquier X_0 puede expresarse en función de todos los parámetros fijos y de X_0 . Si ΔX es razonablemente menor que X_0 , viene dado por la Ec. (10-19).

$$\Delta X = \frac{dI_g}{E} \left[B \left(1 + \frac{P}{M} \right) + P + X_0 \right] \left[G \left(1 + \frac{N}{M} \right) + N + X_0 \right]$$

Ya que N es una variable dependiente, puede remplazarse por $X_0 M/P$. Operando y agrupando términos, en X_0 queda

$$\Delta X = \frac{dI_g}{EMP} (BM + BP + MP + MX_0)[GP + X_0(G + M + P)]$$

Todas las cantidades de esta expresión son fijas, a excepción de X_0 .

Definamos

$$K = BM + BP + MP \quad C = G + M + P$$

Efectuando el producto y dividiendo ambos lados de la ecuación por X_0 , se obtiene

$$\delta = \frac{\Delta X}{X_0} = \frac{dI_g}{EMP} \left(CMX_0 + KC + MGP + \frac{KGP}{X_0} \right) \quad (10-22)$$

Este resultado expresa la dependencia del error relativo de X_0 , en un puente dado que tiene el circuito de batería conectado a la unión del brazo ajustable con el desconocido. (Si P fuera el brazo ajustable, se habría obtenido otro resultado. Con P ajustable para valores pequeños de X_0 , P tendría que ser también pequeño y la corriente que pasa por X_0 solo estaría limitada por B cuando $X_0 \rightarrow 0$. Con N ajustable, los brazos fijos M y P limitan la corriente, incluso cuando $X_0 = 0$.)

Inspeccionando la Ec. (10-22) se observa una particularidad muy interesante. Para valores muy grandes de X_0 , el error relativo δ se elevará, debido al término CMX_0 . Por otra parte, para valores de X_0 muy pequeños, δ volverá a aumentar, a causa del término KGP/X_0 . Por consiguiente, debe haber algún valor de X_0 entre estos extremos en que δ sea mínimo. Este valor se puede hallar igualando la derivada de δ con respecto a X_0 a cero. Entonces,

$$\frac{d\delta}{dX_0} = CM - \frac{KGP}{X_0^2} = 0$$

De aquí que el error relativo de X_0 sea mínimo para

$$X_0 = \sqrt{\frac{KGP}{CM}} \quad (10-23)$$

El mínimo error se obtiene sustituyendo este valor de X_0 en la Ec. (10-22):

$$\delta_{\min} = \frac{dI_g}{EMP} (\sqrt{KC} + \sqrt{MGP})^2 \quad (10-24)$$

Como ejemplo numérico, supónganse los valores de las resistencias fijas $P = M = G = R$ y $B = R/2$. Entonces $K = 2R^2$, $C = 3R$, y el valor de X_0 que da error mínimo es $0,815R$, y el mínimo error relativo es $11,9R dI_g/E$. La expresión de δ usando estos valores es:

$$\delta = \frac{dI_g}{E} \left(3X_0 + 7R + \frac{2R^2}{X_0} \right)$$

La representación gráfica de esta ecuación, Fig. 10-6, muestra un mínimo más bien amplio. El error relativo es cinco veces el mínimo cuando X_0 es aproximadamente igual a $0,038R$ y $17,5R$. A causa de este comportamiento, los puentes de Wheatstone van provistos de varios pares de brazos de relación fijos, que pueden usarse para cubrir un amplio rango de valores de X_0 , con poco error atribuible a la sensibilidad del galvanómetro.

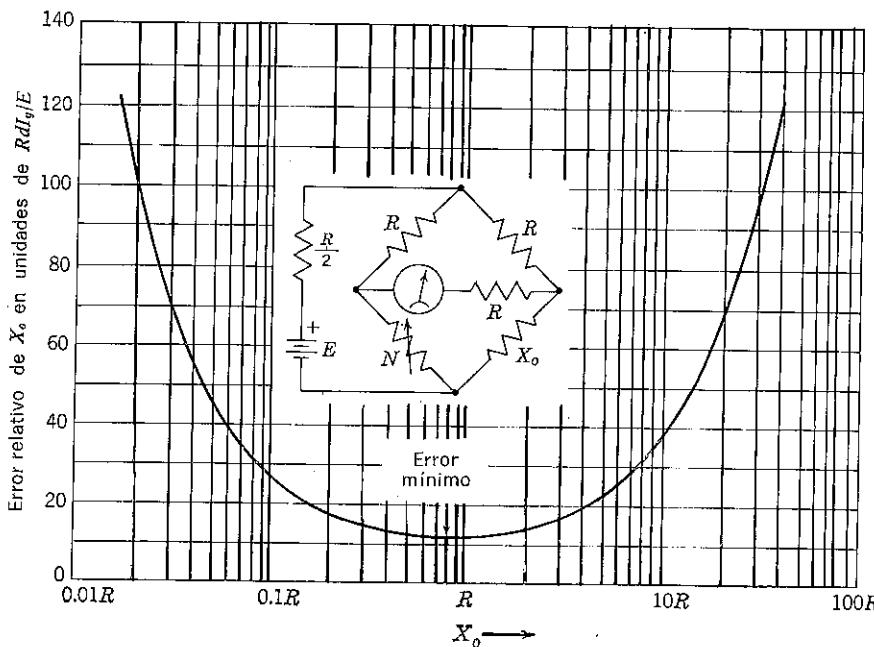


FIG. 10-6. Ejemplo de la curva de error de un puente dado (no universal).

10-10. Intercambio de la batería y el galvanómetro. La ecuación de equilibrio $MX_0 = NP$ subsiste si se intercambian los circuitos de la batería y del galvanómetro. Sin embargo, la sensibilidad del puente, esto es, el cambio de la corriente del galvanómetro producido por un pequeño cambio de X_0 , puede depender de la combinación usada. Al comparar las sensibilidades de ambas posibilidades, hay que tener en cuenta qué magnitudes se mantienen constantes. Las dos conexiones pueden compararse suponiendo constante el voltaje aplicado al puente, o manteniendo la misma corriente máxima permisible en el brazo menos tolerante, o ajustando la resistencia del galvanómetro para transmitir la máxima potencia, etc. Los resultados de la comparación dependen en general de las condiciones. No se estudian aquí todas las posibilidades, pero la forma de hacerlo se ilustra con dos casos.

Si las dos conexiones se comparan manteniendo fijo el voltaje aplicado, y los demás parámetros fijos, los dos circuitos de la Fig. 10-7 pueden analizarse con $V_a = V_b$. El teorema de la compensación se puede usar para encontrar la sensibilidad del puente, dI_g/dX . La forma aproximada del teorema puede aplicarse sin error si dX es un cambio infinitesimal, y no se precisa de más para comparar las pendientes de la curva $I_g - X$ en el punto $X = X_0$. En la Fig. 10-7 (a) la corriente que atraviesa X_0 , en equilibrio es $I_x = V_a/(P + X_0)$. El cambio producido en la corriente del galvanómetro por un pequeño cambio de X_0 a $X_0 + dX$ viene dado por la corriente que atraviesa G , si se pone en serie con X_0 una f.e.m. $I_x dX$. El circuito de batería se puede remplazar por un circuito abierto por comodidad. La f.e.m. de compensación produce una corriente

$$dI = \frac{I_x dX}{N + X_0 + G(M + P)/(G + M + P)}$$

dI_g será igual a $(M + P)/(G + M + P)$ por esta corriente. Por tanto,

$$dI_g = \frac{V_a dX}{(P + X_0)[N + X_0 + G(M + P)/(G + M + P)]} \left[\frac{M + P}{G + M + P} \right]$$

Simplificando y agrupando términos en G , queda,

$$s_1 = \frac{dI_g}{dX} = \frac{V_a(M + P)}{(P + X_0)[GS + (N + X_0)(M + P)]} \quad (10-25)$$

donde s_1 es la sensibilidad del puente en el caso (a) de la Fig. 10-7.

En la Fig. 10-7 (b) la corriente que pasa por X_0 en equilibrio es $I'_x = V_b/(N + X_0)$. El cambio en la corriente del galvanómetro se puede hallar de nuevo insertando una f.e.m. de compensación $I'_x dX$ en serie con X_0 y remplazando V_b por un circuito abierto. En este caso, la f.e.m. de compensación produce una corriente

$$dI' = \frac{I'_x dX}{P + X_0 + G(M + N)/(G + M + N)}$$

dI'_g es igual a $(M + N)/(G + M + N)$ por esta corriente. Por tanto,

$$dI'_g = \frac{V_b dX}{(N + X_0)[P + X_0 + G(M + N)/(G + M + N)]} \left[\frac{M + N}{G + M + N} \right]$$

Simplificando y agrupando términos en G , queda:

$$s_2 = \frac{dI'_g}{dX} = \frac{V_b(M + N)}{(N + X_0)[GS + (P + X_0)(M + N)]} \quad (10-26)$$

donde s_2 es la sensibilidad del puente en el caso (b) de la Fig. 10-7.

Estas dos sensibilidades pueden compararse con $V_a = V_b$ obteniendo la relación de s_1 a s_2 . Entonces,

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{(M + P)(N + X_0)[GS + (P + X_0)(M + N)]}{(M + N)(P + X_0)[GS + (N + X_0)(M + P)]}$$

Este resultado tan tosco puede simplificarse dividiendo numerador y denominador por el producto común de cuatro factores y usando las relaciones de la Ec. (10-12).

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{1 + G(M + P)/M(P + X_0)}{1 + G(M + N)/M(N + X_0)} \quad (10-27)$$

Este resultado muestra que si $G = 0$, $s_1 = s_2$. También, si $N = P$, $s_1 = s_2$.

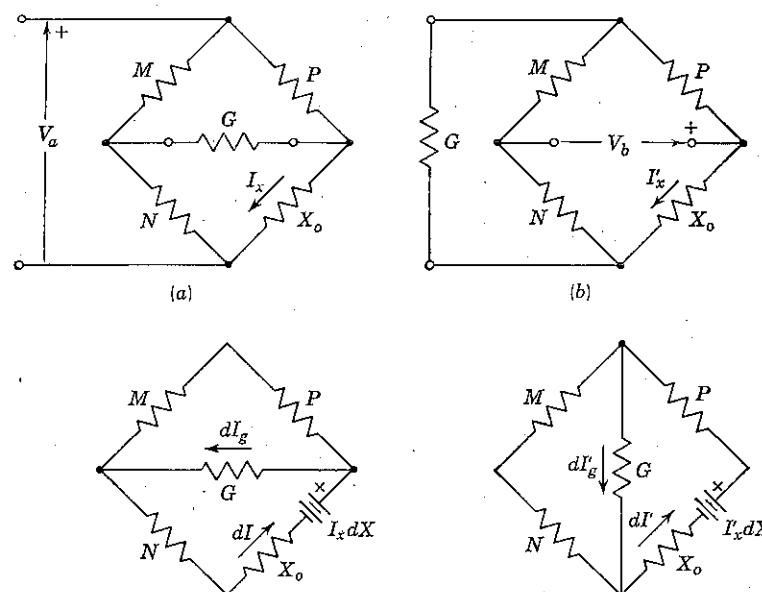


FIG. 10-7. Comparación intercambiando detector y generador.

para cualquier G si $M > X_0$ o $M < X_0$. Por otra parte, si

$$\frac{M + P}{P + X_0} > \frac{M + N}{N + X_0}$$

entonces $s_1 > s_2$ para cualquier $G \neq 0$. Esto requiere que sea $N > P$, $M > X_0$ o $N < P$, $M < X_0$. Por tanto, en un puente con dos brazos

de alta resistencia conectados a una unión, y dos brazos de baja resistencia conectados a la unión opuesta, la mayor sensibilidad se obtiene conectando el galvanómetro de la unión de resistencias altas a la de resistencias bajas. Las conclusiones basadas en la Ec. (10-27), por supuesto, solo son válidas si se aplica el mismo voltaje $V_a = V_b$, en los dos casos al puente, y todos los demás parámetros permanecen constantes.

Si se mantiene la corriente I_x constante en las dos disposiciones, se tienen otras conclusiones. En el caso (a) $I_x = V_a/(P + X_0)$ así que s_1 se obtiene remplazando $V_a/(P + X_0)$, en la Ec. (10-25), por I_x

$$s_1 = \frac{I_x(M + P)}{GS + (N + X_0)(M + P)} = \frac{I_x}{GS/(M + P) + N + X_0}$$

En el caso (b), $I_x = V_b/(N + X_0)$, donde V_b es tal, que se mantiene la misma corriente I_x . Remplazando en la Ec. (10-26), $V_b/(N + X_0)$ por la misma I_x que en el caso (a), se obtiene s_2 .

$$s_2 = \frac{I_x(M + N)}{GS + (P + X_0)(M + N)} = \frac{I_x}{GS/(M + N) + P + X_0}$$

El cociente de ambas sensibilidades, en el que desaparece I_x , es, usando Ec. (10-12),

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{G(M + P) + M(P + X_0)}{G(M + N) + M(N + X_0)} \quad (10-28)$$

Este resultado muestra que para $N = P$, $s_1 = s_2$ para todo valor de G , si $M > X_0$ o $M < X_0$. Esta conclusión es la misma que en el caso de voltaje constante. Sin embargo, si $N > P$, $s_1 < s_2$ para todo valor de G , incluido $G = 0$, lo cual está lejos de suceder en el caso del voltaje constante.

No debe sorprender que los resultados dependan de las condiciones impuestas. Con todo, frecuentemente se descuidan las condiciones en el ardor de aplicar los resultados. Una situación similar ocurre en el simple caso de máxima potencia transmitida de una f.e.m. E de resistencia interna r a una resistencia de carga R . El resultado de $R = r$ para que haya máxima transmisión de potencia a R , se establece a menudo sin tener en cuenta las condiciones para las que el resultado rige, es decir, E y r fijos y R variable. Si las condiciones cambian, también el resultado. Por ejemplo, si E y R están fijos y se varía r , la máxima potencia transmitida es cuando $r = 0$, no cuando $r = R$.

10-11. La técnica de las décadas. Las resistencias ajustables precisas consisten habitualmente en bobinas de resistencia, comutables o enchufables, a fin de obtener posiciones de resistencia definida. Las cajas de resistencia, tipo comutador, por décadas, se usan mucho. La resis-

cia de entrada en dos terminales de la caja puede variarse por pequeños pasos iguales en todo el rango de la caja. Un circuito de un tipo de caja que emplea bobinas en serie aparece en la Fig. 10-8.

Con dos brazos de relación fijos, M y N , la caja de décadas puede usarse como P para equilibrar el puente de la Fig. 10-8. El reóstato B se usa para mantener la corriente en los brazos del puente dentro de los valores permisibles para M , N , P y X . Normalmente, no puede observarse un cero en el circuito de la Fig. 10-8 si se tiene un galvanómetro de gran sensibilidad. Esto no es ninguna limitación serie del empleo del puente, como se demostrará, y la imposibilidad de obtener un cero sugiere varias posibilidades experimentales muy interesantes.

Como ejemplo, supóngase que P se ajusta al valor P_1 y el galvanómetro presenta una pequeña deflexión de $+d_1$ divisiones. Entonces, aumentando a P por el paso más pequeño posible a $P_1 + r$, se observa una deflexión en sentido contrario de $-d_2$ divisiones. Naturalmente, el puente se equilibraría con algún valor de P entre las dos posiciones, pero es un valor inaccesible con esta caja. Sin embargo, el valor de equilibrio de P se puede hallar con interpolación lineal. Esto está justificado para pequeños desequilibrios del puente, pues ΔI_g es directamente proporcional al cambio de X , cuando este cambio es solo un pequeño porcentaje de X y lo mismo ocurre con P . Las dos deflexiones del galvanómetro difieren un total de $d_1 + d_2$ divisiones. De aquí que el valor de P que se precisa

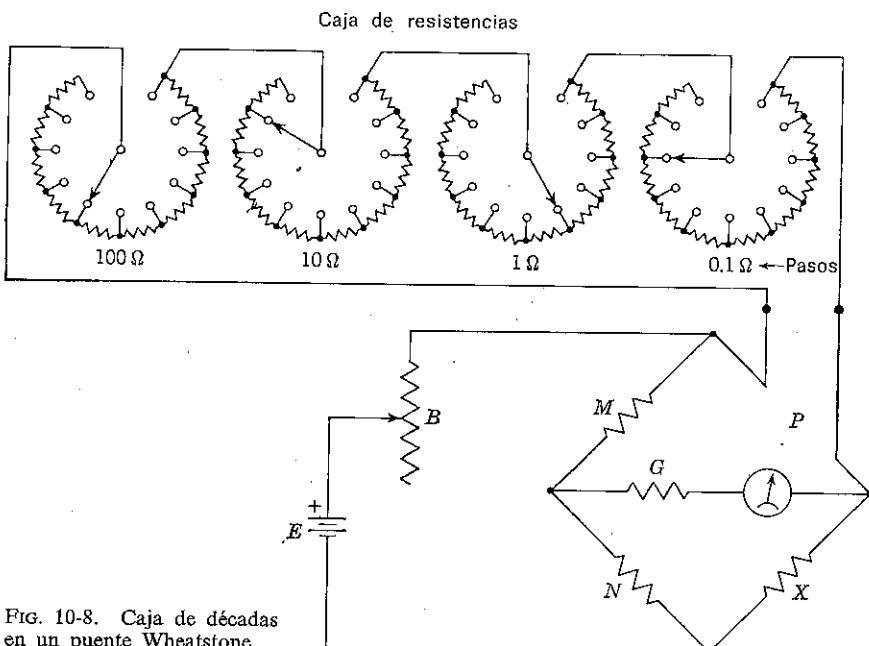


FIG. 10-8. Caja de décadas en un puente Wheatstone.

para el equilibrio, obtenido por interpolación lineal, es, como muestra la Fig. 10-9.

$$P = P_1 + \frac{r d_1}{d_1 + d_2} \quad (10-29)$$

La incógnita X viene dada por N/M veces este valor interpolado de P . La interpolación se usa frecuentemente cuando se trabaja con el puente y no está sujeta a errores instrumentales serios, pues la mayoría de los galvanómetros son prácticamente lineales en el rango próximo al cero. Por otra parte, la interpolación es significativa solamente dentro de los límites de incertidumbre de la década. Con un galvanómetro de gran sensibilidad los errores de instrumento son despreciables en comparación con la incertidumbre de la década y resistencia de los conductores.

Estos mismos datos pueden usarse para determinar el error relativo en la determinación de X , debido a sensibilidad del galvanómetro limitada. Supóngase una deflexión discernible mínima de 0,1 división de la escala. Entonces, en el ejemplo precedente, donde $d_1 + d_2$ corresponden a un cambio r , el cambio calculable de la resistencia P debido a la menor deflexión discernible es $0,1r/(d_1 + d_2)$ ohmios. Por ejemplo, sea $d_1 + d_2 = 5$ divisiones y $r = 0,1$ ohmios. Entonces, si P cambiase en 0,02 ohmios produciría un cambio de 1 división y si cambiase en 0,002 produciría un cambio apenas discernible de 0,1 división. El correspondiente cambio de X puede hallarse multiplicando este cambio mínimo discernible de P por N/M , ya que $M \Delta X = N \Delta P$.

Finalmente, si todas las resistencias del puente se conocen y si E se conoce, la corriente del galvanómetro ΔI_g puede calcularse a partir del

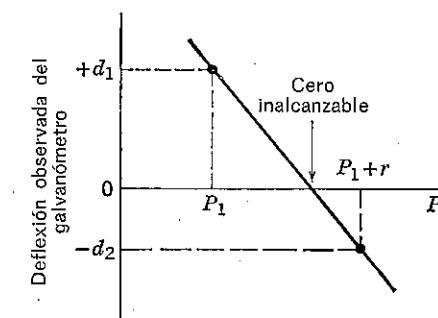


FIG. 10-9. Interpolación lineal entre pasos.

cambio r de P_1 . El teorema de la compensación conduce rápidamente al valor de ΔI_g . La sensibilidad de corriente del galvanómetro se obtiene entonces dividiendo el cambio $d_1 + d_2$ entre el valor calculado correspondiente de ΔI_g .

10-12. Puente de hilo. Una resistencia de hilo deslizante puede incorporarse a un puente de Wheatstone como muestra la Fig. 10-10. El hilo, de resistencia $r = m + n$ puede disponerse en un tambor circular, como sugiere esquemáticamente la Fig. 10-10, o en la forma rectilínea del potenciómetro de cursor en la Fig. 9-8. La ecuación de equilibrio para este puente se obtiene igualando los productos de resistencias en brazos opuestos.

$$X(M + m) = P(N + n) \quad (10-30)$$

Las resistencias fijas, M y N , llamadas extensiones, pueden usarse para controlar el rango total efectivo de la resistencia de hilo. Si $M = 0 = N$, la resistencia incógnita del *simple* puente de hilo es, según Ec. (10-30),

$$X = \frac{n}{m} P = \frac{n}{r - n} P \quad (10-31)$$

El cociente $n/(r - n)$ puede determinarse a partir de la escala asociada al hilo uniforme.

Una interesante técnica para mejorar la precisión con que se determina X es intercambiar X y P y equilibrar de nuevo el puente. Puede determinarse X a partir del *cambio* de posición del cursor que se requiere para equilibrar el puente en los dos casos. Sea d el aumento de m preciso para

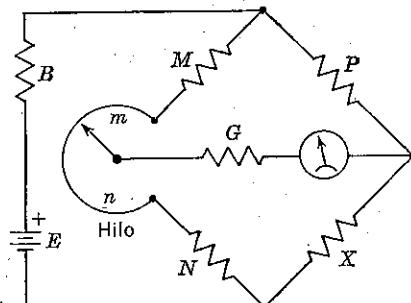


FIG. 10-10. Puente de hilo.

reequilibrar el puente cuando se intercambian X y P . Entonces, n debe cambiar a $n - d$. La segunda condición de equilibrio es

$$P(M + m + d) = X(N + n - d)$$

La resistencia total del puente de hilo, incluidas las extensiones, es

$$R = M + N + r$$

y permanece constante. La relación X/P en el primer equilibrio, dada por Ec. (10-30), debe ser igual para el segundo y, por tanto,

$$\frac{X}{P} = \frac{N + n}{R - (N + n)} = \frac{R - (N + n) + d}{(N + n) - d} \quad (10-32)$$

Puede obtenerse esta ecuación que

$$N + n = \frac{1}{2} (R + d)$$

$$\text{Por tanto, } \frac{X}{P} = \frac{R + d}{R - d} = \frac{1 + d/R}{1 - d/R} \quad (10-33)$$

La técnica de intercambiar X y P es especialmente valiosa cuando X y P son casi iguales. Entonces la resistencia d , que es la resistencia del hilo entre las dos posiciones de equilibrio es muy pequeña en comparación con R .

Cuando el puente de hilo se desequilibra a causa de un cambio en el ajuste del cursor, surge un interesante problema de análisis, pues se crea un doble desequilibrio en el puente. Un efecto similar se encontró en el caso del potenciómetro. Si el cursor cambia de forma que m aumenta en Δm , entonces n debe cambiar a $n - \Delta m$. Una ligera reflexión muestra que ambos cambios actúan concordantemente, produciendo corriente galvanométrica en el mismo sentido. Se deduce que es un ajuste más sensible que si solo se variase un brazo del puente. Por este motivo, el puente de hilo se usa a veces en servomecanismos como detector de error; en tal caso, el cursor se engrana al eje de un motor.

El teorema de la compensación se puede aplicar para hallar la corriente en el galvanómetro que produce un cambio en la posición de equilibrio del cursor. Un análisis general en función de símbolos sería demasiado pesado para explicarlo aquí. En vez de eso, consideraremos el caso numérico de $E = 24$ V, $P = 1.000$ ohmios, $X = 1.500$ ohmios, $M = 950$ ohmios, $N = 1.450$ ohmios, $r = 100$ ohmios, $B = 750$ ohmios y $G = 300$ ohmios. Estos valores aparecen en la Fig. 10-11 (a). Evidentemente, $m = n = 50$ ohmios en el equilibrio inicial. La corriente total, tomada de la batería, se determina a partir de B en serie con la combinación en $P + X$ y $M + N + r$ en paralelo, en total una resistencia de 2.000 ohmios. De aquí, con $E = 24$ V, la corriente de batería es 12 mA. Usando la regla del reparto de corrientes, se ve que la mitad de esta corriente atraviesa r . Por tanto, la corriente que pasa por M , N y r en equilibrio es $I_r = 6$ mA. Supongamos que m cambia en Δm ; entonces n cambiará $-\Delta m$. El cambio en la corriente del galvanómetro ΔI_g será igual al producido por la f.e.m. de compensación de la Fig. 10-11 (b), donde $\Delta m = -\Delta n$, se desprecia en comparación a M y N , respectivamente, y se ha suprimido B . Ninguno de estos pasos introducen error apreciable

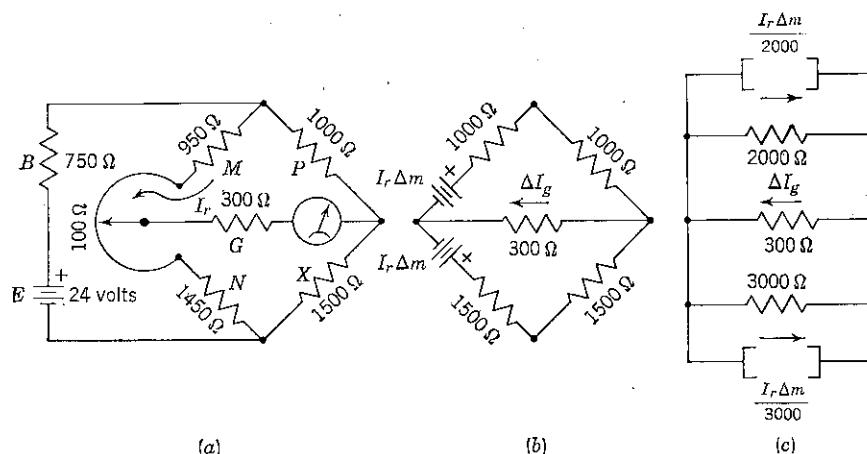


FIG. 10-11. Circuitos para el análisis del puente de hilo.

si Δm es una pequeña fracción de $M + m$ y $N + n$. Transfórmense los generadores de tensión en generadores de intensidad, como indica la Fig. 10-11 (c). El generador de corriente asociado con m produce una corriente de $3 \Delta m \mu\text{A}$ (Δm en ohmios), ya que $I_r = 6 \text{ mA}$. El generador de corriente asociado a n produce una corriente de $2 \Delta m \mu\text{A}$. Ya que el galvanómetro está shuntado con una resistencia equivalente de 1.200 ohmios, la fracción de $1.200/1.500 = 0.8$ de la corriente que llega al nudo pasará a través del galvanómetro, el resto pasa por las resistencias en paralelo. Entonces

$$\Delta I_g = 0.8(2 \Delta m + 3 \Delta m) = 4 \Delta m \mu\text{A}$$

Por ejemplo, si Δm es el 0,1 por 100 de r , $\Delta m = 0,1$ ohmios, y $\Delta I_g = 0,4$ microamperios.

Esta corriente en el galvanómetro es mayor que la que producirá el cambio de un solo brazo, por ejemplo, N en $\Delta N = 0,1$ ohmios, pues entonces el generador de corriente asociado a m sería cero, mientras la f.e.m. de compensación en serie con N sería $I_r \Delta N$. Evidentemente, el cambio en la corriente del galvanómetro (a partir del puente equilibrado), causado por un cambio de N de 0,1 ohmios sería solamente 0,16 microamperios.

Desde otro punto de vista, un aumento de N a $N + \Delta N$ se puede usar para anular la corriente del galvanómetro que produjo Δm . El cambio ΔN es mayor que Δm . La magnitud de este cambio puede hallarse superponiendo un generador de corriente de $5 \Delta m \mu\text{A}$, directamente opuesto a los de la Fig. 10-11 (c) para anular la corriente del galvanómetro. Este generador de corriente debe ser igual a $2 \Delta N \mu\text{A}$. Por tanto, $\Delta N = 2,5 \Delta m$. La versatilidad del teorema de la compensación y el pro-

fundo conocimiento que proporciona, quedan bien demostrados por estos ejemplos.

10-13. Puente de límite. Otra aplicación del puente de hilo se obtiene examinando la Ec. (10-30) en las posiciones extremas del cursor. Cuando el cursor se mueve de una posición extrema ($n = r$, $m = 0$) a la otra posición extrema ($n = 0$, $m = r$), los valores de equilibrio de X correspondientes son, respectivamente,

$$X_1 = \frac{N + r}{M} P \quad X_2 = \frac{N}{M + r} P \quad (10-34)$$

La diferencia entre los dos valores de X para los cuales el equilibrio del puente es posible, son

$$X_1 - X_2 = \left(\frac{N + r}{M} - \frac{N}{M + r} \right) P = \frac{r(N + M + r)P}{M(M + r)} \quad (10-35)$$

El rango $X_1 - X_2$, puede establecerse para un puente de hilo dado, mediante una elección apropiada de N , M y P . Entonces el puente de hilo se puede usar como *puente de límite*. Un gran número de resistencias, se instalan sucesivamente en el brazo X , a fin de seleccionarlas con la tolerancia $X_1 - X_2$. Si no es posible obtener equilibrio con el recorrido

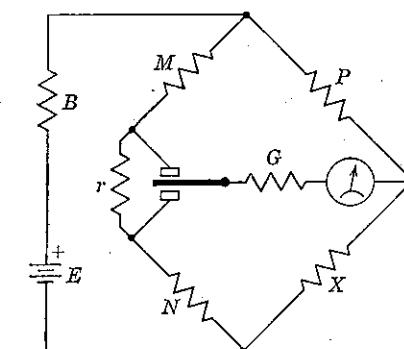


FIG. 10-12. Puente de límite.

completo del cursor, la resistencia examinada cae fuera de los límites prescritos. Si se consigue el equilibrio se lee su valor directamente en una escala de resistencias adosada al hilo.

Si no se desea el valor de X es posible un procedimiento más rápido. El hilo puede remplazarse por el conmutador de dos posiciones y la resistencia r , Fig. 10-12. Si la deflexión del galvanómetro se invierte al cambiar el conmutador de una posición a la otra, X está comprendida entre X_1 y X_2 . Desarrollaremos ecuaciones de diseño para el caso especial de que

$M = N$. Sea $r = kM$, donde k es una constante cualquiera. La Ec. (10-35) se transforma en

$$X_1 - X_2 = \frac{k(2 + k)P}{1 + k}$$

El valor de X que es la media de X_1 y X_2 se obtiene de la Ec. (10-34)

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2} = \frac{P}{2} \left(1 + k + \frac{1}{1 + k} \right) = \frac{P(2 + 2k + k^2)}{2(1 + k)} \quad (10-36)$$

Los límites de error relativo, simétricos a \bar{X} , son $\pm\delta$, donde

$$\delta = \frac{X_1 - X_2}{\bar{X}} = \frac{k(2 + k)}{2 + 2k + k^2} \quad (10-37)$$

Resolviendo explícitamente en k , se obtiene la siguiente ecuación cuadrática:

$$k^2 + 2k - \frac{2\delta}{1 - \delta} = 0$$

La raíz positiva, única con significado físico, es

$$k = -1 + \sqrt{1 + \frac{2\delta}{1 - \delta}} = -1 + \left(1 + \frac{\delta}{1 - \delta} + \dots \right) = \frac{\delta}{1 - \delta} + \dots$$

Evidentemente, si $\delta \ll 1$, $k \approx \delta$. Por tanto, si se desean unos límites de tolerancia del ± 1 por 100, $\delta = 0,01$ (que es mucho menor que 1) $k = 0,01$ y $r = 0,01 M$. Además, si δ y k son pequeños, \bar{X} y P son prácticamente iguales y \bar{X} se puede instalar en el brazo del puente que corresponde a P . Sin embargo, debe observarse que si δ no es despreciable en comparación con 1, k es mayor que δ . También \bar{X} es mayor que P si k^2 no es despreciable en comparación con $2(1 + k)$. En este caso, hay que instalar en el brazo del puente un valor de P menor que \bar{X} , si la tolerancia $X_1 - X_2$ tiene que estar centrada en \bar{X} .

10-14. Puente doble de Kelvin. La medida precisa de resistencias menores que 1 ohmio presenta varios problemas que no aparecen con altas resistencias. Una de las dificultades la causan los contactos entre la resistencia y sus hilos de conexión. La resistencia de los contactos puede ser del orden de 0,0001 ohmios, que puede despreciarse frente a una resistencia de 100 ohmios, pero que constituye una fracción significativa de una resistencia muy baja. Por ejemplo, no es tolerable en un shunt de 50 amp-50 mV que tiene una resistencia aproximada de 0,001 ohmio. Por otra parte, la resistencia de los contactos es una magnitud muy variable

y depende de factores tales como la presión mecánica en el contacto y del estado físico de las superficies en contacto. Otra dificultad la constituye la resistencia propia de los hilos de conexión que no puede despreciarse cuando se opera con resistencias bajas. Tales factores han conducido al desarrollo de la resistencia de cuatro terminales, indicada en la Fig. 10-13. Esta construcción se emplea en dispositivos tales como shunts de amperímetros y patrones precisos de baja resistencia. El par externo de terminales proporciona la conexión de corriente y el par interno constituye los terminales entre los que se halla la resistencia útil. La resistencia entre los terminales de tensión no incluye la resistencia de conducción del circuito que lleva la corriente, y no viene afectada por la resistencia de contacto en los terminales de intensidad. Por otra parte, la resistencia del circuito conectado a los terminales de tensión es relativamente alta y no toma corriente apreciable y, por tanto, la resistencia de contacto de los terminales de tensión es despreciable.

El puente de Wheatstone no sirve para medir resistencias de dos terminales de bajo valor a causa de los efectos de resistencia de conducción y contacto, ya mencionados. Si se usan resistencias de cuatro terminales, como en la Fig. 10-14, aún subsisten dificultades. Los brazos de relación

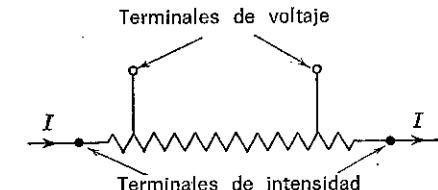


FIG. 10-13. Resistencia de cuatro terminales.

de alta resistencia, M y N , de este puente son fijos, P es una resistencia patrón de cuatro terminales ajustable y X es una resistencia de cuatro terminales desconocida. Prácticamente toda la corriente de batería, del orden de 10 amp para tener una sensibilidad adecuada, pasa por X y P ; de aquí que la conexión J deba ser capaz de conducir grandes corrientes. Aunque la resistencia de contacto y conexión de los terminales de intensidad de X y P no intervienen directamente en los brazos del puente, es un problema el decidir cuál debe ser la conexión del galvanómetro en la unión de X y P . La conexión entre los terminales A y B , no importa lo corta que sea, introduce resistencia de conducción en los brazos del puente. Además, las resistencias tras los terminales A y B que conducen a las uniones con X y P , respectivamente, no son iguales necesariamente. Sea $r = r_1 + r_2$ la resistencia total del «corto circuito» que une X y P y supóngase que la conexión del galvanómetro puede variar sobre r . La condición de equilibrio para el puente se obtiene imponiendo $I_g = 0$, es decir, voltaje cero sobre G . He aquí que las corrientes que pasan por M y N deben ser iguales en equilibrio. Llamemos a esta corriente I_1 .

Entonces

$$I_1N = IX + I_r r_1$$

donde I es la corriente que pasa por X e I_r la que pasa por r (ver Fig. 10-14). Análogamente, en el otro lazo

$$I_1M = IP + I_r r_2$$

El cociente de estas dos ecuaciones es

$$\frac{N}{M} = \frac{IX + I_r r_1}{IP + I_r r_2}$$

Resolviendo en X .

$$X = \frac{N}{M} P + \frac{r_2 I_r}{I} \left(\frac{N}{M} - \frac{r_1}{r_2} \right) \quad (10-38)$$

Aunque r_1 y r_2 son pequeños y N y M son grandes, la diferencia de sus cocientes no es necesariamente despreciable en comparación con NP/M , pues P es muy pequeño. Tampoco puede asegurarse que $r_2 I_r / I$ sea pequeño. Por tanto, resulta que no puede hallarse un valor preciso de X en función solo de N , M y P . Si se desea que X venga dado por la ecuación de equi-

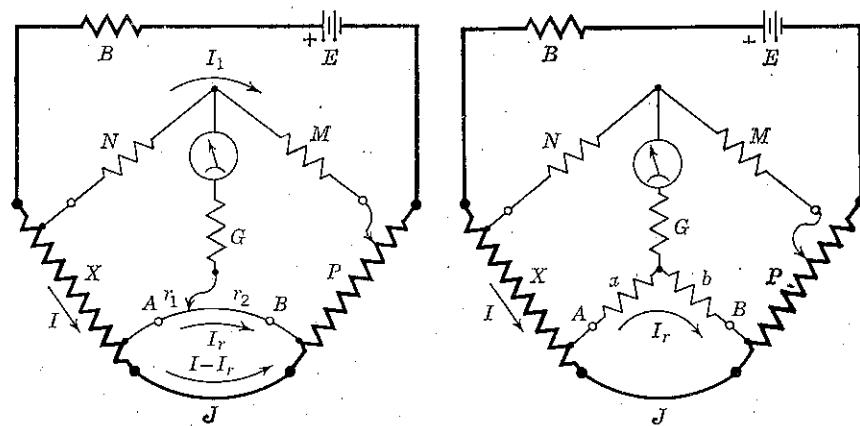


FIG. 10-14. Puente de Wheatstone para resistencia de cuatro terminales.

librio $X = NP/M$ del puente de Wheatstone, debe hacerse $r_1/r_2 = N/M$. Sin embargo, esto no es posible con la disposición de la Fig. 10-14, pues r_1/r_2 no se conoce.

FIG. 10-15. Puente doble de Kelvin.

El puente doble de Kelvin, es una modificación del puente de Wheatstone que reduce, en efecto, a cero el segundo término de la Ec. (10-38). Dos resistencias, a y b , muy grandes en comparación con r , se conectan entre los terminales A y B y el galvanómetro se conecta a su unión, como muestra la Fig. 10-15. Entonces, el análisis precedente es aplicable al puente doble de Kelvin remplazando r_1 por a y r_2 por b . Por otra parte, la corriente I_r es ahora mucho más pequeña que antes y viene dada por la corriente a través de X por $J/(J + a + b)$.

$$I_r = \frac{J}{a + b + J} I$$

Por tanto, la Ec. (10-38) se convierte en la ecuación de equilibrio del puente doble de Kelvin.

$$X = \frac{N}{M} P + \frac{Jb}{a + b + J} \left(\frac{N}{M} - \frac{a}{b} \right) \quad (10-39)$$

Se han conseguido dos cosas importantes. Una, el segundo término es controlable y puede eliminarse, en principio, haciendo $a/b = N/M$. Otra, que si la igualdad de estos cocientes no es exacta, el factor $Jb/(a + b + J)$ puede hacerse pequeño, manteniendo a J pequeño y a $a + b$ grande, así que X aún venga dado muy próximamente por la sencilla ecuación de equilibrio del puente de Wheatstone, $X = NP/M$.

La denominación de «puente doble» procede de que esencialmente hay dos puentes en la Fig. 10-15. Uno de ellos ya ha sido analizado. El otro puede verse abriendo la conexión J . Esto reduce marcadamente la corriente a través de X , pues $a + b$ es mucho mayor que $X + P$. (El abrir J puede producir una gran chispa si se interrumpe de 10 amp o más, así que es buena práctica disminuir primeramente la corriente aumentando B .) Con J abierto la condición de equilibrio viene dada simplemente igualando los productos de brazos del puente opuestos, ya que ahora es la configuración de un puente de Wheatstone.

$$N(b + P) = M(X + a) \quad (10-40)$$

En la práctica, $a \gg X$ y $b \gg P$, de modo que esta ecuación de equilibrio es esencialmente $Nb = Ma$, es decir, N/M igual a a/b . Esta condición es la misma que se requiere si en la Ec. (10-39) X sea función de N , M y P solamente. Es interesante observar que si no se desprecian X y P , la Ec. (10-40) queda resuelta en X ,

$$X = \frac{N}{M} P + b \left(\frac{N}{M} - \frac{a}{b} \right)$$

De nuevo si $N/M = a/b$, X viene dado por la misma expresión, esté J abierto o cerrado.

Estas ecuaciones indican que si el puente permanece equilibrado con J abierto o cerrado, se asegura experimentalmente que $N/M = a/b$. De este modo, se tiene una comprobación pronta de la igualdad de la doble relación de brazos. Si no son iguales, puede ajustarse una de las relaciones abriendo J . De cualquier forma, es deseable que J sea tan pequeño como se pueda, a fin de asegurar que el segundo término de la Ec. (10-39) sea despreciable. Por ello, el contacto móvil de P se sitúa de modo que su porción no usada esté en serie con B , mejor que con J .

10-15. Puente doble de Kelvin desequilibrado. La complejidad adicional del «puente dentro de un puente» supone un análisis mucho más complicado si se busca la corriente del galvanómetro. Sin embargo, para ligero desequilibrio (lo que proporciona suficiente información de la sensibilidad del puente y errores del galvanómetro) el teorema de la compensación sigue siendo una herramienta efectiva. El cambio de cero de la corriente del galvanómetro causado por un cambio en uno de los brazos del puente puede hallarse sin gran dificultad si se saca partido de las tremendas diferencias de orden de magnitud de las resistencias del circuito.

Un ejemplo, en función de un pequeño cambio, ΔP , del valor de P preciso para el equilibrio enseñará el modo de operar. La corriente I que pasa por P en equilibrio es muy próxima a

$$I = \frac{E}{B + P + J + X} \quad (10-41)$$

pues N, M, a y b son mucho mayores que X, P y J . En esta ecuación J incluye la resistencia de las porciones finales de X y P así como la resistencia del hilo de conexión que las une. Asimismo, B incluye la resistencia de las porciones finales de X y P en el lado de la batería, junto con cualquier resistencia adicional que se use en serie con E para controlar la corriente. En muchos casos B también es grande comparada con P, J y X . Por ejemplo, si $X = 0,001$ ohmio, y J es una conexión corta de hilo grueso P es de magnitud comparable a la de X para cocientes M/N usuales. Si E es 110 V y la intensidad deseada $I = 20$ amp, B es del orden de 5,5 ohmios, mucho mayor que P, J o X .

Cuando P cambia de su valor de equilibrio una pequeña cantidad, ΔP , el cambio de la intensidad del galvanómetro es igual al producido por una f.e.m. de compensación $I\Delta P$ en serie con $P + \Delta P$, como aparece en la Fig. 10-16 (a). Si se ignora a ΔP en comparación con P , el tanto por ciento de error de ΔI_g será menor que el tanto por ciento de cambio de P . El teorema de la reciprocidad puede aplicarse, como antes, «intercambiando» $I\Delta P$ y ΔI_g , como muestra el circuito de la Fig. 10-16 (b). Por tanto, con los límites de aproximación de despreciar a ΔP en comparación con P ,

se observa que B está conectada en la diagonal de un puente equilibrado y, por tanto, no toma corriente. B puede, pues, eliminarse. Obsérvese también que las resistencias a y b están esencialmente en paralelo, pues J es mucho menor que a o b . Por otra parte, X y P pueden ignorarse en comparación a N y M , respectivamente. Con estas aproximaciones, perfectamente válidas generalmente, resulta el circuito de la Fig. 10-16 (c). Todo esto ha merecido la pena, pues ahora podemos escribir inmediatamente la solución de ΔI_g usando la regla del reparto de corrientes.

$$\Delta I_g = \frac{I \Delta P}{G + ab/(a+b) + NM/(N+M)} \left[\frac{N}{N+M} \right] \quad (10-42)$$

donde I se conoce por la Ec. (10-41). Si se desea, puede obtenerse el mismo resultado suprimiendo B en el circuito de la Fig. 10-16 (a), despreciando ΔP en comparación con P y usando las demás desigualdades.

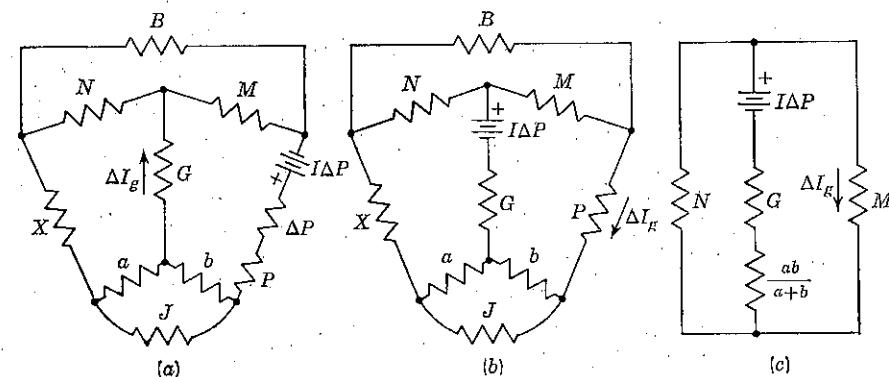


FIG. 10-16. Circuitos para el análisis del puente de Kelvin desequilibrado.

Se precisa una sensibilidad mucho mayor en el puente de Kelvin que en el de Wheatstone para la misma precisión en la determinación de la incógnita X . Esto se debe a que X ya es pequeña de por sí. Un ejemplo numérico lo probará. Supóngase $M = N = a = b = 1.000$ ohmios, y $G = 500$ ohmios. Por la Ec. (10-42)

$$\Delta I_g = \frac{I \Delta P}{3.000}$$

Si $X = P = 0,0001$ ohmios, que no es de ningún modo el valor más pequeño de resistencia medible con el puente de Kelvin, y se desea una precisión del 0,3 por 100, entonces el galvanómetro debe ser capaz de detectar con facilidad una corriente $\Delta I_g = I \times 10^{-10}$ amp. Incluso si I es de un valor tan elevado como 50 amp la corriente del galvanómetro sería solo de $0,005 \mu\text{A}$ y éste no es el caso más extremo que se encuentra con el puente de Kelvin.

Afortunadamente, la sensibilidad del galvanómetro es alcanzable. Hay galvanómetros, comercialmente disponibles, con sensibilidades del orden de $10^{-5} \mu\text{A}$ por división de la escala. Tal galvanómetro recibiría una considerable sacudida con el anterior desequilibrio de P del 0,3 por 100, ya que produciría una deflexión de centenares de divisiones de la escala.

PROBLEMAS

10-1 (§ 1). El circuito de la Fig. 10-17 (que básicamente es un puente de Wheatstone) se usa para localizar un corto circuito a tierra en una línea de comunicaciones subterránea $A-B$. La longitud de la línea es 5,2 millas. Una segunda línea $C-D$ que tiene las mismas características que la línea defectuosa (excepto el defecto) se usa para completar el circuito. Con $R_a = 100$ ohmios y $R_b = 41,2$ ohmios se obtiene una deflexión cero en el galvanómetro. a) ¿A qué distancia de A se encuentra el fallo? b) R_a y R_b son décadas que tienen un límite de error del $\pm 0,5$ por 100 de la lectura del dial. El galvanómetro tiene una gran sensibilidad y la resistencia por unidad de longitud de la línea es constante. ¿Qué límite de error tiene el resultado de la parte a) a causa de los errores de R_a y R_b ?

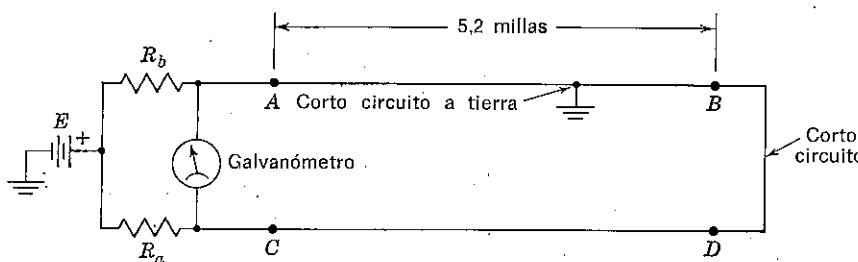


FIG. 10-17. Localización de un corto circuito.

10-2 (§ 4). Verifíquese la Ec. (10-12).

10-3 (§ 4). El puente de Wheatstone de la Fig. 10-1 se equilibra inicialmente, y a continuación se cambia M a $M + dM$. Determinese una expresión algebraica del cambio resultante de la corriente del galvanómetro usando el teorema de la compensación.

10-4 (§ 5). Tres brazos de un puente de Wheatstone tienen una resistencia de 100,0 ohmios, y la resistencia del cuarto brazo es 100,1 ohmios. Un galvanómetro de 50 ohmios de resistencia y $0,09 \mu\text{A}/\text{mm}$ de sensibilidad se conecta en una diagonal del puente. Una batería de 3 V de f.e.m. se conecta en serie con una resistencia de 200 ohmios en la otra diagonal. Hallar la deflexión del galvanómetro.

10-5 (§ 5). Supóngase que todas las resistencias del Prob. 9-23 se conocen exactamente. Calcúlese el máximo error en el valor medido de la resistencia del galvanómetro si el mínimo cambio perceptible de la deflexión del galvanómetro es 0,1 mm.

10-6 (§ 5). En la Fig. 10-1, $E = 3$ V, $B = 10$ ohmios y $G = 100$ ohmios. El puente se equilibra con $M = N = 50$ ohmios y $P = 500$ ohmios. a) ¿Cuál es el valor de X ? b) Si la sensibilidad del galvanómetro es $10 \mu\text{A}/\text{mm}$, ¿qué tanto por ciento de cambio de N producirá una deflexión de 1 mm? c) Si se intercambian las ramas del galvanómetro y la batería, ¿qué tanto por ciento de cambio de N producirá una deflexión de 1 mm? d) ¿Qué potencia se disipa en N y M en cada disposición?

10-7 (§ 7). En el puente de Wheatstone de la Fig. 10-1 $E = 1$ V y $B = 500$ ohmios. El galvanómetro tiene una resistencia de $G = 1.000$ ohmios, una sensibilidad de 4 amp/mm y una deflexión mínima discernible de 0,2 mm. Las resistencias $M = 4.000$ ohmios, $N = 2.000$

ANALISIS DE LOS PUENTES DE CORRIENTE CONTINUA

ohmios y $P = 1.000$ ohmios se conocen en ± 10 ohmios. a) ¿Qué fuente de imprecisión contribuye más al error de la determinación de X (sensibilidad del galvanómetro, M , N o P)? b) ¿Qué error causa la fuente de imprecisión predominante?

10-8 (§ 9). Todos los parámetros del puente de la Fig. 10-1 son fijos excepto P y X_0 . Este puente se usa para medir varios valores de X_0 ajustando P . a) Determinese una expresión del error relativo de X_0 como una función de X_0 para $0 < X_0 < \infty$, en la que aparezcan los parámetros fijos del puente. b) Determinese la expresión de X_0 que produce mínimo error relativo. c) Con $B = 0$, ¿por qué no crece $\Delta X/X_0$ al tender X_0 a cero, como era el caso de N ajustable y M y P fijos?

10-9 (§ 10). Demostrar rigurosamente que $s_1 > s_2$ en la Ec. (10-27) cuando $N > P$, $M > X_0$, o $N < P$, $M < X_0$.

10-10 (§ 10). En la Fig. 10-1, $B = 2$ ohmios, $M = N = 200$ ohmios, $P = X = 1.000$ ohmios y $G = 600$ ohmios. Si se intercambian las ramas del galvanómetro y la batería, ¿será el puente más sensible a un pequeño cambio de X ? ¿Cuánto vale el cociente de las sensibilidades?

10-11 (§ 10). El puente de la Fig. 10-1 se usa para medir una resistencia desconocida X de 200 ohmios aproximadamente. $M = P = 1.000$ ohmios y $G = 100$ ohmios. a) Si se intercambian las ramas del galvanómetro y la batería, determinese el valor de B para que resulte el mismo cambio en la corriente del galvanómetro a causa de un pequeño cambio de X en ambas disposiciones. b) Si B es mayor que el valor obtenido en la parte a), ¿qué disposición es la más sensible?

10-12 (§ 11). Un experimentador con experiencia usa el puente de Wheatstone de la Fig. 10-8, con $M = N = 100$ ohmios para medir una resistencia desconocida, X . $G = 100$ ohmios. Observa una deflexión del galvanómetro de $+9,6$ mm cuando pone 50 ohmios en la década. Tras otras observaciones y suponiendo que los brazos de relación y la década no tienen error, concluye que $X = 50,48 \pm 0,01$ ohmios. a) Calcúlese la deflexión del galvanómetro más pequeña que es capaz de observar en el laboratorio. b) ¿Qué aprecia el de la menor deflexión discernible del galvanómetro? c) Calcúlese el cociente de la corriente que pasa por X y de la corriente del galvanómetro cuando la década está en 50,0 ohmios.

10-13 (§ 11). El puente de Wheatstone de la Fig. 10-8 se usa para medir con precisión una resistencia X . El reóstato B tiene 5.000 ohmios como máximo y $E = 150$ V. El reóstato se pone en el valor que permite máxima sensibilidad sin exceder los límites de intensidad y potencia de las resistencias de los brazos. La corriente máxima permisible en la década es 100 mA, la máxima dissipación de potencia de que es capaz X son 2 vatios y $M = N = 1.000$ ohmios, 5 vatios, en cada uno. La resistencia del galvanómetro son 50 ohmios.

El puente se equilibra con 312,5 ohmios, en la caja de resistencias. El dial de la caja de resistencias indica la resistencia verdadera de la caja con una desviación standard de 0,01 ohmios. Cuando la caja de resistencias se pone en 312,6 y 312,4 ohmios, apenas se observan deflexiones en el galvanómetro ($\pm 0,1$ divisiones de la escala); esto es, las deflexiones son observables dos tercios del tiempo. De aquí 0,1 ohmios es la desviación standard de la posición del dial de la caja de resistencias.

1. a) ¿Cuál es el tanto por ciento de desviación standard de la medida de X ? b) ¿Cuál es la resistencia en el circuito del reóstato de 5.000 ohmios en las presentes condiciones? c) ¿Cuál es la sensibilidad de corriente del galvanómetro? d) ¿Cuál es la potencia disipada en cada uno de los brazos fijos del puente de 1.000 ohmios? e) Si el reóstato se pusiera a su valor máximo de 5.000 ohmios, ¿cuál sería la desviación standard de la medida de X ?

2. El galvanómetro se remplaza por otro más sensible cuya resistencia es también de 50 ohmios. El reóstato se pone de nuevo para mínimo error en la medida de X , compatible con las limitaciones de potencia del puente. Con 312,5 ohmios se observa una deflexión de 20 divisiones a la derecha. Con 312,6 hay una deflexión de 0,5 divisiones a la izquierda. «Apenas observable» se define como antes. a) ¿Cuál es la mejor apreciación del valor de X ? b) ¿Cuál es el tanto por ciento de desviación standard de esta apreciación? c) ¿Cuál es la sensibilidad de corriente del nuevo galvanómetro?

3. ¿Cuál es el menor tanto por ciento de desviación standard en la medida de X posible en este puente, no importa lo sensible que sea el galvanómetro usado?

10-14 (§ 12). En el puente de hilo de la Fig. 10-10 la resistencia desconocida X , aproximadamente es de 50 ohmios y el hilo uniforme mide 1 m de longitud. $M = 0 = N$. El galvanómetro tiene amplia sensibilidad. El error principal lo introduce la imposibilidad de leer la posición del cursor en menos de ± 2 mm. ¿Cómo limita este hecho el error relativo en la incógnita con $P = 50$ ohmios?

10-15 (§ 12). Repetir el Prob. 10-14 con $P = 200$ ohmios.

10-16 (§ 12). En el puente de hilo de la Fig. 10-10, $E = 1$ V y $B = 0$. Cuando $X = 200$ ohmios y $P = 300$ ohmios se consigue el equilibrio con $n = 0,1$ ohmios. Intercambiando X y P se obtiene el equilibrio con $n = 9,5$ ohmios. ¿Cuál es la corriente total que pasa por el hilo?

10-17 (§ 12). Se van a determinar los equipotenciales circulares en la cuba electrolítica representada en la Fig. 10-18. Los cilindros son buenos conductores metálicos de radios $p_1 = 2$ cm y $p_2 = 20$ cm. El diámetro de la prueba es muy pequeño. Se desprecian efectos de polarización. a) Determinese la menor diferencia de las posiciones del control, R , que equilibran el sistema en dos equipotenciales separados 1 cm. b) Con la prueba en $\rho = 10$ cm y R ajustado de modo que se obtiene deflexión cero en el galvanómetro, determinar la corriente en el galvanómetro que produce un desplazamiento radial hacia afuera, de la prueba en 0,1 cm. (Supóngase que la resistividad del electrólito es despreciable.)

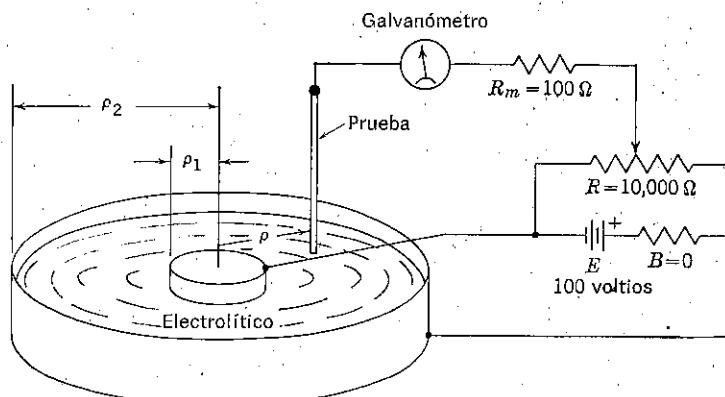


FIG. 10-18. Cuba electrolítica.

10-18 (§ 15). En el puente de Kelvin de la Fig. 10-15, $M = N = a = b = 1.000$ ohmios, $E = 100$ V, $B = 5$ ohmios y $G = 500$ ohmios. El puente se equilibra con $P = 0,001$ ohmios. Las porciones finales de X y P y la resistencia J son mucho menores que B . a) ¿Cuál es la corriente aproximada que atraviesa X , en equilibrio? b) Determinese el valor aproximado de la corriente del galvanómetro cuando P se cambia en 1 por 100 del valor de equilibrio.

CAPITULO 11

FORMAS DE ONDA E INSTRUMENTOS DE CORRIENTE ALTERNA

Muchos aspectos de las medidas eléctricas precisan un conocimiento básico de las formas de onda no sinusoidales estacionarias. Las propiedades fundamentales de tales formas de onda constituyen factores importantes en el diseño y análisis de instrumentos y sistemas de medida. Frecuentemente, al realizar una medida, se confía en la forma de la onda, y una fuente común de error es despreciar la influencia de la forma de la onda en el sistema eléctrico o lecturas del instrumento.

Se presentan en este capítulo algunos conceptos y métodos de análisis aplicados al estudio y medida de formas de onda no sinusoidales. Se definen el valor medio y eficaz y se describen técnicas para su determinación, por medio de ejemplos. Las series de Fourier, tan importantes para relacionar el análisis con una frecuencia única a las señales no sinusoidales, se revisan y aplican al estudio de galvanómetros registradores que reciben entradas de forma irregular. La respuesta del galvanómetro a ondas cuadradas ilustra acerca de la conexión entre análisis en el dominio de la frecuencia y del tiempo. Se describen varios instrumentos tipo rectificador, estudiando los errores de forma de onda. Se presenta un análisis aproximado del voltímetro de diodo, útil para la medida de valores de pico de señales no sinusoidales. El capítulo termina con una breve discusión del instrumento tipo termopar, que responde al valor eficaz de la forma de onda de entrada.

Son aplicaciones representativas de los conceptos no sinusoidales y métodos de análisis en el campo de las medidas eléctricas en baja frecuencia. Aunque no se consigue cubrir todas las posibilidades, los principios descritos pueden aplicarse a muchos problemas diferentes, en los que aparecen ondas periódicas de forma irregular.

11-1. Valor medio de una onda periódica. El valor medio de una función en el intervalo $t_2 - t_1$, se definió en la Sec. 2-1. En consecuencia, el valor medio de una función periódica del tiempo, $f(t) = f(t + T)$, sobre un intervalo igual al período T , es

$$F_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (11-1)$$

Para una función periódica el valor medio es independiente de la elección de $t_1 = 0$, arbitrariamente. El valor medio es sinónimo del valor de corriente continua.

La integral de la Ec. (11-1) puede interpretarse geométricamente como el área bajo la curva $f(t)$ — t en un intervalo T , como aparece en la Fig. 11-1. Las áreas sobre el eje t tienen signo positivo mientras que las áreas rayadas bajo el eje t , tienen signo negativo. Dividiendo la suma de todas las áreas del intervalo T entre el periodo T , teniendo en cuenta los signos se obtiene el valor F_{av} . Por tanto, F_{av} puede interpretarse como la altura de un rectángulo de base T que tuviese la misma área que tiene $f(t)$ en el intervalo T .

La interpretación de área de la Ec. (11-1) es útil a menudo para evaluar F_{av} por procedimientos rápidos. Por ejemplo, si las áreas positivas y negativas en el intervalo T son de igual magnitud, su suma algebraica es cero y $F_{av} = 0$. Así ocurre en el caso de la onda sinusoidal. Otra técnica es subdividir el intervalo total T , en dos o más intervalos más pequeños.

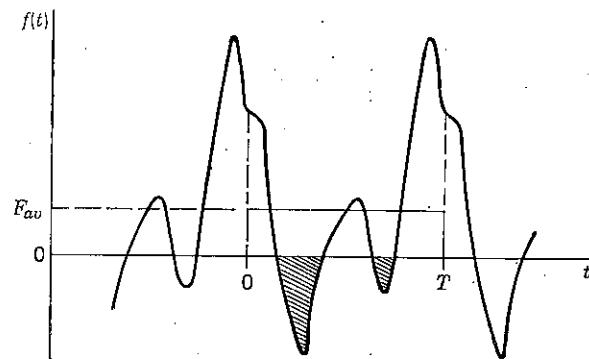


FIG. 11-1. Vector medio.

