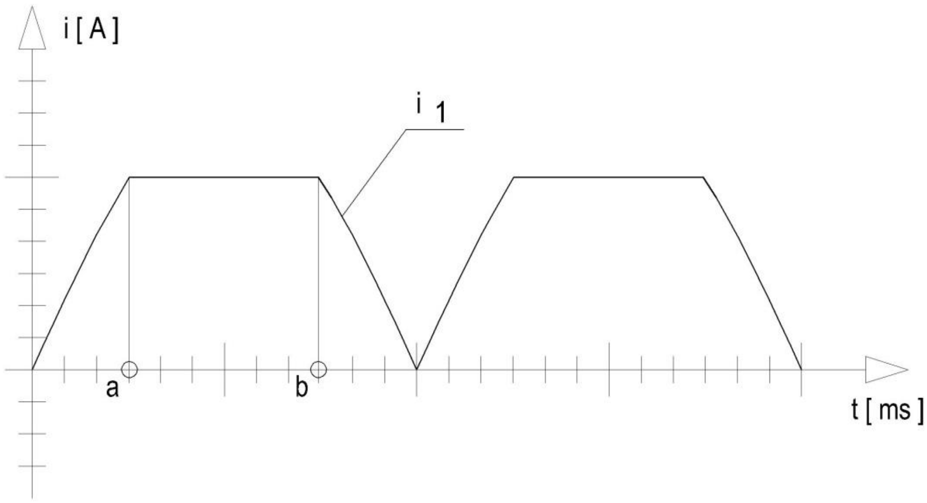
U2.08.- Hallar el factor de forma de la señal de corriente cuya forma de onda se representa en el siguiente gráfico .El valor máximo de la señal es igual al valor eficaz de la componente senoidal **i_1** (t) = 12 sen (157 t).



RESPUESTA: $F_f = 1{,}08$

SOLUCIÓN U2.08

El factor de forma (F_f) de una señal periódica viene dado por el cociente de su valor eficaz dividido por su valor medio de módulo :

$$F_f = \frac{I}{\left|\overline{I}\right|} \quad [1]$$

En el caso de la señal dada como la misma no posee valores instantáneos negativos, el valor medio resulta igual al valor medio de módulo.En consecuencia :

$$\left|\overline{I}\right| = \overline{I} = \frac{1}{T}\int_0^T i\,(t)\,dt$$

Para poder realizar el cálculo es necesario determinar las fases correspondientes a los puntos **a** y **b** , donde la señal pasa de variable a constante y viceversa.El valor instantáneo de la componente senoidal **i_1** (t) para **$t = t_a$** y **$t = t_b$** , es igual a :

$$i_1(t_a) = i_1(t_b) = \frac{\hat{I}_1}{\sqrt{2}} = \frac{12}{1{,}4142} = 8{,}4854\,[A]$$

El valor instantáneo **i_1** (**t_a**) viene dado por :

$$i_1(t_a) = 12\,sen(157 \times t_a) \quad \therefore \quad sen(157 \times t_a) = \frac{8{,}4854}{12} = 0{,}7071$$

Expresando el argumento de la función seno en [º], se obtiene :

$$157\times t_a\,\frac{180}{\pi}=arc\,sen\left(0{,}7071\right)\quad\therefore\quad t_a=\frac{3{,}1416\times 45}{157\times 180}=0{,}005\,[\,s\,]$$

Para hallar **t** $_b$ se debe aplicar la siguiente igualdad trigonométrica :

$$sen(\alpha)=sen\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$$

Teniendo en cuenta la forma de onda de la señal dada, se puede establecer que el período **T** expresado en [s] es equivalente , en valor angular , a 180 º (ó π [rad]) ; en otras palabras la pulsación o frecuencia angular (**ω**) viene dada por el cociente **π** / **T**.En consecuencia, dado que $\mathbf{i_1(t_a)}$ es igual a $\mathbf{i_1(t_b)}$, aplicando la igualdad trigonométrica indicada, se llega a :

$$t_b=t_a+\frac{T}{2}=t_a+\frac{\pi}{2\,\omega}=0{,}005+\frac{3{,}1416}{2\times 157}=0{,}015\,[\,s\,]$$

