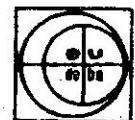


FELIX CERNUSCHI
FRANCISCO I. GRECO

Ediciones Previas

Teoría de errores de mediciones



EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES

ÍNDICE

Esta edición ha sido revisada por los autores

Segunda edición: Junio de 1974



EUDEBA S.E.M.
Fundada por la Universidad de Buenos Aires

1968

EDITORIAL UNIVERSITARIA DE BUENOS AIRES
Sociedad de Economía Mixta
Rivadavia 1571/73

Hecho el depósito de ley

IMPRESO EN LA ARGENTINA - PRINTED IN ARGENTINA

PROLOGO	XI
CAPÍTULO I	
I. 1. Introducción	1
I. 2. Objeto de la teoría de errores.....	3
I. 3. Concepto de probabilidad	
A. Los colectivos de von Mises.....	7
B. Consideraciones complementarias sobre la noción de probabilidad	12
CAPÍTULO II	
II. 1. Funciones de distribución.....	16
II. 2. Distribución de Bernoulli	20
II. 3. Principales tipos de promedios estadísticos.....	25
II. 4. Momentos de una distribución	30
II. 5. Momentos sucesivos de la distribución binomial.....	35
II. 6. Teorema de Tshebyshoff.....	37
II. 7. Teorema de Bernoulli	39
II. 8. Distribución de Poisson.....	42
II. 9. Función característica	
A. Función característica de la distribución binomial	49
B. Función característica de la distribución de Poisson	50
II. 10. Distribución normal o de Gauss.....	51
II. 11. Índices de dispersión.....	57
II. 12. Algunas de las principales características de la curva de Gauss	61
CAPÍTULO III	
III. 1. Teoría de errores	66
III. 2. Teorema de Bayes.....	72
A. Algunas aplicaciones del teorema de Bayes.....	74
B. El teorema de Bayes y la teoría de errores	78
C. El teorema de Bayes y la comprobación de hipótesis científicas	79
III. 3. Demostración de Gauss de la curva de distribución de los errores accidentales.....	81
III. 4. Deducción del postulado de Gauss de la media aritmética a partir de otros axiomas más simples.....	85

VII

Teoría de errores de medición

III. 5. Algunos casos en que no se cumple el postulado de Gauss de la media aritmética	88
III. 6. Determinación de los parámetros característicos de una curva de Gauss por medio de un número finito de mediciones.....	91
III. 7. Distintas apreciaciones estadísticas de los errores.....	106
III. 8. Ley de reproducción de la ley de Gauss	113
Consecuencias de la ley de reproducción de Gauss.....	116
III. 9. Error cuadrático de la media	123
III. 10. Relación entre la dispersión de los residuos y la de los errores.....	125
III. 11. Criterios para desechar observaciones. Diferencia entre errores y equivocaciones.....	131
III. 12. Peso de las medidas	142
III. 13. Error probable de la desviación standard.....	149
III. 14. Varianza del promedio y de la varianza	153
III. 15. Proyecto de experiencias de medidas físicas.....	160

CAPÍTULO IV

IV. 1. Representación geométrica de una muestra de n medidas.	173
IV. 2. Verificabilidad de las hipótesis estadísticas	176
IV. 3. Distribución X^2 y algunas aplicaciones a la teoría de errores.....	188
Aplicaciones del criterio X^2	199
IV. 4. Criterios de comparación de valores promedios.....	205
A. Criterio que se infiere de la ley normal.....	206
B. Distribución t de Student y su aplicación a la teoría de errores.....	209
IV. 5. Distribución F de Snedecor y su aplicación a la teoría de errores.....	216
A. Comparación de desviaciones standard.....	223
B. Verificación estadística del valor medio.....	225
IV. 6. Distribución del rango y su aplicación a la teoría de errores.....	226

CAPÍTULO V

V. 1. Correlación de variables	231
V. 2. Coeficiente de correlación.....	237
A. Correlación estadística entre Z_1 y Z_2	241
B. Mediciones indirectas con variables correlacionadas estadísticamente.....	249
V. 3. Distribución normal bivariante	253
V. 4. Prueba de hipótesis referente al coeficiente de correlación.....	260
V. 5. Correlación funcional entre Z_1 y Z_2	266
A. Caso F I: error en una variable.....	267
B. Caso F II: error en ambas variables	280

Índice	
V. 6. Ajuste de curvas.....	284
A. Linealización de algunas relaciones funcionales....	285
B. Ajuste por polinomios.....	292
C. Ajuste mediante curvas conocidas.....	296
D. Otros métodos	301
E. Medida del ajuste.....	309
V. 7. Método de los mínimos cuadrados.....	312
APENDICE	323
TABLA 1	
Valores de la función de distribución normal.....	323
TABLA 2	
Valores de la función de probabilidad acumulada.....	324
TABLA 3	
Criterio de Chauvenet.....	325
TABLA 4	
Distribución χ^2	326
TABLA 5	
Distribución t de Student	327
TABLA 6	
Distribución F de Snedecor	329
ÍNDICE ALFABÉTICO.....	332
ÍNDICE DE AUTORES.....	336
BIBLIOGRAFÍA.....	337

PRÓLOGO

La observación y la experimentación constituyen la base del conocimiento científico. Ellas suministran la información necesaria para crear, estructurar y verificar teorías científicas. Cuanto más precisa sea esta información, tanto más ajustadas a la realidad podrán ser las descripciones y predicciones de las correspondientes teorías. Dicha información está constituida por un conjunto de datos o mediciones. Consecuentemente, uno de los objetivos del proceso científico es proyectar experimentos e instrumentos que permitan medir, con la mayor aproximación posible, las constantes y las magnitudes implicadas en los procesos que se investigan. Las mediciones pueden estar afectadas por equivocaciones en las lecturas y por errores sistemáticos y accidentales. Estos últimos, llamados también errores azarosos, son inevitables, son inherentes a los procesos mismos de las mediciones.

Al repetir la medición de una misma cantidad o magnitud (longitud, masa, velocidad, densidad, fuerza, calor específico, temperatura, viscosidad, resistencia eléctrica, etcétera) en iguales condiciones y por el mismo procedimiento, no se obtiene generalmente el mismo valor, sino una distribución estadística de valores. A veces, en las mediciones sucesivas se repite aparentemente el mismo valor. Esto se debe a que las imprecisiones o incertidumbres de las distintas medidas son más pequeñas que la menor apreciación de la escala de medidas que se emplea. Así, por ejemplo, cuando medimos la longitud de una mesa usando una regla graduada en centímetros, podemos encontrar en las sucesivas mediciones que la longitud medida está representada por el mismo número de centímetros. Esto significa que la incertidumbre de cada medición es menor de un centímetro. Si usásemos un instrumento más preciso que aproxima, por ejemplo, la centésima parte de un milímetro, encontraríamos una distribución estadística de las sucesivas mediciones de la longitud considerada.

Vemos, pues, que no tiene sentido decir cuál es el valor absoluto o verdadero de una determinada magnitud física, sino que debemos decir, para ser más precisos, que midiendo una cierta cantidad o magnitud por un determinado procedimiento (el que explícita o implícitamente debe incluir una descripción detallada de los instrumentos empleados y de la forma de utilizarlos) se obtiene una distribución estadística de valores que, como veremos, nos permite calcular la mejor estimación de la cantidad medida y su error probable. La ciencia no nos acerca a los valores absolutos, sino que, por lo contrario, nos enseña a tratar los problemas prescindiendo de toda concepción absoluta.

Los resultados de las observaciones de los experimentos son, como hemos indicado, distribuciones estadísticas de valores. En consecuencia, la base experimental de la ciencia está intimamente relacionada con la teoría de probabilidad y la estadística matemática. Solo mediante estas disciplinas se puede elaborar una teoría de los datos suministrados por la experimentación.

Teoría de errores de medición

También la teoría de probabilidad es de gran importancia en fundamentales teorías físicas (teoría cinética de la materia, mecánica y termodinámica estadísticas, mecánica cuántica, procesos irreversibles). Quizá la teoría de probabilidad constituye el nexo de unificación más importante, no solamente entre las distintas partes de las ciencias físicas, sino también entre las diferentes ramas de la ciencia. La teoría de probabilidad es necesaria para desarrollar la teoría de errores de medición. Normalmente se enseña esta teoría de errores en los cursos generales de física a alumnos que no conocen los conceptos básicos de la teoría de probabilidades, y también en los cursos en los que, aunque se enseña esta teoría, no se explica la teoría de errores. Por eso sigue teniendo vigencia todavía la opinión de Lippman, que compartía Poincaré: "Todos creen en la ley de Gauss; los experimentadores se imaginan que es un teorema matemático y los matemáticos que es un hecho experimental".

Como veremos, la teoría de errores es una teoría física, con características similares a los de cualquier otra teoría física; tiene, por lo tanto, hipótesis especiales, una estructura matemática y definiciones operacionales que conectan la teoría con los datos observacionales. La teoría de errores es la teoría física que todo experimentador debe conocer.

Comenzamos este libro desarrollando algunas partes importantes de la teoría de probabilidades y de estadística matemática. La teoría de errores la tratamos como un caso particular de la teoría de las muestras de un determinado universo. Se desarrollan varias distribuciones que se relacionan con la de Gauss y que se necesitan para el estudio de la inferencia estadística, a fin de hacer aplicaciones concretas a la teoría de errores. Se estudian los errores correlacionados que trata la teoría de los mínimos cuadrados y la verificabilidad de las hipótesis estadísticas.

Consideramos que el criterio general que nos ha guiado en la redacción de este libro y que hemos indicado anteriormente, le asigna algunas características propias que permiten, a nuestro entender, un enfoque didáctico más satisfactorio que el que se sigue en los textos usuales en la materia.

Con objeto de facilitar la comprensión y la aplicación de las nociones, criterios, procedimientos y fórmulas explicados en este libro, hemos incluido una gran variedad de ejemplos, ejercicios numéricos y problemas.

Para iniciar la lectura y comprensión de este libro basta con los conocimientos de matemáticas que deben tener los estudiantes de primer año de una Facultad de ciencias o de ingeniería. Los capítulos I y III pueden estudiarse paralelamente al primer curso universitario de física. Los capítulos II, IV y V requieren conocimientos de cálculo infinitesimal y funciones de variable compleja.

Queremos dejar expresado nuestro reconocimiento al profesor Sayd Codina por haber leído los primeros capítulos del manuscrito y sugerido útiles observaciones.

Buenos Aires-Montevideo, junio de 1968

Los autores

SIMBOLOGÍA USADA

Apreciación, intervalo de clase	Δz
Coeficiente de aplanamiento (kurtosis)	a_p
Coeficiente de asimetría (skewness)	a_s
Coeficiente de correlación del universo	P
Coeficiente de correlación experimental	r
Constante de precisión	h
Cuartiles de orden s	q_s
Chi cuadrado, variable de Helmert	χ^2
Densidad de probabilidad	$P(z)$
Desviación media	d
Desviación standard del universo	σ
Desviación standard de una muestra	s
Diferencias aliadas	Δa
Diferencias finitas de orden s	Δs
Error del 99%	E_{99}
Error medio	EM
Error probable	EP
Error relativo	E'
Esperanza matemática	$E[]$
Frecuencia	f
Función beta	$\beta(m, n)$
Función característica	$\Phi(t)$
Función característica centrada	$\Phi_c(t)$

Simbología usada

Función de frecuencias acumuladas	$F(z)$
Función de Gauss normalizada	$G(t)$
Función gamma	$\Gamma(n)$
Hipótesis alternada	H_1
Hipótesis nula	H_0
Momento centrado de orden s	M_s
Momento de orden s	m_s
Número de observaciones	n
Número de observaciones del atributo z	$n(z)$
Peso de las medidas	ω
Probabilidad	$P()$
Probabilidad compuesta	$P(a, b)$
Probabilidad condicional	$P(a b)$
Rango	R
Residuo	r_i
Valor medio	\bar{z}
Valor medio del universo	m
Valor medio, distribución de Poisson	λ
Variable aleatoria	Z
Variable aleatoria centrada	x
Variable de Snedecor	F
Variable de Student	t
Varianza de la muestra	s^2
Varianza del universo	σ^2
Verosimilitud	$V_n()$

CAPÍTULO I

I. 1. INTRODUCCIÓN

Las mediciones de los distintos observables físicos, con "la máxima precisión posible", son de fundamentalísima importancia para las diferentes ramas de las ciencias físicas. Gracias a ellas y al empleo de las Matemáticas, a dichas ramas de las ciencias se las llama, con un poco de optimismo, "Ciencias Exactas"

El resultado de una medición de una magnitud física es un número que depende de lo que se mide (la magnitud misma), del procedimiento de medida, del instrumental usado en la misma, como así también del observador y de otros factores menores. Para que el número, atribuido a una cantidad física, tenga sentido, debe ir acompañado, explícita o implícitamente, del procedimiento seguido y de las características de los instrumentos utilizados en la obtención del correspondiente número.

La medida de una determinada magnitud física debe implicar el procedimiento a seguirse, para hallar la mejor estimación de la magnitud medida. Es decir, debe darse la definición operacional de la magnitud considerada. La medida de una longitud o de un tiempo tiene significado físico cuando se ha descrito el conjunto de operaciones físicas que se deben realizar para asignar, en cada caso particular, un número a la magnitud considerada. Para medir una determinada magnitud física es necesario compararla con otra del mismo tipo que se toma como unidad. Por lo tanto, una definición operacional de una determinada magnitud debe comprender, implícita o explícitamente, la definición precisa del patrón de medida utilizado. El proceso de medida de una cantidad física depende de las definiciones operacionales de otras magnitudes físicas, y éstas a su vez, de la estructura alcanzada

por las teorías físicas. Así, por ejemplo, la longitud de una barra de hierro depende de los valores de varias cantidades físicas como la temperatura, tensión, carga eléctrica, velocidad con respecto al observador, aceleración de la gravedad, etcétera. Por lo tanto, la definición del proceso de medida de una longitud debe contener necesariamente los procedimientos para mantener constantes todos los parámetros físicos que influyen en el valor de la magnitud considerada; y estos procedimientos resultan del conocimiento de varias leyes físicas. Consecuentemente, los procedimientos de medida se perfec-cionan a medida que la Física progresá y, en cada momento, solamente pueden aplicarse definiciones operacionales aproxi-madas, aplicables a casos simplificados.

De una misma magnitud física se pueden dar, por lo general, varias definiciones operacionales. Por ejemplo, un intervalo de tiempo puede medirse por el ángulo barrido, en dicho in-tervalo, por la Tierra en su rotación; por un determinado nú-mero de oscilaciones de un péndulo o de un resorte de carac-terísticas bien definidas; por el correspondiente número de vibraciones de un cristal de cuarzo de cierto espesor; por la distancia recorrida por un rayo de luz; por la cantidad de radium desintegrada; por un reloj atómico, etcétera. La Fí-sica constituye un edificio científico coherente debido espe-cialmente a que, mediante las diferentes definiciones opera-cionales, basadas en leyes distintas, de una misma magnitud física, se obtienen, en cada caso, resultados que son aproxi-madamente iguales.

Por lo expresado surge que los procedimientos de medida de las magnitudes físicas son evolutivos y que dependen del grado de desarrollo de la Física y de la precisión de los ins-trumentos de medida existentes. Existe, también, una reci-proca influencia: todo progreso de la Física permite mejorar los procedimientos de medida y todo perfeccionamiento de es-tos procedimientos asegura nuevos adelantos de las teorías físicas.

De lo expuesto se deduce claramente que no es posible me-dir una determinada magnitud física con verdadera exactitud. Los distintos parámetros físicos que influyen en su determi-

Introducción

nación están sujetos, por rigurosas que sean las condiciones de control de su constancia, a inevitables fluctuaciones. No es posible, pues, la existencia de procedimientos de medida absolutamente perfectos, que puedan repetirse un número in-definido de veces de manera y condiciones rigurosamente i-guales. Por otra parte, todo instrumento de medida permite efectuar lecturas dentro de los límites de apreciación del mis-mo y no es posible construir ningún aparato de medida que pueda efectuar mediciones con errores menores que un deter-minado valor.

Además, debido a la naturaleza atómica de la materia, a sus vibraciones y a la cuantificación de la energía, no es po-sible, en general, atribuirle a la entidad física que se desea medir un "valor verdadero" absolutamente exacto. La supo-sición de la existencia de "valores verdaderos" absolutamen-te exactos e invariables, correspondientes a las cantidades físicas que se desean medir, es una hipótesis metafísica, resabio de un realismo filosófico ingenuo que todavía se enuen-tra en muchos libros de física. Una verdadera teoría Física de los errores de observación debe eliminar esta hipótesis metafísica.

De lo anterior se infiere que en el proceso de medición de las distintas cantidades observables, a lo más que podemos aspirar es a determinar, de la mejor manera posible, el "va-lor más probable" o la "mejor estimación" que de dicha mag-nitud podemos hacer teniendo en cuenta el conjunto de resul-tados obtenidos, y a cuantificar las imprecisiones, o sea los límites probables de error de dicho valor, que podemos tam-bién determinar de las medidas correspondientes.

I. 2. OBJETO DE LA TEORÍA DE ERRORES

De acuerdo con lo expuesto precedentemente, tenemos que, cada vez que se efectúe el conjunto de operaciones requeridas para medir una determinada magnitud, se obtendrá un número que solamente en forma aproximada representa la medida bus-cada. Por lo tanto, cada resultado de una medición está afec-tado por un cierto error.

Los errores de medición, clásicamente, se clasifican en

sistemáticos y accidentales.

Los errores sistemáticos son aquellos de valor constante o que responden a una ley conocida y son, por lo tanto, corregibles. A este tipo pertenecen, por ejemplo, los errores de calibración de escalas, el atraso o adelanto de un reloj de acuerdo con un ritmo conocido; y los motivados, en general, por otras causas medibles con precisión. La detección y corrección de estos errores se efectúa por comparación o contraste con instrumentos patrones. Por ello adquieren enorme importancia los "standard" de los Institutos de Pesas y Medidas para dicha comprobación.

Los errores que dependen exclusivamente de las fluctuaciones inevitables e imprevisibles, dentro de ciertos límites, de los parámetros físicos que determinan la magnitud que se mide, se llaman errores al azar o accidentales.

Los errores accidentales, o debidos al azar, son los provenientes de múltiples factores inapreciables cuya magnitud y signo es imposible predecir. Son estas interacciones las que provocan que múltiples medidas en "idénticas condiciones" no arrojen el mismo valor. Esas múltiples perturbaciones provienen de fuentes de error independientes, que individualmente dan desviaciones pequeñas, erráticas, positivas y negativas, imposibles de detectar. Cada uno de los errores accidentales es la suma algebraica de un gran número de pequeños errores, cuyas causas son numerosas y pueden actuar en un sentido o en el opuesto con igual frecuencia media.

Por supuesto que la división entre errores sistemáticos y accidentales no es tajante y debe ser sometida a revisión crítica constantemente. Un perfeccionamiento en el proceso de medida puede poner de manifiesto la existencia de nuevos errores sistemáticos que anteriormente se incluían dentro de los accidentales.

Por otra parte, como veremos más adelante, deben también eliminarse, de los errores accidentales, aquellos errores gresos motivados por distracción del observador, como, por ejemplo, el confundir un número por otro en una escala o el va-

lor de una determinada pesa, etcétera. Estos errores son ocasionados por equivocaciones detectables y se pueden evitar aumentando el cuidado y la atención del observador al efectuar las mediciones.

Los errores accidentales pueden ser debidos al observador, al instrumento de medida, a la magnitud a medir, a la variación del medio ambiente, etcétera. Sus características son la cantidad heterogénea de factores interviniéntes, cada uno de los cuales presenta fluctuaciones en sus valores indeterminados, dentro de ciertos límites; es decir, que dichas variaciones se deben al azar. Por consiguiente, las fluctuaciones de los parámetros determinantes de la medida buscada pueden ser positivos o negativos y, en general, en cada medida influirán de manera distinta en los resultados. Si se efectúa, en cada caso, un conjunto grande de medidas se tendrá que, en promedio, los efectos de las distintas fluctuaciones se compensarán.

La teoría de errores estudia fundamentalmente el tratamiento matemático que debe efectuarse, con los diferentes resultados obtenidos al medir una determinada magnitud, para determinar la mejor aproximación de la medida buscada y su límite probable de error.

De lo anterior se puede inferir cuál es el objeto de la teoría de errores en las mediciones.

En primer lugar, no se busca el valor exacto de la magnitud a medir, por cuanto el mismo no tiene sentido físico; sino que, dentro del entorno en el cual están acotadas todas las mediciones, se trata de hallar el "valor más probable" de la misma, o sea la mejor estimación de la medida deseada.

Dado el carácter azaroso de las perturbaciones que intervienen, una sola medida, aun acotando los límites de errores posibles, no puede proporcionar una estimación aceptable de la cantidad medida. Para hallar una buena estimación es necesario hacer múltiples medidas y de ellas deducir el valor más probable. Dichas mediciones constituyen un conjunto estadístico del cuál se puede determinar el valor más probable que surge del conjunto de medidas dado.

Deberemos recalcar que cada una de las diferentes mediciones de una determinada cantidad deben ser efectuadas en condiciones físicas similares; es decir, por el mismo observador en igualdad de condiciones, utilizando los mismos instrumentos y procedimientos de medidas. En caso contrario, el conjunto que se obtenga no podrá ser considerado como una muestra representativa del universo de medidas correspondiente a la cantidad física considerada.

En segundo lugar, la teoría de los errores permite calcular el error probable que le corresponde al valor más probable obtenido de un conjunto de medidas. El valor más probable no tendrá valor si no se puede saber la cota de su error.

Por lo ya mencionado, una magnitud z se especificará por su valor más probable z_1 , y por el entorno Δz , dentro del cual es posible que el correspondiente valor pueda variar al efectuarse nuevas mediciones. Por consiguiente, el valor de z se encontrará en el intervalo

$$z_1 - \Delta z \leq z \leq z_1 + \Delta z$$

o bien

$$z = z_1 \pm \Delta z$$

En rigor, la acotación del error exige también el cálculo de probabilidades, por cuanto dicho entorno se fija sobre la base de que la probabilidad de que una medida esté comprendida en el referido entorno sea igual o mayor que un determinado número, por ejemplo, un medio.

Por ello, la probabilidad de que el resultado de una medición esté comprendido entre $z - \Delta z$ y $z_1 + \Delta z$ se expresará:

$$P(z_1 - \Delta z \leq z \leq z_1 + \Delta z) = c < 1 \quad (I. 1)$$

Si $c = 1$, se tendría la certeza y, por lo tanto, la seguridad de que cualquier nueva medición estaría comprendida dentro del intervalo indicado.

Si $c = 0,5$, al intervalo Δz se lo denomina **error más probable**, y nos indica que del resultado de n mediciones efectuadas, $n/2$ caerían en promedio dentro de dicho entorno.

El valor de c depende del intervalo Δz . A mayor intervalo (mayor entorno), tanto mayor c . Si $c=0$, el intervalo o error es $\Delta z = 0$; o sea: la probabilidad de que una nueva medida repita el valor anterior z , es nula.

Por lo dicho, se observa que al hablar de intervalo de error es necesario especificar el valor de la constante c que lo determina.

La teoría de los errores accidentales de las mediciones, que se basa en la teoría de las probabilidades aplicada a un conjunto de medidas obtenidas en condiciones lo más similares posibles, permite, como veremos, resolver importantes problemas para la ciencia experimental.

Teóricamente, el valor más probable exige infinitas mediciones. Pero en la práctica es suficiente considerar un número finito, aunque cuanto más grande, mejor. Asimismo, la cantidad de mediciones que se puede efectuar es finita. La teoría de los errores nos permite inferir, de un número finito de mediciones, el valor más probable y su cota de error.

El proceso inverso sería: fijado el intervalo de error probable de una cierta magnitud, determinar el número mínimo de mediciones necesario para alcanzarlo, dentro, por supuesto, de un margen de error. Este problema es de fundamental importancia para la programación de experimentos [ver párrafo III-15].

I. 3. CONCEPTO DE PROBABILIDAD

A. LOS COLECTIVOS DE VON MISES* [33] [35]

La teoría de los errores exige un conocimiento claro y lo más preciso posible del concepto de probabilidad.

En el lenguaje común se utiliza la palabra probabilidad con diversos conceptos no equivalentes. Así, por ejemplo, se dice: es probable que mañana llueva, es probable que Napoleón haya sido

* Al final del libro damos la lista de la bibliografía citada, por orden alfabético, precedida por un número de referencia. Este número se indicará en el texto entre corchetes []. En los casos necesarios se indicará, además, a la derecha de dicho número, la página o el capítulo correspondiente. El paréntesis () lo utilizamos para indicar las fórmulas de cada capítulo; por ejemplo (IV, 16) individualiza la fórmula 16 del capítulo IV.

asesinado, es probable que Colón haya sido italiano. En todos estos casos nos referimos a hechos singulares no repetibles. Es preferible, en estos casos, usar la expresión: existe cierta información con respecto al hecho de que...

Cada vez que usemos la palabra probabilidad será en conexión con procesos repetibles un número ilimitado de veces en condiciones en un todo similares.

De acuerdo con la definición de Laplace: "Probabilidad es la relación entre el número de casos favorables sobre el número total de casos, siempre que cada uno sea igualmente posible"

Claro está que para que esta definición tenga sentido debe especificarse que el "igualmente posible" es equivalente a "igualmente probable". Esto convierte a la definición en un círculo vicioso y uno de los requisitos fundamentales de toda definición es que la misma no encierre al término definido. Cambiar, por lo tanto, la expresión "igualmente probable" por la de "igualmente posible" no evita la tautología.

Pero independientemente de esa falla de tipo lógico, la definición teórica de Laplace también es poco fructífera. En Ciencia, en general, y en Física, en particular, es necesario inferir la probabilidad del proceso individual a partir de los resultados obtenidos. La definición de Laplace es aplicable a los juegos de azar en los que se conoce perfectamente el instrumento que se utiliza: dados, ruleta, baraja, etcétera; por consiguiente, en estos casos, por construcción y de acuerdo con leyes elementales de la Física, es atendible establecer el postulado de que los distintos casos posibles son igualmente probables. En Ciencia, en general, no conocemos la naturaleza del proceso (por ejemplo, si el dado está cargado o no) y deseamos inferirla a través de los resultados observacionales o experimentales.

El concepto de probabilidad en Ciencia requiere una verificación experimental, es decir, una definición operacional.

¿Cuál podría ser el problema físico en el caso de arrojar un dado? La probabilidad de que aparezca en la cara superior el uno, según la definición anterior, es $1/6$. Pero ésta

exige que el dado sea perfecto, comprobación que debe efectuarse experimentalmente arrojando el dado, por ejemplo, un gran número de veces y constatando la igual probabilidad de todos los números.

Asimismo, ¿qué significado tiene la probabilidad $p = 1/6$? Que arrojando el dado perfecto un gran número de veces, la cantidad de ellas en que ha aparecido el uno es, en promedio, la sexta parte del total; $p = 1/6$ sin dicha experimentación no tiene sentido científico.

La definición se mejora observando que si un experimento se repite manteniendo las condiciones constantes, se observa una dispersión discreta de valores. El número de veces n_1 que se ha dado un evento favorable (por ejemplo, sacar el uno al arrojar el dado) sobre el número total n de eventos producidos, lo denominamos frecuencia f del evento favorable. Si estamos midiendo una determinada magnitud, la frecuencia f de una medida es la relación entre las n_1 veces que ella se ha dado sobre el número total n de medidas efectuadas:

$$f = \frac{n_1}{n} \quad (I. 2)$$

En general, para distintos valores de n_1 la frecuencia f será distinta; pero es un hecho experimental que cuando n crece indefinidamente, la frecuencia f tiende a un valor límite que se define como probabilidad p del evento favorable o de una medida dada, y representa la proporción que corresponde a ese evento o a esa medida cuando el número total de medidas o de eventos se hace muy grande.

Simbólicamente,

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_1}{n} \quad (I. 3)$$

En el caso del dado antedicho, si el límite de frecuencias de cada cara tiende a $1/6$ habremos podido determinar, por medio de un ensayo físico, la calidad del dado, verificando la hipótesis inicial, con un cierto margen de error.

Ésta es la definición de probabilidad como límite de frecuencias, mucho más útil, para el estudio de los fenómenos físicos, que la definición de Laplace, pues ésta como ya hemos dicho, es tan solo aplicable en los casos en que se conoce la naturaleza del proceso a estudiar, como en el caso de los juegos de azar. A la ciencia, en cambio, le interesa, a partir de los resultados, inferir la naturaleza del fenómeno. Como veremos más adelante, la definición de probabilidad como límite de frecuencias fue perfeccionada por von Mises.

La definición de probabilidad como límite de frecuencias solo es aplicable a fenómenos azarosos y carece totalmente de sentido aplicarla a fenómenos que no lo son.

En primer lugar, dicho límite debe tender a un valor estable cuando n tiende a infinito. De no ser así, la definición de probabilidad, tal como se ha dado, no sería de utilidad en Ciencia.