El área bajo $f(t)$ en cada subintervalo se puede determinar. Entonces F_{av} es igual a la suma algebraica de todas las subáreas dividida entre el intervalo total. Por ejemplo, si T se divide en dos intervalos, por la Ec. (11-1),

$$F_{av} = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T_1} f(t) dt + \int_{T_1}^T f(t) dt \right] \quad (11-2)$$

Las integrales primera y segunda representan las áreas A_1 y A_2 bajo $f(t)$, indicadas en la Fig. 11-2. La suma algebraica de estas áreas dividida entre T es F_{av} . Este resultado es útil especialmente para funciones simétricas, en las cuales las dos subáreas son iguales si $T_1 = T/2$. En este caso especial, la expresión de la Ec. (11-2) se convierte en

$$F_{av} = \frac{2}{T} \int_0^{T_1} f(t) dt = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} f(t) dt \quad (11-3)$$

Esto muestra, que en el caso simétrico la mitad del área total dividida entre la mitad del periodo da F_{av} de la onda entera.

Un ejemplo ilustrativo lo proporciona la onda en forma de triángulo equilátero de valor de pico I_p de la Fig. 11-3. El valor medio se puede obtener de varios modos. Usando la interpretación de área el valor de I_{av} viene dado inmediatamente por el área del triángulo de base T y altura I_p , dividida entre T . Como el área del triángulo es $\frac{1}{2}TI_p$, queda

$$I_{av} = I_{dc} = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{2} TI_p \right) = \frac{I_p}{2}$$

Por otra parte, aplicando la Ec. (11-3), se obtiene el mismo resultado.

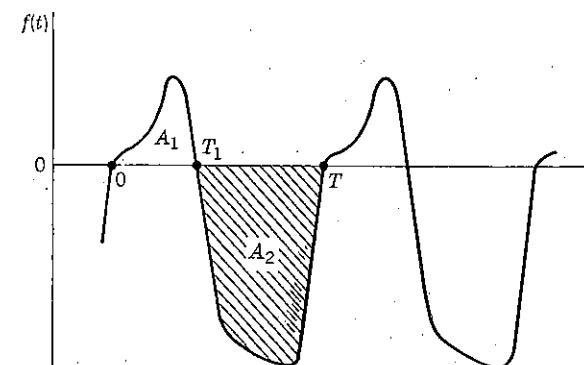


FIG. 11-2. Técnica para determinar el valor medio.

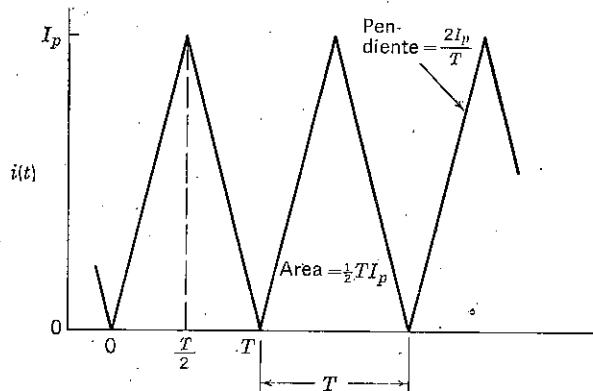


FIG. 11-3. Onda periódica triangular equilátera.

El área bajo $i(t)$ entre 0 y $T/2$ es igual a la del intervalo $T/2$ a T . Este área es igual a $\frac{1}{2}(T/2)I_p$. Dividiendo entre un semiperíodo, se obtiene $I_p/2$, valor medio de la onda completa.

El valor medio puede determinarse también realizando la integración de la función. Primeramente, es preciso expresar $i(t)$ como una función de t . Si no puede determinarse la expresión de $i(t)$, se pueden usar métodos gráficos para hallar el área bajo la curva. En el caso de la Fig. 11-3, $i(t)$ es una constante por t en el intervalo $0 < t < T/2$.

$$i(t) = bt \quad 0 < t < \frac{T}{2} \quad (11-4)$$

La constante b es la pendiente de la curva $i(t) - t$ en el intervalo especificado y es igual a I_p dividido entre $T/2$. Aplicando la Ec. (11-2), I_{av} viene dado por

$$I_{av} = I_{dc} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \frac{2I_p}{T} t dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T i(t) dt$$

La segunda integral debe ser igual a la primera, en este caso simétrico, así que no es necesario desarrollar la expresión de $i(t)$ en el intervalo $T/2$ a T . Por tanto, I_{av} es dos veces el primer término

$$I_{av} = I_{dc} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{2I_p}{T} t dt = \frac{4I_p}{T^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{T/2} = \frac{I_p}{2}$$

Este ejemplo demuestra algunas técnicas para obtener el valor medio de una onda periódica. Debe observarse que el valor medio depende exclusivamente de la función. El valor medio de una onda sinusoidal es cero, pero esto no significa que todas las ondas tienen valor medio cero.

11-2. Valor eficaz de ondas periódicas. El valor eficaz de una función del tiempo en un intervalo $t_2 - t_1$ se definió en la Sec. 2-1. Se deduce que el valor eficaz de una función periódica del tiempo $f(t) = f(t + T)$ en un intervalo igual al periodo es

$$F_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt} \quad (11-5)$$

En una función periódica el valor eficaz es independiente de la elección de $t_1 = 0$, arbitrariamente.

El cuadrado de F_{rms} puede interpretarse geométricamente como el área bajo la curva $[f(t)]^2 - t$ en un intervalo T , como indica la Fig. 11-4. Nótese que $f(t)$ y $[f(t)]^2$ son funciones diferentes. Como $[f(t)]^2$ es siempre positiva, no aparecen áreas negativas y F_{rms} siempre es mayor que cero. El cuadrado de F_{rms} puede interpretarse geométricamente como la altura de un rectángulo de base T que tuviera la misma área que bajo la curva $[f(t)]^2$ en el intervalo T . Estas interpretaciones geométricas no son ordinariamente tan útiles como en el caso de F_{av} . Usualmente, es preciso

obtener F_{rms} por integración cuando se conoce la forma funcional de $f(t)$. Si $f(t)$ solamente se conoce como curva, hay que elevar al cuadrado las ordenadas para desarrollar $[f(t)]^2$ gráficamente. Entonces se puede determinar el área bajo la curva elevada al cuadrado por medio de un planímetro u otros métodos gráficos.

Existen ciertas técnicas que pueden ser útiles en casos simétricos. Por ejemplo, si las áreas bajo la curva $[f(t)]^2$ son iguales en los intervalos 0 a $T/2$ y $T/2$ a T , el cuadrado de la Ec. (11-5) es

$$F_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} [f(t)]^2 dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T [f(t)]^2 dt = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} [f(t)]^2 dt \quad (11-6)$$

Entonces, en este caso simétrico, la mitad del área bajo la función al cu-

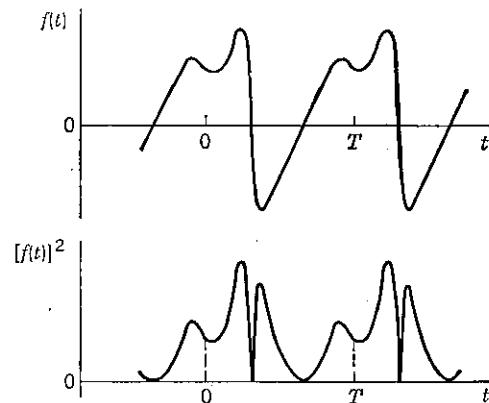


FIG. 11-4. Cuadrado de una función.

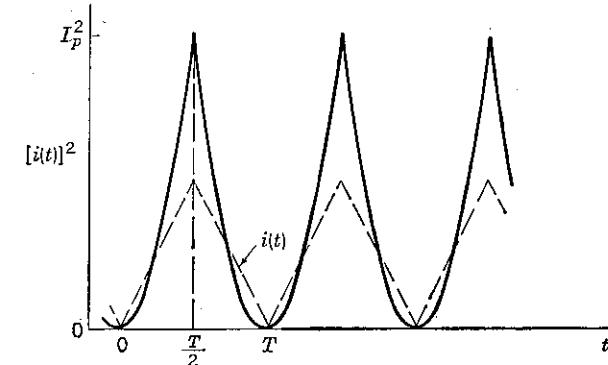


FIG. 11-5. Cuadrado de la onda triangular equilátera.

dado se puede dividir entre la mitad del periodo, obteniendo el cuadrado del valor eficaz de la onda entera.

Hallaremos el valor eficaz de la onda de corriente en forma de triángulo equilátero como ejemplo. La función $[i(t)]^2$ aparece en la Fig. 11-5.

Obsérvese que el área bajo la función al cuadrado no es igual al cuadrado del área bajo $i(t)$. En general,

$$\int [f(t)]^2 dt \neq \left[\int f(t) dt \right]^2$$

El área bajo el triángulo equilátero se demostró que era igual a $TI_p/2$, y se demostrará que el área bajo $[i(t)]^2$ en el intervalo T es igual a $I_p^2 T/3$, bastante diferente de $(TI_p/2)^2$.

La corriente instantánea durante el intervalo 0 a $T/2$ viene dada por la Ec. (11-4) con $b = 2I_p/T$. De aquí, según la Ec. (11-6),

$$I_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \frac{4I_p^2}{T^2} t^2 dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T [i(t)]^2 dt$$

La segunda integral es igual a la primera, en este caso simétrico, y no es necesario desarrollar la expresión de $i(t)$ en el intervalo $T/2$ a T . Por tanto, I_{rms}^2 será el doble del primer término.

$$I_{\text{rms}}^2 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{4I_p^2}{T^2} t^2 dt = \frac{8I_p^2}{T^3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{T/2} = \frac{I_p^2}{3}$$

Por tanto, $I_{\text{rms}} = I_p/\sqrt{3}$.

Otro ejemplo sea el voltaje sinusoidal $v(t) = V_p \operatorname{sen} \omega t$, donde V_p es el valor de pico de $v(t)$. El área bajo $[v(t)]^2$ de 0 a $T/2$ es igual a la de $T/2$ a T . De aquí, según la Ec. (11-6),

$$\begin{aligned} V_{\text{rms}}^2 &= \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} V_p^2 \operatorname{sen}^2 \omega t dt = \frac{2V_p^2}{T} \int_0^{T/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t \right) dt \\ &= \frac{2V_p^2}{T} \left[\frac{t}{2} \right]_0^{T/2} + 0 = \frac{V_p^2}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, $V_{\text{rms}} = V_p/\sqrt{2}$. La integral del término de frecuencia doble es cero, pues la función coseno se integra en un período completo.

Hay que destacar que el valor eficaz depende de la función. El valor eficaz de una onda sinusoidal es $1/\sqrt{2}$ por su valor de pico, pero esto no significa que el valor eficaz de cualquier onda sea igual a 0,707 veces su valor de pico. Ya vimos que en el caso de una onda triangular el valor eficaz era $1/\sqrt{3}$ su valor de pico.

El factor de forma de una función periódica del tiempo se define como el cociente entre el valor eficaz y el valor medio.

$$\text{Factor de forma} = \frac{F_{\text{rms}}}{F_{\text{av}}}$$

Cuando $f(t)$ es una constante, el factor de forma es la unidad, pues el valor eficaz y el valor medio son iguales al valor continuo. En otras ondas el factor de forma es la unidad. Por ejemplo, el factor de forma de la onda triangular de la Fig. 11-3 es $2/\sqrt{3} = 1,15$.

El factor de forma de una onda sinusoidal es infinita, ya que $F_{\text{av}} = 0$ y F_{rms} es finito. Sin embargo, el factor de forma de la onda sinusoidal rectificada de la Fig. 11-6 es finito. El valor eficaz de esta onda es igual que el de la onda sinusoidal, pues la inversión de los ciclos negativos no afecta a $[f(t)]^2$. El valor medio puede obtenerse por la Ec. (11-3) con $f(t) = F_p \operatorname{sen} \omega t$, pues el área de 0 a $T/2$ es la misma que de $T/2$ a T .

$$F_{\text{av}} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} F_p \operatorname{sen} \omega t dt$$

Cambiando la variable t por $x = \omega t$, con los límites $x = 0$ y $x = \omega T/2 = \pi$.

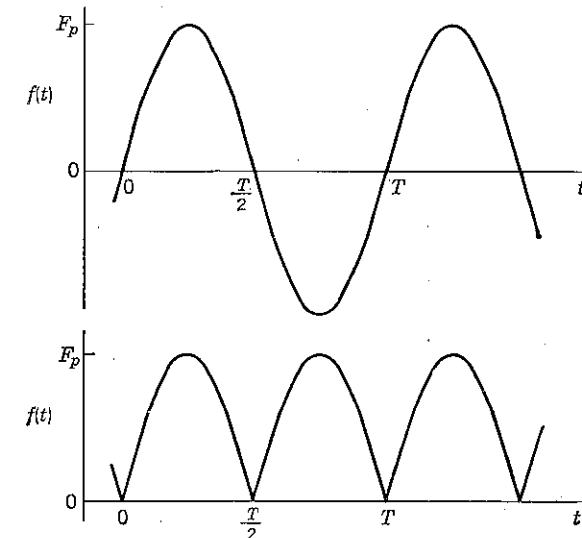


FIG. 11-6. Onda sinusoidal rectificada.

La integral queda:

$$\frac{F_p}{\omega} \int_0^\pi \operatorname{sen} x dx = \frac{F_p}{\omega} \left[-\cos x \right]_0^\pi = \frac{F_p}{\omega} \left[-(-1) + 1 \right] = \frac{2F_p}{\omega}$$

Por tanto, el valor medio es:

$$F_{\text{av}} = \frac{2}{T} \left(\frac{2F_p}{\omega} \right) = \frac{2F_p}{\pi}$$

Y el factor de forma:

$$\text{Factor de forma} = \frac{F_p/\sqrt{2}}{2F_p/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$$

Se usará este resultado al discutir las características de la escala de instrumentos rectificadores.

11-3. Series de Fourier. Una función $f(t)$ puede expresarse en el intervalo $T = 2\pi/\omega$ como una serie infinita de términos de una sola frecuencia, relacionados armónicamente,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots \quad (11-7)$$

Si $f(t)$ es una función periódica de periodo T , esta serie da $f(t)$ para todo t . La serie infinita puede escribirse completa mediante sumatoria, como

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Cada par de términos de igual frecuencia puede combinarse, pues

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin \left(n\omega t + \tan^{-1} \frac{a_n}{b_n} \right)$$

Definiendo $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ y $\phi_n = a_n/b_n$, La serie de Fourier puede expresarse como

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega t + \phi_n) \quad (11-8)$$

Tiene que cumplir $f(t)$ algunas restricciones matemáticas para que sea válido el desarrollo en serie de Fourier. Por ejemplo, la función debe ser uniforme y no puede tener un número infinito de discontinuidades o de máximos o mínimos en el intervalo T . La mayoría de las funciones físicas del tiempo satisfacen las condiciones para su desarrollo en series de Fourier.

Las series de Fourier tienen muchas aplicaciones, tanto prácticas como conceptuales. Una de ellas es que en los sistemas lineales se pueden analizar ondas periódicas no sinusoidales por medio de la teoría en una sola frecuencia. Cada componente de $f(t)$ se puede tratar separadamente para obtener los efectos de una frecuencia única, y los efectos usarlos algebraicamente para obtener el resultado no sinusoidal. Este procedi-

miento se aplicará al estudio de la respuesta de un galvanómetro de d'Arsonval a señales no sinusoidales.

Es necesario conocer las constantes a_n y b_n (o c_n y ϕ_n) que dependen de $f(t)$ para aplicar las series. Hay muchas formas de obtenerlas. Si $f(t)$ es una corriente o un voltaje accesible en el laboratorio, se puede emplear un analizador armónico o analizador espectral para determinar las constantes incógnitas experimentales. Si $f(t)$ viene en forma gráfica, no pudiéndose obtener su ecuación, existen muchos métodos gráficos que permiten determinar los coeficientes constantes. Finalmente, si $f(t)$ se conoce como una función explícita de t , las constantes a_n y b_n vienen dadas por las integrales

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt \quad (11-9)$$

Puede probarse la Ec. (11-9) fácilmente. Multiplicando $f(t)$ en la Ec. (11-7) por $\cos n\omega t dt$ e integrando de 0 a T ,

$$\begin{aligned} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt &= \\ \int_0^T \left(\frac{a_0}{2} \cos n\omega t + a_1 \cos \omega t \cos n\omega t + a_2 \cos 2\omega t \cos n\omega t + \dots + b_1 \sin \omega t \cos n\omega t + b_2 \sin 2\omega t \cos n\omega t + \dots \right) dt & \quad (11-10) \end{aligned}$$

Puede demostrarse sin dificultad que para cualesquiera, k y r , enteros, cero incluido,

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin k\omega t \cos r\omega t dt &= 0 \\ \int_0^T \cos k\omega t \cos r\omega t dt &= 0 \quad k \neq r \end{aligned} \quad (11-11)$$

En consecuencia, todas las integrales de la derecha de la Ec. (11-10) son cero excepto una, que vale

$$\int_0^T a_n \cos^2 n\omega t dt = \frac{a_n T}{2}$$

de donde se obtiene el valor de a_n dado por la Ec. (11-9).

De forma similar, puede probarse la fórmula de b_n en la Ec. (11-9) multiplicando $f(t)$ en la Ec. (11-7) por $\sin n\omega t dt$ e integrando de 0 a T .

Utilizando la relación adicional,

$$\int_0^T \sin k\omega t \sin r\omega t dt = 0 \quad k \neq r \quad (11-12)$$

la única integral distinta de cero es

$$\int_0^T b_n \sin^2 n\omega t dt = \frac{b_n T}{2}$$

resultado que concuerda con b_n en la Ec. (11-9).

El valor medio de $f(t)$ es igual a $a_0/2$, como es obvio inspeccionando la Ec. (11-7). También en la Ec. (11-9) con $n = 0$ se ve que a_0 es el doble de la definición del valor medio de F_{av} .

El valor eficaz de $f(t)$ es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores eficaces de los componentes individuales de $f(t)$. Se demuestra introduciendo el desarrollo en serie de $f(t)$, Ec. (11-8), en la ecuación de definición del valor eficaz.

$$F_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{a_0}{2} + c_1 \sin(\omega t + \phi_1) + c_2 \sin(2\omega t + \phi_2) + \dots \right]^2 dt$$

Cuando $f(t)$ se integra, todos los términos, a excepción de $(a_0/2)^2$ y $c_n^2 \sin^2 n\omega t$, se reducen a cero, por la relación dada en la Ec. (11-12). Por tanto, después de integrar,

$$F_{rms}^2 = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{a_0}{2} \right)^2 T + c_1^2 \frac{T}{2} + \dots + c_k^2 \frac{T}{2} + \dots \right]$$

$$\text{es decir, } F_{rms}^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k^2}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} F_{k,rms}^2 \quad (11-13)$$

donde $k = 0$ corresponde al término de c. c. de $f(t)$.

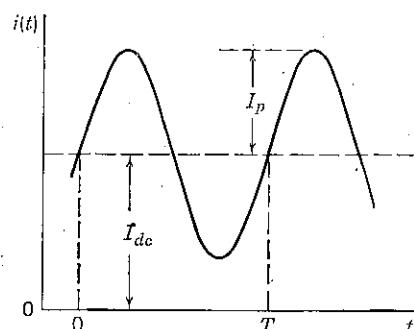


FIG. 11-7. Onda sinusoidal con componente continua.

Como aplicación sencilla de este resultado, consideremos la onda de la Fig. 11-7. Una corriente de una sola frecuencia, de valor de pico I_p , se superpone a una corriente continua I_{dc} . El valor eficaz de la corriente total puede obtenerse inmediatamente por el resultado de la Ec. (11-13).

$$I_{rms}^2 = I_{dc}^2 + \frac{1}{2} I_p^2 \quad (11-14)$$

En vez de usar la Ec. (11-13), se puede introducir la corriente instantánea.

$$i(t) = I_{dc} + I_p \sin(\omega t + \beta)$$

en la ecuación de definición del valor eficaz Ec. (11-5).

$$I_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [I_{dc} + I_p \sin(\omega t + \beta)]^2 dt$$

Elevando al cuadrado e integrando los tres términos resultantes, se llega a la Ec. (11-14); el producto cruzado se anula al integrar, y el término $I_p^2/2$ resulta al integrar el cuadrado del término sinusoidal.

11-4. Respuesta del galvanómetro a una entrada sinusoidal. En el Cap. 4 se discutió la respuesta estacionaria de un galvanómetro de d'Arsonval. Viene expresado por las Ecs. (4-53) y (4-54), que repetimos.

$$\theta = \frac{I_p}{K} \frac{Q}{\frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \sin \left[\omega t - \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{Q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)} \right] \quad (11-15)$$

donde $I_p = E_p/(R + R_m)$ es el valor de pico de la corriente aplicada al circuito resistivo. El valor medio de θ es cero cuando $\omega \neq 0$. Por otra parte, al crecer la frecuencia angular aplicada más allá de ω_0 el valor de pico de θ se approxima a cero más rápidamente.

$$\theta_p = \frac{I_p}{K} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \quad \omega \gg \omega_0 \quad (11-16)$$

Por tanto, a menos que se empleen circuitos auxiliares y rectificadores, el instrumento de d'Arsonval no es útil como *indicador para la medida* de corrientes y voltajes de c. a. Puede usarse para el *registro* de señales no sinusoidales, en aplicaciones como las descritas en la Sec. 4-11. Su uso se limita a señales de baja frecuencia a causa de sus pobres características de respuesta en frecuencia que muestra la Fig. 4-8.

Un instrumento de registro ideal produce a su salida una réplica exacta (excepto el tamaño) de la onda de entrada. Desde el punto de vista de las series de Fourier, esto significa que la respuesta relativa de amplitud

del registrador debe ser igual para todas las frecuencias de la señal de entrada. Además, el desfase introducido por el registrador debe ser o cero a todas las frecuencias, de la señal de entrada, o una constante por la frecuencia, de modo que se introduzca igual retardo para cada frecuencia. El galvanómetro es imperfecto en ambos aspectos, a menos que todas las frecuencias angulares de la señal de entrada sean muy inferiores a ω_0 . Si todas las frecuencias de la señal aplicada satisfacen $\omega \ll \omega_0$, θ viene dado, según la Ec. (11-15), por

$$\theta = \frac{I_p}{K} \operatorname{sen} \omega t \quad \omega \ll \omega_0 \quad (11-17)$$

Esto muestra que todas las frecuencias aplicadas producen la misma amplitud relativa de θ y que el desfase es esencialmente cero en todas las frecuencias. No se produce distorsión.

Se produce *distorsión de amplitud* cuando los valores de pico c_n de la función de entrada no tienen la misma relación en la salida. Hay *distorsión de fase* (o de retardo) cuando los ángulos de fase ϕ_n de los armónicos de la entrada no mantienen la misma relación a la salida. Ya que el valor de pico de θ es una función de la frecuencia y el ángulo de fase de θ no es una constante por la frecuencia, puede esperarse que en algunas circunstancias el galvanómetro introduzca, considerable distorsión de ambos tipos.

Daremos un ejemplo específico de los efectos de distorsión estacionarios usando dos frecuencias únicamente. Sea el voltaje no sinusoidal aplicado

$$e(t) = E_p (\operatorname{sen} \omega t + \operatorname{sen} 3\omega t) \quad (11-18)$$

La amplitud del tercer armónico es igual a la del fundamental y mantiene la relación de fase indicada. En la Fig. 11-8 aparece un ciclo de esta onda no sinusoidal simétrica. Supóngase que el voltaje $e(t)$ se aplica tiempo suficiente para que desaparezca el transitorio y que el galvanómetro opera en la región lineal de su rango de trabajo. La deflexión instantánea θ , puede hallarse en la Ec. (11-15) para cada una de las frecuencias de $e(t)$. Los dos resultados pueden superponerse para obtener la respuesta completa.

El parámetro Q es un factor importante para determinar la fidelidad de respuesta de la salida relativa a la entrada, a menos que todas las frecuencias sean mucho menores que ω_0 . Se demostró en el Cap. 4 que $Q = 1/\sqrt{2}$ es el mayor valor de Q que evita un pico resonante. Este valor de Q corresponde a un modo de transitorio ligeramente subamortiguado, con un factor de amortiguamiento relativo $k = 0,707$. Examinando las curvas de la Fig. 4-9, se observa que el desfase es más próximamente

proporcional a la frecuencia para $Q = 1/\sqrt{2}$ que para otros valores de Q . Un análisis más detallado demuestra que para la menor distorsión se

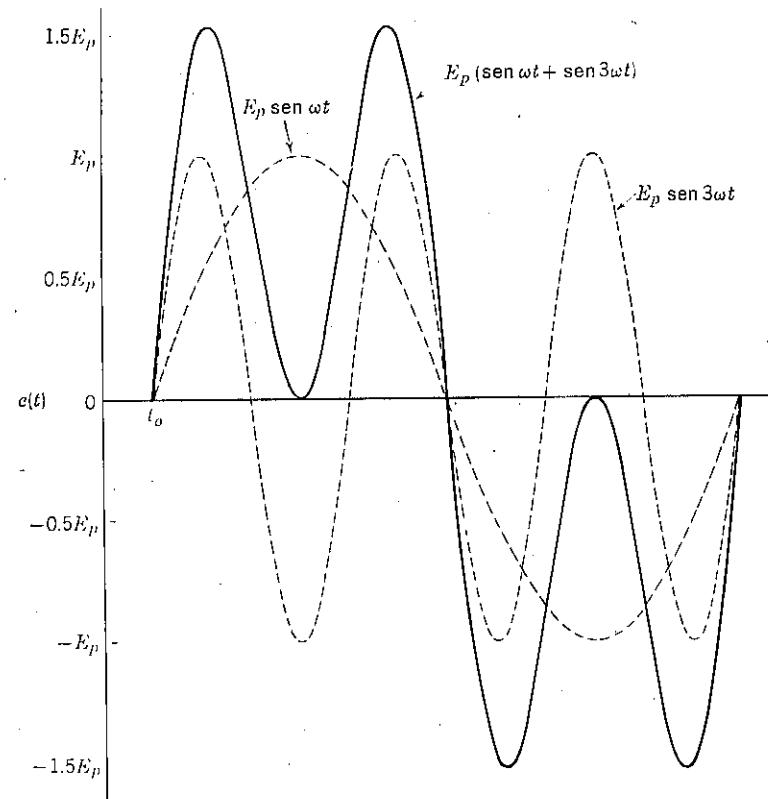


FIG. 11-8. Señal periódica con tercer armónico.

precisa una Q solo ligeramente mayor que $Q = 0,707$. Por tanto, en este ejemplo tomaremos $Q = 1/\sqrt{2}$. Las características de amplitud y fase aparecen en la Fig. 11-9.

Supóngase la frecuencia fundamental de $e(t)$, $\omega = \omega_0/2$. La respuesta del galvanómetro, θ_1 , a esta frecuencia puede calcularse por la Ec. (11-15) o a partir de las curvas de la Fig. 11-9.

$$\theta_1 = \frac{0.97I_p}{K} \operatorname{sen}(\omega t - 43,3^\circ) \quad \omega = \frac{\omega_0}{2}$$

La respuesta estacionaria al tercer armónico de $e(t)$, de frecuencia $3\omega_0/2$ se halla de forma análoga.

$$\theta_3 = \frac{0,406I_p}{K} \operatorname{sen}(3\omega t - 120,6^\circ) \quad 3\omega = \frac{3\omega_0}{2}$$

La amplitud *relativa* del tercer armónico a la salida es $0,406/0,97 = 0,419$ veces la salida del fundamental, mientras que en $e(t)$ el tercer armónico tenía igual amplitud que el fundamental. Por otra parte, el ángulo de fase del tercer armónico a la salida se ha desplazado en relación al fun-

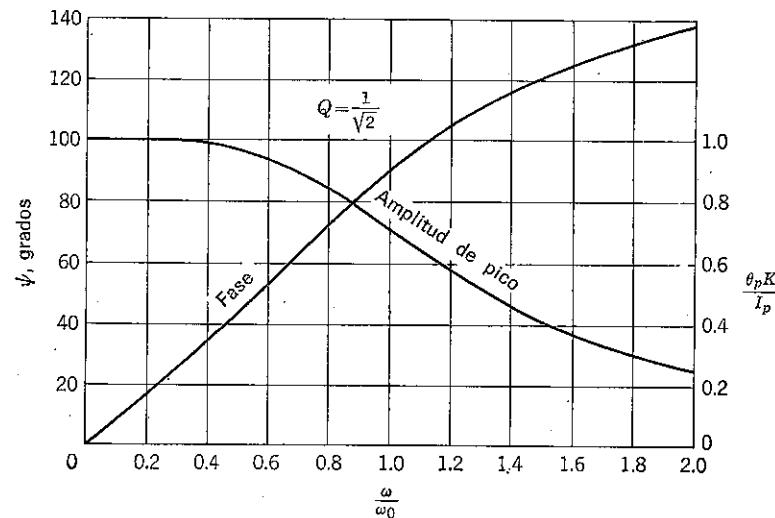


FIG. 11-9. Características de la respuesta estacionaria del galvanómetro.

damental a la salida. La salida del fundamental tiene un desfase de $43,3^\circ$ y el tercer armónico debería tener un desfase de $3(43,3^\circ) = 129,9^\circ$ para que no hubiera distorsión de fase. Las dos componentes de θ aparecen en la Fig. 11-10 junto con su suma, que representa la respuesta total.

$$\theta = \frac{0,97I_p}{K} \left[\sin(\omega t - 43,3^\circ) + 0,419 \sin 3(\omega t - 40,2^\circ) \right] \omega = \frac{\omega_0}{2}$$

La distorsión más pronunciada se debe en este ejemplo a la reducción relativa de la amplitud del tercer armónico, que produce un cambio mayor de la forma de la onda de salida en relación con la de $e(t)$. Presenta también pérdida de simetría en la onda, debido al retardo desigual de las dos frecuencias. El retardo de fase del fundamental de $43,3^\circ$, o sea $0,74$ rad., corresponde a un retardo de $0,74/\omega$ seg. (Por ejemplo, con $\omega = 740$ rad./seg, el retardo del fundamental es 1 m/seg.) El retardo del tercer armónico se obtiene convirtiendo $40,2^\circ$ en 0,7 rad. Este retardo es de $0,70/\omega$ seg; en este caso inferior al fundamental. El tercer armónico adelanta al fundamental en unos $3,1^\circ$, en función de la fase del fundamental. Su onda total de salida está retrasada aproximadamente en $0,72/\omega$ seg, como indica la Fig. 11-10.

Hay que destacar que la salida del galvanómetro dada en la Fig. 11-10 es un ciclo de la respuesta transitoria a $e(t)$. No contiene el transitorio que produce la aplicación inicial de $e(t)$ al galvanómetro. La diferencia de forma entre θ y $e(t)$ es considerable en este ejemplo y constituirá un grado de distorsión intolerable en la mayoría de los casos.

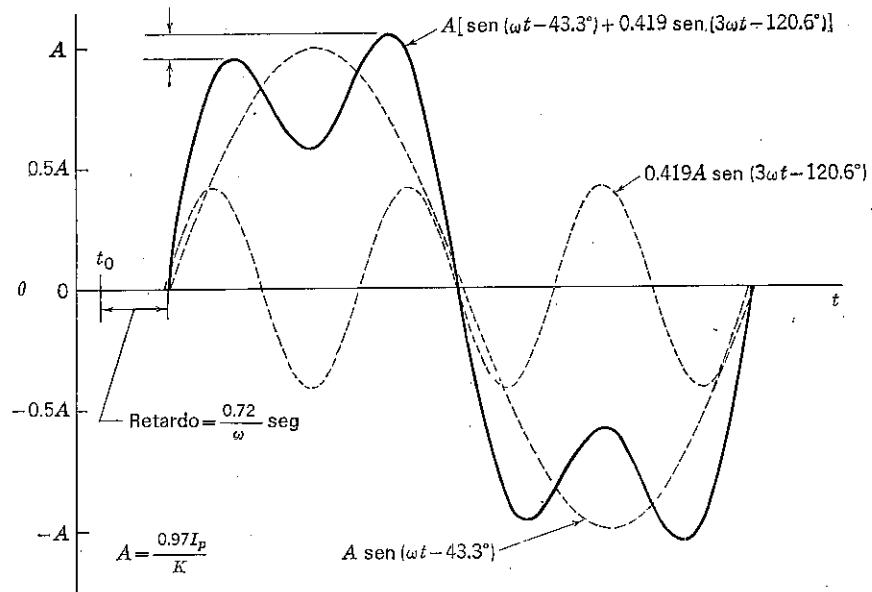


FIG. 11-10. Respuesta del galvanómetro a la señal de la Fig. 11-8 ($\omega = \omega_0/2$).

Se consigue una notable mejora reduciendo la frecuencia fundamental de $e(t)$. Sea una onda de igual forma pero con una frecuencia angular fundamental $\omega = 0,1\omega_0$. Cuando se aplica esta señal al mismo galvanómetro, con $Q = 1/\sqrt{2}$, la salida fundamental será según la Ec. (11-15),

$$\theta_1 = \frac{0,9999I_p}{K} \sin(\omega t - 8,1^\circ) \quad \omega = 0,1\omega_0$$

El tercer armónico, de frecuencia angular $3\omega = 0,3\omega_0$, produce una deflexión estacionaria

$$\theta_3 = \frac{0,996I_p}{K} \sin(3\omega t - 25^\circ) \quad 3\omega = 0,3\omega_0$$

Superponiendo ambos resultados se obtiene la respuesta total de un galvanómetro lineal

$$\theta = \frac{I}{K} \left[\sin(\omega t - 8,1^\circ) + 0,996 \sin 3(\omega t - 8^{1/3}) \right] \omega = 0,1\omega_0$$

La salida del galvanómetro sigue a $e(t)$ más fielmente en este caso. Las amplitudes relativas de las dos frecuencias de salida difieren solamente el 0,4 por 100; el tercer armónico no se ha desfasado apreciablemente con relación al fundamental. Tres veces el desfase del fundamental son $24,3^\circ$, muy próximo al desfase de 25° del tercer armónico. Por consiguiente, ambas frecuencias experimentan esencialmente el mismo retardo de $0,14/\omega$ segundo.

Estos ejemplos proporcionan una idea tangible del importante papel que juegan las series de Fourier en el análisis de forma de onda. Los mismos principios se pueden aplicar cuando $e(t)$ contiene cualquier número de frecuencias diferentes y de relativos desfases. La respuesta del galvanómetro se puede calcular para cada componente, como en estos ejemplos y recombinadas después se sintetiza la respuesta total a la $e(t)$ aplicada. También es patente en estos ejemplos el significado de las características de amplitud y fase de cualquier dispositivo que transmite una señal sinusoidal.

Un análisis más completo que el aquí presentado se precisa para deducir las condiciones óptimas para la respuesta más fiel del galvanómetro. Está claro que hay un compromiso entre distorsión de fase y de amplitud. Por ejemplo, si se emplea un valor de Q mayor que $1/\sqrt{2}$, se puede conseguir una respuesta más uniforme en amplitud, extendida a frecuencias más altas sin que aparezca un pico de resonancia excesivo, como indican las curvas de la Fig. 4-8. Esto supone alguna reducción de la distorsión de amplitud. Sin embargo, el ángulo de fase se separa más de ser una constante por la frecuencia, aumentando la distorsión de fase. De tales consideraciones se deduce que no puede evitarse una distorsión apreciable en señales que contengan frecuencias superiores a $0,4\omega_0$. Oscilógrafos mecánicos de buena calidad emplean galvanómetros de d'Arsonval con ω_0 de alrededor de 15.000 rad/seg ($f_0 = 2.500$ cps). Por tanto, puede esperarse respuesta fiel a señales de 60 cps de frecuencia fundamental y hasta 16 armónicos. Para visualizar y registrar frecuencias próximas y superiores a la ω_0 máxima en galvanómetros, el instrumento más comúnmente usado es el oscilógrafo de rayos catódicos, pues combina una respuesta muy ancha en frecuencia y alta impedancia de entrada.

11-5. Respuesta del galvanómetro a una onda cuadrada. (Análisis en el dominio temporal.) Una onda «cuadrada» (realmente una onda rectangular), consiste en un tren periódico de pulsos rectangulares. Una onda cuadrada de voltaje aparece en la Fig. 11-11. El valor de pico, E , se alcanza instantáneamente para $t = 0$, y $e(t)$ permanece constante por medio periodo. Entonces, para $t = T/2$, el voltaje cae a cero instantáneamente y permanece en cero el resto del periodo. El efecto es que E se conecta y desconecta periódicamente en intervalos iguales de tiempo. La respuesta de un sistema a ondas cuadradas proporciona una medida visual rápida de su capacidad para responder a señales no sinusoidales. La interpreta-

ción de la respuesta puede hacerse bien basados en el transitorio o en el análisis del estado estacionario del sistema. Las ondas cuadradas generadas por medios electrónicos pueden tener unos tiempos de subida y bajada muy pequeños en comparación con T . Por tanto, se puede obtener una onda muy aproximada al ideal de la Fig. 11-11.

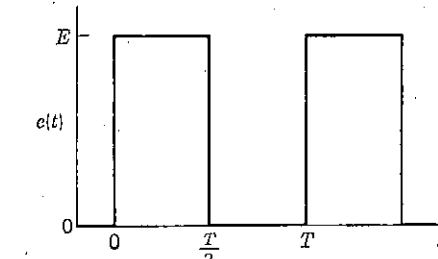


FIG. 11-11. Onda cuadrada.

La respuesta de un galvanómetro de d'Arsonval a una onda cuadrada de tensión aplicada puede hallarse a partir del análisis transitorio del Cap. 4. También puede obtenerse el resultado a partir del análisis del estado estacionario expresando $e(t)$ en serie de Fourier. Se estudiarán ambos métodos para demostrar la correspondencia entre análisis en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

Desde el punto de vista transitorio, comenzamos con un galvanómetro inicialmente inmóvil, cuando se aplica la tensión $e(t)$ en serie con la resistencia R . El comportamiento de θ en relación hacia (t) en el intervalo $0 < t < T/2$ viene dada por la Ec. (4-37) en el caso oscilatorio. Téngase presente que ω y T en la Ec. (4-37) no son las mismas ω y T usadas en las series de Fourier o en la Fig. 11-11. Para evitar confusiones de notación, la Ec. (4-37) puede expresarse completamente en función de $\omega_0 t$ y el coeficiente de amortiguamiento relativo k , usando las Ecs. (4-34) y (4-35). La Ec. (4-37) queda

$$\theta = \frac{I}{K} - \frac{I e^{-k\omega_0 t}}{K \sqrt{1-k^2}} \operatorname{sen} \left(\omega_0 t \sqrt{1-k^2} + \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{1-k^2}}{k} \right) \quad 0 < t < \frac{T}{2} \quad (11-19)$$

Recalcamos que $\omega_0 = \sqrt{S/J}$, usada en el análisis del transitorio, es exactamente la misma ω_0 en el análisis de estado estacionario, y que Q y k están relacionados por $2k = 1/Q$. Además, $\theta_s = I/K$, donde $I = E/(R + R_m)$, y K la constante del instrumento.

Se tiene una respuesta razonablemente rápida con $k = 1/\sqrt{2}$, que corresponde al mismo valor de Q usado en la sección precedente. Con $k = 1/\sqrt{2}$, la Ec. (11-19) queda:

$$\theta = \frac{I}{K} - \frac{\sqrt{2} I}{K} e^{-\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}}} \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_0 t}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right) \quad 0 < t < \frac{T}{2} \quad (11-20)$$

Para simplificar, supongamos que el semiperíodo $T/2$ es suficientemente elevado como para que el término transitorio sea despreciable en comparación con I/K . El valor de $T/2$ requerido se puede estimar por la Fig. 4-5, con $k = 1/\sqrt{2}$, que debe ser al menos $1,3T_0$. El cálculo detallado, usando la Ec. (11-20) muestra que θ difiere en menos del 0,2 por 100 de I/K para t

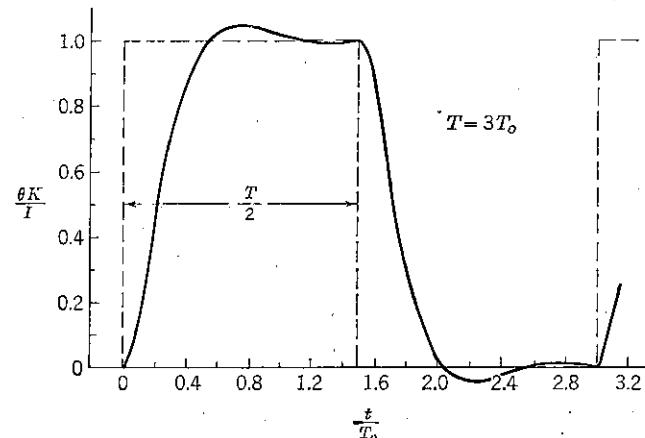


FIG. 11-12. Respuesta del galvanómetro a una onda cuadrada.

igual o mayor que $1,5T_0$. Por tanto, para $T/2 = 1,5T_0$, θ ha alcanzado prácticamente su valor estacionario, I/K , difiriendo muy pequeño porcentaje. La gráfica de la Ec. (11-20) en la Fig. 11-12 para $T/2 = 1,5T_0$.

El comportamiento de θ en el intervalo $T/2$ a T , se halla usando las ideas de condiciones en los límites de la Sec. 4-5. El término estacionario de θ en el segundo semiperíodo es cero, pues $e(t)$ es cero. De aquí que el transitorio sea el mismo que en la Ec. (11-20) salvo el signo. A causa de la condición simplificadora de que θ alcanza el valor estacionario I/K en $t = T/2$, puede obtenerse la ecuación de θ en el segundo semiperíodo, inmediatamente, a partir de la Ec. (11-20).

$$\theta = \frac{\sqrt{2} I}{K} e^{-\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}(t-\frac{T}{2})} \sin \left[\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \left(t - \frac{T}{2} \right) + \frac{\pi}{4} \right] \quad \frac{T}{2} < t < T \quad (11-21)$$

Para $t = T$, θ habrá vuelto prácticamente a cero, pues T se ha elegido deliberadamente suficientemente grande para que el transitorio desaparezca. La vuelta a cero aparece en la Fig. 11-12. Al ir realizando $e(t)$ sus cambios periódicos, θ seguirá las Ecs. (11-20) y (11-21) en cada ciclo, pues el término transitorio se hace despreciable al fin de cada semiperíodo. Así, pues, estas ecuaciones y las curvas correspondientes de la Fig. 11-12, representan la respuesta *estacionaria* del galvanómetro a una onda cuadrada.

La salida del galvanómetro no es una réplica muy fiel de la entrada para esta onda cuadrada. Si se aumentase el periodo, la solución que se ha desarrollado indica que θ sería una función del tiempo más «cuadrada». La subida de cero a I/K y la caída de I/K a cero no son afectados al aumentar T . Sin embargo, un periodo más largo permite que la deflexión del gal-

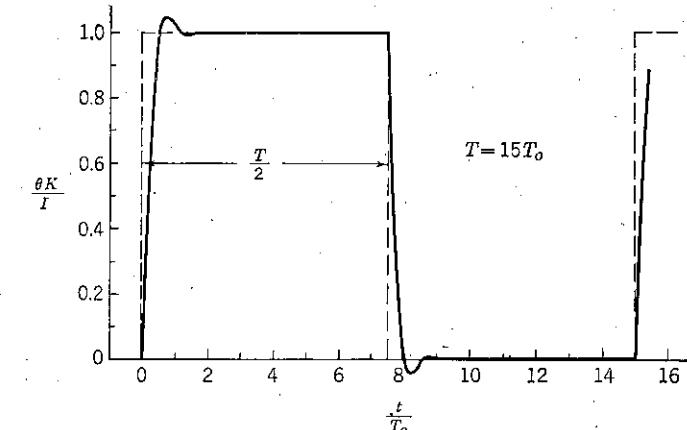


FIG. 11-13. Respuesta del galvanómetro a una onda cuadrada.

vanómetro permanezca en el valor constante I/K o cero más tiempo que en el caso de la Fig. 11-12. Un ejemplo aparece en la Fig. 11-13, donde T se ha multiplicado por 5. La salida del galvanómetro sigue a la onda de entrada con más fidelidad en este caso. Un aumento adicional de T mejoraría aún más la concordancia entre las ondas de entrada y salida.

11-6. Respuesta del galvanómetro a una onda cuadrada. (Análisis en el dominio de la frecuencia.) Se puede determinar la respuesta de un galvanómetro a una onda cuadrada, en estado estacionario, usando la Ec. (11-15) para cada frecuencia contenida en el desarrollo en serie de Fourier de $e(t)$. Primeramente es preciso desarrollar en serie de Fourier la onda cuadrada. La expresión matemática de $e(t)$ con la elección arbitraria del origen de la Fig. 11-11 es

$$e(t) = E \quad 0 < t < \frac{T}{2} \\ e(t) = 0 \quad \frac{T}{2} < t < T \quad (11-22)$$

Los coeficientes a_n y b_n en la serie de Fourier de la Ec. (11-7) se pueden hallar usando las integrales de la Ec. (11-9). Como $e(t)$ es cero en el segundo semiperíodo, las integrales quedan:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} E \cos n\omega t dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} E \sin n\omega t dt$$

y una función del tiempo tan sencilla se integra fácilmente. Para a_n ,

$$a_n = \frac{2E}{\omega T} \int_0^{\omega T/2} \cos n\omega t d(\omega t) = \frac{2E}{2\pi n} \left[\sin n\omega t \right]_0^{\omega t=\pi}$$

$$a_n = \frac{E \sin n\pi}{n\pi} \quad (11-23)$$

De aquí

Por tanto, para todo $n \neq 0$, $a_n = 0$. Para $n = 0$, $a_0 = E$. El resultado de a_0 puede obtenerse también inspeccionando $e(t)$, ya que a_0 es el doble del valor medio de $e(t)$, el cual es obvio que es $E/2$, en la onda cuadrada de la Fig. 11-11.

De igual modo se evalúan los coeficientes b_n

$$b_n = \frac{2E}{\omega T} \int_0^{\omega T/2} \sin n\omega t d(\omega t) = \frac{2E}{2\pi n} \left[-\cos n\omega t \right]_0^{\omega t=\pi}$$

$$b_n = \frac{E(-\cos n\pi + 1)}{n\pi} \quad (11-24)$$

Por tanto,

Así, pues, $b_1 = 2E/\pi$, $b_2 = 0$, $b_3 = 2E/3\pi$, $b_4 = 0$, etc. Evidentemente, $b_n = 0$ para n par y $b_n = 2E/n\pi$ para n impar

La serie completa de Fourier es, entonces,

$$e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right) \quad (11-25)$$

El *aspecto de amplitud* de la onda cuadrada aparecen en la Fig. 11-14.

Cada componente de la respuesta del galvanómetro se puede obtener por la Ec. (11-15) para la componente de $e(t)$ correspondiente. Los resultados pueden superponerse entonces, como se hizo en la Sec. 11-4. La respuesta a la componente continua de $e(t)$ se puede obtener haciendo tender ω a cero en la Ec. (11-15) aunque manteniendo el producto ωt fijo en el valor $\pi/2$. El resultado independiente de Q es

$$\theta_{dc} = \frac{I}{2K} = \frac{E}{2(R + R_m)K}$$

pues la componente continua de $e(t)$ es $E/2$.

La frecuencia fundamental de $e(t)$ que corresponde a $T/2 = 1.5T_0$, elegido previamente es

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3T_0} = \frac{\omega_0}{3}$$

Por tanto, la respuesta del galvanómetro a la componente fundamental

de $e(t)$ que tiene el valor de pico $2E/\pi$, se obtiene a partir de la Ec. (11-15) con $Q = 1/\sqrt{2}$ y $\omega = \omega_0/3$.

$$\theta_1 = \frac{0.633I}{K} \sin (\omega t - 27.9^\circ) \quad \omega = \frac{\omega_0}{3}$$

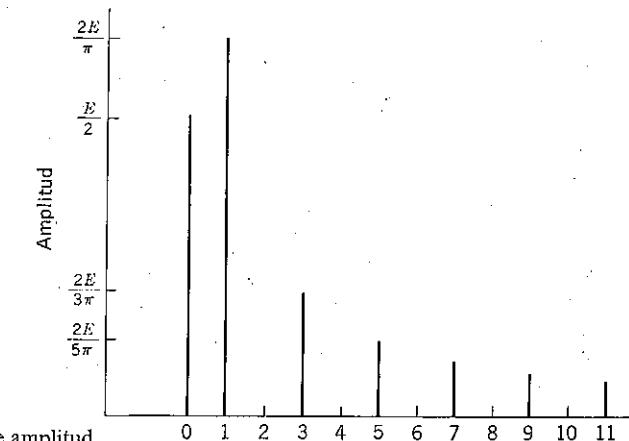


FIG. 11-14. Espectro de amplitud de una onda cuadrada.

Número de veces de la frecuencia fundamental

Análogamente, la respuesta al tercer armónico, que tiene un valor de pico $2E/3\pi$, resulta, según la Ec. (11-15)

$$\theta_3 = \frac{0.150I}{K} \sin (3\omega t - 90^\circ) \quad 3\omega = \omega_0$$

La salida del quinto armónico es

$$\theta_5 = \frac{0.043I}{K} \sin (5\omega t - 127^\circ) \quad 5\omega = \frac{5\omega_0}{3}$$

De esta forma se pueden hallar todas las componentes individuales de θ . El espectro de amplitud de $e(t)$ y la respuesta en amplitud del galvanómetro caen al aumentar ω , de modo que no es preciso llevar muy lejos el desarrollo para conseguir una precisión satisfactoria. Por ejemplo, los puntos de la Fig. 11-15 se calcularon usando solo hasta el quinto-armónico. Esto proporciona la evidencia de que el análisis estacionario concuerda con el análisis por transitorio. Las pequeñas discrepancias entre los cálculos por estado estacionario y el resultado por transitorio, que aparecen en la Fig. 11-15, quedan dentro de los errores que hay que esperar al despreciar del séptimo armónico en adelante. (El valor de pico del séptimo armónico es $0.016 I/K$.)

Aunque ha sido un ejemplo elemental, demuestra la correlación existente entre el análisis en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia. Los defectos en la respuesta del galvanómetro se pueden mirar según

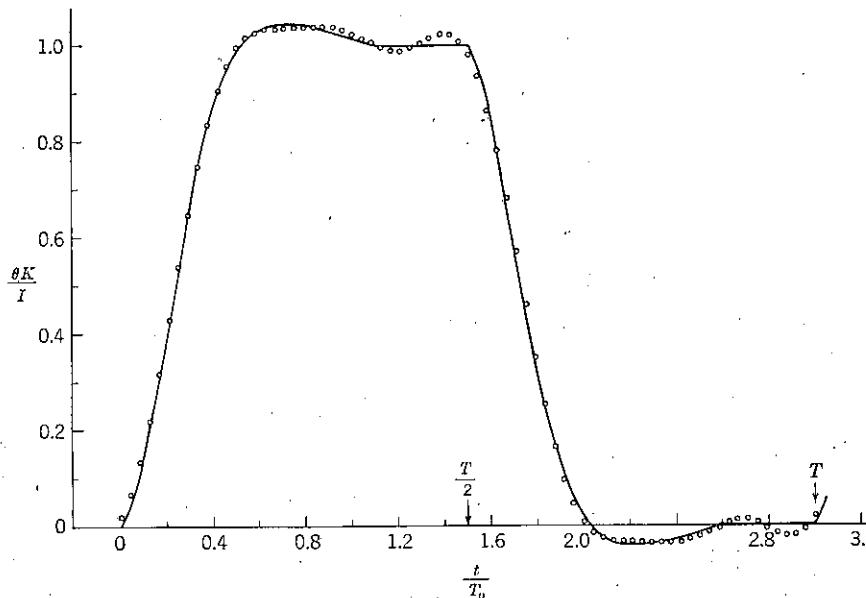


FIG. 11-15. Resultado de los cálculos por estado estacionario.

dos puntos de vista equivalentes. Partiendo del análisis transitorio, el galvanómetro es incapaz de seguir cambios abruptos de $e(t)$ a causa de su limitada velocidad de respuesta. Partiendo del análisis del estado estacionario, los defectos al reproducir una onda cuadrada se deben a la distorsión de fase y amplitud. Cualquier punto de vista conduce al mismo resultado. Hay que señalar que dos conjuntos de características, aparentemente diferentes, están tan íntimamente ligadas, que conducen exactamente a los mismos resultados cuantitativos.

11-7. Instrumentos rectificadores. El instrumento de d'Arsonval no es útil directamente como indicador para corriente alterna, pues la deflexión media es cero si se aplica una señal sinusoidal pura al galvanómetro. Por otra parte, si la frecuencia angular de la señal aplicada es mucho mayor que $\omega_0 = \sqrt{S/J}$, la Ec. (11-16) indica que hasta la deflexión instantánea se acerca a cero. En consecuencia, cuando se aplica una señal de c. a., el indicador de d'Arsonval o vibra en torno a cero o indica cero permanentemente.

Como el instrumento de d'Arsonval es demasiado valioso para desecharlo en aplicaciones de c. a., se han desarrollado varios circuitos que permiten que este instrumento produzca una indicación estable, legible, de una

señal de c. a. aplicada. El esquema general es modificar la forma de onda que hay que medir, de modo que se obtenga una onda con valor medio distinto de cero, como indica el diagrama de bloques de la Fig. 11-16. La onda alterada (que está relacionada de una forma conocida con la señal de c. a. aplicada), se aplica entonces al instrumento de d'Arsonval, que responde al valor medio (o de c. c.) de la onda alterada. Hay muchos tipos de operadores sobre formas de onda, y a menudo se incluyen amplificadores electrónicos a fin de aumentar la sensibilidad total del instrumento. Se pueden incorporar atenuadores comutables de varios tipos para controlar la sensibilidad. La impedancia de entrada del operador se puede diseñar sobre un ancho rango, a fin de tener muy baja impedancia en aplicaciones amperimétricas, y muy alta en aplicaciones voltímetricas. Además, el sistema completo puede ser capaz de operar tanto en corriente continua como en corriente alterna, siendo entonces un instrumento de dos usos. En medio de estas complejidades, no se debe perder de vista el hecho de que la operación fundamental es obtener una componente de c. c. de una señal de entrada cuyo valor medio es cero.

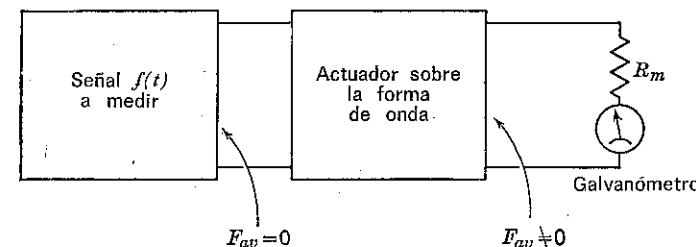


FIG. 11-16. Esquema general de un instrumento de corriente alterna.

La gran flexibilidad que tiene el diseño de operadores de formas de onda, ha conducido a muchas versiones diferentes de tal instrumento. Se clasifican generalmente como instrumentos electrónicos, incluyendo dispositivos tales como los voltímetros a válvula y los amplificadores-detectores. Los rectificadores son elementos simples que proporcionan la conversión requerida de una onda de c. a. a otra que tiene componente continua. Los rectificadores fueron descritos en la Sec. 9-3 y se sugiere al lector que revise la breve descripción que se presentó allí. Cuando solo se usan rectificadores en el operador de forma de onda, el dispositivo se llama un instrumento rectificador. Se discuten en las secciones siguientes varias formas básicas de tales instrumentos. Por razones que se dirán, los instrumentos rectificadores usuales incorporan una disposición en puente de cuatro rectificadores y se usa con un instrumento de d'Arsonval como sensible amperímetro o voltímetro.

11-8. Instrumento rectificador simple y doble. Un sencillo voltímetro rectificador se puede construir conectando un rectificador en serie con un

instrumento de d'Arsonval y una resistencia externa R_1 , como indica la Fig. 11-17. Supongamos que se aplica un voltaje sinusoidal, $e(t) = E_p \sin \omega t$, a los terminales de este instrumento. Cuando $e(t)$ es una caída de tensión en la dirección de la flecha de la Fig. 11-17, el rectificador sufre una tensión directa y su resistencia es baja. Esto permite pasar una corriente sustancial a través del instrumento durante el semicírculo positivo de $e(t)$. En un rectificador ideal la resistencia directa es cero e $i(t)$ es pro-

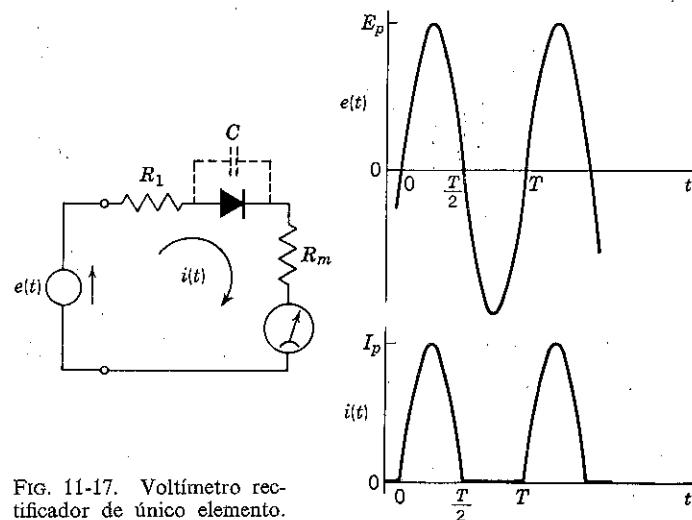


FIG. 11-17. Voltímetro rectificador de único elemento.

porcional a la tensión aplicada a los terminales del instrumento en el intervalo $0 < t < T/2$. Sin embargo, la resistencia directa de un rectificador real es función de la corriente, generalmente decreciente al aumentar $i(t)$. Por tanto, la corriente en el instrumento no es necesariamente un tramo sinusoidal. Se evita esta distorsión si la resistencia externa en serie R_1 es mucho mayor que la resistencia directa del rectificador. Si R_1 también es mucho mayor que la impedancia interna de $e(t)$ a todas las frecuencias de la $i(t)$ no sinusoidal, entonces $i(t)$ viene dada aproximadamente por

$$i(t) = \frac{E_p}{R} \sin \omega t \quad 0 < t < \frac{T}{2} \quad (11-26)$$

donde $R = R_1 + R_m$. En estas circunstancias la caída de tensión directa en el rectificador es solamente una pequeña fracción directa de $e(t)$, que cae casi por completo en R . En la práctica el valor de R_1 preciso para «anegar» la resistencia directa del rectificador es bastante mayor que R_m de modo que la resistencia del instrumento puede despreciarse en la Ec. (11-26).

Cuando $e(t)$ se encuentra en el semicírculo negativo, en el intervalo

$T/2 < t < T$, el rectificador soporta un voltaje inverso y presenta alta resistencia. Entonces la corriente en el instrumento será muy pequeña (cero en un rectificador ideal de resistencia inversa infinita) y esencialmente permanece en cero durante el semicírculo negativo de $e(t)$. Por consiguiente, la onda de corriente que atraviesa el instrumento es muy parecida a la onda representada en la Fig. 11-17. Esencialmente se ha conseguido convertir la sinusoidal $e(t)$ en una onda no sinusoidal. Es obvio que el valor medio, o valor de c. c. del trozo de sinusoide, es la mitad del valor medio de la onda sinusoidal rectificada de la Fig. 11-6, para la cual se halló por integración que $F_{av} = 2F_p/\pi$. La deflexión θ del instrumento depende únicamente de la componente continua de los trozos sinusoidales si $\omega \gg \omega_0$. Por tanto, la deflexión viene dada por

$$\theta = \frac{I_p}{\pi K} = \frac{E_p}{\pi K R} \quad R \text{ grande} \quad (11-27)$$

y es proporcional al valor de pico del voltaje aplicado.

La dificultad principal de este voltímetro surge en los semicírculos negativos de $e(t)$. El voltaje inverso que soporta el rectificador aproximadamente es igual a $e(t)$, pues la corriente esencialmente es cero. Algunos rectificadores no toleran un voltaje inverso apreciable. Por ejemplo, un rectificador de óxido de cobre, muy usado en instrumentos rectificadores, puede quedar dañado permanentemente por un voltaje inverso que excede a varios voltios. De modo que el rectificador de la Fig. 11-17 puede muy bien quedar destruido por los ciclos negativos de $e(t)$. Un diodo es capaz de soportar voltajes mayores y se puede usar en vez del tipo semiconductor en el instrumento de un solo rectificador.

La capacidad C , inherente al rectificador, constituye otra dificultad. Al aumentar la frecuencia de $e(t)$, la reactancia de C se hace pequeña en relación con la resistencia inversa del rectificador. Esto permite el paso de la corriente en los semicírculos negativos de $e(t)$, en los que se desea corriente cero. Por tanto, la presencia de C tiende a anular la acción rectificadora a altas frecuencias. Desde luego, si $1/\omega C$ es mucho menor que R_1 , la corriente inversa que pasa al instrumento será casi igual a la directa. La capacidad del instrumento constituye un límite superior de utilización de este tipo de instrumento. Los instrumentos rectificadores prácticos son útiles en el rango de frecuencias audibles y en algunos casos a frecuencias tan altas como 100 kc/seg funcionan con precisión aceptable.