El cálculo del valor medio puede ahora realizarse considerando los intervalos correspondientes a la componente senoidal y a la componente constante de la señal dada :

$$\overline{I}=\frac{1}{T}\int_0^T i\,(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^{0{,}005} i_1(t)\,dt+\frac{1}{T}\int_{0{,}005}^{0{,}015} I_1\,dt+\frac{1}{T}\int_{0{,}015}^{T} i_1(t)\,dt$$

$$donde\quad T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{3{,}1416}{157}=0{,}02\,[\,s\,]$$

Observando la forma de onda de la señal de corriente dada se deduce fácilmente que :

$$\frac{1}{T}\int_0^{0{,}005} i_1(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_{0{,}015}^{T} i_1(t)\,dt$$

por lo tanto el valor medio de la señal de corriente dada vale :

$$\overline{I}=\frac{2}{0{,}02}\int_0^{0{,}005}12\,sen(157\,t)\,dt+\frac{1}{0{,}02}\int_{0{,}005}^{0{,}015}\frac{12}{\sqrt{2}}\,dt=$$

$$\overline{I}=\frac{2\times 12}{0{,}02\times 157}\left[-\cos(157\,t)\right]_0^{0{,}005}+\frac{12}{0{,}02\times 1{,}4142}\,(t)_{0{,}005}^{0{,}015}=$$

$$\overline{I}=7{,}6433\left[\cos(157\times 0)-\cos(157\times 0{,}005)\right]+424{,}2681\,(0{,}015-0{,}005)=$$

Atención : los argumentos de las funciones trigonométricas están expresados en [rad]

$$\overline{I}=7{,}6433\,[\,1-0{,}7074\,]+424{,}2681\times 0{,}010=2{,}2364+4{,}2427=6{,}48\,[A]$$

El valor eficaz de la señal de corriente cuya forma de onda se muestra en el gráfico viene dado por :

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [\,i(t)\,]^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{0,005} [\,i_1(t)\,]^2\,dt + \frac{1}{T}\int_{0,005}^{0,015} (I_1)^2\,dt + \frac{1}{T}\int_{0,015}^{0,02} [\,i_1(t)\,]^2\,dt$$

Observando la forma de onda de la señal de corriente dada se deduce fácilmente que :

$$\frac{1}{T}\int_0^{0,005} [\,i_1(t)\,]^2\,dt = \frac{1}{T}\int_{0,015}^{0,02} [\,i_1(t)\,]^2\,dt$$

de donde :

$$I^2 = \frac{2}{T}\int_0^{0,005} [12\,sen(157\,t)]^2\,dt + \frac{1}{T}\int_{0,005}^{0,015}\left(\frac{12}{\sqrt{2}}\right)^2 dt$$

En general, la integral de la función **sen^2 (ω t)** tiene la siguiente solución :

$$\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} [\,sen(\omega t)\,]^2\,dt = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2} [1-\cos^2(\omega t)]\,dt = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2}\left[1-\frac{1}{2}-\frac{\cos(2\,\omega t)}{2}\right]dt$$

Reemplazando en la expresión de cálculo del valor eficaz de la señal dada, se obtiene :

$$I^2 = \frac{2\times 12^2}{0,02}\int_0^{0,005}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\left(2\times 157\,t\right)\right]dt + \frac{12^2}{0,02\times 2}\int_{0,005}^{0,015} dt =$$

$$I^2 = 7200\left[\int_0^{0,005} dt - \int_0^{0,005}\cos(314t)\,dt\right] + 3600\,[\,t\,]_{0,005}^{0,015} =$$

$$I^2 = 7200\times 0,005 - \frac{7200}{314}[\,sen(314t)\,]_0^{0,005} + 3600\times 0,010 =$$

Atención : los argumentos de las funciones trigonométricas están expresados en [rad]

$$I^2 = 36 - 22,93[\,sen(314\times 0,005) - sen(314\times 0)\,] + 36 = 72 - 22,93\times 1 =$$

$$I^2 = 49,07\,[\,A\,]^2 \quad \therefore \quad I = \sqrt{49,07} = 7\,[\,A\,]$$

Reemplazando valores en la expresión del factor de forma (**F $_f$**) resulta :

$$F_f = \frac{I}{\bar{I}} = \frac{7}{6,48} = 1,08$$