Indicaremos un caso de sucesión no azarosa. Supongamos que a lo largo de una carretera los kilómetros estén señalizados por postes pequeños y cada 10 km por un poste grande. Un observador recorre en un auto la carretera y decide determinar la probabilidad de aparición de un poste grande. En este caso no tendría sentido aplicar el concepto de probabilidad, puesto que la sucesión de postes largos y cortos sigue una ley y, consecuentemente, podemos hacer tender el límite del cociente de postes altos sobre el total de postes considerados a cualquier número, entre cero y uno, de acuerdo con la ley que sigamos para seleccionar los postes. Así, por ejemplo, si de cada nueve postes chicos que aparecen se deja sin tener en cuenta el siguiente, obviamente el límite del cociente considerado será cero. Si, por el contrario, cada nueve postes chicos se considera solamente el siguiente y no los nueve primeros, el correspondiente cociente será igual a uno. Vemos, pues, que el límite de la frecuencia, en este caso, depende de la regla de selección que se adopte para formar el conjunto de casos que se considerarán. Dada la ley de distribución de postes bajos y altos y la correspondiente ley de selección para formar la relación de casos favorables a totales, se puede determinar, por simple matemática, cuál será el valor del límite para cada ley de selección. Obviamente, en estos casos no corresponde hablar de probabilidad.

El concepto de probabilidad se aplica solamente a sucesiones azarosas. Esto nos obliga a dar una definición operacional de "sucesión azarosa".

Definimos, con von Mises, como una sucesión azarosa a la que cumple las dos condiciones siguientes:

- 1) La frecuencia de aparición en la misma de una determinada característica debe tender a un límite.
- 2) Ese límite debe ser independiente de la regla de selección que se aplica para tomar los elementos que se tendrán en cuenta de la sucesión considerada a los efectos de determinar el límite considerado.

Aclaremos con un ejemplo el significado de la segunda condición impuesta por von Mises. Supongamos que una persona arroja un dado perfecto; indiquemos con la serie de números naturales los sucesivos tiros del dado y que otra persona anote los resultados que se obtengan, por ejemplo, en las tiradas que correspondan a los cubos de los números del primer observador (o cualquier otra función de dichos números). Ahora bien; si se determina el límite de la frecuencia en que aparece un as, por ejemplo, en la sucesión seleccionada por la segunda persona, se encontrará que el límite es igual a un sexto. En otras palabras: en los juegos de azar no hay regla que permita ganar.

A las sucesiones que cumplen la definición de von Mises se las llama "colectivos de von Mises". Cada observación es un elemento del "colectivo".

Consideraremos que la definición de von Mises complementa la clásica definición de probabilidad como límite de frecuencia y es aplicable en Ciencia. La misma da una definición operacional de proceso azaroso. Dicha definición no es muy elegante desde el punto de vista matemático, pero es operacionalmente aceptable desde el punto de vista de la física experimental.

De lo anterior se deduce que, en un "colectivo", la probabilidad de un atributo es:

I. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(z)}{n} = p(z)$ existe. (I. 4)

II. Elegida una regla de selección cualquiera, a priori, que determine los elementos $n'(z)$ y n' se debe cumplir que:

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{n'(z)}{n'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(z)}{n} = p(z) \quad (\text{I. 5})$$

De la definición de probabilidad surge en seguida como corolario que la suma de las probabilidades para todos los distintos atributos posibles en cada colectivo es igual a uno, o sea:

$$\sum_z p(z) = 1. \quad (\text{I. 6})$$

Estos postulados no están libres de objeciones. La determinación de $p(z)$ requeriría un número teóricamente infinito de elementos. Pero se constata experimentalmente que el cociente $\frac{n(z)}{n}$ tiende a estabilizarse con bastante rapidez; cuanto mayor es n tanto mayor es el número de cifras decimales que se estabilizan. Esto se puede verificar experimentalmente con una moneda o un dado. Un número N suficientemente grande basta para determinar dicho límite, con un error que es tanto más pequeño cuanto mayor es N . En general, al aplicar el cálculo diferencial a la Física, se producen situaciones similares; por ejemplo, la densidad en un punto queda definida por el $\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \delta$, y experimentalmente se puede realizar de manera aproximada.

B. CONSIDERACIONES COMPLEMENTARIAS SOBRE LA NOCIÓN DE PROBABILIDAD [1]

Supongamos que estudiamos una variable aleatoria que puede tomar solamente los valores 0 o 1 (por ejemplo, el proceso aleatorio correspondiente al juego de la moneda). Toda sucesión de ceros y unos se puede representar por un punto en el segmento 0,1 en un sistema de numeración binaria. Una determinada regla de selección o de juego puede también

estar representada por un punto en el segmento 0,1 con la siguiente interpretación: se establece una correspondencia biunívoca entre los elementos del colectivo (cuyos resultados no se conocen) y los elementos de la regla de selección, eligiéndose solamente los elementos del colectivo que corresponden a los unos en la sucesión que representa la regla de selección. Fijada una regla de selección (es decir, un punto en el segmento 0,1), lógicamente no es imposible que exista algún proceso aleatorio que pueda suministrar una sucesión indefinida de ceros y unos que esté representada por el mismo punto anterior; por consiguiente, la condición II de Von Mises no es lógicamente admisible.

Para cortar toda contradicción en la definición del azar dada por von Mises, habría que enunciar su segunda condición en la siguiente forma:

II'. Existe una probabilidad cero de encontrar una regla de selección para la que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(z)}{n} \neq p(z) \quad (\text{I. 7})$$

siendo z uno de los atributos del colectivo y $p(z)$ la probabilidad del mismo.

El teorema de Bernoulli, uno de los fundamentales de la teoría de la probabilidad, y que es precisamente aplicable al mencionado juego de la moneda, dice: La probabilidad de que la frecuencia $\frac{n(z)}{n}$ discrepe de su valor medio $p(z)$ en valor

absoluto por lo menos de ξ , tiende a cero cuando n tiende a infinito, por pequeño que se tome $\xi > 0$; es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left(\frac{n(z)}{n} - p(z) \right) \geq \xi \right] = 0. \quad (\text{I. 8})$$

(Más adelante nos referiremos más detalladamente a este teorema, Párrafo II. 7)

Para no poner en contradicción, por otra parte, el resulta-

do de este teorema con la definición del colectivo de von Mises, habrá que definir la condición II en la forma que hemos indicado II'. Pero si la definimos en esta forma introducimos en la definición de probabilidad precisamente este mismo concepto, y todo se reduce a un círculo vicioso similar al que origina la acertada crítica de von Mises contra la definición clásica de Laplace.

Muchos autores se han ocupado de la teoría de von Mises, tratando de presentar los fundamentos de la misma en una forma más satisfactoria o completa; entre otros figuran K. Dorge [20], A. H. Copeland [15], A. Wald [5], E. Tornier [52], etcétera. El hacer una exposición crítica de las teorías de los autores mencionados está fuera de los límites de este libro.

Para mantener las ventajas que presenta desde el punto de vista semántico y eliminar la contradicción puntualizada sin caer en el círculo vicioso indicado, proponemos las siguientes condiciones, que deben satisfacer el número indefinido de sucesiones infinitas correspondientes a un determinado proceso aleatorio puro:

- I. Dada una regla de selección o de juego arbitrariamente elegida, se forman m sucesiones de n elementos cada una con los resultados, no conocidos a priori, del proceso aleatorio considerado (o , lo que es lo mismo, se toman m procesos aleatorios equivalentes y con cada uno, utilizando la misma regla de selección, se eligen n elementos); existen los límites

$$p(z) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \frac{\left(\frac{n(z)}{n} \right)_1 + \left(\frac{n(z)}{n} \right)_2 + \dots + \left(\frac{n(z)}{n} \right)_m}{m} \quad (I. 9)$$

Donde $z = 1, 2, 3, \dots$ son los distintos atributos del proceso aleatorio considerado; $\frac{n(z)}{n}$: la frecuencia relativa del atributo z en la sucesión j .

- II. Los límites (I. 9) son independientes de la regla de selección que arbitrariamente se elija para determinarlos.

Imaginemos que se formen con un mismo proceso alea-

torio, por ejemplo, con el juego de la moneda, y una regla de selección cualquiera, un número infinito de sucesiones infinitas de ceros y unos (este conjunto de sucesiones podríamos imaginar que se forma utilizando un número infinito de procesos aleatorios equivalentes). En general, estas sucesiones serán diferentes entre sí a pesar de que provengan del mismo proceso aleatorio. Determinemos según (2) la probabilidad, por ejemplo, p_1 del atributo 1. Si llamamos m_k el número de sucesiones para las que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \neq p_1$, nuestra definición del azar implica

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m_k}{m} = 0 \quad I. 10)$$

Un proceso aleatorio no tiene por imagen una determinada sucesión indefinida, sino un número infinito de sucesiones infinitas con la restricción (I. 10). En esto reside la esencia del azar.

CAPÍTULO II

II. 1. FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN

Hemos indicado la importancia de la aplicación del cálculo estadístico a las mediciones de magnitudes físicas. Las mediciones sucesivas de una magnitud nos dan un conjunto de aproximaciones. Mediciones más precisas mejoran la aproximación al valor de la medida buscada. Los resultados de las distintas mediciones no son iguales, generalmente. De estos resultados pueden obtenerse las frecuencias de distribución correspondientes.

Supongamos que Δz es la menor apreciación en cada medida de z y que al efectuar n mediciones se hubiesen obtenido los siguientes resultados:

$$n_1(z_1), n_2(z_2), n_3(z_3), \dots, n_s(z_s),$$

siendo $n_i(z_i)$ el número de medidas comprendidas entre

$$z_i - \frac{\Delta z}{2} \quad y \quad z_i + \frac{\Delta z}{2}$$

Por lo expresado debe cumplirse:

$$\sum_i n_i(z_i) = n$$

Las frecuencias de las correspondientes medidas serían:

$$f_1 = \frac{n_1(z_1)}{n} \quad f_2 = \frac{n_2(z_2)}{n} \quad \dots \quad f_s = \frac{n_s(z_s)}{n}$$

Funciones de distribución

Por definición de frecuencia se tiene: $\sum_i f_i = 1$.

De acuerdo a lo expresado en el capítulo anterior,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_s(z_s)}{n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_s(z_s)}{n} = 1$$

no significa necesariamente que nunca o siempre, respectivamente, se producirá el suceso considerado. En efecto, tomando m sucesiones de n elementos cada una, puede ocurrir que en alguna sucesión el evento considerado se haya producido o no se haya producido, respectivamente, pero de acuerdo con el capítulo I : 3(2) el límite de las respectivas frecuencias tiende a cero o a uno cuando $n \rightarrow \infty$ y $m \rightarrow \infty$.

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_s(z_s)}{n} = 0,$$

no implica que z_s sea ciertamente cero, sino que puede darse un número de veces finito en una serie finita.

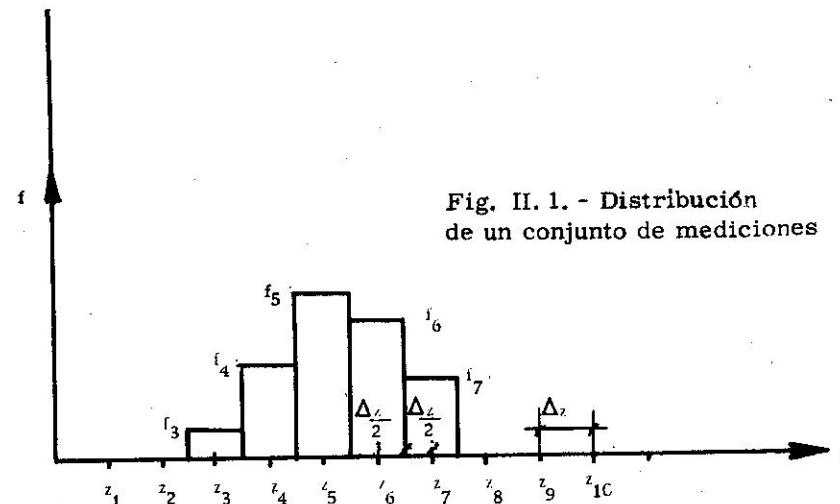


Fig. II. 1. - Distribución de un conjunto de mediciones

En la figura II. 1 se indica cualitativamente una posible distribución de valores de observación. Como veremos más adelante, su forma es similar a la que se obtiene en el esquema de Bernoulli.

De la definición de probabilidad como límite de frecuencia, podemos considerar las indicadas frecuencias, si el número de medidas es suficientemente grande, como valor aproximado de las correspondientes probabilidades. Si el número de medidas n tiende a infinito y se aumenta la precisión (Δz tiende a cero), el diagrama anterior se transforma en una curva continua llamada ley de distribución de dicha magnitud z . Dicha ley es el universo de medidas que corresponde a la magnitud considerada.

Definiremos como "valor verdadero" de la magnitud objeto de las mediciones, a la media del indicado universo de mediciones.

Al efectuar n mediciones, podemos decir que se toma una muestra de n elementos del universo de mediciones. Por lo tanto, la teoría de errores es un caso particular de la teoría de las muestras.

En Estadística Matemática se estudian distintos esquemas o modelos de probabilidad y sus correspondientes curvas de probabilidad. Para inferir cuál es el esquema probabilístico que mejor corresponde a una determinada distribución obtenida experimentalmente, se debe comparar ésta con las distintas distribuciones teóricas estudiadas y seleccionar la que proporciona el mejor ajuste con los datos experimentales.

Las funciones de distribución de frecuencias obtenidas experimental u observacionalmente son de variadas formas.

En Estadística Matemática existen distintos esquemas de probabilidad cuyas correspondientes curvas de distribución están muy bien estudiadas. Las principales leyes de distribución son: la de Bernoulli o binomial; la de los sucesos raros o de Poisson; la normal o de Gauss; la de extracciones de una urna sin reposición, etcétera. Todas estas leyes de

distribución y muchas otras que tienen aplicación para interpretar distintas curvas experimentales de distribución, están sintetizadas en la siguiente ecuación diferencial de Pearson (véase Cap. V, párr. 6 C):

$$\frac{1}{p} \frac{dp(z)}{dz} = \frac{a + z}{b + cz + dz^2}$$

siendo $p(z)$ la densidad de probabilidad de la variable aleatoria z ; a , b , c y d son constantes que para cada tipo de curva de Pearson adquieren valores determinados.

En esta oportunidad analizaremos los principales esquemas que tienen aplicación en Física, y muy especialmente en Teoría de Errores.

Definida la densidad de probabilidad $p(z)$ de la variable aleatoria z como límite del concepto de frecuencias, necesariamente debe cumplirse que:

$$p(z) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(z) dz = 1 \quad (\text{distribución normalizada})$$

Asimismo, de acuerdo con lo dicho, la probabilidad de que $z = a$, que se escribe $P[z=a]$, sea igual a uno, no significa que z sea ciertamente igual a a .

EJERCICIOS II. 1.

- 1) Teniendo en cuenta que la definición de la función de frecuencias acumuladas $F(z)$ (o función de distribución) es:

$$F(z) = \int_{-\infty}^z p(z) dz$$

demuestre que se verifican las siguientes relaciones:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 1$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} F(z) = 0$$

$$\frac{dF(Z)}{dz} = p(z)$$

$$P[a \leq z < b] = F(b) - F(a)$$

$$F(Z) = P(z < Z)$$

2) Para un conjunto de n observaciones, de densidad de probabilidad $p_n(z)$. ¿Cuánto vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(z) dz ?$$

II. 2. DISTRIBUCIÓN DE BERNOULLI

Supongamos, para exemplificar el esquema de Bernoulli, que arrojamos una moneda y que puedan darse el evento 0 = figura y 1 = número. Si la moneda es de forma geométrica perfecta, de densidad uniforme y, por consiguiente, el centro de gravedad coincide con el geométrico, al arrojarla al aire un gran número de veces, admitiendo las leyes de la mecánica, se obtendrán en promedio igual número de eventos 0 y 1. Por lo tanto, la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales, de acuerdo con la definición de probabilidad como límite de frecuencia, será $p = \frac{1}{2}$.

Un esquema análogo se obtendría colocando en una urna igual número de bolillas blancas y negras y efectuando extracciones con reposición. La probabilidad de extraer una blanca o una negra sería $p = \frac{1}{2}$. En general, si se supone que en la urna hay n_b bolillas blancas y n_n bolillas negras, se obtendrá que la probabilidad elemental de obtener una bolilla blanca, que consideramos un éxito, es

$$p = \frac{n_b}{n_b + n_n}$$

Es, pues, característico del esquema de Bernoulli, que la pro-

babilidad del proceso elemental p es constante durante todo el proceso, es decir: que no hay recuerdo del pasado.

¿Cuál es la probabilidad $p(z)$ de obtener z éxitos (bolillas blancas) efectuando extracciones con reposición?

Llamemos p a la probabilidad elemental de obtener un éxito y $q = 1 - p$ a la de no obtenerlo.

Como cada resultado de una extracción es independiente de los demás, la probabilidad de que el caso favorable se repita z veces sucesivas es p^z . Como $n > z$, el resto de los resultados, en este caso, deben ser no-éxitos, y por lo tanto la probabilidad de obtenerlos ($n-z$) veces sucesivamente es $q^{(n-z)}$.

La probabilidad para obtener en n extracciones z éxitos sucesivos y $(n-z)$ no-éxitos sucesivos, resulta:

$$p^z \cdot q^{(n-z)}$$

Pero no nos interesa que se repitan z veces sucesivas, sino que en el conjunto de n extracciones existan z eventos favorables. Por lo tanto, debemos multiplicar a la probabilidad hallada por el número de combinaciones de n tomados de z por vez. El número de estas combinaciones es:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(z-1)]}{z(z-1)(z-2)\dots2 \cdot 1} = \frac{n!}{z!(n-z)!} = \binom{n}{z} \quad (\text{II.1})$$

Por lo tanto, la probabilidad de que ocurran z eventos favorables en las n observaciones, sin interesarnos por el orden de aparición, es:

$$p_n(z) = \binom{n}{z} p^z (1-p)^{(n-z)} \quad (\text{II.2})$$

Esta expresión constituye la fórmula de Bernoulli o ley de distribución del binomio [por cuanto la misma es la expresión genérica del desarrollo de $(p+q)^n$]

Por ejemplo, si se tienen veinte observaciones ($n=20$) y

Teoría de errores de mediciones

la probabilidad de un determinado resultado es de dos quintos ($p = \frac{2}{5}$), la probabilidad de que en dichas n observaciones ese resultado se repita ocho veces ($z = 8$) es:

$$P_{20}^{(8)} = \frac{20!}{8! 12!} \left(\frac{2}{5}\right)^8 \left(\frac{3}{5}\right)^{12} = 0,1797 \approx 0,18.$$

Si se repiten cien muestras de 20 observaciones cada una, 18 de esas cien tienen, casi seguramente, el resultado "favorable" repetido 8 veces.

La expresión de $(p+q)^n$, mediante el desarrollo de Newton es:

$$(p+q)^n = p^n + \binom{n}{1} p^{n-1} q + \binom{n}{2} p^{n-2} q^2 + \dots + \binom{n}{z} p^z q^{n-z} + \dots + q^n \quad (\text{II.3})$$

El primer término de la suma da la probabilidad de obtener n resultados favorables sobre un total de n procesos; el segundo ($n-1$) casos favorables, etcétera. La suma hasta el término z representa la probabilidad de obtener, por lo menos, z casos favorables sobre el total de n . La probabilidad de, por lo menos, un caso favorable es $1-q^n$.

De (II.3) se ve en seguida que, como debe ser, la suma de las probabilidades de todas las alternativas posibles es igual a la unidad.

La ley de distribución (II.2) es una función de valores discretos en z . Fijada la probabilidad elemental p para el resultado favorable de un proceso, a medida que n crece, la forma en que varía (II.2) es la indicada en la figura (II.2).

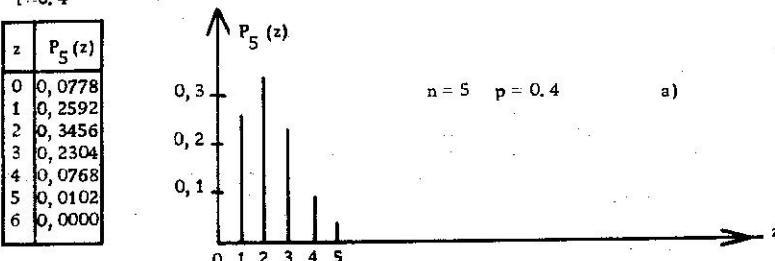
Se observa, para $p \neq \frac{1}{2}$, que a medida que n aumenta la distribución se hace simétrica en torno al valor "más probable", o sea el valor de z para el cual la probabilidad $p_n(z)$ es máxima. Para n pequeños la distribución es asimétrica, crece hasta un valor de z determinado y luego decrece. Dicho valor z_0 es el de máxima probabilidad. Por supuesto, cuando $p = \frac{1}{2}$, la distribución es simétrica para cualquier valor de n .

Distribución de Bernoulli

Es fácil determinar que el valor de z correspondiente a la probabilidad máxima es:

$p=0,4$

z	$P_5(z)$
0	0,0778
1	0,2592
2	0,3456
3	0,2304
4	0,0768
5	0,0102
6	0,0000



$n = 5 \quad p = 0.4$

a)

$p=0,4$

z	$P_{15}(z)$	z	$P_{15}(z)$
0	0,0005	8	0,1181
1	0,0047	9	0,0612
2	0,0219	10	0,0245
3	0,0634	11	0,0074
4	0,1268	12	0,0016
5	0,1859	13	0,0003
6	0,2066	14	0,0000
7	0,1771	15	0,0000

$P_{15}(z)$

$n = 15 \quad p = 0.4$

b)

$p=0,4$

z	$P_{30}(z)$	z	$P_{30}(z)$
0	0,0000	13	0,1360
1	0,0000	14	0,1101
2	0,0000	15	0,0783
3	0,0003	16	0,0489
4	0,0012	17	0,0269
5	0,0041	18	0,0129
6	0,0115	19	0,0054
7	0,0263	20	0,0020
8	0,0505	21	0,0006
9	0,0823	22	0,0001
10	0,1152	23	0,0000
11	0,1396	24	0,0000
12	0,1474	25	0,0000

$P_{30}(z)$

$n = 30 \quad p = 0.4$

c)

Fig. II. 2. Variación de la distribución de Bernoulli manteniendo constante p y variando n .

"Tables of the Binomial Distribution" N. B. S., Applied Math. Series, Vol. 6, 1950.

Teoría de errores de mediciones

$$z_0 = n \cdot p . \quad (\text{II. 4})$$

Como z es un entero, en rigor, el valor buscado es:

$$np - (1-p) \leq z_0 \leq np + p \quad (\text{II. 5})$$

comprendido en el intervalo unitario (intervalo de clase) en el cual se ha dividido el eje de abcisas. La (II. 4) es el caso límite de la (II. 5) cuando n crece indefinidamente.

El cálculo de la distribución binomial se hace engorroso debido a la presencia de factoriales. Para simplificar los cálculos se usa la aproximación asintótica de Stirling:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

donde e es la base de los logaritmos naturales ($e = 2,718\dots$)

Esta aproximación da un error menor del 1% para $n \geq 9$.

Ejemplo II. 2. 1.

Si la probabilidad de cometer un determinado error en una medida es de 0,5, ¿cuál es la probabilidad de que en 10 mediciones se obtengan 8 que posean dicho error?

$$n = 10 \quad p = 0,5 \quad z = 8$$

$$\therefore \frac{10!}{8! 2!} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,088 \approx 0,09$$

lo que significa que si esas 10 mediciones se repitiesen cien veces, en promedio, nueve de esos conjuntos tendrían un $z = 8$.

¿Cuál es el número más probable de mediciones que poseen dicho error?

$$z = n \cdot p = 5$$

En cada conjunto de diez mediciones, en promedio, la mitad de ellas tienen el error especificado. O bien, de 100 sucesiones de 10 mediciones cada una, casi ciertamente la mi-

Distribución de Bernoulli

tad de dichas sucesiones posee el error especificado.

¿Qué probabilidad existe de que todas las mediciones posean dicho error?

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1,024} \approx 0,001 .$$

¿Y de que ninguna posea dicho error?

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1,024} \approx 0,001 .$$

EJERCICIOS II. 2. 1

- 1) Si en un conjunto de mediciones la probabilidad de no sobrepasar un determinado error es del 25%, calcular la probabilidad de que cada cuatro mediciones, efectuadas al azar, ninguna sobrepase dicho error.
- 2) Idem que una sobrepase dicho error.
- 3) Idem que, cuanto más, una sola sobrepase dicho error.

II. 3. PRINCIPALES TIPOS DE PROMEDIOS ESTADÍSTICOS

Del conjunto correspondiente a una muestra se puede determinar distintos tipos de valores promedios, siendo los principales: el modo o valor más frecuente, la mediana, la media aritmética, la media geométrica y la media armónica.

- 1) El "valor más probable" o "modo"

Es la medida de mayor frecuencia de la distribución considerada. Para la distribución de Bernoulli es z_0 expresada por (II. 5).

Para una curva de distribución analítica $p(z)$, el modo es definido por la condición

$$\frac{dp}{dz} = 0 .$$

2) La "mediana"

Cuando se ordenan los valores por orden creciente, la mediana es el valor tal que la mitad de los elementos de la muestra tienen valores menores y la otra mitad valores mayores que la misma. Se determina fácilmente construyendo la curva de frecuencias acumuladas. Así, por ejemplo, la curva de frecuencias acumuladas para la distribución indicada en la figura II.2 b sería la indicada en la figura II.3.

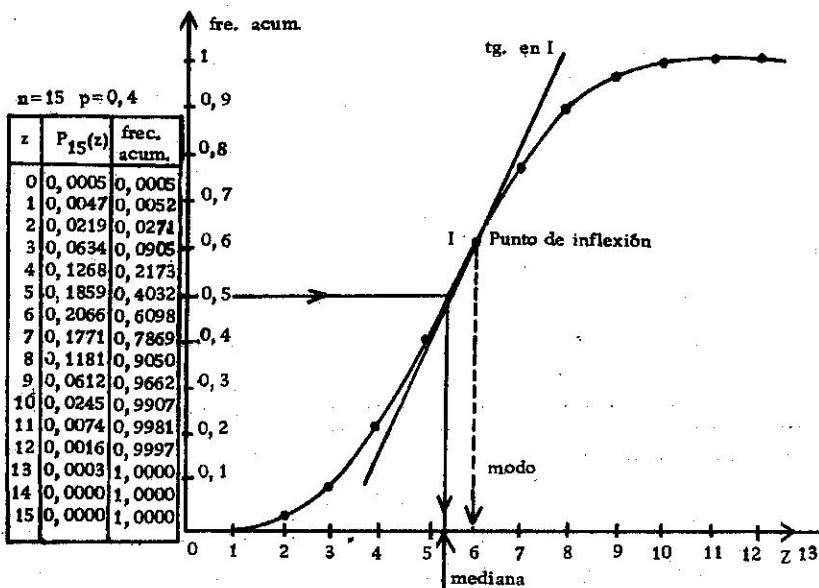


Fig. II.3. Determinación de la mediana mediante la curva de frecuencias acumuladas. El modo es la abscisa del punto de inflexión de la curva de frecuencias acumuladas.

Para determinar el valor de la mediana se traza una paralela al eje de abscisas por el punto medio de las frecuencias acumuladas; la abscisa del punto de intersección de esta paralela con la curva de frecuencias acumuladas será el valor buscado de la mediana.

Dada la curva de distribución de una variable continua, el valor de la mediana está dado por la abscisa del punto cuya normal al eje de las abscisas divide al área limitada por este eje y la curva de distribución en dos partes iguales.

3) El "valor medio" o la "media aritmética"

Es un valor muy importante de una distribución. Se lo define genéricamente como:

$$\bar{z} = \frac{\sum \text{valores observados}}{\text{nº de observaciones}} = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n} \quad (\text{II. 6})$$

La sumatoria anterior se puede escribir:

$$\bar{z} = \frac{n_{z_1} z_1 + n_{z_2} z_2 + \dots + n_{z_n} z_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n n_{z_i} z_i}{n} \quad (\text{II. 7})$$

donde n_{z_i} son las veces que se ha observado o medido el valor z_i .

Pero por definición de probabilidad, podemos escribir, cuando n es suficientemente grande:

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{n'} p_i z_i \quad (\text{II. 8})$$

Para una distribución continua, será:

$$\bar{z} = \int_b^a z p(z) dz \quad (\text{II. 9})$$

donde z es la variable aleatoria (número de éxitos en n procesos) cuya probabilidad viene dada por (II. 2), siendo a y b los límites del intervalo de variabilidad de la variable aleatoria z .

Para la distribución de Bernoulli es:

$$\bar{z} = \sum_{z=0}^n z \cdot \frac{n!}{z!(n-z)!} p^z q^{(n-z)} \quad (\text{II. 10})$$

Sacando np factor común

$$\bar{z} = np \sum_{z=1}^n \frac{(n-1)!}{(z-1)!(n-z)!} p^{(z-1)} q^{(n-z)} = np(p+q)^{n-1}$$

$$\therefore \bar{z} = n \cdot p \quad (\text{II. 11})$$

Para n suficientemente grande, teniendo en cuenta (II. 4), tenemos que $\bar{z} \approx z_0$.