El peligroso voltaje inverso aplicado al rectificador se puede eliminar virtualmente añadiendo un segundo rectificador en paralelo con el instrumento y su rectificador en serie, como aparece en la Fig. 11-18. Con la polaridad que indica la flecha, se observa que el rectificador en paralelo no afecta apreciablemente al circuito en los semicírculos positivos de $e(t)$, pues experimenta un voltaje inverso y presenta alta resistencia. Este vol-

taje inverso no es excesivo, pues es igual a la caída en el instrumento más el rectificador, que es un pequeño tanto por ciento de voltaje aplicado, si R_1 es grande. En los semiciclos negativos de $e(t)$ el rectificador en paralelo experimenta un voltaje directo que produce baja resistencia. La baja resistencia desacopla al instrumento y prácticamente conduce toda la corriente durante los semiciclos negativos. Esto es una acción positiva que asegura una corriente pequeña en el instrumento. Además el voltaje inverso que se aplica al rectificador en serie se mantiene dentro de unos límites de seguridad, pues ahora en los semiciclos negativos de $e(t)$ cae casi toda la tensión en R_1 . Resulta que los rectificadores se protegen mutuamente de un voltaje inverso excesivo y al propio tiempo producen una corriente semidireccional en el instrumento. Los rectificadores se pueden considerar interruptores sensibles al voltaje. Sincronizan su operación automáticamente al voltaje aplicado a sus terminales. La inclusión del rectificador en paralelo no evita, por supuesto, las limitaciones debidas a la capacidad inherente previamente mencionadas.

El circuito de la Fig. 11-18 se puede usar también como amperímetro de c. a. con $R_1 = 0$, a fin de que la resistencia del amperímetro sea

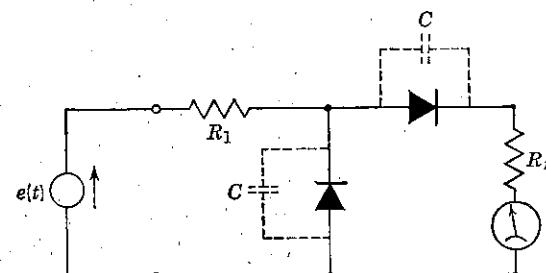


FIG. 11-18. Instrumento rectificador de dos elementos.

mínima. La resistencia de entrada de tal amperímetro depende marcadamente de la corriente, y R_m no siempre es pequeña en comparación con la resistencia directa del rectificador. De modo que si se inserta en un circuito de baja resistencia, su resistencia, variable con el tiempo, puede distorsionar la onda de corriente.

El circuito de la Fig. 11-17 no es útil como amperímetro, pues la resistencia del instrumento es muy grande en los semiciclos negativos, y el rectificador soporta un gran voltaje inverso. Esto representa un caso extremo de perturbación de la corriente al medirla, pues se coloca un interruptor alterno en el conductor de la corriente. La operación del circuito completo quedará muy alterada, suponiendo que el rectificador no sea destruido por el voltaje inverso.

11-9. Instrumentos rectificadores en puente. Los semiciclos negativos del voltaje aplicado no contribuyen a la deflexión de los instrumentos rectificadores de las Figs. 11-17 u 11-18. Si acaso, la corriente inversa

disminuye el valor medio de la corriente en el instrumento. Se puede doblar la sensibilidad del instrumento si se convierten los semiciclos negativos en salida útil. Disponiendo cuatro rectificadores en puente, como muestra la Fig. 11-19, se consigue rectificación de onda completa. Es el circuito usual en los instrumentos comerciales. Cuatro rectificadores de óxido de cobre se pueden disponer en una pequeña y compacta unidad en la caja del instrumento de d'Arsonval. Esta disposición en puente no se usa para conseguir un cero, sino para que los trozos de sinusoida anteriormente eliminados produzcan corriente en el instrumento.

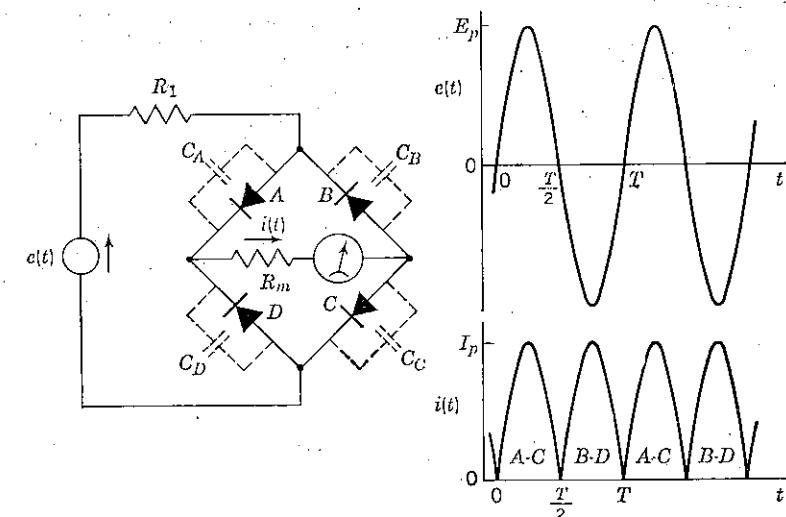


FIG. 11-19. Instrumento rectificador en puente.

La sucesión de acontecimientos cuando se aplica un voltaje $e(t) = E_p \sin \omega t$ se indica en la Fig. 11-19. Cuando $e(t)$ es una subida de tensión en el sentido de la flecha, los rectificadores A y C experimentan una tensión directa, mientras que los rectificadores B y D la experimentan inversa. Luego el camino de baja resistencia es a través de los rectificadores A y C , durante los semiciclos positivos de $e(t)$, suponiendo que las capacidades C_B y C_D sean despreciables. La corriente atraviesa el instrumento de izquierda a derecha. En los semiciclos negativos de $e(t)$, los rectificadores B y D experimentan un voltaje directo, mientras que A y C soportan una tensión inversa. El camino de baja resistencia ahora es a través de los rectificadores B y D , despreciando los efectos de C_A y C_C . Aunque se invierte la corriente que suministra $e(t)$, el sentido de la corriente $i(t)$, en el instrumento, sigue siendo de izquierda a derecha. Entonces se mantiene la corriente semidireccional al conducir alternativamente los dos pares de rectificadores situados en brazos opuestos del puente. Obsérvese además que las parejas de rectificadores $A-B$ y $C-D$

se protegen mutuamente de voltajes inversos excesivos, de forma análoga a la del doble rectificador de la Fig. 11-18.

Si R_1 es mucho mayor que la suma de las resistencias directas de los dos rectificadores en serie, la resistencia total del instrumento será constante y prácticamente igual a $R = R_1 + R_m$. Si además R es grande comparada con la impedancia interna de $e(t)$ a todas las frecuencias de la $i(t)$ no sinusoidal, la corriente en el instrumento es aproximadamente igual a

$$i(t) = \frac{E_p}{R} |\operatorname{sen} \omega t| \quad (11-28)$$

donde las dos barras indican valor absoluto. La frecuencia angular fundamental de la sinusoide rectificada es 2ω . De aquí que si $\omega \gg \omega_0/2$ la deflexión del instrumento dependerá solamente de la componente continua de $i(t)$. El valor medio de una sinusoide rectificada cuyo valor de pico fuera F_p se halló ser igual a $F_{av} = 2F_p/\pi$. Por tanto, la deflexión del instrumento con puente rectificador es

$$\theta = \frac{2I_p}{\pi K} = \frac{2E_p}{\pi KR} \quad R \text{ grande} \quad (11-29)$$

Que es el doble de la deflexión con media onda, Ec. (11-27), para igual voltaje aplicado.

La disposición en puente se usa también como amperímetro de c. a. con $R_1 = 0$. Como antes, la resistencia del instrumento de medida es una función de la corriente, y la onda de corriente no es una sinusoide rectificada cuando se introduce el instrumento en un circuito de baja impedancia. Como la resistencia directa del rectificador disminuye al aumentar la corriente, la onda de corriente en un circuito de baja impedancia, que fuera sinusoidal en un principio, aparece con picos más agudos que una sinusoide debido a la inserción del instrumento.

11-10. Características de la escala de instrumentos rectificadores. Usualmente las escalas de los instrumentos rectificadores indican directamente valores eficaces basados en la suposición de que la onda de corriente en el instrumento es una sinusoide rectificada. En otras palabras, se incorpora a las divisiones de la escala el factor de forma de una onda sinusoidal, que vimos era 1,11. Esto representa un fallo en el uso de tales instrumentos, pues el indicador del instrumento de d'Arsonval responde al valor medio de la corriente. En consecuencia, las lecturas no representarán usualmente el valor eficaz de corrientes o voltajes.

Para expresar cuantitativamente el problema, vamos a relacionar las divisiones de la escala con la deflexión del instrumento. Por ejemplo, en

el caso de un voltímetro de rectificador en puente con una gran resistencia en serie R , la lectura del voltímetro viene dada por

$$V = 1,11KR\theta \quad (11-30)$$

El factor por el que se multiplica θ es el llamado «factor de escala» e incluye al factor de forma 1,11. El factor de escala es constante si R es grande. Si el voltaje aplicado $e(t)$ es una sinusoide de valor de pico E_p , la deflexión angular viene dada por la Ec. (11-29). La lectura V_1 será, según la Ec. (11-30),

$$V = 1,11KR \frac{2E_p}{\pi KR} = 0,707E_p$$

En este caso la lectura es igual al valor eficaz de $e(t)$, lo cual no debe sorprender, pues se diseñó deliberadamente con esa intención.

Si $e(t)$ no es un voltaje sinusoidal, la lectura puede ser o más alta o más baja que el valor eficaz de $e(t)$, dependiendo de la forma de onda. Por ejemplo, una tensión continua $e(t) = E$ (que es, por supuesto, una onda no sinusoidal), o una onda cuadrada de amplitud pico a pico $2E$ (que tiene una componente continua E), producen la misma deflexión, $\theta = E/KR$. De aquí la lectura según la Ec. (11-30) es $V = 1,11E$. Esto es 11 por 100 más que el valor eficaz de la tensión continua y alrededor del 22 por 100 más bajo que el valor eficaz de la onda cuadrada. Otro ejemplo es la onda triangular de la Fig. 11-3. Su valor medio era la mitad del valor de pico y su valor eficaz $1/\sqrt{3}$ el valor de pico. Si se aplica un voltaje de esta forma y valor de pico E_p al voltímetro de rectificador en puente, la deflexión será $\theta = E_p/2KR$. La lectura del voltímetro según la Ec. (11-30) será $V = 0,555E_p$. Esto es cerca del 4 por 100 más bajo que el valor eficaz real de la onda triangular.

Una vez entendido el proceso de elaboración del factor de escala, es innecesario calcular θ . Los principios desarrollados indican que la lectura hay que multiplicarla por 0,9 veces el factor de forma de la onda para obtener el valor eficaz. Cuanto más difiera el factor de forma de 1,11, más diferirá la lectura del valor eficaz real.

La escala del voltímetro de rectificador en puente con R elevada es esencialmente uniforme, pues θ es una constante por el valor de pico del voltaje aplicado. Sin embargo, los voltímetros de rango bajo tienen a menudo escalas no uniformes, pues los valores bajos de R_1 requeridos no son lo suficientemente grandes como para enmascarar la resistencia directa del par de rectificadores en serie. Para valores bajos de la corriente la resistencia directa es mayor que para valores altos. Por tanto, el factor de escala es más pequeño para corrientes pequeñas y correspondientes deflexiones angulares pequeñas. Esto produce un amontonamiento de las divisiones de la escala hacia el cero. En consecuencia, un amperímetro de rectificador en puente con $R_1 = 0$ presenta una escala muy compri-

mida en las porciones de baja corriente, cuando se usa con un galvanómetro de d'Arsonval de campo radial uniforme. Además, la relación de resistencia directa e inversa es una función de la corriente y constituye un factor adicional de no uniformidad.

Los instrumentos de rectificador están sujetos a un número considerable de errores y no tienen gran precisión. Algunos de los errores mencionados son los errores de forma de onda, de lectura de la escala, y errores en alta frecuencia. Además, los rectificadores pueden cambiar al envejecer y alterar la calibración del instrumento. Los cambios de temperatura afectan también al funcionamiento del rectificador. A pesar de estas dificultades la combinación de alta sensibilidad y bajo costo hacen de este tipo de instrumento uno de los más usados en el rango de frecuencias audibles.

11-11. Análisis del voltímetro de diodo. El circuito del voltímetro de rectificador de la Fig. 11-17 puede modificarse intercambiando el rectificador y R_1 de modo que se pueda conectar un condensador C en paralelo con la combinación de R_1 y el galvanómetro de d'Arsonval, como muestra la Fig. 11-20. Se usa un diodo como rectificador, pues es capaz de soportar los grandes voltajes inversos que aparecen en este circuito. Tiene otras ventajas sobre el rectificador de óxido de cobre, como son pequeña capacidad, resistencia directa baja y elevada relación de resistencia inversa a directa. Este circuito se llama voltímetro de diodo y es muy usado para convertir tensión alterna en continua. Con un diseño adecuado la caída de tensión en $R = R_1 + R_m$ puede hacerse igual al valor de pico de la tensión alterna aplicada, cualquiera que sea su forma de onda. Este tipo de circuito se encuentra a la entrada de los voltímetros a válvulas de vacío y es capaz de funcionar satisfactoriamente a cientos de megaciclos por segundo. En tal aplicación se emplean amplificadores electrónicos para amplificar la caída de tensión en R , aumentando de este modo la sensibilidad del voltímetro. El galvanómetro de d'Arsonval se sitúa a la salida del amplificador. El circuito es igual a un rectificador de media onda con filtro de condensador, usado como fuente de alimentación continua de poca corriente.

La inclusión del condensador en paralelo con R produce un gran cambio en la operación y características del circuito. Para simplificar supóngase que el diodo es un rectificador ideal (resistencia directa cero, resistencia inversa infinita) y que su capacidad es despreciable. Cuando $e(t) = E_p \cos \omega t$ es una subida de tensión en el sentido de la flecha, el diodo conduce en el tiempo $t = t_1 - T$. La fuente de tensión carga al condensador y la corriente $i(t)$ pasa por R . La tensión en R y C sigue a $e(t)$ cuando el diodo conduce. Cuando $e(t)$ cae por debajo de la tensión en el condensador en $t = t_2 - T$, el diodo experimenta una tensión inversa y deja de conducir. Esto ocurre poco después que $e(t)$ pase por su valor de pico, si la constante de tiempo RC es grande en comparación con el

periodo T . Durante el intervalo de tiempo siguiente, el condensador se descarga a través de R , produciendo una corriente en el mismo sentido que antes. En el semiciclo positivo siguiente de $e(t)$ el diodo conduce otra vez en el tiempo $t = t_1$ de la Fig. 11-20. La carga perdida por el condensador en su descarga es repuesta por un impulso de corriente del diodo. La corriente del diodo consiste en cortos pulsos y el diodo no conduce la mayor parte del periodo T . Obsérvese que el voltaje inverso que soporta el diodo se aproxima a *dos veces* el valor de pico de $e(t)$ en las proximidades del máximo pico negativo.

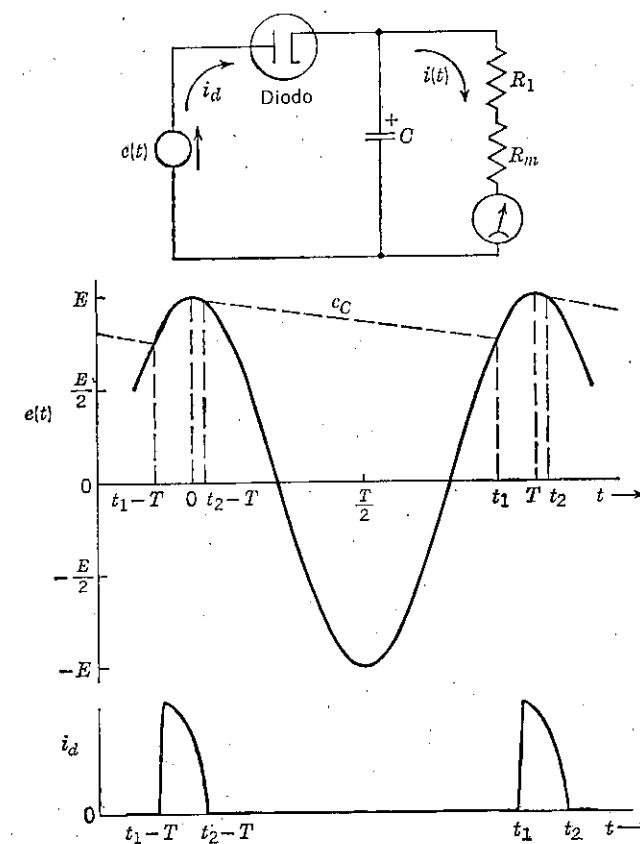


FIG. 11-20. Voltímetro de diodo.

Es evidente que el condensador tiene una profunda influencia en este circuito. En efecto, C es una reserva de carga que mantiene a $i(t)$ casi constante durante el periodo completo. El diodo opera como una válvula que permite reponer con un gran impulso de corriente la carga perdida durante el intervalo de descarga. Cuando $RC \gg T$, la tensión $e(t)$ está

casi completamente desconectada de la entrada, salvo para intervalos de conducción del diodo, extremadamente cortos. De aquí que la impedancia de entrada efectiva del voltímetro de pico sea muy alta.

Una expresión de la tensión continua de salida E_{dc} en R permite determinar un valor adecuado de RC para conseguir acción de voltímetro de pico. El análisis se simplifica suponiendo que el diodo deja de conducir en el pico de $e(t)$, como muestra la Fig. 11-21, en vez de seguir haciéndolo ligeramente después del pico. Esta aproximación no afecta seriamente al área bajo la curva e_R de la Fig. 11-21, en especial si RC es grande en comparación con T , el caso de más interés en el diseño del voltímetro de pico. El voltaje en R o C puede expresarse como

$$\begin{aligned} e_R = e_C &= E e^{-t/RC} \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ e_R = e_C &= E \cos \omega t \quad t_1 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (11-31)$$

Para $t = t_1$, cuando el diodo empieza a conducir, los dos voltajes deben ser iguales.

$$E e^{-t_1/RC} = E \cos \omega t_1 \quad (11-32)$$

El valor medio de e_R es E_{dc} y puede hallarse a partir del área bajo la curva de la Fig. 11-21.

$$\begin{aligned} E_{dc} &= \frac{1}{T} \int_0^{t_1} E e^{-t/RC} dt + \frac{1}{T} \int_{t_1}^T E \cos \omega t dt \\ &= \frac{-RCE}{T} \left[e^{-t/RC} \right]_0^{t_1} + \frac{E}{\omega T} \left[\sin \omega t \right]_{t_1}^T \\ &= \frac{-\omega RCE}{\omega T} (e^{-t_1/RC} - 1) + \frac{E}{2\pi} (0 - \sin \omega t_1) \\ &= \frac{E}{2\pi} \left[\omega RC (1 - e^{-t_1/RC}) - \sin \omega t_1 \right] \end{aligned} \quad (11-33)$$

Esto expresa a E_{dc} en función del tiempo t_1 .

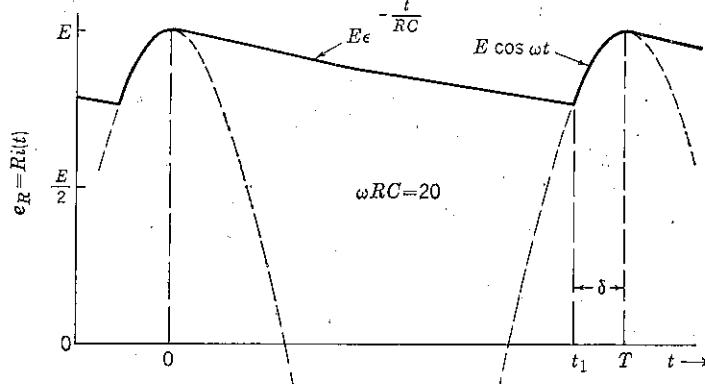


FIG. 11-21. Duda aproximada de salida de un voltímetro de diodo.

Puede demostrarse que E_{dc} se aproxima a E al tender ωRC a infinito. Sea $t_1 + \delta = T$, donde δ es el intervalo de conducción del diodo. Al tender ωRC a infinito, δ tiende a cero y

$$e^{-t_1/RC} = 1 - \frac{t_1}{RC} + \dots \approx 1 - \frac{T - \delta}{RC} \quad \delta \ll T \quad (11-34)$$

$$\sin \omega t_1 = \sin (\omega T - \omega \delta) = -\sin \omega \delta \approx -\omega \delta \quad \delta \ll T \quad (11-35)$$

Introduciendo estas relaciones aproximadas en la Ec. (11-33)

$$E_{dc} \approx \frac{E}{2\pi} \left[\omega RC \left(1 - 1 + \frac{T}{RC} - \frac{\delta}{RC} \right) + \omega \delta \right] = \frac{E}{2\pi} (2\pi - \omega \delta + \omega \delta) = E$$

Aunque este resultado prueba que la detección de pico es posible, la pregunta real es qué valor de ωRC hace que E_{dc} sea prácticamente igual a E . Debe hallarse el momento en que el diodo empieza a conducir, y por desgracia la Ec. (11-32) que contiene esta información es trascendente. Sin embargo, en la curva $\omega t_1 - \omega RC$ se puede trazar resolviendo la Ec. (11-32) gráficamente. La curva resultante aparece en la Fig. 11-22.

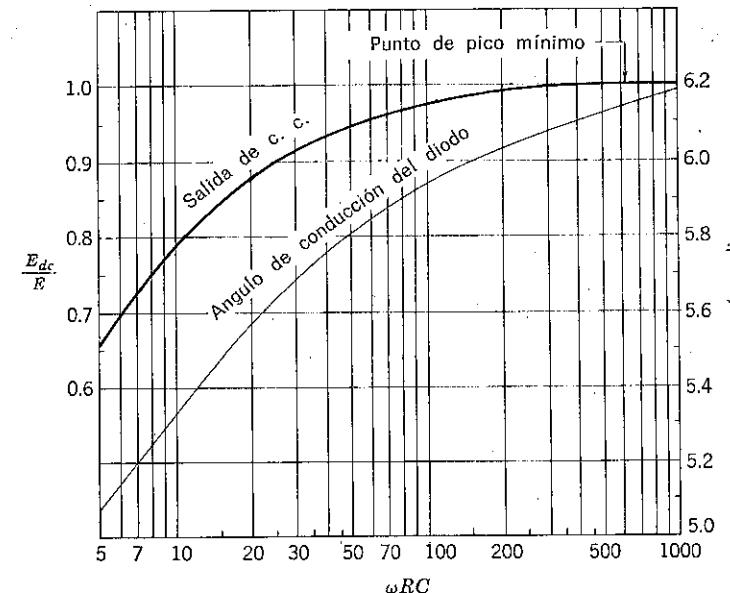


FIG. 11-22. Características del voltímetro de diodo.

Con los valores correspondientes de ωRC y ωt_1 , E_{dc} puede calcularse a partir de la Ec. (11-33) o de

$$E_{dc} = \frac{E}{2\pi} \left[\omega RC (1 - \cos \omega t_1) - \sin \omega t_1 \right] \quad (11-36)$$

La curva $E_{dc}/E \cdot \omega RC$ de la Fig. 11-22 muestra que E_{dc} es alrededor del 5 por 100 menor que E con $\omega RC = 50$ y solamente alrededor de un 1 por 100 menor que E para $\omega RC = 180$. El criterio de diseño que se establece usualmente es

$$f \geq \frac{100}{RC}$$

donde $f = \omega/2\pi$, que corresponde a $\omega RC \geq 628$, para lo cual E_{dc} y E son indistinguibles en la Fig. 11-22.

Una buena aproximación a estos resultados se obtiene, para ωRC elevado, describiendo los dos estados de voltaje en R o C por las dos líneas rectas que aparecen en la Fig. 11-23. La descarga del condensador se supone lineal, y la pequeña porción de $e(t)$ en la proximidad de su pico se approxima también con una línea recta. Evidentemente, E_{dc} es la diferencia entre el área del rectángulo ET y el área triangular rayada, dividida por T . La base del triángulo es T y su altura puede hallarse por la Ec. (11-34). De aquí,

$$E_{dc} \approx \frac{1}{T} \left[ET - \frac{1}{2} T \left(\frac{t_1 E}{RC} \right) \right] = E \left(1 - \frac{\omega t_1}{2\omega RC} \right) \quad (11-37)$$

Como aún se precisa ωt_1 , puede hacerse una aproximación aún más fuerte, usando $t_1 = T$, lo cual da un valor de E_{dc} algo más pequeño al modificar el triángulo rayado de la Fig. 11-23 en un triángulo rectángulo de área ligeramente mayor. Entonces

$$E_{dc} \approx E \left(1 - \frac{\pi}{\omega RC} \right) \quad (11-38)$$

Estos resultados aproximados se pueden comparar con la curva de la

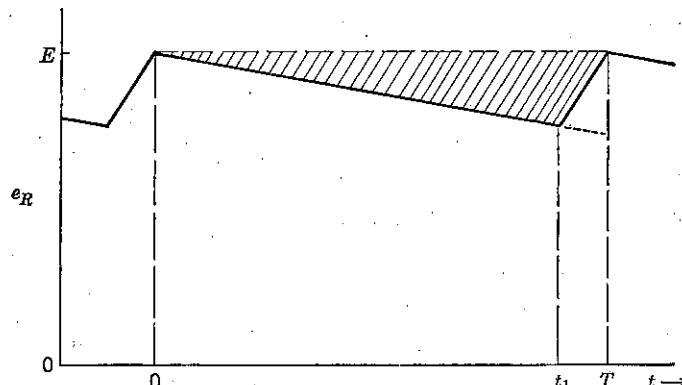


FIG. 11-23. Aproximación por líneas rectas de la onda de salida.

Fig. 11-22. Por ejemplo, con $\omega RC = 20$ la Ec. (11-38) da $E_{dc} = 0,84E$, mientras que la Ec. (11-37) con $\omega t_1 = 5,57$ da $E_{dc} = 0,86E$. No existe gran diferencia con el valor $E_{dc}/E = 0,88$ que da la curva de la Fig. 11-22 para $\omega RC = 20$. Para valores mayores de ωRC la aproximación mejora. Por ejemplo, con el valor mínimo usual, $\omega RC = 200\pi$, la Ec. (11-38) muestra que E_{dc} solamente es un 0,5 por 100 menor que E , lo cual es un resultado bastante exacto.

Es claro por la operación del circuito que la salida del voltímetro de diodo será igual al valor de pico, de $e(t)$ si $\omega RC \geq 200\pi$. La escala del instrumento de d'Arsonval de la Fig. 11-20 puede graduarse directamente en valores de pico. Si se gradúa en voltios eficaces de una onda sinusoidal (caso más frecuente) incluyendo el factor 0,707, la escala será errónea si la onda no es sinusoidal. El error debido a forma de onda es similar al descrito en detalle en el instrumento de rectificador en puente.

11-12. Instrumentos de termopar. El voltímetro de diodo produce una salida igual al valor de pico del voltaje aplicado, cualquiera que sea su forma de onda, si ωRC es suficientemente grande. También es interesante tener un instrumento que dé el valor eficaz del voltaje aplicado para cualquier forma de onda. Ni los voltímetros de diodo ni los instrumentos rectificadores tienen esa capacidad. Sin embargo, existe un número de tipos de instrumentos diferentes que poseen esta deseable característica, tal como el electrostático, de hierro móvil y electrodinámico, que se discuten en el capítulo próximo. Otro tipo se basa en la f.e.m. que produce un termopar y se usa a menudo para medir corriente a altas frecuencias.

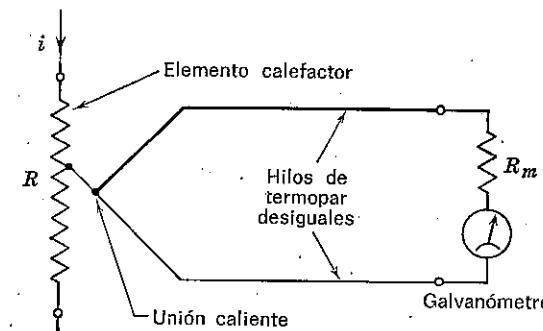


FIG. 11-24. Instrumento de termopar.

La unión caliente del termopar se une a un *elemento calefactor* de resistencia R que lleva la corriente i a medir (ver Fig. 11-24). La temperatura del elemento calefactor depende de la corriente que lo atraviesa, pues la potencia instantánea disipada en forma de calor es $i^2 R$. Un galvanómetro de d'Arsonval sensible se conecta al termopar y constituye la unión fría. La f.e.m. térmica produce una corriente que atraviesa el galvanó-

metro, que puede calibrarse directamente en valores eficaces de la corriente i que pasa por el calefactor. La calibración no tiene en cuenta la forma de la onda de corriente, pues la potencia media disipada en el elemento calefactor es igual al cuadrado del valor eficaz de la corriente por R .

El rango de frecuencias a las que responde este instrumento puede extenderse a cientos de megaciclos, aunque pueden precisarse correcciones de escala. La escala del instrumento no es uniforme, pues la f.e.m. del termopar depende del cuadrado de la corriente de caldeo. Las divisiones de la escala no siguen exactamente una ley cuadrática a causa de ciertos efectos secundarios que afectan al factor de escala, tal como el cambio de la resistencia calefactora con la temperatura. A pesar de estar sujeto este instrumento a un número de errores, tal como la variación de la temperatura ambiente (unión fría), se pueden adquirir comercialmente instrumentos con una precisión del $\frac{1}{2}$ al 2 por 100, y son indispensables para medidas de corriente a alta frecuencia.

Es interesante observar que, una vez más, la unión de elementos auxiliares al galvanómetro de d'Arsonval ha acrecentado su utilidad total e importancia como instrumento indicador.

PROBLEMAS

11-1 (§ 1). En el circuito de voltímetro de retroceso de la Fig. 9-6 $e = E_p \operatorname{sen} \omega t$ y tiene una resistencia interna despreciable, $R = 6.800$ ohmios, la resistencia del amperímetro es despreciable, $E = 45$ V y $r \ll R$. Supóngase que el rectificador tiene resistencia inversa infinita y una resistencia directa constante e igual a 100 ohmios. a) Para $K \geq 0,8$ el instrumento marca cero, pero para $K < 0,8$ da indicación distinta de cero. Calcúlese E_p . b) Calcúlese la indicación del instrumento para $K = 0,5$.

11-2 (§ 2). Hállese el factor de forma de la onda en diente de sierra de la Fig. 11-25.

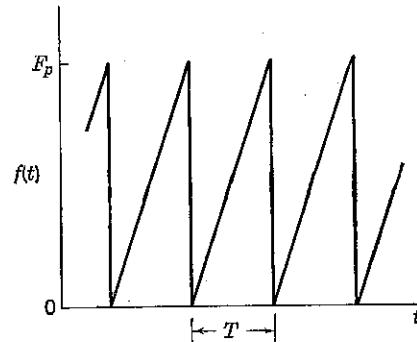


FIG. 11-25. Duda en diente de sierra.

11-3 (§ 2). Hállese el factor de forma de una onda que consiste en una sucesión periódica de semicírculos, como indica la Fig. 11-26.

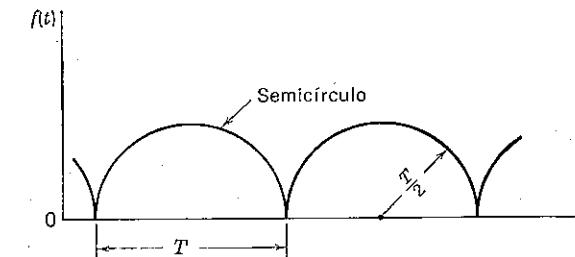


FIG. 11-26. Tren periódico de semicírculo.

11-4 (§ 3). Hállese la expresión del valor eficaz de la onda de corriente de la Fig. 11-7 por integración directa, usando la definición de la Ec. (11-5).

11-5 (§ 3). Demostrar por una sumación detallada de series que la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los valores eficaces individuales de las componentes del desarrollo de Fourier, de una onda cuadrada, es igual al valor eficaz de la onda cuadrada.

11-6 (§ 3). Determinese la serie de Fourier del diente de sierra de la Fig. 11-25.

11-7 (§ 4). Se considera la entrada no sinusoidal al galvanómetro de la Sec. 11-4 en el caso de que $\omega = 0,1 \omega_0$. Si $\omega_0 = 1.000$ rad/seg, calcúlese la diferencia entre los retardos de las dos componentes de la salida del galvanómetro.

11-8 (§ 5). Demostrar que la Ec. (11-19) se obtiene a partir de la Ec. (4-37).

11-9 (§ 6). Hallar el valor de pico y ángulo de fase del séptimo armónico que produce a la salida del galvanómetro la onda cuadrada de periodo $T = 3T_0$, de la Sec. 11-6.

11-10 (§ 6). Determinar la serie de Fourier de la onda cuadrada de la Fig. 11-11 cuando $t = 0$ corresponde al centro de un pulso primitivo.

11-11 (§ 8). Se efectúa un test sobre 5.000 rectificadores usando el circuito de la Fig. 11-27. El instrumento M es un miliamperímetro de 0 a 5 mA de resistencia interna despreciable en comparación con 5.000 ohmios. La resistencia inversa de todos los rectificadores prácticamente es infinita, pero la resistencia directa es variable y distinta de cero. La media de las 5.000 lecturas del miliamperímetro fue 4,85 mA. Se obtuvieron lecturas inferiores a 4,80 mA para 1.000 rectificadores. Supóngase que la resistencia directa sigue una distribución normal. a) Calcúlese la media y desviación standard de la resistencia directa de los rectificadores. b) Estimar el número de casos en los cuales la lectura del miliamperímetro se iría fuera de escala en el test anterior.

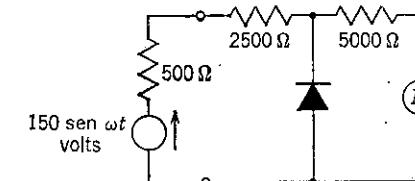


FIG. 11-27. Comprobador de rectificadores.

11-12 (§ 9). Una corriente exponencial de periodo T viene dada por

$$i = I_p e^{-st/T}$$

$$0 < t < T$$

Esta corriente se aplica a un miliamperímetro de puente rectificador (calibrado para marcar valores eficaces de una sinusoida). Calcular el factor por el que hay que multiplicar la lectura del instrumento a fin de obtener valores eficaces de la corriente.

11-13 (§ 9). La resistencia total R_a del amperímetro de puente rectificador de la Fig. 11-19, con $R_1 = 0$, viene dada por

$$R_a = 10(1 - 0,1|e|) \text{ ohmios} \quad 0 < |e| < 5 \text{ voltios}$$

donde e es el voltaje instantáneo aplicado al amperímetro. El instrumento se conecta a un generador de c. a. de f.e.m. = $\sin \omega t$ voltios y de resistencia interna igual a 20 ohmios. Calcúlese el valor de pico de la corriente que atraviesa el galvanómetro.

11-14 (§ 11). Determinar el valor aproximado de ωRC para el voltímetro de diodo de la Sec. 11-11 que hace que E_{dc} difiera de E menos del 0,1 por 100.

11-15 (§ 11). Se aplica una tensión continua a un voltímetro de pico a diodo, cuya escala se calibra para leer valores eficaces de una onda sinusoidal. La lectura del instrumento es 36 V eficaces. ¿Qué valor tiene la tensión continua aplicada?

11-16 (§ 11). Una onda de tensión triangular de la forma indicada en la Fig. 11-3 se aplica a un voltímetro de pico a diodo cuya escala calibrada en valor eficaz de una onda sinusoidal. Si se usa la lectura del instrumento como valor eficaz de esta onda, determinar el tanto por ciento de error que se comete.

11-17 (§ 12). Un voltímetro de c. a. tipo termopar se conecta en serie con un rectificador ideal. Un voltaje sinusoidal de 50 V eficaces se aplica a la combinación. ¿Cuál es la lectura del instrumento?

11-18 (§ 12). Se conectan en serie un miliamperímetro de c. c. de d'Arsonval, un miliamperímetro de termopar y un miliamperímetro de puente rectificador. Una corriente

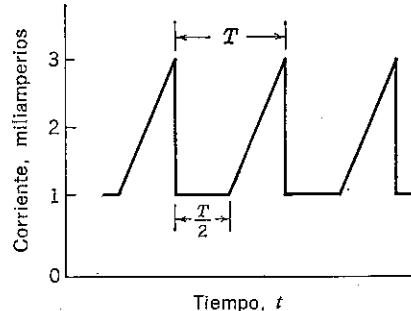


FIG. 11-28. Diente de sierra con componente de corriente continua.

periódica siempre positiva de la forma que indica la Fig. 11-28 atraviesa la combinación. Esta onda es un diente de sierra recortado superpuesto a una corriente continua de 1 mA. ¿Cuáles serán las lecturas de los instrumentos?

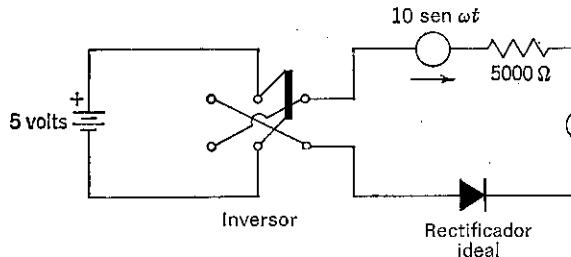


FIG. 11-29. Circuito cortador.

11-19 (§ 12). Repetir el Prob. 11-18 para una onda de corriente que consiste en el diente de sierra de la Fig. 11-25, de valor pico a pico 1 mA. Superpuesto a una corriente continua de 1,5 mA (el valor de pico de la corriente total es 2,5 mA).

11-20 (§ 12). En la Fig. 11-29 se conecta un rectificador ideal en serie con un instrumento M , y se le aplica una tensión $e = 10 \sin \omega t$ voltios en serie con una batería reversible de 5 V. La resistencia de 5.000 ohmios representa la resistencia equivalente de los dos generadores y del instrumento. Determinar las lecturas del instrumento en las dos posiciones del interruptor cuando a) M es un miliamperímetro de d'Arsonval, b) M es un miliamperímetro de termopar, c) M es un miliamperímetro de puente rectificador, con la escala calibrada en valores eficaces de una onda sinusoidal.

CAPITULO 12

INSTRUMENTOS QUE SIGUEN UNA LEY CUADRATICA

Se discuten en este capítulo tres tipos diferentes de instrumentos de medida cuya deflexión media es proporcional al cuadrado del valor eficaz de la tensión o corriente aplicada. Estos instrumentos son especialmente valiosos, pues se encuentran relativamente libres de errores debidos a la forma de onda. A causa de la complejidad del sistema físico que constituye estos instrumentos, no es posible desarrollar la expresión del par en su operación a partir de la ley de la fuerza. Sin embargo, se presentan los principios fundamentales de un método energético de determinación de fuerzas en estos casos y se ilustran con ejemplos. La aplicación del método energético conduce a leyes de deflexión de las cuales se pueden apreciar algunos de los factores que influyen en el diseño, uso y limitaciones de estos instrumentos. El instrumento electrodinámico se distingue de los otros en que se le aplican dos entradas diferentes. A causa de sus posibles usos, muy interesantes, y de su importancia como instrumento de transferencia y como vatímetro, recibe una atención especial.

12-1. Ley de la deflexión media. El elemento móvil de la mayoría de los instrumentos de medida se puede considerar un sólido rígido con un solo grado de libertad —rotación pura alrededor de un eje fijo—. Las corrientes o voltajes aplicados al instrumento crean fuerzas en el elemento móvil que producen un par resultante instantáneo alrededor de su eje de rotación. El par puede ser una función complicada de las corrientes o voltajes aplicados. Cualquiera que sea su forma, se opone a un par restaurador, usualmente proporcionado por un muelle o muelles unidos al elemento móvil. Además debe tenerse en cuenta el momento de inercia del elemento móvil y siempre están presentes otros pares, tal como los producidos por el amortiguamiento. Los pares de amortiguamiento se diseñan usualmente a fin de dar un tiempo de tránsito corto de modo que las condiciones estacionarias se alcancen rápidamente. Si el sistema es lineal la ecuación diferencial del movimiento es análoga a la de un galvanómetro de d'Arsonval.

$$K_1 \frac{d^2\theta}{dt^2} + K_2 \frac{d\theta}{dt} + S\theta = T_\theta \quad (12-1)$$

donde K_1 es el momento de inercia del sistema móvil, K_2 es el coeficiente de rozamiento y S es la constante del muelle. T_θ es la componente del par aplicado en la dirección θ , que produce la aplicación de corrientes o voltajes al instrumento. Los coeficientes K_1 , K_2 y S son sustancialmente constantes en la mayoría de los instrumentos.

La solución general de la Ec. (12-1) consta de un término estacionario más un término transitorio, como se indicó en el Cap. 4.

$$\theta = \theta_s + \theta_t$$

En instrumentos de c. a. la lectura se observa después que el indicador ha llegado a condiciones estacionarias y representa la información útil que proporciona el instrumento. Esto implica que el término transitorio de la solución general θ_t se ha hecho despreciable en comparación con el término estacionario, θ_s .

El término estacionario puede ser una función del tiempo muy complicada, dependiendo de cómo sea el par T_θ . Por ejemplo, si las corrientes o voltajes aplicados al instrumento no son sinusoidales, el par instantáneo y, en consecuencia, θ_s no son sinusoidales. Sin embargo, si las corrientes o voltajes aplicados son periódicos, el término estacionario será también periódico, y θ_s se puede representar por una serie de Fourier [ver Ec. (11-8)].

$$\theta_s = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega t + \phi_n) \quad (12-2)$$

Esta forma de la solución estacionaria se puede insertar en la Ec. (12-1) para explorar la relación general entre el par instantáneo y la deflexión instantánea estacionaria. Pero no es un método muy provechoso, pues los coeficientes desconocidos de la serie de Fourier dependen de la función T_θ .

El movimiento del sistema no es, por fortuna, tan complicado, pues, en general, el elemento giratorio es incapaz de seguir las variaciones instantáneas del par aplicado. Lo que se observa es el valor medio de la solución estacionaria.

$$\theta_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T \theta_s dt = \frac{a_0}{2} \quad (12-3)$$

donde T es el periodo. Es posible observar una vibración del indicador alrededor del valor medio cuando la frecuencia aplicada al instrumento es suficientemente baja. Pero usualmente el instrumento se diseña de tal modo que la frecuencia angular $\omega_0 = \sqrt{S/K_1}$ es mucho menor que la frecuencia más baja medida.

La deflexión media puede relacionarse al par instantáneo multiplicando la Ec. (12-1) por dt/T e integrando de 0 a T . Suponiendo que K_1 , K_2 y S no son funciones del tiempo, la Ec. (12-1) queda

$$\frac{K_1}{T} \int_0^T \frac{d^2\theta_s}{dt^2} dt + \frac{K_2}{T} \int_0^T \frac{d\theta_s}{dt} dt + \frac{S}{T} \int_0^T \theta_s dt = \frac{1}{T} \int_0^T T_\theta dt$$

Las dos primeras integrales son cero, como puede demostrarse diferenciando la Ec. (12-2). Por ejemplo, la segunda integral puede evaluarse obteniendo $d\theta_s/dt$ en la Ec. (12-2), es decir,

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \omega \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \cos(n\omega t + \phi_n)$$

La integral de 0 a T de $d\theta_s/dt$ es cero, pues todos los integrandos de la suma contienen el mismo número de semicírculos simétricos, negativos y positivos durante el intervalo T .

La tercera integral es, por definición, el valor medio de θ_s , que es también el valor medio de θ cuando θ_t se ha hecho despreciable. Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{S}{T} \int_0^T \theta_s dt &= S\theta_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T T_\theta dt = T_{av} \\ \theta_{av} &= \frac{1}{S} \frac{1}{T} \int_0^T T_\theta dt = \frac{T_{av}}{S} \end{aligned} \quad (12-4)$$

La conclusión de que la deflexión media es proporcional al par medio no parece especialmente profunda. Sin embargo, los pasos precedentes son valiosos para adquirir un conocimiento básico de las suposiciones que conducen a esta conclusión, y dan un conocimiento del comportamiento de instrumentos de medida en corriente alterna.

La ley de la deflexión media de la Ec. (12-4) realmente no está restringida a instrumentos de c. a. Por ejemplo, en el caso del galvanómetro de d'Arsonval se halló que el par de c. c. era $T = nBAI$, para una corriente continua I . Se deduce que el par instantáneo para una corriente alterna es $T_\theta = nBAi$, y esta forma se usó en el Cap. 4. Con este par, suponiendo que nBA no es una función del tiempo, se obtiene la ley de la deflexión media

$$\theta_{av} = \frac{nBA}{ST} \int_0^T i dt = \frac{I_{av}}{K}$$

donde K es la constante del instrumento, e I_{av} es el valor medio de la co-

rriente aplicada a la bobina móvil. Si i es una corriente continua, $I_{av} = I_{dc}$, y queda la misma ley de deflexión del Cap. 3. Si i es una corriente sinusoidal, su valor medio es cero de modo que la deflexión media del instrumento es cero. Finalmente, si i es una onda sinusoidal rectificada, como en el caso del instrumento de puente rectificador, entonces I_{av} es $2/\pi$ veces el valor de pico de i , y, por tanto, hay deflexión media distinta de cero.

Una vez hallada la expresión del par instantáneo, la ley de la deflexión media de la Ec. (12-4) puede integrarse, y estudiarse las características del instrumento. Primeramente es preciso hallar T_θ . En la sección siguiente se describe un método energético para hacerlo.

12-2. Fuerza y energía. La ley básica de la fuerza de la Ec. (3-1) da la fuerza instantánea que ejerce un campo eléctrico y magnético sobre una carga q que se mueve con la velocidad v . En principio esta ley de fuerza puede usarse para determinar las fuerzas electrostáticas entre conductores cargados, fuerzas magnéticas entre conductores portadores de corriente, o casos en los que se combinan ambos campos. Un ejemplo magnético simple es el caso del galvanómetro de d'Arsonval. Sin embargo, hay pocos sistemas físicos en los cuales es práctico obtener el resultado por este procedimiento directo. La principal dificultad es integrar todas las fuerzas infinitesimales sobre todas las cargas y corrientes que constituyen el sistema completo. Por fortuna hay un método potente para determinar las fuerzas, que emplea el simple proceso de la diferenciación, en vez de la integración. Se basa en el cambio que produce en la energía almacenada en el campo electromagnético de un sistema de conductores cargados y portadores, de corriente, el desplazamiento de un conductor. El método energético es indispensable para determinar las fuerzas y los correspondientes pares, en el elemento móvil de los tres tipos de instrumentos que se estudian en este capítulo.

Se presentan los principios generales del método energético de determinar fuerzas en el caso de campos eléctricos y magnéticos combinados. Esto indica la generalidad del método, pero inmediatamente nos ocuparemos de los casos simplemente eléctricos o simplemente magnéticos. Los ejemplos que se dan en la Sec. 12-3 para casos especiales proporcionan una idea más tangible del método.

Consideremos un sistema de conductores rígidos fijos que portan diferentes cargas eléctricas y conducen diversas corrientes. Hay campo eléctrico y magnético asociados al sistema. Por ejemplo, dos anillos conductores de corriente con una diferencia de potencial entre ellos están rodeados de un campo eléctrico y un campo magnético. Habrá cierta energía W almacenada en los campos eléctrico y magnético. El concepto de energía del campo se basa en la existencia de fuerzas, del tipo que da la Ec. (3-1), que actúan sobre una pequeña carga de prueba, en cualquier punto del campo electromagnético. También ejercen fuerza los campos sobre los conductores fijos.

Permitase a uno de los conductores realizar un desplazamiento, infinitesimal arbitrario, ds . Sea \mathbf{f} la fuerza recta que ejerce el campo sobre el conductor. Entonces el trabajo que implica este desplazamiento es $\mathbf{f} \cdot ds$. Si no se proporciona energía al sistema durante el desplazamiento, la energía del sistema debe cambiar, pues la energía se debe conservar. El trabajo es igual al cambio de la energía almacenada en el campo electromagnético.

$$dW = -\mathbf{f} \cdot ds = -f_s ds \quad (12-5)$$

donde dW es el *aumento* de la energía almacenada, y f_s es la componente de \mathbf{f} en la dirección del desplazamiento ds . El signo algebraico de la Ec. (12-5) es correcto como se ve con el siguiente razonamiento. Si ds se elige de modo que coincida con la fuerza neta \mathbf{f} que ejerce el campo sobre el conductor, entonces el campo realiza trabajo en el conductor y la energía almacenada debe de crecer. De aquí, para esta ds particular, el trabajo $f_s ds$ es positivo, y el *aumento* de la energía almacenada es negativo. Por tanto, la componente de la fuerza que ejerce el campo sobre el conductor en la dirección ds viene dada por

$$f_s = -\frac{dW}{ds} \quad (12-6)$$

La dirección del desplazamiento es arbitraria, así que no se pierde generalidad al considerar una sola componente de \mathbf{f} . Si se desea el vector fuerza \mathbf{f} tridimensional puede obtenerse cada una de las componentes hallando la derivada parcial de la energía almacenada con respecto a cada una de las tres coordenadas ortogonales. Esto puede demostrarse rigurosamente examinando la diferencial total de W en un sistema de coordenadas específico. Por ejemplo, en coordenadas rectangulares

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz$$

Pero

$$\mathbf{f} \cdot ds = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

Por tanto, las componentes ortogonales de la fuerza vienen dadas por

$$f_x = -\frac{\partial W}{\partial x} \quad f_y = -\frac{\partial W}{\partial y} \quad f_z = -\frac{\partial W}{\partial z} \quad (12-7)$$

Estas relaciones pueden generalizarse para cualquier sistema de coordenadas por

$$\mathbf{f} = -\nabla W \quad (12-8)$$

donde ∇W es el gradiente de W .

Las Ecs. (12-6) o (12-8) constituyen las bases fundamentales del método energético de determinar fuerzas. Exigen que se conozca la expresión de W en función de las coordenadas.

Se han de tener en cuenta varios aspectos técnicos a fin de hacer el uso más efectivo de los métodos energéticos. La estipulación de que no se suministre otra energía cuando el cuerpo realiza un desplazamiento requiere crítica. Significa, en el caso electrostático, que todas las cargas deben mantenerse constantes cuando se desplaza el conductor. En el caso magnético, todos los flujos deben mantenerse constantes al desplazar al conductor. Sin embargo, dW/ds se obtiene a menudo con menor complejidad matemática en condiciones de potencial constante en los conductores en el caso electrostático, y en condiciones de corriente constante, en el caso magnético. Estas cantidades pueden mantenerse constantes suministrando fuentes externas de energía, por ejemplo, baterías para mantener el potencial constante. Pero el uso de tales fuentes externas de energía invalida la Ec. (12-6), la cual se basa en la premisa de que todo el trabajo que realiza el campo al desplazar el cuerpo es proporcionado por la energía almacenada en el campo. En el caso de potenciales constantes y corrientes constantes el aumento de la energía almacenada por el mismo desplazamiento no es ya dW , sino

$$dW' = -f_s ds + dW_1 \quad (12-9)$$

Esto establece que el aumento de la energía almacenada en el campo dW' es igual a la energía gastada en el desplazamiento más la energía suministrada por las fuentes externas dW_1 , para mantener constantes las corrientes y los potenciales. La componente de la fuerza en la dirección ds es desde luego la misma que antes.

La introducción del término dW_1 introduce serias complicaciones. Puede demostrarse, en general, que dW_1 es exactamente el doble del cambio de la energía almacenada (un ejemplo electrostático se estudia en la sección siguiente).

$$dW_1 = 2 dW'$$

Con f_s igual al caso anterior queda que

$$f_s = +\frac{dW'}{ds} = -\frac{dW}{ds} \quad (12-10)$$

Este resultado establece que, cuando el campo realiza trabajo sobre los conductores con los potenciales y corrientes constantes, el aumento de la energía almacenada es igual a dW' . La explicación es que la fuente ex-

terna no solamente proporciona la energía necesaria para el trabajo, sino que, además, aumenta la energía almacenada en igual cantidad.

Como dW y dW' solo difieren en el signo se puede considerar esto trivial especialmente porque otros factores del sistema se pueden usar para determinar si la fuerza ejercida sobre el conductor es de atracción o repulsión. Entonces solo se precisa la magnitud de f_s y puede obtenerse por cualquier método. Pero la influencia en el cambio de la energía total del sistema se demuestra con la esperanza de disipar las misteriosas condiciones circundantes que se mantienen constantes. Si se presta atención a los signos algebraicos, resulta exactamente la misma fuerza con las relaciones que se han presentado para el caso de que las cargas y flujos constantes o con las corrientes y potenciales mantenidos constantes.

El elemento móvil de la mayoría de los instrumentos de medida experimenta una rotación pura. De modo que es útil hallar la expresión del par en función de la energía almacenada en los campos. Esto se realiza según la Fig. 12-1. La distancia entre el eje de rotación del cuerpo y el punto de aplicación de la fuerza neta ejercida por el campo sobre el cuerpo giratorio se indica por r . Para un desplazamiento dx que es perpendicular a r , $dx = r d\theta$. Entonces la Ec. (12-7) queda

$$f_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta}$$

Pero rf_x es la componente del par en la dirección θ , alrededor del eje de rotación. De aquí

$$T_\theta = \pm \frac{\partial W}{\partial \theta} \quad (12-11)$$

Por tanto, puede obtenerse el par alrededor de un eje específico, directamente a partir del cambio que produce en la energía almacenada en el sistema un pequeño cambio angular $d\theta$. Si se mantienen constantes las

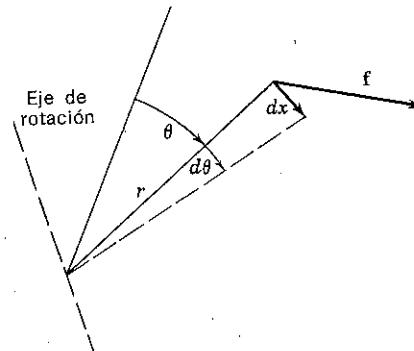


FIG. 12-1. Relaciones de fuerza y par.

cargas y flujos corresponde el signo menos a la Ec. (12-11). Si se mantienen constantes las corrientes y potenciales corresponde el signo más. En cualquier caso se obtiene el mismo resultado para el par.

Los resultados se obtienen para valores fijos de carga y flujo o de potencial y corriente. Estos resultados pueden aplicarse a magnitudes variables con el tiempo, suponiendo que la frecuencia sea lo suficientemente baja como para despreciar los efectos de retardo. Este es el llamado estado *cuasi-estacionario*. Se pueden suponer fijas las cargas, flujos, corrientes y voltajes variables con el tiempo mientras se realiza el procedimiento analítico de desplazar el conductor. Después de obtener la expresión del par o fuerza, se puede permitir a las cantidades dependientes del tiempo variar lentamente y la forma matemática de la fuerza obtenida no cambia.

12-3. Ejemplos de fuerza y energía. Considérense los dos conductores fijos A y B de la Fig. 12-2. Si todas las cargas son cero cuando el interruptor está abierto, no hay campo ni energía almacenada. Despues de cerrar el interruptor los conductores se cargan a una diferencia de potencial

$$V = E = V_B - V_A$$

Cuando se cierra el interruptor se toma una corriente de carga i de la batería y la ley de Kirchhoff da

$$E = iR + \frac{q}{C} \quad (12-12)$$

donde R es la resistencia del circuito de batería, C es la capacidad entre los conductores y se supone que el medio que rodea a los conductores es perfectamente aislante (obsérvese que uno de los conductores está unido a tierra de modo que C es la única capacidad que se precisa para describir la relación entre las cargas). Multiplicando ambos miembros de la Ec. (12-12) por $dq = i dt$ e integrando de cero a t , en cuyo momento la carga q ha alcanzado su valor estacionario $Q = CV$.

$$\int_0^t Ei dt = \int_0^t i^2 R dt + \int_0^Q \frac{q dq}{C}$$

La integral de la izquierda es la energía total suministrada por la batería, la integral $i^2 R$ es la energía disipada en forma de calor en la resistencia R , y la integral restante es la energía almacenada en el campo electrostático.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^Q \frac{q dq}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \\ &= \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV \end{aligned} \quad (12-13)$$

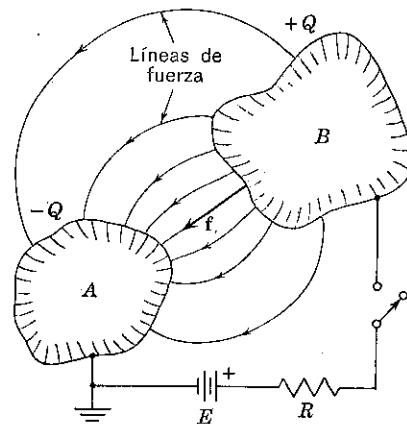


FIG. 12-2. Sistema electrostático de dos conductores.

La componente de la fuerza neta f_x sobre el conductor B en la dirección x se puede obtener con Q constante, abriendo el interruptor y permitiendo a B realizar un pequeño desplazamiento en la dirección positiva de x . Entonces,

$$f_x = - \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_q = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right) = - \frac{1}{2} Q^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{C} \right) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x}$$

Se obtiene exactamente el mismo resultado de f_x cuando se mantiene constante la diferencia de potencial V . Esto se consigue manteniendo cerrado el interruptor durante el desplazamiento, dx , y realizando el desplazamiento lo suficientemente despacio como para que no haya caída de tensión apreciable en R debida a la carga tomada de la batería. Entonces,

$$f_x = + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_V = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} CV^2 \right) = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{\partial C}{\partial x}$$

Esto concuerda con el resultado obtenido con Q constante.

Si el eje x se dirige del conductor A al conductor B , su desplazamiento positivo dx representa un aumento en la distancia entre los conductores y una disminución de la capacidad. De aquí $\partial C/\partial x$ es negativa y f_x tiene el sentido al eje x , del conductor B al A . Por otra parte, si el eje x se dirige del conductor B al A entonces su desplazamiento positivo dx representa una disminución de la distancia entre los conductores y un aumento de la capacidad. De aquí $\partial C/\partial x$ es positiva y f_x se dirige, según el eje x , otra vez del conductor B al A . Por tanto, resulta la misma fuerza aunque se invierta el sentido del eje x .

Si C se conoce en función de las coordenadas, se puede hallar la expresión detallada de f_x , así como las demás componentes de f . Sin embargo, el resultado obtenido tiene valor incluso en la forma presente, pues indica que la fuerza depende del cuadrado del potencial entre los conductores. (Se sabe que C es función de la geometría y del medio, solamente.) Si la diferencia de potencial es una función del tiempo lentamente variable, la fuerza instantánea viene dada en la misma forma que el caso electrostático.

Se pueden estudiar las relaciones de energía para demostrar que la energía que proporciona la batería en el caso de potencial constante es exactamente el doble del cambio de la energía del campo. Sea dC el cambio producido en la capacidad por el desplazamiento dx . Entonces, en el caso de carga constante, la diferencia de potencial entre los conductores después del desplazamiento es

$$V' = \frac{Q}{C + dC} = \frac{Q}{C} \left(1 + \frac{dC}{C} \right)^{-1} = V \left(1 - \frac{dC}{C} \right)$$

El *aumento* de la energía almacenada en el campo eléctrico, cuando Q es constante, es

$$dW = \frac{1}{2} Q(V' - V) = - \frac{1}{2} \frac{QV}{C} dC = - \frac{1}{2} V^2 dC \quad (12-14)$$

Si el desplazamiento dx produce un aumento de C , dC es positivo, $V' < V$ y la energía almacenada disminuye. Si C disminuye como resultado del desplazamiento dC es negativa, $V' > V$ y la energía almacenada aumenta.

En el caso de potencial constante la carga después del desplazamiento es distinta de la carga inicial e igual a

$$Q' = (C + dC)V = Q + V dC$$

La energía suministrada por la batería a través de la resistencia R , manteniendo constante el voltaje V entre los conductores, es

$$dW_1 = V(Q' - Q) = V^2 dC \quad (12-15)$$

El *aumento* de la energía almacenada en el campo eléctrico es

$$dW' = \frac{1}{2} V(Q' - Q) = \frac{1}{2} V^2 dC \quad (12-16)$$

Por tanto, queda probado que $dW_1 = 2 dW'$ y también que $dW' = -dW$.

Como ejemplo magnético considérense las dos bobinas de la Fig. 12-3, de autoinducción L_1 e inducción mutua M . Se supone que la carga

neta en cada circuito es cero. Antes de cerrar los interruptores no hay campo y, por tanto, no hay energía almacenada. Despues de cerrar ambos interruptores se establecen corrientes estacionarias I_1 e I_2 en las bobinas 1 y 2, respectivamente. Si se cierran ambos interruptores en $t = 0$, la ley de Kirchhoff da las ecuaciones

$$\begin{aligned} E_1 &= i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ E_2 &= i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \quad (12-17)$$

El signo de M depende de los detalles de arrollamiento de las dos bobinas, así como de su orientación relativa, y puede ser positivo o negativo.

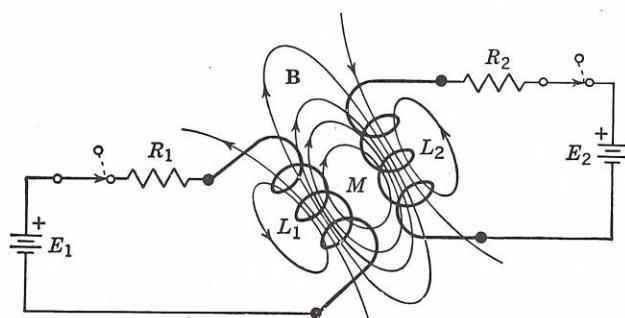


FIG. 12-3. Dos bobinas acopladas.

Multiplicando la primera ecuación por $i_1 dt$ y la segunda por $i_2 dt$, sumando las dos ecuaciones e integrando de cero a t , cuando las intensidades han alcanzado sus valores estacionarios I_1 e I_2 . La energía total suministrada viene representada por las integrales que contienen E_1 y E_2 , mientras que la energía disipada la constituyen los términos que contienen R_1 y R_2 . Las integrales restantes representan la energía contenida en el campo magnético y vienen dadas por

$$W = \int_0^{I_1} L_1 i_1 di_1 + \int_0^{I_2} L_2 i_2 di_2 + \int_0^{I_1, I_2} M d(i_1 i_2)$$

Integrando se obtiene

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \quad (12-18)$$

Los primeros dos términos pueden interpretarse como la energía almacenada en la autoinducción, pues si I_1 o I_2 es cero, la energía almacenada en el campo corresponde a una sola inductancia.

Puede obtenerse una componente de la fuerza que actúa sobre una de las bobinas, a partir de la expresión de energía de la Ec. (12-18), desplazando la bobina en alguna dirección x . El procedimiento más simple es mantener las corrientes constantes (mejor que los flujos). Si la permeabilidad magnética del medio permanece constante, lo cual no es necesariamente cierto en el caso de un medio ferromagnético, entonces L_1 y L_2 , así como I_1 e I_2 , son constantes. La única cantidad que cambia como resultado del desplazamiento dx es la inductancia mutua M . Por tanto,

$$f_x = + \frac{\partial W}{\partial x} = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial x} \quad (12-19)$$

La facilidad con que se ha obtenido este resultado hace que merezca la pena el estudio completo de los intercambios de energía, pues es bastante más complicado obtener el resultado manteniendo constantes los flujos. El resultado correcto de f_x se obtiene aunque se proporcione energía al sistema por medio de fuentes externas que mantienen las corrientes constantes al desplazar la bobina.

Si se desea la expresión completa de la fuerza, es necesario conocer la inductancia mutua entre las dos bobinas en función de las coordenadas. Sin embargo, incluso desconociéndola, la Ec. (12-19) es valiosa. Muestra que la fuerza es proporcional al producto de las intensidades de las bobinas, pues se sabe que M depende únicamente de la geometría de las bobinas y de las características del medio. Si las corrientes varían lentamente, la componente instantánea de la fuerza en la dirección x será también una función del tiempo y puede obtenerse remplazando las corrientes continuas de la Ec. (12-19) por corrientes variables con el tiempo.

12-4. Voltímetro electrostático. El par producido en instrumentos electrostáticos procede de las fuerzas que ejerce un campo eléctrico sobre conductores cargados. Hay varios tipos de instrumentos electrostáticos, entre los cuales están los electroscopios, electrómetros de hilo y cuadrantes y voltímetros electrostáticos. El análisis del voltímetro electrostático introducirá los principios que gobiernan esta clase de instrumentos.

El voltímetro electrostático contiene un condensador variable de aire, con un conjunto de placas que pivotan sobre un eje y otro conjunto fijo. La disposición se indica esquemáticamente en la Fig. 12-4. Un indicador unido a las placas giratorias proporciona una indicación directa de la situación angular. El par recuperador lo proporciona un par de muelas espirales, y se puede introducir amortiguamiento por medio de unas aspas unidas al sistema móvil (amortiguamiento de aire). Cuando se aplica un voltaje alterno, e , a las placas, se produce un ir y venir de cargas en las placas. Las fuerzas entre las cargas producen un par alrededor del eje de rotación, que actúa siempre en el mismo sentido, cualquiera que

sea la polaridad de C . Por tanto, el par medio no es cero. Las fuerzas tienden a girar las placas de modo que C aumente. Fundamentalmente el campo que bordea al condensador produce el par. A pesar de su engañoso nombre, que contiene el término «... estático», el instrumento es útil como voltímetro de c. c. o c. a.

La determinación del par sería difícil si no fuera por el potente método energético. Analizando la energía almacenada en el campo entre las placas del condensador es posible determinar algunos de los importantes factores de los que depende el par, sin prestar atención a la geometría detallada del sistema. El voltaje instantáneo aplicado al condensador es $e = q/C$, si se desprecia la resistencia de pérdidas del condensa-

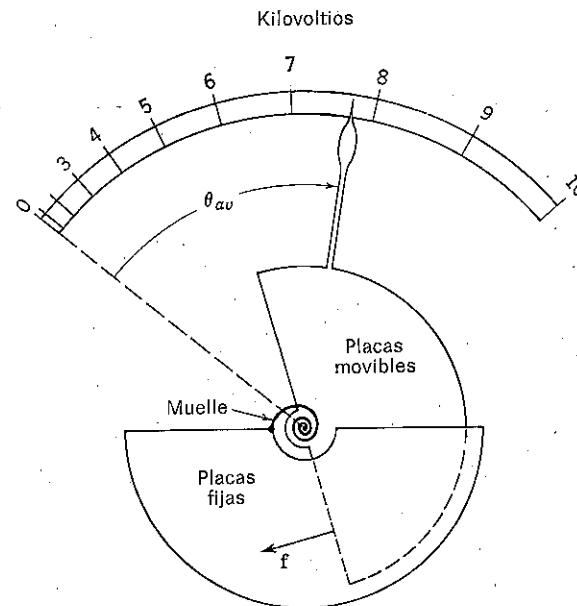


FIG. 12-4. Voltímetro electrostático.

dor. Es una suposición muy acertada en condensadores de aire, si no se produce salto por alta tensión. En consecuencia, la energía instantánea almacenada en el campo eléctrico es por la Ec. (12-13)

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C e^2 \quad (12-20)$$

El par instantáneo se puede obtener manteniendo q o e constantes, y permitiendo a las placas móviles un pequeño desplazamiento angular $d\theta$.

Aplicando la Ec. (12-11) en el caso de e constante, con el signo más,

$$T_\theta = + \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_e = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} C e^2 \right) = \frac{1}{2} e^2 \frac{\partial C}{\partial \theta} \quad (12-21)$$

El mismo resultado se puede obtener manteniendo a q constante, en cuyo caso hay que emplear el signo menos de la Ec. (12-11).

El par instantáneo depende del cuadrado del valor instantáneo del voltaje aplicado y de la forma en que C depende de θ . El par medio en un periodo completo T del voltaje alterno es

$$T_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T T_\theta dt = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial \theta} \frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt = \frac{1}{2} \frac{\partial C}{\partial \theta} E_{rms}^2 \quad (12-22)$$

Obsérvese que la integral indicada es, por *definición*, el cuadrado del valor eficaz del voltaje alterno e . Esto significa que el par medio depende del valor eficaz del voltaje aplicado a las placas del condensador, cualquiera que sea la forma de onda. Entonces el instrumento puede calibrarse directamente en voltios eficaces, y no habrá errores de forma de onda de la clase que se encontró en instrumentos rectificadores y de pico.

La ley de deflexión se obtiene introduciendo el par medio en la Ec. (12-4).

$$\theta_{av} = \frac{T_{av}}{S} = \frac{1}{2S} \frac{\partial C}{\partial \theta} E_{rms}^2 = \frac{1}{K} E_{rms}^2 \quad (12-23)$$

donde K es la «constante» del instrumento, que generalmente es una función de θ . Se llama un instrumento de ley cuadrática a causa de que θ_{av} es proporcional al cuadrado de la cantidad a medir. Pero θ_{av} puede depender de otras variables, tal como θ cuando K no es constante.

Las características de escala dependen de K , la cual puede controlarse entre límites por medio de una forma adecuada de las placas del condensador. Por ejemplo, es bastante fácil hacer C igual a una constante por θ . En este caso K es una constante, suponiendo que S no varía con θ , lo cual es casi invariablemente cierto. Esto no es un diseño particularmente deseable, pues conduce a una escala de voltaje según una ley cuadrática, como muestra la Fig. 12-4, que está muy comprimida hacia el cero de la escala. Su legibilidad está muy limitada para pequeños voltajes. En algunos diseños se intenta hacer $\partial C/\partial \theta$ inversamente proporcional a E_{rms} , para conseguir una escala uniforme. Esto puede hacerse satisfactoriamente en el 50 a 60 por 100 superior de la escala. La porción baja de la escala permanece inevitablemente comprimida, pues se precisa para pequeños voltajes que a un cambio angular pequeño corresponda un cambio extremadamente grande de la capacidad (aproximándose a infinito).

Del precedente análisis se desprenden varios aspectos de los voltímetros electrostáticos. Es evidente que este voltímetro se puede emplear para tensiones continuas o alternas y que el rango de frecuencias sobre el que opera puede ser muy amplio. Por tanto, puede calibrarse en c. c. y la calibración es válida para c. a., pues la deflexión es independiente de la forma de onda de e . La impedancia de entrada del voltímetro, en aplicaciones de c. c., es extremadamente alta, una vez suministrada la carga inicial. Sin embargo, la impedancia de entrada en c. a. que es igual a la reactancia de C , algunas veces deja mucho que desear. Para conseguir alta impedancia en c. a., C debe ser pequeño. Esto tiene la ventaja adicional de reducir el peso del elemento móvil. Pero el par medio se reduce cuando C y su derivada se reducen, y esto agrava la limitación de par inherente a este instrumento. La relación par-peso es bastante menor que en el galvanómetro de d'Arsonval. El par puede aumentarse para un peso dado de las placas móviles disminuyendo el espaciado entre placas, pero hay un límite pasado el cual no puede emplearse este procedimiento. Las tolerancias mecánicas se hacen más difíciles y costosas de conseguir, y la descarga entre placas es más probable cuando la separación entre placas es demasiado pequeña.

Como puede verse, en el diseño de este instrumento hay que considerar varios factores contradictorios. En instrumentos comerciales se han conseguido compromisos satisfactorios, en el rango de los centenares a los miles de voltios, en aplicaciones de c. c. y alta frecuencia.

12-5. Instrumentos de hierro móvil. El par que se produce en un instrumento de hierro móvil procede de las fuerzas magnéticas que ejerce el campo producido por una bobina fija sobre un hierro móvil. Cuando pasa corriente por la bobina se produce una fuerza sobre el elemento móvil de hierro. La autoinducción de la bobina y, por tanto, su energía almacenada cambia a causa de un movimiento del elemento.

Hay varios tipos de instrumentos de hierro móvil de uso común, tales como el de aleta móvil, bobina inclinada y de repulsión (que emplea dos elementos de hierro, uno de los cuales está fijo). Todos estos instrumentos se basan en los mismos principios. Un simple instrumento de hierro móvil, tipo émbolo, mostrado en la Fig. 12-5, será el ejemplo específico, aunque los tipos modernos son superiores en precisión, sensibilidad y características de escala. El émbolo de hierro puede girar alrededor de un eje, contenido por un muelle espiral. La corriente alterna i en la bobina fija produce una fuerza, f , sobre el hierro, que tiende a introducirlo en la bobina, cualquiera que sea el sentido de i . Un indicador unido al émbolo indica su situación angular directamente en una escala, cuando se consigue el equilibrio entre el par medio aplicado y el par recuperador que produce el muelle.

Se puede obtener una expresión del par instantáneo aplicando los principios energéticos anteriormente desarrollados. Si se desprecia la ca-

pacidad parásita, lo cual no está justificado a altas frecuencias, se desprecia la energía almacenada en el campo eléctrico. La energía instantánea almacenada en el campo magnético es, según la Ec. (12-18).

$$W = \frac{1}{2}Li^2 \quad (12-24)$$

donde L es la autoinducción de la bobina en la cual se mueve el émbolo. El par instantáneo se obtiene fácilmente a partir de esta expresión de la energía, manteniendo i constante y permitiendo al émbolo realizar un pequeño desplazamiento angular $d\theta$. La Ec. (12-11) puede aplicarse, usando el signo más.

$$T_\theta = + \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)_i = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial \theta}. \quad (12-25)$$

El par instantáneo es función del cuadrado de la corriente instantánea y tendrá, por tanto, un valor medio distinto de cero. En la práctica el

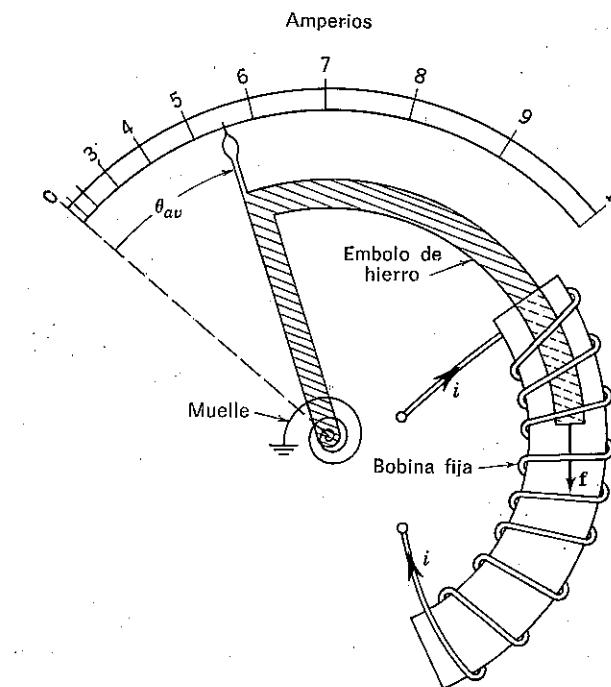


FIG. 12-5. Instrumento de hierro móvil.

par es una función más complicada de la corriente, lo que se deduce de la Ec. (12-25). La autoinducción L no depende solo de θ , sino también

de la corriente, a causa de la presencia de un material ferromagnético. Por otra parte, la presencia de corrientes de Foucault en el émbolo de hierro introduce factores adicionales que dependen de la frecuencia, y limitan la utilización del instrumento.

El par medio es

$$T_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T T_\theta dt = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial \theta} \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial \theta} I_{rms}^2 \quad (12-26)$$

Obsérvese que la integración indicada representa, por definición, el cuadrado del valor eficaz de la corriente de la bobina. Por tanto, dentro de los errores de despreciar la dependencia de L con la corriente, el par medio depende del valor eficaz de la corriente en la bobina para cualquier forma de onda de la corriente. Sin embargo, en este instrumento hay error de forma de onda, debido a la no linearidad del hierro. Además los efectos de histéresis llegan a ser algo molestos en las aplicaciones en c. c. En consecuencia, hay que esperar que la calibración en c. c. no sirva con precisión para corriente alterna. Se encontrarán discrepancias de unos pocos por ciento en los instrumentos típicos.

La ley de deflexión se obtiene introduciendo el par medio en la Ecuación (12-4).

$$\theta_{av} = \frac{T_{av}}{S} = \frac{1}{2S} \frac{\partial L}{\partial \theta} I_{rms}^2 = \frac{1}{K} I_{rms}^2 \quad (12-27)$$

donde K , la «constante» del instrumento, es una función complicada de θ y algo depende de la corriente que atraviesa L y de su frecuencia. Aunque θ_{av} es proporcional a I_{rms}^2 , las características de escala no son necesariamente de ley cuadrática, pues dependen también de K . Si L es una constante por K es aproximadamente constante y resulta una escala de ley cuadrática. Este es un tipo de escala más bien limitado, como se ve en la Fig. 12-5. Por medio de un diseño adecuado de aletas en el hierro se puede conseguir una escala uniforme, especialmente en las regiones superiores de la escala, haciendo a $\partial L/\partial \theta$ una función inversa de I_{rms} . La compresión hacia el cero de la escala es inevitable, pues $\partial L/\partial \theta$ no puede hacerse infinita al aproximarse I_{rms} a cero.

Los instrumentos de hierro móvil son económicos, sólidos y capaces de una precisión mejor del 1 por 100 en el rango de frecuencias de alimentación. Aunque están sujetos a pequeños errores de forma de onda y susceptibles a campos magnéticos parásitos externos, se usan mucho en aplicaciones de alimentación en c. a. Se pueden construir voltímetros añadiendo una resistencia en serie. Sin embargo, como L es grande el aumento de la reactancia de la bobina con la frecuencia produce un error importante. Puede eliminarse parcialmente, extendiendo el rango de frecuencias hasta dos o tres mil ciclos por segundo, shuntando parte de la

resistencia con un condensador C . Al aumentar la frecuencia el aumento de la reactancia inductiva de L se anula con la disminución de la reactancia capacitiva de C . Esto tiende a mantener constante la impedancia total en serie sobre un rango limitado de frecuencias. En la Sec. 12-11 se discute cuantitativamente una compensación de frecuencia similar, para un caso más exacto, en el que hay que minimizar el ángulo de fase.

12-6. Electrodinamómetro. El electrodinamómetro es particularmente interesante, pues tiene dos circuitos independientes, lo que permite su uso en numerosas aplicaciones, tales como amperímetros, voltímetros, vatímetros y multímetros. El par producido en este instrumento procede de las fuerzas magnéticas entre bobinas que conducen corrientes, una de las cuales es giratoria. (Algunos instrumentos poseen dos bobinas móviles.) Puede pensarse, cualitativamente, que es un galvanómetro de d'Arsonval cuyo imán permanente ha sido remplazado por un electroimán. Una bobina fija, dividida en dos porciones, produce el campo en el volumen que ocupa la bobina móvil.

En la Fig. 12-6 aparece una representación esquemática del dispositivo. Una idea más real de las bobinas y particularidades mecánicas se ve en la Fig. 12-7. La bobina fija C consta de dos arrollamientos que pro-

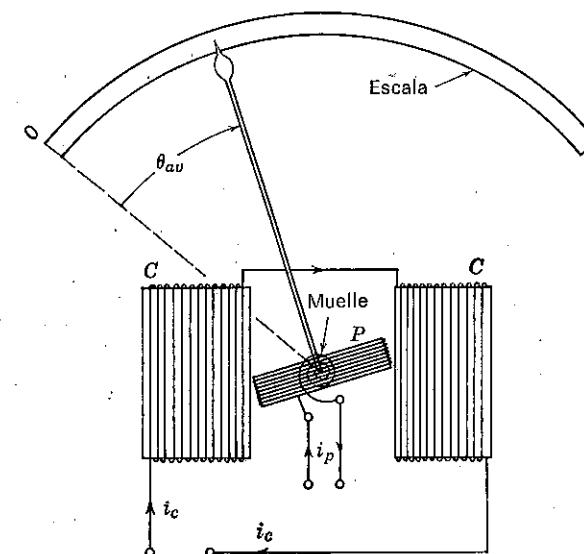


FIG. 12-6. Instrumento electrodinámometro.

ducen un campo moderadamente uniforme en el alrededor de la bobina móvil P . Se usan los símbolos C para la bobina fija, y P para la móvil, a causa de que en las aplicaciones vatímetricas se denomina a la bobina fija la bobina de corriente y a la móvil de potencial. La interacción del

campo producido por la bobina fija C con la corriente que atraviesa la bobina P produce un par, como en el galvanómetro de d'Arsonval. El par es contrarrestado por muelles en espiral que sirven además como conductores de corriente para la bobina móvil. Un indicador unido rígidamente a la bobina giratoria indica directamente su situación angular en una escala que puede ser calibrada directamente en amperios, voltios, vatios u otras cantidades, según las condiciones en que se energicen las bobinas independientes.

Puede verse, cualitativamente, que el instrumento es capaz de producir un par medio no nulo, cuando se usa con una corriente alterna, a pesar de las analogías con el galvanómetro de d'Arsonval. Por ejemplo, si la bobina fija y la móvil se conectan en serie, el campo producido por la bobina fija se invierte al mismo tiempo que lo hace la corriente P , de aquí que el par instantáneo permanezca unidireccional.

La expresión del par instantáneo puede determinarse por el método energético en función de la inductancia mutua entre las bobinas fija y móvil. El campo eléctrico entre las bobinas puede despreciarse aunque puede producir un error apreciable si existe una gran diferencia de potencial entre las bobinas. Entonces la energía almacenada en el campo magnético viene dada por la Ec. (12-18).

$$W = \frac{1}{2}L_c i_c^2 + \frac{1}{2}L_p i_p^2 + M i_c i_p \quad (12-28)$$

donde L_c y L_p son las autoinducciones de las bobinas C y P , respectivamente, y M es la inductancia mutua entre ellas. El par instantáneo se

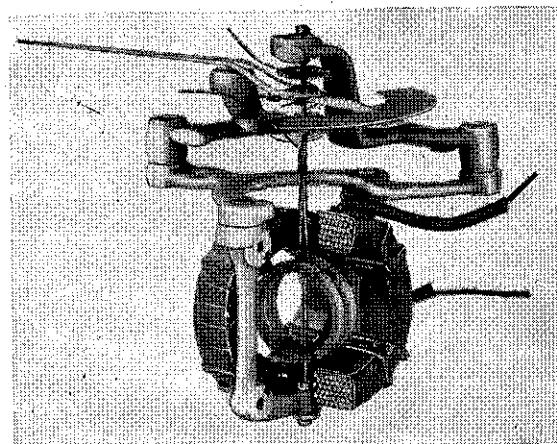


FIG. 12-7. Instrumento electrodinámico. (Cortesía de la Gen. Elec. Company.)

obtiene fácilmente manteniendo constantes i_c e i_p mientras se permite realizar a P un desplazamiento infinitesimal $d\theta$. Usando la Ec. (12-11)

se llega a que el par instantáneo es

$$T_\theta = + \frac{\partial W}{\partial \theta} = i_c i_p \frac{\partial M}{\partial \theta} \quad (12-29)$$

El par instantáneo es proporcional al producto de las dos corrientes. Si las bobinas se conectan en serie el par instantáneo es proporcional al cuadrado de la corriente en el instrumento. Este y otros casos especiales se tratarán después.

El par medio, en función de i_c o i_p es

$$T_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T T_\theta dt = \frac{\partial M}{\partial \theta} \frac{1}{T} \int_0^T i_c i_p dt \quad (12-30)$$

y la ley de deflexión media es

$$\theta_{av} = \frac{T_{av}}{S} = \frac{1}{S} \frac{\partial M}{\partial \theta} \frac{1}{T} \int_0^T i_c i_p dt = \frac{1}{KT} \int_0^T i_c i_p dt \quad (12-31)$$

La «constante» del instrumento, K , es una función de $\partial M / \partial \theta$. Por tanto, el diseño de la bobina que determina la característica $M - \theta$ es un factor importante para determinar las características de escala.

Como el galvanómetro de d'Arsonval no precisaba corriente para producir el campo existente en la región de la bobina móvil, es obvio que el electrodinámometro requerirá más potencia para operar. Además de densidad del flujo magnético que produce la bobina fija es mucho menor que la que se consigue con imanes permanentes, de modo que la sensibilidad es menor. Son desventajas considerables del instrumento. También es más costoso, pues las bobinas deben diseñarse y manufacturarse con cuidado para conseguir unas características de escala prescritas. En otras palabras, la función M de θ se debe controlar con exactitud.

No obstante, el electrodinámometro tiene muchas aplicaciones, la más conocida el vatímetro. Desde el punto de vista de las medidas es tan importante como instrumento de transferencia, como se describe en la sección siguiente. Las aplicaciones del instrumento quedan confinadas en el rango de baja frecuencia, extendiéndose sus posibilidades hasta varios miles de ciclos por segundo, si se diseña con cuidado. Las principales limitaciones en alta frecuencia se deben a la capacidad parásita entre las bobinas, parte de la cual varía con la posición angular de la bobina móvil. Además las corrientes de Foucault que se producen en los objetos metálicos próximos llegan a ser engorrosas a altas frecuencias. El instrumento es sensible a los campos magnéticos parásitos externos, a causa de que el campo fijo no es muy intenso; por eso se encierra normalmente dentro de una protección magnética laminada.

12-7. Amperímetros y voltímetros electrodinámicos. El electrodinámometro se puede usar como amperímetro conectando en serie las bobinas fija y móvil, como indica la Fig. 12-8. Se puede añadir una resistencia fija en serie para convertir este amperímetro en voltímetro. Cuando las corrientes instantáneas de las bobinas son iguales, $i_c = i_p = i$, la ley de deflexión media de la Ec. (12-31) queda

$$\theta_{av} = \frac{1}{S} \frac{\partial M}{\partial \theta} \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{K} I_{rms}^2 \quad (12-32)$$

La deflexión media es proporcional al cuadrado del valor eficaz de la corriente alterna i , cualquiera que sea su forma.

La operación con corrientes alternas en frecuencias de alimentación se afecta muy poco por capacidades parásitas y efectos de corrientes de Foucault en un instrumento bien diseñado. Por tanto, la constante del instrumento, K , es prácticamente igual para corriente alterna y continua. En consecuencia, el amperímetro electrodinámico se puede usar como instrumento de transferencia para calibrar instrumentos de c. a. en función de patrones de c. c., usando el electrodinámometro como paso intermedio. Esta es su aplicación más importante. La escala del electrodinámometro puede calibrarse en corriente continua por comparación directa con instrumentos precisos de c. c. Esta calibración permanece con buena precisión para frecuencias de alimentación. Por tanto, la precisión en c. c. se puede transferir fácilmente a corriente alterna vía amperímetro electrodinámico, que se puede comparar directamente con instrumentos de c. a.

Una escala de ley cuadrática tiene limitado uso en pequeñas deflexiones, de modo que las bobinas del amperímetro y voltímetro electrodinámico se diseñan de modo que se consiga una escala tan uniforme como sea posible. Se puede realizar una característica $M - \theta$ que proporcione un buen grado de uniformidad en las porciones altas de la escala. Es inevitable una compresión en las lecturas bajas de la escala, pues $\partial M / \partial \theta$ no puede hacerse infinita cuando θ tiende a cero.

Como las corrientes se proporcionan a la bobina móvil a través de los muelles recuperadores, hay un límite superior (alrededor de 0,2 amp) pasado el cual es impracticable la disposición en serie de la Fig. 12-8. Se pueden construir amperímetros de alta corriente por medio de shunts adecuados. Estos shunts son complicados, pues se precisa que las corrientes en las bobinas se mantengan en fase en todas las frecuencias de aplicación del instrumento. Los shunts hay que diseñarlos de modo que se consiga el mismo desfase en ambas bobinas. Como voltímetro la resistencia en serie debe ser grande en comparación con la impedancia total de las bobinas conectadas en serie, pues la reactancia es función de la frecuencia. Especialmente es importante a causa de que la autoinducción

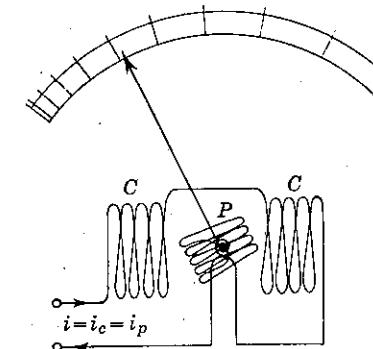


FIG. 12-8. Amperímetro electrodinámico.

equivalente de las bobinas conectadas en serie es función de M y, por tanto, de θ .

12-8. Principios del vatímetro electrodinámico. Uno de los usos más comunes del electrodinámometro es la medida de potencia. Aunque sujeto a errores sistemáticos, puede usarse para indicar potencia en c. a. y c. c. para cualquier forma de onda de intensidad y voltaje, no estando restringida a aplicaciones sinusoidales.

Supóngase que se hace la corriente en la bobina fija, i , igual a la corriente que pasa por una impedancia de carga cuya potencia hay que medir. Supóngase, asimismo, que la corriente que atraviesa la bobina móvil es proporcional a la tensión en la carga e . Esto se puede conseguir conectando una resistencia fija R_p en serie con la bobina móvil y situando esta combinación en paralelo con la carga. Entonces la corriente en la bobina móvil será $i_p = e/R_p$. No pueden realizarse simultáneamente ambas condiciones de corriente. Si así fuera, la ley de deflexión media sería

$$\theta_{av} = \frac{1}{S} \frac{\partial M}{\partial \theta} \frac{1}{T} \int_0^T i_c i_p dt = \frac{1}{SR_p} \frac{\partial M}{\partial \theta} \frac{1}{T} \int_0^T ie dt = \frac{1}{KR_p} P_{av} \quad (12-33)$$

Resulta que si $i_c = i$, e i_p es proporcional a e , la deflexión media es proporcional a la potencia media en la carga para cualquier forma de onda. Recordemos del Cap. 2 que la definición de potencia media es

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T ei dt$$

Obsérvese también que la constante K del instrumento es la misma para cualquier forma de onda. Por consiguiente, la escala del vatímetro se puede calibrar directamente en vatios en el caso de c. c. y esta calibración

será válida para cualquier forma de onda, dentro de las limitaciones de frecuencia del instrumento.

Las características de escala, en vatios, pueden hacerse uniformes, pues $\partial M / \partial \theta$ debe ser esencialmente constante para conseguir una escala uniforme, en lugar de ser inversamente proporcional a la cantidad a medir, como ocurría en los voltímetros y amperímetros. Cuando el eje de la bobina móvil forma un ángulo de 90° con el eje de la bobina fija, la inductancia mutua es cero. Esta orientación puede hacerse coincidir con la deflexión media del vatímetro. Con un diseño adecuado de la bobina se puede conseguir que la inductancia mutua varíe linealmente con el ángulo a ambos lados de $M = 0$ en un rango considerable, como indica la Fig. 12-9. En consecuencia, la escala del vatímetro es bastante uniforme sobre una gran porción de su amplitud alrededor del centro

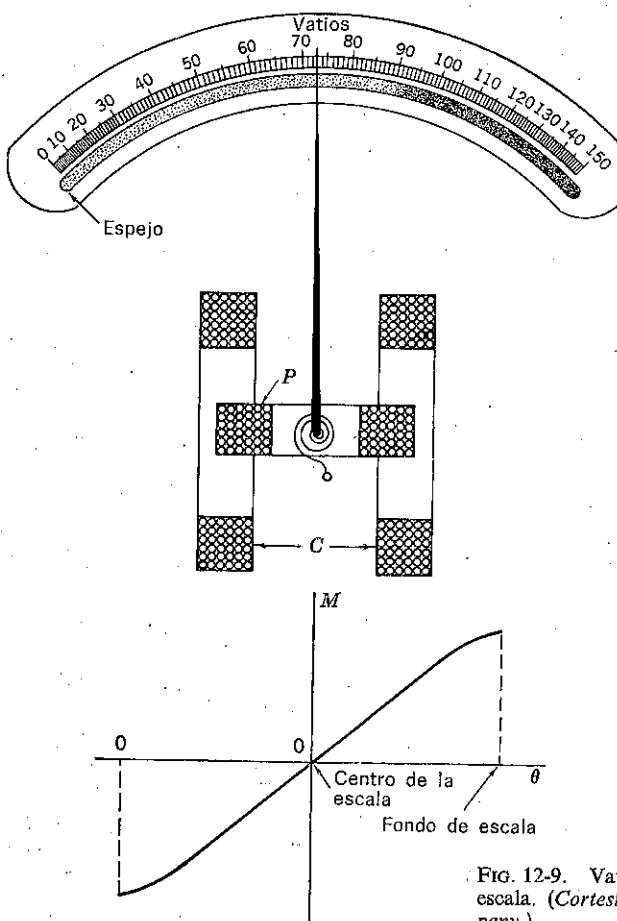


FIG. 12-9. Vatímetro electrodinámico y escala. (Cortesía de la Gen. Elec. Company.)

de la escala. Una escala típica es la de la Fig. 12-9. Cuando el eje de la bobina móvil se aproxima al eje de la bobina fija, el cambio de M para un cambio dado de θ disminuye, y esto produce un ligero agrupamiento de las divisiones de la escala en los extremos. Desplazando la orientación inicial de la bobina móvil se puede eliminar el amontonamiento de la escala en uno de los extremos. El diseño de las bobinas y escala resultante representa un compromiso de ingeniería entre la excursión total del indicador y la proporción en que se sacrifica la legibilidad. En cualquier caso las características de escala son superiores a las de un voltímetro o amperímetro electrodinámico.

La deflexión del vatímetro puede expresarse en función de lecturas de la escala. Sea P_r la lectura del vatímetro en vatios. P_r viene dada en forma integral en función de las corrientes de las bobinas según la Ec. (12-33).

$$P_r = KR_p \theta_{av} = \frac{R_p}{T} \int_0^T i_o i_p dt \quad (12-34)$$

donde KR_p es el factor de escala. Esta formulación es exactamente igual, en principio, a la usada para las lecturas de escala en el caso de los instrumentos rectificadores de la Sec. 11-10.

12-9. Errores inherentes a la conexión vatimétrica. El conseguir corrientes apropiadas que produzcan una deflexión proporcional a la potencia media en la carga, P_{av} , es difícil, como se indica en la Fig. 12-10 para el caso sencillo de una carga resistiva R . Con la conexión A, la corriente en la bobina móvil, P , es proporcional a la tensión de carga e , como se desea. Sin embargo, la corriente en la bobina fija, C , incluye la corriente de carga, i , y la corriente que pasa por R_p , y, por tanto, es mayor. Con la conexión B, la corriente en la bobina fija es igual a la corriente de carga, como se desea. Pero la corriente que atraviesa la bobina móvil es demasiado grande, pues la caída de tensión en la combinación en serie excede a e en la caída de tensión en la bobina fija. Estas dificultades in-

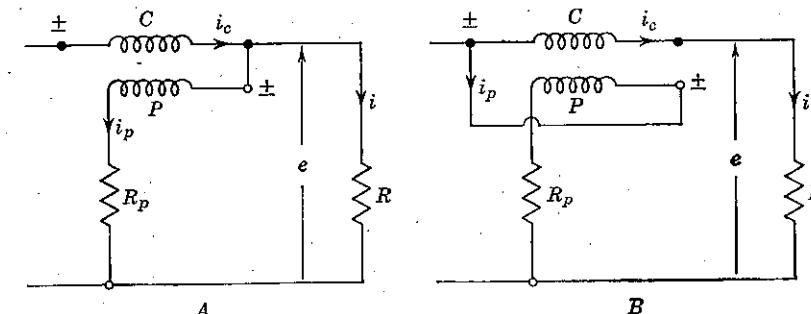


FIG. 12-10. Conexiones de dos vatímetros.

herentes son esencialmente iguales a las del método de voltímetro y amperímetro de la Sec. 5-6.

Se pueden analizar fácilmente las dos conexiones si se desprecia la reactancia de las bobinas del vatímetro. Sea R_c la resistencia de la bobina fija, y supóngase que R_p incluye la resistencia de la bobina móvil. En la conexión A las corrientes y voltajes están relacionados por

$$e = iR = i_p R_p \quad i_c = i + i_p = i \left(1 + \frac{R}{R_p}\right)$$

Las lecturas del voltímetro se obtienen aplicando la Ec. (12-34).

$$P_r = \frac{R_p}{T} \int_0^T i \left(1 + \frac{R}{R_p}\right) \frac{e}{R_p} dt = \frac{1}{T} \int_0^T ie dt + \frac{R_p}{T} \int_0^T i_p^2 dt$$

Por tanto, $P_r = RI_{\text{rms}}^2 + R_p I_{\text{rms}}^2 = P_{av} + P_p$ (12-35)

donde P_p es la potencia media disipada en el circuito de la bobina móvil. Por consiguiente, la lectura del voltímetro excede a la potencia de carga en P_p .

Con la conexión B se obtienen las siguientes relaciones a partir de la Fig. 12-10:

$$e = iR \quad i_c = i \quad i_p = \frac{e + iR_c}{R_p} = \frac{i}{R_p} (R + R_c)$$

En este caso la lectura del voltímetro viene dada por

$$P_r = \frac{R_p}{T} \int_0^T \frac{i^2}{R_p} (R + R_c) dt = \frac{R + R_c}{T} \int_0^T i^2 dt$$

Por tanto, $P_r = RI_{\text{rms}}^2 + R_c I_{\text{rms}}^2 = P_{av} + P_c$ (12-36)

donde P_c es la potencia media disipada en la bobina fija. La lectura del voltímetro es de nuevo superior a la potencia de carga, en este caso en una cantidad igual a P_p .

Las conclusiones de las Ecs. (12-35) y (12-36) son exactamente las mismas para cargas reactivas (ver Prob. 12-13).

Una pregunta natural es qué conexión se debe usar. Aunque P_p es usualmente mayor que P_c en un instrumento comercial, se prefiere la conexión A cuando la impedancia de entrada de la fuente de potencia es pequeña en comparación con la impedancia de carga. Hay varias razones para esta elección. Una, que con pequeño R_c y una tensión aplicada prácticamente constante, la pérdida de potencia en R_p es constante, variando

las condiciones de la carga. Por tanto, se puede aplicar una corrección constante a lecturas diferentes que resultan al variar la carga. La corrección se puede calcular a partir del conocimiento de R_p (ordinariamente proporcionado con el instrumento) y del conocimiento de la tensión aplicada. La corrección se puede establecer también desconectando temporalmente la carga y observando la lectura del vatímetro, que aproximadamente es igual a P_p . Esta lectura no corresponde exactamente a la pérdida de potencia en R_p en condiciones de carga, a causa del cambio de la caída de tensión en R_c en carga, y del cambio en la tensión que produce la caída en la impedancia interna de la fuente. Sin embargo, la lectura sin carga es frecuentemente aceptable aproximación a la práctica, especialmente si la corrección es pequeña.

Con la conexión B, la corrección P_c es usualmente menor que con la conexión A. Por tanto, se prefiere esta conexión si no se realizan correcciones.

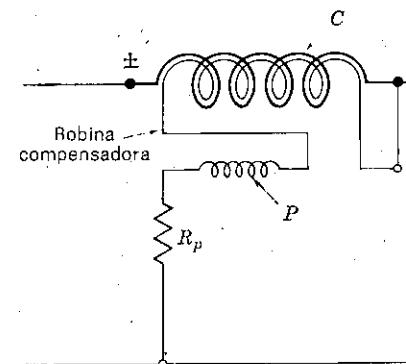


FIG. 12-11. Vatímetro compensado.

En este caso la lectura del voltímetro viene dada por

ciones, y si se realizan las medidas variando el voltaje. Es engoroso aplicar correcciones en el caso de la conexión B, pues P_c es función de la corriente de carga. Además, incluso siendo R_c pequeña puede variar apreciablemente a causa del calentamiento de la bobina fija (que puede conducir corrientes elevadas) y esto complica el cálculo de conexiones exactas. Finalmente en las condiciones ordinarias de tensión constante no hay medios de medir P_c directamente a partir de la lectura del vatímetro.

Un vatímetro compensado usa una bobina auxiliar para eliminar la necesidad de conseguir las lecturas con la conexión A. La bobina de compensación, representada esquemáticamente en la Fig. 12-11, se conecta en serie con la bobina P, pero se arrolla íntimamente con la bobina fija. El campo que produce la bobina de compensación se opone al que produce la bobina C, en una cantidad que reduce la lectura en P_p . Entonces, un vatímetro compensado es capaz de indicar la potencia de carga real,

sin corrección. La bobina de compensación se puede comprobar desconectando la carga. Si la compensación es correcta, la indicación del vatímetro será cero, en lugar de P_p , del caso no compensado.

La bobina fija del vatímetro se designa también como la bobina de *corriente* o la bobina *serie*, a causa del modo de conexión a la carga. Análogamente la bobina móvil se conoce como la bobina *potencial* o bobina *shunt*. La bobina móvil recibe la corriente a través de los muellés recuperadores, y esto sitúa un límite práctico superior a la corriente que puede pasar por esta bobina. Por este motivo se usa como la bobina shunt, y R_p sirve para limitar la corriente a valores permisibles para el voltaje de operación particular del instrumento. La bobina fija es capaz de llevar mucha más corriente y, en consecuencia, se usa para conducir la corriente de carga. Ordinariamente los terminales de la bobina de corriente en un instrumento real son físicamente mayores que los terminales de tensión. Se designan con grandes círculos en los esquemas de vatímetro. Como ambas bobinas pueden ser dañadas por corrientes excesivas, se acostumbra especificar los límites de corriente en la bobina de corriente y los límites de tensión en la bobina de potencia. No deben sobreponerse para no exponer el instrumento a un daño permanente y se deben comprobar con cuidado. Es posible que la lectura del vatímetro caiga dentro del rango del instrumento, aunque se hayan sobrepasado los límites de las bobinas.

El grueso de la caída de potencial en la bobina shunt ocurre en R_p . Por tanto, si R_p se conectara directamente al terminal de la bobina de corriente habría una tensión considerable entre las bobinas. Esta tensión produce un campo eléctrico intenso entre las bobinas, a causa de su proximidad física. Las fuerzas asociadas afectarán a la calibración del instrumento. Para evitar esta fuente de error la bobina de potencial debe conectarse siempre directamente a uno de los terminales de corriente, como en la Fig. 12-10. El terminal del circuito de potencial que se conecta directamente a la bobina P , en el interior del instrumento, se designa con el símbolo \pm , según una convención de fabricantes. La conexión interna de la bobina de corriente es de tal forma que se obtenga una lectura en la escala en medidas monofásicas conectando el terminal de corriente señalado \pm al final de línea como indica la Fig. 12-10.

12-10. Análisis del vatímetro en operación sinusoidal. Merece la pena obtener la expresión de la lectura del vatímetro en el caso particular de un voltaje sinusoidal aplicado a una impedancia de carga pasiva, pues son las condiciones más ordinarias de uso del vatímetro. Supóngase las corrientes en las bobinas del vatímetro sinusoidales, y dadas por las expresiones

$$\begin{aligned} i_c &= \operatorname{Re}\{I_c e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{I_c e^{j\phi_c} e^{j\omega t}\} = I_c \cos(\omega t + \phi_c) \\ i_p &= \operatorname{Re}\{I_p e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{I_p e^{j\phi_p} e^{j\omega t}\} = I_p \cos(\omega t + \phi_p) \end{aligned}$$

donde I_c e I_p son los valores de pico de las corrientes, y los ángulos de fase ϕ_c y ϕ_p son arbitrarios. El valor medio del producto de estas dos corrientes se ha obtenido en la Sec. 2-8 con otros símbolos.

$$\frac{1}{T} \int_0^T i_c i_p dt = \frac{1}{2} I_c I_p \cos(\phi_c - \phi_p) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{I_c I_p^*\}$$

Sustituyendo en la Ec. (12-34) para obtener la expresión de la lectura del vatímetro

$$P_r = \frac{1}{2} R_p I_c I_p \cos(\phi_c - \phi_p) = \frac{1}{2} R_p \operatorname{Re}\{I_c I_p^*\} \quad (12-37)$$

En la primera forma se puede dividir el factor 2 en el producto de dos factores $\sqrt{2}$. En otras palabras, la lectura del vatímetro viene dada por R_p por el producto de los valores eficaces de las corrientes que atraviesan las bobinas multiplicado por el coseno del ángulo de desfase entre ellas. La segunda forma en función de corrientes complejas es más útil para el análisis de las diversas conexiones del vatímetro.

El vatímetro de la Fig. 12-12 está conectado para medir la potencia en una carga de impedancia compleja Z , usando la conexión conven-

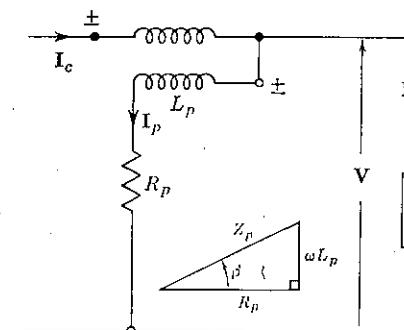


FIG. 12-12. Aplicación del vatímetro a medidas monofásicas.

cional en la que se incluye en la lectura la potencia en R_p . La reactancia de la bobina de potencia, ωL_p , es despreciable frecuentemente, pero se incluye aquí para mayor generalidad. Las diversas corrientes, voltajes e impedancias se designan por cantidades complejas. El análisis completo se puede realizar algebraicamente en lugar de usar los diagramas de fases.

El voltaje complejo de carga, V , de ángulo de fase ψ arbitrario, es

$$V = V e^{j\psi} = IZ = IZ e^{j\alpha} = I_p Z_p = I_p Z_p e^{j\beta}$$

donde α es el ángulo de fase de la impedancia de fase y β es el ángulo de fase del circuito de potencial.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega L_p}{R_p}$$

La corriente en la bobina fija es $I_c = I + I_p$. La lectura del vatímetro se obtiene a partir de la Ec. (12-37).

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{1}{2} R_p \operatorname{Re} \{I_c I_c^*\} = \frac{1}{2} R_p \operatorname{Re} \{I I_p^* + I_p I_p^*\} \\ &= \frac{1}{2} R_p I_p^2 + \frac{1}{2} R_p \operatorname{Re} \{I I_p^*\} = P_p + \frac{1}{2} R_p \operatorname{Re} \{I I_p^*\} \end{aligned} \quad (12-38)$$

Como se esperaba una porción de la lectura se debe a la potencia P_p , disipada en R_p .

El segundo término de la Ec. (12-38) se puede evaluar usando

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V e^{j\psi}}{Z e^{j\alpha}} = \frac{V}{Z} e^{j(\psi-\alpha)} \quad I_p^* = \frac{V^*}{Z_p^*} = \frac{V e^{-j\psi}}{Z_p e^{-j\beta}} = \frac{V}{Z_p} e^{j(\beta-\psi)}$$

Se obtiene entonces

$$\frac{1}{2} R_p \operatorname{Re} \left\{ \frac{V^2}{Z Z_p} e^{j(\beta-\alpha)} \right\} = \frac{1}{2} R_p \frac{V^2}{Z Z_p} \cos(\beta - \alpha) = \frac{1}{2} V I \frac{R_p}{Z_p} \cos(\alpha - \beta)$$

Obsérvese que el ángulo de fase de V ha desaparecido. Por tanto, la Ec. (12-38) queda

$$P_r = P_p + \frac{1}{2} V I \frac{R_p}{Z_p} \cos(\alpha - \beta) \quad (12-39)$$

Si se desprecia la reactancia del circuito de potencial $\omega L_p = 0$, $Z_p = R_p$ y $\beta = 0$. La Ec. (12-39) queda

$$P_r = P_p + \frac{1}{2} V I \cos \alpha = P_p + P_z \quad \omega L_p = 0 \quad (12-40)$$

La lectura es igual a la potencia de carga, P_z , más la potencia disipada en el circuito de potencial, en este caso especial.

Si ωL_p no es despreciable introduce un error de lectura sobre el término P_p . El segundo término de la Ec. (12-39) queda

$$\frac{1}{2} V I \frac{R_p}{Z_p} (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \frac{1}{2} \frac{V I R_p}{Z_p^2} (R_p \cos \alpha + \omega L_p \sin \alpha)$$

con $\cos \beta = R_p/Z_p$ y $\sin \beta = \omega L_p/Z_p$. Con $Z_p^2 = R_p^2 + (\omega L_p)^2$ se

puede escribir también

$$\frac{1}{2} V I \left[\frac{R_p^2 \cos \alpha}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} + \frac{R_p \omega L_p \sin \alpha}{R_p^2 + (\omega L_p)^2} \right] \quad (12-41)$$

En los casos prácticos de interés ωL_p es lo suficientemente pequeño comparado con R_p como para permitir que $(\omega L_p)^2$ se desprecie con respecto a R_p^2 en el denominador de la Ec. (12-41). Aplicando esta aproximación, y sumando el término P_p , el resultado final de la lectura del vatímetro queda

$$P_r \approx P_p + P_z + \frac{1}{2} V I \frac{\omega L_p}{R_p} \sin \alpha \quad (\omega L_p)^2 \ll R_p^2 \quad (12-42)$$

El término de error adicional que contiene $\omega L_p/R_p = \operatorname{tg} \beta$ no solo depende del ángulo de fase del circuito de potencial, sino también del ángulo de fase α de la impedancia de carga. Si Z es una carga inductiva, α se halla en el primer cuadrante y el término de error es positivo, es decir, la lectura es superior que en el caso de $\omega L_p = 0$. Si la carga es positiva, α se encuentra en el cuarto cuadrante y el término de error es negativo; es decir, que la lectura es menor que en el caso de que $\omega L_p = 0$. Para una carga resistiva el término de error es cero, pero el resultado exacto de la Ec. (12-41) es aún ligeramente dependiente de ωL_p como se observa de

$$P_r = P_p + \frac{P_z}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = P_p + P_z \cos^2 \beta \quad \alpha = 0 \quad (12-43)$$

El error adicional depende sensiblemente de la carga y puede contribuir con una significante porción de la lectura en cargas altamente reactivas. Al aproximarse el ángulo de fase de la carga a 90° , P_z tiende hacia cero, mientras que el término adicional de error permanece finito. Para ilustrar, supónganse las siguientes condiciones que pertenecen a una cierta medida:

$$\begin{aligned} V &= 140 \text{ voltios de pico} & \operatorname{tg} \beta &= 0,02 \\ I &= 5 \text{ amperios de pico} & R_p &= 1.000 \text{ ohmios} \\ \alpha &= 78^\circ \end{aligned}$$

Como el ángulo de fase del circuito de potencial es pequeño, $\omega L_p \approx 0,02 R_p$, y

$$Z_p = R_p \sqrt{1 + \left(\frac{\omega L_p}{R_p} \right)^2} \approx R_p$$

Por tanto, la potencia perdida en R_p es

$$P_p \approx \frac{1}{2} \frac{V^2}{R_p} = \frac{19.600}{2.000} = 9,8 \text{ vatios}$$

La potencia de carga es

$$P_z = \frac{1}{2} VI \cos \alpha = \frac{1}{2}(140)(5)(0,208) = 72,8 \text{ vatios}$$

El término adicional de error debido al circuito de potencial es

$$\frac{1}{2} VI \tan \beta \sin \alpha = \frac{1}{2}(140)(5)(0,02)(0,978) = 6,8 \text{ vatios}$$

Por tanto, la lectura del vatímetro es

$$P_r = 9,8 + 72,8 + 6,8 = 89,4 \text{ vatios}$$

12-11. Compensación de la reactancia de la bobina de potencial. Muchos vatímetros compensan el error que produce la reactancia ωL_p de la bobina de potencial. Un tipo de circuito de compensación aparece en la Fig. 12-13. La resistencia kR , donde k es una constante incluye la resistencia de la bobina P . Al crecer la frecuencia el efecto del condensador C se hace más pronunciado, y tiende a anular el efecto del aumento de ωL_p con la frecuencia. El objetivo es seleccionar valores apropiados de los parámetros de diseño C , R y k para extender el rango de frecuencias en las que la impedancia equivalente se mantiene esencialmente resistiva.

El circuito básicamente es un circuito resonante de baja Q . Se descubren sus posibilidades para esta aplicación examinando la expresión de la impedancia

$$\begin{aligned} Z_p &= kR + j\omega L_p + \frac{R}{1 + j\omega RC} \\ &= kR + \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} + j\omega \left[L_p - \frac{R^2 C}{1 + (\omega RC)^2} \right] \end{aligned} \quad (12-44)$$

Si el producto RC se selecciona de modo que $(\omega RC)^2 \ll 1$ a la mayor frecuencia de interés, para todas las frecuencias más bajas la impedancia es aproximadamente igual

$$Z_p \approx R(k+1) + j\omega(L_p - R^2 C) \quad (\omega RC)^2 \ll 1$$

Si, además, $R^2 C$ se hace igual a L_p , la impedancia se mantiene esencialmente resistiva e igual a $R(k+1)$, siempre que la frecuencia sea lo suficientemente baja como para despreciar $(\omega RC)^2$ frente a 1. Con tal diseño

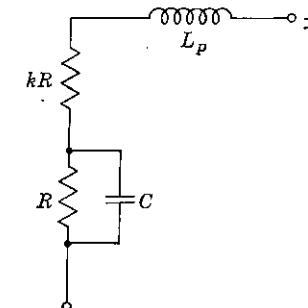


FIG. 12-13. Compensación de la reactancia de la bobina de potencial.

la resistencia R_p que se usa en las discusiones previas puede hacerse igual a $R(k+1)$.

El ángulo de fase de Z_p es el factor crítico que produce errores en el vatímetro, como indica la Ec. (12-42). Sin compensación ($C = 0$), este ángulo de fase viene dado por

$$\tan \beta = \frac{\omega L_p}{R(k+1)} = \frac{\omega L_p}{R_p}$$

Con compensación, el ángulo de fase, β' , se obtiene a partir de la Ec. (12-44).

$$\tan \beta' = \frac{\omega L_p + \omega L_p(\omega RC)^2 - \omega R^2 C}{R(k+1) + kR(\omega RC)^2} \quad (12-45)$$

Si el circuito se diseña de modo que $R^2 C = L_p$, queda

$$\begin{aligned} \tan \beta' &= \frac{\omega L_p(\omega RC)^2}{R(k+1) + kR(\omega RC)^2} \\ \text{Por tanto, } \frac{\tan \beta'}{\tan \beta} &= \frac{(\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2 k/(k+1)} \end{aligned} \quad (12-46)$$

Para $(\omega RC)^2 \ll 1$ es evidente que se produce una considerable reducción del ángulo de fase. Por ejemplo, si $\omega RC = 0,1$ $\tan \beta'$ es solamente un 1 por 100 de $\tan \beta$. Entonces en el ejemplo numérico de la sección precedente un circuito de compensación con $R(k+1) = 1.000$ ohmios reduciría el error adicional de 6,8 vatios a un nivel despreciable de alrededor de 0,07 vatios con $\omega RC = 0,1$.

La reducción del ángulo de fase de Z_p no depende críticamente de k para valores pequeños de ωRC . En la práctica se emplean valores de k considerablemente mayores que 1, primariamente para proteger la bobina P del riesgo de que C tenga un corto circuito. (Ver el Prob. 12-17.)

12-12. Aplicaciones especiales del instrumento electrodinámico. No hay nada especial que restrinja el electrodinamómetro a un uso como vatímetro. Incluso se ha mostrado que hay alguna dificultad para hacer que la lectura corresponda fielmente a la potencia disipada en la carga a la que se conecta el vatímetro. Se describen a continuación algunas ideas para usos de este instrumento distintos de amperímetros, voltímetros o vatímetros.

Si las corrientes en las bobinas son sinusoidales y tienen la misma frecuencia, la deflexión media, usando las Ecs. (12-37) y (12-34) viene dada por

$$\theta_{av} = \frac{1}{2K} I_c I_p \cos(\phi_c - \phi_p) = \frac{1}{2K} \operatorname{Re}\{I_c I_p^*\} \quad (12-47)$$

Como la deflexión media depende del desfase entre las corrientes de las bobinas, se puede considerar la posibilidad de usar este instrumento como fasímetro. Supóngase un voltaje sinusoidal representado por la cantidad compleja E , aplicado a un circuito lineal, como muestra la Fig. 12-14 (a). Se quiere medir el desfase entre E y la corriente de salida del circuito. Sea I_p la corriente de salida del circuito, y aplíquemosla a la bobina P de un instrumento electrodinámico. Alimentemos la bobina C con una corriente I_c , directamente de E . Esta corriente estará en fase con E si R es grande comparada con ωL_c y con la reactancia interna de E . La deflexión del instrumento es proporcional al coseno de la diferencia de fase deseada. La deflexión también depende de la magnitud de las corrientes y esto supone dificultades para calibrar la escala directamente en ángulos de fase. Sin embargo, se pueden usar atenuadores para mantener las corrientes en valores normalizados para los cuales sirve la calibración, midiéndolas con dos amperímetros. Esta disposición aparece en la Fig. 12-14 (b).

Una disposición alternativa más satisfactoria es aplicar la corriente I_c a través de un desfasador de desfase conocido y ajustable, como indica la Fig. 12-14 (c). Cuando el desfasador se ajusta para máxima deflexión del instrumento la diferencia de fase entre E e I_p se puede leer directamente a partir de la posición del desfasador. Este método es obviamente independiente de la calibración del electrodinámometro. Solamente precisa que las corrientes sean lo suficientemente elevadas para dar sensibilidad adecuada al ajuste de fase. El máximo de la función coseno en la Ec. (12-47) es más bien plano, así que la agudeza del ajuste es pobre. Para eliminar este obstáculo el desfasador se puede ajustar a fin de obtener una lectura cero, donde la pendiente de θ_{av} ante el desfase es más abrupta. Esto definirá la posición del desfasador con más precisión, y el ajuste de cero corresponde a corriente desfasada en 90° .

Otra posibilidad es usar el electrodinamómetro como parte de un

frecuencímetro. Supóngase un voltaje sinusoidal $e(t)$, cuya frecuencia hay que medir aplicado a la bobina P , como aparece en la Fig. 12-15.

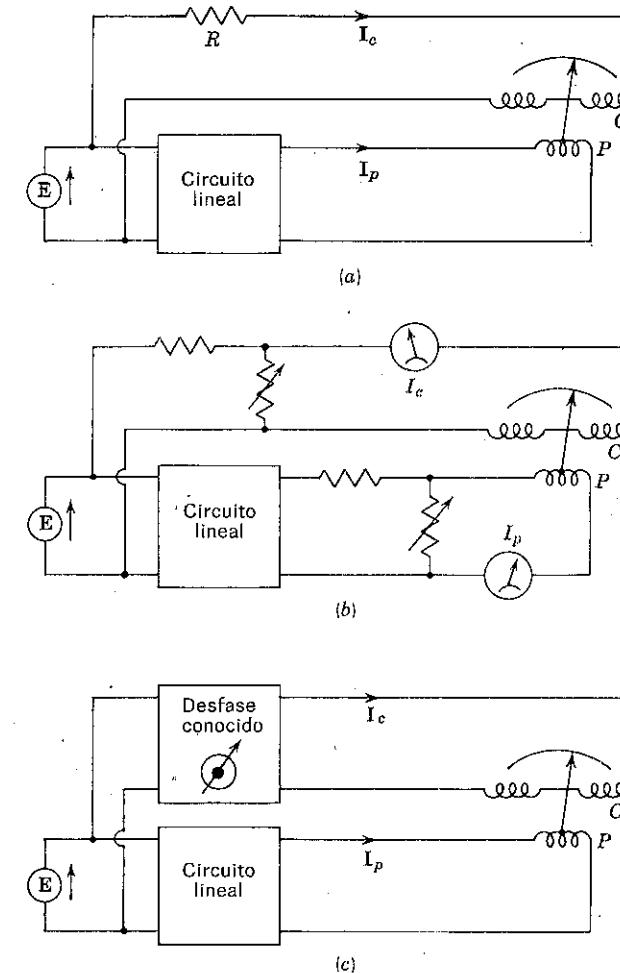


FIG. 12-14. Medida de desfases.

Un oscilador sinusoidal de frecuencia conocida y variable se conecta a la bobina C . Para una frecuencia angular del oscilador dada ω , la deflexión media en un intervalo $t_2 - t_1$ viene dada por

$$\theta_{av} = \frac{1}{K(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} I_c \cos(\omega t + \phi_c) I_p \cos(\omega_1 t + \phi_p) dt \quad (12-48)$$

donde ω_1 es la frecuencia angular desconocida de $e(t)$. Se puede demostrar que θ_{av} es cero para toda $\omega \neq \omega_1$ eligiendo el intervalo $t_2 - t_1$ adecuadamente. Una demostración rigurosa queda fuera del propósito de este texto, pero será útil el siguiente razonamiento cualitativo. Es obvio que si $\omega = \omega_1$, θ_{av} viene dada por la Ec. (12-47) y no es cero, si $\phi_c - \phi_p$ no es un múltiplo impar de $\pi/2$. Por otra parte, se sabe por el Cap. 11 que θ_{av} es cero si ω y ω_1 están armónicamente relacionadas, siendo $t_2 - t_1$ un periodo de la frecuencia más baja. Si ω_1 se desvía ligeramente de ω

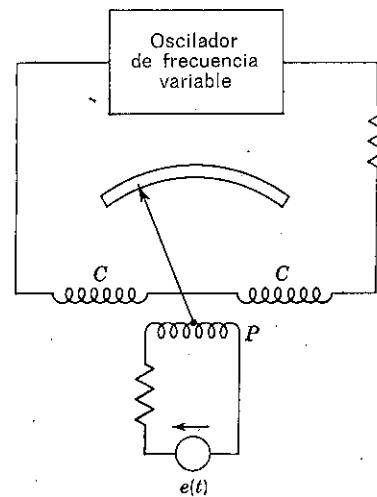


FIG. 12-15. Medidas de frecuencia.

veamos qué sucede con la deflexión que era estacionaria con $\omega = \omega_1$. La deflexión variará lenta y periódicamente de un máximo, pasando por cero, a un mínimo negativo y así sucesivamente. De hecho la oscilación de baja frecuencia del indicador será igual a la diferencia entre ω y ω_1 . El valor medio de θ será cero si $t_2 - t_1$ es un intervalo igual a un periodo de esta baja frecuencia. Con este razonamiento es aparente que la única condición en la que θ_{av} no es cero es $\omega = \omega_1$.

La frecuencia del oscilador se puede ajustar hasta obtener una lectura estacionaria no cero. Entonces $\omega = \omega_1$ y el resultado es independiente de la calibración del electrodinámometro y es tan exacto como la precisión con que se conoce la frecuencia del oscilador. Hay un número infinito de valores de θ_{av} diferentes para $\omega = \omega_1$, que dependen de la diferencia de fase entre las corrientes. Si ω se cambia ligeramente y a continuación vuelve a su valor primitivo, la nueva deflexión estacionaria en general será distinta del primer valor. Entonces, para sintonizar ω a ω_1 , el oscilador se puede ajustar de modo que θ_{av} no solo sea estacionaria, sino también máxima.

La discusión procedente sugiere que el electrodinámometro se puede usar como analizador armónico. Para ilustrar supóngase que $e(t)$ es la onda cuadrada de la Fig. 12-16 y se aplica a la bobina P de la Fig. 12-15. La serie de Fourier de esta onda se obtuvo en la Ec. (11-25). Cuando la frecuencia del oscilador se aproxima a uno de los armónicos de $e(t)$ el indicador comienza a oscilar con pequeña amplitud y alta frecuencia. (Diferencias de frecuencias grandes caen completamente fuera del rango de respuesta del instrumento, a causa del amortiguamiento y gran momento de inercia.) Al acercarse más y más a un armónico particular de $e(t)$ la frecuencia de oscilación del indicador decrecerá mientras aumenta su amplitud de pico. Finalmente cuando el indicador permanece en una deflexión estacionaria, esto significa que la frecuencia del oscilador es igual a la del armónico particular de $e(t)$ alcanzado. Con un ajuste adecuado de la frecuencia del oscilador se puede obtener el valor máximo de θ_{av} . Esto corresponde a corrientes en fase, o sea $\cos(\phi_c - \phi_p) = 1$.