En general, "el valor más probable", la "mediana" y el "valor medio" no coinciden. En la figura II 4, se supone una función de distribución continua y asimétrica.

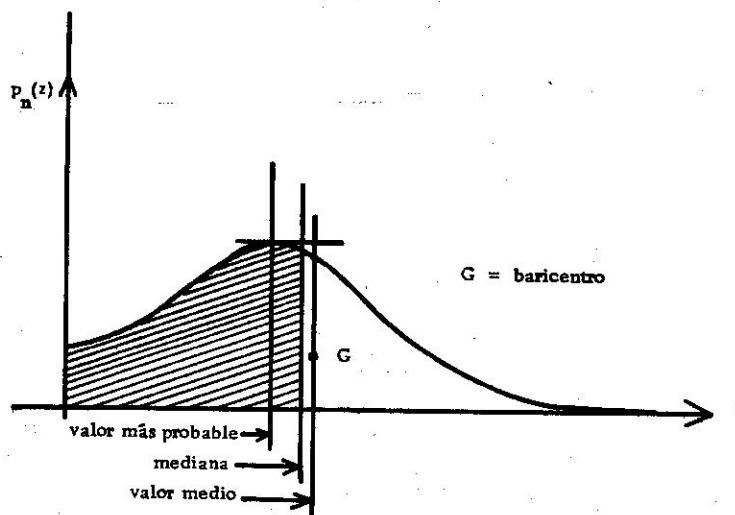


Fig. II. 4.

Representación de una función de distribución continua y asimétrica. Se indica la ubicación de los principales promedios estadísticos.

El valor de la media aritmética (expresada por II. 7; II. 8 ó II. 9), representa, como es fácil ver, la abscisa del centro de gravedad del área limitada por el eje horizontal, la curva de distribución y las ordenadas en los extremos del segmento de variabilidad de la variable aleatoria.

Para curvas de distribución simétricas, la media, el modo y la mediana coinciden. Precisamente la discrepancia de los promedios indicados, correspondientes a una curva de distribución, nos proporciona una medida de su asimetría.

4) "Media geométrica"

La media geométrica de una muestra de n valores $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ es igual a la raíz enésima del producto de los n valores indicados; es decir:

$$\log (\text{M. G. de } z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log z_i \quad (\text{II. 12})$$

5) "Media armónica"

La media armónica es la reciproca de la media aritmética de los reciprocos de los resultados que integran la muestra, es decir:

$$\frac{1}{\text{M. A. de } z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i} \quad (\text{II. 13})$$

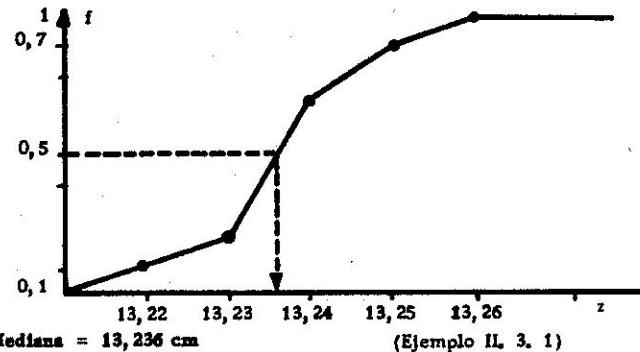
Ejemplo II. 3. 1

Se ha medido una longitud 10 veces, obteniéndose los valores en cm: 13,22; 13,22; 13,24; 13,23; 13,26; 13,25; 13,24; 13,24; 13,25; 13,24.

Determinar el modo, la mediana y la media.

medidas	13,22	13,23	13,24	13,25	13,26
nº veces	1	1	5	2	1
frecuencias	0,1	0,1	0,5	0,2	0,1

Modo = 13,24 cm

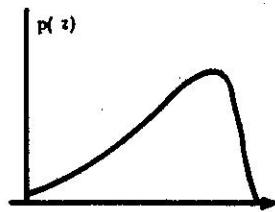


$$\text{Media} = 0,1 \cdot 13,22 + 0,1 \cdot 13,23 + 0,5 \cdot 13,24 + 0,2 \cdot 13,25 + 0,1 \cdot 13,26 = 13,241 \text{ cm}$$

Ejercicio II. 3. 2

a) Determinar el modo, la mediana y la media para la distribución binomial $n = 5$ $p = 0,4$.

b)



Para una curva de distribución como la indicada ubique el valor más probable, el valor medio y la mediana, aproximadamente.

Ejercicio II. 3. 1

II. 4. MOMENTOS DE UNA DISTRIBUCIÓN

Hemos visto que el valor medio de un conjunto de n observaciones se definía como:

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^n z_i \frac{n_i}{n} \longrightarrow \sum_{i=1}^n z_i p_i .$$

Dados los valores de distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta, se define como "esperanza matemá-

Momentos de una distribución

tica" $E[z]$, al momento de primer orden de la considerada distribución, es decir:

$$E[z] = m_1 = \sum_{i=1}^{\infty} z_i p(z_i) . \quad (\text{II. 14})$$

Indicamos por m_1 a dicho momento de primer orden con respecto al origen.

Si la variable es continua, entonces

$$E[z] = m_1 = \int_a^b z p(z) dz , \quad (\text{II. 15})$$

siendo a y b los extremos del segmento de variabilidad de z .

Generalizando se define como momento de orden s con respecto al origen, que designaremos con la letra m_s , a

$$m_s = E[z^s] = \int_a^b z^s p(z) dz . \quad (\text{II. 16})$$

El momento de orden cero será:

$$m_0 = \int_a^b p(z) dz = 1 .$$

Precedentemente hemos indicado que, para el caso de mediciones, llamaremos "valor verdadero" de la cantidad medida, al valor medio del universo de mediciones efectuadas en condiciones lo más similares posibles. Es decir, que el "valor real" vendría expresado por la esperanza matemática de la curva de distribución correspondiente a dicho universo.

Los momentos sucesivos de una ley de distribución la caracterizan; y definen de una manera unívoca la ley de distribución correspondiente.

El momento de segundo orden m_2 es el "momento de inercia" de la ley de distribución respecto al origen. En efecto:

$$m_2 = E[z^2] = \int_a^b z^2 p(z) dz .$$

En Mecánica se utilizan los momentos de primero y segundo orden de conjuntos de partículas o de un cuerpo de determinada masa. En Estadística Matemática no es suficiente con los dos primeros momentos de una curva de distribución.

Si se cambia el origen de la distribución cambian todos los momentos. Por eso interesa definir los "momentos centrados", que son los momentos referidos al baricentro de la distribución. A los momentos centrados de orden s los designaremos por μ_s . Por lo tanto,

$$\mu_s = E[(z - m_1)^s] = \int_a^b (z - m_1)^s p(z) dz . \quad (\text{II. 17})$$

Surge en seguida que $\mu_1 = 0$.

El momento centrado de segundo orden μ_2 es:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \int_a^b (z - m_1)^2 p(z) dz = \\ &= \int_a^b z^2 p(z) dz - 2m_1 \int_a^b z p(z) dz + m_1^2 \int_a^b p(z) dz , \end{aligned}$$

o sea $\mu_2 = m_2 - m_1^2 .. \quad (\text{II. 18})$

El momento centrado de segundo orden es un parámetro importantísimo en toda distribución. Para una distribución teórica se lo llama "varianza" y se lo designa por σ^2 . A su raíz cuadrada positiva σ se la llama "desviación standard". Este parámetro, que depende de la distribución, es un índice de dispersión de valores en torno al valor medio. A mayor σ tanto más abierta es la curva de distribución.

Cuando el orden del momento es impar, puede ser positivo, negativo o nulo. Si la curva de distribución es simétrica en torno del valor medio, el valor del momento de tercer orden es nulo, pues existen tantos valores negativos como positivos. Si es positivo indica que las más grandes desviaciones están a la derecha del valor medio, aunque más de la mitad de las desviaciones pueden encontrarse a la izquierda del valor medio.

Por lo tanto, el momento de orden tres es una medida de la asimetría de la curva de distribución. Para determinar el grado de asimetría [ver también (II. 83)] de una curva de distribución se define un "coeficiente de asimetría" (skewness) a_s , dado por:

$$a_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\int_a^b (z - m_1)^3 p(z) dz}{\sigma^3} . \quad (\text{II. 19})$$

El momento centrado de cuarto orden es μ_4 . Es mucho más sensible a las desviaciones elevadas que los momentos de orden inferior, y es tanto mayor cuanto más lentamente tiende a cero la distribución. Es, por lo tanto, una medida del "aplanamiento" de la curva de distribución; por ello se define un "coeficiente de aplanamiento" (kurtosis) a_p dado por

$$a_p = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\int_a^b (z - m_1)^4 p(z) dz}{\sigma^4} . \quad (\text{II. 20})$$

Vemos, por sus correspondientes definiciones, que los coeficientes de asimetría y de aplanamiento son adimensionales.

Veremos más adelante que una curva de distribución queda perfectamente bien definida por la serie infinita de sus momentos. Pero desde el punto de vista práctico, es decir, para determinar qué curva teórica puede ajustar mejor a una curva de distribución de frecuencias obtenida empíricamente, resulta suficiente, en la mayoría de los casos, con los momentos hasta el de orden cuarto.

En síntesis, el procedimiento es el siguiente: se determinan para las distintas curvas de distribución teóricas los sucesivos momentos hasta el de orden cuarto inclusive; se calculan, a partir de la curva empírica de frecuencias, los sucesivos momentos hasta el de orden cuarto; luego se ve cuál de las curvas teóricas puede representar mejor, dentro de las limitaciones indicadas, la curva empírica tratada.

Para complementar la comparación que acabamos de sintetizar se suele usar, además de los momentos indicados, la siguiente combinación de los coeficientes anteriormente definidos:

$$J = 3a_s - 2a_p + 6 \quad (\text{II. 21})$$

Este nuevo coeficiente es llamado por Fry [25, pág. 300] "criterio tipo" (Type criterium).

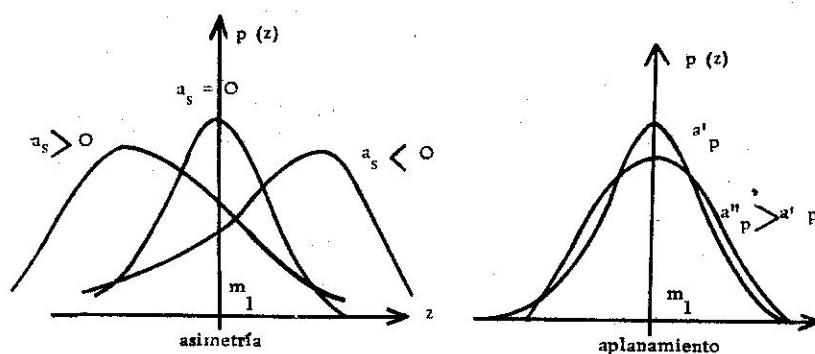


Fig. II.5. Coeficiente de asimetría a_s y aplanamiento a_p para diversas funciones de distribución.

Ejercicios II. 4. 1

1) Demostrar que

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3$$

(que se utiliza para calcular el momento centrado de tercer orden, conocidos los momentos no centrados).

2) Demostrar que

$$m_3 = \mu_3 + 3m_1\mu_2 + m_1^3$$

3) Calcular a_s y a_p para la función de distribución de Gauss (ver II. 10).

II. 5. MOMENTOS SUCESSIONES DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Para la distribución binomial resulta

$$m_0 = 1 \quad \text{por ser normalizada}$$

$$m_1 = np \quad \text{como hemos visto en (II. 11)}$$

$$m_2 = \sum_{z=0}^n z^2 \frac{n!}{z!(n-z)!} p^z q^{(n-z)} .$$

Si se reemplaza $z^2 = [z(z-1) + z]$ resulta:

$$m_2 = \sum_{z=0}^n z(z-1) \frac{n!}{z!(n-z)!} p^z q^{(n-z)} + \sum_{z=0}^n z \frac{n!}{z!(n-z)!} p^z q^{(n-z)}$$

En la primera sumatoria los dos primeros términos para $z = 0$ y $z = 1$ son nulos, luego se puede comenzar a sumar desde $z = 2$. Simplificando y sacando factor común resulta;

$$m_2 = n(n-1)p^2 \sum_{z=2}^n \frac{(n-2)!}{(z-2)!(n-z)!} p^z q^{(n-z)} + m_1$$

$$m_2 = n(n-1)p^2 + np . \quad (\text{II. 22})$$

Asimismo se verifica

$$\mu_1 = 0 . \quad (\text{II. 23})$$

Teniendo en cuenta (II. 18)

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2$$

$$\mu_2 = npq = \sigma^2 \quad (\text{II. 24})$$

expresión de la variancia en la ley binomial.

Si en vez de considerar los valores posibles de la variable aleatoria z en la distribución binomial, consideramos su frecuencia $\frac{z}{n}$, es fácil ver que, los momentos de la frecuencia $\frac{z}{n}$ resultan

$$m_{1,f} = \sum_{z=0}^n \frac{z}{n} p(z) = p \quad (\text{II. 25})$$

$$m_{1,f} = \sum_{z=0}^n \left(\frac{z}{n} - p\right) p(z) = 0$$

$$m_{2,f} = \sum_{z=0}^n \left(\frac{z}{n}\right)^2 p(z) = \frac{n-1}{n} p^2 + \frac{p}{n}$$

y usando (II. 18), se tiene

$$\mu_{2,f} = \frac{n-1}{n} p^2 + \frac{p}{n} - p^2 = \frac{pq}{n} = \sigma_f^2 ,$$

es decir, que

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{pq}{n}} \quad (\text{II. 26})$$

Ejercicios II. 5.1

1) Calcular m_3 y m_4 , utilizando II. 16 para una variable discreta.

2) Demostrar que

$$\mu_3 = np(1-p)(1-2p)$$

3) Demostrar que

$$a_s = \frac{n-2m_1}{n\sigma}$$

[Obsérvese que $a_s \rightarrow 0$ (simetría) cuando $n \rightarrow \infty$]

(Asimismo $a_s = 0$ para $p = \frac{1}{2}$).

II. 6. TEOREMA DE TSHEBYSHEFF

Sea $p(z)$ una función densidad de probabilidad, de una variable aleatoria z cuyo intervalo de variabilidad sea $(-\infty, +\infty)$, y t un entero cualquiera. Figura II. 6

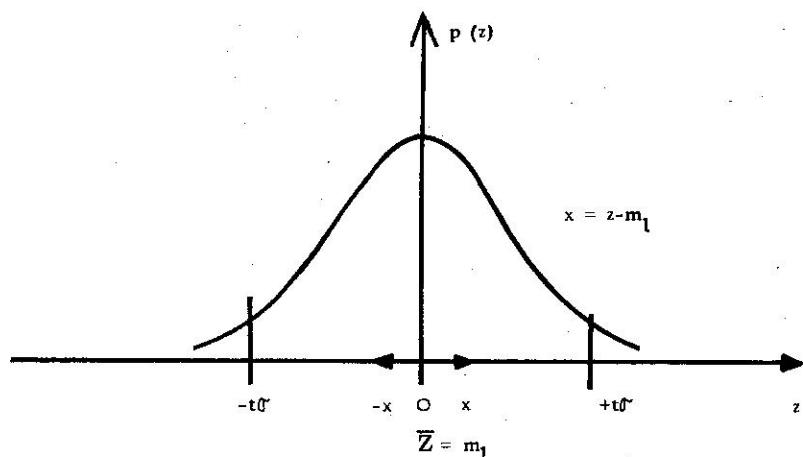


Fig. II. 6.

Función de distribución centrada en la variable aleatoria x .

Podemos escribir que, considerando la distribución centrada:

$$\sigma^2 = \mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \geq \int_{-\infty}^{-t} x^2 p(x) dx + \int_{t}^{\infty} x^2 p(x) dx ,$$

Si calculamos por defecto, teniendo en cuenta que siempre

$t^2 \sigma^2 > 0$, se puede escribir, tomando el menor valor de x para cada integral,

$$\sigma^2 \geq t^2 \sigma^2 \left\{_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx + t^2 \sigma^2 \left\{_{t\sigma}^{\infty} p(x) dx \right. \right. .$$

Pero las integrales del segundo miembro dan la probabilidad de que $|x|$ sea mayor o igual que $t\sigma$, lo que escribimos:

$$P [|x| \geq t\sigma] \quad \text{por lo que:}$$

$$\sigma^2 \geq P [|x| \geq t\sigma] t^2 \sigma^2 . \quad (\text{II. 27})$$

Esta desigualdad constituye el famoso teorema de Tsheby-sheff. Es fácil generalizar este teorema, tomando en vez del momento de segundo orden, cualquier otro momento de orden par. Este teorema, válido para cualquier distribución, indica la importancia de los momentos de orden par como índices de dispersión.

Teniendo en cuenta que

$$P [|x| \geq t\sigma] = 1 - P [|x| < t\sigma]$$

el teorema conduce a:

$$P [|x| < t\sigma] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{t^2 \sigma^2} = 1 - \frac{1}{t^2} , \quad (\text{II. 28})$$

o sea: la probabilidad de que $|x| < t\sigma$ es igual o mayor que $1 - \frac{1}{t^2}$, o bien la probabilidad de que $|x|$ esté fuera del intervalo $-t\sigma < x < t\sigma$ es menor que $\frac{1}{t^2}$.

Para cualquier distribución, elegido un valor de t entero, la probabilidad de que $|x| < t\sigma$ se acerca a uno al crecer t .

Si en vez de la variable aleatoria x , tomamos las frecuencias $\frac{x}{n}$ y la dispersión de las frecuencias σ_f , el teorema de Tsheby-sheff se expresa:

$$P \left[\left| \frac{x}{n} \right| < t \sigma_f \right] \geq 1 - \frac{1}{t^2} . \quad (\text{II. 29})$$

Este teorema, de gran valor teórico, nos permite estimar la probabilidad de que la variable $\left| \frac{x}{n} \right|$ pueda tomar valores que difieran del límite de las frecuencias p , en una cantidad menor de $t \sigma_f$, siendo t un número entero positivo. O bien, dicho de otra manera, fijado un t existe siempre un n tal que la (II. 29) es siempre cierta.

Ejercicios II. 6. 1

- 1) Demuestre, para la distribución binomial, que

$$P \left[\frac{x}{n} < a \right] \geq 1 - \frac{p \cdot q}{b^2 \cdot n^2} .$$

- 2) Usando la expresión anterior para el juego de una moneda perfecta, ¿qué número mínimo de tiros es necesario para comprobar que p difiere de 0,5 en menos del 1% con una seguridad del 99%?

II. 7. TEOREMA DE BERNOULLI [7, pág. 236][18, pág. 39][53, pág. 96]

Este teorema expresa lo siguiente: si en un proceso azaroso que responde al esquema de Bernoulli se hacen n observaciones, siendo p la probabilidad elemental de obtener un resultado favorable, para todo par de números arbitrariamente pequeños ϵ y δ , existe un N tal que

$$P \left[\left| \frac{z}{n} - p \right| \leq \epsilon \right] \geq 1 - \delta , \quad (\text{II. 30})$$

para $n > N$,

siendo z el número de éxitos obtenidos en n observaciones.

El primer miembro de la (II. 30) representa la probabi-

dad de que la frecuencia de éxitos $\frac{z}{n}$ discrepe de p , en valor absoluto, en una cantidad igual o menor que ϵ .

Este teorema se demuestra fácilmente haciendo uso de la relación (II. 26) que da el desvío medio cuadrático o desvío standard, de las frecuencias $f_z = \frac{z}{n}$ del esquema de Bernoulli. En efecto, si hacemos:

$$\epsilon = t\sigma = t\sqrt{\frac{pq}{n}} \quad (\text{II. 31})$$

y sobre la base de (II. 29) que

$$\delta = \frac{1}{t^2}, \quad (\text{II. 32})$$

si reemplazamos las expresiones (II. 31) y (II. 32) en (II. 30) se obtiene:

$$P\left[\left| \frac{z}{n} - p \right| \leq t\sqrt{\frac{pq}{n}} \right] \geq 1 - \frac{1}{t^2} \quad \text{para } n > N.$$

Para todo valor de δ arbitrariamente pequeño podemos determinar mediante (II. 32) el valor correspondiente de t ; y luego, mediante (II. 31) y el valor de ϵ arbitrariamente pequeño, podemos determinar el valor de N que satisface la desigualdad (II. 30).

Pongamos un ejemplo numérico.

Hagamos $p = q = \frac{1}{2}$, $\epsilon = 0,001$ y $\delta = 0,0001$. De (II. 31) y (II. 32) resulta

$$t = \frac{1}{0,01} = 100; \quad \epsilon = \frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{n}} = 0,001$$

$$\therefore n = 2,5 \cdot 10^9$$

Podemos ilustrar gráficamente el significado del teorema de Bernoulli, si representamos en el eje horizontal la variable aleatoria $\frac{z}{n}$ (que estará comprendida entre 0 y 1). La línea escalonada que da las correspondientes probabilidades es, teniendo en cuenta (II. 2):

$$P\left(\frac{z}{n}\right) = c \left(\frac{n}{z}\right) p^z q^{(n-z)}. \quad (\text{II. 33})$$

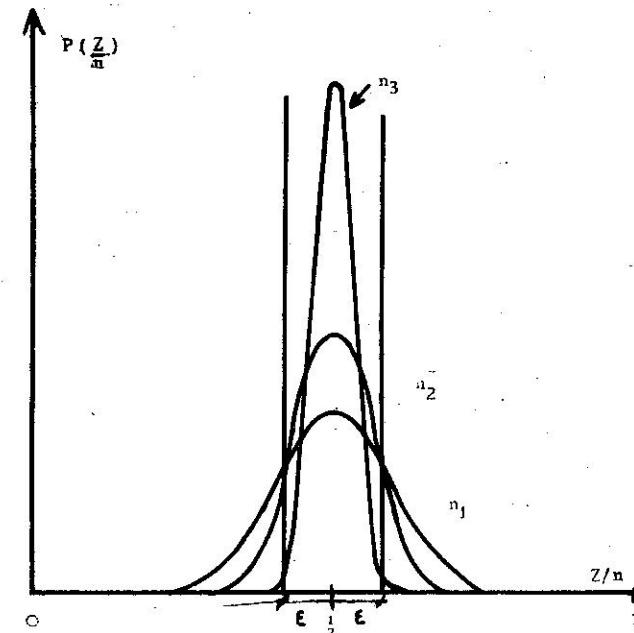


Fig. II. 6. Curvas representativas de (II-33) para $p = q = 1/2$ y valores de n : $n_3 > n_2 > n_1$

La constante c se determina de manera que cumpla con los requisitos de toda curva de distribución de probabilidad; es decir, que el área limitada por la misma sea la unidad. Debemos multiplicar (II. 2) por el factor c para tener en cuenta el cambio de escala en el eje horizontal al pasar de la varia-

ble z a $\frac{z}{n}$.

Si consideramos además que n_1 es grande (fig. II. 6), y que $n_3 > n_2 > n_1$, los correspondientes escalones se hacen muy pequeños y podemos representar a las líneas escalonadas por curvas. En la figura II. 6 se han representado tres curvas correspondientes a la distribución (II. 33) para $p = q = \frac{1}{2}$. Si se trazan dos paralelas al eje de las ordenadas desde los puntos de las abscisas $\frac{1}{2} - \xi$ y $\frac{1}{2} + \xi$, el área encerrada por la curva de distribución, estas dos paralelas y el eje horizontal, tiende a uno cuando n tiende a infinito.

El resultado del teorema de Bernoulli es perfectamente coherente con la definición de probabilidad que hemos dado en el párrafo I. 3. B. Es fácil ver que la definición de probabilidad de von Mises no cumple plenamente con esta condición.

Ejercicios II. 7. 1

- 1) Considerando el juego de la moneda perfecta, constrúyase la fig. II. 6 para $n_1 = 5$; $n_2 = 10$ y $n_3 = 30$.
- 2) Repita la fig. II. 6 para los valores de n del ejercicio anterior, pero para una distribución asimétrica de $p = 0,3$.

II. 8. DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Si en la distribución de Bernoulli el número de observaciones n tiende a infinito y la probabilidad p de los casos favorables tiende a cero, pero de manera tal que el producto np tiende a un valor finito λ , se obtiene la ley de distribución de Poisson o de los sucesos o eventos raros.

Determinaremos el límite de la distribución de Bernoulli para el caso en que:

$$n \longrightarrow \infty$$

$$p \longrightarrow 0$$

$$(II. 34)$$

$$np \longrightarrow \lambda \quad (\text{constante}).$$

Reemplazando $p = \frac{\lambda}{n}$ en (II. 2), tenemos:

$$p_n(z) = \frac{n!}{z!(n-z)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^z \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-z} \quad (II. 35)$$

y haciendo tender $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(z) = p(z). \quad (II. 36)$$

Este límite representa la probabilidad de obtener z eventos favorables cuando n tiende a infinito. Dicho límite será:

$$p(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-z+1)}{n^z} \frac{\lambda^z}{z!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-z}.$$

Teniendo en cuenta que z es finito, resulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-z+1)}{n^z} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-z} = e^{-\lambda},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-z} = 1.$$

Por lo tanto,

$$p(z) = \frac{\lambda^z}{z!} e^{-\lambda}, \quad (II. 37)$$

que constituye la ley de distribución de Poisson.

Esta ley de distribución tiene solamente sentido para valores enteros de z y es extraordinariamente útil en Física, por ejemplo, en el estudio de las desintegraciones radiactivas. Los hechos experimentales demuestran que la desintegración atómica obedece a una ley de este tipo. Esto aclara detalles importantes sobre la naturaleza de dicho proceso, por ejem-

plo, que la desintegración de cada átomo es completamente independiente de la desintegración de los otros, es decir, que no hay influencia entre ellos. En efecto: la ley de Bernoulli admite como hipótesis explícita la invariancia de la probabilidad del proceso elemental; por lo tanto, la ley de Poisson, que resulta de tomar el límite, en las condiciones indicadas, de la de Bernoulli, sigue apoyándose en la hipótesis de la independencia de la probabilidad del proceso elemental. Por consiguiente, al poderse conseguir un buen ajuste entre la curva experimental de desintegración de una substancia radiactiva y la de Poisson, indica que la probabilidad de desintegración de un átomo sigue siendo invariable a través del proceso; es decir, que no se modifica por el hecho de que los átomos vecinos se hayan desintegrado o no. En general, si efectuadas las observaciones la curva real obtenida coincide con una curva de distribución teórica, se verifican (a posteriori) las hipótesis de ésta en el proceso estudiado.

Por lo indicado se ve claramente que en muchos casos el empleo de métodos de Matemática Estadística sirve, a manera de un poderoso microscopio, para determinar ciertos aspectos probabilísticos raros, de muy pequeña probabilidad de que se produzcan, y que no son de probabilidad elemental independiente. Así, por ejemplo, en una fábrica bien organizada de procesos en cadena, la probabilidad de que un obrero se accidente es sumamente pequeña; pero al accidentarse uno que trabaja en el proceso, aumenta la probabilidad del mismo suceso en otros obreros, puesto que el primer accidente perturba las condiciones normales de trabajo. Otro ejemplo: la probabilidad de que se produzca un accidente en una autopista de denso tráfico de autos muy bien revisados, es muy pequeña, pero al producirse un accidente la probabilidad que sea múltiple es mayor de que sea único [12, pág. 53].

Calculemos el valor medio de la distribución de Poisson. Por definición el valor medio es

$$\begin{aligned} E[z] &= m_1 = \sum_{z=0}^{\infty} z \frac{\lambda^z}{z!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{z=1}^{\infty} \frac{\lambda^{z-1}}{(z-1)!} \\ \therefore m_1 &= e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda ; \quad (\text{II. 38}) \end{aligned}$$

Función característica

por lo tanto, λ es el valor esperado de las ocurrencias del evento dado; es el número medio de resultados "positivos" en muchísimos ensayos. Este resultado podía, por supuesto, haberse inferido directamente de las condiciones (II. 34).

En la distribución de Poisson la variable z solo puede tomar valores enteros $0, 1, 2, 3, \dots$ y el valor esperado de dicha variable es λ , que es un parámetro de la distribución.

Cuando se tiene una distribución de Bernoulli que corresponde a un $p < 0,05$ y $n > 100$, se la puede aproximar con una distribución de Poisson.

Ejercicios II. 8. 1

- 1) Para una distribución de Poisson de $\lambda = 2$ calcule:

$$P[2 \leq z \leq 4]$$

- 2) Compare la distribución de Bernoulli con $p = 0,02$ y $n = 50$ con la distribución de Poisson correspondiente (para 5 valores de z sucesivos).

- 3) Demuestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{z=0}^n p(z) = 1 .$$

- 4) ¿Cuál es la probabilidad de ningún caso favorable? Y la de un solo caso favorable? Y de más de un caso favorable?

II. 9. FUNCIÓN CARACTERÍSTICA [8, pág. 49]

Sea z una variable aleatoria discreta o continua con densidad de probabilidad $p(z)$.

Definamos la función [30, pág. 161]

$$\sum_{z=0}^{\infty} e^{itz} p(z) \quad \text{para la discreta} \quad (\text{II. 39})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} p(z) dz , \quad \text{para la continua (II. 40)}$$

donde t es una variable real que puede variar de menos infinito a más infinito.