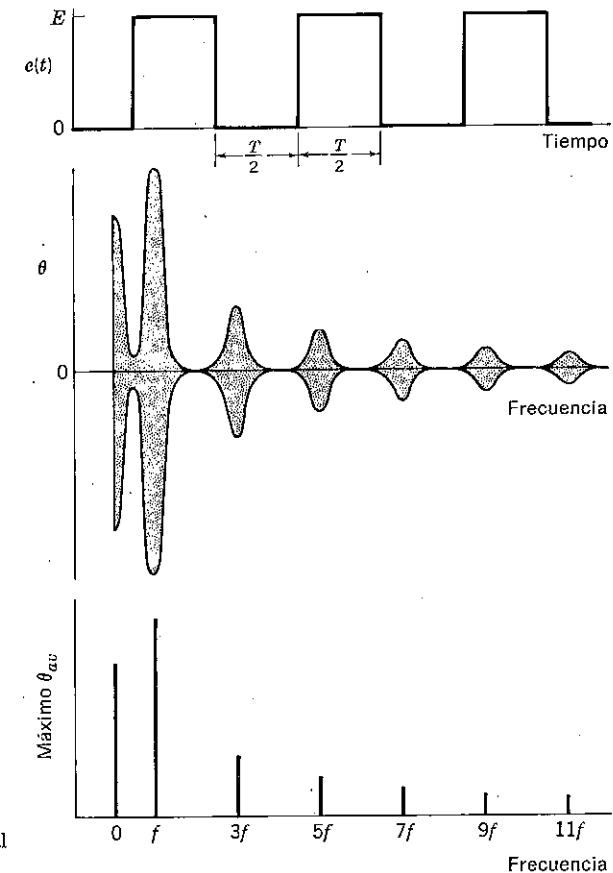


FIG. 12-16. Aplicación al analizador armónico.

Este valor máximo de θ_{av} es proporcional a la amplitud del armónico particular de $e(t)$, suponiendo que los circuitos no son reactivos en todas las frecuencias de operación. Con este procedimiento es evidente que se puede determinar el espectro de amplitud relativa de $e(t)$, como indica la Fig. 12-16. No se obtiene la fase relativa de los armónicos, como ocurre en la mayoría de los analizadores armónicos.

Hay otros usos interesantes de este fascinante instrumento. Se sugiere al estudiioso que critique las dificultades prácticas que pueden presentar estas disposiciones y explore posibilidades adicionales por su cuenta.

PROBLEMAS

12-1 (§ 3). Un condensador de placas paralelas tiene un área de placas de 2 pulg² y una separación de placas de 5 mm. El medio entre las placas tiene una constante dieléctrica de 4. La diferencia de potencial entre las placas es de 100 V. Despreciando el campo circundante, determíñese: a) la carga en cada placa, b) la energía almacenada en el campo eléctrico, y c) la fuerza de atracción entre las placas.

12-2 (§ 3). Dos bobinas circulares de una vuelta de radios r_1 y r_2 , que conducen las corrientes i_1 e i_2 , respectivamente, están separadas por una distancia D , en el aire. Los ejes de las bobinas son coincidentes (esto es, los planos de las bobinas son paralelos y la línea que une los centros de los círculos es perpendicular al plano de las bobinas). Supóngase que $D \gg r_2$ y determíñese una expresión aproximada de la fuerza total producida entre las dos bobinas.

12-3 (§ 4). Un voltaje $e = 100 + 100 \operatorname{sen} 150t$ se aplica a un voltímetro electrostático. Calcúlese la lectura del instrumento.

12-4 (§ 4). El voltímetro electrostático de la Fig. 12-4 tiene seis placas paralelas fijas, espaciadas a intervalos de 4 mm, e intercaladas 5 placas móviles semicirculares que se mueven en planos equidistantes a dos placas fijas, en el aire. El radio de las placas móviles es 4 cm. Despreciando efectos de borde y el espesor de las placas, determinar: a) Ecuación de la ley de deflexión de este voltímetro. b) La deflexión de fondo de escala de los 100 kV eficaces ocurre para $\theta = 100^\circ$ como muestra la Fig. 12-4. Calcúlese el valor numérico de la constante del muelle S .

12-5 (§ 5). La ley de deflexión de un amperímetro de hierro móvil es $I_{rms} = 4\theta_{av}^n$ amp, donde θ está en radianes y n es una constante. Cuando la corriente en el instrumento es cero, la autoinducción es 10 mh. La constante del muelle es $S = 0,16$ newtón-metro (por radián). a) Determíñese la expresión de la autoinducción del instrumento en función de θ y n . b) Con $n = 3/4$ hallar la corriente en el instrumento y deflexión de escala en grados, que corresponde a una autoinducción de 60 mh.

12-6 (§ 5). El amperímetro de hierro móvil de la Fig. 12-5 se convierte en un voltímetro de 0-500 V, 60 cps, añadiendo una resistencia en serie con la bobina, que tiene una autoinducción $L = (0,01 + 0,2\theta)/4\pi$ henrios, θ en radianes. La extensión angular total de la escala es 100°. a) Calcúlese la resistencia total serie del voltímetro. b) Calcúlese el valor de la constante del muelle S . c) Cuando se aplican 250 V al voltímetro, ¿cuál es la deflexión angular? ¿Es mayor o menor que la marca de 5 amp de la escala?

12-7 (§ 5). Un voltímetro de hierro móvil y un voltímetro de pico en diodo (calibrado en voltios eficaces de una onda sinusoidal) se conectan en paralelo. Se aplica un voltaje $E(\operatorname{sen} \omega t + 0,5 \operatorname{sen} 2\omega t)$. El voltímetro de diodo marca 100 V eficaces. ¿Qué indicará el voltímetro de hierro móvil?

12-8 (§ 8). La bobina de corriente de un vatímetro electrodinámico se conecta a una f.e.m. de c. c. de 6 V en serie con una resistencia de 6 ohmios. El circuito de potencial se conecta a través de un rectificador ideal a una f.e.m. sinusoidal de 60 cps de impedancia inter-

INSTRUMENTOS QUE SIGUEN UNA LEY CUADRATICA

na cero y valor de pico 100 V. Despréciese la reactancia de las bobinas del vatímetro $R_p = 1.000$ ohmios. Calcúlese la lectura del vatímetro.

12-9 (§ 8). Un vatímetro electrodinámico no compensado lee 250 vatios cuando circulan corrientes de 1,0 amp y 0,05 amp por las bobinas de corriente y potencial, respectivamente. a) ¿Cuál será la lectura de este vatímetro cuando se aplica una corriente de 10 sen $(377t + 30^\circ) + 5 \operatorname{sen} 1131t$ amp a la bobina de corriente y un voltaje de $500 \cos(377t + 30^\circ) + 800 \operatorname{sen}(754t + 45^\circ)$ V a la bobina de potencial? La inductancia del circuito de potencial es despreciable. b) ¿Cuál es la resistencia del circuito de potencial?

12-10 (§ 8). La onda cuadrada de voltaje de la Fig. 12-16 tiene un valor de pico $E = 100$ V y un periodo $T = 0,01$ seg. Se aplica a la bobina de potencial de un vatímetro electrodinámico. Por la bobina de corriente circula una corriente de $10 \operatorname{sen} 628t$ amp. ¿Cuál será la lectura del vatímetro?

12-11 (§ 9). La onda cuadrada de voltaje de la Fig. 12-16 tiene un valor de pico $E = 50$ V. Se aplica al circuito de la Fig. 12-10 conexión A, donde $R = 500$ ohmios y $R_p = 4.000$ ohmios. Supóngase que la reactancia del vatímetro es despreciable. Calcúlese la lectura del vatímetro.

12-12 (§ 9). Un vatímetro compensado de cero en el centro de la escala se conecta entre una línea de 100 V (eficaces) y una carga resistiva de 100 ohmios. El vatímetro tiene una impedancia de bobina de corriente despreciable, reactancia del circuito de potencial despreciable y preparado para conectar o no la compensación. Determinar la lectura del vatímetro en vatios para cada una de las ocho condiciones indicadas en la tabla. $R_p = 2.000$ ohmios.

Arrollamiento de compensación	Conexión terminal ±	
	Bobina de corriente	Círculo de potencial
a) sin	Línea	Línea
b) con		
c) sin	Línea	Carga
d) con		
e) sin	Carga	Línea
f) con		
g) sin	Carga	Carga
h) con		

En todos los casos el terminal no señalado del circuito de potencial se conecta correctamente al lado de la línea que no contiene la bobina de corriente. El terminal no señalado de la bobina de corriente se conecta de modo que permita el suministro de potencia a la carga en cada caso.

12-13 (§ 10). Se remplaza la carga R del circuito de la Fig. 12-10 por una impedancia arbitraria Z , y e es un voltaje sinusoidal. Despréciese la reactancia de las bobinas del vatímetro. Demostrar que con la conexión A el vatímetro lee de más en una cantidad igual a la disipación en el circuito de potencial; y con la conexión B el vatímetro lee de más en una cantidad igual a la disipación en la bobina C.

12-14 (§ 10). El vatímetro de la Fig. 12-12 tiene una bobina de corriente de impedancia despreciable, $R_p = 5.000$ ohmios y $\omega L_p = 100$ ohmios. ¿Cuál será la lectura en una línea monofásica de 110 V, que suministra potencia a una carga $Z = 100 - j173$ ohmios?

12-15 (§ 10). En el circuito de la Fig. 12-12, $R_p = 5.000$ ohmios, $\omega L_p = 40$ ohmios, $V = 100$ V eficaces e $I = 10$ amp eficaces. La impedancia de carga es altamente capacitiva. El vatímetro lee 30 vatios. Calcular el ángulo de fase de la impedancia de carga.

12-16 (§ 10). Se usa la conexión *B* de la Fig. 12-10 para medir la potencia suministrada por una fuente sinusoidal de voltaje de pico V , a una impedancia de carga Z . Determínese una expresión aproximada de la lectura del vatímetro, con $(\omega L_p)^2 \ll R_p^2$ y compárese el término de error adicional con el de la Ec. (12-42). No se desprecia R_o , L_o , R_p o L_p .

12-17 (§ 11). El circuito de compensación de frecuencia de la Fig. 12-13 se diseña usando $L_p = R^2 C$ y $k = 2$. *a)* ¿Cuál es el ángulo de fase de Z_p cuando $\omega RC = 0,1$? *b)* Si el circuito se diseña de nuevo con $k = 9$, pero manteniendo $R_p = R(k + 1)$ constante, ¿cuál es el ángulo de fase de Z_p a la misma frecuencia que en la parte *a*)?

12-18 (§ 11). El circuito de compensación de la Fig. 12-13 se ha diseñado con $L_p = R^2 C$ y $k = 10$. Calcúlese la desviación del módulo de la impedancia Z_p de su valor de baja frecuencia, $11R$, cuando el ángulo de fase compensado del circuito de potencial, β' , es $3^\circ 26'$.

CAPITULO 13

ANALISIS DE LOS PUENTES DE CORRIENTE ALTERNA

En el Cap. 9 se introdujeron los puentes de corriente alterna, presentándose varios ejemplos de puentes usados para medir parámetros eléctricos. A causa del amplio uso y versatilidad de los puentes de c. a. es interesante explorar métodos de análisis flexibles y aplicables con generalidad a la configuración en puente.

La solución exacta del puente desequilibrado se obtiene a partir del análisis de puentes de corriente continua del Cap. 10. El teorema de la compensación se aplica al puente ligeramente desequilibrado. Se presentan lugares circulares que conducen a entender la convergencia al equilibrio. La sensibilidad de voltaje del puente de c. a. se estudia en varios ejemplos. Se discuten las funciones de transferencia de voltaje bajo condiciones de frecuencia variable, sirviendo como ilustración los puentes de resonancia y de Wien.

13-1. Puente de corriente alterna desequilibrado. La notación que se usa para puentes de c. a. fue definida en la Fig. 9-17 y se repite en la Fig. 13-1. Todo el análisis se reduce al estado sinusoidal estacionario. Las condiciones de equilibrio del puente se hallan igualando los productos de impedancias en brazos opuestos del puente. Es decir,

$$Z_1 Z_0 = Z_4 Z_2 \quad (13-1)$$

donde $Z_3 = Z_0$ representa el valor de Z_3 , considerada variable, que se

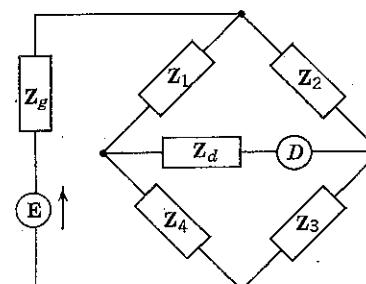


FIG. 13-1. Puente de c. a. de cuatro brazos.

precisa para el equilibrio. Cuando se satisface la Ec. (13-1) la corriente en el detector (y voltaje) es cero.

La expresión general de la corriente del detector en el puente desequilibrado se puede obtener exactamente por los mismos métodos que se usaron para los puentes de c. c. en el Cap. 10. En la solución exacta del puente de Wheatstone, Ec. (10-6), se pueden remplazar las cantidades de c. c. por las correspondientes cantidades de c. a. Supóngase que el puente se desequilibra cambiando Z_3 de su valor de equilibrio, Z_0 en una cantidad Z . Para obtener I_d , la corriente compleja del detector, remplácese en la Ec. (10-6) E por E , B por Z_g , M por Z_1 , P por Z_2 , X_0 por Z_0 , R por Z , N por Z_4 , G por Z_d y, por supuesto, I_g por I_d (ver Fig. 10-1). Entonces la Ec. (10-6) queda

$$I_d = \frac{E}{(Z_g + Z_2 + Z_0 + Z_g Z_2/Z_1)(Z_d + Z_4 + Z_0 + Z_d Z_4/Z_1)} \left[\frac{Z}{1 + kZ} \right] \quad (13-2)$$

donde $k = \frac{Z_1(Z_2 + Z_d) + (Z_0 + Z_4)(Z_1 + Z_2 + Z_d)}{Z_1(Z_g + Z_2 + Z_0 + Z_g Z_2/Z_1)(Z_d + Z_4 + Z_0 + Z_d Z_4/Z_1)}$

De forma análoga se pueden convertir otras ecuaciones del Cap. 10 en las correspondientes ecuaciones complejas y aplicadas a los puentes de c. a. Si esto fuera todo no sería necesario seguir adelante. Sin embargo, existen importantes diferencias entre los casos de c. a. y c. c. a pesar de conservarse la forma de las ecuaciones. Las cantidades complejas son función de la frecuencia y esto supone una variable adicional en comparación con el caso de c. c. Además, en la Ec. (13-1) están implícitas dos condiciones de equilibrio independientes, y los ángulos de fase son cantidades importantes. Por otra parte, el cambio Z consta de dos partes independientes, la real y la imaginaria. Estos puntos y sus consecuencias serán estudiados con atención en este capítulo.

13-2. Aplicación del teorema de la compensación. En la mayoría de las aplicaciones de los puentes de c. a. tiene poco interés el desequilibrio extremo del puente. Se estudia más el puente ligeramente desequilibrado, como ocurría en el puente de c. c. Se estudian en función de ligeras desviaciones del equilibrio factores tales como sensibilidad del puente, precisión del mismo, comportamiento de los ajustes de equilibrio y otros. En consecuencia, el método de análisis preferible es el teorema aproximado de la compensación. Se puede aplicar directamente en cada caso específico sin necesidad de recurrir a fórmulas y el problema se reduce a una serie de cálculos menores. Aunque los resultados se pueden obtener también a partir de fórmulas generales, tal como la Ec. (13-2), ordinariamente es más satisfactorio desarrollar individualmente cada puente para la cantidad particular a variar en cada caso.

Un ejemplo de la aplicación del teorema aproximado de la compen-

sación lo proporciona el puente de inductancia de la Fig. 13-2 (a). Las condiciones de equilibrio se obtienen igualando los productos de impedancias en brazos opuestos del puente.

$$R_1(R_3 + j\omega L_3) = R_4(R_2 + j\omega L_2)$$

Las partes real e imaginaria de esta ecuación deben ser iguales separadamente. De aquí las dos condiciones independientes de equilibrio que deben satisfacerse para conseguir una salida cero del detector son

$$R_1R_3 = R_4R_2 \quad R_1L_3 = R_4L_2 \quad (13-3)$$

donde ha desaparecido la frecuencia angular, ω . Esto significa que el equilibrio del puente es independiente de la frecuencia en tanto que los brazos del puente puedan ser representados por los elementos de circuito de la Fig. 13-2 (a). El equilibrio resistivo es el mismo que el de un puente de Wheatstone, si L_2 y L_3 son cero. El equilibrio reactivo implica que los ángulos de fase de los dos brazos inductivos, α_2 y α_3 , sean iguales. Esto puede verse reagrupando la Ec. (13-3).

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3} = \frac{L_2}{L_3} = \frac{\omega L_2}{\omega L_3}$$

Por tanto, $\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{\omega L_3}{R_3} = \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\omega L_2}{R_2}$ (13-4)

La corriente en el detector para un pequeño cambio de cualquier elemento del puente del valor de equilibrio requerido por la Ec. (13-3)

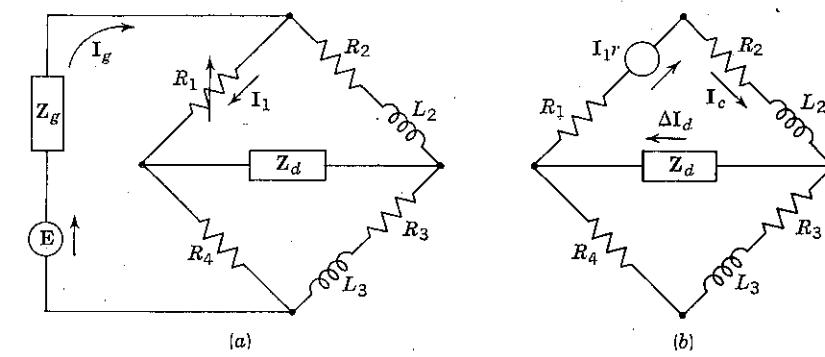


FIG. 13-2. Aplicación del teorema de la compensación al puente de inductancia.

se puede obtener aplicando el teorema de la compensación. Por ejemplo, R_1 cambia de su valor de equilibrio en una pequeña cantidad r . Primera-

mente es preciso obtener la corriente que pasa por R_1 en equilibrio, y se obtiene a partir de la corriente del generador.

$$I_g = \frac{E}{Z_g + \frac{[R_2 + R_3 + j\omega(L_2 + L_3)](R_1 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + j\omega(L_2 + L_3)}}$$

Usando la regla del reparto de corrientes, la corriente I_1 que pasa por R_1 sale directamente.

$$I_1 = \frac{R_2 + R_3 + j\omega(L_2 + L_3)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + j\omega(L_2 + L_3)} I_g$$

El cambio en las corrientes del puente que produce un cambio r en R_1 se obtiene por un generador de «compensación», I_1r , que actúa en serie con R_1 , como muestra la Fig. 13-2 (b). En este circuito se ha despreciado r comparado con R_1 y esto permite suprimir la impedancia del generador con poco error, como se demostró en la Sec. 10-4. La corriente total suministrada por el generador de compensación es

$$I_c = \frac{I_1r}{R_1 + R_2 + j\omega L_2 + \frac{(R_3 + R_4 + j\omega L_3)Z_d}{R_3 + R_4 + j\omega L_3 + Z_d}}$$

La regla del reparto de corrientes da el cambio en la corriente del detector de su valor cero de equilibrio.

$$\Delta I_d = \frac{R_3 + R_4 + j\omega L_3}{R_3 + R_4 + j\omega L_3 + Z_d} I_c$$

El error relativo en este resultado es, al menos, igual a r/R_1 .

Los cálculos numéricos en los puentes de c. a. pueden ser algo complicados, y es útil tener facilidad en el manejo de números complejos. La conversión, de rectangular a forma polar, se puede hacer rápidamente con reglas especiales de cálculo. El teorema de la compensación siempre reduce el problema a una serie de cálculos menores, sin importar lo complicado que sea el puente, como se ha visto en este ejemplo. El problema de cálculo se facilita algo si se saca partido de los niveles de impedancia que se encuentran en los puentes prácticos. En muchos casos la impedancia del generador, Z_g , es mucho menor que la impedancia de los brazos del puente y puede despreciarse con poco error. También muchos detectores prácticos tienen una impedancia muy alta, Z_d , en comparación con la impedancia de entrada en los terminales de salida del puente, y en este caso el efecto de carga de Z_d puede ser ignorada con buena aproximación.

13-3. Lugar de círculos del detector de voltaje. En el análisis de ingeniería se usan con frecuencia métodos gráficos y los puentes de c. a. no son una excepción. Los *diagramas con fasores* que representan cantidades complejas son útiles algunas veces para el análisis del estado estacionario de circuitos y se puede construir también para los puentes. Esta técnica permite una visualización gráfica del comportamiento del puente bajo condiciones variables fuera del equilibrio. El examen del voltaje complejo del detector en función de su lugar en el plano complejo es particularmente revelador.

Para simplificar la discusión sin perder las propiedades características del comportamiento del puente, supóngase que la impedancia del generador y que la impedancia del detector es infinita en el puente de cuatro brazos de la Fig. 13-1. Estas suposiciones no son irreales en ciertos puentes prácticos. Entonces el voltaje complejo del detector, E_d , se obtiene directamente con la regla de división de tensiones.

$$E_d = \left(\frac{Z_1}{Z_1 + Z_4} - \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} \right) E$$

y es una subida de voltaje de la unión de Z_1 y Z_4 a la de Z_2 y Z_3 . Multiplicando en cruz desaparecen en el numerador los términos $\pm Z_1 Z_2$.

$$\frac{E_d}{E} = \frac{Z_1 Z_3 - Z_2 Z_4}{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)} \quad (13-5)$$

Evidentemente, el voltaje en el detector es cero cuando $Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4$, que es la conocida ecuación de equilibrio.

Designemos un elemento de circuito del puente por s y considerémoslo como una variable real. Si todos los demás parámetros son constantes, la Ec. (13-5) se puede poner en la forma

$$\frac{E_d}{E} = \frac{As + B}{Cs + D} \quad (13-6)$$

donde A , B , C y D son constantes complejas. Por ejemplo, si las cuatro impedancias de los brazos del puente se expresan en forma rectangular, $Z_k = R_k + jX_k$, donde $k = 1, 2, 3, 4$, y el único elemento variable del circuito es $R_1 = s$, entonces

$$\begin{aligned} A &= R_3 + jX_3 \\ B &= jX_1(R_3 + jX_3) - (R_2 + jX_2)(R_4 + jX_4) \\ C &= R_2 + R_3 + j(X_2 + X_3) \\ D &= [R_4 + j(X_1 + X_4)][R_2 + R_3 + j(X_2 + X_3)] \end{aligned}$$

La forma de la Ec. (13-6) indica que el lugar de E_d/E en el plano complejo es un círculo al variar s . Sin duda, el estudiante ya ha encontrado esta forma en conexión con el lugar del círculo para circuitos, pero quizás no conoce la ecuación general del círculo. Es fácil probar que la Ec. (13-6) representa un círculo en el plano complejo. Damos una demostración quedando al cuidado del estudiante desarrollar los detalles algebraicos.

Expresando las cuatro constantes complejas en forma rectangular y siendo u y v la parte real e imaginaria de E_d/E , respectivamente. La Ec. (13-6) queda

$$\frac{E_d}{E} = u + jv = \frac{(a + jb)s + (c + jd)}{(e + jf)s + (g + jh)} \quad (13-7)$$

donde a, b, c, d, e, f, g, h son constantes reales que representan las partes

Núm. curva	a	b	c	d	e	f	g	h
1	a	0	c	d	0	0	1	0
2	0	b	c	d	0	0	-1	0
3	a	b	0	0	0	0	1	0
4	0	$-fg$	gk	0	0	f	g	0
5	0	0	$2gk$	0	0	f	g	0
6	0	$2h_2e$	0	$-2k_1h$	e	0	0	h

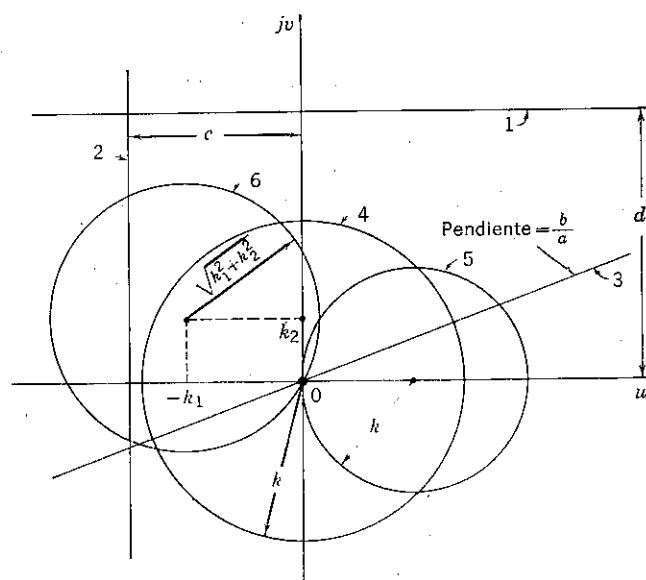


FIG. 13-3. Ejemplos de lugares del círculo.

real e imaginaria de A, B, C, D , como es evidente comparando con la Ec. (13-6). Esta ecuación compleja que relaciona las variables reales u , v y s implica dos ecuaciones reales. La demostración consiste en eliminar s entre las dos y comprobar que la ecuación resultante en u y v representa un círculo.

Multiplicando en cruz la Ec. (13-7), agrupando los términos en s , e igualando partes real e imaginaria, la ecuación de las partes real e imaginaria, en este orden, es

$$(a - ue + vf)s = ug - vh - c$$

$$(b - ve - uf)s = vg + uh - d$$

Dividiendo la primera ecuación por la segunda como sugiere la raya horizontal, se elimina s . La demostración es completa después de multiplicar en cruz, pues todos los términos en uv desaparecen. [Los términos en uv que desaparecen al multiplicar en cruz son $(fh - eg)uv$.] Solo quedan términos en u^2 , u , v^2 , v y constantes. Esto significa que la ecuación en u y v representa un círculo. Aunque la demostración es completa, la ecuación del círculo se puede manipular, si se desea, para obtener fórmulas explícitas de las coordenadas del centro del círculo y del radio. Cuando se agrupan todos los términos en u^2 , u , v^2 y v y se completan los cuadrados, resulta la siguiente ecuación:

$$(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 = \rho^2 \quad (13-8)$$

Esta es la ecuación de un círculo con centro en $u = u_0$, $v = v_0$ y ρ^2 es el cuadrado del radio del círculo.

$$u_0 = \frac{bg + cf - ah - de}{2(fg - eh)} \quad v_0 = \frac{ce + df - ag - bh}{2(fg - eh)} \quad (13-9)$$

$$\rho^2 = u_0^2 + v_0^2 + \frac{ad - bc}{fg - eh}$$

Estos resultados muestran que el círculo degenera en una línea recta si $fg = eh$, pues entonces las coordenadas del centro del círculo y el radio se hacen infinitas.

En la Fig. 13-3 se dan varios ejemplos de círculos en el plano complejo (plano uv) para valores especiales de las constantes. Esto sugiere que círculos de cualquier radio y centro y cualquier línea recta se pueden obtener con una elección adecuada de constantes. Por tanto, se ha probado que la Ec. (13-6) representa un círculo en el plano complejo, incluyendo una recta como forma degenerada. Cualquier ecuación compleja en esta forma es un círculo, incluso si la variable s es la frecuencia, como es el caso a veces.

13-4. Lugar del puente de resonancia. El puente de resonancia de la Fig. 13-4 proporciona un ejemplo de lugar del voltaje del detector. Se han eliminado los subíndices en el brazo 3 por comodidad. El voltaje de salida en circuito abierto del puente de resonancia es

$$\mathbf{E}_d = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_4} - \frac{R_2}{R_2 + R + jX} \right) \mathbf{E}$$

donde $X = \omega L - 1/\omega C$ es la reactancia equivalente del circuito resonante del brazo 3, y se supone que la impedancia de \mathbf{E} es cero. Multiplicando en cruz y calculando los términos $\pm R_1 R_2$

$$\frac{\mathbf{E}_d}{\mathbf{E}} = \frac{R_1 R + jR_1 X - R_2 R_4}{(R_1 + R_4)(R_2 + R + jX)} \quad (13-10)$$

El voltaje de salida es cero cuando se satisfacen las condiciones $X = 0$ y $R_1 R = R_2 R_4$ siendo esta última la condición de equilibrio del puente de Wheatstone.

Supóngase $R_1 = s$ variable. La Ec. (13-10) está en la forma de circuito de la Ec. (13-6).

$$\frac{\mathbf{E}_d}{\mathbf{E}} = \frac{(R + jX)s - R_2 R_4}{(R_2 + R + jX)s + R_4(R_2 + R + jX)} \quad R_1 = s \quad (13-11)$$

Si se aplican los resultados generales de la sección precedente a esta ecuación se encuentra que en el denominador

$$e = R_2 + R \quad f = X \quad g = R_4(R_2 + R) \quad h = R_4 X$$

Por tanto, $fg - eh = 0$, el lugar es una línea recta en el plano complejo.

La ecuación de la línea se puede hallar en el plano uv , pero es más fácil considerar el diagrama de fasores en un sistema de coordenadas con el origen desplazado. El plano complejo xy , indicado en la Fig. 13-5, conduce a una rápida solución gráfica. El eje x se selecciona de modo que coincida con la corriente \mathbf{I}_1 . Por definición, al dibujar el diagrama de fasores en la Fig. 13-5 se supone que la reactancia es positiva, esto es, que la corriente \mathbf{I}_2 retraza de \mathbf{I}_1 en un ángulo β . El voltaje complejo del detector, \mathbf{E}_d , se dirige del punto 2 al 1 en este diagrama. Al variar R_1 el punto 2 permanece fijo y el punto 1 se mueve sobre el eje x desde $x = 0$ (cuando $R_1 = 0$) a $x = E$ (cuando $R_1 \gg R_4$). Por tanto, se ve inmediatamente que el lugar del voltaje de salida es una línea recta, con un mínimo de cálculos. La ecuación de la recta en el plano uv se puede obtener con $\mathbf{E}_d/\mathbf{E} = u + jv$ en la Ec. (13-11) eliminando s .

$$v = \frac{R_2 X}{(R + R_2)^2 + X^2}$$

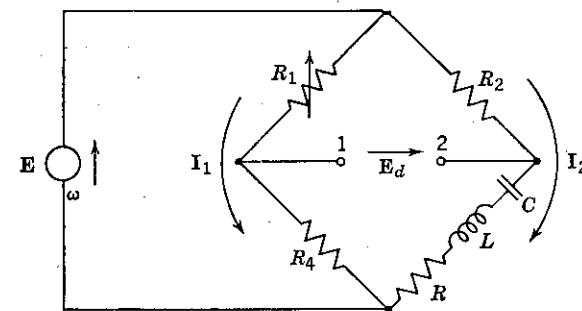


FIG. 13-4. Puente de resonancia.

iy

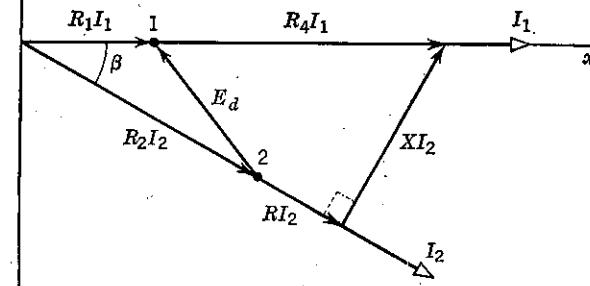


FIG. 13-5. Diagrama de fasores de puente de resonancia; R_1 variable.

El origen del plano uv es el punto 2 de la Fig. 13-5, siendo paralelos los ejes uv a los xy .

Como otro ejemplo supóngase que se varía la reactancia X . Esto puede hacerse fácilmente variando la frecuencia de \mathbf{E} . Resulta de nuevo un lugar circular, pues con $X = s$ la Ec. (13-10) tiene la forma de círculo en la Ec. (13-6).

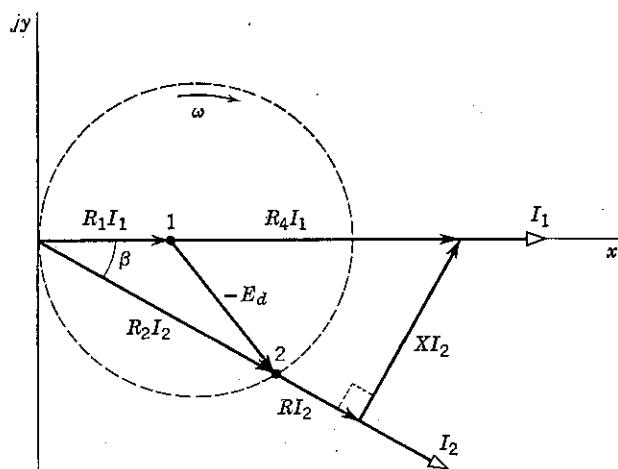
$$\frac{\mathbf{E}_d}{\mathbf{E}} = \frac{(jR_1)s + R_1 R - R_2 R_4}{j(R_1 + R_4)s + (R_1 + R_4)(R_2 + R)} \quad X = s \quad (13-12)$$

En este caso, usando la notación de la Sec. 13-3, $e = 0$, $h = 0$, y

$$fg - eh = (R_1 + R_4)^2(R_2 + R)$$

de modo que resulta un círculo.

El lugar circular se obtiene fácilmente con el diagrama de fasores para evitar los ejes desplazados uv . Cuando X se varía, el punto 1 del dia-

FIG. 13-6. Diagrama de fasores de puente de resonancia; X variable.

grama de fasores de la Fig. 13-6 permanece fijo, mientras el punto 2 sigue el lugar circular punteado. Se recorre el círculo en el sentido de las agujas del reloj al variar X de $-\infty$ a $+\infty$, lo que corresponde a variar la frecuencia de cero a infinito. Como X tiende a infinito en estos dos extremos, esto significa que I_2 y, por tanto, I_2R_2 tiende a cero. Por tanto, el lugar es un círculo cerrado. La coordenada y del círculo se obtiene fácilmente por inspección que es $y_0 = 0$. La coordenada x viene dada por $x_0 = I_{20}R_2/2$, donde I_{20} es el valor de I_2 cuando $X = 0$.

$$I_{20} = \frac{E}{R + R_2} \quad x_0 = \frac{R_2 E}{2(R + R_2)}$$

El radio del círculo es igual a x_0 .

Si no estamos satisfechos con este procedimiento gráfico, la ecuación formal del círculo en las coordenadas xy se obtiene fácilmente del diagrama de fasores de la Fig. 13-6.

$$x = R_2 I_2 \cos \beta \quad y = R_2 I_2 \sin \beta \quad \tan \beta = \frac{X}{R_2 + R} = \frac{y}{x}$$

Eliminando X , I_2 y β de estas ecuaciones y completando el cuadrado se obtiene

$$\left[x - \frac{R_2 E}{2(R + R_2)} \right]^2 + y^2 = \left[\frac{R_2 E}{2(R + R_2)} \right]^2$$

La forma general del círculo de la Ec. (13-6) es útil para reconocer que el lugar es un círculo, pero, como muestran estos ejemplos, es más fácil analizar el puente en un sistema de coordenadas desplazado. El lugar de E_d es valioso para estudiar la aproximación al equilibrio variando distintos parámetros del puente. Este interesante aspecto del comportamiento se discute en la próxima sección.

13-5. Convergencia al equilibrio. La elección de los elementos del circuito por el ajuste del equilibrio del puente representa ordinariamente un compromiso entre varios factores. Los puentes de cociente y de producto de brazos, descritos en el Cap. 9, contienen dos elementos ajustables, cada uno de los cuales se puede emplear para satisfacer independientemente una de las dos condiciones de equilibrio. Es deseable para evitar la interacción entre los dos ajustes y permitir una rápida aproximación al equilibrio. Sin embargo, la precisión prohíbe este tipo de ajuste, pues los elementos continuamente variables ordinariamente no son tan exactos como los elementos ajustables por pasos. Los ajustes por pasos disponibles no permiten un control lo suficientemente fino al acercarse al equilibrio. Otra consideración es la facilidad y rapidez con que se consigue el cero. El número de ajustes sucesivos que se precisan para conseguir un cero es un factor importante en la práctica. Es obvio que cuanto mayor sea el número de ajustes mayor será el tiempo invertido en conseguir un cero. Otros factores, tales como el cambio de la capacidad parásita al variar un elemento, también influyen para la elección final.

Un estudio de la aproximación al cero por sucesivos ajustes de elementos variables del puente contiene la información que puede servir como guía en la elección de los elementos que deben ser variables y de los que deben ser fijos. La convergencia al equilibrio se aprecia rápidamente en el lugar del voltaje del detector. Por ejemplo, considérese el puente de resonancia en el que R_1 y ω son ajustables. Si R_1 se ajusta primeramente de modo que se obtiene una salida del detector mínima, el punto 1 de la Fig. 13-7 se mueve sobre una línea recta a la proximidad del punto 3 donde la magnitud de E_d es un mínimo con respecto a R_1 como variable. El detector responde solamente al módulo de E_d y no a su fase, de modo que es un mínimo más bien plano cuando el puente está alejado del equilibrio, como indica la Fig. 13-7. La incertidumbre de la situación del punto 3 tiene un rango correspondiente de situaciones posibles de E_d , indicado por el sector que parte del punto 2. Si se varía entonces la frecuencia angular ω (lo que significa que varía X), el punto 3 permanece fijo, y el punto 2 sigue el arco de círculo indicado en la Fig. 13-7, hasta alcanzar el punto 4. Ahora, E_d , del punto 3 al 4, es mínimo con respecto a ω como variable. El mínimo tampoco está definido de una forma aguda, pues el puente está lejos del equilibrio. El rango de situaciones posibles de E_d , asociado con la incertidumbre en la posición del punto 4, viene indicado por el sector que parte del punto 3. Todos los cambios de la mag-

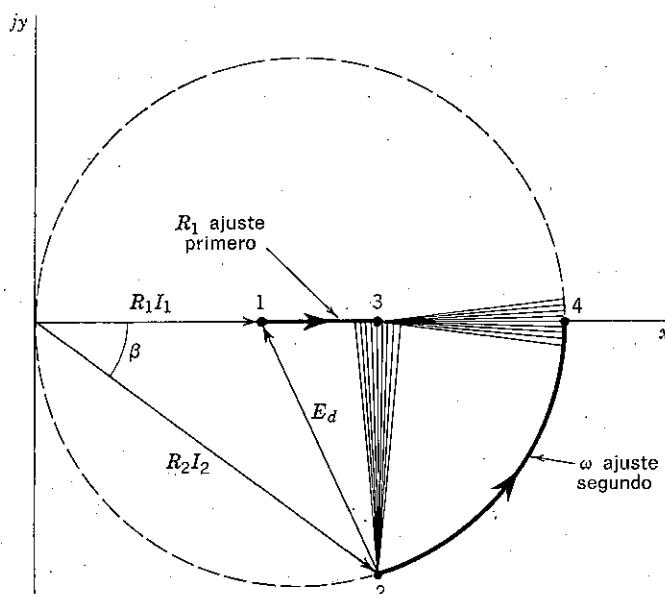


FIG. 13-7. Ajustes iniciales para equilibrar el puente de resonancia.

nitud de E_d han sido hasta ahora relativamente ligeros. Sin embargo, al ajustar por segunda vez R_1 el punto 3 se mueve sobre una línea recta hacia el punto 4 y E_d disminuirá rápidamente. Ajustes sucesivos y alternos de ω y R_1 harán a E_d progresivamente menor.

La escala de la Fig. 13-7 se ha aumentado considerablemente para seguir el comportamiento detallado de E_d con los ajustes sucesivos. Se da un ejemplo hipotético en la Fig. 13-8, donde se supone que el primer ajuste de frecuencia es ligeramente inferior al necesario para conseguir $X = 0$ (punto 4). Cuando se ajuste R_1 por segunda vez, el punto 3 se mueve a la derecha. Supóngase que el ajuste deja R_1 en el punto 5 ligeramente inferior al valor exacto que se precisa para el equilibrio. Entonces se aumenta ω hasta alcanzar el punto 6. (Obsérvese que al aproximarse más y más al equilibrio los arcos de círculo son tan pequeños que prácticamente son líneas rectas.) Un reajuste de R_1 produce el punto 7. Este proceso puede continuar hasta que se consiga un valor satisfactorio de E_d . En la práctica, E_d nunca es exactamente cero, pues siempre están presentes efectos tales como la deriva de los elementos de circuito, limitación de la sensibilidad del detector y ruido térmico.

Se pueden visualizar varios efectos interesantes a partir de un estudio de diagramas del tipo de la Fig. 13-7. Por ejemplo, si R_1I_1 es, inicialmente, menor que el radio del lugar- ω y ω es el primer ajuste, entonces ω debe ponerse para *máximo* E_d para aproximarse al equilibrio más rápidamente. Otro ejemplo, supóngase que R_1 se ajusta primeramente y de-

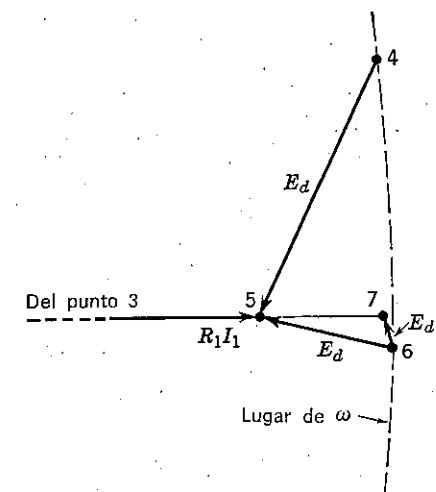


FIG. 13-8. Ajustes sucesivos en el puente de resonancia.

liberadamente se sobrepasa el mínimo de E_d , llevándolo algo más allá hasta el punto 4. El ajuste siguiente, de ω , está definido entonces de una forma más aguda que si se hubiera puesto R_1 , para el mínimo de E_d . Esto revela una técnica importante de ajuste, de sobreponer deliberadamente el mínimo para acelerar la consecución de un cero satisfactorio.

El análisis de la convergencia al equilibrio se simplifica cuando el puente está próximo al equilibrio. El denominador de la Ec. (13-5) se puede suponer constante para pequeños cambios de las impedancias de los brazos del puente, en la proximidad del equilibrio. El voltaje en el detector esencialmente es proporcional al numerador de la Ec. (13-5).

$$\frac{E_d}{E} = (Z_1 Z_3 - Z_2 Z_4) K e^{j\alpha} \quad (13-13)$$

donde $K e^{j\alpha}$ representa la inversa del denominador, supuesto constante. Cuando se varía un elemento simple, esta ecuación está en la forma de la Ec. (13-6) con $C = 0 = e + jf$. Por tanto, e y f son cero, lo que significa que $fg - eh = 0$. Entonces la Ec. (13-13) representa una línea recta en el plano complejo.

Para ilustrar esto, serían $Z_1 = R_1 = s_1$ y $Z_2 = R_2 = s_2$ dos resistencias variables, en los brazos resistivos del puente 1 y 2, respectivamente. Expresando las impedancias restantes en forma polar, la Ec. (13-13) queda

$$\frac{E_d}{E} = (Z_3 e^{j\alpha_3} s_1 - R_2 Z_4 e^{j\alpha_4}) K e^{j\alpha} \quad R_1 = s_1, X_1 = 0$$

$$\frac{E_d}{E} = (-Z_4 e^{j\alpha_4} s_2 + R_1 Z_3 e^{j\alpha_3}) K e^{j\alpha} \quad R_2 = s_2, X_2 = 0$$

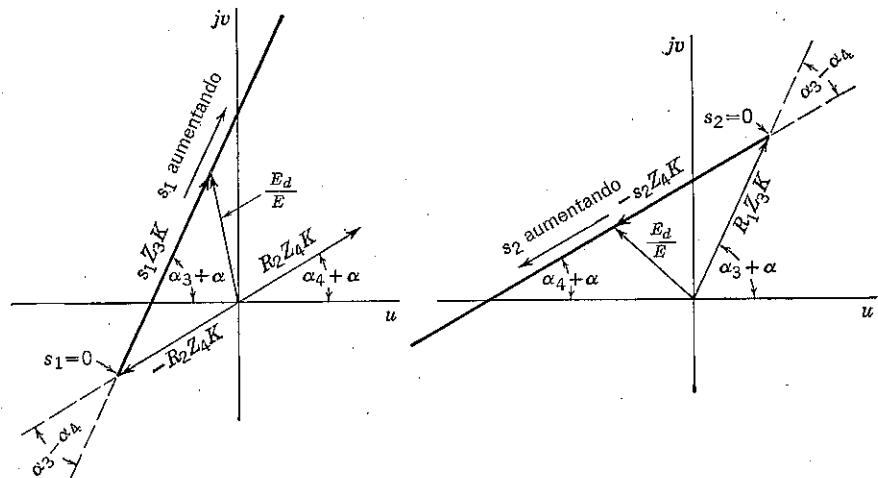


FIG. 13-9. Lugares de ajuste.

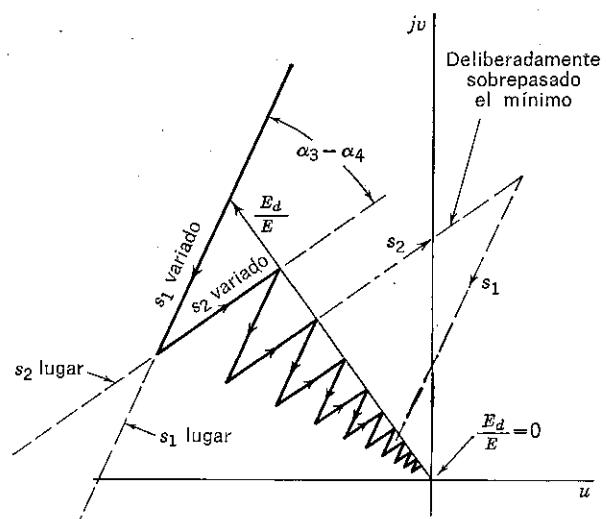


FIG. 13-10. Convergencia al equilibrio en las proximidades de éste.

El lugar de E_d/E en el plano uv , se muestra en términos generales en la Fig. 13-9, cuando se varían s_1 o s_2 . La próxima acción al equilibrio aparece en la Fig. 13-10. Se hacen ajustes sucesivos de s_1 y s_2 obteniendo un valor mínimo de E_d en cada caso. Se supone que se obtiene exactamente el mínimo en cada ajuste. La aproximación n al cero, $E_d = 0$, se ve que consta de una sucesión de pasos en zigzag. El número de casos necesarios depende del ángulo $\alpha_3 - \alpha_4$ entre los dos conjuntos de lugares.

Si este ángulo es pequeño, la convergencia al equilibrio requiere más ajustes que para ángulos grandes. Si $\alpha_3 - \alpha_4 = 90^\circ$, la convergencia es más rápida, y ésta es la condición que existe en los puentes de cociente y productos de brazos. Sobrepasando deliberadamente el punto de E_d mínimo, en la dirección correcta, se obtiene de nuevo una convergencia más rápida al equilibrio en este ejemplo.

13-6. Derivada de una cantidad compleja. Las condiciones en las que se consigue un voltaje de salida mínimo, con un parámetro ajustable, s , se pueden obtener gráficamente, como describen las secciones precedentes. Sin embargo, a menudo se desea una solución analítica. Se puede obtener igualando a cero la derivada del *módulo* de E_d con respecto a s .

Considérese la variable compleja, W , que tiene partes real e imaginaria, u y v , respectivamente, cada una de las cuales es función del parámetro real s .

$$W = u(s) + jv(s) \quad (13-14)$$

La cantidad compleja puede representar: voltaje, corriente, impedancia, admitancia u otras. El significado preciso del valor máximo o mínimo de W es que su *módulo* es máximo o mínimo. Por tanto, la cantidad a derivar no es W , sino su *módulo*.

$$W = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (13-15)$$

Igualando dW/ds a cero se obtienen los valores de s que corresponden a valores máximos o mínimos de W . Para la técnica matemática es generalmente más fácil derivar W^2 , justificado al igualar esta derivada a cero por ser

$$\frac{d(W^2)}{ds} = 2W \frac{dW}{ds} = 0 \quad \text{cuando} \quad \frac{dW}{ds} = 0$$

Por tanto, a partir de la Ec. (13-15) derivando el cuadrado del módulo se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d(W^2)}{ds} &= 2u \frac{du}{ds} + 2v \frac{dv}{ds} = 0 \\ \text{y} \quad \frac{u}{v} &= -\frac{\frac{dv}{ds}}{\frac{du}{ds}} \end{aligned} \quad (13-16)$$

Esto representa la condición general que se debe satisfacer entre u , v y s para que W sea máximo o mínimo.

Un error común al investigar los valores máximos o mínimos de cantidades complejas es igualar las derivadas de la misma cantidad compleja a cero. Procedimiento sin sentido, como puede verse por un estudio del

plano complejo. Cuando se varía s se recorre un lugar de \mathbf{W} en el plano complejo uv , como indica en general la Fig. 13-11. Para cualquier valor de s , el cambio de la cantidad compleja, \mathbf{W} , debido a un cambio infinitesimal de s es

$$d\mathbf{W} = \left(\frac{du}{ds} + j \frac{dv}{ds} \right) ds \quad (13-17)$$

Obsérvese que $d\mathbf{W}$ tiene, generalmente, parte real e imaginaria. Examinando la Fig. 13-11, se observa que la condición de máximo o mínimo corresponde a puntos en el lugar, tales como el a o el b , en los que $d\mathbf{W}$ es perpendicular a \mathbf{W} . Esto no corresponde a la condición $d\mathbf{W}/ds = 0$ que especifica un punto de estancamiento, o sea un punto en el que \mathbf{W} no cambia en absoluto al cambiar s .

En cualquier punto del lugar, la línea que coincide con \mathbf{W} tiene una pendiente dada por la tangente del ángulo de fase de \mathbf{W} , que es v/u . Aná-

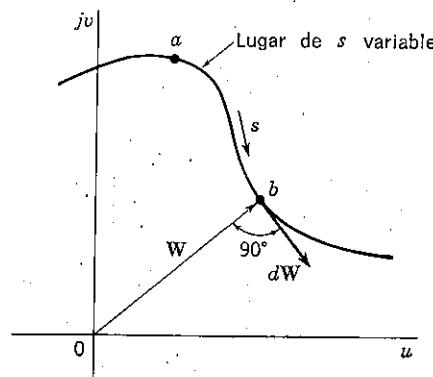


FIG. 13-11. Derivada de una variable compleja.

logamente, la pendiente de la línea que coincide con $d\mathbf{W}$ puede obtenerse a partir de la Ec. (13-17). Esta pendiente es $(dv/ds)/(du/ds)$. Dos rectas son perpendiculares cuando sus pendientes son recíprocas con distinto signo. Entonces, imponiendo la condición de que \mathbf{W} y $d\mathbf{W}$ sean perpendiculares, la condición de mínimo o máximo de \mathbf{W} se obtiene

$$\frac{\frac{dv}{ds}}{\frac{du}{ds}} = -\frac{1}{v} = -\frac{u}{v} \quad (13-18)$$

Esto concuerda con la Ec. (13-16) obtenida igualando la derivada del módulo de \mathbf{W} a cero. Hay que insistir en que igualar $d\mathbf{W}/ds$ a cero no tiene fundamento para hallar las condiciones de máximo o mínimo de \mathbf{W} .

Como ejemplo, volvamos a la Ec. (13-12) que especifica el voltaje de salida del puente de resonancia de la Fig. 13-4, cuando se varía la reactancia, $X = s$. La solución gráfica de la Fig. 13-6 da E_d mínimo para $X = 0$, siempre que $R_1I_1 > R_2I_2/2$ (de otro modo, $X = 0$ corresponde a un máximo). Se obtiene el mismo resultado analíticamente a partir de $dE_d/dX = 0$, donde E_d es el módulo de \mathbf{E}_d . Según la Ec. (13-12), el cuadrado del módulo de \mathbf{E}_d es

$$E_d^2 = \frac{[R_1^2X^2 + (R_1R - R_2R_4)^2]E^2}{(R_1 + R_4)^2X^2 + [(R_1 + R_4)(R_2 + R)]^2} = \frac{k_1^2X^2 + k_2^2}{k_3^2X^2 + k_4^2} \quad (13-19)$$

donde $k_1 = R_1E$, $k_2 = (R_1R - R_2R_4)E$, $k_3 = (R_1 + R_4)$ y $k_4 = (R_1 + R_4)(R_2 + R)$. Entonces,

$$\frac{d(E_d^2)}{dX} = 0 = \frac{(k_3^2X^2 + k_4^2)2k_1^2X - (k_1^2X^2 + k_2^2)2k_3^2X}{(k_3^2X^2 + k_4^2)^2}$$

La raíz de interés para equilibrar el puente es $X = 0$, en concordancia con la solución gráfica. (La raíz $X \rightarrow \infty$ no tiene interés para equilibrar el puente.) La segunda derivada, calculada para $X = 0$, indica que la raíz $X = 0$ da un máximo de E_d si $R_1I_1 < R_2I_2/2$, y un mínimo si se invierte la desigualdad. El valor mínimo de E_d se puede hallar a partir de la Ec. (13-19) con $X = 0$.

$$E_{d\min} = \frac{|R_1R - R_2R_4|E}{(R_1 + R_4)(R_2 + R)}$$

Este resultado se puede obtener directamente del circuito de la Fig. 13-4 con $X = 0$ usando la regla de división de tensiones. El valor mínimo es cero si se satisface la ecuación de equilibrio del puente de Wheatstone.

13-7. Sensibilidad del puente. La sensibilidad de voltaje de un puente de c. a., respecto a un parámetro variable, s , se define como el cambio de la magnitud del voltaje del detector de su valor cero de equilibrio, dividido entre el cambio infinitesimal del parámetro que produce el desequilibrio. El parámetro, s , puede representar cualquier cantidad de la que dependa \mathbf{E}_d , tal como elementos de circuito en los brazos del puente, o la frecuencia (si el equilibrio del puente depende de la frecuencia). Esta definición es la misma, en principio, que la usada en puentes de c. c. para sensibilidad de voltaje. En el caso de c. a., sin embargo, es necesario especificar la salida del puente con más cuidado, pues está caracterizada por su módulo y su fase. Se usa el módulo de \mathbf{E}_d en la definición, pues los detectores usuales no responden al ángulo de fase del voltaje aplicado a sus terminales. En los casos en que se usa un detector sensible al ángulo de fase, la sensibilidad del puente se puede definir en función del cambio del ángulo de fase de \mathbf{E}_d , en lugar del cambio de su módulo.

Para la discusión, se puede representar el voltaje complejo del detector en la forma rectangular de la Ec. (13-14).

$$\mathbf{E}_d = u(s) + jv(s) \quad (13-20)$$

donde las partes real e imaginaria de \mathbf{E}_d son funciones de la variable s . El lugar de \mathbf{E}_d , para la variable s , se puede representar en el plano complejo, como en la Fig. 13-12 (a). Nótese que \mathbf{E}_d experimenta una inversión de fase de 180° , cuando s pasa por su valor de equilibrio, s_0 . Esta inversión de fase ocurre siempre que el lugar es una curva uniforme que pasa por el punto $\mathbf{E}_d = 0$.

El valor del módulo de \mathbf{E}_d , dado por $\sqrt{u^2 + v^2}$, puede dibujarse frente al parámetro variable s , como muestra la Fig. 13-12 (b). La inversión de fase de 180° está suprimida en esta curva; en su lugar hay una cuspide en el punto $s = s_0$, donde $E_d = 0$. Sin embargo, se puede indicar la in-

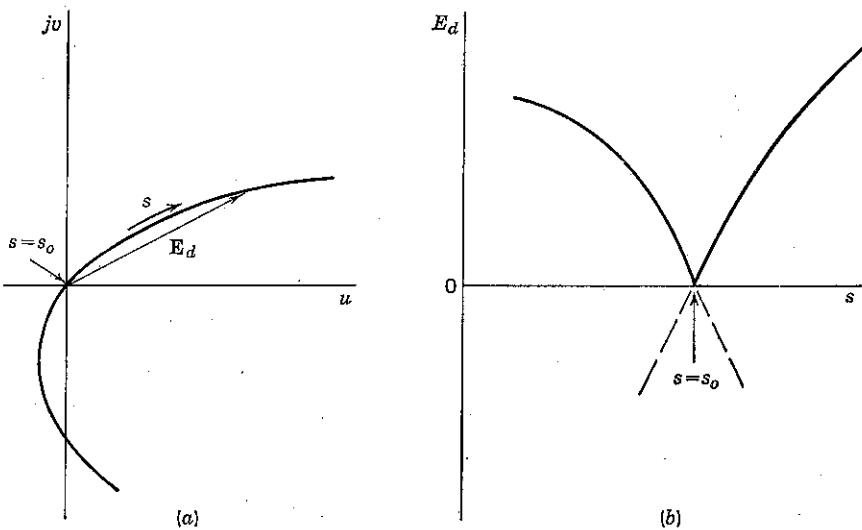


FIG. 13-12. Sensibilidad del puente.

versión de fase por una de las curvas punteadas, si se desea, y esto apoya la idea de que la derivada tiene la misma magnitud en el punto $s = s_0$ si nos aproximamos a s_0 tanto desde valores mayores o menores. La discontinuidad de la derivada, indicada por la cuspide, es más aparente que real y no causa ninguna complicación matemática. Esto resulta obvio examinando la derivada de la Ec. (13-20).

$$\frac{d\mathbf{E}_d}{ds} = \frac{du}{ds} + j \frac{dv}{ds}$$

El módulo de $d\mathbf{E}_d/ds$ es

$$\frac{dE_d}{ds} = \sqrt{\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2} \quad (13-21)$$

Para un lugar uniforme, du/ds , y dv/ds son funciones de comportamiento regular en cualquier punto del lugar, incluido el punto $s = s_0$. De aquí que el módulo de $d\mathbf{E}_d/ds$ es independiente del signo algebraico de ds en todos los puntos de la curva de la Fig. 13-12 (b), incluido el punto $s = s_0$.

La sensibilidad de voltaje viene dada por la Ec. (13-21) cuando el módulo de la derivada se evalúa en $s = s_0$. Puede interpretarse gráficamente como la magnitud de la pendiente de la curva de la Fig. 13-12 (b) en el punto $s = s_0$, entendiendo que la curva continúa por una de las extensiones punteadas.

Se puede desarrollar una fórmula para la sensibilidad de voltaje, a partir de la Ec. (13-2), usando $\mathbf{E}_d = I_d \mathbf{Z}_d$ cuando el elemento variable está contenido en \mathbf{Z}_3 . Recalcamos que I_d , y, por tanto, \mathbf{E}_d es cero, cuando $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}_0$. Supongamos que \mathbf{Z}_3 cambia en una cantidad infinitesimal a $\mathbf{Z}_0 + d\mathbf{Z}$. Despreciando $k d\mathbf{Z}$ comparado con 1 en el denominador, la Ec. (13-2) queda

$$d\mathbf{E}_d = \frac{Z_d E dZ}{(Z_1 + Z_2 + Z_0 + Z_0 Z_2/Z_1)(Z_d + Z_4 + Z_0 + Z_d Z_4/Z_1)} \quad (13-22)$$

El módulo de $d\mathbf{E}_d/dZ$ es la sensibilidad de voltaje con respecto a la variable \mathbf{Z}_3 .

Este resultado se simplifica considerablemente para el caso especial de $Z_0 = 0$ y $Z_d \rightarrow \infty$. El voltaje del detector queda

$$d\mathbf{E}_d = \frac{Z_1 E dZ}{(Z_2 + Z_0)(Z_1 + Z_4)} \quad Z_0 = 0 = Y_d \quad (13-23)$$

Esta ecuación se puede obtener también directamente a partir de la Ec. (13-5). Introduciendo la condición de equilibrio $Z_1 Z_0 = Z_2 Z_4$, la Ec. (13-23) se puede poner en la forma

$$\frac{d\mathbf{E}_d}{E} = \frac{F}{(1+F)^2} \frac{dZ}{Z_0} \quad F = \frac{Z_0}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_1} \quad (13-24)$$

El factor del puente, $F/(1+F)^2$, es una importante medida de la sensibilidad. El cambio de voltaje del detector expresado como una fracción del voltaje aplicado al punto es igual al factor del puente por el cambio relativo de la impedancia del brazo del puente.

Hay varios casos especiales de interés. Cuando el par de brazos del

puente que están conectados en serie con la fuente tienen el mismo ángulo de fase, F es real y positivo. En este caso el valor de F preciso para hacer máximo el factor del puente y, por tanto, la sensibilidad de voltaje viene dado por

$$\frac{d}{dF} \left[\frac{F}{(1+F)^2} \right] = \frac{(1+F)^2 - 2F(1+F)}{(1+F)^4} = 0$$

Esto conduce a $F = 1$, y, en consecuencia, el valor máximo del factor del puente es $1/4$.

Cuando el par de brazos del puente conectados en serie con la fuente tienen ángulos de fase relativos a 90° , F es imaginario. En este caso con $F = \pm jG$ el módulo del factor del puente es $G/(1+G^2)$. El factor del puente viene dado por

$$\frac{d}{dG} \left[\frac{G}{1+G^2} \right] = \frac{(1+G^2) - G(2G)}{(1+G^2)^2} = 0$$

Esto conduce a $G = 1$ y un máximo valor correspondiente de $1/2$ para el módulo del factor del puente.

Aunque el factor del puente es menor que la unidad en ambos casos, puede exceder de la unidad cuando la magnitud de $(1+F)$ es menor que la unidad. Esto requiere que el ángulo de fase de F sea mayor que 90° y se puede conseguir cuando los brazos conectados en serie con la fuente tienen una diferencia de fase que excede 90° . Puede realizarse con un brazo inductivo conectado en serie con un brazo capacitivo. Con elementos sin pérdidas, lo que implica una Q infinita de los brazos resonantes el factor del puente es teóricamente infinito, pues $F = -1$. Sin embargo, en la práctica tal resultado no es cierto a causa de la resistencia inevitablemente asociada a los elementos de los brazos del puente.

13-8. Medida de desplazamientos por el cambio de la capacidad. El problema de ingeniería de medir pequeños desplazamientos mecánicos proporciona un ejemplo palpable del significado de las ideas de sensibilidad del puente de la sección precedente. En esta sección se diseñará y analizará un puente sencillo con un condensador variable cuya capacidad depende del desplazamiento mecánico de una de sus placas. Es un ejemplo de las muchas formas en que se pueden usar los puentes para obtener una medida sensible de su pequeño cambio de una cantidad eléctrica.

En la Fig. 13-13 se muestra esquemáticamente un condensador variable de diseño especial. Un pequeño desplazamiento mecánico, Δ , producido por una fuerza que actúa sobre la placa deformable, aumenta la capacidad. Supóngase que el condensador se coloca en el brazo 3 de un puente DeSauly, equilibrado inicialmente ajustando C_4 (ver Fig. 13-14). Cuando se desplaza la placa resorte, el aumento de la capacidad de C_3

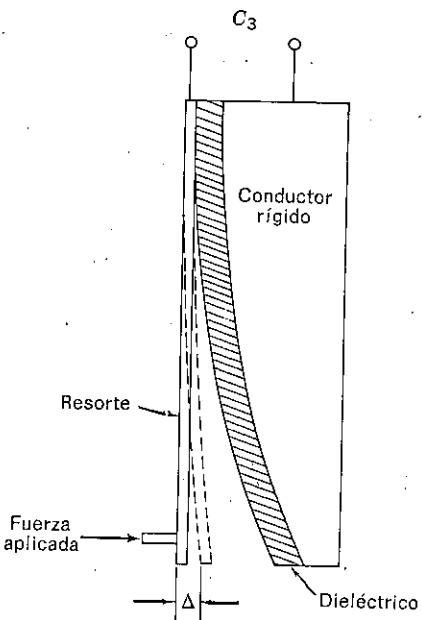


FIG. 13-13. Condensador dependiente de la capacidad.

produce un cambio en el voltaje del detector. El cambio del voltaje del detector se puede usar como medida del desplazamiento y puede calibrarse el detector para medir directamente desplazamientos. Cuando interesan desplazamientos extremadamente pequeños es obvio que es deseable un cambio de E_d para un cambio dado de la capacidad, tan grande como sea posible.

Supóngase que se usa un generador de baja impedancia y un detector de alta impedancia, en el diseño del puente. El voltaje del detector viene dado por la regla de división de tensión.

$$E_d = \left[\frac{R_1}{R_1 + 1/j\omega C_4} - \frac{R_2}{R_2 + 1/j\omega C_3} \right] E = \frac{j\omega(R_1C_4 - R_2C_3)E}{(1 + j\omega R_1 C_4)(1 + j\omega R_2 C_3)} \quad (13-25)$$

Evidentemente, el puente está equilibrado cuando $R_1C_4 = R_2C_3$. El ajuste inicial de C_4 produce el equilibrio del puente para el valor de C_3 que corresponde al valor cero de referencia del desplazamiento de la placa deformable. Cuando C_3 cambia en una pequeña cantidad dC , a causa de un pequeño desplazamiento Δ , la magnitud del cambio de E_d de cero es según la Ec. (13-25)

$$dE_d = \frac{E\omega R_2 dC}{\sqrt{1 + (\omega R_1 C_4)^2} \sqrt{1 + (\omega R_2 C_3)^2}} \quad (13-26)$$

donde se ignora dC en comparación con C_3 en el denominador.

La sensibilidad del puente con relación al cambio de C_3 es dE_d/dC . Es función de la frecuencia, a pesar de ser la condición de equilibrio independiente de la frecuencia. Para frecuencias muy bajas, cuando $(\omega R_1 C_4)^2 \ll 1$ y $(\omega R_2 C_3)^2 \ll 1$, la sensibilidad de voltaje es propor-

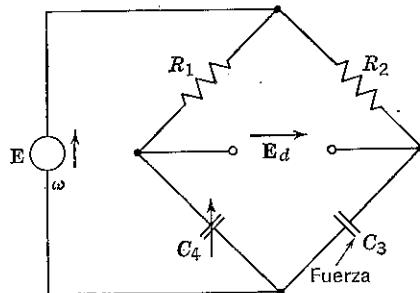


FIG. 13-14. Puente de DeSauty.

cional a la frecuencia. Sin embargo, a muy altas frecuencias en las que se invierte la desigualdad, la sensibilidad queda

$$\frac{dE_d}{dC} = \frac{E}{\omega R_1 C_3 C_4} \quad \omega \rightarrow \infty$$

que disminuye al aumentar la frecuencia. Por tanto, la sensibilidad debe ser máxima a una frecuencia intermedia.

Para explorar las condiciones de máxima sensibilidad, sea $R_1 = R_2 = R$, lo que requiere que $C_4 = C_3 = C$ para satisfacer la condición de equilibrio. La sensibilidad del puente queda, según la Ec. (13-26),

$$\frac{dE_d}{dC} = \frac{E \omega R}{1 + (\omega RC)^2} = \frac{E}{C} \frac{\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} \quad (13-27)$$

Esta expresión podía haberse obtenido directamente de la Ec. (13-24) con $dZ/Z_0 = dC/C$, $F = 1/j\omega RC$ (o $G = 1/\omega RC$). Una gráfica de la sensibilidad del puente frente a la frecuencia sin dimensiones ωRC aparece en la Fig. 13-15. Como se esperaba por el desarrollo de la sección precedente, la sensibilidad máxima es para $\omega RC = 1$. Esto corresponde a un valor de $G = 1$ y un factor del puente máximo de $1/2$. De aquí que el máximo de sensibilidad de voltaje valga $E/2C$, como muestra la Fig. 13-15. Cuanto mayor sea E , mayor es la sensibilidad. Puede verse también en la sección precedente que la suposición de resistencias iguales no ha alterado la sensibilidad máxima, pues con $G = 1/\omega R_1 C_4 = 1/\omega R_2 C_3$, se obtiene el mismo valor máximo. Se ve que el máximo es más bien plano de modo que la frecuencia no es de diseño crítico y la calibración final será relativamente insensible a pequeños cambios de la frecuencia.

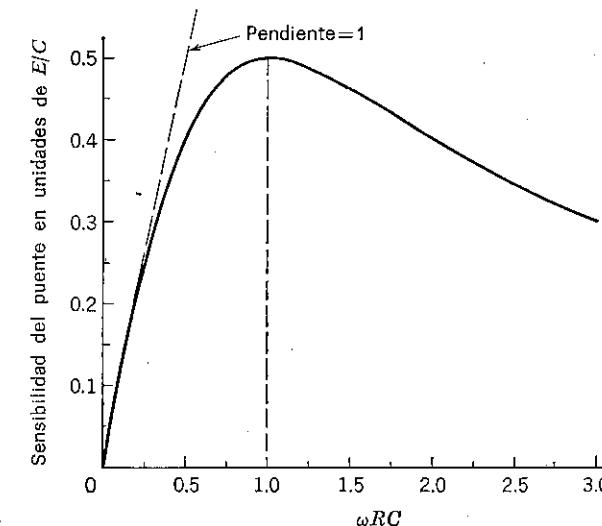


FIG. 13-15. Dependencia de la sensibilidad del puente con la frecuencia.

Es interesante observar que si se intercambian el detector y el generador en el circuito de la Fig. 13-14, el voltaje del detector viene dado por

$$E_d = \left[\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{1/j\omega C_4}{1/j\omega C_4 + 1/j\omega C_3} \right] E = \frac{(R_1 C_4 - R_2 C_3) E}{(R_1 + R_2)(C_3 + C_4)} \quad (13-28)$$

Se mantiene la misma condición de equilibrio, por supuesto, pero la sensibilidad del puente no depende de la frecuencia. En este caso la sensibilidad de voltaje con respecto a un pequeño cambio de C_3 , dC , es

$$\frac{dE_d}{dC} = \frac{R_2 E}{(R_1 + R_2)(C_3 + C_4)} = \frac{E}{C_3} \frac{F}{(1 + F)^2} \quad (13-29)$$

donde $F = R_1/R_2 = C_3/C_4$. Aunque la sensibilidad es independiente de la frecuencia, su valor máximo para $F = 1$ ($R_1 = R_2 = R$) es solamente la mitad del que se puede conseguir con la anterior disposición de detector y generador.

Como ejemplo concreto de diseño, supóngase que el condensador sensible al desplazamiento tiene un valor inicial de $C_3 = 250 \mu\mu F$ cuando $\Delta = 0$, y que para pequeños desplazamientos el cambio de la capacidad es lineal, igual a $20 \mu\mu F$ por 0.1 mm . Se supone un oscilador de baja impedancia que produce un voltaje de salida $E = 1 \text{ V}$ a una frecuencia angular de $\omega = 10^6 \text{ rad/seg}$. (El uso de un voltaje más alto aumentará la sensibilidad.) Se han desarrollado las ecuaciones necesarias para diseñar el puente y calcular su sensibilidad. Usando un diseño de brazos

iguales resistivos, lo cual no compromete la sensibilidad, el valor de R necesario para una sensibilidad máxima es

$$R = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^6(2,5 \times 10^{-10})} = 4.000 \text{ ohmios}$$

Con este valor de R , la sensibilidad del puente es

$$\frac{dE_d}{dC} = \frac{E}{2C} = \frac{1}{2(2,5 \times 10^{-10})} = 2 \times 10^9 \text{ voltios/faradio}$$

Con $dC = 200 \mu\text{F}$ por mm el cambio del voltaje del detector es

$$dE_d = 2 \times 10^9(2 \times 10^{-10}) = 0,4 \text{ voltios/milímetro}$$

Entonces, un desplazamiento de una millonésima de milímetro producirá un desequilibrio en el detector de $0,4 \mu\text{V}$. Si el menor cambio observable del voltaje del detector es $0,1 \text{ mV}$, lo cual se consigue fácilmente con un voltímetro de válvula de vacío, el menor cambio detectable de la capacidad es

$$dC = \frac{2C}{E} dE_d = \frac{0,1 \times 10^{-3}}{2 \times 10^9} = 0,05 \mu\text{F}$$

Esto corresponde a un desplazamiento mecánico de 250 millonésimas de milímetro.

13-9. Funciones de transferencia de voltaje. Algunas veces se usan los puentes como circuitos selectivos en aplicaciones de filtrado y realimentación. Las características, tanto de amplitud como de fase, función de la frecuencia, son importantes en tales casos. En estas aplicaciones los elementos del puente ordinariamente están fijos para dar equilibrio a alguna frecuencia especificada, y la frecuencia es la variable que produce la salida del detector. La relación compleja entre el voltaje aplicado al puente y el voltaje que aparece en los terminales del detector es una cantidad muy útil para los propósitos de análisis y es la *función de transferencia de voltaje* del puente. Como ilustración veremos la función de transferencia de voltaje del puente de resonancia.

En la Fig. 13-16 aparece un puente de resonancia con cuatro resistencias iguales. Suponiendo que $Z_g = 0$ y que $Z_d \rightarrow \infty$, por sencillez, la función de transferencia de voltaje compleja es

$$K = K e^{i\phi} = \frac{E_d}{E} = \frac{R}{2R} - \frac{R}{2R + jX} = \frac{jX}{2(2R + jX)} \quad (13-30)$$

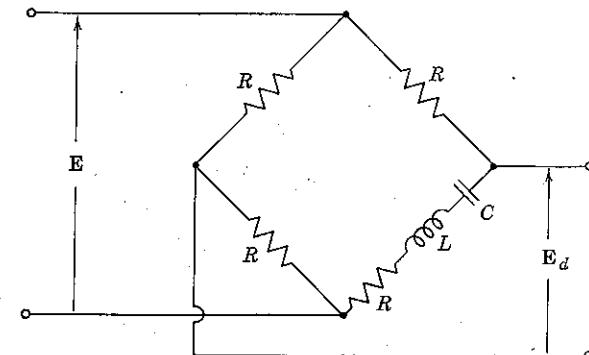


FIG. 13-16. Puente de resonancia.

donde $X = \omega L - 1/\omega C$ es la reactancia del circuito sintonizado. El estudio del comportamiento de K como función de la frecuencia proporciona una información valiosa para las aplicaciones como filtro y en realimentación.

Cuando $X = 0$, la Ec. (13-30) indica que $K = 0$, ya que la condición resistiva de equilibrio está satisfecha por el uso de cuatro resistencias iguales. El módulo y ángulo de fase de K es

$$K = \frac{1}{2 \sqrt{4 \left(\frac{R}{X}\right)^2 + 1}} \quad \phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{2R}{X} \quad (13-31)$$

Al aparecer R/X en ambas expresiones como una sola variable hace inmediato el analizar K como función de X , en vez de ω , a pesar de no ser X proporcional a la frecuencia. Se puede hacer para tener una idea inicial del comportamiento de K . La forma en que X varía con ω aparece en la Fig. 13-17 y es la familiar curva de reactancia de un circuito resonante serie. La frecuencia a la que X es cero se designa con $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. La pendiente de la curva de reactancia en $\omega = \omega_0$ es de particular interés.

$$\frac{dX}{d\omega} = L + \frac{1}{\omega^2 C} \quad \left(\frac{dX}{d\omega}\right)_{\omega_0} = L + L = 2L \quad (13-32)$$

Como la pendiente de la curva de reactancia capacitiva en $\omega = \omega_0$ es igual a la pendiente de la curva de reactancia inductiva, X es aproximadamente igual a $2L(\omega - \omega_0)$ para pequeñas desviaciones de ω de ω_0 .

En la Fig. 13-18 aparece el módulo de K en función de X/R , basado en la Ec. (13-31). El módulo de K es cero para $X = 0$. Para $(X/R)^2 \gg 4$, K se approxima al valor asintótico $1/2$ para valores de X positivos y negativos. Próximo a la resonancia, donde $(X/R)^2 \ll 4$, K llega a ser tangente a una línea de pendiente $+1/4$ o $-1/4$, según X sea positivo o negativo. Esto significa que en el equilibrio del puente $dK/dX = 1/4R$. El módulo

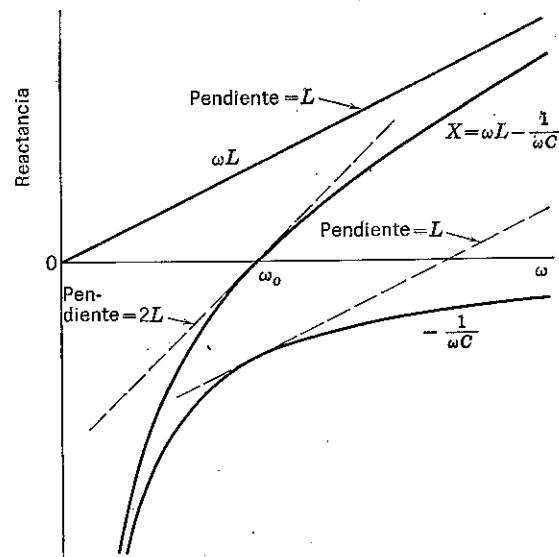
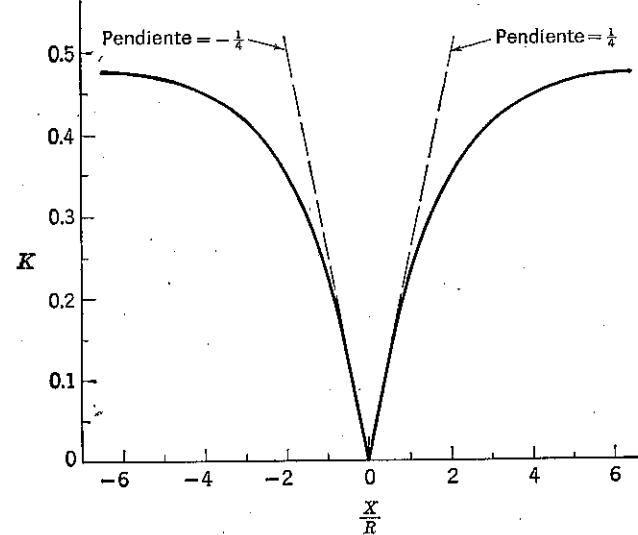


FIG. 13-17. Curvas de reactancia para el circuito resonante serie.

FIG. 13-18. Módulo de la función de transferencia de voltaje del puente de resonancia. de $dK/d\omega$ en el equilibrio se obtiene fácilmente a partir de la Ec. (13-32).

$$\frac{dK}{d\omega} = \frac{dK}{dX} \frac{dX}{d\omega} \quad \left(\frac{dK}{d\omega}\right)_{\omega_0} = \frac{1}{4R} 2L = \frac{L}{2R} \quad (13-33)$$

La curva $K - X/R$ es simétrica, pues K es una función par de X/R . Esto implica que K no es una función simétrica de frecuencias.

Una gráfica del ángulo de fase de \mathbf{K} en función de X/R , aparece en la Fig. 13-19, basada en la Ec. (13-31). Esta gráfica indica que para $X > 0$, ϕ se encuentra en el primer cuadrante, y tiende a cero cuando $X \rightarrow \infty$.

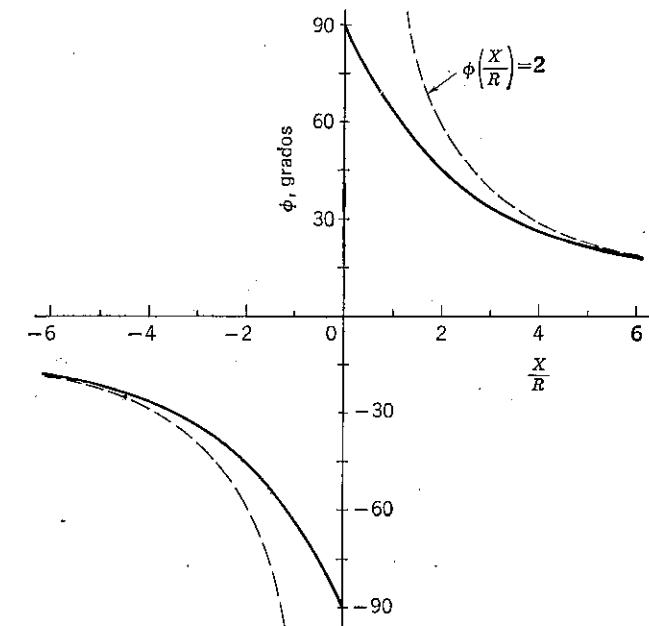


FIG. 13-19. Fase de la función de transferencia de voltaje del puente de resonancia.

Para $X < 0$, ϕ se encuentra en el cuarto cuadrante y tiende a cero cuando $X \rightarrow -\infty$. Cuando X/R es grande comparado con 2, la curva se approxima a la hipérbola $\phi(X/R) = 2$. En $X = 0$, ϕ experimenta una discontinuidad de 180° y no está definida. El módulo de \mathbf{K} es cero en este valor de X , de modo que esto no supone discontinuidad del comportamiento de \mathbf{K} .

La información de módulo y fase puede llevarse conjuntamente en el plano complejo, como muestra la Fig. 13-20. El lugar de \mathbf{K} para X variable resulta un círculo con centro en $u = 1/4$, $v = 0$ y radio $1/4$. El hecho de que sea un círculo no debe sorprender, pues se demostró en la Sec. 13-3 que la forma de la Ec. (13-30) corresponde a un círculo. Por otra parte, se puede obtener inmediatamente la ecuación del círculo a partir de la Ec. (13-31) usando la identidad trigonométrica $\sqrt{1 + \tan^2 \phi} = \sec \phi$. Entonces el módulo de \mathbf{K} es

$$K = \frac{1}{2 \sqrt{\tan^2 \phi + 1}} = \frac{1}{2} \cos \phi \quad (13-34)$$

Esta es la ecuación de un círculo en las coordenadas polares K, ϕ .

La principal objeción al análisis precedente es que no aparece explícitamente la dependencia de K con la frecuencia angular. Esto puede remediarlo introduciendo ω en las ecuaciones y en las gráficas. Una formulación en función de la frecuencia de resonancia y la Q del brazo reso-

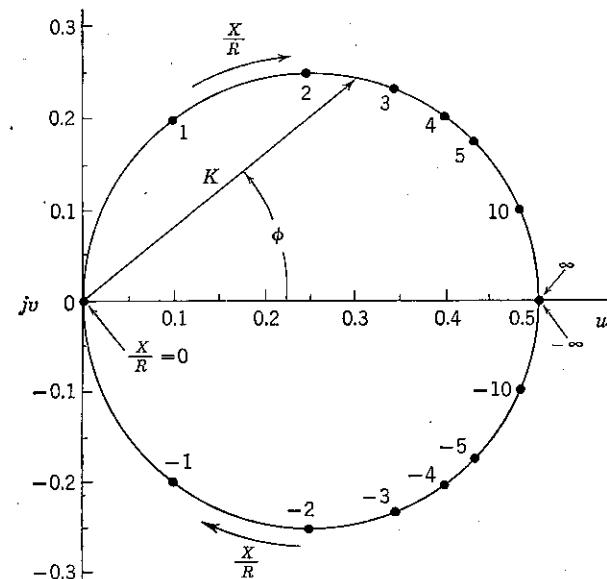


FIG. 13-20. Lugar de la función de transferencia de voltaje del puente de resonancia.

nante del puente permite expresar K en función de dos parámetros.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 R C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Con estos parámetros, X/R queda

$$\frac{X}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Introduciendo esta expresión de X/R en la Ec. (13-31).

$$K = \frac{1}{2 \sqrt{\left[\frac{2}{Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \right]^2 + 1}} = \frac{1}{2} \cos \phi \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{2}{Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$
(13-35)

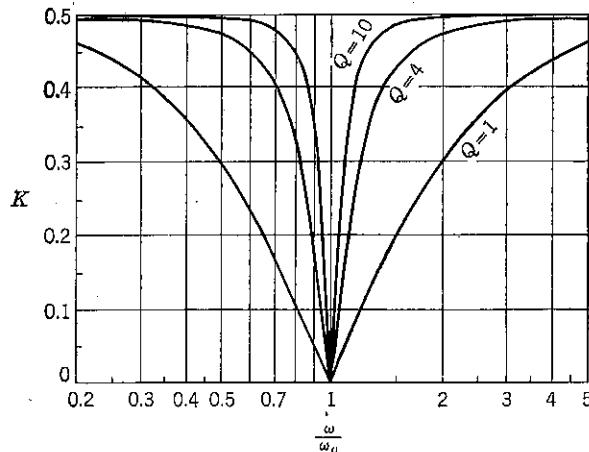


FIG. 13-21. Módulo de la función de transferencia de voltaje en función de la frecuencia.

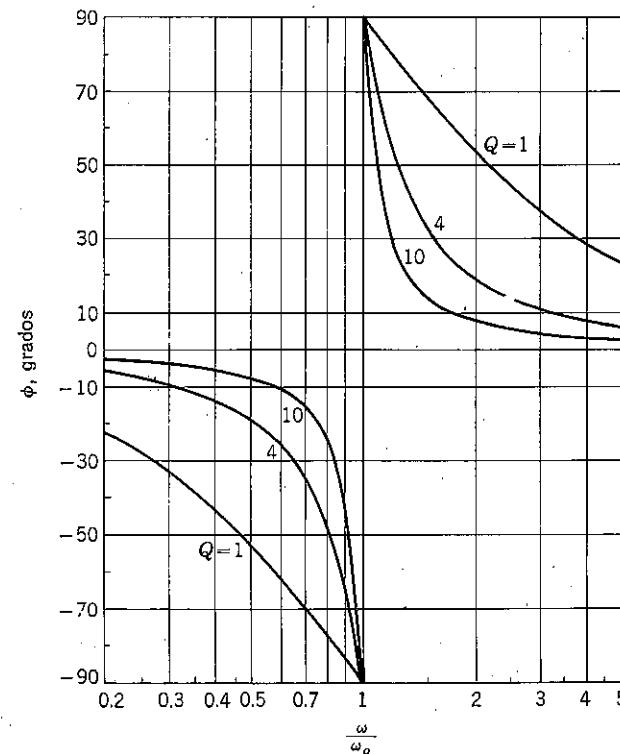


FIG. 13-22. Fase de la función de transferencia de voltaje en función de la frecuencia.

Como se esperaba, K es una función más complicada de ω que de X . En las Figs. 13-21 y 13-22 se dan curvas que muestran el comportamiento de K y ϕ en función de ω/ω_0 para tres valores diferentes de Q . La variable normalizada ω/ω_0 aparece en escala logarítmica y esto conduce a curvas simétricas. Son simétricas a causa de que $(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)$ tiene el mismo valor absoluto para $\omega_1 = k\omega_0$ que para $\omega_2 = (1/k)\omega_0$, donde k es una constante cualquiera. La escala logarítmica se caracteriza por el hecho de que $\log k$ tiene el mismo valor absoluto que $\log(1/k)$. Naturalmente, la forma de las curvas no es simétrica en una escala lineal.

El lugar de K en el plano complejo sigue siendo un círculo, como indica la función coseno de la Ec. (13-35). La escala de frecuencia a lo largo del círculo, sin embargo, es distinta de la usada para X/R en la Fig. 13-20. El cambio de K con un cambio de la frecuencia en el equilibrio del puente viene dada por la Ec. (13-33) y se puede expresar en función de Q y ω_0 .

$$\left(\frac{dK}{d\omega}\right)_{\omega_0} = \frac{L}{2R} = \frac{\omega_0 L}{\omega_0 2R} = \frac{Q}{2\omega_0} \quad (13-36)$$

13-10 Función de transferencia de voltaje del puente de Wien. En esta sección se analizará la función de transferencia de voltaje del puente de Wien que aparece en la Fig. 13-23. Aunque este puente no contiene inductancia su comportamiento es notablemente similar al del puente de resonancia. Sin embargo, existen algunas diferencias cuantitativas importantes, como veremos.

Las condiciones de equilibrio se obtienen igualando los productos de impedancias de brazos opuestos.

$$R \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) = 2R \left(\frac{R}{1 + j\omega RC} \right) \quad (13-37)$$

La ecuación de las partes reales es independiente de la frecuencia y se satisface con la elección de resistencias de la Fig. 13-23. La ecuación de las partes imaginarias define la frecuencia en que E_d es cero.

$$\omega = \frac{1}{RC} = \omega_0$$

Suponiendo que $Z_g = 0$ y que $Z_d \rightarrow \infty$, se obtiene la función de transferencia de voltaje usando la regla de división de voltaje.

$$K = Ke^{j\phi} = \frac{E_d}{E} = \frac{R}{3R} - \frac{R/(1 + j\omega RC)}{R/(1 + j\omega RC) + R + 1/j\omega C} \quad (13-38)$$

En función de $y = \omega RC$, queda, después de algunas operaciones,

$$K = \frac{j(y - 1/y)}{3[3 + j(y - 1/y)]} \quad (13-39)$$

Se ve que $K = 0$ cuando $y = 1$ que corresponde a $\omega = \omega_0$. Esta forma muestra que $(y - 1/y)$ se puede tomar como una sola variable. Tiene la

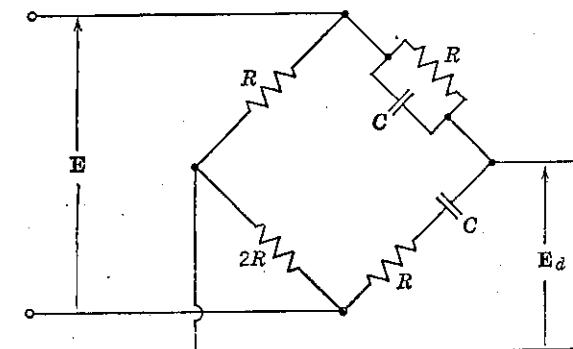


FIG. 13-23. Puente de Wien.

misma dependencia funcional con la frecuencia que la reactancia X del puente de resonancia. En el puente de resonancia,

$$\frac{X}{R} = \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}$$

y en el puente de Wien,

$$Y = y - \frac{1}{y} = \omega RC - \frac{1}{\omega RC}$$

De hecho, cuando $Q = 1$ en el puente de resonancia, $L/R = RC$ y hasta los coeficientes de X/R concuerdan con los de $Y = y - 1/y$. El módulo y fase de K en función de la nueva variable X queda, según la Ec. (13-39),

$$K = \frac{1}{3 \sqrt{9 \left(\frac{1}{Y} \right)^2 + 1}} = \frac{1}{3} \cos \phi \quad \phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{3}{Y} \quad (13-40)$$

La analogía entre el comportamiento de K como función de Y y la función de transferencia de voltaje del puente de resonancia como función de X/R se observa claramente comparando estos resultados con los de la

Ec. (13-31). Para $Y^2 \gg 9$, K tiende al valor asintótico $\frac{1}{3}$ para valores de Y tanto positivos como negativos, en vez de $\frac{1}{2}$ del caso del puente de resonancia. Próximo a la resonancia, donde $Y^2 \ll 9$, K llega a ser tangente a una línea de pendiente $+\frac{1}{9}$ o $-\frac{1}{9}$, en vez de los valores $\pm\frac{1}{4}$ del puente de resonancia. Como

$$\frac{dY}{d\omega} = RC + \frac{1}{\omega^2 RC} \quad \left(\frac{dY}{d\omega}\right)_{\omega_0} = 2RC$$

el módulo de $dK/d\omega$ en $\omega = \omega_0$ es

$$\left(\frac{dK}{d\omega}\right)_{\omega_0} = \frac{1}{9} (2RC) = \frac{2}{9\omega_0} \quad (13-41)$$

en lugar de $Q/2\omega_0$ del caso del puente de resonancia. Entonces la relación entre la pendiente del puente de resonancia y la pendiente del puente de Wien cuando ambos puentes están equilibrados a la misma frecuencia es

$$\frac{\text{Pendiente del puente de resonancia}}{\text{Pendiente del puente de Wien}} = \frac{9Q}{4}$$

y esto ocurre incluso cuando la R del puente de resonancia no es igual a la R del puente de Wien. Es evidente, según este resultado, que en tanto $Q > \frac{4}{9}$, la salida del puente de resonancia es más sensible a los cambios de frecuencia en la proximidad del equilibrio que la salida del puente de Wien.

Las características de fase del puente de Wien son también muy similares a las del puente de resonancia. Para $Y > 0$, ϕ se encuentra en el primer cuadrante y tiende a cero al tender Y a infinito. Para $Y < 0$, ϕ se encuentra en el cuarto cuadrante y tiende a cero al tender Y a $-\infty$. En $Y = 0$, ϕ experimenta una discontinuidad de 180° . Este comportamiento general es exactamente igual al del puente de resonancia. Sin embargo, en el puente de Wien para $|Y| \gg 3$, la característica de fase se approxima a la hipérbola $\phi Y = 3$, en vez de a la hipérbola $\phi(X/R) = 2$ del puente de resonancia.

Aunque las analogías y diferencias se ven fácilmente en función de la variable distorsionada, Y , ordinariamente es interesante obtener relaciones explícitas de K en función de ω . Esto se realiza en función de la variable única ω/ω_0 , pues

$$Y = \omega RC - \frac{1}{\omega RC} = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$$

Introduciendo esta expresión de Y en las funciones de amplitud y fase de la Ec. (13-40)

$$K = \frac{1}{3 \sqrt{\left[\frac{3}{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}} \right]^2 + 1}} = \frac{1}{3} \cos \phi \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{3}{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}} \quad (13-42)$$

En la Fig. 13-24 aparecen unas curvas que muestran el comportamiento de K y ϕ en función de ω/ω_0 . Se emplea de nuevo una escala logarítmica de frecuencias, para obtener unas curvas simétricas. En la Fig. 13-25 aparece el lugar circular en el plano complejo. La analogía entre estos resultados y los del puente de resonancia es evidente, sobre todo para baja Q . Los dos puentes llegan a ser casi idénticos para $Q = \frac{2}{3}$, siendo la única diferencia que el valor asintótico de K para desequilibrio extremo es en el puente de resonancia $\frac{1}{2}$ y en el de Wien $\frac{1}{3}$.

Una aplicación de los puentes de c. a. es la supresión selectiva de una frecuencia en una señal no sinusoidal, sin afectar a las relaciones entre

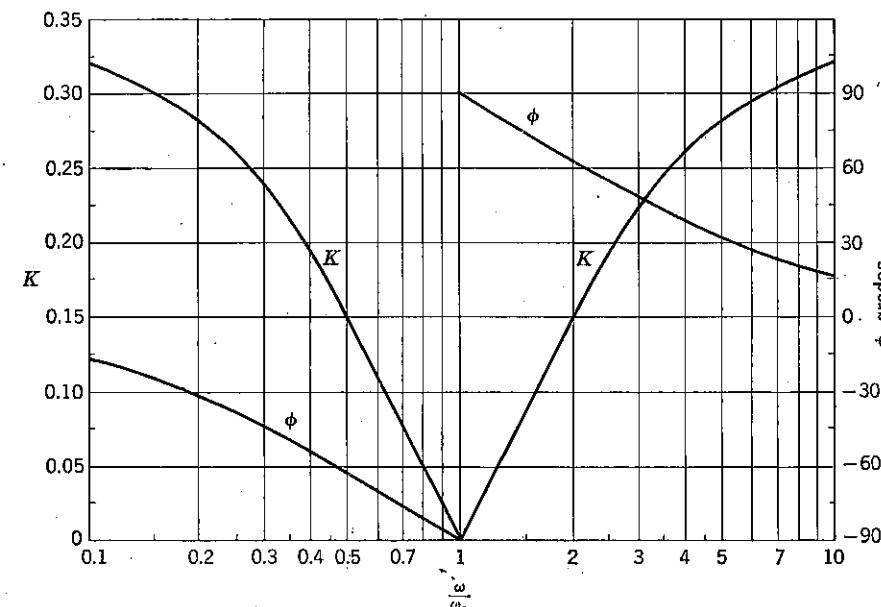


FIG. 13-24. Características de la función de transferencia de voltaje del puente de Wien.

las otras frecuencias. Supóngase que se desea eliminar el fundamental de una señal no sinusoidal aplicada al puente, de modo que los armónicos se puedan examinar separadamente. El puente de resonancia es supe-

rior al de Wien en esta aplicación, en la que se precisa distorsión mínima de los armónicos. Se pueden equilibrar ambos puentes a la frecuencia fundamental y se consigue una eliminación excelente con cualquiera de ellos.

Para evitar la distorsión relativa de los armónicos en la salida del puente de resonancia se precisa que, para $\omega = 2\omega_0$ y superiores, el término

$$\frac{2}{Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{4}{3Q} \quad \text{en } \omega = 2\omega_0$$

sea despreciable en comparación con 1 para evitar la distorsión de fase. Esto asegura un desfase cero para todos los armónicos. Para evitar la distorsión de las amplitudes relativas, la imposición es menos fuerte; $(4/3Q)^2$ debe ser despreciable comparado con 2. Estas desigualdades pueden cumplirse en el puente de resonancia usando una Q elevada.

El término correspondiente en el análisis del puente de Wien es

$$\frac{3}{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}} = 2 \quad \text{en } \omega = 2\omega_0$$

Es obvio que el 2 no es despreciable comparado con 1. Por tanto, los armónicos a la salida del puente de Wien sufrirán una distorsión consi-

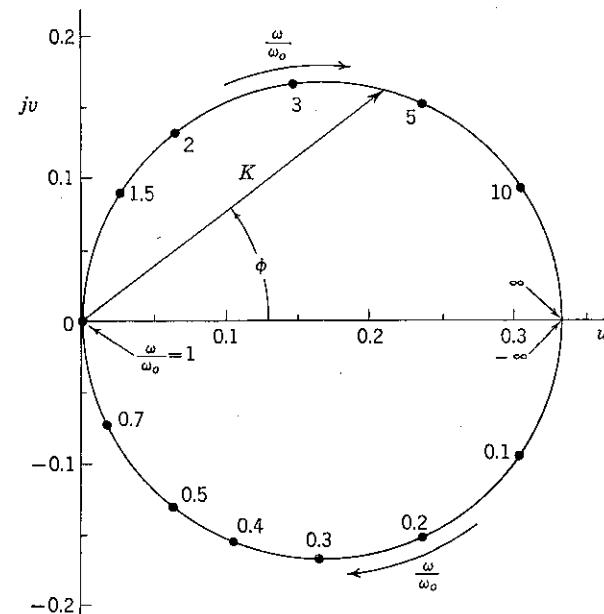


FIG. 13-25. Lugar de la función compleja de transferencia de voltaje del puente de Wien.

derable en fase y amplitud. En efecto, el funcionamiento del puente de Wien es la misma que tendría un puente de resonancia con una Q de $2/3$, que evidentemente es demasiado baja para evitar la distorsión de los armónicos a la salida del puente.

13-11. Aproximación de banda estrecha. Frecuentemente es de particular interés el comportamiento de la función de transferencia de voltaje en las proximidades del equilibrio. Cuando ω es casi igual a ω_0 se precisa calcular la diferencia entre dos números casi iguales en los puentes que hemos analizado. Por consiguiente, es ventajoso definir una desviación relativa de ω de ω_0 por

$$\delta = \frac{\omega}{\omega_0} - 1 \quad (13-43)$$

Se hizo lo mismo en el Cap. 4 cuando se encontró una situación matemática similar en el galvanómetro de vibración. Este tipo de aproximación se usa frecuentemente, pues el término $(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)$ aparece a menudo en el análisis de sistemas resonantes. Se demostró en la Sec. 4-14 que usando el desarrollo binomial que esta diferencia queda

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \approx 2\delta \quad \delta \ll 1 \quad (13-44)$$

siendo una buena aproximación si $\delta \ll 1$. Esto restringe la aplicación de la aproximación de banda estrecha a frecuencias angulares muy próximas a ω_0 .

Cuando se introduce la Ec. (13-44) en la Ec. (13-35), el módulo y fase de la función de transferencia de voltaje del puente de resonancia quedan

$$K_r \approx \frac{1}{2 \sqrt{\left(\frac{1}{Q\delta}\right)^2 + 1}} \quad \operatorname{tg} \phi_r \approx \frac{1}{Q\delta}$$

La función de transferencia de voltaje del puente de Wien queda, según la Ec. (13-42),

$$K_w \approx \frac{1}{3 \sqrt{\left(\frac{3}{2\delta}\right)^2 + 1}} = \frac{2\delta}{9} \quad \operatorname{tg} \phi_w \approx \frac{3}{2\delta}$$

Obsérvese que resulta en K_w una aproximación posterior, pues, si $\delta \ll 1$, $(3/2\delta)^2$ será siempre grande comparada con 1, si la aproximación de la Ec. (13-44) no es abusiva. Sin embargo, no es aplicable necesariamente la misma aproximación en el caso de K_r . Para Q elevada, no se deduce inmediatamente que $(1/Q\delta)^2$ es grande comparada con 1, incluso siendo

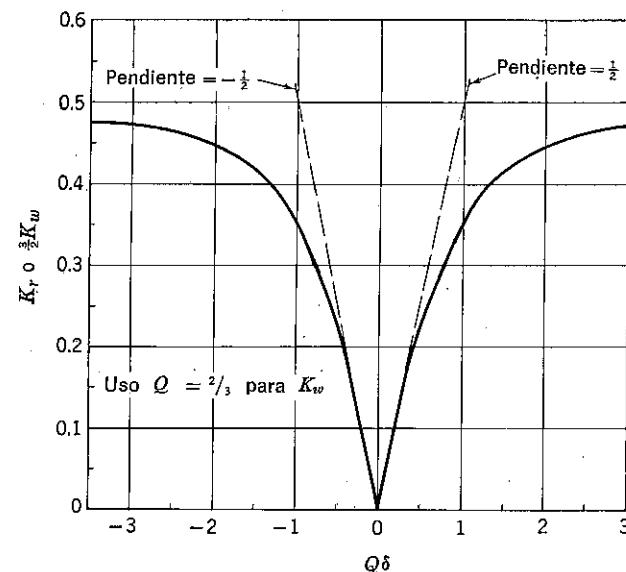


FIG. 13-26. Módulo de las funciones de transferencia de voltaje cerca del equilibrio.

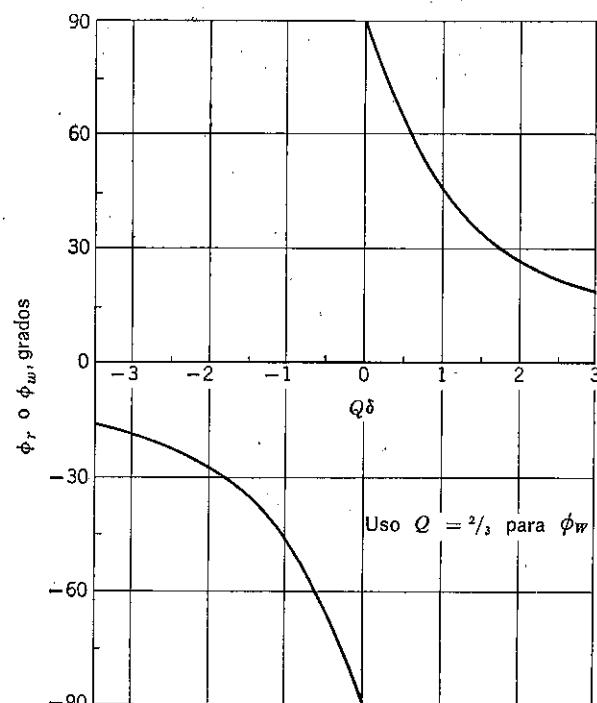


FIG. 13-27. Fase de las funciones de transferencia de voltaje.

$\delta \ll 1$. Por ejemplo, con $Q = 100$ y $\delta = 0,05$, $(1/Q\delta)^2 = 0,04$ que es pequeño comparado con 1. Sin embargo, al tender δ a cero, K_r se approxima a $Q\delta/2$, para cualquier Q finita.

En la Fig. 13-26 aparece una gráfica del módulo de la función de transferencia de voltaje. Es una curva universal para el puente de resonancia, pues Q está contenida en la escala de desviación de frecuencia. El módulo de la pendiente de la curva $K_r - Q\delta$ es $1/2$ en $\delta = 0$ y K_r tiende al valor 0,5 para $|Q\delta| \gg 1$. Se puede usar la misma curva para el puente de Wien, con $Q = 2/3$ y multiplicando la escala de amplitud por $2/3$. El módulo de la pendiente de $K_r - \delta$ en las proximidades de $\delta = 0$ es prácticamente constante para ambos puentes.

$$\left(\frac{dK_r}{d\delta}\right)_{\delta=0} = \frac{Q}{2} \quad \left(\frac{dK_w}{d\delta}\right)_{\delta=0} = \frac{2}{9}$$

El cociente de estas pendientes, $9Q/4$, concuerda con los resultados previos a causa de que el error de aproximación de banda estrecha desaparece en $\delta = 0$ y además $d\delta$ es proporcional a $d\omega$ [la constante de proporcionalidad es, según la Ec. (13-43), $1/\omega_0$].

También puede representarse con una única curva el comportamiento del ángulo de fase en las proximidades de resonancia de ambos puentes, como se muestra en la Fig. 13-27. Con $Q = 2/3$, el puente de resonancia y el de Wien tienen características de fase idénticas aun no usando la aproximación de banda estrecha.

Son evidentes las ventajas que resultan de aplicar la aproximación de banda estrecha en las relaciones obtenidas. Resulta una simplificación en los cálculos y en la complejidad de las ecuaciones. Por estos motivos se usa a menudo la aproximación de banda estrecha para frecuencias muy próximas al equilibrio del puente.

PROBLEMAS

- 13-1 (§ 2). En el puente de inductancia de la Fig. 13-2 (a), R_3 y L_3 se desconocen, $L_2 = 0,1$ henrio, $R_4 = 400$ ohmios, R_1 y R_2 ajustables. Se consigue el equilibrio del puente con $R_1 = 200$ ohmios y $R_2 = 100$ ohmios. a) Calcular R_3 y L_3 . b) ¿Los ajustes para equilibrar son independientes? c) Con $E = 2$ V eficaces, $Z_g = 50$ ohmios, $Z_d = 500$ ohmios y $\omega = 1.000$ rad/seg, supóngase que R_1 cambia un 2 por 100 y calcúlese el cambio en amplitud y fase del voltaje del detector.

- 13-2 (§ 2). En el puente de Maxwell de la Fig. 9-21 R_1 y C_1 son variables, $R_2 = R_4 = R = 1.000$ ohmios y las incógnitas, R_x y L_x , son aproximadamente de 200 ohmios y 0,2 henrio, respectivamente. Se aplica un voltaje de impedancia despreciable, 10 V eficaces, y una frecuencia angular de 5.000 rad/seg entre las uniones de R_1 , R_2 y R_4 , L_x . El mínimo voltaje perceptible en el detector es aproximadamente 0,01 V eficaces, a causa del ruido y parásitos captados por el detector. La admisión del detector es despreciable. a) Aproximadamente, ¿cuál debe ser el valor de las variables C_1 y R_1 para equilibrar el puente? b) Si R y R_1 se conocen con un límite de error del 0,1 por 100, y C_1 con un límite de error del 0,5 por

100, ¿cuáles son los límites de error en los valores medidos de R_x y L_x , ignorando la incertidumbre debida al mínimo voltaje perceptible del detector? c) Determinar las incertidumbres de R_x y L_x debidas únicamente a la mínima tensión perceptible por el detector.

13-3 (§ 3). Probar que la Ec. (13-6) se puede poner en la forma

$$\frac{E_d}{E} = \frac{A}{C} + \left(B - \frac{DA}{C} \right) \frac{1}{Cs + D}$$

a) Probar que el lugar de $1/(Cs + D)$, al variar s es un círculo en el plano complejo. b) ¿Cuál es la interpretación geométrica de los términos de la ecuación anterior A/C y $(B + DA/C)$?

13-4 (§ 4). Desarrollar la ecuación del círculo en el plano xy , del final de la Sec. 13-4, para el puente de resonancia con X variable.

13-5 (§ 4). Probar que el lugar de E_d/E en el plano uv , variando R_1 en el puente de resonancia de la Fig. 13-4, es la línea recta $v = R_2 X / [(R + R_2)^2 + X^2]$.

13-6 (§ 4). En el puente de resonancia de la Fig. 13-4 son variables R_4 y ω , e incógnitas R y L . La amplitud del voltaje del generador es constante, su impedancia interna es despreciable y la admittance del detector es despreciable. Inicialmente $R_1 = R_2 = 1.000$ ohmios, $C = 0.10 \mu\text{F}$ y $\omega = 2 \times 10^4$ rad/seg. Cuando se varía R_4 se observa una indicación del detector mínima (no nula) para $R_4 = 3.000$ ohmios. Manteniendo R_4 en 3.000 ohmios, se varía la frecuencia y se observa una indicación del detector (no nula) para $\omega = 10^4$ rad/seg. Calcular los valores de R y L .

13-7 (§ 5). Se equilibra el puente de c. a. de la Fig. 13-28 con los valores indicados de los parámetros a una frecuencia angular de $\omega = 10^4$. Los dos condensadores de $100 \mu\text{F}$ representan la capacidad parásita a tierra. a) Calcular (numéricamente) dos representaciones equivalentes, pero distintas, del brazo incógnita Z . b) ¿Qué parámetros del puente variaría usted y por qué? c) Si E es un voltio eficaz, ¿cuál sería el voltaje del detector eliminando por completo la incógnita Z ? Supóngase impedancia cero en el generador y admittance cero en el detector.

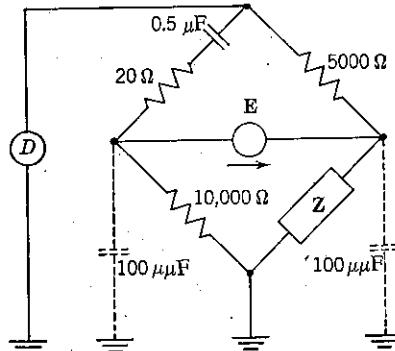


FIG. 13-28. Puente con capacidades parásitas.

13-8 (§ 6). Demostrar que la segunda derivada con respecto a X de la Ec. (13-19), para $X = 0$, es positiva si $R_1 I_1 > R_2 I_2/2$, y negativa invirtiendo esta desigualdad.

13-9 (§ 7). Con $F = Fe^{j\omega}$, ¿para qué valor de F es máximo el módulo del factor del puente de la Ec. (13-24) y cuál es la expresión de este módulo máximo?

13-10 (§ 8). En el puente de medida de desplazamientos de la Sec. 13-8, con brazos resistivos iguales, se produce un pequeño desequilibrio con un cambio dC de C_3 . Calcular el error en dE_d si ω se ha desviado en un 10 por 100 de su valor nominal de diseño $\omega = 1/RC$.

13-11 (§ 8). Se usa el puente de la Fig. 13-14 como una prueba de espesor para indicar la uniformidad de la pintura depositada sobre una lámina de metal. Una placa del condensador C_3 es un disco de metal de una pulgada cuadrada de superficie apoyada en la superficie pintada. La constante dieléctrica de la pintura es 5. La otra placa de C_3 es la lámina metálica. Supóngase $R_1 = R_2 = 1.000$ ohmios, $f = 1.000$ cps, impedancia del generador cero, admittance del detector cero, efectos de borde despreciables y un contacto franco del disco del condensador. a) Si se precisa una indicación cero del detector para un espesor de pintura nominal de 0,002 pulgadas, ¿qué valor de C_4 es necesario? b) La deflexión más pequeña legible en el detector (a partir de cero) es 0,1 mV eficaces. Aplicando un voltaje de 1 V eficaz, determinar el menor cambio detectable del espesor de la pintura de su valor nominal. c) Para qué valor de $R_1 = R_2$ será máxima la sensibilidad del puente y cuál es el mínimo cambio detectable del espesor de la pintura correspondiente?

sador C_3 es un disco de metal de una pulgada cuadrada de superficie apoyada en la superficie pintada. La constante dieléctrica de la pintura es 5. La otra placa de C_3 es la lámina metálica. Supóngase $R_1 = R_2 = 1.000$ ohmios, $f = 1.000$ cps, impedancia del generador cero, admittance del detector cero, efectos de borde despreciables y un contacto franco del disco del condensador. a) Si se precisa una indicación cero del detector para un espesor de pintura nominal de 0,002 pulgadas, ¿qué valor de C_4 es necesario? b) La deflexión más pequeña legible en el detector (a partir de cero) es 0,1 mV eficaces. Aplicando un voltaje de 1 V eficaz, determinar el menor cambio detectable del espesor de la pintura de su valor nominal. c) Para qué valor de $R_1 = R_2$ será máxima la sensibilidad del puente y cuál es el mínimo cambio detectable del espesor de la pintura correspondiente?

13-12 (§ 9). En las curvas de reactancia de la Fig. 13-17 la pendiente de la curva de reactancia capacitiva es k veces la pendiente de la curva de reactancia inductiva para $\omega = \omega_1 < \omega_0$, donde k es una constante. a) Para qué valor de ω , en función de ω_1 , la pendiente de la curva de reactancia capacitativa es igual a $1/k$ veces la pendiente de la curva de reactancia inductiva? b) Determinar una expresión de la relación de reactancias totales en estas dos frecuencias.

13-13 (§ 10). Demostrar que la Ec. (13-39) se deduce de la Ec. (13-38).

13-14 (§ 10). Se aplica la onda cuadrada de la Fig. 11-11 al puente de resonancia de la Fig. 13-16. La frecuencia angular fundamental de la onda cuadrada es igual a $\omega_0 = 10.000$ rad/seg = $1/\sqrt{LC}$. Con $Q = 2$ calcular las amplitudes relativas del tercero y quinto armónicos en la salida del detector y su retardo relativo.

13-15 (§ 10). El circuito cruzado sin pérdidas de la Fig. 13-29 es equivalente a un puente. E es una fuente de frecuencia variable. a) Determinar la frecuencia angular a la que es cero el voltaje del detector. b) Obtener una expresión de la función de transferencia de voltaje, suponiendo impedancia del generador cero y admittance del detector cero. c) ¿Qué relación debe existir entre L_1 y L_2 para que la frecuencia hallada en la parte a) sea real?

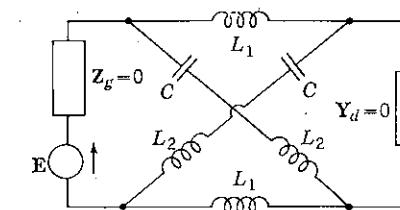


FIG. 13-29. Circuito cruzado sin pérdidas.

13-16 (§ 10). Determinar una expresión del módulo de $dK/d\omega$ para $\omega = \omega_0$ para el puente de Wien de la Fig. 13-23 intercambiando el detector y el generador. Compárese con la Ec. (13-41).

13-17 (§ 10). Se usa el puente de Hay de la Fig. 9-20 con una impedancia del detector infinita y una impedancia del generador cero. Consideren el voltaje del generador como una subida hacia la unión de R_1 y R_2 y el voltaje del detector como una subida hacia la unión de R_2 y R_3 . Supóngase que $R_1 = R_2 = R_3 = R$, $R_4 = 2R$, $C_1 = C$ y $L_3 = L$. a) Determinar una expresión de la función de transferencia de voltaje K. b) ¿En qué condiciones K es cero? c) Determinar una expresión del módulo de $dK/d\omega$ en el equilibrio del puente. d) Probar que el resultado de la parte c) no es afectado al intercambiar el generador y el detector.

13-18 (§ 11). Cuando la frecuencia de E , en el puente de la Fig. 13-16, se desvía un 5 por 100 del valor en que $E_d = 0$, E_d/E debe ser, con un error máximo del 1 por 100, 0,5. a) ¿Qué Q se precisa? b) ¿Qué error produce en el cálculo el usar la aproximación de banda estrechísima? c) ¿Cuál es el desfase de E_d con respecto a E para un 5 por 100 de desviación de frecuencia, usando la Q de la parte a)?

CAPITULO 14

TRATAMIENTO DE DATOS

El tratamiento de datos experimentales es una materia digna de ser bien estudiada. Al procesar los datos, no solo se necesita exactitud y aprovechamiento del tiempo, sino que puede ser de la máxima importancia la selección y presentación de los resultados. Cuando se planea de antemano el tratamiento de datos es frecuente tener bien definida la cantidad y alcance de los datos experimentales que se necesitan. Más aún, planificando previamente el tratamiento de datos se pueden sugerir algunas técnicas experimentales.

En primer lugar se discuten las convenciones aceptadas para reflejar la incertidumbre de los resultados, en función de cifras significativas. La breve relación que se da ayudará a aclarar esta materia. Se dan varios sistemas para mejorar la precisión de ciertos tipos de cálculos con regla. Esto, unido a las propiedades del desarrollo binómico, amplía las posibilidades de cálculos exactos sin recurrir a métodos complicados o a una calculadora. Un aspecto importante de presentar los resultados experimentales son las representaciones gráficas, por lo que damos un resumen de ciertas reglas y prácticas aceptadas sobre este punto. Un gráfico es un problema muy superior al simple hecho de representar los puntos experimentales. De hecho, es una herramienta de análisis muy práctica y la linearización de gráficos es una técnica muy importante del tratamiento de datos. La representación de resultados experimentales mediante una ecuación, es deseable en muchos casos y se dan una serie de métodos, tanto para casos racionales como empíricos. Se exponen con detalle varios ejemplos sacados del campo de medidas eléctricas.

14-1. Cifras significativas. Una expresión numérica relativa a una cantidad medida posee por lo menos tres características diferentes, que, expresadas diagramáticamente, son:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Cifras} \\ \text{significativas} \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \text{Colocación} \\ \text{de la coma decimal} \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \text{Unidades o} \\ \text{dimensiones} \end{array} \right)$$

Las cifras significativas son dígitos que contienen una información llena de sentido sobre la magnitud de la cantidad, y deben distinguirse claramente de la información que da la coma decimal.

A causa de la relación entre las tres características, existe la posibilidad de ambigüedad y confusión. Por ejemplo, si se ha determinado una resistencia con tres cifras significativas, el resultado puede expresarse de varias formas:

804×10^2 ohmios	80,400 ohmios
80,4 kiloohmios	80,40 kiloohmios
0,0804 megaohmios	0,08 megaohmios

Sin embargo, solamente las tres expresiones de la izquierda dan una idea clara del número de cifras significativas, de acuerdo con las convenciones y prácticas aceptadas. Estas convenciones son:

1. El último dígito expresado representa el punto de incertidumbre.
2. Se entiende (a menos que se avise lo contrario) que hay una incertidumbre *total* de una unidad en el último dígito. Por ejemplo, el tercer dígito en la resistencia está más cerca de 4 que de 3 ó 5. Así, pues, la resistencia tiene un valor entre 80,35 y 80,45 kiloohmios.
3. Para evitar la necesidad de poner ceros después del dígito incierto, se debe utilizar, cuando sea necesario, una potencia apropiada de 10.
4. El dígito incierto debe escribirse de menor tamaño y ponerse como subíndice de los otros. Por ejemplo, 0,080₄ megaohmios.

Cuando se redondea hasta un número especificado de cifras significativas, se pueden seguir las siguientes reglas:

1. Si el primer dígito que debe despreciarse es menor que 5 el dígito precedente permanece el mismo.
2. Si el primer dígito que debe despreciarse es mayor que 5 el dígito precedente se aumenta en 1.
3. Si el primer dígito que debe despreciarse es igual a 5 y va seguido de dígitos mayores que cero, el dígito que antecede al 5 debe aumentarse en 1.
4. Si el primer dígito que debe despreciarse es igual a cinco y va seguido por ceros, o no le sigue ningún otro dígito, el dígito precedente al 5 es redondeado a su valor par más próximo. (La elección de *par* en lugar de *impar* es arbitraria. La idea es que una convención permanente producirá un efecto equilibrador a lo largo de un gran número de casos.)

Así, pues, redondeando hasta tres cifras significativas, 52,449 pasa a ser 52,4, 52,46 pasa a ser 52,5, 52,4501 pasa a ser 52,5, 52,45 pasa a ser 52,4 y 52,35 pasa a ser 52,4.

En las sumas, restas, multiplicaciones y divisiones es conveniente arrastrar más dígitos de los que van a ser utilizados al final. Los dígitos superfluos se eliminan en el resultado final. En la suma o resta de dos números no se debe retener ningún dígito, aun cuando sea significativo, que esté colocado más de un lugar más allá del último dígito significativo del otro número. Por ejemplo, los números 62,1 y 0,533 se suman como

$62,1 + 0,53 = 62,63$, y entonces se desprecia el 3. Los números 62,1 y 0,53 se suman como $62,1 + 0,55 = 62,65$ y este valor se redondea al valor par más cercano, eliminando el 5. El redondear la suma exacta 62,653 a 62,7 no tiene significado alguno, ya que el 0,003 queda totalmente absorbido por la incertidumbre total 0,1, del número mayor.

En la multiplicación o división de dos números se deben considerar las incertidumbres porcentuales de cada número. La mayor incertidumbre porcentual es dominante en el resultado como se demuestra en las Ecs. (7-21) y (7-22). Por tanto, el número que tiene la menor incertidumbre porcentual puede redondearse hasta que presente una incertidumbre porcentual igual a la del otro, antes de realizar la multiplicación o división. Por ejemplo, la incertidumbre de 0,47 es aproximadamente ± 1 por 100 y la de $10,23 \pm 0,05$ por 100. Por tanto, su producto puede obtenerse de $0,47 \times 10,2 = 4,79_4$ y, redondeando, a 4,8, que representa una incertidumbre de un ± 1 por 100.

En los cálculos estadísticos, el número de cifras significativas que se retienen en la media es normalmente una más que en los datos primarios. Esto se justifica porque la desviación normal de la media es $1/\sqrt{n}$ veces la de una variante individual. Las medidas de incertidumbre, tales como desviación normal y límite de error, se expresan normalmente con una cifra significativa y no necesitan incluir más de dos.

14-2. Técnicas con regla de cálculo. Si se tiene cuidado, se puede multiplicar o dividir dos números con una regla de cálculo de 10 pulgadas, de buena calidad, con una precisión de una fracción de 10 por 100. La precisión del resultado puede mejorarse usando ciertas técnicas auxiliares. Varios ejemplos, basados en simples relaciones algebraicas, aclararán algunas de las posibilidades.

a) *Productos.* El producto ab puede expresarse siempre como

$$ab = a(c + d) = ac + ad \quad (14-1)$$

en que $b = c + d$. Si se elige c como una potencia de 10, ac queda determinado exactamente. Entonces $d = b - c$ puede multiplicarse por a usando la regla, y su resultado sumarse a ac . El resultado final puede ser más preciso que el resultado directo en la regla de ab , sobre todo cuando $|d| \ll c$. Por ejemplo, si $a = 1,835$ y $b = 11,67$, el producto directo con regla es $21,4_0$. Con $c = 10$, $ac = 18,35$ y $d = 1,67$. La regla da $ad = 3,06_2$. Sumando esto a ac se obtiene un resultado más preciso $ab = 21,41_2$.

b) *Cocientes.* El cociente a/b puede expresarse como

$$\frac{a}{b} = \frac{b + d}{b} = 1 + \frac{d}{b} \quad (14-2)$$

en que $d = a - b$. La diferencia, d , puede ser positiva o negativa y se calcula a mano. El cociente d/b se halla con la regla. El resultado puede

ser más preciso que el cálculo directo de a/b con la regla, especialmente si $|d| \ll b$. Por ejemplo, con $a = 76,85$ y $b = 66,42$, el cociente directo con regla es $1,15_8$. Utilizando $d = 10,43$, el resultado indirecto, más preciso, es $1,157_4$.