Si se emplea la función de probabilidad acumulada, la función característica vendría dada por la siguiente integral de Stieltjes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d P(z) , \quad (\text{II. 41})$$

que existe siempre y define el valor esperado o la esperanza matemática de e^{itz} ; por lo tanto,

$$E[e^{itz}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} p(z) dz = \varphi(t) . \quad (\text{II. 42})$$

Analizaremos las principales propiedades de la función característica $\varphi(t)$.

Para $t = 0$ se tiene

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} d P(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(z) dz = 1 . \quad (\text{II. 43})$$

De (II. 40) y (II. 43) se tiene que

$$|\varphi(t)| \leq 1 . \quad (\text{II. 44})$$

Dado que $p(z) \geq 0$, tenemos que la función característica es siempre positiva.

Por la definición dada de la función característica $\varphi(t)$ surge que es la transformada de Fourier de la correspondiente distribución de probabilidad (59, pág. 285)

Por lo tanto, $p(z)$ es la antitransformada de Fourier de la función característica $\varphi(t)$

$$p(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-itz} dt . \quad (\text{II. 45})$$

Cada variable aleatoria z con una densidad de probabilidad $p(z)$ tiene una función característica $\varphi(t)$. Como la reciproca es también cierta, si se determina $\varphi(t)$ puede calcularse la función $p(z)$.

Desarrollando (II. 40) se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(z) e^{itz} dz = \int_{-\infty}^{\infty} p(z) \left(1 + i \frac{tz}{1!} + i^2 \frac{t^2 z^2}{2!} + i^3 \frac{t^3 z^3}{3!} + \dots\right) dz$$

Pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(z) dz = m_0 = 1 \quad \text{momento de orden cero}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(z) z dz = m_1 \quad " " " \text{ uno}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(z) z^2 dz = m_2 \quad " " " \text{ dos.}$$

etcétera.

Por lo tanto, resulta:

$$\varphi(t) = m_0 + m_1(t i) + m_2 \frac{(ti)^2}{2!} + m_3 \frac{(ti)^3}{3!} + \dots \quad (\text{II. 46})$$

Se observa que la función característica encierra a los momentos sucesivos (salvo una constante), que pueden ser obtenidos de ella mediante:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{t=0}(t) &= \varphi(0) = m_0 = 1 \\ \varphi'_{t=0}(t) &= im_1 \\ \varphi''_{t=0}(t) &= -m_2 \\ \dots \\ \varphi^{(s)}_{t=0}(t) &= (i)^s m_s \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 47})$$

O sea: las derivadas sucesivas de $\varphi(t)$ para $t = 0$ son proporcionales a los momentos de la densidad de probabilidad.

Recíprocamente, si la serie que define a $\varphi(t)$ es convergente, el conocimiento de los momentos sucesivos define a la función característica y, en consecuencia, permiten calcular $p(z)$.

La función característica correspondiente a la función de distribución centrada $\varphi_c(t)$, es por definición:

$$\varphi_c(t) = E\{e^{it(z-m_1)}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(z-m_1)} p(z) dz = e^{-itm_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itz} p(z) dz,$$

de donde

$$\varphi_c(t) = e^{-itm_1} \varphi(t), \quad (\text{II. 48})$$

que permite calcular una dada la otra.

Por lo tanto, una traslación del origen en $+a$, equivale a multiplicar a $\varphi(t)$ por e^{-ita} .

Hallemos la función característica para las distribuciones analizadas:

II. 9. A. FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Vimos que (II. 2)

$$p(z) = \binom{n}{z} p^z (1-p)^{n-z}.$$

La función es discreta, por lo que la función característica será (II. 39)

$$\varphi(t) = \sum_{z=0}^n \binom{n}{z} p^z (1-p)^{n-z} e^{itz} = \sum_{z=0}^n \binom{n}{z} (pe^{it})^z (1-p)^{n-z}. \quad (\text{II. 49})$$

Recordando que $p+q = 1$, del desarrollo del binomio de Newton se obtiene

$$(p+q)^n = 1 = \sum_{z=0}^n \binom{n}{z} p^z q^{n-z}. \quad (\text{II. 50})$$

De (II. 49) y (II. 50)

$$\varphi(t) = \sum_{z=0}^n \binom{n}{z} q^{n-z} (pe^{it})^z = (pe^{it} + q)^n, \quad (\text{II. 51})$$

que es la función buscada.

Hallemos los momentos sucesivos mediante (II. 47)

$$\varphi_{t=0}(t) = m_0 = (p+q)^n = 1,$$

$$\varphi'_{t=0}(t) = im_1 = \left[\ln(p+q)^n \right]_{t=0} = \ln(p+q)^{n-1} = np,$$

$$\begin{aligned} \varphi''_{t=0}(t) &= -m_2 = -n(n-1) (pe^{it} + q)^{n-2} p^2 e^{2it} - n(p+q)^{n-1} p e^{it} \\ &= -n(n-1) p^2 - np, \end{aligned}$$

etcétera.

Por lo tanto:

$$m_1 = np$$

$$m_2 = n(n - 1)p^2 - np$$

Aplicando el teorema de Steiner para hallar el momento centrado:

$$\mu_2 = m_2 - n^2 p^2 = np - np^2 = npq = \sigma^2.$$

Ejercicio (distribución binomial) II. 9. A

- 1) Calcular m_3 y m_4 utilizando II. 47, y comparar con lo calculado en el ejercicio a) del párrafo II. 5.

- 2) Verifique que si $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ es $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$

II. 9. B. FUNCIÓN CARACTERÍSTICA DE LA DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Sabemos que esta distribución se expresa por (II. 37)

$$p(z) = \frac{\lambda^z}{z!} e^{-\lambda}.$$

Por lo tanto,

$$\varphi(t) = \sum_{z=0}^{\infty} \frac{\lambda^z}{z!} e^{-\lambda} e^{itz} = e^{-\lambda} \sum_{z=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^z}{z!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}}. \quad (\text{II. 52})$$

Los momentos sucesivos son:

$$\varphi_{t=0}(t) = m_0 = 1$$

$$\varphi_{t=0}(t) = im_1 = \left[i(e^{-\lambda} \lambda e^{it} e^{\lambda e^{it}}) \right]_{t=0} = i\lambda$$

$$\varphi_{t=0}''(t) = -m_2 = \left[-e^{-\lambda} \lambda^2 e^{2it} e^{\lambda e^{it}} - e^{-\lambda} \lambda e^{it} \right]_{t=0} = -(\lambda^2 + \lambda)$$

$$\varphi_{t=0}''(t) = -im_3 = -i(\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda)$$

Si aplicamos el teorema de Steiner para encontrar el momento centrado

$$\mu_2 = m_2 - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda = m_1 \quad (\text{II. 53})$$

Por lo tanto, en la distribución de Poisson el momento de primer orden, con respecto al origen $z = 0$, es igual al momento de segundo orden centrado.

Ejercicio (distribución de Poisson) II. 9. B

- a) Calcular μ_3 y m_4 .

- b) Demuestre que $a_s = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

II. 10. DISTRIBUCIÓN NORMAL O DE GAUSS

Si en la distribución de Bernoulli el número de observaciones n tiende a infinito y la probabilidad p de los casos favorables se mantiene constante, se obtiene la ley de distribución de Gauss, llamada también distribución normal, de importancia extraordinaria en teoría de errores.

Hemos visto (II. 51) que para la distribución binomial la función característica es:

$$\varphi(t) = (pe^{it} + q)^n$$

y la centrada (II. 45)

$$\varphi_c(t) = e^{-itm_1} \varphi(t),$$

pero $m_1 = np$, por lo que:

$$\varphi_c(t) = (pe^{it} e^{-pit} + q e^{-pit})^n = (pe^{qit} + q e^{-pit})^n. \quad (\text{II. 54})$$

Si calculamos el límite de $\varphi_c(t)$ cuando n tiende a infinito, pero manteniendo $p = \text{cte}$, llegaremos a encontrar la

función característica centrada de la distribución normal.

Como el logaritmo de la función límite de (II. 54) es igual al límite del logaritmo de esta función, se puede calcular, para simplificar el proceso, el límite del logaritmo de (II. 54) para luego determinar el límite deseado.

De (II. 54) tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\lg \varphi_c(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [n \lg (p e^{qit} + q e^{-pit})]$$

Para calcular este límite, calcularemos previamente el límite de su derivada:

$$\frac{d}{dt} [\lg \varphi_c(t)] = n \frac{ipqe^{qit} - iqpe^{-pit}}{pe^{qit} + qe^{-pit}} ; \quad (\text{II. 55})$$

desarrollando en serie las exponentiales

$$= ni \frac{pq + pq^2it + \frac{pq^3i^2t^2}{2!} + \dots - (pq - p^2qit + \frac{p^3qi^2t^2}{2!} - \dots)}{p + pqit + \frac{pq^2i^2t^2}{2!} + \dots + q - qpit + \frac{qp^2i^2t^2}{2!} - \dots}$$

$$= ni \frac{pq^2it + \frac{pq^3i^2t^2}{2!} + \dots + p^2qit - \frac{p^3qi^2t^2}{2!} + \dots}{p + q + \frac{pq^2i^2t^2}{2!} + \frac{qp^2i^2t^2}{2!} + \dots}$$

pero recordando que $\sigma^2 = npq = \text{constante}$ y $p+q = 1$ para la distribución binomial, la anterior se reduce a:

$$= ni \frac{\frac{\sigma^2}{n} it + \frac{\sigma^2}{n} \frac{\sigma^2}{n} \frac{q}{p} \frac{i^2t^2}{2!} - \frac{\sigma^2}{n} \frac{\sigma^2}{n} \frac{p}{q} \frac{i^2t^2}{2!} + \dots}{1 + \frac{\sigma^2}{n} \frac{i^2t^2}{2!} + \dots}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} [\lg \varphi_c(t)] = \frac{-\sigma^2 t + \sigma^2 \frac{\sigma^2}{n} \frac{q}{p} \frac{i^3t^2}{2!} - \sigma^2 \frac{\sigma^2}{n} \frac{p}{q} \frac{i^3t^2}{2!} + \dots}{1 + \frac{\sigma^2}{n} \frac{i^2t^2}{2!} + \dots}$$

Como $\frac{p}{q}$ y $\frac{q}{p}$ están acotados al igual que σ , todos los términos del numerador, excepto el primero, tienden a cero cuando n tiende a infinito y en el denominador lo mismo.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{d}{dt} \lg \varphi_c(t) \right] = -\frac{\sigma^2 t}{1}$$

$$\lg \varphi_c(t) = -\frac{\sigma^2 t^2}{2} + \text{cte}$$

Por consiguiente, la función característica centrada correspondiente a la distribución límite de la de Bernoulli; cuando n tiende a infinito y p y σ se mantienen acotados es:

$$\varphi_c(t) = C e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} . \quad (\text{II. 56})$$

Recordando que $\varphi_c(t)|_{t=0} = 1$ resulta $C = 1$, por lo que la función característica centrada de la distribución normal es:

$$\varphi_c(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{-\frac{i^2 \sigma^2 t^2}{2}} . \quad (\text{II. 57})$$

Los sucesivos momentos para la curva normal serán:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_c(t) &= m_0 = \mu_0 = 1 \\ \varphi'_c(t) &= i \mu_1 = -i \frac{\sigma^2}{2} 2t e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \Big|_{t=0} = 0 \\ \varphi''_c(t) &= -\mu_2 = -\int_0^2 e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} + \sigma^2 t \frac{\sigma^2}{2} 2t e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \Big|_{t=0} = -\sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 58})$$

De la ecuación característica se puede obtener la correspondiente densidad de probabilidad $p(x)$ (*).

La relación (II. 42), cuando se conoce la función característica y se ignora la función de densidad de probabilidad $p(x)$ es una ecuación integral que en muchos casos se resuelve elementalmente.

Pasemos a calcular la función de densidad de probabilidad correspondiente a la función característica expresada por (II. 57). Derivando y teniendo en cuenta (II. 42), se obtiene:

$$\varphi'_c(t) = -\sigma^2 t e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = -\sigma^2 t \varphi_c(t) , \quad (\text{II. 58})$$

o sea

$$\sigma^2 t \varphi_c(t) + \varphi'_c(t) = 0 , \quad (\text{II. 59})$$

y reemplazando $\varphi_c(t)$ y $\varphi'_c(t)$ por sus correspondientes expresiones en función de $p(x)$,

$$\sigma^2 t \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{itx} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) e^{itx} dx = 0 . \quad (\text{II. 60})$$

El primer sumando se puede escribir

$$\frac{1}{i} \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \frac{d}{dx} e^{itx} dx$$

e integrando por partes:

$$\frac{1}{i} \sigma^2 \left[p(x) e^{itx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p'(x) dx \right] .$$

(*) Se designa siempre en este libro por $z_1, z_2, z_3, \dots, z_s$ los distintos valores correspondientes a las mediciones, y por $x_1, x_2, x_3, \dots, x_s$ los correspondientes valores centrados; es decir: $x_i = z_i - \bar{z}$

Como e^{itx} está acotada $|e^{itx}| \leq 1$ y $p(x)$ en los extremos indicados ($-\infty$ y $+\infty$) vale cero, el primer término no se anula, por lo que la igualdad (II. 60) se escribe:

$$-\frac{\sigma^2}{i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p'(x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) e^{itx} dx = 0 ,$$

o sea

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left[x p(x) + \sigma^2 p'(x) \right] dx = 0 . \quad (\text{II. 61})$$

Como esta ecuación se satisface para cualquier valor de t se debe cumplir:

$$x p(x) + \sigma^2 p'(x) = 0 , \quad (\text{II. 62})$$

es decir,

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = -\frac{x}{\sigma^2} . \quad (\text{II. 63})$$

Integrando

$$\lg p(x) = -\frac{x^2}{2\sigma^2} + \text{cte}$$

de donde

$$p(x) = C e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} . \quad (\text{II. 64})$$

La constante C se calcula recordando que para una distribución normalizada, denominada así a la distribución cuyo valor medio es cero y varianza unidad, o sea distribución de $\frac{x}{\sigma}$ se debe cumplir

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 ,$$

por lo que

$$C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 1 . \quad (\text{II. 65})$$

Para calcular esta integral hagamos un cambio de variable.
Llamando

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \quad (\text{II. 66})$$

también se cumple

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy \quad (\text{II. 67})$$

Multiplicando estas dos expresiones

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \quad (\text{II. 68})$$

Pasando de coordenadas cartesianas a polares

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad \text{con} \quad 0 \leq \rho \leq \infty .$$

La integral (II. 68), en todo el plano x, y , es equivalente a:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\rho^2} 2\pi \rho d\rho = -\frac{2\pi}{2a} e^{-a\rho^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{a} \quad (\text{II. 69})$$

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

pero como $a = \frac{2}{\sigma^2}$ resulta

$$I = \sqrt{2\pi \cdot \sigma^2} .$$

De (II. 65) se obtiene

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma}} \quad (\text{II. 70})$$

y finalmente la ley de distribución de Gauss centrada se escribe:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{II. 71})$$

o bien llamando

$$h = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} \quad (\text{II. 72})$$

$$p(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hx^2} \quad (\text{II. 73})$$

La ley de distribución de Gauss, llamada también normal, se ha obtenido como caso límite de la ley binomial, cuando

$n \rightarrow \infty$, p y q constantes y $\sigma = \sqrt{npq}$ acotado. Por consiguiente, en todos los casos en que la distribución de Gauss sea aplicable, implicará que las hipótesis básicas del esquema de Bernoulli, como la independencia de la probabilidad del proceso elemental, se cumplen.

Ejercicio (distribución normal) II. 10. 1

- a) Calcular μ_3 y μ_4 usando (II. 57).
- b) Usando (II. 19), (II. 20) y (II. 21) calcular a_s , a_p y J .

II. 11. ÍNDICES DE DISPERSIÓN

Hemos indicado la importancia de los valores promedio de una curva de distribución y que ésta queda totalmente determinada cuando se conocen la totalidad de los momentos. Los primeros cuatro momentos, como ya se explicó, suministran una valiosa información con respecto al comportamiento de las curvas de distribución. Después de conocidos los promedios, es importante saber si los valores de la variable están muy agrupados o no, en torno de los promedios. Para describir numéricamente la mayor o menor concentración alrededor de los promedios, en cada caso, se recurre a diversos parámetros estadísticos llamados índices de dispersión. Entre ellos,

los principales son: la semidistancia intercuartiles, la desviación media y la varianza.

1) Entre los promedios estadísticos, definimos en el párrafo II. 3 a la mediana, como el valor que divide en dos grupos de igual número de elementos al conjunto de los valores de la muestra ordenados en orden creciente. A los tres valores que, en la misma ordenación, dividen a la muestra en cuatro grupos de igual número de elementos, se los llama cuartiles. El segundo cuartil, q_2 , coincide por lo tanto con la mediana; el primer cuartil, o cuartil inferior, q_1 , divide en dos grupos de igual número de elementos a los valores de la muestra menores que la mediana, y el tercer cuartil, o cuartil superior, q_3 , análogamente, hace lo mismo con los valores mayores que la mediana.

La determinación del cuartil inferior y del superior puede efectuarse sencillamente mediante la curva de frecuencias acumuladas. Por ejemplo, en la figura II. 3 empleada para la determinación de la mediana precedentemente, el primer cuartil será la abscisa del punto de la curva cuya ordenada es la cuarta parte del número total de casos.

Para una distribución continua $p(z)$, con intervalo de variabilidad de extremos a y b , los cuartiles de orden impar son los valores q_1 y q_3 que cumplen

$$\int_a^{q_1} p(z) dz = \int_{q_3}^b p(z) dz = \frac{1}{4} . \quad (\text{II. 82})$$

Ocasionalmente se hace uso de otros puntos de división en partes iguales de la población ordenada de una muestra, llamándolos octiles, deciles y percentiles, que respectivamente determinan grupos cuyos elementos son un octavo, un décimo y un centésimo del número total de integrantes de la muestra.

A la diferencia $(q_3 - q_1)$ entre el cuartil superior y el inferior se la llama rango intercuartiles. De acuerdo con la definición dada, la mitad de la población de la muestra tiene valores z tales que $q_1 < z < q_3$; o sea; el rango intercuartiles constituye un índice de la dispersión de la distribución. Generalmente se utiliza como índice la mitad de tal rango:

Índices de dispersión

$\frac{q_3 - q_1}{2}$. Cuanto más pequeño es este rango, tanto más agrupados están los diferentes valores de z en torno de los promedios.

En una distribución simétrica, las diferencias $(q_3 - q_2)$ y $(q_2 - q_1)$ deben ser iguales. Por lo que un índice de la asimetría de una distribución se puede definir así:

$$a_s' = \frac{(q_3 - q_2) - (q_2 - q_1)}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} (q_3 - 2q_2 + q_1) . \quad (\text{II. 83})$$

Precedentemente hemos dado otro índice que se utiliza para medir la asimetría (II. 19). También se emplea otro índice de la asimetría definido por

$$\frac{\bar{z} - z_0}{\sigma} = \frac{\text{media} - \text{modo}}{\sigma}$$

2) El promedio aritmético de las desviaciones $z_i - m_1$ es, por definición de momento de primer orden, nulo; pero una medida de la dispersión de los valores z_i de la variable aleatoria en una distribución, entorno a la media, puede obtenerse promediando los módulos de dichas desviaciones. Se define así la "desviación media absoluta" d , de una distribución discreta:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n |z_i - m_1|}{n} \quad (\text{II. 84})$$

y en una distribución continua

$$d = \int_a^b |z_i - m_1| p(z) dz . \quad (\text{II. 85})$$

La desviación media d es un número positivo, tanto mayor cuanto más dispersos estén los valores de la variable aleatoria en torno del valor medio. Para el caso de una curva de distribución de errores, d será el error medio de la media.

3) El índice de dispersión de uso más generalizado es la varianza σ^2 , que es el momento centrado de segundo orden.

En una distribución discreta es:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (z_i - m_1)^2}{n} \quad (\text{II. 86})$$

y para una distribución continua

$$\sigma^2 = \int_a^b (z - m_1)^2 p(z) dz \quad (\text{II. 87})$$

A la raíz cuadrada positiva de la varianza se la llama "desviación media cuadrática", σ , o "desviación standard" (*).

En general, a mayor varianza, o mayor desviación standard, corresponde mayor dispersión de la variable en la respectiva distribución. En las leyes de distribución analizadas en este capítulo, los valores de la varianza están dados por (II. 24) en la distribución binomial; (II. 53) en la de Poisson y (II. 72) en la de Gauss.

La varianza en una distribución puede computarse, basándose en la expresión (II. 18), a partir de los momentos no centrados, de primer y segundo orden,

$$\sigma^2 = m_2 - m_1^2 \quad (\text{II. 88})$$

Ejercicios II. 11. 1

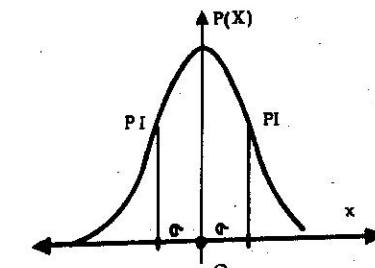
- a) Demostrar que para la distribución de Gauss (II. 73), la desviación media absoluta (II. 85) cumple

$$d = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \cdot$$

- b) Demostrar que d (II. 85) es la abscisa del centro de gravedad de la semisuperficie de 0 a ∞ .

(*) En la literatura en español se la designa también como "desviación típica" y aun "desviación normal", pero preferimos usar la denominación de "desviación standard" por ser la más corriente en el lenguaje técnico.

- c) Demostrar que para la distribución de Gauss σ es la abscisa el punto de inflexión.



- d) Demostrar que σ es el radio de giro de la superficie encerrada por la curva normal.

- e) Demostrar $\sigma_z^2 = \sigma_x^2$.

La varianza es independiente del origen de coordenadas.

II. 12. ALGUNAS DE LAS PRINCIPALES CARACTERÍSTICAS DE LA CURVA DE GAUSS

La función de distribución centrada de Gauss, como hemos visto, se expresa por (II. 73) y su representación gráfica se indica en la fig. II. 7.

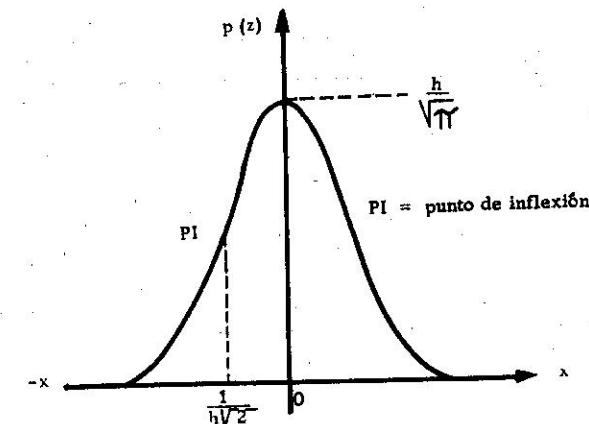


Fig. II. 7. Curva de Gauss para variable centrada

Como h es un parámetro que depende de la distribución particular, la función (II. 73) se puede normalizar tomando,

como variable (hx) y cumpliendo $\int_{-\infty}^{\infty} p(hx) d(hx) = 1$. Entonces:

$$p(xh) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(hx)^2}, \quad (\text{II. 74})$$

curva universal, que permite su tabulación. La tabla 1 del Apéndice da los valores de $p(xh)$, ordenadas de la curva, en función de (xh) .

Obsérvese que esta curva normalizada o universal corresponde a valor medio cero y varianza unidad.

Otras tablas comunes dan el valor de

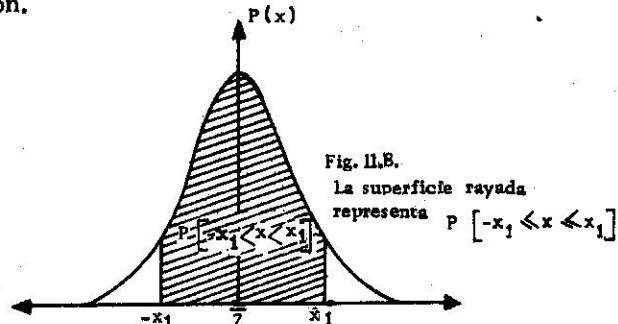
$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (\text{II. 75})$$

que es semejante al anterior, pero con variable normalizada $t = \frac{x}{\sigma}$.

Como la probabilidad de que las desviaciones estén comprendidas entre x_1 y $-x_1$ (coordenadas centradas) es:

$$P[-x_1 \leq x \leq +x_1] = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-x_1}^{x_1} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_1} e^{-h^2 x^2} dx, \quad (\text{II. 76})$$

cuya representación se indica en la figura II. 8, es conveniente su tabulación.



Por ello, la función anterior se escribe, al normalizarla

$$P(hx) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{hx} e^{-(hx)^2} d(hx), \quad (\text{II. 77})$$

cuyos valores se dan en la tabla 2 del Apéndice.

Muchas veces se hace el cambio de variable dicho

$$t = \sqrt{2} hx \quad (\text{II. 78})$$

y se define entonces la función error:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t_1}^{t_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{t_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (\text{II. 79})$$

que también se encuentra tabulada.

La función de probabilidad acumulada es:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-h^2 x^2} dx, \quad (\text{II. 80})$$

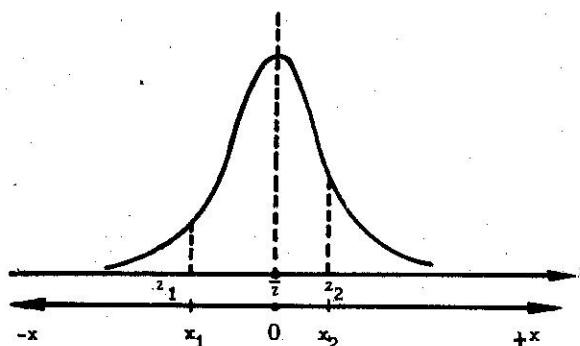
que puede calcularse de las tablas 1 y 2 mediante diferencias, al ser

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 x^2} dx = 1. \quad (\text{II. 81})$$

Ejemplo II. 12. 1

Para calcular $P[z_1 \leq z \leq z_2] = \int_{z_1}^{z_2} p(z) dz$ basta calcular

$$\begin{aligned} P[z_1 \leq z \leq z_2] &= P\left[\frac{z_1 - \bar{z}}{\sigma} \leq x \leq \frac{z_2 - \bar{z}}{\sigma}\right] = P[x_1 \leq x \leq x_2] = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \int_{-\infty}^{x_2} p(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} p(x) dx = P[x \leq x_2] - P[x \leq x_1] \end{aligned}$$



a) Por ser x una variable normalizada puede utilizarse la tabla 2 del Apéndice, y para el caso de la figura, resulta:

$$P[x_1 \leq x \leq x_2] = 0,5 + \int_0^{x_2} p(x) dx - [0,5 - \int_0^{x_1} p(x) dx] =$$

$$= P_2[x \leq x_2] + P_1[x \leq x_1].$$

Los valores de P_1 y P_2 se obtienen de la tabla 2 dividiendo sus valores por dos.

b) Si $z_2 > z_1 > \bar{z}$ se procederá en forma semejante.

Ejercicios II. 11. 1

a) Para los cuartiles debe cumplirse

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{q_1} e^{-h^2 x^2} dx = \frac{1}{2}.$$

Verifique que $q_1 h = 0,476936$,

$$\frac{q_1}{\sigma} = 0,67449.$$

b) Calcule el valor de c (en función de h y σ), tal

que

$$P[\bar{z} - c \leq z \leq \bar{z} + c] = 0,1.$$

c) Verifique que para la distribución normal, el valor de las ordenadas para los diversos índices de dispersión es:

$$\text{para } d \rightarrow 0,728 . \quad p(x) \text{ máx.}$$

$$\sigma \rightarrow 0,607 . \quad p(x) \text{ máx.}$$

$$\frac{1}{h} \rightarrow 0,368 . \quad p(x) \text{ máx.}$$

Compruebe asimismo que para (ver párr. 7 cap. III)

$$EP = 0,6746 \sigma \rightarrow 0,797 . \quad p(x) \text{ máx.}$$

$$EM = 0,7979 \sigma \rightarrow 0,728 . \quad p(x) \text{ máx.}$$

CAPÍTULO III

III. 1. TEORÍA DE ERRORES

Hemos señalado que la teoría de errores de mediciones o de observación tiene en cuenta solamente los errores aleatorios o azarosos, que se llaman comúnmente errores accidentales. Nos hemos referido también a las múltiples causas inevitables que hacen que los valores de un conjunto de mediciones de una magnitud física, efectuadas en condiciones iguales, sean en general diferentes.

La distribución de las frecuencias de los distintos valores obtenidos de la magnitud medida dependerá de la magnitud que se mide, de los instrumentos que se utilizan, de las condiciones en que se efectúan y de la habilidad del experimentador.