Utilizando la regla de suma de proporciones, el cociente a/b también puede expresarse como

$$\frac{a}{b} = \frac{a + ca/b}{b + c} \quad (14-3)$$

en que c es un valor arbitrario. Si se elige c de forma que el denominador, $b + c$, sea una potencia de 10, entonces ca/b puede obtenerse con la regla. Al añadir a a este resultado, la coma viene fijada por $b + c$. El resultado final puede ser más preciso que el cálculo directo con regla de a/b , particularmente si $|c| \ll b$. Por ejemplo, si $a = 27,64$ y $b = 12,32$, el cociente directo, con la regla, es $2,24_1$. Con $c = -2,32$ resulta $b + c = 10$ y el resultado con regla para $ca/b = -5,20$. Por tanto, el numerador es $27,64 - 5,20 = 22,44$. El resultado final con este método indirecto es más preciso, $2,244$.

c) *Diferencia entre fracciones.* La diferencia entre dos fracciones a/b y c/d es

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} \quad (14-4)$$

Cuando las dos fracciones son casi iguales, los pequeños errores de la regla pueden quedar muy aumentados si se calculan directamente las fracciones y, después, se restan. En su lugar deben obtenerse cuidadosamente los productos ad y bc , a mano si es preciso, y hallar su diferencia. Esta diferencia puede dividirse entonces por bd , usando la regla. Por ejemplo, con $a = 11$, $b = 120$, $c = 60$ y $d = 665$, la regla de cálculo da $a/b = 0,091_7$ y $c/d = 0,090_2$. La diferencia es un tanto vaga, $0,001_5$. Alternativamente la diferencia entre los productos $ad = 7315$ y $bc = 7200$ es de 115. Dividiendo esto, con regla, entre el producto $bd = 798$ da un resultado mucho más preciso, $0,00144_1$.

Puede ser útil otra técnica que se basa en el primer procedimiento descrito para los cocientes, si las diferencias entre a , b y c , d son pequeñas comparadas con a y c respectivamente. Haciendo $B = a - b$ y $D = c - d$, resulta

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = 1 + \frac{B}{b} - 1 - \frac{D}{d} = \frac{B}{b} - \frac{D}{d} \quad (14-5)$$

Como aclaración, supóngase $a = 34,2$, $b = 31,0$, $c = 11,1$ y $d = 10,2$. Entonces $B = 3,2$ y $D = 0,9$. Dividiendo estas diferencias por b y d respectivamente, con la regla, se obtiene $0,103_2 - 0,088_2 = 0,015$. En este

caso el resultado tiene una cifra significativa más que el obtenido por cálculo directo de a/b y c/d con la regla.

14-3. Cálculos basados en la expansión binómica. Para la expansión binómica

$$(a+b)^n = \frac{a^n}{0!} + \frac{na^{n-1}b}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \dots$$

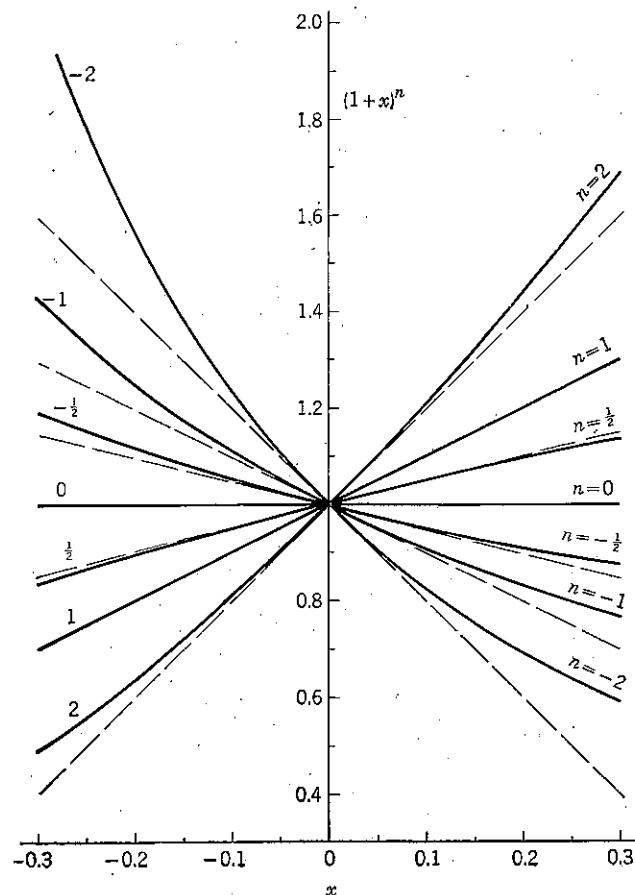


FIG. 14-1. $(1+x)^n$ para varios valores de n .

se puede sacar factor común al término a^n . Entonces, con $x = b/a$, la serie que está multiplicada por a^n queda

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2} + \dots \quad (14-6)$$

Si $|x| \ll 1$, el término x^2 es muy pequeño comparado con 1 y pueden usarse los dos primeros términos para cálculos aproximados.

La serie es particularmente útil para el cálculo numérico de raíces cuadradas de números cercanos a la unidad. Con $n = \pm 1/2$,

$$(1+x)^{\pm 1/2} = 1 \pm \frac{x}{2} + \dots \quad (14-7)$$

Por ejemplo:

$$\sqrt{1,01} \approx 1,005$$

$$\sqrt{0,99} = \sqrt{1 - 0,01} \approx 0,995$$

$$\frac{1}{\sqrt{1,02}} \approx 1 - 0,01 = 0,99$$

$$\frac{1}{\sqrt{0,98}} \approx 1 + 0,01 = 1,01$$

Otro caso especial que aparece frecuentemente es el de $n = -1$. Entonces la Ec. (14-6) queda

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \dots \quad (14-8)$$

Por ejemplo, $1/1,01 \approx 0,99$ y $1/0,98 \approx 1,02$.

Otros valores de n que aparecen muchas veces son ± 2 y $\pm 3/2$. La expansión binómica es útil en estos casos y en otros. La aceptabilidad de la aproximación puede, en todos los casos, estudiarse, calculando el término en x^2 de la serie. En la Fig. 14-1 aparecen gráficos de estos casos especiales para valores de x próximos a cero. Con estas curvas se puede obtener una idea gráfica del error introducido en la aproximación lineal.

14-4. Representación gráfica de datos. Un gráfico es un instrumento cuantitativo que posee muchas ventajas. Permite darse cuenta del comportamiento en conjunto de las cantidades. Se ven inmediatamente características tales como máximos, mínimos, pendientes y puntos de inflexión. El gráfico puede usarse para hallar áreas y derivadas. Permite comparar dos o más curvas y es especialmente valioso cuando se comparan los resultados experimentales con la teoría. Todas estas ventajas pueden ser aprovechadas solamente si los gráficos están bien hechos. Se debe prestar especial atención a cada paso que necesiten de juicio humano, entre los que están la elección del papel adecuado y las escalas, la representación de los puntos experimentales y el trazado de las curvas. Es necesario marcar las escalas y titular el gráfico para mayor claridad y utilización. Además se debe incluir otros datos informativos de forma que el gráfico represente un sumario completo e inteligible.

La elección del papel adecuado se puede hacer entre los muchos tipos del mercado. Los cuatro más corrientes son el papel de coordenadas rectangulares uniformes, de coordenadas polares, semilogarítmico y log-log.

También hay, además, muchos otros tipos de papel para gráficos. Una vez elegido el tipo de papel, aún queda determinar otras cosas, como tamaño, color, calidad y separación de líneas. Todos estos factores deben ser cuidadosamente pensados o, si no, cambiados según las pruebas lo aconsejen.

La elección de las escalas se facilita siguiendo ciertas normas. Primero, la escala de la variable independiente, según lo ha establecido la costumbre, siempre debe ser la abscisa del gráfico. Segundo, las escalas numéricas deben elegirse de forma que las coordenadas de cualquier punto de la curva resultante puedan ser rápida y fácilmente leídas. Esto significa que debiera ser posible una rápida interpretación visual sin necesidad de cálculos auxiliares. Tercero, las escalas deben elegirse de forma que la división más pequeña corresponda aproximadamente a la incertidumbre de los datos. Las escalas no necesitan empezar en cero, a menos que el origen tenga una significación especial. Pueden aparecer otros factores, según sea la naturaleza de los datos. Si se eligen las variables, de forma que la curva resultante sea aproximadamente una línea recta, entonces la escala debe elegirse para que diste una pendiente cercana a la unidad. El uso de variables normalizadas puede mejorar la utilidad del gráfico. Estas cuestiones deben ser decididas a la vista de cada caso particular y necesitar de juicio cuidadoso y ponderado.

Los puntos experimentales pueden representarse de distintas formas y deberán designarse siempre con claridad y representarse todos, si es posible. Las designaciones más usuales son cruces o círculos. Se utilizan otros varios símbolos, tales como triángulos y cuadrados, especialmente si es necesario distinguir entre distintos grupos de datos que aparezcan en el mismo papel. Aun cuando las curvas pasen a través de todos los puntos experimentales, los símbolos de los puntos deben quedar claramente visibles. Esto identifica la curva como un resultado experimental. Hay quienes son partidarios de utilizar rectángulos, más bien que puntos, y los lados de cada rectángulo son iguales a la incertidumbre de la variable correspondiente. Cuando una de las variables es mucho más precisa que la otra, normalmente la variable independiente, el rectángulo queda prácticamente reducido a un segmento lineal, y da una inmediata representación gráfica de la incertidumbre de un «punto» dado.

No es siempre sencillo trazar la mejor curva que pase por todos los puntos. Con frecuencia es necesario decidir una media entre la suavidad de la curva y su cercanía a los puntos experimentales. Normalmente, la curva no debiera contener cúspides, discontinuidades u otras peculiaridades, particularmente si hay razones teóricas para esperar un resultado suave. No es necesario que la curva pase por todos los puntos experimentales, pero debe quedar el mismo número de puntos a cada lado de la curva. Los gráficos de líneas partidas, tales como la curva de calibrado de la Fig. 5-6, son excepciones.

Finalmente, es esencial incluir notas, títulos y otros detalles para dar una información completa y exacta. Las escalas de las coordenadas deben ser marcadas a intervalos prudentes y numeradas. No es necesario numerar todos los intervalos. Debe designarse el nombre de la cantidad representada por la escala, junto con sus unidades. El título del gráfico debe ser breve pero descriptivo. Debe incluirse otro tipo de información, tal como notas que definen los distintos grupos de símbolos utilizados para los puntos experimentales. El gráfico completo, si está bien hecho, da una presentación clara y completa de los resultados experimentales y es más útil que muchas palabras.

14-5. Gráficos lineales. Siempre que sea posible, el papel del gráfico y las variables de las coordenadas deben elegirse de forma que la representación se acerque lo más posible a una línea recta. Aparte del hecho obvio de que la recta es la curva más sencilla, presenta tantas ventajas esta técnica, que debe dársele toda consideración. Puede ayudar a descubrir errores experimentales con un mínimo de cálculo. Reduce las complicaciones gráficas en cuanto a la representación y trazado de una curva suave. Si se planifica de antemano, las variables usadas para obtener el gráfico lineal pueden servir como guía para procedimientos experimentales, estableciendo zona y espaciamiento de los puntos experimentales necesarios para trazar la recta. Finalmente, un gráfico lineal puede conducir a una sencilla formulación de todos los resultados en función de una ecuación con todas las constantes evaluadas numéricamente.

La linearización de un gráfico normalmente requiere un estudio y un tratamiento individual para cada forma funcional. Esto necesita del ingenio del realizador, ya que hay muy pocas reglas que seguir. El sistema puede describirse a base de ejemplos. Se pueden analizar, linearizadas, varias funciones que se presentan frecuentemente en las medidas eléctricas. En las secciones que siguen se dan aplicaciones detalladas.

La función

$$y = \frac{ax}{b + cx} \quad (14-9)$$

en la que a , b y c son constantes, aparece frecuentemente en los circuitos donde se utiliza un elemento variable. Un ejemplo sencillo es la determinación de la resistencia interna de una batería como se describe detalladamente en la Sec. 8-11. En ese caso la variable dependiente era la lectura del voltímetro $V = y$, y la variable independiente era el reóstato de carga $R_L = x$.

$$V = \frac{ER_L}{R + R_L}$$

El procedimiento para linearizar el gráfico de la Sec. 8-11 se puede aplicar en general siempre que se encuentre la forma de la Ec. (14-9). Se introducen las nuevas variables $1/y$ y $1/x$. Entonces la Ec. (14-9), en función de las nuevas variables, queda

$$\frac{1}{y} = \frac{b + cx}{ax} = \frac{b}{a} \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{c}{a} \quad (14-10)$$

La representación de $1/y$ en función de $1/x$ en un papel uniforme de coordenadas rectangulares da una línea recta de pendiente b/a y corte c/a .

Otra forma que ocurre con frecuencia es

$$y = cx^n \quad (14-11)$$

en que c y n son constantes. El caso de $n = 1$ es obvio, puesto que la Ec. (14-11) es entonces lineal. En muchos problemas eléctricos se dan casos de $n \neq 1$. Un ejemplo, propuesto con detalle en la Sec. 14-6, es la relación entre la potencia y la corriente para una determinada carga pasiva. Otro ejemplo es la deflexión angular del movimiento de un instrumento de medida con ley cuadrática frente a corriente o tensión aplicada cuando la «constante» del instrumento es esencialmente constante. Las pérdidas por histéresis o corrientes parásitas en función de la frecuencia o densidad del flujo magnético entran dentro de esta forma. La ley de la corriente en función de la tensión para un diodo rectificador toma una forma muy aproximada a la de la Ec. (14-11). Existen otros muchos ejemplos de esta forma.

Es posible, por dos caminos, linearizar la función de la Ec. (14-11). Si se conoce n teóricamente, como es el caso normal, se puede representar y en función de x^n . La curva resultante será una línea recta de pendiente c , con paso por el origen, supuesto que la ecuación teórica esté de acuerdo con el experimento. Alternativamente, se puede representar y en función de x , en un papel log-log, sin necesitar conocer n ni c de antemano. Si la Ec. (14-11) es una representación exacta de los datos, una curva suave a través de los puntos experimentales será una línea recta. Esto es evidente si se toman logaritmos de ambos términos de la Ec. (14-11).

$$\log y = \log cx^n = \log c + n \log x \quad (14-12)$$

La pendiente geométrica de esta curva es n y la intersección, $\log c$, ocurre para $y = c$, siendo $x = 1$. Esta representación tiene la ventaja de que no es necesario conocer n ni c con anterioridad. Más aún, tiene escalas en que se puede leer directamente x e y .

La función exponencial

$$y = ce^{ax} \quad (14-13)$$

en que c y a son constantes, también se da con frecuencia en fenómenos eléctricos. Ejemplos de esto han aparecido en este libro con el comportamiento transitorio de los galvanómetros y circuitos eléctricos. Muchos otros transitorios físicos siguen esta forma exponencial. Una forma de linearizar un gráfico que sigue la forma de la Ec. (14-13) es, por supuesto, representar y en función de e^{ax} , usando papel de coordenadas rectangulares uniformes. Esto se puede realizar si se conoce a , pero las escalas resultantes y los cálculos exponenciales no son convenientes. Un procedimiento más satisfactorio es utilizar papel semilogarítmico. Resulta una línea recta, como puede verse, tomando logaritmos en ambos lados de la Ec. (14-13).

$$\log y = \log c + (a \log e)x \quad \log e = 0,4343 \quad (14-14)$$

Cuando se representa en papel semilogarítmico, usando la escala lineal para x , la línea recta tiene una pendiente $a \log e$ con intersección $y = c$, para $x = 0$. Los valores de x e y pueden leerse directamente en las escalas y no se necesita conocer anteriormente las constantes a y c . Esta representación semilogarítmica se utiliza muchas veces para determinar la constante a por medida indirecta de x e y . También se utiliza para determinar c por extrapolación si el valor de y para $x = 0$ no se puede obtener experimentalmente.

Estos ejemplos no acaban con las posibilidades ni muchos menos. Por ejemplo, la función

$$y = \frac{a}{\sqrt{b^2 + x^2}} \quad (14-15)$$

está linearizada en la Sec. 14-8. Hay muchas otras formas funcionales que se prestan a este tratamiento. Debemos resaltar que es más que la simple cuestión de obtener un gráfico en línea recta. Como se verá por

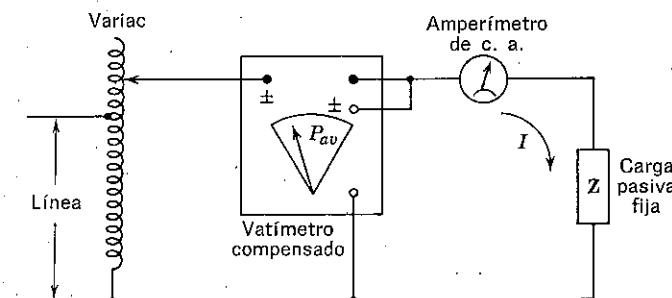


FIG. 14-2. Medidas de potencia con carga pasiva.

los ejemplos que siguen, puede suministrar los medios para la determinación gráfica de cantidades desconocidas y para detectar desvíos sistemáticos de lo que se espera en teoría. Más aún, puede influir mucho en la planificación de procedimientos experimentales, tal como es el definir las regiones en las que los datos experimentales son más útiles para análisis posteriores.

14-6. Gráfica lineal para medidas de potencia. Para aclarar algunas de las técnicas y ventajas de los gráficos lineales, expondremos las medidas de potencia, utilizando el circuito de la Fig. 14-2: La potencia media, P_{av} , comunicada a una carga pasiva, Z , se mide por medio de un vatímetro compensado para la zona de corrientes I de la carga. La resistencia del amperímetro es despreciable. Para controlar la tensión aplicada al circuito se utiliza un transformador variable. El objetivo es determinar la componente resistiva, R , de la impedancia fija de la carga. La ecuación teórica de esta medida es, según la Sec. 2-8,

$$P_{av} = \frac{1}{2} I^2 \operatorname{Re} \{Z\} = \frac{1}{2} R I^2 \quad (14-16)$$

Esta ecuación es de la forma de la Ec. (14-11) en la que n es 2 teóricamente.

Los datos primarios se dan en la Tabla 14-1. Se puede dibujar un gráfico de P_{av} en función de I , usando los datos primarios como aparecen en la Fig. 14-3. Este gráfico es útil para comprobar la continuidad de los datos, pero no tiene otro valor. Por ejemplo, en este gráfico no resulta aparente el valor de la resistencia de carga. Más aún, el gráfico tampoco revela si existe alguna desviación de los datos a partir del resultado teórico esperado.

TABLA 14-1. MEDIDAS DE POTENCIA Y CORRIENTE

I amp de pico	P_{av} vatio
0	0
1,0	20
2,0	80
3,0	180
4,0	325
4,5	415
5,0	530
5,5	655

Si se dibuja P_{av} en función de I^2 , como en la Fig. 14-4, se consigue un mejor resultado. Teóricamente debería resultar una línea recta. Sin embargo, aunque las líneas experimentales se hallan sobre una recta para pequeños valores de la corriente, se van desviando sistemáticamente de la curva teórica de trazos, para mayores valores de I . Una explicación posible es que la resistencia de la carga aumenta debido a la elevación de

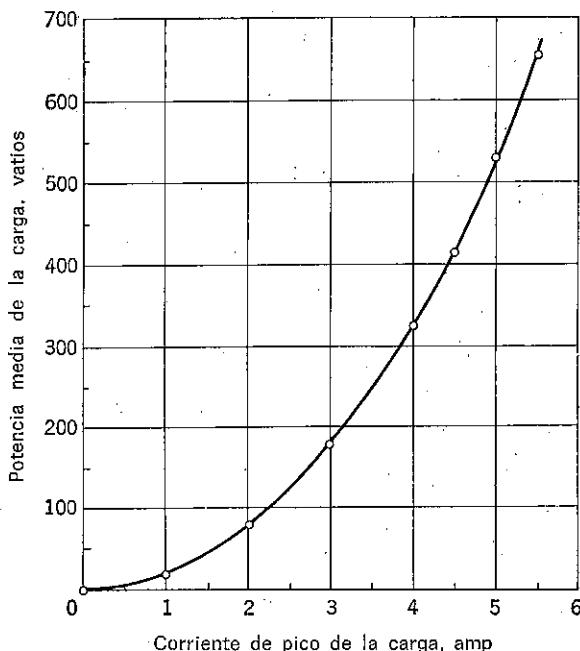


FIG. 14-3. Potencia de la carga en función de la corriente.

temperatura producida por la mayor disipación. La pendiente de la curva teórica da la mitad del valor de la resistencia R en ohmios. Esta pendiente puede obtenerse eligiendo un punto de la curva teórica bastante alejado del origen. Por ejemplo,

$$\frac{R}{2} = \text{pendiente} = \frac{400 \text{ W}}{20 \text{ amp}^2} = 20 \text{ ohmios}$$

Por tanto, el valor de R para corrientes de pico menores de unos 4 amp es de 40 ohmios. El valor de R aumenta para valores mayores de la corriente.

Las ventajas de este gráfico son evidentes. Permite una determinación rápida de un valor admisible de la resistencia basado en varios puntos. Lo que es más importante, descubre la desviación sistemática de las predicciones teóricas que no era aparente en el gráfico de P_{av} en función de I . Por supuesto, en el gráfico de la Fig. 14-3 se puede superponer una curva teórica, pero esto significaría usar un valor de R definido que no tendría necesariamente que ser cierto aun cuando se sacase una media de las resistencias calculadas en cada punto, como se demuestra en la Fig. 14-4.

Una tercera posibilidad para el tratamiento de los datos es el gráfico log-log que se indica en la Fig. 14-5. En éste se pueden leer directamente en las escalas los valores de P_{av} y de I , y los datos primarios se pueden

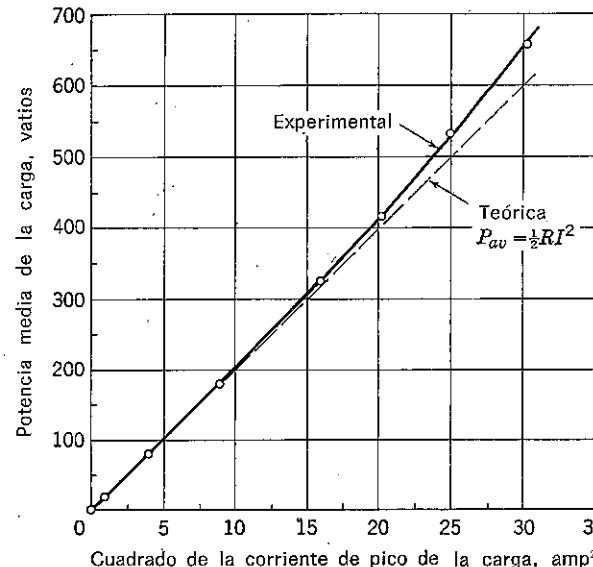


FIG. 14-4. Gráfico lineal de la medida de potencia.

representar directamente sin previo cálculo. El resultado teórico lineal se indica con la curva de trazos. El corte de ambas curvas para $I = 1$ amp da el valor de $R/2 = 20$ ohmios para pequeños valores de corriente y se puede leer directamente en la escala de potencia. La pendiente geométrica de la curva teórica da el exponente $n = 2$ como era de esperar en este caso. Esta pendiente puede calcularse eligiendo un par de puntos bastante separados, como se indica, y midiendo con una regla los dos largos del triángulo rectángulo en las mismas dimensiones. Entonces,

$$n = \operatorname{tg} \phi = \frac{18 \text{ unidades}}{9,0 \text{ unidades}} = 2$$

Se puede ver que el gráfico log-log tiene algunas desventajas en comparación con el de la Fig. 14-4, ya que las escalas se amontonan en la parte alta de la curva. Dado que se sabe ya por teoría que $n = 2$, es probable que la curva de la Fig. 14-4 sea preferible. Sin embargo, el gráfico log-log sería mejor si no se conociese de antemano n , según se demostrará en la Sec. 14-11.

14-7. Gráfica lineal para medidas de resistencia de descarga. La resistencia de descarga de un condensador se puede determinar por el método de pérdida de carga, utilizando un voltímetro electrostático. En el circuito de la Fig. 14-6 se carga el condensador a una tensión E , con el interruptor cerrado, y el voltímetro electrostático indica la tensión inicial a través de C . Cuando se abre el circuito para $t = 0$, el condensador se descarga a través de su resistencia de descarga, R , y las lecturas del

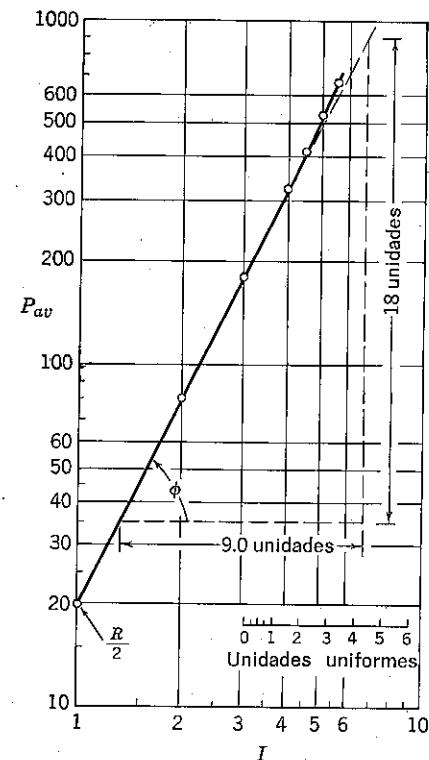


FIG. 14-5. Gráfico lineal para medidas de potencia usando papel log-log.

voltímetro siguen fielmente la tensión del condensador, si su caída no es demasiado rápida. La capacitancia C_v del voltímetro electrostático es función de la tensión aplicada al movimiento, lo que puede introducir complicaciones. Sin embargo, si $C_v \ll C$, la tensión a través de C viene dada teóricamente por

$$V = E e^{-t/R C} \quad t \geq 0 \quad (14-17)$$

El voltímetro electrostático indica V directamente. Se pueden hacer las lecturas en tiempos medidos, empezando en $t = 0$. Entonces se puede representar V en función de t y deducir R si se conoce C .

Como ejemplo específico considérese un condensador con $C = 1,0 \mu\text{F}$ y resistencia de descarga R que hay que determinar, se carga por una fuente de tensión $E = 100$ V. La capacidad máxima del voltímetro electrostático utilizada para la medida de V es $C_v = 50 \mu\mu\text{F}$. Esto es solamente el 0,005 por 100 de C y es enteramente despreciable en comparación con los errores de calibrado y de medida del voltímetro. Los datos dados en la Tabla 14-2 representan los resultados de varias pruebas repetidas bajo condiciones idénticas.

En la Fig. 14-7 se hace una representación de los datos primarios que indica que se puede hacer pasar una curva suave a través de todos los puntos experimentales. Teniendo en cuenta que $e^{-1} = 0,368$, la constante de tiempo se puede determinar fácilmente usando este gráfico, siendo $RC = 48$ seg en el punto $V = 36,8$ V. Con $C = 1,0 \mu\text{F}$ se deduce que la resistencia de descarga, R , es 48 megaohmios.

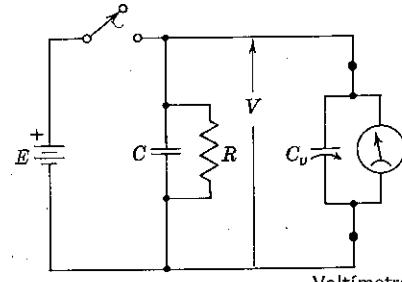


FIG. 14-6. Medida, por el método de descarga, de la resistencia de descarga.

El hecho de que los puntos experimentales estén situados a lo largo de una curva suave no asegura necesariamente que la caída de tensión es matemáticamente exponencial. (En condensadores de dieléctrico sólido, un fenómeno llamado «absorción» produce con frecuencia desviaciones a partir de la caída simplemente exponencial.) Se debe investigar la validez de la aplicación de la Ec. (14-17) en el análisis de los resultados. Un sistema es calcular V a partir de la Ec. (14-17), usando $E = 100$ V y $RC = 48$ seg para distintos tiempos t . Se puede representar la curva teórica en la Fig. 14-7 para ver cómo coincide con la curva experimental. Cuando

TABLA 14-2. MEDIDAS DE CAÍDA DE TENSIÓN DE UN CONDENSADOR

V voltios	t segundos
100	0
81	10
57	27
39	45
29	60
21	75

se hace esto se ve que los datos coinciden, en este caso con la Ec. (14-17). Este procedimiento de convalidación requiere de cálculos teóricos en que se necesitan valores experimentales (E y RC) para cada punto. Las dos curvas coinciden para $t = 0$ y $t = 48$ seg. En caso de que la curva teórica, desarrollada de esta forma, se desvío de la experimental podría haber otras razones que las puramente teóricas. Más aún, este método

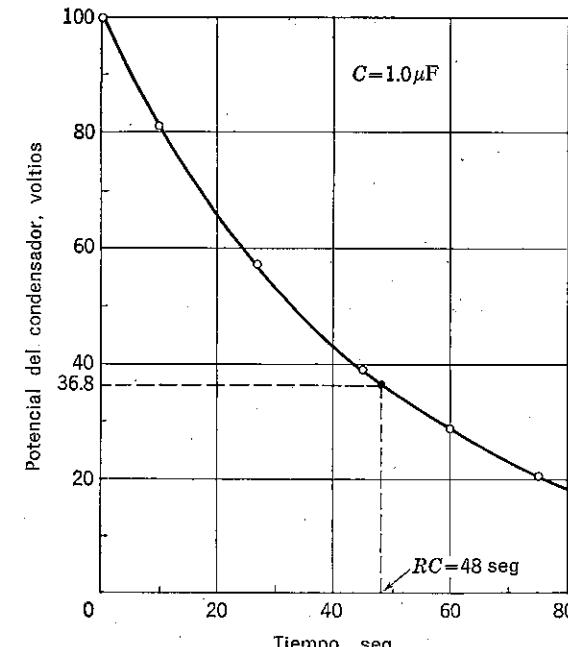


FIG. 14-7. Caída de potencial de un condensador.

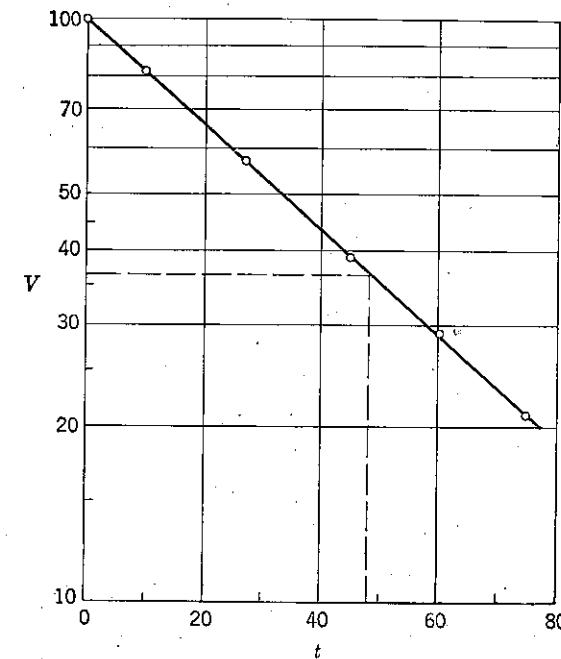


FIG. 14-8. Gráfico lineal de la caída de tensión.

necesita del trazado de una curva a través de los puntos teóricos, lo que necesita cuidado y tiempo.

También es posible un procedimiento más conveniente que requiere menos trabajo. Puesto que la Ec. (14-17) es de la forma de la Ec. (14-13), se puede linearizar utilizando papel semilogarítmico. Los datos primarios se representan directamente sobre papel semilogarítmico, como se indica en la Fig. 14-5. No se necesita cálculo, y no se cambia el valor de RC . Se puede utilizar una regla para establecer hasta qué grado los puntos experimentales se pueden considerar en línea recta. Si lo están, como es el caso de la Fig. 14-8, se verifica el comportamiento de V de acuerdo con la Ec. (14-17). Entonces está plenamente justificado el calcular RC aparte de la Ec. (14-17). La pendiente de la línea en la Fig. 14-8 también puede utilizarse para medir RC , si así se desea. Sin embargo, los puntos experimentales se ajustan también a la recta que es preferible leer el valor de RC correspondiente a $V = 36,8$ voltios.

14-8. Gráfico lineal para medidas de inducciones. Otro ejemplo del procedimiento de linearización viene dado por los datos de la Tabla 14-3,

TABLA 14-3. MEDIDAS DE INDUCCIONES

f (frecuencia) c.p.s.	V (voltios) eficaces	I (amperios) eficaces
20	100	0,324
40	100	0,259
60	100	0,207
80	100	0,166
100	100	0,138
120	100	0,118
140	100	0,102

obtenidos usando el circuito de la Fig. 14-9. La frecuencia del generador sinusoidal se varía entre los valores de 20 y 140 cps, mientras se mantiene

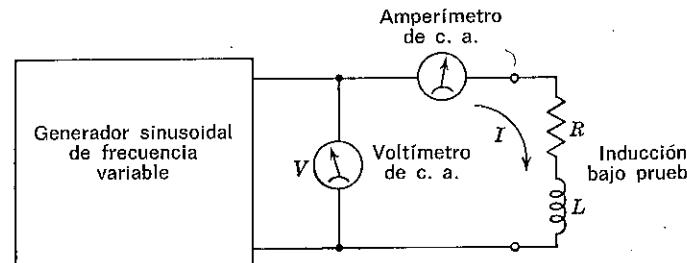


FIG. 14-9. Medidas de inducciones.

TRATAMIENTO DE DATOS

constante la tensión de salida. La corriente alterna tomada de este generador por la inducción bajo prueba se mide con un ampermímetro de impedancia despreciable. El objeto es determinar la resistencia, R , y la auto-inducción, L , de la inducción. La ecuación teórica que da las lecturas V e I es

$$V = I \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (14-18)$$

dondé $\omega = 2\pi f$.

Una representación de los datos primarios, I , en función de f , que aparece en la Fig. 14-10, da un comportamiento suave. La corriente disminuye a medida que aumenta ωL con la frecuencia. Un acercamiento posible para determinar R y L es representar V/I en función de f como en la Fig. 14-10. Si se extrapola la curva para $f = 0$, lo que necesita de ciertas suposiciones, el valor de R se puede leer directamente en la escala de V/I para $f = 0$. Se puede leer una resistencia de 250 ohmios aproximadamente.

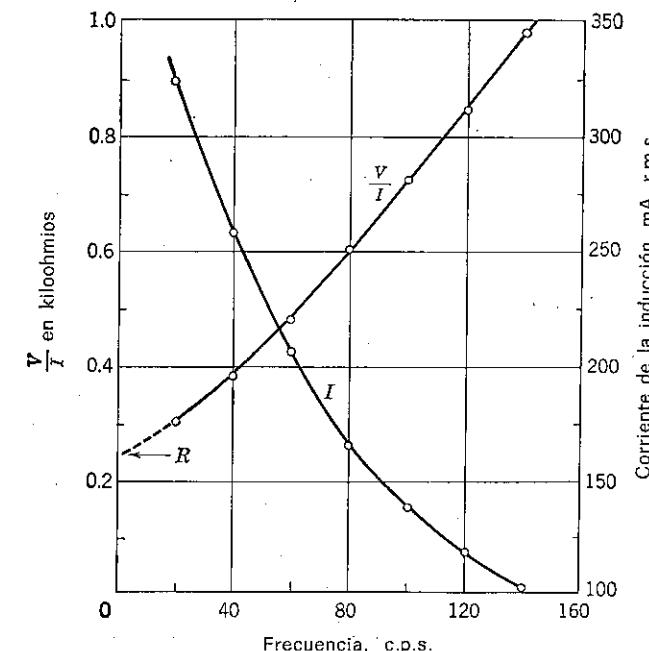


FIG. 14-10. Representación de los datos de la inducción.

mente. (Sería preferible medir la resistencia a c. c. de la inducción directamente, pero es posible que no se tenga disponible esta información.) Usando este valor de R se puede calcular el valor de $(V/I)^2 - R^2$, y representar su raíz cuadrada en función de f . Esta curva será una línea recta

de pendiente $2\pi L$ que pasa por el origen, suponiendo que los datos cumplen la Ec. (14-18).

$$\sqrt{\left(\frac{V}{I}\right)^2 - R^2} = 2\pi Lf$$

Este método no es satisfactorio, ya que depende del valor estimado para R , que está sujeto a la inexactitud de la extrapolación de la curva V/I .

Un procedimiento mejor es linearizar los datos en función de las nuevas variables $(V/I)^2$ y f^2 . Teóricamente darían una línea recta, puesto que el cuadrado de la Ec. (14-18) es

$$\left(\frac{V}{I}\right)^2 = R^2 + (2\pi L)^2 f^2$$

Cuando se representan los datos con estas nuevas variables, en la Fig. 14-11, resulta una línea razonablemente recta. La pendiente de la línea sirve

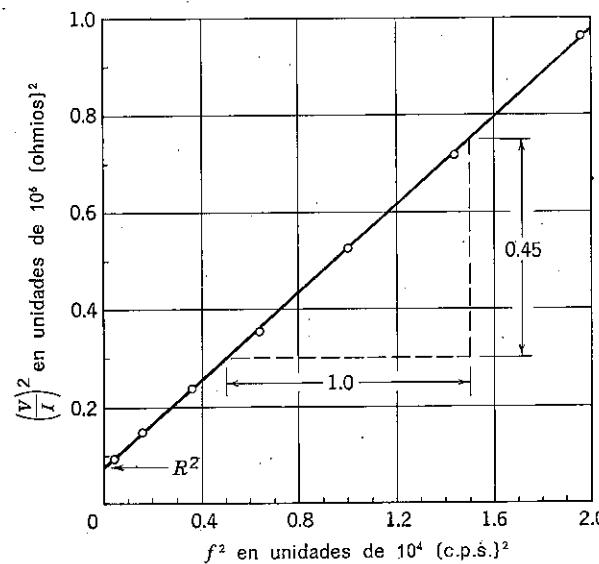


FIG. 14-11. Gráfico lineal de las medidas de la inducción.

para determinar L , y puede calcularse cogiendo dos puntos cualesquiera bastante distanciados.

$$(2\pi L)^2 = \text{pendiente} = \frac{45 \times 10^4 \text{ ohmios}^2}{10^4 \text{ seg}^{-2}} = 45 \text{ (ohmios-seg)}^2$$

De donde se deduce que $L = 1,07$ henrios.

La extrapolación de la línea recta hasta $f = 0$ está ahora más definida y se puede usar para calcular R^2 . La escala tiene una legibilidad bastante limitada para $f = 0$. Si se desea, se puede calcular R^2 a partir de la pendiente conocida y un punto cualquiera elegido en la línea recta. Por ejemplo, para $f^2 = 1,6 \times 10^4$ cps², la curva da $(V/I)^2 = 0,8 \times 10^6$ ohmios². Por tanto,

$$R^2 = [80 - 45(1,6)] \times 10^4 = 8 \times 10^4 \text{ ohmios}^2$$

Por lo que $R = 0,28$ kiloohmios.

El sistema de linearización, no solamente nos ha dado los valores de L y R con una sola operación analítica, sino que también evidencia el que las lecturas están de acuerdo con la teoría, basada en la Ec. (14-18). Aun cuando también se pueden usar otros sistemas para obtener L y R de estos datos, el de linearización es probablemente el más corto y el mejor.

14-9. Ecuaciones empíricas. Resulta evidente en las secciones anteriores que se puede encontrar una fórmula para describir los datos experimentales, cuando resulta una curva suave al representar las cantidades medidas. Cuando por un análisis teórico se conoce la forma de la ecuación, resulta una ecuación numérica que describe los datos a partir de la determinación de las constantes o parámetros que intervienen en la ecuación. La técnica de linearización para determinar las constantes desconocidas ya ha sido bastante recomendada, aun cuando se pueden usar otros métodos. Entre éstos se incluye el método de los puntos elegidos, que se expondrá en la Sec. 14-10; el método de los mínimos cuadrados, métodos de aproximación sucesiva, y otros. Todos ellos son métodos para determinar las constantes desconocidas en las ecuaciones, una vez que se conoce la forma de la ecuación.

En muchos casos no se sabe la forma de la ecuación que describe curvas experimentales suaves. Este es el caso frecuente cuando los aspectos no lineales del sistema que se mide ejercen una influencia apreciable, o cuando las suposiciones simplificadoras usadas para deducir una ecuación teórica para un sistema no se procuran con suficiente exactitud en el sistema real. Las medidas de potencia de la Sec. 14-6 pertenecen a esta categoría. Sin embargo, aún es posible encontrar una ecuación *empírica* que se ajuste a la curva. Tal ecuación posee muchas ventajas aun cuando no tenga una base teórica. Una ecuación es una representación compacta de los resultados experimentales, y puede ser mejor que un gráfico o una tabla. Más aún, aparece una relación matemática entre las cantidades medidas. La ecuación puede ser útil en los cálculos que necesitan interpolación entre puntos experimentales. También puede ser diferenciada e integrada.

La dificultad principal de las ecuaciones empíricas es determinar la

forma más sencilla que se ajusta a la curva experimental con la exactitud necesaria. Una vez establecida una forma, las constantes que aparecen en la ecuación pueden calcularse por los mismos métodos usados en las ecuaciones teóricas. Un sistema sencillo, que siempre será válido, para una curva suave, es el de expresar la función desconocida como una serie de Fourier. Los coeficientes de Fourier se pueden determinar utilizando muchos métodos gráficos diferentes. Sin embargo, lo que normalmente se desea es conseguir una ecuación corta y sencilla que, al tiempo, se mantenga lo más cerca posible de la curva experimental. Desgraciadamente no hay ningún medio directo disponible para determinar la mejor forma. El procedimiento es a base de pruebas. Hace falta un conocimiento general del comportamiento de las funciones, para adivinar una forma que pueda ser adecuada. Una vez elegida esta forma se puede comprobar a base de linearizar la ecuación, si es posible, o por otros sistemas tales como las diferencias numéricas sucesivas. Si la forma elegida no es satisfactoria, se elige otra. La evaluación de las constantes debe evitarse hasta que no se haya comprobado la forma de la ecuación.

14-10. Ecuación empírica para el condensador variable. Para aclarar cómo se determina una ecuación empírica, se analizarán los datos de la Tabla 14-4 de un condensador variable, de dos maneras distintas. El condensador consiste en un grupo de placas fijas y giratorias. El ángulo β se mide directamente en un dial mediante una aguja sujetada al eje giratorio del condensador. Se dan 6 valores de C , medida por un sistema puente, con sus correspondientes valores angulares de las placas giratorias. Se

TABLA 14-4. MEDIDAS DEL CONDENSADOR VARIABLE

β grados	C $\mu\mu F$
25	11
50	29
75	50
100	80
125	118
150	163

trata de encontrar una ecuación numérica para C en función de β , que represente estos datos con una exactitud razonable.

El primer paso es representar C en función de β , y dibujar una curva suave que pase por los puntos experimentales. Al mismo tiempo es conveniente convertir β de grados en radianes para facilitar los cálculos numéricos. En la Fig. 14-12 aparecen los seis puntos experimentales como círculos blancos, y también una curva suave que pasa por todos ellos, excepto los dos más bajos, que quedan a los lados. (Los triángulos y círculos negros representan valores calculados que se verán más tarde.)

El paso siguiente es elegir una forma adecuada de una ecuación que

represente la curva de la Fig. 14-12. Parece ser digno de tener en cuenta el estudio de una parábola. Nótese que la extensión de puntos de la curva $\beta = 0$, a pesar de la falta de certeza sobre cómo trazarla, no parece dar pendiente cero para $\beta = 0$. Esto significa que C debe contener un término que incluye la primera potencia de β , para asegurar que $dC/d\beta$ no sea cero para $\beta = 0$. Probemos la forma parabólica

$$C = k + a\beta + b\beta^2 \quad (14-19)$$

La validez definitiva de esta función puede comprobarse, después de determinar las constantes desconocidas, k , a y b , representando C en función de β y comparándola con la curva de la Fig. 14-12.

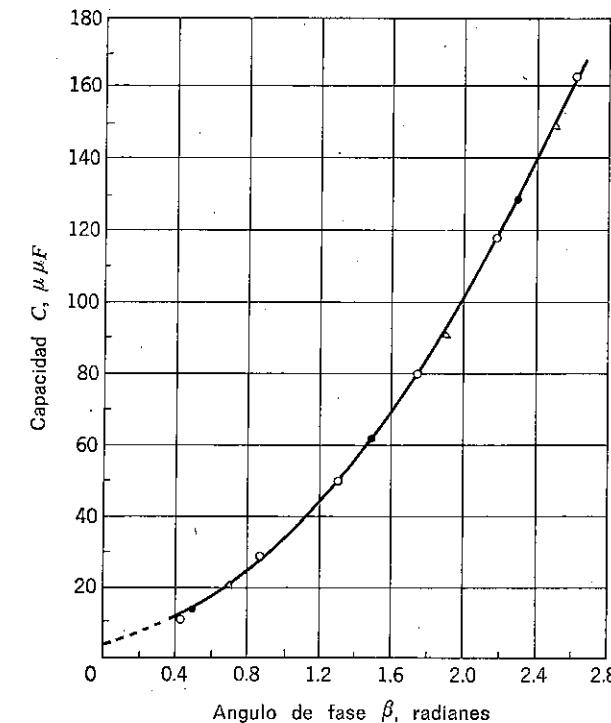


FIG. 14-12. Gráfico de los datos del condensador variable.

Antes de realizar mucho trabajo, sin embargo, conviene probar la validez de esta forma funcional, basándose en la un tanto incierta prolongación de la curva de la Fig. 14-12, hasta $\beta = 0$. La prolongación de trazos indica que $C = 4 \mu\mu F$ es un valor estimado razonable para C cuando $\beta = 0$. De aquí que un valor de prueba para la k sea 4. Con este valor se puede linearizar la Ec. (14-19) haciendo $C' = C - k$ y divi-

diendo por β

$$\frac{C'}{\beta} = \frac{C - k}{\beta} = a + b\beta \quad (14-20)$$

Se puede representar C'/β en función de β usando puntos elegidos de la curva suave de la Fig. 14-12, cinco de los cuales están dados en la Tabla 14-5. Esta representación aparece en la Fig. 14-13. Los puntos aparecen casi exactamente en una línea recta, indicando así que la forma parabólica elegida servirá probablemente como descripción adecuada de la curva. Al mismo tiempo se pueden calcular fácilmente las constantes. La mejor línea recta que pasa por los puntos de la Fig. 14-13 corta al eje en un punto $a = 10$, y la pendiente es $b = 19,2$. Sin embargo, estos valores son un tanto inciertos, ya que se hizo una extrapolación inexacta para hallar el valor de k . Una ecuación que se puede probar para C es

$$C = 4 + 10\beta + 19,2\beta^2 \quad (14-21)$$

Calculando y representando varios puntos de esta ecuación en la Fig. 14-12, puede comprobarse la exactitud con que esta ecuación con-

TABLA 14-5. DATOS SUAVIZADOS Y VARIABLES LINEARIZADA

β rad	C suavizada $\mu\mu F$	$C' = C - 4$ $\mu\mu F$	C'/β $\mu\mu F/\text{rad}$
0,6	17	13	21,7
1,0	33	29	29,0
1,6	69	65	40,7
2,0	101	97	48,5
2,4	139	135	56,3

cuerda con dicha curva. Los tres puntos indicados por triángulos se calcularon usando la Ec. (14-21). El punto para $\beta = 0$ no se ha indicado, pero, lógicamente, coincide con la prolongación de trazos de la curva para $\beta = 0$.

El resultado de la Ec. (14-21) puede ser enteramente satisfactorio, dependiendo de la exactitud requerida. Sin embargo, se puede utilizar un procedimiento que evita la necesidad de prolongar la curva más allá de los puntos experimentales, lo que no es buena práctica normalmente, y que da un resultado mejor. Se puede utilizar el método de los puntos elegidos. Se utilizan tres puntos bastante distanciados de la curva suave, para formar tres ecuaciones simultáneas con las tres incógnitas k , a y b .

TRATAMIENTO DE DATOS

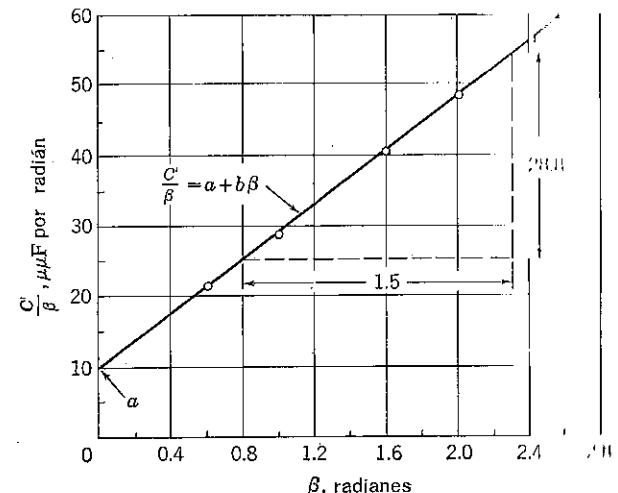


FIG. 14-13. Gráfico lineal para el condensador variable.

Con los puntos primero, medio y último de la Tabla 14-5, las ecuaciones simultáneas que han de ser resueltas para k , a y b son

$$\begin{aligned} 17 &= k + 0,6a + 0,36b \\ 69 &= k + 1,6a + 2,56b \\ 139 &= k + 2,4a + 5,76b \end{aligned}$$

El determinante de este grupo de ecuaciones es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0,6 & 0,36 \\ 1 & 1,6 & 2,56 \\ 1 & 2,4 & 5,76 \end{vmatrix} = 1,44$$

Por la regla de Cramer se hallan las incógnitas. Por ejemplo,

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 17 & 0,36 \\ 1 & 69 & 2,56 \\ 1 & 139 & 5,76 \end{vmatrix}}{\Delta} = 8,6$$

De la misma forma se hallan b y k que resultan $b = 19,7$ y $k = 4,7$. Por tanto, la ecuación para C hallada por este método es

$$C = 4,7 + 8,6\beta + 19,7\beta^2 \quad (14-22)$$

Nótese que el valor de C para $\beta = 0$, hallado de esta ecuación, es un poco más alto que el valor anterior extrapolado. Como consecuencia,

la pendiente para $\beta = 0$, que es a , es un poco menor que antes. Con esta ecuación se calculan tres puntos, representados por círculos negros en la Fig. 14-12. Es totalmente necesario calcular más puntos y dibujar curvas completas, para ver cuál de las dos ecuaciones da un resultado más ajustado a la curva experimental.

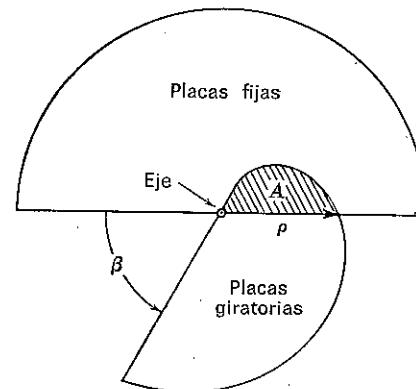


FIG. 14-14. Placas de condensador que dan una variación parabólica.

Se puede deducir una forma física de las placas del condensador que daría esta variación de la capacidad. Dado que la capacidad se puede expresar aproximadamente por una ecuación de la forma de la Ec. (14-19), se deduce que

$$dC = (a + 2b\beta) d\beta$$

Para un condensador de aire de placas paralelas, C es proporcional al área de las placas, $C = KA$, en que K depende de la separación entre placas, constante dieléctrica, y número de placas. Por tanto, $dC = K dA$. Para el condensador de la Fig. 14-14; un elemento de superficie, dA , que corresponde a un incremento $d\beta$ en β , es

$$dA = \frac{1}{2} \rho^2 d\beta$$

Por tanto,

$$dC = K dA = \frac{K}{2} \rho^2 d\beta = (a + 2b\beta) d\beta$$

La forma de las placas giratorias viene dada en coordenadas polares (ρ, β) , eliminando β y resolviendo para ρ .

$$\rho = \sqrt{\frac{2}{K}} \sqrt{a + 2b\beta} \quad (14-23)$$

La forma de las placas de la Fig. 14-14 se ha dibujado de acuerdo con los valores de a y b hallados en la curva de la Fig. 14-12.

14-11. Ecuación empírica de la ley de deflexión. Un ejemplo final de las técnicas utilizadas para determinar ecuaciones empíricas viene dado por las características de escala no uniforme de un amperímetro de hierro móvil. En la Sec. 12-5 se vio que la ley de deflexión de tal instrumento está dada por

$$\theta_{av} = \frac{1}{2S} \frac{\partial L}{\partial \theta} I_{rms}^2 \quad (14-14)$$

Si $\partial L/\partial \theta$ es constante, entonces θ_{av} es proporcional al cuadrado de la corriente eficaz. La escala resultante se apelotona para valores bajos de la

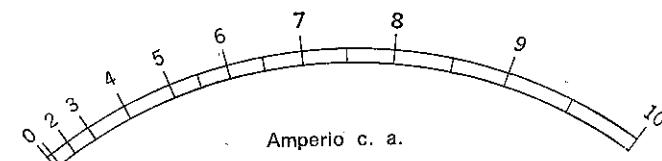


FIG. 14-15. Escala de un amperímetro de hierro móvil.

corriente como se indica en la escala de la Fig. 14-15. El análisis detallado de la geometría de la escala conduce a una ecuación para I_{rms} en función de la deflexión angular, θ_{av} , que llamaremos simplemente θ . Si θ/I_{rms} es integrable se podrá hallar una ecuación para L en función de θ .

El primer paso consistirá en medir lo más exactamente posible los ángulos de las diferentes marcas de la escala. Estos ángulos se dan en la Tabla 14-6 y representan los datos primarios de que se trata de sacar una ecuación empírica. Una vez convertido θ en radianes, se representan estos puntos, como en la Fig. 14-16. Despues se traza una curva suave a través de dichos puntos. Entonces se estudia la curva con objeto de averiguar qué función adecuada puede representarla.

La apariencia general de esta curva, así como la escala real del instrumento, sugiere un comportamiento exponencial cuadrado. Por tanto, el siguiente paso lógico es tratar de linearizar el gráfico, representando el cuadrado de la corriente en función de θ , con la esperanza de que resulte una línea recta. Dicho gráfico aparece en la Fig. 14-17, utilizando los mismos puntos que se dan en la Tabla 14-6, ya que los datos son muy suaves. Se ve que el valor de I_{rms}^2 cae por debajo de la línea recta para corrientes superiores a unos 7 amp (50 amp²). Esto demuestra que I_{rms}^2 es más complicada que una simple proporción de θ . Si I_{rms}^2 fuese proporcional a θ , entonces la Ec. (14-24) demuestra que $\partial L/\partial \theta$ sería una constante, por lo que L sería proporcional a θ .

La desviación de una relación lineal que aparece en la Fig. 14-17 se

TABLA 14-6. ANGULOS DE DIVISION DE ESCALA
(Datos primarios)

I_{rms} amp	θ grados
0	0
2	3
3	6
4	11
5	17
6	24
7	33
8	44
8,5	51
9	58
9,5	66
10	75

puede estudiar más profundamente examinando la diferencia entre la curva real y la bien definida línea, en los valores bajos de la curva. En

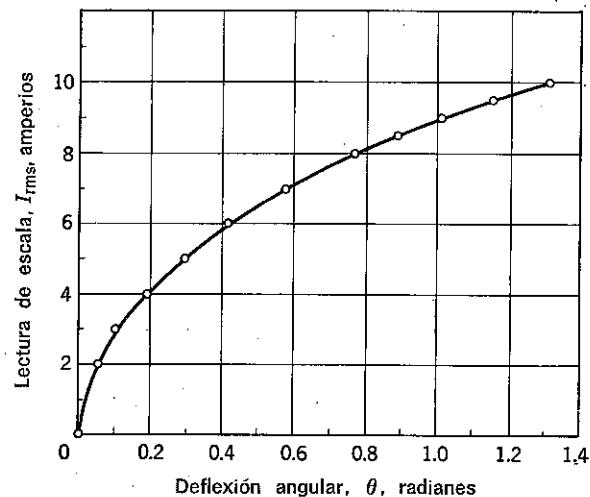


FIG. 14-16. Característica de la escala del amperímetro.

otras palabras, el cuadrado de la corriente puede expresarse como

$$I_{rms}^2 = k\theta - f(\theta) \quad (14-25)$$

en que $f(\theta)$ representa la desviación de I_{rms}^2 a partir de una relación lineal. La constante, k , puede determinarse a partir de la pendiente de la línea de trazos de la Fig. 14-17. Es igual a 85 amp^2 .

Las formas matemáticas posibles para $f(\theta)$ se pueden explorar desarrollando primero una curva. Se pueden calcular las diferencias entre

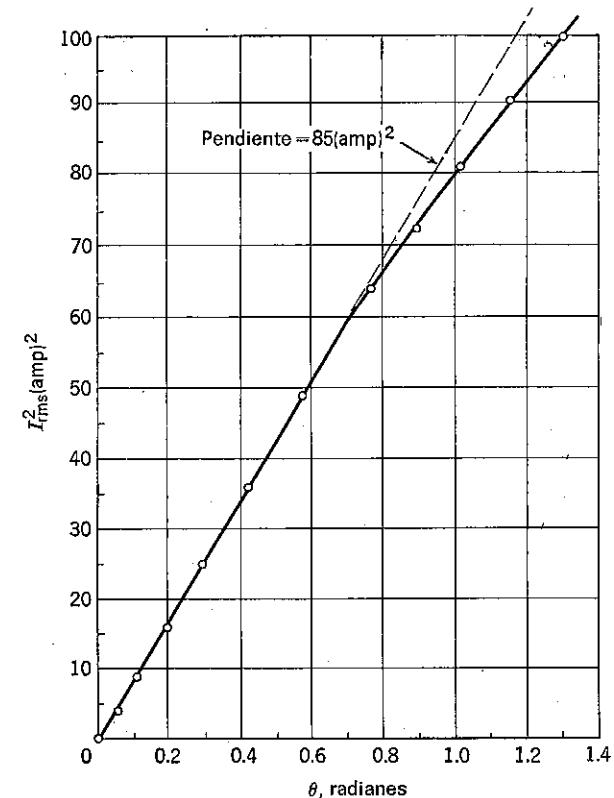


FIG. 14-17. Gráfico lineal de las características de escala.

$k\theta$ e I_{rms}^2 para unos cuantos puntos escogidos en la curva suave de la Fig. 14-17. La Tabla 14-7 da algunos de los puntos elegidos junto con los valores calculados de $f(\theta)$. En la Fig. 14-18 se da una representación de $f(\theta)$. La curva suave trazada por los puntos sugiere que $f(\theta)$ puede ser proporcional a alguna potencia de θ . Una ecuación que merece ser comprobada es la siguiente forma funcional:

$$f(\theta) = c\theta^n \quad (14-26)$$

en que habrá que determinar c y n . Esta es la misma que la de la Ec. (14-11) y se puede linearizar usando un papel log-log. Esto permite comprobar la forma de la función, y si los puntos resultantes forman una línea recta, se pueden determinar rápidamente los valores de c y n a partir del mismo gráfico. De acuerdo con esto, los datos para $f(\theta)$ de la Tabla 14-7 se representan en papel log-log en la Fig. 14-19. Se ve que la línea recta ajusta razonablemente bien, lo que indica que la forma de $f(\theta)$ en la Ec. (14-26) puede resultar satisfactoria.

Del gráfico log-log se hallan directamente los valores c y n . Al dibujar

TABLA 14-7. PUNTOS ELEGIDOS Y VARIABLES DIFERENCIA

θ rad	I_{rms}^2 amp ²	$f(\theta) - 85\theta - I_{\text{rms}}^2$ amp ²
0	0	0
0,2	17	0
0,4	34	0
0,6	50	1
0,8	66	2
1,0	80	5
1,1	87	6
1,2	93	9
1,2	99	11

la línea recta tégase en cuenta que es lógico guiarse más por las diferencias mayores, ya que las más pequeñas están inherentemente sujetas a

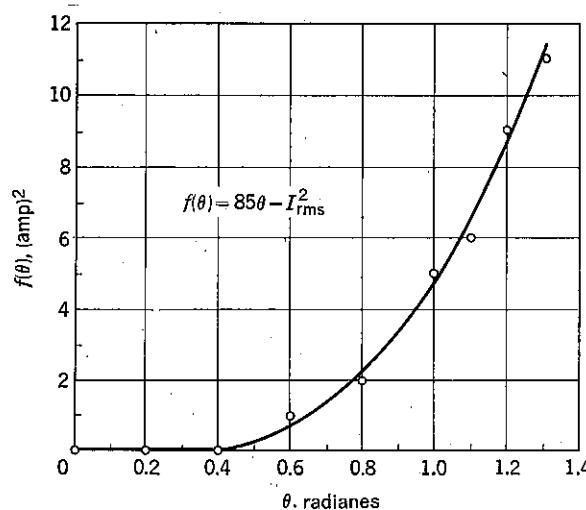


FIG. 14-18. Comportamiento de la función de corrección.

mayores inexactitudes. Para $\theta = 1$ se halla el valor de $c = f(1)$, en que $\log \theta = 0$. El resultado es $c = 5$ amp². La pendiente geométrica de la línea, medida en unidades de una escala lineal, es igual al exponente de θ .

$$n = \text{pendiente} = \frac{8,2 \text{ unidades}}{2,6 \text{ unidades}} \approx 3$$

Por tanto, $f(\theta)$ queda determinada.

$$f(\theta) = 5\theta^3 \quad (14-27)$$

Así, pues, la ecuación completa para I_{rms}^2 , usando la Ec. (14-25), es

$$I_{\text{rms}}^2 = 85\theta - 5\theta^3 = 5\theta(17 - \theta^2) \quad (14-28)$$

La ecuación que representa la curva original de la Fig. 14-16 es la raíz cuadrada de este resultado.

$$I_{\text{rms}} = \sqrt{5\theta} \sqrt{17 - \theta^2} \quad (14-29)$$

Como comprobación final deben calcularse en la Ec. (14-29) varios valores de I_{rms} para varios valores de θ y representar los resultados en la Fig. 14-16. Esto permite calcular el ajuste total de la Ec. (14-29) a los datos primarios.

Con una ecuación empírica determinada para las características de la escala se puede volver a la Ec. (14-24), y resolverla para la inductancia L como función de θ . Sustituyendo el valor de I_{rms}^2 , sacado de la Ec. (14-28), despejando $\partial L / \partial \theta$ e integrando

$$L = \int \frac{2S\theta d\theta}{5\theta(17 - \theta^2)} = \frac{2S}{5} \int \frac{d\theta}{17 - \theta^2}$$

La tabla de integrales da

$$\int \frac{dx}{c^2 - x^2} = \frac{1}{2c} \ln \frac{c+x}{c-x}$$

Por tanto, para $c^2 = 17$, L queda

$$L = \frac{S}{5\sqrt{17}} \ln \frac{\sqrt{17} + \theta}{\sqrt{17} - \theta} + L_0 \quad (14-30)$$

donde L_0 es la constante de integración y es el valor para corriente cero, de L en el punto $\theta = 0$.

Aunque no resulta aparente en este resultado, L es, en esencia, proporcional a θ para $\theta \leq 0,6$ radianes. Para valores mayores de θ , L aumenta con θ a una velocidad mayor. Esto se puede ver si se representa la Ec. (14-30), aunque un sistema más elegante es desarrollar L usando la serie convergente

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad -1 < x < +1$$

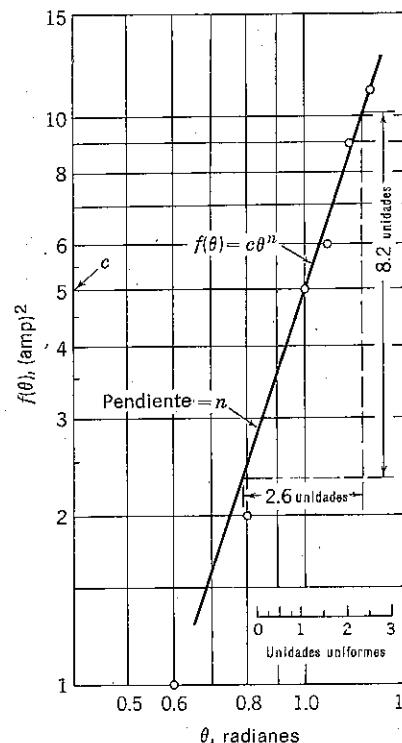


FIG. 14-19. Gráfica lineal para la función de corrección.

Considerando los dos términos logarítmicos

$$\ln(\sqrt{17} \pm \theta) = \ln \sqrt{17} + \ln\left(1 \pm \frac{\theta}{\sqrt{17}}\right)$$

La diferencia entre el término positivo y negativo después de aplicar el desarrollo en serie resulta

$$\ln \frac{\sqrt{17} + \theta}{\sqrt{17} - \theta} = \frac{2\theta}{\sqrt{17}} + \frac{2\theta^3}{51\sqrt{17}} + \dots \quad \frac{\theta}{\sqrt{17}} < 1$$

Por tanto, de la Ec. (14-30) resulta que la serie convergente que representa L es

$$L = \frac{2S\theta}{85} \left(1 + \frac{\theta^2}{51} + \dots\right) + L_0 \quad (14-31)$$

Para $\theta = 0.6$, el término θ^2 es solamente 0,007. Esto prueba que la separación de la función lineal es solamente 0,7 por 100 para $\theta = 0.6$. Así,

pues, L es esencialmente proporcional a θ para $\theta \leq 0.6$, lo que concuerda con las conclusiones previas.

La serie que resulta de la Ec. (14-31) sugiere que L podría haberse obtenido desarrollando en serie $\partial L / \partial \theta$. Por supuesto que esto hubiera sido necesario si el resultado no hubiera sido integrable. Como ejercicio, examinemos de nuevo $\partial L / \partial \theta$ obtenida de I_{rms}^2 .

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{2S\theta}{5\theta(17 - \theta^2)} = \frac{2S}{85} \left(1 - \frac{\theta^2}{17}\right)^{-1}$$

Utilizando el desarrollo binómico resulta

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{2S}{85} \left(1 + \frac{\theta^2}{17} + \dots\right)$$

Integrando

$$L = \frac{2S}{85} \left[\int d\theta + \int \frac{\theta^2 d\theta}{17} + \dots \right] = \frac{2S\theta}{85} \left(1 + \frac{\theta^2}{51} + \dots\right) + L_0$$

y, naturalmente, es lógico que este resultado concuerde con la serie hallada para L en la Ec. (14-31).

BIBLIOGRAFIA

- Beers, Yardley: «Introduction to the Theory of Error», Addison-Wesley Publishing Company, Cambridge, Mass., 1953.
- Buckingham, H., y E. M. Price: «Principles of Electrical Measurements», Philosophical Library, Inc., Nueva York, 1957.
- Canfield, Donald T.: «The Measurement of Alternating-current Energy», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1940.
- Carhart, Henry S. y George W. Patterson, Jr.: «Electrical Measurements», Allyn and Bacon, Inc., Nueva York, 1895.
- Curtis, Harvey L.: «Electrical Measurements», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1937.
- Drysdale, C. V., y A. C. Jolley: «Electrical Measuring Instruments, Part One: Commercial and Indicating Instruments; Part Two: Induction Instruments, Supply Meters and Auxiliary Apparatus», Ernest Benn Ltd., Londres, 1924.
- Edgcumbe, Kenelm, y F. E. J. Ockenden: «Industrial Electrical Measuring Instruments», Sir Isaac Pitman and Sons, Ltd., Londres, 1933.
- Fry, Thornton C.: «Probability and Its Engineering Uses», D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1928.
- Ginzton, Edward L.: «Microwave Measurements», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1957.
- Golding, E. W.: «Electrical Measurements and Measuring Instruments», 3.^a ed., Sir Isaac Pitman & Sons, Ltd., Londres, 1942.
- Goodwin, H. M.: «Precision of Measurements and Graphical Methods», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1919.
- Gray, Andrew: «Absolute Measurements in Electricity and Magnetism», Macmillan and Company, Londres, vol. I, 1888; vol. II, 1893.
- Greenwood, Ivan A., Jr.; J. Vance Holdam, Jr., y Duncan Macrae, Jr.: «Electronic Instruments», Radiation Laboratory Series, vol. 21, McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1948.
- Hague, B.: «Alternating Current Bridge Methods», 5.^a ed., Sir Isaac Pitman and Sons, Ltd., Londres, 1946.
- Harris, Forest K.: «Electrical Measurements», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1952.
- Hartshorn, L.: «Radio-frequency Measurements by Bridge and Resonance Methods», Chapman and Hall, Ltd., Londres, 1940.
- Hund, August: «High-frequency Measurements», 2.^a ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1951.
- Karapetoff, V.: «Experimental Electrical Engineering», vol. 1, 2.^a ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1915.
- Kinnard, Isaac F.: «Applied Electrical Measurements», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1956.
- Knowlton, Archer E.: «Electric Power Metering», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1934.
- Laws, Frank A.: «Electrical Measurements», 2.^a ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1938.
- Michels, Walter C.: «Advanced Electrical Measurements», 2.^a ed., D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1941.
- : «Electrical Measurements and Their Applications», D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. J., 1957.

- Northrup, Edwin F.: «Methods of Measuring Electrical Resistance», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1912.
- Owen, David: «Alternating Current Measurements», 3.^a ed., Methuen and Company, Ltd., Londres, 1950.
- Palmer, A. de Forest: «The Theory of Measurements», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1912.
- Partridge, Gordon R.: «Principles of Electronic Instruments», Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1958.
- Skröder, Carl E. y M. Stanley Helm: «Circuit Analysis by Laboratory Methods», Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1946.
- Smith, Arthur Whitmore: «Electrical Measurements in Theory and Application», 5.^a ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1959.
- Stout, Melville B.: «Basic Electrical Measurements», Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1950.
- Terman, Frederick Emmons: «Measurements in Radio Engineering», McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1935.
- y Joseph Mayo Pettit: «Electronic Measurements», 2.^a ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1952.
- Vigoureux, P. y C. E. Webb: «Principles of Electric and Magnetic Measurements», Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1936.
- Waugh, Albert E.: «Elements of Statistical Method», 3.^a ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1952.
- Worthing, Archie G. y Joseph Geffner: «Treatment of Experimental Data», John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1943.

SOLUCION DE ALGUNOS PROBLEMAS

Capítulo 2

2-1. a) $a + 13b/3$, $(a^2 + 26ab/3 + 121b^2/5)^{1/2}$; b) $2/\pi$, $1/\sqrt{2}$; c) 0,6479, 0,7173

2-3. $i = \frac{\omega CE}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cos(\omega t + \phi - \operatorname{tg}^{-1} \omega RC)$

2-4. Ver la Ec. (4-51) con $\theta = y$, y $SI_p/K = A$

2-9. $I_3 = \frac{Z_1 I_a + Z_2 I_b}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$

2-10. $V_1 = \frac{Z_3(Z_1 E_b + Z_2 E_a)}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}$

2-11. a) $Z_1 + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}$; b) $Z_3 + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$; c) $Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2}$

2-12. $Y_a Y_b + Y_a Y_c + Y_b Y_c = \frac{Y_c}{Z_1} = \frac{Y_a}{Z_2} = \frac{Y_b}{Z_3} - E$

2-13. $I_{23} = \frac{E_a Z_2 + E_b Z_1}{R_1 + R_2 + 2j\omega(L + M - 1/2\omega^2 C)}$

2-15. $I_2 = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{E_a Z_2 + E_b Z_1}$

2-16. $I_L = \frac{EYY_b Y_L}{(Y + Y_a)(Y_b + Y_c + Y_L) + Y_b(Y_c + Y_L)}$

2-17. a) $-1/27$ amperio; b) $-1/24$ amperio usando el teorema aproximado

Capítulo 3

3-1. $3,42 \times 10^{-4}$ newton, perpendicular a ds y B

3-2. $T = nBiA$, $A = \pi R^2$

3-3. $42^\circ 21'$

3-5. $19,9^\circ$

3-6. $B = \frac{k\theta}{\operatorname{tg} 2\theta}$

3-7. 0,3 mm/ μ A, 0,6 mm/ μ A, 0,003 mm/ μ V, 0,006 mm/ μ V, 0,6 megaohmios

3-8. a) sin efecto, b) aumento, c) disminución, d) aumento, e) sin efecto

3-9. a) 400 megaohmios, b) 0,006 radianes

3-10. 49 ohmios, 0,008 μ A/mm

3-11. Galvanómetro B

3-12. $R_s = 100, 11,1, 1,01$ ohmios

- 3-13. Protege el galvanómetro de elevadas corrientes que recibiría sin shunt
 a) $0,02 \mu\text{A}$ por división; b) $0,03 \mu\text{A}$ por división; c) 100 ohmios
 3-14. $R_{12} = 450 \text{ ohmios}$, $R_{23} = 45 \text{ ohmios}$, $R_3 = 5 \text{ ohmios}$; $0,05 \text{ mm}$
 3-15. $I_1/I_2 = 9,36$, $I_1/I_3 = 86,6$
 3-17. Con el circuito de la Fig. 3-19 (b), $R_4 = 272 \text{ ohmios}$, $R_3 = 40 \text{ ohmios}$
 3-19. $A = 0,38$
 3-20. 5 db
 3-21. $R_1 = 87 \text{ ohmios}$, $R_2 = 2,860 \text{ ohmios}$; $3,46 \text{ db}$
 3-22. $+9$ por 100 , $\frac{5}{9} \text{ ohmio}$
 3-23. $40,2 \text{ amp}$
 3-24. $R_1 = 60 \text{ ohmios}$ (6 mW); $R_2 = 600 \text{ ohmios}$ (60 mW), $R_3 = \frac{2}{3} \text{ ohmio}$ (67 vatios)
 3-25. a) $-0,03$, $-0,6$, -3 , -6 por 100 ; b) $0,156 \text{ ohmios}$; c) $1,67 \text{ ohmios}$
 3-26. $0,011 \text{ ohmios}$
 3-27. 133 voltios
 3-28. a) 200 ohmios por voltio; b) 4 mA ; c) 150 voltios ; d) $V_A = 40 \text{ voltios}$, $V_B = 50 \text{ voltios}$, $V_C = 30 \text{ voltios}$
 3-29. 95 voltios
 3-30. a) $0,05$, $0,2$, 1 , 5 , 20 , 100 megaohmios ; b) 50
 3-31. 25 voltios , 30 voltios sin carga
 3-32. $8,8 \text{ mA}$
 3-33. $0,074 \text{ vatios}$
 3-34. a) 180 voltios ; b) 360 voltios

Capítulo 4

- 4-1. $JL_m \frac{d^3\theta}{dt^3} + \frac{d^2\theta}{dt^2} [D_a L_m + (R + R_m)J] + \frac{d\theta}{dt} \left[SL_m + \left(\frac{S}{K} \right)^2 + D_a(R + R_m) \right] + \theta S(R + R_m) = \frac{SE}{K}$
- 4-2. Súmese el término $S\theta_0$ al segundo miembro de la Ec. (4-14)
- 4-3. $\theta = \theta_s + \left(\theta_s - \theta_0 + \frac{A_0}{p_2} \right) \left[\frac{p_2 e^{p_1 t}}{p_1 - p_2} + \frac{p_1 e^{p_2 t}}{p_2 - p_1} \right] + \frac{A_0}{p_2} e^{p_2 t}$
- 4-6. $50\sqrt{3} \text{ ohmios}$
- 4-7. $5,75 \text{ seg}$
- 4-8. a) $0,4017 \text{ radián}$; b) 80 ohmios
- 4-9. a) $0,1081 \text{ radián}$; b) $43,8 \text{ ohmios}$
- 4-10. a) $\theta = 0,500 - 0,559e^{-t} \text{ sen } (2t + 63,5^\circ)$; b) $1,2 \times 10^{-9} \text{ newton-metro-seg}$ por radián
- 4-11. $1,06T_0$
- 4-12. $t_m - t_s = \frac{T}{2\pi} \text{ sen}^{-1} \frac{T_0}{T}$
- 4-13. $18,4 \text{ seg}$
- 4-14. a) 2.000 mm ; b) 15 mm ; c) $540 \times 10^{-12} \text{ newton-metro}$
- 4-15. $\theta_m = 0,263 \text{ radián}$, $\lambda = \pi/2$
- 4-16. a) $5,33 \mu\text{A}$; b) $0,693$
- 4-17. $0,127$, $T = 6^{2/3} \text{ seg}$
- 4-18. $93,2 \text{ mm}$
- 4-25. $1,283\omega_0$
- 4-26. $2,1^\circ$ para $\omega/\omega_0 = 0,36$
- 4-27. $0,53$
- 4-28. 5 por 100
- 4-29. $49,5 \text{ db}$

SOLUCION DE ALGUNOS PROBLEMAS

Capítulo 5

- 5-1. $1,2 \text{ amp}$
 5-2. $4,42 \text{ amp}$
 5-3. 12 voltios
 5-4. a) $\frac{V_1}{I_1} = \frac{XR_v(R + R_a + X)}{R(X + R_v) + XR_v}$; b) num. $\frac{V_1}{I_1} = R_a + X$
 5-6. $\frac{50(R_aX + R_aR_v - X^2)}{X(X + R_v)}$; $X = \frac{R_a}{2} + \sqrt{\left(\frac{R_a}{2}\right)^2 + R_aR_v}$
 5-7. Comenzando con una lectura del voltímetro de 8 voltios , las correcciones son $0,31$, $0,51$, $0,11$, $-0,19$, $0,21$
 5-8. Comenzando con una lectura del voltímetro de 8 voltios , las correcciones relativas son $-6,9$; $-4,5$; $-4,3$; $-4,6$; $-3,2$; $-1,5$; $0,3$; $1,8$; $1,2$; $1,5$; $0,6$; $-0,4$; $-1,0$
 5-9. a) $I_{20}/I = 1,042$; b) $1,047$
 5-10. $42^\circ 21'$
 5-11. $\frac{\Delta R_0}{R_0[1 + (R_0 + \Delta R_0)/(R_1 + R_2)]}$. R_0 es más sensible si $R_0 < (R_1 + R_2)$; de otro modo R_2 es más sensible

Capítulo 6

- 6-2. a) 5 ; c) 60 ; d) 69
 6-4. $1,4816 \text{ voltios} \pm 0,18$ por 100
 6-5. $\bar{v} = 104,4$, $A = 1,52$, $\sigma = 1,85$
 6-6. a) Mediana = 999 ohmios , moda = 999 ohmios ; media = $998,97 \text{ ohmios}$; b) $2,1 \text{ ohmios}$; c) 97 por 100
 6-7. b) $P = 0,693/k$; c) probablemente no a causa del agudo pico en $x = 0$
 6-12. 866 si la desviación típica son $0,1 \text{ ohmios}$; 688 si el error probable es $0,1 \text{ ohmios}$
 6-13. 16
 6-14. 22,937, suponiendo que la media es $0,400 \text{ pulgadas}$
 6-15. 10
 6-16. a) 917 suponiendo la resistencia media 10.000 ohmios ; b) 54,500
 6-17. 8,280 suponiendo que el diámetro medio es $0,1000 \text{ pulgadas}$
 6-18. Tres puntos de la curva son $n = 100$, $t = 2,81$; $n = 20$, $t = 2,24$; $n = 10$, $t = 1,96$
 6-19. a) $\sigma = 1,33 \text{ amp}$; b) 683, 997; c) 0,495
 6-20. b) $2,16 \pm 0,58 \text{ megaohmios}$; c) $2,8 \text{ megavatios}$

Capítulo 7

- 7-2. a) σ ; b) $\sqrt{2}$; c) $\sqrt{2}\sigma$
 7-3. $0,5$
 7-4. $0,0013$
 7-5. $240 \pm 19,3 \text{ ohmios}$
 7-6. $0,17$ por 100
 7-7. $0,707$ por 100
 7-8. $\sigma_w = k\sigma_u/u$
 7-9. $\frac{L_w}{w} = a \left(\frac{L_u}{u} \right) + b \left(\frac{L_v}{v} \right) + c \left(\frac{L_x}{x} \right)$
 7-10. a) $5.000 \pm 707 \text{ vatios}$. b) Cada uno contribuye por igual
 7-11. Conexión C, $\sqrt{5}/2 \text{ ohmios}$

- 7-12. 0,98 ohmios
 7-13. 0,71 por 100
 7-14. $T = 6 \pm 0,26$ seg, $D/J = 0,7 \pm 0,16$ seg $^{-1}$
 7-15. 2.100^{+133}_{-149} ohmios, límites aproximados ± 141 ohmios
 7-16. 2.500^{+16}_{-34} ohmios; límites aproximados ± 25 ohmios

Capítulo 8

- 8-1. a) 139 ohmios; b) 150 ohmios; c) con $X/R_s = \rho = e^{\ln \rho}$ los puntos de ordenadas $\rho = A$ y $\rho = 1/A$ son equidistantes a la ordenada $\rho = 1$ en una escala logarítmica. Demostrar que $1/2 - F$ para $\rho = A$ es igual a $F - 1/2$ para $\rho = 1/A$
 8-2. $41^{1/4}$ kiloohmios
 8-3. 2.000 ohmios
 8-4. 26,8 kiloohmios
 8-5. $0,13R_a \leq X \leq 7,87R_a$
 8-6. a) $F_0 = 1$, $F_\infty = (R + R_m)/(R + R_m + R_1)$; b) $X = R_1(R + R_m)/(R_1 - R - R_m)$
 8-7. Una resistencia ajustable $R_t = 600$ ohmios en serie con la batería; 26,1 ohmios, en paralelo con los 100 ohmios del instrumento móvil
 8-8. a) 4.500 ohmios; b) 4.046 ohmios
 8-9. En «alta» la escala cubre desde 475 ohmios a ∞ , con 1.975 ohmios en el centro de la escala. En «baja» cubre desde cero a 52,6 ohmios, con 12,65 ohmios en el centro de la escala
 8-10. a) 50,3 ohmios, 108,7 ohmios; b) 7.990 ohmios
 8-11.
$$\frac{dS}{S} = \frac{S + R_m}{(R + R_1)R_m} \left[dR - \left(\frac{R_m S}{R_m + S} + R + R_1 \right) \frac{dE}{E} \right]$$

 8-13. $S = 0$ a 4 ohmios, $S_1 = 0,048$ ohmios, $S_2 = 8,0$ ohmios, $R_1 = 1.000$ ohmios, $R_2 = 99$ kiloohmios
 8-14. Si $\frac{V_1}{I_1} + \frac{V_2}{I_2} > 2 \frac{V_1}{I_2}$, V_1/I_1 es la mejor aproximación; si se invierte la desigualdad es mejor V_2/I_2
 8-15. 55,8 megaohmios $\pm 1,5$ por 100
 8-17. $I = \frac{I_1 I_2 R_a}{R(I_1 - I_2)}$
 8-19. $E_0 = \frac{R_v V_1 V_2}{R(V_2 - V_1) + R_v V_2}$
 8-20. a) $R_a = \frac{RR_1(I_1 - I_2)}{I_2(R + R_1) - R_1 I_1}$; b) $R \gg R_1$, $R \gg R_a$
 8-21. 0,127 ohmios
 8-22. Aparece un término adicional $R/R_v E$. Desplácese la línea hacia arriba directamente en el gráfico una cantidad constante $R/R_v E$
 8-24. $\delta \approx (R_2 - R_1)/R_v$
 8-25. Relación = $(dS/S)/(dI/I)$
 8-26. Teóricamente cero
 8-27. Deflexión exacta = 16,38 mm (16,25 mm, 20,0 mm)

Capítulo 9

- 9-1. $I_m = \frac{E_2(r_1 + R) - E_1 kR}{(r_1 + R)(r_2 + R_m) + kR(r_1 + R - kR)}$
 9-2. $R_i = 250$ kiloohmios

SOLUCION DE ALGUNOS PROBLEMAS

- 9-3. 2,514 amperios $\pm 0,11$ por 100
 9-4. $E_x = 1,0200$ voltios, $R_x \approx 24$ ohmios [suponiendo $(B + N) \gg 51$ ohmios]
 9-6.
$$\frac{dE_x}{E_x} = \frac{B \, dR}{(M + N)(B + M + N)}$$

 9-7. a) $dI_m = \frac{E_1 dR_b}{R_m(R_a + R_b) + R_a R_b}$; b) $\frac{dR_b}{R_b} = \frac{-dE_1}{E_1}$
 9-8. a) 0,20 voltios; b) 1,1 por 100
 9-9. a) No accesible; b) Mover el cursor hasta 0,222 voltios y ver si se observa deflexión en el galvanómetro
 9-10. a) $(9,1 \times 10^{-6} + 4,5 \times 10^{-8} R_x + 10^{-10} R_x^2)^{1/2}$; b) 0,75 kiloohmios
 9-11. $A = 41,7$ ohmios, $C = 220$ ohmios por amperio
 9-12. $k > 1/4$
 9-13. a) $R_x = R_2 R_4 / R_1 + C_1 R_4 / C_2$, $L_x = R_2 R_4 C_1 - R_4 / \omega^2 R_1 C_2$; b) $2,55 \times 10^4$ ohmios, 58,3 mh
 9-14. a) $C_x = R_1 C_4 / R_2$; b) Teóricamente uno, con condensadores sin pérdidas
 9-15. $R_x = R_2 R_4 / R_1$, $L_x = 1/\omega^2 C_3$
 9-16. $R_x = R_2 R_4 / R_1$, $L_x = R_2 R_4 C_1$
 9-17. a) $R_1 C_2 = R_4 C_3 (1 - \omega^2 L_2 C_2)$, $R_1 R_3 = R_2 R_4$; b) $\omega > 1/\sqrt{L_2 C_2}$; c) no
 9-18. a) $\omega_0^2 = 1/R_x C_x R_4 C_4$; b) $\omega_0/\omega_1 = \sqrt{1 - R_1 C_2 / R_4 C_x} \approx 1 - R_1 C_2 / 2 R_4 C_x$; c) 1 por 100, $R_x = \infty$
 9-19. a) $\omega = 1/RC$; b) todas las frecuencias; c) ninguna frecuencia
 9-20. $L_4 = R_4 C_1 (R_1 + R_2)$, $M_x = R_2 R_4 C_1$
 9-21. a) $R_x = R_2 R_4 / R_a$, $L_x = CR_2(R_4 + R_b + R_4 R_b / R_a)$; b) R_x , R_b ; c) sí
 9-23. a) 1.500 ohmios; b) 0,1

Capítulo 10

- 10-1. a) 3,03 millas; b) ± 113 pies
 10-3. $dI_g = \frac{E \, dM}{[B(1 + M/P) + M + N][G(1 + M/N) + M + P]}$
 10-4. 18,5 mm
 10-5. 0,31 por 100
 10-6. a) 500 ohmios, b) 0,56 por 100, c) 0,80 por 100, d) 36,5 mW antes del intercambio; 1,38 mW después del intercambio
 10-7. a) Galvanómetro; b) 1,36 por 100
 10-8. a) $\frac{\Delta X}{X_0} = \frac{dI_g}{MNE} \left[\frac{BNK'}{X_0} + BNM + CK' + MCX_0 \right]$ donde $C' = B + M + N$ y $K' = GM + GN + MN$; b) $X_0 = \sqrt{BNK'/MC'}$; c) Puesto que $I_x \rightarrow \infty$ cuando $X_0 \rightarrow 0$ para $B = 0$
 10-10. Núm. 1,4
 10-11. a) 100 ohmios; b) circuito de la Fig. 10-1
 10-12. a) $-0,4$ mm; b) $\pm 0,2$ mm; c) 730
 10-13. 1. a) 0,032 por 100; b) 952 ohmios; c) 56,7 μ A por división; d) 0,625 vatios; e) 0,124 por 100. 2. a) 312,52 ohmios; b) 0,0037 por 100; c) 2,27 μ A por división. 3. 0,0035 por 100
 10-14. $\pm 0,08$ por 100
 10-15. $\pm 0,125$ por 100
 10-16. 0,0213 amp
 10-17. a) 210 ohmios; b) 0,2 mA
 10-18. a) 20 amp; b) 0,067 μ A

Capítulo 11

11-1. a) 36 voltios; b) 0,72 mA

11-2. 1,15

11-3. 1,04

11-4. Ver Ec. (11-14)

$$11-5. E_{rms} = \frac{E}{\sqrt{2}}, \text{ uso } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$11-6. f(t) = \frac{F_p}{2} + \frac{F_p}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \sin k\omega t}{k}$$

11-7. 41 μ seg

$$11-9. \theta_i = \frac{0,0164I}{K} \text{ sen } (7\omega t - 143,4^\circ)$$

$$11-10. e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cos (2k+1)\omega t}{2k+1}$$

11-11. a) 427 \pm 27 ohmios; b) 7

11-12. 1,43

11-13. 0,366 amp

11-14. 1,000 π

11-15. 51 voltios

11-16. 23 por 100 mayor

11-17. 35,4 voltios

11-18. Instrumento de d'Arsonval 1,50 mA; termopar 1,63 mA; puente rectificador 1,67 mA

11-19. Instrumento de d'Arsonval 2,0 mA; termopar 2,02 mA; puente rectificador 2,22 mA

11-20. a) 0,218 mA, 1,217 mA; b) 0,416 mA, 1,68 mA; c) 0,242 mA, 1,35 mA

Capítulo 1212-1. a) $9,13 \times 10^{-12}$ culombios; b) 456×10^{-10} julios; c) 913×10^{-8} newton

$$12-2. \frac{6\pi^2 i_1 i_2 r_1^2 r_2^2 D \times 10^{-7}}{(r_2^2 + D^2)^{5/2}}$$

12-3. 122 voltios

12-4. a) $\theta_{av} = 10^{-9} E_{rms}^2 / 18\pi S$; b) $0,01/\pi^2$ newton-metro12-5. a) $L = 0,01[1 + \theta^{2(1-n)} / (1-n)]$ henrio; b) 5,59 amp, 89,5°

12-6. a) 48,8 ohmios; b) 0,456 newton-metro; c) 26,2°, 1,2° por encima de la señal de 5 amperios

12-7. 86 voltios rms

12-8. 127,3 vatios

12-9. a) 1,768 vatios; b) 5.000 ohmios

12-10. 318,3 vatios

12-11. 2,81 vatios

12-12. a) 100; b) 95; c) 105; d) 100; e) -100; f) -105; g) -105; h) -110

12-14. 31,6 vatios

12-15. -87° 56'

12-16. El resultado es el mismo que el de la Ec. (14-42) con $P_p = 0$, P_z = potencia de carga más potencia de la bobina de corriente, I = corriente de carga, α = ángulo de fase de la combinación en serie de Z y $R_c + j\omega L_c$

12-17. a) 0,019°; b) 0,193°

12-18. -0,54R

Capítulo 13

13-1. a) 200 ohmios, 0,2 henrios; b) no; c) 5,4 mV, -1,4°

13-2. a) 0,2 μ F, 5.000 ohmios; b) $\pm 0,3$ por 100 en R_x , $\pm 0,7$ por 100 en L_x ; c) $\pm 1,22$ por 100 en R_x , $\pm 0,244$ por 100 en L_x

13-3. b) A/C desplaza el centro del círculo; B - DA/C cambia la magnitud del radio del círculo y gira a éste alrededor de su centro

13-6. 2.323 ohmios, 0,1 henrio

13-7. a) 2,27 megaohmios en paralelo con 20 henrios, 17,4 kiloohmios en serie con 19,84 henrios; b) R_1 y C_1 ; c) 0,047 voltios eficaces13-8. La segunda derivada es positiva si $R_1(R_2 + 2R) > R_2 R_4$ 13-9. $F = 1; 1/2(1 + \cos \alpha)$ 13-10. 0,46 por 100 si ω aumenta y 0,56 por 100 si ω disminuye13-11. a) 560 μ uF; b) $0,057 \times 10^{-3}$ pulgadas; c) 284 kiloohmios, $0,4 \times 10^{-6}$ pulgadas13-12. a) $k\omega_1$; b) -113-14. $E_{ds}/E_{ds} = 1,59; 7,8 \mu$ seg

$$13-15. a) \omega = 1/C \sqrt{L_2 - L_1}; b) \frac{E_d}{E} = \frac{1 + \omega^2 C(L_1 - L_2)}{1 + \omega^2 C(L_1 + L_2)}; c) L_2 \geq L_1$$

13-16. $\sqrt{2} RC/5$, lo cual es 1,27 veces el resultado de la Ec. (13-41)

$$13-17. a) K = \frac{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega(L - R^2 C)}{2R - 3\omega^2 LCR + j\omega(6R^2 C + L)}; b) \omega^2 LC = 1, L = R^2 C; c) \sqrt{2LC/25}$$

13-18. a) 144; b) 2,8 por 100; c) +8,1°, -7,7°

INDICE

- Ciertos problemas (cuyas respuestas aparecen en las páginas 471-477) proporcionan información adicional que no figura en el texto y están incluidas en este índice.
- Admitancia, auto-**, 47
conductancia de, 41
de elementos conectados, 40
de transferencia, 50
definición de, 39
mutua, 47
susceptancia de, 41
vista desde la carga, 50
vista desde la excitación, 50
Ajuste de cero de instrumentos, 138, 143
Ajuste del puente, elección del, 407
técnica de interpolación para el, 304-305
Amortiguamiento, crítico, 76, 95
y resonancia, 128
del galvanómetro, 98-100
viscoso, 97
Amperímetro, c. c., 86-87
calibración de, 143-146
de escala múltiple, 87, 92 (Prob. 3-24)
de rectificador, 344, 346
diferencial, 238-239
electrodinamométrico, 378-379
hierro-móvil, 372-375
ideal, 140
resistencia del, 225-227
como fuente de error, 222-223, 344
sensibilidad del, 86
shunts para el, 86-87
Análisis, del galvanómetro con amortiguamiento crítico, 105, 107-108
del puente de c. a., 397-398
del puente de Wheatstone, 285-287
diferencial, del óhmetro serie, 219-221
del potenciómetro, 257-263
del puente de Wheatstone, 296-297
Bobina del galvanómetro, frenado magnético de la, 98-100
fuerza electromotriz inducida en la, 101
momento de inercia de la, 96-98
par aplicado a la, 69-71, 74-76, 96-98, 359
velocidad angular, 96
Bobina, de potencial en el vatímetro, 375, 384-389
del vatímetro, diseño de la, 380-381
Caja de décadas en el método de sustitución, 233
en el puente de Wheatstone, 304-305
Cálculo de cocientes, 438-439
de productos, 438
Cálculos con reglas de cálculo, 438-439
usando desarrollo binómico, 440-441
Calibrado, curva de, 146-147, 442
de instrumentos de c. c., 143-147
errores de, 142
Cambio de unidades, 28
Cantidades complejas como soluciones estacionarias, 35-38, 120-121
derivada de, 411-412
Capacidad, definición de, 32
del rectificador, 343-345
parásita, 29, 434 (Prob. 13-7)
Características, ohmios por voltio, 88, 97 (Prob. 3-28)
Características de escala, de los instrumentos de hierro móvil, 374, 460-466
de los instrumentos rectificadores, 346-347
de vatímetro electrodinamométrico, 380-381
de voltímetro electrostático, 370-371
del electrodinamómetro, 377-379
del galvanómetro con campo no uniforme, 76, 90 (Prob. 3-6)
con campo radical, 75
con campo uniforme, 72, 74
ecuación empírica de las, 466
Características de fase, del puente de resonancia, 422-426, 432
del puente de Wien, 428-431, 432
Carey-Foster, puente de, 274, 284 (Prob. 9-20)
Cifras significativas, 436-438
Circuito cruzado, 267
función de transferencia de voltaje del, 435 (Prob. 13-15)
Circuito equivalente en T, 60, (Prob. 2-14)
Circuito T, 84
Circuitos en puente, clasificación de, 270-273
diagrama de, 267-268
Circuitos equivalentes de bobinas aisladas, 51-52
definición de, 50
Circuitos RLC, su analogía con el galvanómetro, 102, 122
Clasificación, de errores, 136
de los circuitos en puente, 270-273
de los métodos de medida, 209-210
Coeficiente de amortiguamiento, D , 102
por aire D_a , 98
relativo K , 106-107
Coeficiente de temperatura, cero, 148
del cobre, 201
Combinación de errores, 188-198
ejemplo de, 194-195, 197, 200-204
formas especiales de, 198-200
Compensación de frecuencias, en instrumentos de hierro móvil, 374
en vatímetros, 388-389, 396 (Problema 12-17)
Complejas conjugadas, 44
Componente continua de funciones periódicas, 319
Comprobación de espesor, 434 (Problema 13-11)
Condensador, admitancia de, 39
energía almacenada en el, 366-367
impedancia del, 39
para medida de desplazamientos, 416-418, 420
patrón, 277
resistencia de pérdidas del, 222, 448-452
variables, educación del, 456-460
Condiciones en los límites, galvanómetros, 105-106
Conductancia, de una admitancia, 41
de una resistencia, 32
Conjugado de un número complejo, 44

INDICE

Constante de resorte, 71
 Constantes del instrumento, efectos de temperatura en las, 148-149
 para aparatos de hierro móvil, 374
 para aparatos de medida con rectificador, 343, 346
 para el dinamómetro, 377
 para el galvanómetro, 71-75
 para el voltímetro electrostático, 371
 Control, definición de, 24-26
 mediante un shunt, características, 202-204
 Conversión de unidades, 28
 Corriente, compleja, 37-38
 definición de, 26, 30, 66
 y fuerza, 17-18, 65-67, 361
 de conducción, 26, 30, 66
 de malla, 44
 instantánea y compleja, 37-38
 opaca del rectificador, 251
 Corrientes, de Foucault, en el dinámometro, 377
 en instrumentos de hierro móvil, 373
 de malla, 44
 Curva, de corrección en el calibrado de un instrumento, 146-147, 442
 de error gaussiana, 176-180
 de error normal, 176-180
 error probable de la, 179, 183
 Curvas, de reactancia de la resonancia serie, 422
 de reactancia para circuitos serie *RLC*, 422
 universales, para el control shuntado, 203
 para el óhmetro paralelo, 216
 para el óhmetro serie, 212
 para el shunt simple, 79
 para la respuesta estacionaria del galvanómetro, 110-112
 para puentes de resonancias y Wien, 430
 para transitorios del galvanómetro, 110
 Chauvenet, criterio de, 183-184, 186 (Prob. 6-18)

Datos, agrupados, 163-168
 desviación media de los, 164
 alineados, definición de, 157
 desecharados, 149, 183-184
 unimodales, 158
 Decremento logarítmico, 113-116
 Densidad de flujo magnético, 66
 Derivada de una cantidad compleja, 411-412
 Desarrollo binómico en cálculos, 440-441
 Desviación, de la media, 159, 192-193
 definición de, 158
 eficaz, 162, 185 (Prob. 6-3)
 para datos agrupados, 165
 Desviación media, 161
 de la curva gaussiana de error, 179
 de resultados calculados, 204 (Problema 7-1)
 ejemplos de cálculo de la, 166
 forma integral de la, 174
 para datos agrupados, 165
 Desviación típica, 161-163
 cálculo de la, 195, 202
 de cocientes calculados, 194, 196-198
 de datos agrupados, 165
 de la curva de Gauss, 179, 186 (Problema 6-11)
 de la medida, 192-193
 de la potencia simple, 199
 de las sumas calculadas, 195, 198
 de logaritmos calculados, 205 (Problema 7-8)
 de un grupo de sumas, 189-191
 forma integral de la, 174
 Detectores para puentes de c. a., 268
 admittance de, 401
 sensibles a la fase, 413
 Determinantes en ecuaciones simultáneas, 45-48, 459
 Diagrama de fasores, del puente de corriente alterna, 401
 del puente de resonancia, 405-407
 en el análisis del vatímetro, 385
 Diferencia de potencial, 26, 30
 Diferencias, relativas, cálculo de, 439
 entre reóstato y resistencia de control, 25
 Discrepancia, 135-136

Discriminador para medidas de cero, 248-249
 Dispersion, de la curva gaussiana, 178-179
 de los datos primarios, 160-162
 Distorsión, armónica en los puentes, 429-430
 de la amplitud del galvanómetro, 330-334
 del galvanómetro, 124-125, 132 (Problema 4-26), 330-334, 340
 por retardo, 330
 Distribución, de la probabilidad, 169-170
 área bajo la función de, 172
 función de, 171
 normal oblicua, 154, 175-179
 Divisor de tensión, 26
 Dualidad de circuitos, 34
 de la división de voltajes y reparto de corrientes, 42
 Ecuación característica del galvanómetro, 103
 Ecuaciones del par del galvanómetro, con bobina inductiva, 129 (Prob. 4-1)
 sin bobina inductiva, 102
 Ecuaciones diferenciales, solución estacionaria, 35-38, 120-121
 Ecuaciones empíricas, 455-456
 para condensador variable, 456-461
 para inductancia no lineal, 465-467
 para la deflexión, 461-465
 Electrodinámómetro, 375-379
 aplicaciones especiales del, 390-394
 Eliminación, de armónicos en el galvanómetro de vibración, 128, 132 (Problema 4-29)
 de cifras no significativas, 437-438
 Elongación, definición de, 113
 máxima, 113-115
 Emisión electrónica, efectos caóticos en la, 153-155
 Energía, almacenada en un condensador, 366-367
 en un inductor, 368-372
 y par, 363-365
 Equilibrio, en puente de Kelvin, 313-314
 en puente Wheatstone, 303-305
 Equilibrio, en puentes de c. a., en potenciómetros, 263
 técnicas de, 409, 411
 Equilibrio del puente, 265-270
 ajustes, 407
 Equilibrio del puente de c. a., condiciones, 265-266, 268-270, 397
 puente de Wheatstone, 24, 266, 286, 297
 (*Ver también puente*)
 Equilibrio en puentes de cuatro brazos, convergencia al, 407-411
 en puentes de productos y cocientes de brazos, 407-411
 en puente de resonancia, 408-409
 Equivalencia estrella triángulo, 60 (Problema 2-12)
 Error del puente Wheatstone, y resistencia del galvanómetro, 298
 y sensibilidad del galvanómetro, 296-297, 305
 y tamaño de la incógnita, 298-300
 Errores, accidentales, 153-156
 al azar, 153-155, 175
 ambientales, 136, 147-149
 clasificación de, 136
 de cálculo, 139
 de calibrado, 142
 de instrumento, 136, 142-143, 384
 de observación, 136, 151-153
 de paralaje, 143, 151-152
 determinados, 136
 en instrumentos de d'Arsonval, 142-143, 148-149
 grandes, 136-139
 propagación de, 188-204
 relativos, 162
 residuales, 136-137, 153-155
 sistemáticos, 136-137
 teóricos, 138, 140-142, 155
 terminología para los, 134
 Errores debidos a la forma de onda, en el voltímetro de diodos, 352
 en el voltímetro electrostático, 371
 en instrumento de hierro móvil, 375
 en instrumentos rectificadores, 347
 Errores debidos a la temperatura en un instrumento de medida, 148-149

Errores del vatímetro, correcciones de los, 383-384
y campo entre bobinas, 384
y conexiones, 381-383, 395 (Problema 12-13)
y reactancia de la bobina de potencial, 386, 396 (Prob. 12-16)

Errores probables, 161
de la curva de error de Gauss, 178, 183
de los resultados calculados, 204 (Problema 7-1)
forma integral para el, 175
uso del, 163

Escala de frecuencias logarítmicas, 425-426, 429

Escalas de coordenadas, 441-442

Especificación de la exactitud de un instrumento, 147
de tolerancias, 161

Espectro de amplitud de una onda cuadrada, 338-339

Espejo de la escala, 150

Estado cuasi-estacionario, 365

Estado sinusoidal estacionario, definición, 38
Exactitud, exigencia, 19-20
de un instrumento, especificación, de la, 147
y precisión, 135

Extensiones del puente de hilo, 306-307

Factor, de atenuación y reducción de corriente, 84
para el shunt de Ayston, 81
para el shunt simple, 79-80
de multiplicación de potencia del shunt de Ayrton, 82
de shunt de Ayrton, 81
de shunt simple, 79-80
de potencia, 43
del puente, 415-416, 434
del puente de DeSauty, 418-419

F.E.M., debida al movimiento, 98-101
definición de, 99
método de cero para medida de, 246-248
«Flujo» de corriente, 26

Forma, aproximada, 58-60 (Prob. 2-17)
de onda triangular, 321
factor de forma, 324
valor eficaz, 323-324

Formas integrales de cantidades estadísticas, 174-176

Fuerza entre conductores cargados, 365-367
y energía, 361, 369
con campo eléctrico, 365-367
con campo magnético, 368-369
e inductancia mutua, 368-369, 376
en un conductor rectilíneo, 68-69

Función, de transferencia de voltaje, 420
exponencial, gráfica lineal, 444, 448-452

Galvanómetro, amortiguamiento magnético, 98-100
análisis, del estado estacionario, 120-129

del transitorio, 94-116, 334-337
oscilatorio, 108-111
ancho de banda pasa-bajo de, 125, 132 (Prob. 4-25)
aproximación de banda estrecha, 127, 132 (Prob. 4-28)

características de escala, 72-76
característica de fase, 122, 124-125, 332
como filtro pasa banda, 125-128, 132 (Prob. 4-29)
condiciones iniciales, 105-106, 109-110, 336

constante del, 71, 75, 148-149
de campo radial, 74-76
de campo radial uniforme, 74-76
de campo uniforme, 68-73
de vibración, 125-128
decremento logarítmico, 116
deflexión mínima discernible, 264, 296-297
diferencial, 239-240

distorsión, 132 (Prob. 4-26), 330-334, 341
ecuación homogénea, 103
ecuaciones hiperbólicas, 107
espejo, 62-64
factores de diseño, 65, 71-72

Galvanómetro, formas del movimiento del, 94-95

frecuencia de oscilación, 109
medida del periodo, 117
movimiento browniano, 153
periodo, 109
periodo libre, 109
portátil, 64-66
registrator, 118-119, 329, 340
resistencia del, 91 (Prob. 3-10), 117, 281

resonancia, 123-125 [340]
respuesta, a una onda cuadrada, 334-340
a una señal no sinusoidal, 329-340

retardo, 119, 332-334
sensibilidad a la tensión, 76

Galvanómetro balístico, aplicación del, 222

subamortiguado, análisis del, 108-111
superamortiguador, análisis de, 106-108

Generador de corriente, de corriente y tensión, 32

equivalente, 48-49
de tensión, definición de, 32
definición de, 32

Generadores equivalentes, 48-49

Gráficas, 441-443
en escala logarítmica para linearizar, 445, 447-448, 462-465
escalonados, 164-169
lineales, 443-446

Gráfico lineal de la ley de la potencia, 444-445, 448, 465
semilogarítmico para linearización, 445, 451

Gráficos lineales, 443-446
para capacidades variables, 457-458
para características de escalas no uniforme, 461-465

para medidas, de inducciones, 452-455
de resistencias, de baterías, 227-229
de resistencias de pérdidas, 448-452
de potencia, 446-448

Grupos de sumas, 188-191

Histéresis de instrumentos de hierro móvil, 374

Histograma normalizado, 167-169
de probabilidad, 169-171

Histogramas, 167-172

Ideas creativas, 21-22

Impedancia, auto-, 45
de elementos interconectados, 39
de entrada, 49
de transferencia, 49
definición de, 38-39
equivalente de Thévenin, 49, 55
iterativa, 85
mutua, 46, 49-50

reactancia de la, 39-41

vista desde la carga, 48-50
Incertidumbres, 24, 153-155

Indicaciones de polaridad en el vatímetro, 383
Índice de precisión, 135, 176, 178-179
Inductancia, amperímetro de hierro móvil, variación de su, 460-462, 465-467

definición de, 32
energía almacenada en la, 368, 372
inmitancia de la, 39
mutua, 51
circuitio equivalente para la, 51-52
por el método de comparación, 252-253
por el método de voltímetro-amperímetro, 221

su medida por el método del puente, 273
y escala del vatímetro, 379-381
y fuerzas, 368-369, 376
Inmitancia, de la conexión en paralelo, 40
de la conexión serie, 40

Instrumento de medida, 61-66
de termopar, 353-354
de transferencia, 377-379

Instrumento de medida d'Arsonval, comparación con el electrodinámometro, 374

descripción física, 62-66
efecto de temperatura en, 148-149
en instrumentos de c. a., 340-341, 353-354
en instrumentos electrónicos, 341, 348

Instrumento de medida d'Arsonval, errores de, 143-145
ley de deflexión, 71-73, 75, 360
respuesta a una señal de c. a., 329-340, 360
ventaja de los, 61-62
(Ver también galvanómetro)
Instrumentos de hierro móvil, 372-375
características de escala de los, 375, 461-465
variación de la inductancia en, 461-462, 465-467
Instrumentos electrónicos que utilizan el movimiento de d'Arsonval, 341-348
de medida que siguen la ley cuadrática, 369-381
rectificadores, 340-347
Intensidad de campo eléctricos, 66
Interpolación en puentes de c. c., 304-306

Lectura de escala en el vatímetro, 379-381
Ley de deflexión, de electrodinámometro, 377-379
de galvanómetro de campo uniforme, 71-74
de instrumentos de c. a., 358-360
de instrumentos de hierro móvil, 374, 461-465
de instrumentos de termopar, 353-354
de óhmetros, 213, 216
del galvanómetro de campo radial, 75-76, 360
del vatímetro, 379-381
del voltímetro electrostático, 371-372
Ley, de Faraday y f.e.m. debida al movimiento, 101
de Kirchhoff de las corrientes, 31, 39
de Lez, 98
de Newton del momento lineal, 96
de Ohm, 28
Leyes de Kirchhoff, 31
en análisis por mallas, 44
en análisis por nudos, 46-47
para intensidades y tensiones complejas, 39
Límite de error, 161
de la posición del control, 202-204

ANALISIS DE MEDIDAS ELECTRICAS

Límite de error, de la suma, 194-195
del cociente, 195
fórmula del, 197-198, 205 (Prob. 7-9)
Lugar del círculo, de la función de transferencia en puente de resonancia, 423-424, 426
en el puente de Wien, 429-430
en puentes de c. a., 401-407, 434 (Problema 13-3)
Lugar geométrico, 401-403, 434 (Problema 13-3)
en puente de Wien, 429-430
en puentes de resonancias, 404-407, 423-424, 426
para la convergencia al equilibrio, 407-411

Máxima potencia transmitida, 303
Media, 157
aritmética, 158
cálculo de la, 184 (Prob. 6-1)
de un grupo de diferencias, 190
de un grupo de sumas, 188-189
de una curva de Gauss, 178
desviación típica a partir de la, 192-194
ejemplo de cálculo de la, 166
forma integral de la, 174
para datos agrupados, 164
propiedades de la, 158-160
Mediana, definición de, 158
Medida, de ángulos de fase, 390-391
de desplazamientos mecánicos, 416-420
de frecuencias con discriminador, 248-249
con vatímetro, 391-393
de inductancias, análisis gráfico de, 452-455
con c. c. superpuesta, 280
de la resistencia del instrumento, 225-227
de la subida de temperatura de una dinamo, 275
de temperatura, 255, 275
Medida de resistencia, con galvanómetro diferencial, 239-240
exactitud de la, 21-23
por método, cero, 23-24, 240, 266-267

INDICE

Medida de resistencia, por método, de comparación, 230-231
de sustitución, 233
de voltímetro-amperímetro, 140-142
Medidas, directas, 207-208
indirectas, 207-208
mecánicas de desplazamientos, 416-420
Método, amperímetro-voltímetro (ver método voltímetro-amperímetro).
balístico, 210
de comparación en deflexión, 230-231
en método de cero, 252-253
de descarga, 222, 243 (Prob. 8-15), 448-452
de selección de puntos, 455, 458-460
de la semideflexión, 91 (Prob. 3-10), 117, 225-227
de sustitución de, deflexión, 231-234
en método de cero, 276-278
diferencial, en cero, 278-280
en deflexión, 234-240
 $e^{j\omega t}$, 35-38, 120
voltímetro-amperímetro y conexiones del vatímetro, 382
Método de cero, 22-24, 142, 209, 245-246
general, 246-252
residuos en el, 247
sensibilidad en el, 246
Métodos de deflexión, 142, 209-210
combinados con el método del cero, 280-281
ejemplos de, 222-240
generales, 210, 221-222
para medida de resistencias, 21-22, 210-216, 225-234
Mínima corriente discernible, 264, 296-297
Mínimo del transitorio del galvanómetro, 114-116
Mínimos cuadrados, métodos de, 455
principio de, 159
Moda, definición de, 158
Momento, angular, ley de, 96
ley del, 96
Movimiento browniano en los galvanómetros, 153

Notación, 26-27

Ohmetro serie, 210-214
ajuste paralelo, 219-221
ajuste serie, 217-219
Ohmetros, 210-212
en el método de sustitución, 233
errores debidos a la batería en los, 217-221, 242 (Prob. 8-11)
shunt magnético en los, 221
tipo serie, 210-214, 217-221
tipo shunt, 214-216, 242 (Prob. 8-7)
Onda cuadrada, 334
sinusoidal rectificada, sus propiedades, 324-325
Oscilógrafo mecánico, 333-334
de rayos catódicos, 334
Osciloscopio, 333-334
para el voltímetro de retroceso, 252

Papel para gráficos, 441
Par de deflexión media, 360
en el electrodinámometro, 375-376
en el voltímetro electrostático, 369-372
en instrumentos de hierro móvil, 372-375
sobre bobina, en campo radial, 74-76
en campo uniforme, 68-71
sobre bobina circular, 89 (Prob. 3-2)
Par de fracción de un aparato de medida, 96-98
Parámetros de galvanómetro, determinación, 116-118
Patrones, absolutos, 16-17
eléctricos, 16-17, 230
para el método de sustitución, 231-234, 277
físicos fundamentales, 16
fundamentales, 16
internacionales, 16-17
secundarios, 17
Periodo libre del galvanómetro, 109
Perturbación en la cantidad a medir, 138-140
ejemplos de, 222-225, 230-231, 234
Pila patrón en el potenciómetro, 254
Población, 192
Potencia, 30, 43, 59 (Prob. 2-8)
media, 43

Potenciómetro, 253-265
análisis del, 255-256
calibrado del, 254-255, 260
de hilo, 253-255
de lectura directa, 254-255
en calibración de instrumentos, 143-
errores del, 260-264 [144]
galvanómetro necesario para el, 264-
265
para medida de temperaturas, 279-280
su diferencia con resistencias de con-
trol, 25-26
Probabilidad, 169-170
su forma integral, 174, 180
su representación como un área, 172-
173
Procedimiento de ajuste de cero, 245-246
Propagación del error, 188-204
Puente de Anderson, 272-273, 284 (Pro-
blema 9-21)
de Carey-Foster, 273, 284 (Prob. 9-20)
de cociente de brazos, 265-266
solución fuera del equilibrio para
el, 397-398
de DeSauty, 273, 283 (Prob. 9-14)
factor del, 417-419
para el método de sustitución, 276-
278
para medida de desplazamiento, 415-
420
de Hay, 272, 280, 435 (Prob. 13-17)
de hilo, 306-309
de inductancias, 398-400
de Kelvin, 274, 310-315
de límite, 309-310
de Marwell, 274, 283 (Prob. 9-16)
de megaohmios, 274
de Owen, 271, 280
de producto de brazos, 270-272
de rectificación, 341, 344-346
de Shering, 271-272
Puente de medida en megaohmios, 274
Puente de resonancia, 274, 404-409
aproximación de banda estrecha para
el, 431-433
convergencia en el equilibrio del, 408-
409
curvas universales para el, 432

Puente de resonancia, ecuaciones del
equilibrio del, 404
función de transferencia de voltaje
para el, 421-426
y puente de Wien, 427-433
Puente de Wheatstone, intercambiando
la batería y el galvanómetro, 300-
303
interpolación para el equilibrio en el,
304-305
limitaciones de corriente en el, 297-298
mínimo error, 299-300, 317 (Proble-
ma 10-8)
para determinación de parámetros del
galvanómetro, 281, 284 (Prob. 9-23)
relación de brazos, 266-267
sensibilidad a la corriente del, 288
sensibilidad al voltaje del, 288-289
su análisis aproximado, 290-292
su aplicación, 274-275
su condición de equilibrio, 24, 266,
287, 404
su evolución, 24
su representación esquemática, 267-
268
su solución exacta, 285-288, 397-398
Puente de Wien, 274
aproximación de banda estrecha, 431-
433
características de fase, 428-429
condición de equilibrio de, 283 (Pro-
blema 9-18), 426-427
lugar del círculo del, 426-430
y puente de resonancia, 427-433
Puente rectificador, dependencia con la
frecuencia, 417-419
dependencia con el intercambio ge-
nerador, detector, 417-420, 435 (Pro-
blema 13-16)
instrumentos, 341, 344-347
sensibilidad del puente, 413-416
Puentes de c. a., 268-276, 397-433
análisis mediante el teorema de la com-
pensación, 398-400
aproximación de la banda estrecha,
431-433
capacidad parásita en los, 420-431
clasificaciones de, 270-273

Puentes de c. a., condiciones de equili-
brio, 265-266, 268-270, 397
convergencia al equilibrio, 407-411
detectores para los, 268
diagrama de fasores, 401, 405-407
lugar del círculo para el, 401-407, 434
(Prob. 13-3)
sensibilidad de los, 413-420
solución desequilibrada para los, 397-
398
(Ver también puente)
Puntos experimentales en gráficas, 442

Q, de los brazos del puente de resonan-
cia, 424, 431
de los circuitos serie *RLC*, 122, 424
definición de, 126
del galvanómetro, 121, 125
para distorsión mínima, 132 (Proble-
ma 4-26)
su valor óptimo, 330-332, 334
y decremento logarítmico, 129

Re { }, definición de, 36
Rectificador, 249-251
voltaje inverso del, 249-251, 343-344,
348
Rectificador de diodo, 249-251, 444
en voltímetro de pico, 348
en voltímetro de retroceso, 251-252
en voltímetro rectificador, 343
Redes en estrella y triángulo, 50-51
de tres terminales, 50-51
Regla de Cramer, 45, 47, 459
de división de tensión, 41-43
de reparto de corrientes, 43
trazado de gráficas, 442
Regulación de fuentes de alimentación,
234-238
Relación de brazos en el puente de Wheat-
stone, 265-267
Reproducibilidad, de las lecturas de los
instrumentos, 151-153
Resistencia, de amortiguamiento críti-
co, 77
con el shunt de Ayrton, 80-82
medida de, 117

Resistencia, de conexión, 92 (Prob. 3-26),
311
de contacto, 310-311
de cuatro terminales, 311
inmitancia de la, 39
su definición, 31
Resistencias parásitas de los condensa-
dores, su medida, 222, 448-452
Respuestas a problemas, 471-477
Ruido técnico, 154, 246, 407
térmico de voltaje, 154, 246, 407

Sensibilidad a la corriente del galvanó-
metro, 77-78
del puente de Wheatstone, 288
Sensibilidad a la tensión del puente de
alterna, 413-420
de puente de Wheatstone, 288-290
Sensibilidad del galvanómetro, 76-78
en el potenciómetro, 264-265
en el puente de Kelvin, 315
en el puente de Wheatstone, 296-297,
299-300, 304-305
medida de la, 91 (Prob. 3-10), 281, 284
(Prob. 9-23)
Sensibilidad en megaohmios, 78, 90 (Pro-
blema 3-8)
Series de Fourier, 326-329
de una onda cuadrada, 337-340, 355
(Prob. 11-10)
para la deflexión de un instrumento,
359
para una curva empírica, 455
para una onda en diente de sierra,
355 (Prob. 11-6)
Shunt, magnético en óhmetros, 221
simple, 79-80
especial, 82-83, 91 (Prob. 3-17)
Supresión de frecuencia con puente, 429-
430

Tablas de probabilidad, 180-184
Técnica, de análisis de la condición de
cero, 247-249
de conmutación en el método de sus-
titución, 233-234
de medida, 18-20

Tensión de un modo, 46-47

- Teorema, aplicado al puente de c. a., 398-400
 al potenciómetro, 258-261
 al puente de Kelvin, 314-315
 al puente de hilo, 306-308
 al puente de Wheatstone, 290-293, 301
 de la compensación, 56-57
 ejemplos numéricos del, 292-293
 de Norton, 54
 de reciprocidad, 53-54
 aplicado al puente de Kelvin, 314-315
 aplicado al puente de Wheatstone, 291
 de superposición, 52
 aplicado al potenciómetro, 258, 262-264
 de Thévenin, 54-56
 ejemplos de, 88-89
 en circuitos de cero, 246-247
 en el puente de Wheatstone, 294-296
 en el voltímetro diferencial, 235-237
 Terminología para el voltaje, 26, 30
 Termómetro de resistencia, 275
 Termopar, 255, 279
 Tiempo de subida, definición, 119
 Transductores, 119
 Transformaciones, estrella-triángulo, 60 (Prob. 2-12)
 en el puente de Anderson, 273-274
 en el puente de Wheatstone, 294
 Transformador variable, 446
 Trazado de las equipotenciales mediante un puente, 276, 318 (Prob. 10-17)
 Uso de transformadores en puentes, 268
 Valor, eficaz, de funciones periódicas, 322-323, 327
 de la onda sinusoidal rectificada, 325
 de la onda sinusoidal, 324
 de series de Fourier, 327-329
 definición, 31
 medio, 31
 de funciones periódicas, 31, 319-320, 327
 de un semiperíodo de onda sinusoidal, 343
 Valor, medio, de una onda sinusoidal, 320, 322
 de una onda sinusoidal rectificada, 325, 346
 de una onda triangular, 321-322
 nominal, 161
 probable de la cantidad medida, 158-160
 Variante, definición de, 157 [160]
 frecuencia de un, 163
 Varianza (*ver* desviación típica)
 Vatímetro, análisis sinusoidal del, 384-388
 características del, 384 [388]
 compensado, 383-384
 aplicaciones del, 445
 para la reactancia de la bobina de potencial, 388-389, 396 (Problema 12-17)
 convenciones de polaridad del, 384
 electrodinamométrico, 379-387
 para lectura directa, 208
 su lectura en operación sinusoidal, 385-388
 Velocidad angular de la bobina de un galvanómetro, 96
 Velocidad de respuesta, 111-113
 en amortiguamiento crítico, 111-113, 130 (Prob. 4-4) y (Prob. 4-11)
 Voltaje inverso en el voltímetro de diodos, 348
 de ruido en una resistencia, 149, 246, 409
 Voltímetro, calibración del, 143-147
 característica de, 87, 92 (Prob. 3-28)
 de c. c., 87
 de diodo, 348-352
 de escala múltiple, 88, 223-225
 de lectura directa, 208
 de pico, 348-352
 de retroceso, 249-252, 354 (Prob. 11-1)
 diferencial, 152-153, 234-238
 diferencial, error debido a la carga, 236-238
 eléctrodinamómetro, 378-379
 electrostático, 369-372
 en medida de resistencia de pérdida, 448-452
 error debido a la carga, 223-225
 rectificador, 342, 344-348