Al resultado de cada medición lo llamaremos un "dato" de la magnitud que se mide. Del proceso repetido de medir una magnitud física un número ilimitado de veces, utilizando un mismo observador e instrumento, y un procedimiento idéntico de medición, surge un conjunto infinito de datos que constituirá el "universo de medida" de la magnitud considerada. Es decir, que este universo es el resultado de la interacción entre el observador, el instrumento de medición, las normas que definen el proceso de medida y la magnitud a medir.

Por lo tanto, para una misma magnitud física que se desea medir, tendremos tantos universos de medida diferentes como conjuntos de observadores, instrumentos y procesos distintos de medida se sigan para medirla. Un proceso de mediciones es equivalente a otro cuando se realiza en las mismas condiciones, con los mismos instrumentos y con observadores que tengan iguales habilidades para observar y medir.

El referido universo de medidas no es más que un conjunto estadístico de la variable aleatoria que es la magnitud a medir.

Teoría de errores

En él juegan los errores accidentales cuyo valor medio, en las infinitas medidas, es nulo. A ese universo de medidas es al que puede aplicarse la teoría matemática de las probabilidades. Llamaremos "valor verdadero" al valor medio del referido universo.

Hay una diferencia notable entre, por ejemplo, el universo de las alturas de los hombres que habitan una determinada región y el universo correspondiente a las medidas de una determinada longitud. Mientras el primero está integrado por las alturas correspondientes a los distintos individuos que lo forman, el segundo es elaborado por el propio proceso de medición y depende, en parte, de la precisión del instrumento de medida y del observador.

Físicamente es imposible medir una magnitud un número infinito de veces. La cantidad de observaciones que se pueden efectuar es limitada. Este número n de mediciones que se efectúen, obtenidas con el mismo observador, usando el mismo instrumento e idéntico procedimiento, puede considerarse una "muestra" del correspondiente universo.

El universo de las medidas, de acuerdo con lo expresado, es análogo al universo de los impactos en un blanco correspondientes a un tirador dado, usando una determinada arma y en idénticas condiciones ambientales. Se ve claramente, en este caso, que el universo correspondiente a los impactos del tirador considerado, no está previamente impreso en el blanco, sino que surge del proceso de tirar al blanco, y depende del tirador, del arma que usa y de las condiciones en que efectúa los disparos. Efectuada una serie de n disparos, los impactos correspondientes configuran una muestra del universo en cuestión.

El problema entonces es deducir de dicha muestra el comportamiento del universo de medidas para obtener los valores buscados. La teoría de errores no es, pues, más que un caso particular de la teoría de muestras.

La medición única que normalmente se hace en metrología práctica es, por lo tanto, insuficiente para que la misma sea confiable. En este caso la rapidez, sencillez y economía que se busca expresa la magnitud con los valores enteros de las

divisiones del instrumento de medida y asocia a la misma un "error de aproximación" que es una fracción del intervalo entre divisiones del instrumento de medida, o bien se da dicho intervalo como valor límite de error.

En metrología científica, para inferir conclusiones sobre el valor de la magnitud que se mide, se debe obtener una o varias muestras del universo de medidas. Cada muestra con n observaciones conduce a resultados más seguros (inferencia estadística) sobre la magnitud. Si la función de distribución de una muestra fuera la del universo de medidas el problema estaría resuelto, pues se obtendrían los parámetros que definen a dicho universo (estadística paramétrica).

Las medidas o "datos" z_i son valores discretos, definidos a intervalos Δz_i , de acuerdo con la menor división de la escala del instrumento, apreciándose la fracción del mismo. El ser discreta es causa de error en la estimación. La mejor precisión se logra con el mejor instrumento, pues siempre los parámetros de la distribución adolecen de la imprecisión original.

De lo expuesto surge que la dispersión de un universo de medidas correspondiente a una cierta magnitud física a medir, puede reducirse mediante el empleo de instrumentos de creciente precisión (los que son el resultado del constante progreso científico y tecnológico) y, paralelamente, mejorando las condiciones en que se efectúan las mediciones. Por supuesto que el límite de precisión de las mediciones estará limitado por el principio de incertezza de Heisenberg, el que fija una cota mínima a los errores de observación, por perfectos que sean los instrumentos utilizados [17].

Para aplicar la Matemática Estadística a la teoría de los errores de observación, es necesario primeramente determinar la ley de distribución de dichos errores.

El concepto básico del esquema de Bernoulli se puede aplicar a la teoría de errores.

Tomando el ejemplo simple de la moneda, la fórmula de Bernoulli nos da la probabilidad de obtener un número dado de figuras en n intentos. Si la moneda es correcta la probabilidad

de obtener una figura o número es la misma.

Cuando se efectúan mediciones correctamente, se admite que existe igual probabilidad de obtener un error mínimo Δz positivo o negativo. Al positivo lo podemos hacer corresponder a una figura. La probabilidad de cometer un error de $2\Delta z$, por ejemplo, en una serie de n medidas, es equivalente a la probabilidad de obtener 20 figuras al arrojar n veces la moneda. La probabilidad de obtener n figuras la tenemos corresponder a la de obtener un error $n\Delta z$.

De acuerdo con lo analizado en el esquema de Bernoulli en el capítulo II, al aumentar el número de mediciones, los diagramas que indican la figura II.6 son también válidos, y muestran que las mismas tienden a un valor único que es el más probable ("valor verdadero") que corresponde a la magnitud medida.

Así establecida la posible correspondencia entre el esquema de Bernoulli y el proceso que conduce a la distribución de errores accidentales de observación, indicaría que este último es un caso particular de la ley de Bernoulli cuando n tiende a infinito, y que el valor obtenido es tanto más probable cuanto mayor sea el número de mediciones.

Llamaremos $(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)$ los resultados numéricos de n mediciones de una determinada magnitud física, efectuadas, cada una de ellas, en iguales condiciones y suponiéndose eliminados los errores sistemáticos. Se admite que cada uno de los valores z_i está comprendido en el intervalo de clase

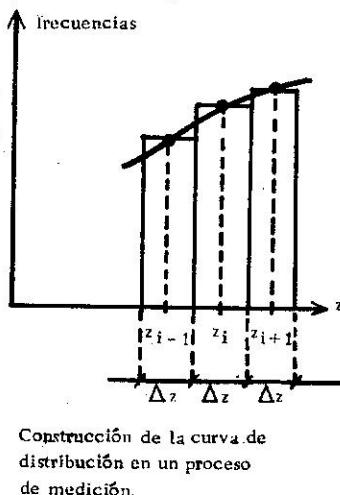
$$\bar{z}_i - \frac{\Delta z}{2} \leq z_i \leq \bar{z}_i + \frac{\Delta z}{2},$$

donde \bar{z}_i es el valor medio en dicho intervalo y que éste es igual a Δz , que depende de la apreciación que permiten los instrumentos utilizados. Si, además, se supone no solamente que n es suficientemente grande, sino que cada uno de los n_i , número de mediciones que caen en el intervalo i , es también grande, podemos representar las correspondientes frecuencias $\frac{n_i}{n}$, por la probabilidad de que la medición con-

siderada arroje un valor que esté dentro del intervalo de clase i . De esta manera podemos obtener las distribuciones de probabilidades experimentales que proporciona el proceso de medición (Fig. III.1).

Intervalo de clase	Valor medio del intervalo	Número de mediciones	Frecuencias
1	z_1	n_1	$\frac{n_1}{n}$
$i-1$	z_{i-1}	n_{i-1}	$\frac{n_{i-1}}{n}$
i	z_i	n_i	$\frac{n_i}{n}$
$i+1$	z_{i+1}	n_{i+1}	$\frac{n_{i+1}}{n}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Fig. III. 1



Obtenida la curva experimental de distribución de probabilidades de las medidas, lo que se debe hacer luego es lo mismo que corresponde en todos los demás casos de estadística en que se parte de una muestra suficientemente grande del correspondiente universo de medidas. Es decir, determinar cuál es, de entre las diferentes curvas de distribución teóricas conocidas, la que mejor ajusta con la curva de distribución experimental de las mediciones. En esta forma se comprueba que la distribución de Bernoulli simétrica ($p = q = \frac{1}{2}$) es suficientemente adecuada en la enorme mayoría de los casos. Como esta distribución no es de fácil uso, se puede suponer que el intervalo de clase se hace suficientemente pequeño y el número de medidas suficientemente grande, de manera de reemplazar la distribución de Bernoulli por su límite cuando n tiende a infinito, o sea: la distribución de Gauss. Luego cabe inferirse cuáles son las principales características del proceso de medición, sabiendo que experimentalmente se comprueba que este proceso se representa satisfactoriamente por la curva de Gauss. Es decir: podemos llegar a la conclusión que las hipótesis básicas que se admitieron para la obtención de la ley de Gauss se cumplen también en el proceso de medición. O sea:

podemos concluir que en el proceso de la medición, cuando se tienen solamente en cuenta los errores accidentales o azarosos, existe igual probabilidad de cometer un error elemental Δz por exceso que por defecto; que esta probabilidad es constante durante todo el proceso, y que el cometer un error $n \cdot \Delta z$, con respecto al valor medio de todas las mediciones \bar{z} , es igual a la probabilidad de obtener n éxitos sucesivos en el esquema de Bernoulli.

Poincaré consideraba con Lippmann [19, pág. 55] : "Todo el mundo cree en la ley de Gauss, porque los experimentadores se imaginan que es un teorema de matemática, y los matemáticos que es un hecho experimental". Se ve que en torno de la teoría de los errores hay todavía un poco de metafísica.

La ley de Gauss como expresión de los errores de observación no es, como hemos explicado precedentemente, ni un teorema matemático ni un hecho experimental. Es una teoría física y como toda teoría física se basa en los hechos experimentales, pero éstos solamente no son suficientes. Se requiere luego, como en cualquier otra teoría física, hacer un esquema de postulados o axiomas, sacar conclusiones matemáticas y confrontar los resultados verificables con los experimentales. Cuando esta confrontación da resultados positivos se acepta la teoría. Las hipótesis que se admiten en lo expuesto anteriormente son las correspondientes al esquema de Bernoulli.

En la función de Gauss los errores pueden variar de menos infinito a más infinito, y la mayor discrepancia entre los valores reales y los gaussianos se obtiene en los extremos o "colas" de la función de Gauss. Por supuesto que experimentalmente no es posible obtener un error infinitamente grande en la medición de una magnitud física finita. La discrepancia indicada sería menos grave si en vez de la curva de Gauss se utilizara la distribución discontinua simétrica de Bernoulli, como hemos indicado. Pero en ningún campo de la Física teórica existen teorías perfectas. Las "colas" de la distribución gaussiana tienen poco peso. La curva de Gauss es, como hemos indicado, tabulable y fácil de utilizar y su discrepancia con las distribuciones reales de los errores de observación son, en la enorme mayoría de los casos, despreciables.

Más adelante indicaremos algunos casos concretos de medi-

ciones en que no se cumple la ley de Gauss. Haremos ahora una reflexión simple sobre una de las hipótesis implícita de dicha distribución. Se admite que la probabilidad del proceso elemental es constante. Esto, en realidad, no es absolutamente correcto en la mayoría de los casos. En efecto, en el mismo proceso de mediciones sucesivas, el experimentador puede incrementar su habilidad; es decir, puede existir aprendizaje y consecuentemente la probabilidad del proceso elemental variará de prueba a prueba. Se debería esperar, en estos casos, una discrepancia con la distribución gaussiana. Procesos en los que la probabilidad del proceso elemental varía, son muy importantes en Física [13, pág. 122].

Pongamos un caso simple y claro de lo que acabamos de expresar. Un tirador avezado que tira al blanco con un arma previamente desconocida para él, y que puede ver el resultado de cada uno de sus tiros previos, irá indudablemente agudizando su puntería en cada uno de sus tiros sucesivos. Es decir, que el tirador va aprendiendo a utilizar cada vez mejor su arma y por lo tanto, la probabilidad de que acierte en la parte central del blanco aumenta a medida que avanza en el proceso. En éste, como en muchos otros casos que se dan físicamente, es de esperar que la correspondiente curva experimental discrepe de manera sensible con la de Gauss. Pero aun en estos casos se puede aproximar la curva experimental a la de Gauss, tomando un valor promedio de la probabilidad del proceso elemental para un número grande de pruebas.

III. 2. TEOREMA DE BAYES

Nos hemos referido y hemos utilizado la probabilidad de que se produzcan sucesivamente dos acontecimientos a y b , cuando éstos son independientes. En este caso, la probabilidad de que se produzcan a y b es igual al producto de las probabilidades $P(a)$ y $P(b)$. Esto se prueba fácilmente usando el concepto de probabilidad como límite de frecuencia o usando el colectivo de von Mises. Lo dejamos como ejercicio para el lector.

Análogamente, y de manera igualmente sencilla, se demuestra, mediante el concepto de colectivo de von Mises que, cuan la aparición del acontecimiento b es influida por la aparición

o no del suceso a en el caso precedente [probabilidad condicional $P(b|a)$] la probabilidad de que se produzca a y b [probabilidad compuesta $P(a,b)$] se expresará

$$P(a,b) = P(a) \cdot P(b|a). \quad (\text{III. 1})$$

El segundo factor en la precedente relación $P(b|a)$ indica cuál es la probabilidad de que se produzca el acontecimiento b sabiendo que se produjo el a .

La ecuación (III. 1) se puede escribir

$$P(a,b) = P(a) \cdot P(b|a) = P(b) \cdot P(a|b), \quad (\text{III. 2})$$

siendo $P(b)$ la probabilidad de que se produzca el acontecimiento b , independientemente de lo que ocurra con el acontecimiento a ; y $P(a|b)$ la probabilidad de que ocurra el acontecimiento a , sabiendo que ocurrió el b .

De (III. 2) resulta

$$P(a|b) = \frac{P(a)}{P(b)} \cdot \frac{P(b|a)}. \quad (\text{III. 3})$$

De acuerdo con el significado dado a los símbolos, si el acontecimiento a puede tomar distintos valores a_i con probabilidades $P(a_i)$, variando i de 1 a s , podemos escribir:

$$P(b) = \sum_{i=1}^s P(a_i) P(b|a_i). \quad (\text{III. 4})$$

Es decir, la probabilidad de que se produzca b , independientemente de lo que ocurra con a , será igual a la suma de cada una de las probabilidades de que a asuma cada uno de sus posibles valores, por la probabilidad de que se produzca el b , sabiendo que el a toma el correspondiente valor.

Teniendo en cuenta (III. 4), la (III. 3) se puede escribir:

$$P(a_i | b) = \frac{P(a_i) P(b | a_i)}{\sum_i P(a_i) P(b | a_i)} . \quad (\text{III.5})$$

Si se supone que el acontecimiento a puede tomar en un proceso azaroso s valores diferentes $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_s\}$, cuyas respectivas probabilidades independientes sean $P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_s)$, cada uno de ellos determina de manera particular la probabilidad de que se produzca el acontecimiento b [$P(b | a_i)$ significa la probabilidad de que se produzca el acontecimiento b si el a_i tuvo lugar]; y habiéndose producido el acontecimiento b se desea saber cuál es la probabilidad que haya sido producido por el acontecimiento a_i . Esta probabilidad viene dada por la expresión (III.5) que sintetiza el Teorema de Bayes [53, cap. IV].

A las probabilidades $P(a_i)$ se las suele llamar probabilidades a priori y a las $P(a_i | b)$ probabilidades a posteriori. La frase a priori tiene un significado bien definido en Metafísica (conocimiento independiente de la observación o experimentación). Consideramos preferible designar a las probabilidades $P(a_i)$ probabilidades anteriores, puesto que se determinan con los conocimientos observacionales que existen antes de conocerse que el acontecimiento b tuvo lugar.

III.2. A ALGUNAS APLICACIONES DEL TEOREMA DE BAYES [44, pág. 217] [36, pág. 156] [25, pág. 125]

Consideraremos a continuación dos aplicaciones del Teorema de Bayes, que son ilustrativas de la capacidad del mismo para resolver problemas muy diversos.

1) Supongamos que recibimos una moneda y nos preguntamos si será una moneda común, con una figura en una de sus caras y un número en la otra, o si será una moneda especial, con figuras en ambas caras. Naturalmente, una respuesta obvia se obtiene mirando ambas caras de la moneda; pero nos proponemos conocer la respuesta por otro procedimiento, que consiste en arrojar la moneda al suelo un número grande de veces y anotar qué contiene en cada oportunidad la cara que queda a la vista. Inicialmente, antes de comenzar a arrojar la moneda, existe cierta probabilidad de que la misma sea especial. Lla-

memos $P(e)$ a tal probabilidad anterior y $P(c) = 1 - P(e)$ a la de que sea común o normal.

Arrojemos la moneda n veces y supongamos que en todos los casos obtenemos una figura en la cara que queda a la vista. La probabilidad de obtener estos resultados si la moneda es especial, será: $P(n | e) = 1$. Si, en cambio, la moneda es normal, de acuerdo con lo establecido en el capítulo II.2, resulta: $P(n | c) = (\frac{1}{2})^n$.

Aplicando (III.5), podemos escribir:

$$P(e | n) = \frac{P(e) P(n | e)}{P(e) P(n | e) + P(c) P(n | c)} = \frac{1}{1 + \frac{k}{2^n}} ,$$

en la que anotamos $k = \frac{P(c)}{P(e)}$.

$P(e | n)$ es la probabilidad de que la moneda sea especial, teniendo en cuenta el resultado positivo de los n procesos previos. Se ve que depende a la vez del valor de la probabilidad anterior $P(e)$, a través del factor k , y del número de procesos de iguales resultados realizados. La probabilidad posterior de que la moneda sea especial tiende a la certeza cuando el número de resultados consecutivos favorables, n , es suficientemente grande, aunque el valor de la probabilidad anterior $P(e)$ sea sumamente pequeño.

Por ejemplo, supongamos que $P(e) = 10^{-8}$, con lo que $k \approx 10^8$. Al cabo de 27 resultados consecutivos favorables, $P(e | n) > \frac{1}{2}$; con unos pocos resultados consecutivos favorables más, $n = 34$, nos habremos aproximado sensiblemente a la certeza [$P(e | n = 34) > 0,99$] de que la moneda es especial.

2) En una fábrica se produce en serie cierto tipo de tornillos, que se envasan en cajas conteniendo 1.200 tornillos cada una. Una larga experiencia ha demostrado que la proporción de estas cajas que contienen diversos porcentajes de tornillos defectuosos es la siguiente:

Teoría de errores de mediciones

Porcentajes de tornillos defectuosos en la caja	Proporción de cajas en las que se ha observado que existen tornillos defectuosos en los respectivos porcentajes
0	0,78
1	0,17
2	0,034
3	0,009
4	0,005
5	0,002
6	0,000

Como norma se ha establecido que cualquier caja que contiene solamente hasta un 2 % de tornillos defectuosos es satisfactoria; un proceso de inspección tiene lugar para rechazar aquellas cajas en las que hay más de 2 % de tornillos defectuosos. Esta inspección consiste en el examen de 50 tornillos de cada caja.

Una determinada caja de tornillos, producida cuando no había razones especiales para suponer que las máquinas productoras estuvieran operando mal, presenta 6 tornillos defectuosos en la inspección normal. Se pregunta cuál es la probabilidad de que las normas de fabricación no se hayan mantenido en la producción de dicha caja.

De acuerdo con el Teorema de Bernoulli, las proporciones que figuran en la segunda columna de la tabla anterior son buenas aproximaciones de las probabilidades de que se den los respectivos porcentajes de tornillos defectuosos. En este caso, los porcentajes de tornillos malos por caja serán los eventos a_i del Teorema de Bayes; la segunda columna de la tabla previa nos dará las respectivas probabilidades anteriores $P(a_i)$.

La probabilidad de obtener, en la muestra de 50 tornillos, m tornillos defectuosos y $50 - m$ satisfactorios, si en la ca-

Teorema de Bayes

ja hay 1.200 tornillos que comprenden $12a_i$ tornillos defectuosos y $1.200 - 12a_i$ satisfactorios, es:

$$P(m | a_i) = \frac{C_m^{12a_i} C_{50-m}^{1.200 - 12a_i}}{C_{50}^{1.200}}, \quad (\text{III. 6})$$

donde $C_m^{12a_i}$ representa el número de resultados diferentes que se pueden obtener al efectuar m extracciones sin reposición de una caja que contiene $12a_i$ elementos, suponiendo, que éstos sean distinguibles unos de otros. Por lo dicho, surge en seguida el significado del factor análogo $C_{50-m}^{1.200 - 12a_i}$. Por consiguiente, el numerador de (III. 6) representa el número de maneras diferentes de obtener, en 50 extracciones tomadas al azar, sin reposición, de una caja que hipotéticamente contenga $12a_i$ tornillos malos y $1.200 - 12a_i$ satisfactorios, m tornillos defectuosos y $50 - m$ buenos. El denominador de (III. 6), $C_{50}^{1.200}$, representa los diferentes resultados que se pueden obtener al efectuar 50 extracciones sin reposición, de una caja que contenga 1.200 piezas distinguibles. Consecuentemente, la expresión (III. 6) representa la probabilidad de que, sobre la base de que la correspondiente caja contenga $12a_i$ tornillos malos, se obtengan m tornillos defectuosos en 50 extracciones sin reposición.

Aplicando el teorema de Bayes (III. 5) y teniendo en cuenta que en el caso que venimos considerando, $m = 6$, se obtiene:

$$P(a_i | m = 6) = \frac{P(a_i) C_6^{12a_i} C_{44}^{1.200 - 12a_i}}{\sum_{a_i=0}^6 P(a_i) C_6^{12a_i} C_{44}^{1.200 - 12a_i}}$$

Realizando los cálculos para los distintos porcentajes a_i resulta:

a_i	$P(a_i m = 6)$
0	0,000
1	0,004
2	0,070
3	0,170
4	0,374
5	0,382
6	0,000

La probabilidad de que más del 2 % de los tornillos de la caja sean defectuosos es la suma (0,926) de las cuatro últimas filas de la tabla precedente, o sea que resulta muy probable que existan defectos anormales de fabricación.

El caso planteado es uno de los múltiples que se presentan en los procesos de control estadístico de fabricación. Por supuesto, para cada tipo de proceso y de fabricación se hacen las tablas numéricas correspondientes para facilitar la inspección en cada caso. Procedimientos similares de control estadístico se emplean en distintas ramas de la Ciencia; por ejemplo, en Ciencias Biológicas se realizan útiles aplicaciones del Teorema de Bayes en múltiples problemas de bacteriología [44, pág. 217].

III. 2. B EL TEOREMA DE BAYES Y LA TEORÍA DE ERRORES

Admitamos que se han efectuado, en iguales condiciones, mediciones del valor numérico de una cierta magnitud física, cuyos resultados indicaremos por:

$$z_1, z_2, z_3, \dots, z_s$$

El problema básico de la teoría de los errores, como ya lo hemos indicado precedentemente, consiste en determinar la mejor estimación que, sobre la base del conjunto de medidas obtenidas, podemos inferir para la magnitud medida y , ade-

Teorema de Bayes

más, determinar un rango para la discrepancia posible entre el valor estimado y el verdadero.

Supondremos también que el número de mediciones es suficientemente grande y que el intervalo de apreciación, ε , es suficientemente pequeño, de manera tal que podamos asumir que la ley de probabilidad de los errores puede ser considerada como continua. Recalcamos que en estas consideraciones solamente se tienen en cuenta los errores accidentales o azarosos.

Llamaremos z_0 al "valor verdadero" de la magnitud medida (con antelación hemos indicado qué significado estadístico debe atribuirse a este valor, para evitar contaminaciones metafísicas en la teoría de los errores) y $P(z | z_0)$ a la probabilidad de que se produzca en una medición el resultado z , sabiendo que la verdadera medida es z_0 . Indiscutiblemente, el resultado de una medición dependerá, además de los instrumentos utilizados, de las condiciones en que se efectúa la medida, del observador y muy fundamentalmente del valor de la magnitud que se mide. Si designamos por $P(z_0)$ la probabilidad, anterior al conjunto de mediciones efectuadas, de que la magnitud verdadera tenga el valor z_0 , tendremos que, sobre la base del Teorema de Bayes, la probabilidad, después de haber efectuado las s mediciones indicadas, vendrá dada por [19, pág. 35].

$$P(z_0 | z_1, z_2, z_3, \dots, z_s) = \frac{P(z_0) P(z_1 | z_0) \dots P(z_s | z_0)}{\int_{-\infty}^{\infty} P(z_0) P(z_1 | z_0) \dots P(z_s | z_0) dz_0} \quad (\text{III. 7})$$

Como veremos más adelante, al exponer la demostración de Gauss de la curva de distribución de los errores, se admite que la probabilidad $P(z_0)$ es constante, es decir, independiente del valor de z_0 , debido a que antes de haber efectuado las mediciones no existe evidencia para suponer que un valor de z_0 tiene más peso que otro.

III. 2. C EL TEOREMA DE BAYES Y LA COMPROBACIÓN DE HIPÓTESIS CIENTÍFICAS

Supongamos que llamamos $P(h)$ a la probabilidad de validez de una hipótesis antes de efectuar una observación para

comprobar si un determinado acontecimiento a_1 , predicho por la hipótesis h , se produce o no. Si este acontecimiento se produce, deseamos saber cuál será la probabilidad posterior $P(h|a_1)$. Sobre la base de la relación (III.3) podemos escribir:

$$P(h|a_1) = \frac{P(h) P(a_1|h)}{P(a_1)}. \quad (\text{III.8})$$

En este caso, $P(a_1|h) = 1$, puesto que se supone que el acontecimiento a_1 es una consecuencia lógica de la hipótesis h . Por lo tanto como $P(a_1) \leq 1$, tenemos que, después de haberse comprobado el hecho a_1 , predicho por la hipótesis considerada, la probabilidad posterior es:

$$P(h|a_1) \geq P(a_1).$$

En general, si se comprueban los acontecimientos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_s$, predichos por la hipótesis h , tendremos:

$$P(h|a_1, a_2, a_3, \dots, a_s) = \frac{P(h) P(a_1, a_2, a_3, \dots, a_s|h)}{\prod_{i=1}^s P(a_i)} \quad (\text{III.9})$$

Como $P(a_1, a_2, a_3, \dots, a_s|h) = 1$, por ser los indicados acontecimientos consecuencias lógicas de las hipótesis h , tenemos:

$$P(h|a_1, a_2, \dots, a_s) = \frac{P(h)}{\prod_{i=1}^s P(a_i)}. \quad (\text{III.10})$$

Siendo cada uno de los factores que aparecen en el denominador de (III.10) a lo sumo igual a la unidad, vemos que al aumentar el número de hechos constatados experimentalmente, que fueron predichos por la hipótesis, la probabilidad de que ésta sea cierta tiende a la unidad.

De esta manera se puede dar forma matemática al principio de inducción.

Debemos advertir que el sentido que pueden tener los símbolos de probabilidad en (III.8) es completamente diferente al que le hemos atribuido y le atribuimos en este libro. No podemos definir $P(h)$, la probabilidad de la hipótesis h , como límite de frecuencia en un definido colectivo de von Mises. Para que la expresión (III.8) tenga sentido es necesario introducir otro concepto de probabilidad, no en reemplazo del de límite de frecuencias que consideramos que científicamente es el más preciso, sino como complemento para ser empleado en casos como el que estamos analizando. Para esto deberíamos reemplazar a $P(h)$ en (III.8) por, verbi gracia, $M(h)$, la medida relativa de la evidencia en favor de la hipótesis h , antes de haber efectuado la comprobación de si la predicción a se cumple; $P(h|a_1)$, por la medida de la evidencia relativa en favor de la hipótesis h , después que la predicción a se cumplió; y, análogamente, $P(a_1)$, por la medida relativa de la evidencia de que se produzca el hecho a_1 , sin suponer cierta la hipótesis h .

Mucha confusión se produce en libros de Probabilidad y Estadística Matemática por no hacer claramente la distinción entre los dos conceptos diferentes de probabilidad que acabamos de indicar y que, para contribuir a evitar la confusión, es conveniente llamarlos de manera distinta.

El problema de la medida relativa de evidencia o, como le llama Carnap [10], de la probabilidad de inducción, es complejo y su tratamiento más detallado nos alejaría muchísimo de nuestro tema central: teoría de los errores. En ésta, repetimos, el único concepto de probabilidad que utilizamos es el de límite de las frecuencias relativas. Existen algunos libros sobre teoría de los errores en los que sus autores hacen uso indiscriminado y confuso de los referidos dos conceptos diferentes de probabilidad, perdiendo, por lo tanto, sus consideraciones valor científico.

III.3. DEMOSTRACIÓN DE GAUSS DE LA CURVA DE DISTRIBUCIÓN DE LOS ERRORES ACCIDENTALES

Dado un conjunto $(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)$ de mediciones, Gauss admite, a los efectos de deducir la ley de distribución de los errores accidentales o azarosos, los siguientes postulados:

Primero: el valor más probable de la medida buscada, es la media aritmética de los valores medidos.

$$\bar{z} = \frac{\sum z_i}{n} . \quad (\text{III. 11})$$

Este postulado, que por supuesto no es obvio, es admitido por todos para determinar la mejor estimación de la magnitud que se mide. Se ha tratado de deducir este postulado de otros más sencillos, como veremos luego.

Segundo: sea $p(z)$. \mathcal{E} la probabilidad de obtener un error comprendido entre z y $z + \mathcal{E}$ (\mathcal{E} es igual a la apreciación del instrumento utilizado) y, suponiendo que el valor más probable (indicado en el primer postulado) coincide con el verdadero buscado, se cumple:

$$p(x) \cdot \mathcal{E} = p(-x) \cdot \mathcal{E} , \quad (\text{III. 12})$$

$$\text{siendo } x_i = z_i - \bar{z} .$$

Lo anterior implica que $p(x)$ debe ser una función par.

Tercero: un error es tanto más probable cuanto menor es su valor absoluto, es decir:

$$p(x) \mathcal{E} > p(x') \mathcal{E} \quad \text{si} \quad |x| < |x'| . \quad (\text{III. 13})$$

Implica que la función $p(x)$ tiene un máximo en $x = 0$.

Cuarto: como se ignora cuál es la distribución de probabilidades a priori, o anteriores, de los distintos valores que puede asumir la medida, se supone que estas probabilidades son constantes, en la aplicación del Teorema de Bayes.

Partiendo de estos postulados se deduce la función de Gauss o ley de distribución normal.

Dado el conjunto de n mediciones z , cada una de ellas dentro de un intervalo de clase \mathcal{E} , se tiene que la probabili-

dad de obtener dichos valores, suponiendo que el valor correcto buscado es z_0 , será, por cuanto los z_i son independientes:

$$\mathcal{E}^n \prod_{i=1}^n p(z_i - z_0) . \quad (\text{III. 14})$$

El valor más probable de z_0 será el que haga máximo a (III. 14); por lo tanto, la derivada, o la de su logaritmo, con respecto a z_0 , debe ser nula:

$$\frac{d}{dz_0} \sum_{i=1}^n \lg p(z_i - z_0) = 0 . \quad (\text{III. 15})$$

Utilizando el postulado primero, tenemos:

$$\bar{z} = \frac{\sum z_i}{n} = z_0$$

o sea

$$\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z}) = 0 = \sum_{i=1}^n (z_i - z_0) . \quad (\text{III. 16})$$

Por consiguiente, como z_0 debe satisfacer a (III. 15) y (III. 16), tenemos, para que estas igualdades se cumplan para cualquier valor de z_i , que:

$$\frac{d}{dz_0} \lg p(z_i - z_0) = C(z_i - z_0) , \quad (\text{III. 17})$$

siendo C una constante.

La función buscada de la distribución de los errores será, recordando (III. 12):

$$p(x) = C_2 e^{-\frac{1}{2}C_1 x^2} . \quad (\text{III. 18})$$

El valor de la constante C_2 se deduce considerando que la probabilidad de obtener un error comprendido entre $-\infty$ y

$\rightarrow \infty$ es la certeza, o sea:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} C_2 e^{-\frac{1}{2}C_1 x^2} dx = 1 . \quad (\text{III. 19})$$

De (II. 69) se tiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}C_1 x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{1}{2}C_1}}$$

o sea:

$$2C_2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{C_1}} = 1 ,$$

es decir,

$$C_2 = \frac{\sqrt{C_1}}{\sqrt{2\pi}} .$$

Por lo tanto, la función (III. 18) se escribe:

$$p(x) = \frac{\sqrt{C_1}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}C_1 x^2} \quad (\text{III. 20})$$

Si hacemos

$$\frac{C_1}{2} = h^2 \quad (\text{III. 21})$$

queda

$$p(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} , \quad (\text{III. 22})$$

que es la función de densidad de probabilidad de Gauss dada en (II. 73). A la constante h se la llama "constante de precisión" pues cuanto más grande es, tanto más agrupados se encuentran los errores en torno del valor medio.

III. 4. DEDUCCIÓN DEL POSTULADO DE GAUSS DE LA MEDIA ARITMÉTICA A PARTIR DE OTROS AXIOMAS MÁS SIMPLES

En la teoría de Gauss sobre errores se toma, como hemos visto, el postulado de que el valor más probable es la media aritmética. Este punto no resulta suficientemente claro.

Se han hecho varios intentos para demostrarlo partiendo de postulados más evidentes. En este sentido el más interesante, por citar uno solo, es el de Schiaparelli y Broggi [45, pág. 752] [46, pág. 125].

Para su demostración se parte de los siguientes axiomas:

I. El valor más probable es independiente de la ubicación del origen.
Si se tienen n medidas z_1, z_2, \dots, z_n , a las que se les aplica un operador f , para obtener el valor más probable, y si se corre el origen de las medidas en una cantidad l constante arbitraria real, se obtendrá:

$$f(z_1 + l; z_2 + l; \dots; z_n + l) = f(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) + l . \quad (\text{III. 23})$$

II. El valor más probable es independiente de la unidad de medida. Es decir, que si se multiplica a las n medidas por una constante k ($k > 0$), arbitraria real, se puede escribir:

$$f(k z_1; k z_2; \dots; k z_n) = k f(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) , \quad (\text{III. 24})$$

lo que implica un cambio en la unidad de medida.

III. El valor más probable es independiente del orden de las medidas, es decir, que si se permutan los resultados de dos mediciones, el valor más probable no cambiará. O sea:

$$f(z_1, z_2, z_3, \dots, z_i z_j \dots z_n) = f(z_1, z_2, z_3, \dots, z_j z_i \dots z_n) . \quad (\text{III. 25})$$

Esto implica que el operador f es simétrico.

- IV. La función f en todos los puntos es continua, uniforme y tiene derivada primera. Por lo tanto, $\frac{df}{dz_i}$ existe.

Este último axioma es el más fuerte.

La demostración del postulado del valor medio de Gauss puede hacerse, entonces, del siguiente modo.

Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial y mediante el axioma IV, se puede escribir:

$$f(kz_1; kz_2; \dots, kz_n) = f(0, 0, \dots, 0) + kz_1 \left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)_* + \dots + kz_n \left(\frac{\partial f}{\partial z_n} \right)_*$$

donde el * significa que la derivada respectiva para cada se toma para un valor θkz con $0 < \theta < 1$.

Por el axioma II (III. 24) el primer miembro vale $k f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ y el primer término del segundo miembro es idénticamente nulo.

Igualando y simplificando, resulta

$$f(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) = z_1 \left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)_* + z_2 \left(\frac{\partial f}{\partial z_2} \right)_* + \dots + z_n \left(\frac{\partial f}{\partial z_n} \right)_*. \quad (\text{III. 26})$$

Haciendo tender k a cero se tendrá que $\theta kz \rightarrow 0$, y por el axioma IV, cada derivada tiende a un valor único:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)_0 = C_1; \left(\frac{\partial f}{\partial z_2} \right)_0 = C_2; \dots; \left(\frac{\partial f}{\partial z_n} \right)_0 = C_n.$$

Por lo que (III. 26) puede escribirse:

$$f(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n.$$

Pero, de acuerdo con el axioma III, la permutación de dos medidas arbitrarias no cambia el resultado; luego:

$$C_1 z_1 + \dots + C_i z_i + C_j z_j + \dots + C_n z_n = C_1 z_1 + \dots + C_j z_i + C_i z_j + \dots + C_n z_n,$$

de la cual se deduce:

$$(C_j - C_i) z_i = (C_j - C_i) z_j.$$

Dada la independencia de las mediciones z_i y z_j , la igualdad anterior es cierta si, y sólo si

$$C_i = C_j = C,$$

por lo que:

$$f(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) = C(z_1 + z_2 + \dots + z_n).$$

Asimismo, como corolario del axioma I surge que si $z_1 = z_2 = z_3 = \dots = z_n = z$,

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = z = C n z,$$

de donde $C = \frac{1}{n}$.

Luego

$$f(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n}.$$

Sería interesante investigar si se podría demostrar el postulado de Gauss de la media, admitiendo los mismos tres primeros axiomas que Schiaparelli, pero reemplazando el cuarto por uno menos exigente como el siguiente:

- IV'. La función f es en todos los puntos continua (sin exigir que sea derivable).

Hemos intentado demostrarlo sobre esta base, sin conseguir

lo; creemos que con la continuidad solamente no es posible demostrar el referido postulado.

III.5. ALGUNOS CASOS EN QUE NO SE CUMPLE EL POSTULADO DE GAUSS DE LA MEDIA ARITMÉTICA

El postulado de Gauss de que la media aritmética es el valor más probable no es siempre correcto. Veremos algunos casos en que no se cumple.

I. La medida de la magnitud de las estrellas depende de una sensación visual o fotográfica. Las sensaciones visuales están expresadas por la ley psicofísica de Weber y Fechner: "La medida de la sensación producida es proporcional al logaritmo de su estímulo".

Supongamos que z_0 es el valor verdadero (o más probable) de la relación del brillo de dos estrellas y z_1, z_2, \dots, z_n las diferentes medidas de la misma. Sean asimismo E_1, E_2, \dots, E_n y E_0 las intensidades de percepción del brillo relativo correspondientes a los z_1 y z_0 .

De acuerdo con la expresada ley:

$$E_i - E_0 = C \lg \frac{z_i}{z_0} . \quad (\text{III. 27})$$

Las n observaciones E_i arrojan n errores $x_1, x_2 \dots x_n$:

$$x_i = E_i - E_0 = C \lg \frac{z_i}{z_0} . \quad (\text{III. 28})$$

Dichos errores obedecen a la ley normal (III. 18), por cuan-
to cumplen sus requisitos. Por lo tanto, la probabilidad total
de obtener esa sucesión de valores es el producto de las proba-
bilidades individuales, que es proporcional a:

$$e^{-h^2(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \quad (\text{III. 29})$$

Para que dicha probabilidad sea máxima el exponente en (III. 29) debe ser mínimo. Como h es una constante, debe

ser:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \text{mínimo} .$$

Por lo tanto, como la incógnita es z , debe cumplirse

$$\frac{\partial}{\partial z_0} \sum x_i^2 = 0 .$$

O sea:

$$x_1 \frac{\partial x_1}{\partial z_0} + x_2 \frac{\partial x_2}{\partial z_0} + \dots + x_n \frac{\partial x_n}{\partial z_0} = 0 = \sum x_i \frac{\partial x_i}{\partial z_0}$$

y de (III. 28) resulta:

$$\frac{\partial x_i}{\partial z_0} = -\frac{C}{z_0} .$$

Por lo que:

$$\sum \left(C \lg \frac{z_i}{z_0} \right) \left(-\frac{C}{z_0} \right) = 0 ,$$

o bien

$$\sum \lg \frac{z_i}{z_0} = 0 .$$

O sea:

$$\frac{z_1}{z_0} \frac{z_2}{z_0} \dots \frac{z_n}{z_0} = 1 .$$

De donde

$$z_0 = \sqrt[n]{z_1 z_2 \dots z_n} = \sqrt[n]{\prod_1^n z_i} .$$

En este caso, el valor más probable de la medida del estímulo es la media geométrica, o, lo que es lo mismo, la media aritmética de los logaritmos de las distintas medidas de los estímulos.

Muchas placas fotográficas tienen curvas características análogas a la sensibilidad del ojo; por lo tanto, se obtendría

Teoría de errores de mediciones

un resultado análogo si se utilizaran placas fotográficas para determinar las magnitudes estelares.

II. Otro caso se presenta en los contadores Geiger [41, pág. 107].

La función frecuencia para los intervalos t entre impulsos sucesivos de un contador es

$$\Psi(t, \theta) = \theta e^{-\theta t},$$

donde θ es un parámetro instrumental a determinar.

Si se han efectuado n medidas de t sucesivas, la probabilidad total de las mismas es el producto de las probabilidades parciales, o sea

$$P_n = \theta^n e^{-\theta \sum t_i}.$$

El valor de $\bar{\theta}$ es el que hace máxima esta P_n .

$$\left[\frac{\partial P_n}{\partial \theta} \right]_{\bar{\theta}} = 0,$$

o sea

$$n \theta^{n-1} e^{-\theta \sum t_i} - \theta^n \sum t_i e^{-\theta \sum t_i} = 0 \quad |_{\theta = \bar{\theta}}$$

$$- \bar{\theta} \sum t_i + n = 0,$$

$$\bar{\theta} = \frac{n}{\sum t_i}.$$

En este caso, $\bar{\theta}$ es el recíproco de la media de los tiempos medidos.

III. Debe tenerse presente que en el caso de variables que intervienen al cuadrado (dispersiones, valores eficaces) el valor más probable corresponde al "valor cuadrático medio" $\overline{z_{cm}}$, definido por:

$$\overline{z_{cm}} = \sqrt{\frac{\sum z_i^2}{n}}$$

Parámetros característicos de una curva de Gauss

III. 6. DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS CARACTERÍSTICOS DE UNA CURVA DE GAUSS POR MEDIO DE UN NÚMERO FINITO DE MEDICIONES

Si se han efectuado n mediciones (z_1, z_2, \dots, z_n) , de acuerdo con Gauss, la probabilidad de que la medida z_i esté comprendida entre $z_i - \frac{dz_i}{2}$ y $z_i + \frac{dz_i}{2}$ es:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z_i - m_1)^2}{2\sigma^2}} dz_i,$$

siendo, como hemos visto, m_1 y σ , respectivamente, el momento de primer orden y el desvío medio cuadrático del universo de las mediciones.

La probabilidad de obtener, de un tal universo de medidas, la muestra de orden n dada, es igual al producto de las probabilidades de cada medida. Entonces, la probabilidad P_n de la muestra dada es:

$$P_n(z_1, z_2, \dots, z_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{-\frac{\sum (z_i - m_1)^2}{2\sigma^2}} dz_i, \quad (\text{III. 30})$$

pues admitimos que los dz_i son iguales y constantes.

Estimemos m_1 y σ^2 por el método de la estimación más probable, o sea haciendo que P_n sea máximo.

Tomando logaritmos, para simplificar, y buscando el valor de m_1 que lo hace máximo, tendremos:

$$\lg P_n = n \lg \left[\sqrt{2\pi} \sigma \right]^{-1} - \sum_{i=1}^n \frac{(z_i - m_1)^2}{2\sigma^2} + n \lg dz_i$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial m_1} \lg P_n = + \frac{\sum (z_i - m_1)}{\sigma^2} = 0 \quad y \quad \frac{\partial^2}{\partial m_1^2} \lg P_n < 0,$$

o sea

$$\sum_{i=1}^n (z_i - m_1) = 0$$

Y

$$m_1 = \frac{\sum_i^n z_i}{n} = \bar{z} \quad . \quad (\text{III. 31})$$

\bar{z} es la mejor estimación del valor de la medida considerada.

Buscando el máximo respecto a

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \lg P_n = + \sum_{i=1}^n \frac{(z_i - m_i)^2}{\sigma^3} - \frac{n}{\sigma} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \lg P_n < 0$$

Por lo tanto,

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - m_1)^2}{n} \approx s^2 . \quad (III. 32)$$

La varianza de las n mediciones resulta ser la estimación más probable del cuadrado del desvío medio cuadrático.

Los valores m_1 y σ^2 son los parámetros que corresponden al universo de medidas, cuando $n = \infty$. Este supuesto no es posible de alcanzar; n siempre es finito. Los valores \bar{z} y s^2 son los mejores estimadores de los parámetros de la población total; son lógicamente variables aleatorias de un conjunto dado de mediciones y tienen sus propias funciones de distribución (Véase párr. III. 14). La relación entre σ y s se analizará en el párrafo III. 10.

De acuerdo con el Teorema de Tshebysheff (ver II.6) cuando $n \rightarrow \infty$, la probabilidad del valor medio tiende a uno. Pero esta conclusión teórica sería cierta si en cada medida el resultado no tuviese error de apreciación; es decir, estuviese perfectamente determinado. Pero todo instrumento tiene una escala, en la que la menor división fija la indeterminación del valor buscado. Se podrá apreciar el décimo, en el mejor de los casos, del intervalo correspondiente, y este valor nos da

la indeterminación del valor medio. La mayor precisión que busca la metrología científica exige instrumentos que disminuyan el intervalo de medición y no simplemente un aumento del número de medidas. Con una regla milimetrada no se puede alcanzar el micrón.

Como el parámetro σ , que es base de los errores, es inversamente proporcional a $\sqrt{n-1} \approx \sqrt{n}$, para ganar teóricamente una cifra significativa en el resultado del valor medio se debe pasar, por ejemplo, de 10 a 1.000 medidas, lo que engendra la duda de si la magnitud en cuestión se ha mantenido constante, si los factores interviniéntes se han mantenido invariables, o si todas las medidas corresponden al universo original. Tal vez sea más conveniente perfeccionar el método de medida que aumentar el número de ellas. Es preferible obtener veinte "buenas" medidas que no mil mediocres. Por ello n rara vez pasa de 50.

"Este raciocinio nos indica lo siguiente: cuando los resultados proporcionados por un aparato de medición poseen cierta indeterminación, la esperanza de que la ley de los grandes números (n grande) permita determinar el valor medio con mayor exactitud es ilusoria y la realización de un cálculo tal no pasa de ser un pasatiempo aritmético carente de sentido"
[26, pág. 63].

Ejemplo III. 6. 1

De la lectura de un galvanómetro se han obtenido los siguientes valores:

Se pide calcular el valor medio $\bar{\alpha}$ y s_{α} .

Si no se dispone de una máquina de calcular, dichos parámetros pueden calcularse como sigue:

A) Valor medio \bar{z} .

Observando el rango de valores de los z_i se fija un z' que se supone como medio y se calculan los $(z_i - z')$. Este z' debe ser tal que $(z_i - z')$ sean fáciles de operar. Entonces:

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - z' + z')}{n} = z' + \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - z')}{n} = z' + \Delta.$$

El Δ surge fácilmente de una correcta tabulación, siendo

$$\Delta = \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - z')}{n} = \sum_{i=1}^{n'} f_i (z_i - z').$$

B) Desviación standard s_{α} .

Adoptando $\bar{z} = z' + \Delta$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - z' + z')^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n [(z_i - z')^2 - 2(z_i - z')\Delta + \Delta^2]}{n} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - z')^2}{n} + \Delta^2 \end{aligned}$$

o bien, si los z_i son números pequeños,

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}{n} = \frac{\sum z_i^2}{n} - \bar{z}^2.$$

En nuestro caso: valor fijado $\alpha' = 21,8$ div.

α_i	n_i	$\alpha_i - \alpha'$	$n_i(\alpha_i - \alpha')$	$n_i(\alpha_i - \alpha')^2$
21,4	1	-0,4	-0,4	0,16
21,5	1	-0,3	-0,3	0,09
21,6	3	-0,2	-0,6	0,12
21,7	4	-0,1	-0,4	0,04
21,8	11	0	0	0
21,9	3	0,1	0,3	0,03
22	2	0,2	0,4	0,08

$$n = \sum n_i = 25 \quad n\Delta = -1 \quad 0,52 = \sum n_i(\alpha_i - \alpha')^2$$

$$\bar{\alpha} = 21,8 - \frac{1}{25} = 21,76 \text{ div.} \quad \Delta = -0,04$$

$$\Delta^2 = 16 \cdot 10^{-4}$$

$$s_{\alpha}^2 = \frac{0,52}{25} - 0,0016 = 0,0192$$

$$s_{\alpha} = 0,1386 \text{ div.}$$

(valores obtenidos con la regla de cálculo de 25 cm).

Ejemplo III. 6. 2

De otra serie de valores.

Teoría de errores de mediciones

		Medio supuesto $\alpha' = 21,5$			Medio supuesto $\alpha' = 21,6$		
α_i	n_i	$\alpha_i - \alpha'$	$n_i(\alpha_i - \alpha')$	$n_i(\alpha_i - \alpha')^2$	$\alpha_i - \alpha'$	$n_i(\alpha_i - \alpha')$	$n_i(\alpha_i - \alpha')^2$
21,2	2	-0,3	-0,6	0,18	-0,4	-0,8	0,32
21,3	3	-0,2	-0,6	0,12	-0,3	-0,9	0,27
21,4	2	-0,1	-0,2	0,02	-0,2	-0,4	0,08
21,5	7	0	0	0	-0,1	-0,7	0,07
21,6	5	0,1	0,5	0,05	0	0	0
21,7	2	0,2	0,4	0,08	0,1	0,2	0,02
21,8	4	0,3	1,2	0,36	0,2	0,8	0,16
$n = 25$		+0,7	0,81		-1,8	0,92	

$$n \cdot \Delta = +0,7$$

$$\Delta = \frac{0,7}{25} = 0,028$$

$$\therefore \bar{\alpha} = 21,5 + 0,028 = 21,528 \text{ div.}$$

$$\Delta^2 = 0,00078$$

$$\sum n_i(\alpha_i - \alpha') = 0,81$$

$$s^2 = \frac{0,81}{25} - 0,00078 = 0,03161$$

$$s = 0,178 \text{ div.}$$

$$n \cdot \Delta = -1,8$$

$$\Delta = -\frac{1,8}{25} = -0,072$$

$$\bar{\alpha} = 21,6 - 0,072 = 21,528 \text{ div.}$$

$$\Delta^2 = 0,0052$$

$$\sum n_i(\alpha_i - \alpha')^2 = 0,92$$

$$s^2 = \frac{0,92}{25} - 0,0052 = 0,0316$$

$$s = 0,178 \text{ div.}$$

Ejercicios III. 6. 1

a) Si $x_i = z_i - \bar{z}$ es $\sum^n x_i = 0$.

Pero si $\xi_i = z_i - m_1$ es $\sum^n \xi_i \neq 0$.

Demuéstrese que, con rigor: $\sum^n x_i = \sum^n (\xi_i - \frac{\sum^n \xi_i}{n})$

Parámetros característicos de una curva de Gauss

Tiende a cero para n suficientemente grandes.

b) Mídase repetidamente, en forma independiente, la longitud de un segmento de unos 75 cm, utilizando un triple deímetro, apreciando los décimos de milímetro. Calcule el valor medio y la desviación standard. Dibuje la curva de Gauss.

c) Quince determinaciones del peso de una esfera arrojaron los siguientes valores (en g):

10,012	10,010	10,009
10,013	10,010	10,010
10,008	10,009	10,011
10,007	10,008	10,013
10,010	10,011	10,010

Calcúlese el valor medio y la desviación standard.

d) Demuestre que $\sigma^2 = \bar{z}^2 - \bar{z}^2$: la varianza es la diferencia entre la media aritmética de los cuadrados menos el cuadrado de la media aritmética, que se verifica para cualquier distribución.

Ejemplo III. 6. 3

Verificación de si una distribución es gaussiana.

Interesa determinar un criterio para comprobar si una muestra satisface a una distribución de Gauss.

A) Los coeficientes de asimetría a_s y aplastamiento a_p permiten verificar si la distribución es gaussiana en dos aspectos: si $a_s = 0$ es simétrica y si $a_p = 3$ es gaussiana.

Conviene calcular dichos coeficientes mediante el siguiente cuadro. Datos del ejemplo III. 6. 1 con $n = 25$.

z_i	f_i	$z_i f_i$	$(z_i - \bar{z}) f_i$	$(z_i - \bar{z})^2 f_i$	$(z_i - \bar{z})^3 f_i$	$(z_i - \bar{z})^4 f_i$
21,4	0,04	0,856	-0,36	-0,0144	0,518. 10 ⁻²	-0,1860. 10 ⁻²
21,5	0,04	0,860	-0,26	-0,0104	0,271. "	-0,0708. "
21,6	0,12	2,592	-0,16	-0,0192	0,307. "	-0,0492. "
21,7	0,16	3,472	-0,06	-0,0096	0,058. "	-0,0035. "
21,8	0,44	9,592	+0,04	+0,0176	0,070. "	+0,0028. "
21,9	0,12	2,628	+0,14	+0,0168	0,236. "	+0,0330. "
22,0	0,08	1,760	+0,24	+0,0192	0,460. "	+0,1106. "
$\sum f_i =$		$\sum z_i f_i =$	$\sum f_i (z_i - \bar{z}) =$	$\sum f_i (z_i - \bar{z})^2 =$	$\sum f_i (z_i - \bar{z})^3 =$	$\sum f_i (z_i - \bar{z})^4 =$
1		$\bar{z} = 21,760$	0	$1,920. 10^{-2}$	$-0,1631. 10^{-2}$	$9,862. 10^{-4}$

De la tabla $\bar{z} = 21,76$ $n = 25$

$$s^2 = 0,0192$$

$$s = 0,1385$$

$$s^3 = 0,00266$$

$$s^4 = 0,000368$$

$$a_s = -\frac{0,001631}{0,00266} = -0,613$$

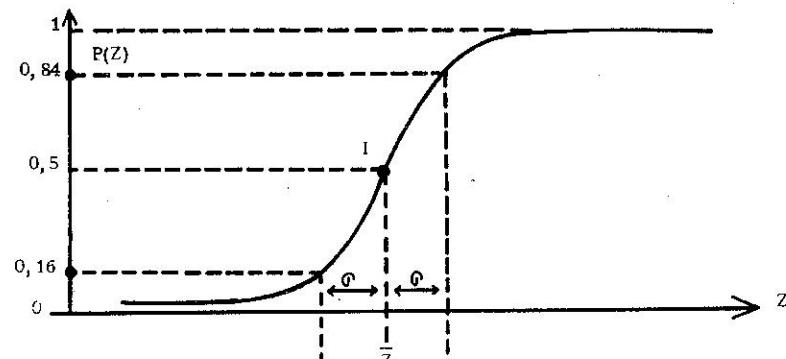
$$a_p = \frac{9,862 \cdot 10^{-4}}{3,68 \cdot 10^{-4}} = 2,68$$

B) Curva de los errores acumulados.

De acuerdo con Gauss la probabilidad P de que z sea menor que z_i es:

$$P(z \leq z_i) = \int_{-\infty}^{z_i} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 z^2} dz$$

Si se representa la P_z anterior en función de z se obtiene la curva en forma de ojiva que indica la fig. 1.



El punto de inflexión I corresponde a \bar{z} en abscisas y 0,5 en ordenadas. Se la puede dibujar utilizando la tabla de probabilidades dada en el capítulo anterior. Para esta curva de errores acumulados se verifica que

$$p(z_i) = \frac{d P_z}{d z_i}$$

Se la denomina ojiva de Galton. Normalizada $\bar{z} = 0$.

Para la distribución real discreta, la integral anterior se transforma en:

$$P(z \leq z_i) = \sum_{-\infty}^{z_i} \frac{n_i}{n},$$

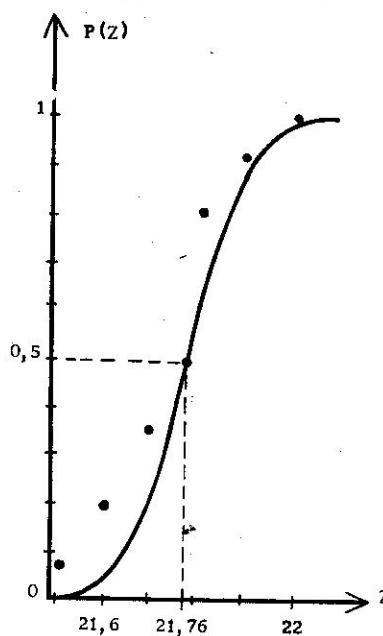
donde $\frac{n_i}{n}$ es la frecuencia con que se ha observado z_i .

Superponiendo la ojiva real con la teórica se puede observar la coincidencia. La superposición se efectúa en \bar{z} , reduciendo la escala de abscisas para que los Δz sean iguales.

Conviene hacer la siguiente tabla.

x_i	f_i	Frecuencias acumuladas
21,4	0,04	0,04
21,5	0,04	0,08
21,6	0,12	0,20
21,7	0,16	0,36
21,8	0,44	0,80
21,9	0,12	0,92
22,0	0,08	1,00

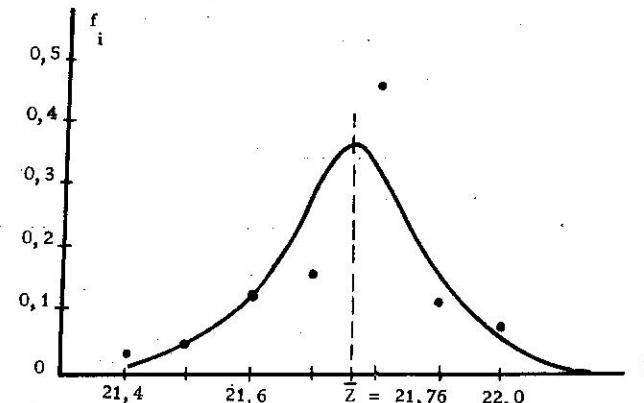
De la observación de las curvas se deduce la coincidencia.
Datos Ejercitación III.



C. Superposición de la curva normal (*) .

Si se consideran las desviaciones $\delta x_i = x_i - \bar{x}$ y se las representa en función de las frecuencias de observación se tendría una curva que si la muestra es gaussiana coincidiría con la normal superpuesta a ella.

Para ello debe representarse f_i en función de $(x_i - \bar{x})$. La figura corresponde al ejemplo III. 6. 1.



Se observa que en una muestra donde actúan solamente los errores azarosos existe una buena coincidencia entre la curva de Gauss y la real. La discrepancia es mayor en las "colas" de la distribución, por cuanto la curva normal tiende asintóticamente a cero, y la probabilidad de obtener desviaciones grandes son muy pequeñas.

De las tablas del capítulo anterior puede deducirse que la probabilidad P de que $x_i > \sigma$ es (ordenada \bar{x} tomada como 1)

(*) La prueba más estricta se hace con la distribución χ^2 que se verá en el párrafo IV. 3.

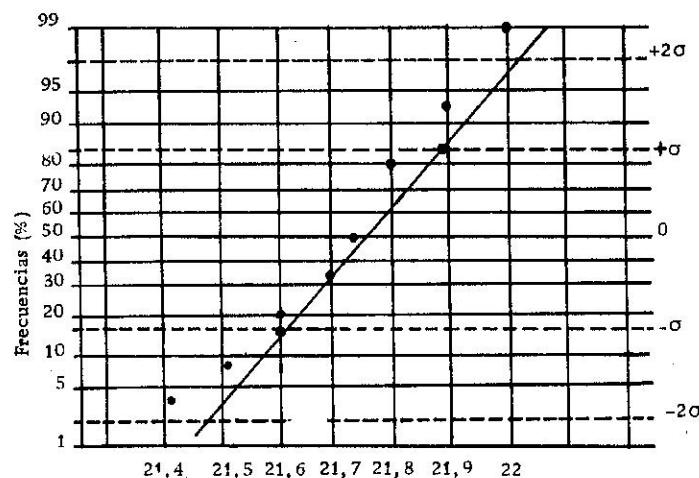
x_i	$P[x > x_i]$
σ	0,3173
2σ	0,0455
3σ	0,00270
4σ	0,000063
5σ	0,000000573

o sea, en promedio, de cada 1.000 mediciones solo tres de ellas tendrán desviaciones $|x_i - \bar{x}| > 3\sigma$.

D) Papel para representación de datos estadísticos.

Si en el gráfico de frecuencias acumuladas se modifica el eje de ordenadas de tal manera que la curva en forma de ojiva se transforme en una línea recta, la verificación de una distribución se efectúa comparando la distribución de frecuencias con una recta.

Determinado el valor medio y el σ respectivo se dibuja la recta de la distribución normal correspondiente. Se representan luego los puntos reales. La simple observación determina la coincidencia. Valores ejercitación III. 6. 1.



Ejemplo III. 6. 4

Se ha medido una longitud 25 veces obteniéndose los siguientes valores, que se han ordenado.

z_i	mm	17,2	17,3	17,4	17,5	17,6
n_i		5	10	5	4	1

Calculando

$$\bar{z} = 17,352 \text{ mm}$$

$$s^2 = 0,0093 \quad s = 0,0965 \text{ mm} \quad \sigma = 0,0985 \quad h = 7,18 .$$

z_i	$z_i - \bar{z}$	$h(z_i - \bar{z})$	p_{hx}	$25 p_{hx}$
17,2	0,152	1,09	0,1720	4,3
17,3	0,052	0,373	0,4894	12,48
17,4	0,048	0,344	0,5012	12,52
17,5	0,148	1,06	0,1834	4,58
17,6	0,248	1,78	0,0237	0,592

El valor máximo corresponde $p_6 = 25 \cdot 0,5642 = 14,10$.

La figura indica la coincidencia (ver página siguiente).

Para otra serie:

z_i	n_i	$z_i - \bar{z}$	$n_i(z_i - \bar{z})$	$n_i(z_i - \bar{z})^2$	$z = 17,4$
17,2	2	-0,2	-0,4	0,08	$\bar{z} = 17,396$
17,3	7	-0,1	-0,7	0,07	$s = 0,116$
17,4	10	0	0	0	$\sigma = 0,1182$
17,5	4	0,1	0,4	0,04	$h = 5,98$
17,6	0	0,2	0	0	
17,7	2	0,3	0,6	0,18	
\sum	25		-0,1	0,37	

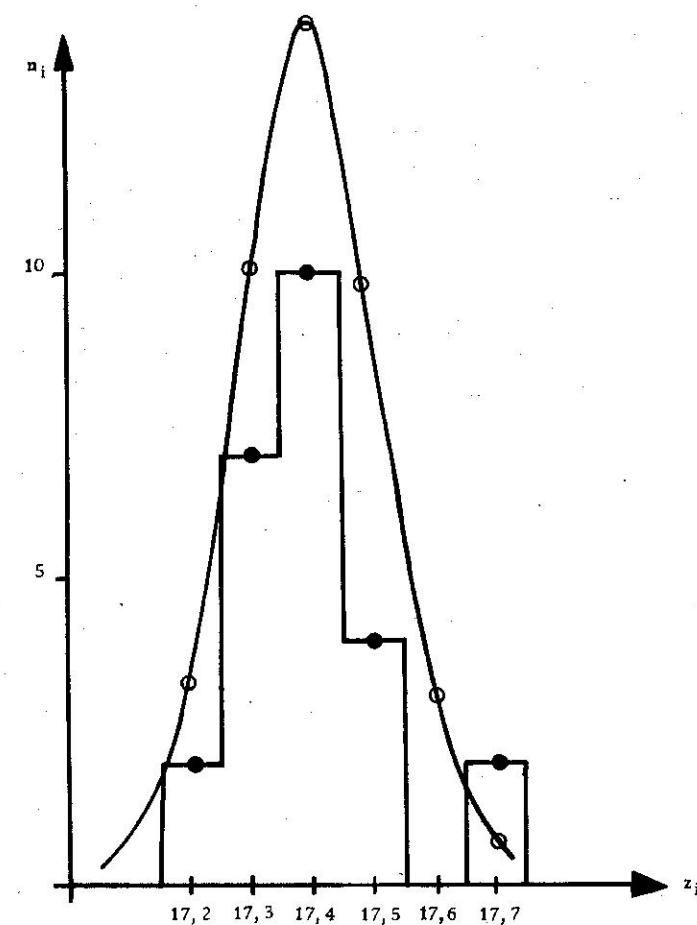
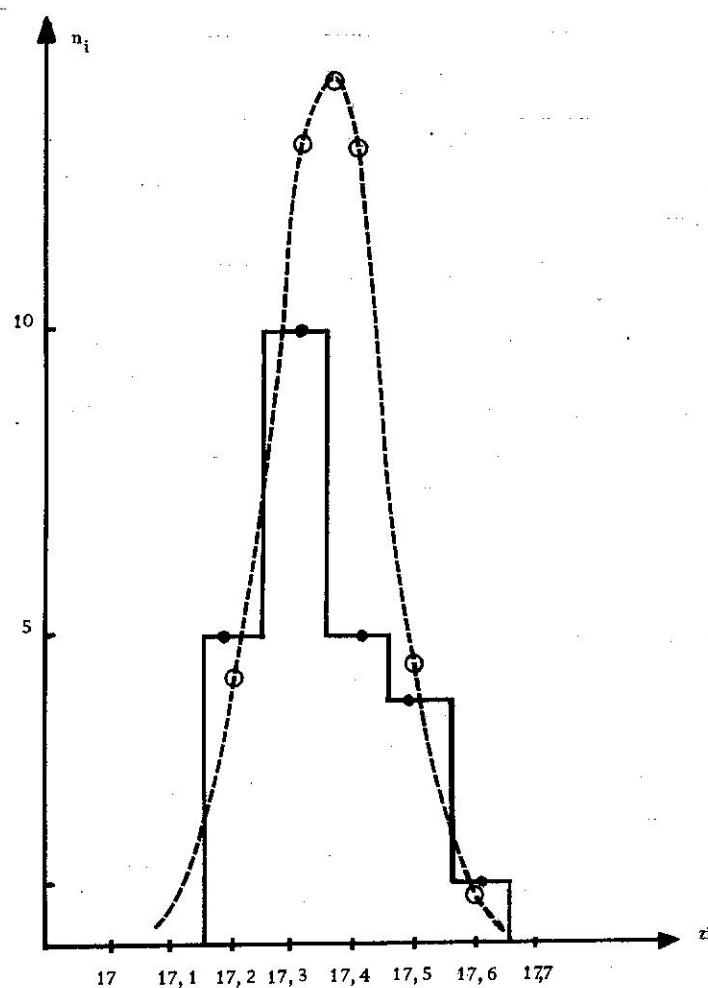


Figura correspondiente a la segunda serie

Curva de Gauss

z_i	$z_i - \bar{z}$	hx_i	p_{hx}	$n \cdot p_{hx}$
17,2	0,196	1,17	0,1435	3,58
17,3	0,096	0,574	0,4046	10,10
17,4	0,004	0,0024	0,5639	14,08
17,5	0,104	0,621	0,3838	9,58
17,6	0,204	1,22	0,1274	3,19
17,7	0,304	1,825	0,0202	0,502

Valor máximo $p(0) = 14,10$.

Ejercicio 6. III. 2

Repita lo anterior para la serie

$$\begin{array}{ccccccc} z_i & = & 17,2 & 17,3 & 17,4 & 17,5 & 17,6 & 17,7 \\ n_i & = & 4 & 4 & 4 & 7 & 5 & 1 \end{array}$$

III. 7. DISTINTAS APRECIACIONES ESTADÍSTICAS DE LOS ERRORES

Los errores pueden ser absolutos o relativos. Dentro de los primeros podemos indicar:

A) Error medio cuadrático.

Hemos visto que la curva que representa de manera bastante satisfactoria a los errores accidentales o azarosos, de observaciones se expresa por (II. 71) y (II. 73)

$$p(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

y

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Distintas apreciaciones estadísticas de los errores 107

siendo h la constante de precisión y σ el desvío o error medio cuadrático (II. 58).

Sobre la base de la tabla nº 2 del Apéndice, podemos determinar el área encerrada por la curva de Gauss y las ordenadas $-\sigma$ y $+\sigma$. En efecto, dicha área vale:

$$\frac{2}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^\sigma e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sigma} e^{-h^2 x^2} d(hx).$$

La mencionada tabla da los valores del segundo miembro en función de hx . En nuestro caso, para $x = \sigma$ resulta, según la relación (II. 72) $h\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$. Interpolando linealmente entre los valores dados en la tabla

$$P[0,70] = 0,6778$$

$$P[0,71] = 0,6847$$

se obtiene el área buscada

$$P[0,707] = 0,683$$

Por lo tanto, en el 68,3% de los casos se obtendrán, en promedio, errores menores que el error medio cuadrático; y en el 31,7% de los casos, errores mayores que el mismo.

B) Error medio E M

A este error se lo define por la relación

$$E M = \frac{\sum_{i=1}^n |z_i - \bar{z}|}{n} \rightarrow \frac{2}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (\text{III. 33})$$

Efectuando la integración de (III. 33) se obtiene

$$E M = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma = 0,7979 \sigma ; \quad \sigma = 1,2533 E M \quad (\text{III. 34})$$

C) Error probable E P

La siguiente ecuación define este error:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-EP}^{EP} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx , \quad (\text{III. 35})$$

o sea

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_0^{EP} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx . \quad (\text{III. 36})$$

La relación entre el error probable y el error medio cuadrático se encuentra fácilmente utilizando la tabla nº 2 del Apéndice. Basta escribir la (III. 35) en función de la variable hx .

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{EP} e^{-h^2 x^2} d(hx)$$

y buscar en la tabla el valor de (hx) al que le corresponde una probabilidad integral $P(hx) = 0,5$. El valor de $hx = hE P$ se obtiene por interpolación entre los valores tabulados:

$$P[0,47] = 0,4937$$

$$y \quad P[0,48] = 0,5027$$

Se encuentra así que $P[hx] = 0,5000$ para $hx = 0,477$. Luego será:

$$EP = \frac{0,477}{h} = 0,477 \sqrt{2} \sigma .$$

o sea

$$EP = 0,6746 \sigma \quad \sigma = 1,4616 EP \quad (\text{III. 37})$$

De (III. 34) y (III. 37) se obtiene

$$EM = 1,1662 EP \quad EP = 0,8574 EM \quad (\text{III. 38})$$

El error probable se utiliza mucho en teoría de errores y significa que, cuando se realiza un conjunto de mediciones suficientemente grande, existe igual probabilidad de cometer un error, en valor absoluto, que sea mayor o menor que el error probable.

En la figura III. 2 se representa la curva de Gauss y la posición de los tres errores definidos.

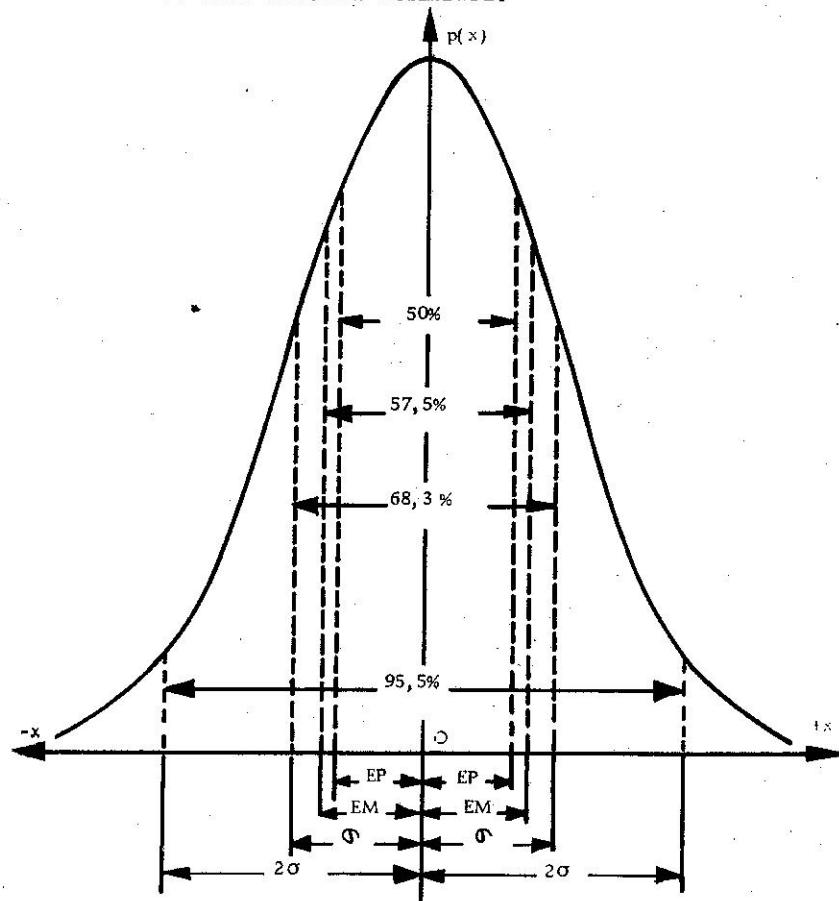


Fig. III. 2.

Se indican en la figura los porcentajes del área total de la curva de Gauss limitados por dicha curva, el eje de las abscisas y las ordenadas correspondientes a los errores, positivo y negativo: probable, medio, medio cuadrático, y al doble de éste.

D) Otros tipos de errores

Como toda magnitud se expresa por su valor más probable y un intervalo de variabilidad dentro del cual caerán mediciones sucesivas, especificando la probabilidad deseada para futuras mediciones se tienen tantos intervalos como se quiera.

Así, E_{99} designa el error correspondiente a un intervalo que comprenderá 99 de cada 100 mediciones efectuadas. E_{999} comprenderá a 999 sobre mil, etcétera. Con esta notación $E_{50} = E_P$.

La curva de Gauss permite vincular cualquier tipo de error a σ .

E) Errores relativos.

Se denomina como error relativo E' a la relación entre el error y la mejor estimación de la magnitud que se mide:

$$E' = \frac{\text{error}}{\text{valor magnitud}}$$

Como los errores pueden ser medio cuadrático, probable, etcétera, cada tipo de error tiene su valor relativo. No tiene unidad.

Muchas veces se lo multiplica por cien y se tiene el error relativo porcentual.

Su uso es muy común en la ciencia y en la técnica, donde interesa la parte de error con respecto a la magnitud que se mide.

Ejemplo III. 7.1

- a) Para la primera serie de valores del párrafo anterior $\bar{x} = 21,76$ resulta: (Ejemplo III. 6.1)

A) Error medio cuadrático

$$S_x = 0,139 \text{ div.} \approx 0,14 \text{ div.}$$

$$\therefore P[21,62 \leq \bar{x} \leq 21,90] = 0,683 .$$

B) Error medio E_M

$$EM_x = 0,7979 \cdot S_x = 0,111 \text{ div.} \approx 0,11 \text{ div.}$$

$$P[21,65 \leq \bar{x} \leq 21,87] = 0,575 .$$

C) Error probable E_P

$$EP_x = 0,6746 \cdot S_x = 0,0936 \text{ div.} \approx 0,1 \text{ div.}$$

$$P[21,66 \leq \bar{x} \leq 21,86] = 0,5 .$$

Cualquier tipo de los errores indicados puntuiza la afectación de la tercera cifra significativa de \bar{x} (los décimos) y, por lo tanto, esta cifra adolece de error (véase párrafo III. 6). Por ello generalmente se expresa el resultado, considerando el E_P ,

$$\bar{x} = 21,7 \pm 0,1 \text{ div.}$$

Existen cálculos abreviados y simplificaciones que facilitan el trabajo algebraico, cuando no se dispone de máquinas de calcular, que se fundamentan en la premisa anterior [4].

En los cálculos se recomienda arrastrar las dos últimas cifras afectadas de error y proceder a redondear las mismas al final de la operación, desechando fracciones inferiores a 0,5 y computando como una unidad las fracciones superiores a 0,6. Para el valor 0,5 es común despreciarla si la cifra anterior es par.

Por ejemplo:

$$21,87 \approx 21,9$$

$$21,62 \approx 21,6$$

$$21,65 \approx 21,6$$

$$0,575 \approx 0,58$$

Ejercicios III. 7. 1

a) Se ha medido una longitud z repetidas veces, obteniéndose $\bar{z} = 40,00 \text{ cm}$ y $\sigma_z = 0,01 \text{ cm}$. Determine el valor de Δz tal que de cada cien nuevas medidas, en promedio, noventa de ellas estén comprendidas entre $\bar{z} + \Delta z$ y $\bar{z} - \Delta z$ (límites de confiabilidad del 90%). Exprese dicho límite de confiabilidad en función de σ_z .

b) Usando la tabla nº 2 del Apéndice, verifique los límites de confiabilidad de los siguientes índices de dispersión [41, pág. 174].

Índice de dispersión	Confiabilidad en %
$\sigma/2$	38,3
EP	50
d	57,6
σ	68,3
2EP	82,2
1/h	84,2
2σ	95,45
3EP	95,69
3σ	99,73
4σ	99,99

c) Indique las unidades de \bar{z} , σ , EP, h, $p(z)$ y $p(z)dz$.

d) Determine las ordenadas de la curva de Gauss para los índices de dispersión del ejercicio b).

e) Verifique algunos valores de las siguientes tablas extraídas del libro "Engineering Measurements" de B. Austin Barry, John Wiley, 1964, pág. 39.

Índice de confiabilidad	Símbolo	Valor respecto σ	Probabilidad de ocurrencia
50	EP	0,6745	1 en 2
68,3	σ	1	1 en 3
90	E90	1,6449	1 en 10
95	2σ	2	1 en 20
99,7	3σ	3	1 en 370
99,9	E999	3,29	1 en 1000

Multiplicar por dato	Incógn.	EP	σ	E90	2σ	3σ	E999
		EP	σ	E90	2σ	3σ	E999
EP	1,000	1,483	2,439	2,961	4,449	4,879	
σ	0,674	1,000	1,645	2,000	3,000	3,290	
E90	0,410	0,608	1,000	1,215	1,824	2,000	
2σ	0,337	0,500	0,822	1,000	1,500	1,645	
3σ	0,224	0,333	0,548	0,666	1,000	1,096	
E999	0,205	0,304	0,500	0,608	0,912	1,000	

III. 8. LEY DE REPRODUCCIÓN DE LA LEY DE GAUSS

Hemos visto que la función característica correspondiente a la ley normal es (II. 57)

$$\Psi_c(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{itx} dx. \quad (\text{III. 39})$$

Supongamos que se tenga la función lineal

$$y = \sum_{i=1}^s a_i z_i , \quad (\text{III. 40})$$

en la que cada z_i es una variable aleatoria gaussiana independiente, con constante de dispersión σ_i^2 . Se desea saber cuál es la curva de distribución de la variable y .

La función característica de y , por definición, será:

$$\phi_c(t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^s \prod_{i=1}^s \sigma_i^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sum_{i=1}^s \frac{z_i^2}{2\sigma_i^2}} e^{it(\sum_{i=1}^s a_i z_i)} dz_1 dz_2 \dots dz_s \right\}$$

Como cada z_i es una variable independiente

$$\phi_c(t) = \prod_{i=1}^s \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z_i^2}{2\sigma_i^2}} e^{itz_i} dz_i \right]$$

Haciendo $a_i z_i = u_i$, tenemos

$$\phi_c(t) = \prod_{i=1}^s \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi} a_i \sigma_i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u_i^2}{2(a_i \sigma_i)^2}} e^{itu_i} du_i \right]$$

Teniendo en cuenta (III. 39), se obtiene:

$$\phi_c(t) = \prod_{i=1}^s e^{-\frac{t^2(a_i \sigma_i)^2}{2}} = e^{-\frac{t^2 \sum_{i=1}^s (a_i \sigma_i)^2}{2}} = e^{-\frac{t^2 \sigma^2}{2}} . \quad (\text{III. 41})$$

Es decir, que y , (III. 40), función lineal de s variables aleatorias gaussianas independientes, es también una variable gaussiana cuya dispersión, σ^2 , se expresa:

$$\sigma^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^s (a_i \sigma_i)^2} . \quad (\text{III. 42})$$

Esta expresión permite calcular los errores en mediciones indirectas.

Teniendo en cuenta (II. 72), tenemos:

$$h_i = \frac{1}{\sqrt{2 \sigma_i^2}}$$

Por lo tanto, la constante de precisión, h' , de la variable y es:

$$\frac{1}{h'} = \sqrt{\sum_{i=1}^s \left(\frac{a_i}{h_i} \right)^2}$$

Asimismo, de acuerdo con (II. 48), la (III. 41) indica que

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^s a_i \bar{z}_i . \quad (\text{III. 43})$$

En efecto, si

$$y_i = \sum_{i=1}^s a_i z_i$$

y se han efectuado n determinaciones es, por definición:

$$y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^s a_i z_i = \sum_{i=1}^s a_i \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \right) = \sum_{i=1}^s a_i \bar{z}_i .$$

Esta propiedad de reproducción que tiene la función de Gauss es sumamente importante y es la que proporciona su gran aplicabilidad. En efecto: supongamos que una magnitud física, y , es función no lineal, continua y derivable de varias otras magnitudes independientes $x_1, x_2, x_3, \dots, x_s$, es decir,

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_s) .$$

Desarrollando esta función mediante la fórmula de Taylor,

con respecto a los valores medios de las variables x_i , tendremos:

$$y - \bar{y} = \sum_{i=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \right)_{\bar{y}} \Delta z_i . \quad (\text{III. 44})$$

Como los residuos ($y - \bar{y}$) con respecto a los correspondientes valores medios son, en general, pequeños, podemos tomar solamente, en el indicado desarrollo, los términos de primer grado. Por consiguiente, vemos que la enorme mayoría de las leyes físicas se pueden desarrollar en serie de potencias y tomar, en primera aproximación, los términos lineales. Consecuentemente, si los errores de las variables z_i son gaussianos, los errores de la variable dependiente, y , también estarán representados por una curva normal (ver párr. III. 6).

Por lo tanto, la (III. 42) puede escribirse:

$$\tilde{\sigma}_y^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \right)_{\bar{y}}^2 \tilde{\sigma}_{z_i}^2 . \quad (\text{III. 42'})$$

CONSECUENCIAS DE LA LEY DE REPRODUCCIÓN DE GAUSS

- a) Si z es una variable aleatoria gaussiana con parámetros \bar{z} y $\tilde{\sigma}_z^2$, entonces $w = az + b$ (a y b constantes, con $a \neq 0$) es también gaussiana con $\bar{w} = a\bar{z} + b$
 $\tilde{\sigma}_w^2 = a^2 \tilde{\sigma}_z^2$.

Por lo tanto, $u = \frac{z - \bar{z}}{\tilde{\sigma}_z}$ es gaussiana con valor medio cero y desviación standard unidad (que es la variable gaussiana normalizada y tabulada en la tabla n° 1).

El diámetro de una circunferencia se ha medido repetidas veces y se obtuvo $\bar{D} = 13,50$ mm $\tilde{\sigma}_D = 0,02$ mm. Por lo tanto, su longitud es $\bar{L} = \pi \bar{D}$ $\tilde{\sigma}_L = \pi \cdot \tilde{\sigma}_D$.

- b) Dada la vinculación que existe entre $\tilde{\sigma}$, EM y EP para distribuciones normales, llamando genéricamente con E a los errores usados, es

$$\tilde{\sigma}_y^2 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial z_i} \right)_{\bar{y}}^2 \tilde{\sigma}_{z_i}^2 .$$

Se han medido dos longitudes, indicando con E su error probable.

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= 8,200 \text{ cm} & E_1 &= 0,010 \text{ cm} \\ \bar{z}_2 &= 3,472 \text{ cm} & E_2 &= 0,005 \text{ cm} \end{aligned}$$

Entonces, la longitud total de ambos segmentos adosados correctamente es: $\bar{y} = 11,672$ cm y su error probable

$$\tilde{\sigma}_y = 10^{-3} \sqrt{10^2 + 5^2} = 0,011 \text{ cm.}$$

Si las variables z_i no son independientes (variables correlacionadas) véase párrafo V.2. B.

- c) Si $y = z^2$ de acuerdo con (III. 43) $\bar{y} = (\bar{z})^2$.

Pero $(\bar{z})^2 \neq (\bar{z}^2)$

Operando $\bar{z}_i^2 = (\bar{z} + \delta z_i)^2 = (\bar{z})^2 + 2\bar{z}\delta z_i + \delta z_i^2$.

Admitiendo (III. 44) $\delta z_i^2 \approx 0$ (n grandes, δz_i pequeños, ver (III. 44))

$$\therefore (\bar{z}^2) = \frac{\sum z_i^2}{2} = (\bar{z})^2 \text{ pues } \sum \delta z_i = 0 .$$

Además, $E_y = 2\bar{z}E_z$, los errores crecen tanto más cuanto mayor es el exponente de la variable.

Los lados de un rectángulo son

$$\begin{aligned} \bar{z}_1 &= 75,000 \text{ mm} & \tilde{\sigma}_1 &= 0,003 \text{ mm} \\ \bar{z}_2 &= 100,000 \text{ mm} & \tilde{\sigma}_2 &= 0,008 \text{ mm} \end{aligned}$$

Su área es $\bar{A} = 7500 \text{ mm}^2$

$$\tilde{\sigma}_A = \sqrt{(100 \cdot 0,008)^2 + (75 \cdot 0,003)^2} = 0,67 \text{ mm}^2$$

Obsérvese la disminución de las cifras exactas.

- d) Si $y = K \operatorname{sen} z$ es $\bar{y} = K \operatorname{sen} \bar{z}$ $\hat{\sigma}_y = K \hat{\sigma}_z \cos \bar{z}$
pero no cerca de $z = \frac{\pi}{2}$, pues como $\left[\frac{\partial y}{\partial z} \right]_{\pi/2} \approx 0$, en

el desarrollo no se pueden despreciar los términos mayores. En estos casos conviene obtener el desarrollo en serie, acotado de acuerdo con la precisión que se deseé.

- e) Si en la función que define y intervienen constantes (físicas o números irracionales) que poseen error, se debe tener en cuenta que a las mismas le es aplicable la (III. 43).

Se ha medido repetidamente el diámetro de una esfera y ha resultado $\bar{D} = 10,000 \text{ mm}$ $\hat{\sigma}_D = 0,004 \text{ mm}$

Por lo tanto, el radio $\bar{R} = 5,000 \text{ mm}$ $\hat{\sigma}_R = 0,002 \text{ mm}$

El volumen $V = \frac{4}{3} \pi R^3 \therefore \bar{V} = \frac{4}{3} \pi \bar{R}^3$

pero

$$E_V^2 = \left(\frac{4}{3} \bar{R}^3 \right)^2 E_{\pi}^2 + \left(\frac{4}{3} \pi 3 \bar{R}^2 \right)^2 E_R^2$$

$$\frac{4}{3} \bar{R}^3 = \frac{500,000}{3}$$

$$\frac{4}{3} \pi 3 \bar{R}^2 = 100,000 \pi .$$

Como $E_R^2 = \hat{\sigma}_R^2 = 4 \cdot 10^{-6}$ el segundo sumando no es superior a 0,4; por lo tanto, conviene que el primer sumando no sea superior a 0,01, por ejemplo, para que no tenga influencia mayor en E_V . Luego

$$\left(\frac{500,000}{3} \right)^2 E_{\pi}^2 = 0,01 ,$$

o sea $E_{\pi} = \hat{\sigma}_{\pi} = 0,0006$ debe tomarse π con 4 cifras.

Finalmente,

$$\bar{V} = \frac{4}{3} 3,1416 \cdot 5^3 = 523,6 \text{ mm}^3$$

$$\hat{\sigma}_V = 4\pi \bar{R}^2 \hat{\sigma}_R = 0,6 \text{ mm}^3 .$$

- f) Si el número de observaciones de cada magnitud z_i es el mismo puede calcularse \bar{y} y $\hat{\sigma}_y^2$ mediante la variable $y_i = f(z_{1i}, z_{2i}, \dots, z_{si})$, la cual se considerará como variable única aplicando

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{s} \quad \hat{\sigma}_y^2 = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1}} .$$

Invitamos al lector a deducir esta conclusión partiendo de (III. 42) y (III. 43) y recordando que la y admite tomar los dos primeros términos del desarrollo de Taylor (III. 44), como ocurre en casi todas las leyes físicas que se utilizan en mediciones.

- g) Si se designa a $E_z' = \frac{E_z}{\bar{z}}$ como error relativo, de uso conveniente para funciones donde los z_i están vinculados por productos o cocientes, o sea $y = \prod_{i=1}^n z_i$, es:

$$\bar{y} = \prod_{i=1}^n \bar{z}_i \quad (E_y')^2 = \sum_{i=1}^n E_{z_i}'^2 .$$

Ejemplo:

Se ha medido el diámetro de un círculo, obteniendo

$$\bar{D} = 10,00 \text{ cm} \quad \hat{\sigma}_D = 0,01 \text{ cm.}$$

Su superficie es

$$y = \frac{\pi D^2}{4} .$$

Como admitimos que en el intervalo ΔD puede aceptarse la (III. 44)

$$\bar{y} = \frac{\pi \bar{D}^2}{4} = 25\pi \text{ cm}^2 ; \quad \tilde{\sigma}_y^2 = \left(\frac{2\pi D}{4}\right)^2 \tilde{\sigma}_D^2 = 0,0025\pi^2 \text{ cm}^2$$

$$\tilde{\sigma}_y = 0,05\pi \text{ cm}^2 ,$$

o bien

$$E'_y = \frac{\tilde{\sigma}_y}{y} = \frac{2\pi D}{4} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_D}{\frac{\pi D^2}{4}} = 2 \cdot \frac{\tilde{\sigma}_D}{D} = 2 E'_D = 2 \frac{0,01}{10} = 0,002$$

$$\tilde{\sigma}_y = E_y = \bar{y} \cdot E'_y = 25\pi \text{ cm}^2 \cdot 0,002 = 0,05\pi \text{ cm}^2 .$$

Deduzca la expresión que da E'_y tomando logaritmos en su ecuación de definición y derive con respecto a cada variable, considerando al diferencial como medida del error.

- h) En ciertos casos la medida de una cantidad no se realiza directamente, sino que se mide un múltiplo de la misma. Siendo la imprecisión de la medida independiente de la cantidad, se obtiene una mejor aproximación en el valor buscado.

Si $\omega = az$, siendo a número natural cualquiera y z la cantidad a medir, se tiene

$$\bar{\omega} = a\bar{z} \quad y \quad \tilde{\sigma}_{\omega}^2 = a^2 \tilde{\sigma}_z^2$$

por lo que

$$\bar{z} = \frac{\bar{\omega}}{a} \quad \tilde{\sigma}_z = \frac{\tilde{\sigma}_{\omega}}{a} .$$

Por ejemplo, para determinar el tiempo de oscilación de un péndulo no se mide el que corresponde a una oscilación, sino al de un cierto número de ellas.

Con un cronómetro se han medido 10 oscilaciones obteniéndose un valor medio de 12,5 seg. La imprecisión de la medida Δ (reacción del observador) se conside-

ra no mayor de 0,2 seg. Por lo tanto, $\omega = 10 \cdot z \pm \Delta$

$$z = \frac{\omega \pm \Delta}{a} = \frac{12,5 \pm 0,2}{10} = 1,25 \pm 0,02 \text{ seg} .$$

para un periodo. Como ejercitación, mida n veces un solo periodo y compare el valor medio obtenido, con el que surge de medir 10 oscilaciones no amortiguadas.

- i) Como consecuencia de todo lo anterior se deduce que cuanto más compleja sea la función que define a y tanto mayor será el error con que se la obtenga. Los métodos más simples son los que producen los resultados más exactos, el instrumento más sencillo es el mejor. Además, el análisis de la (III. 42) indicará los valores óptimos de las magnitudes que intervienen y su máximo E_z asociado, para que el E_y sea el que se quiere. La precisión experimental, la sensibilidad de los instrumentos de medida, la variabilidad de las magnitudes que se miden, son factores que acotan E_y . Cuanto menor es el E_y esperado, tanto menores deben ser los E_z , y tanto más delicado el proceso de medida (véase párrafo III. 15).

Ejemplo III. 8. 1. 1

Determinación de la densidad de un cuerpo geométrico, cilindro circular.

$$\delta = \frac{m}{\frac{\pi D^2}{4} \cdot h} .$$

De diez medidas efectuadas en cada magnitud resultó

$$\bar{m} = 159,82 \text{ g}$$

$$\tilde{\sigma}_m = 0,01 \text{ g}$$

$$\bar{D} = 1,72 \text{ cm}$$

$$\tilde{\sigma}_D = 0,01 \text{ cm}$$

$$\bar{h} = 8,20 \text{ cm}$$

$$\tilde{\sigma}_h = 0,01 \text{ cm}$$

De la ecuación de definición (véase consecuencia g)

$$E_g^! = E_m^! + 2E_D^! + E_h^! ,$$

siendo

$$E_m^! = \frac{0,01}{159,82} \approx 0,00007$$

$$2E_D^! = 2 \frac{0,01}{1,72} \approx 0,012$$

$$E_h^! = \frac{0,01}{8,20} \approx 0,0012$$

$$E_g^! = 0,013 < 0,02$$

Se deduce: 1) para disminuir E_g se debe disminuir E_D (cambiar instrumento de medida); 2) E_m es infútilmente reducido (asegurando el gramo es suficiente). Para mejorar la estimación no debe mejorarse individualmente cada magnitud; el mayor de los E_z fija la cota de E_y .

Ejercicios III. 8. 1

a) Una constante de radiación está dada por la fórmula

$$\alpha = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2}$$

El valor de las constantes, con su E_P , es:

$$k = \text{cte Boltzmann} = 1,38049 \cdot 10^{-16} (1 \pm 0,00005) \frac{\text{erg}}{\text{molec.}^\circ \text{K}}$$

$$h = \text{cte de Planck} = 6,6254 \cdot 10^{-27} (1 \pm 0,0002) \text{ erg seg}$$

$$c = \text{veloc. de la luz en vacío} = 2,997928 \cdot 10^{10} (1 \pm 0,000004) \frac{\text{cm}}{\text{seg}}$$

$$\pi = 3,141592653589793238462643 (1 \pm 10^{-25}) .$$

Calcule $\bar{\alpha}$ y E_P indicando el número de cifras signifi-

cativas, y qué constante la afecta más.

2) Con qué precisión habría que medir el diámetro de una esfera para que E_P sea inferior a un micrón cúbico, en los casos

a) $V \approx 100 \text{ mm}^3$

b) $V = 0,1 \text{ mm}^3$

III. 9. ERROR CUADRÁTICO DE LA MEDIA

La relación (III. 42), que determina la constante de dispersión de una función lineal de variables gaussianas cuyas dispersiones son conocidas, nos permite determinar la constante de dispersión de la media de varias observaciones, cuando se supone conocida, e igual a σ , la constante de dispersión de cada medida. Es decir, que comparando la relación que define la media

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n}$$

con (III. 40), vemos que en este caso:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = \frac{1}{n}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta (III. 42)

$$\sigma_{\bar{z}} = \sqrt{\frac{n \sigma^2}{n^2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{III. 45})$$

Recordando la relación (III. 32), que determina cuál es la estimación más probable de la dispersión, a partir de n mediciones, tenemos:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}{n}}$$

Por lo tanto,

$$\sigma_{\bar{z}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}{n}} \quad (\text{III. 46})$$

Si determinamos las correspondientes constantes de precisión, tendremos (III. 72) :

$$h^2 = \frac{1}{2 \sigma^2} \quad \text{y} \quad h_{\bar{z}}^2 = \frac{1}{2 \sigma_{\bar{z}}^2},$$

las que con (III. 45) dan:

$$h_{\bar{z}} = \frac{h}{\sqrt{n}}, \quad (\text{III. 47})$$

y también

$$E.P.\bar{z} = \frac{E.P.}{\sqrt{n}}. \quad (\text{III. 48})$$

Al valor $\sigma_{\bar{z}}$ muchas veces se lo denomina "error standard del valor medio". La expresión (III. 48) es la que expresa el E.P. de los valores medios de las constantes físicas.

Ejemplo III. 9. 1

Del ejemplo III. 6. 1

$$\bar{\alpha} = 21,76$$

$$S_{\alpha} \approx \sigma_{\alpha} = 0,14 \text{ div.}$$

De 25 nuevas observaciones que se efectúen, en promedio $25.0,68 = 17$ de ellas caerán en el intervalo $\bar{\alpha} \pm \sigma_{\bar{\alpha}}$.

Pero

$$\bar{\alpha} = 21,76 \quad S_{\bar{\alpha}} \approx \sigma_{\bar{\alpha}} = \frac{\sigma_{\alpha}}{\sqrt{n}} = \frac{0,14}{\sqrt{25}} \approx 0,03.$$

De cien conjuntos de 25 observaciones cada uno, en promedio, 68 de ellos tendrán valores medios que caerán en el intervalo $\bar{\alpha} \pm \sigma_{\bar{\alpha}} = 21,76 \pm 0,03$.

Ejercicios III. 9. 1

- Calcúlese $\sigma_{\bar{z}}$ de las medidas efectuadas en el ejercicio

b) del párrafo 6 .

2) ¿ Cuántas mediciones más tendría que efectuar para reducir $\sigma_{\bar{z}}$ en un 20 % ?

III. 10. RELACIÓN ENTRE LA DISPERSIÓN DE LOS RESIDUOS Y LA DE LOS ERRORES

Por lo que hemos explicado precedentemente, la media de un conjunto de medidas es una variable gaussiana cuya dispersión viene dada por (III. 32). Es decir, que si en iguales condiciones tomamos s conjuntos diferentes de n medidas cada uno, obtendremos que los correspondientes valores de las medias, o sea \bar{z}_j , con $j = 1, 2, \dots, s$, no serán todos ellos iguales, sino que estarán distribuidos en una curva de Gauss. La media m_1 de esta curva de Gauss consideraremos que representa el "valor real" de la magnitud que se mide.

Los errores de cada medida z_j ($j = 1, 2, \dots, s$; $i = 1, 2, \dots, n$) indicarán la discrepancia de ésta con respecto al "valor verdadero", de acuerdo con la definición dada precedentemente. Llamaremos residuos a las diferencias de cada medida z_j y la media del conjunto j correspondiente de medidas (\bar{z}_j) . Dado un conjunto de n medidas se desea saber cómo se puede determinar la dispersión de los errores; es decir, qué relación hay entre la dispersión de los residuos y la de los errores.

Sean las medidas z_1, z_2, \dots, z_n con su media \bar{z} . De acuerdo con la definición, los residuos r_i son:

$$r_i = \bar{z} - z_i \quad (\text{III. 48})$$

Llamando x_i a los respectivos errores, serán

$$x_i = m_1 - z_i \quad (\text{III. 49})$$

Efectuando la sumatoria de x_i , según (III. 49)

$$\sum_{i=1}^n x_i = n m_1 - \sum_{i=1}^n z_i = n m_1 - n \bar{z}.$$

Despejando

$$\bar{z} = m_1 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

[Compárese con (III. 31)] .

Reemplazando este valor en (III. 48) , tenemos:

$$r_i = m_1 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - z_i = x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} ,$$

o sea:

$$r_1 = \frac{n-1}{n} x_1 - \frac{1}{n} x_2 - \frac{1}{n} x_3 - \dots - \frac{1}{n} x_n .$$

Análogamente

$$r_2 = \frac{1}{n} x_1 + \frac{n-1}{n} x_2 - \frac{1}{n} x_3 - \dots - \frac{1}{n} x_n$$

$$\vdots$$

$$r_n = -\frac{1}{n} x_1 - \frac{1}{n} x_2 - \frac{1}{n} x_3 - \dots + \frac{n-1}{n} x_n .$$

Sea h el módulo de precisión de los errores y h' el módulo de precisión de los residuos; luego, sobre la base de la relación (III. 43) , que proporciona el módulo de precisión de una función lineal de errores cuyos módulos de precisión son conocidos, tenemos:

$$\frac{1}{h'^2} = \frac{1}{h^2} \left[\left(\frac{n-1}{n} \right)^2 + (n-1) \left(\frac{1}{n} \right)^2 \right] = \frac{1}{h^2} \frac{n-1}{n}$$

El módulo de precisión de los errores es, pues,

$$h = h' \sqrt{\frac{n-1}{n}} . \quad (\text{III. 50})$$

La constante de dispersión de los errores, σ , en función

de la constante de dispersión de los residuos, σ' , se obtiene de (III. 50) y (II. 72) , y vale:

$$\sigma = \sigma' \sqrt{\frac{n}{n-1}} . \quad (\text{III. 51})$$

Sustituyendo σ' por su valor dado en (III. 32) , resulta

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n r_i^2}{n-1}} . \quad (\text{III. 52})$$

[Compárese con (III. 32) y (III. 46)] .

Obsérvese que por definición $\sum_{i=1}^n r_i = 0$, pero $\sum_{i=1}^n x_i \neq 0$.

Por lo tanto, $r_i = \bar{z} - z_i = m_1 - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - z_i = x_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$.

Para n relativamente grande $r_i \rightarrow x_i$ y, por lo tanto, $\bar{z} \rightarrow m_1$.

Asimismo, como $\sigma_{x_i} = \sigma$ y $\sigma' = s$, resulta

$$\sigma = s \sqrt{\frac{n}{n-1}} .$$

Para $n = 10$ la diferencia entre σ y s es del 5% .

Se observa que $\sigma > s$, lo que resulta lógico teniendo en cuenta que experimentalmente los valores obtenidos están en un rango acotado, mientras que para σ el rango es de menos infinito a más infinito.

A la varianza s^2 se la denomina "varianza experimental" (de los residuos) y a σ^2 "varianza del universo de medidas" (de los errores).

Ejemplo III. 10. 1

Se ha medido un ángulo con un teodolito que permite estimar el décimo de segundo. Las 20 lecturas y sus cálculos se

agregan en la tabla siguiente [(3) pág. 38].

z_i	$x_i = z_i - \bar{z}$	x_i^2
19° 27' 36,2"	-0,42	0,1764
34,1	-2,52	6,3504
39,7	3,08	9,4864
40,1	3,48	12,1104
36,2	-0,42	0,1764
34,1	-2,52	6,3504
35,2	-1,42	2,0164
35,7	-0,92	0,8464
34,9	-1,72	2,9584
37,1	0,48	0,2304
38,0	1,38	1,9044
37,2	0,58	0,3364
37,8	1,18	1,3924
36,1	-0,52	0,2704
35,9	-0,72	0,5184
36,1	-0,52	0,2704
36,8	0,18	0,0324
37,9	1,28	1,6384
34,0	-2,62	6,8644
39,3	2,68	7,1824

$$\text{Valor medio} \quad \bar{z} = \frac{\sum z_i}{n} = 19^{\circ} 27' 36,62''$$

Verificación

$$\sum x_i = 0$$

$$EM = \frac{\sum |x_i|}{n} = 01,43''$$

Error medio

$$\text{Desviación standard experimental } s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} = 01,75''$$

$$\text{" " " del universo } \sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n-1}} = 01,79''$$

$$\text{Error probable } EP = 0,6746 \sigma = 01,21''$$

$$\text{Error standard del valor medio } \sigma_{\bar{z}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 00,40''$$

$$\text{Error probable del valor medio } EP_{\bar{z}} = 00,28''$$

Por lo tanto,

la mejor estimación de z es $19^{\circ} 27' 36,62''$

De 100 series de mediciones de 20 observaciones cada una realizadas en condiciones semejantes, en promedio

a) 68 de ellas tendrán valores medios comprendidos entre

$$\bar{z} - \sigma_{\bar{z}} = 19^{\circ} 27' 36,22'' \text{ y } \bar{z} + \sigma_{\bar{z}} = 19^{\circ} 27' 37,02''$$

b) 95 de ellas tendrán valores medios comprendidos entre

$$\bar{z} - 2 \sigma_{\bar{z}} = 19^{\circ} 27' 35,82'' \text{ y } \bar{z} + 2 \sigma_{\bar{z}} = 19^{\circ} 27' 37,42''$$

c) 99 de ellas tendrán valores medios comprendidos entre

$$\bar{z} - 3 \sigma_{\bar{z}} = 19^{\circ} 27' 35,42'' \text{ y } \bar{z} + 3 \sigma_{\bar{z}} = 19^{\circ} 27' 37,82''$$

d) 50 de ellas tendrán valores medios comprendidos entre

$$z - EP_{\bar{z}} = 19^{\circ} 27' 36,34'' \text{ y } z + EP_{\bar{z}} = 19^{\circ} 27' 36,90''$$

En cada serie de 20 observaciones, en promedio

a) 68% de ellas caerán en el intervalo

$$\bar{z} - \sigma = 19^{\circ} 27' 34,83'' \text{ y } \bar{z} + \sigma = 19^{\circ} 27' 38,41''$$

b) 99% de ellas caerán en el intervalo

$$\bar{z} - 3\sigma = 19^{\circ} 27' 31,25'' \text{ y } \bar{z} + 3\sigma = 19^{\circ} 27' 41,99''$$

Ejemplo III. 10. 2

a) El error probable del valor medio es mucho más importante que el E P de una serie de medidas (muestra del universo).

Las constantes físicas generalmente se expresan con el error probable del valor medio indicado, no con el E P de la muestra de la cual dicho valor medio ha sido obtenido.

Por ejemplo, la velocidad de la luz se expresa como (Nuovo Cimento, volumen VI, Ser. X, 1957):

$$C_0 = 2,997930 (1 \pm 0,000003) 10^8 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

significando que realizadas otras cien muestras de medición de la velocidad de la luz, en promedio, 50 de ellas darán valores medios \bar{C}_i tal que

$$2,997927 \cdot 10^8 \leq \bar{C}_i \leq 2,997933 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{seg}}$$

b) El σ de una muestra es inherente a ella, y permite determinar:

Para la muestra (valor medio \bar{z}):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (z_i - \bar{z})^2}{n-1}} ; \quad s = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \sigma = \sqrt{\frac{\sum (z_i - \bar{z})^2}{n}}$$

$$\text{E P de la muestra} = 0,6745 \sigma$$

Para el valor medio \bar{z}

$$\sigma_{\bar{z}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum (z_i - \bar{z})^2}{n(n-1)}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} ; \quad s_{\bar{z}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n-1}}{n} \sigma = \sqrt{\frac{\sum (z_i - \bar{z})^2}{n}}$$

$$\text{E P del valor medio} = 0,6745 \sigma_{\bar{z}}$$

Ejercicios III. 10. 1

1) Demuestre que

$$\text{EM}_{\text{universo}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \text{ EM}_{\text{conjunto}}$$

III. 11. CRITERIOS PARA DESECHAR OBSERVACIONES. DIFERENCIA ENTRE ERRORES Y EQUIVOCACIONES

En una serie de medidas es posible que una o varias de ellas presenten una fuerte desviación respecto al valor medio. Se presenta el inconveniente de que ella o ellas perturban mucho al valor medio y la desviación standard. Si el número de observaciones crece los valores divergentes crecen (teóricamente, para el universo de medidas existen desviaciones de $\pm \infty$). La probabilidad de obtenerlos viene dada por la conocida fórmula de Gauss. Es poco probable (solo 0,27%) que en una muestra constituida de 20 a 30 medidas, alguna de ellas tenga una desviación mayor de 3σ .

Aunque con una probabilidad pequeña, es siempre posible que dentro del azar que rige la distribución de los errores, puedan producirse algunos que sean mucho mayores que la enorme mayoría. Es muy difícil poder dar una regla que permita determinar cuándo un error muy grande es el resultado del azar, es decir, cuándo es posible considerarlo dentro de los errores azarosos o accidentales, o cuándo es el resultado de una equivocación. Es posible que el observador cometa una equivocación en la lectura de una medición o en el registro de la misma. Estas equivocaciones falsearían indebidamente el cómputo de los errores; pero también se podrían obtener resultados falsos de los errores desecharlo alguna o algunas mediciones por el solo hecho de discrepar mucho con respecto a la mayoría. Es fundamental distinguir a las posibles equivocaciones de los errores azarosos o accidentales.

Un criterio para desechar las mediciones que sean quizás debidas a equivocaciones puede ser el siguiente:

Se fija "a priori" cotas para la variabilidad de los errores accidentales o azarosos, considerando que aquellas mediciones que caigan fuera del correspondiente intervalo son debidas a equivocaciones y, por consiguiente, desecharables. Por ejemplo, si se decide rechazar todas las medidas cuya probabilidad de ocurrencias sea igual o inferior al 1%, entonces se debe cumplir, siendo $t = \frac{x}{\sigma}$ (fig. III. 3) :

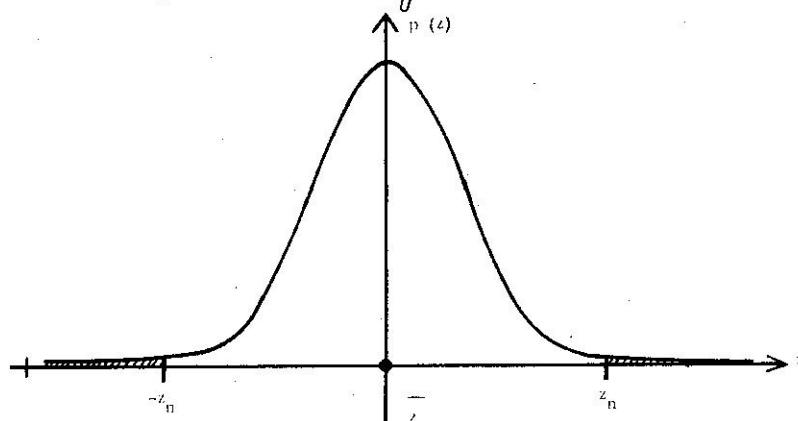


Fig. III. 3.

Curva de Gauss representando los valores para los cuales $P[|z| \geq z_n] = 0.01$

$$\int_{-\infty}^{z_n} p(x) dx + \int_{z_n}^{\infty} p(z) dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_n}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq 0.01. \quad (\text{III. 53})$$

De la tabla nº 2 surge que $t_n = 2,576$, o sea

$$z_n \geq 2,576 \sigma$$

Por lo tanto, todos los z_i de $|z_i - \bar{z}| > 2,576 \sigma$ pueden ser desecharados de acuerdo con el criterio indicado.

Si se fija, en cambio, $|z_i - \bar{z}| > 2 \sigma$, se desecharán valores cuya probabilidad de ocurrencia es del 4,55%.

Generalmente se considera que una medición es debida a una equivocación o descuido cuando su valor discrepa, en valor absoluto, de \bar{z} en más de 3σ . Esto es aceptable cuando el número total de mediciones no es muy grande ni muy pequeño, por ejemplo, de alrededor de cincuenta. Cuando el númer

ero de mediciones está comprendido entre 10 y 25, se pueden desechar las que difieran del promedio, en valor absoluto, en más de 2σ .

El criterio indicado adolece del defecto que a medida que el número de observaciones crece, no tiene en cuenta que la posibilidad de obtener fuertes desviaciones aumenta.

Por eso, el criterio más recomendable es el de Chauvenet. Éste establece que una medida debe ser desechada si su desviación $|z_i - \bar{z}|$ es tal que la probabilidad de que ocurra es inferior a $\frac{1}{2n}$, siendo n el número de medidas efectuadas. Es decir, deben ser desechadas todas las z_i superiores, en valor absoluto, a un z_{ch} tal que:

$$2 \int_{z_{ch}}^{\infty} p(z) dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_{ch}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \frac{1}{2n} \quad (\text{III. 54})$$

A medida que n crece z_{ch} crece. Si $n = \infty$ no se debe desechar ningún valor.

En la tabla nº 3 del Apéndice, se dan los valores de z_{ch} normalizados en función de n .

De dicha tabla se deduce que para $n = 10$, es $\frac{1}{2n} = 0,05$; entonces deben ser desechadas todas las z_i cuya desviación $|z_i - \bar{z}| \geq 1,96\sigma$. La probabilidad de que ocurran es del 5%. Si, en cambio, $n = 100$, es $\frac{1}{2n} = 0,005$; deben desecharse las $|z_i - \bar{z}| \geq 2,8\sigma$, cuya probabilidad es del 0,5%. Se incluyen entonces más valores.

Para aplicar este criterio se debe calcular el valor medio y la desviación standard con las medidas divergentes y luego aplicar el criterio. Eliminada una observación se seguirá así con las otras consideradas erróneas hasta que todas las medidas estén dentro del criterio de probabilidad indicado.

Si el número de observaciones eliminadas es de algún porcentaje de las n obtenidas, debe dudarse de la bondad del procedimiento de medición seguido o del observador.

Debemos aclarar que solamente deben efectuarse las eliminaciones indicadas cuando hay alguna sospecha concreta de que pueden ser debidas a equivocaciones. En caso de que sean efectivamente debidas a equivocaciones, al desecharlas se respecta el libre juego del azar de las mediciones.

Es interesante observar que el criterio de Chauvenet coincide con el criterio anteriormente indicado cuando el número de observaciones es de 150 aproximadamente; siendo más liberal para n menores.

Ejemplo III. 11. 1

De la lectura de un segmento se han obtenido los siguientes valores, en mm

17,3	17,4	17,3	17,4	17,6
17,4	17,5	17,3	17,4	17,4
17,4	17,5	17,0	17,5	17,7
17,6	17,3	17,4	17,5	17,5
17,5	17,4	17,3	17,5	17,2

Calculemos los parámetros de la distribución

$z^l = 17,4$					
	n_i	$z_i - z^l$	$n_i(z_i - z^l)$	$n_i(z_i - z^l)^2$	
17,0	1	-0,4	-0,4	0,16	
17,1	0	-0,3	0	0	
17,2	1	-0,2	-0,2	0,04	
17,3	5	-0,1	-0,5	0,05	
17,4	8	0	0	0	
17,5	7	0,1	0,7	0,07	
17,6	2	0,2	0,4	0,08	
17,7	1	0,3	0,3	0,09	
				0,49	
					$n \Delta = 0,3$
					25

$$\Delta = \frac{0,3}{25} = 0,012$$

$$\Delta^2 = 144 \cdot 10^{-6}$$

$$\bar{z} = 17,4 + 0,012 = 17,412$$

$$s^2 = \frac{0,49}{25} - 144 \cdot 10^{-6} = 0,0195$$

$$s = 0,134$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{25}{24}} s = 0,137$$

Se sospecha que el valor 17,0 corresponde a una equivocación.

a) Si admitimos el criterio de probabilidad de ocurrencias del 1%

$$2,576 \tilde{\sigma} = 0,352$$

$$|z_i - \bar{z}| = |17,0 - 17,412| = 0,412 > 0,352$$

habría que desecharlo.

b) Si el criterio es del orden del 5%

$$2 \tilde{\sigma} = 0,274$$

$$|z_i - \bar{z}| = 0,412 > 0,274$$

habría que desecharlo.

c) Si el criterio es desechar cuando $|z_i - \bar{z}| \geq 3 \tilde{\sigma}$

$$3 \tilde{\sigma} = 0,411$$

$$|z_i - \bar{z}| = 0,412 > 0,411$$

dudoso.

d) Con el criterio de Chauvenet.

De la tabla n° 3 para $n = 25$ es $\frac{x}{\tilde{\sigma}} = 2,33$

$$2,33 \tilde{\sigma} = 0,319$$

$$|z_i - \bar{z}| = 0,412 > 0,319$$

se debe desechar.

Por lo tanto, es justificado admitir que el valor 17,0 corresponde a una equivocación.

Suprimido dicho valor.

$$z = 17,4$$

	n_i	$z_i - z$	$n_i(z_i - z)$	$n_i(z_i - z)^2$
17,2	1	-0,2	-0,2	0,04
17,3	5	-0,1	-0,5	0,05
17,4	8	0	0	0
17,5	7	0,1	0,7	0,07
17,6	2	0,2	0,4	0,08
17,7	1	0,3	0,3	0,09

$$n\Delta = 0,7$$

$$\Delta = 0,028$$

$$\Delta^2 = 784 \cdot 10^{-6}$$

$$\bar{z} = 17,428$$

$$s^2 = 0,0124$$

$$s = 0,112 \quad \tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{24}{23}} s = 0,114$$

Para los valores extremos, usando el criterio de Chauvenet

$$n = 24$$

$$\frac{x}{\tilde{\sigma}} = 2,31$$

$$2,31 \tilde{\sigma} = 2,31 \cdot 0,114 = 0,264$$

$$|z_i - \bar{z}| = |17,2 - 17,428| = 0,228 \quad \text{no desechar}$$

$$|z_i - \bar{z}| = |17,7 - 17,428| = 0,272 \quad \text{desechar.}$$

$$\text{Con el criterio del } 5\% \quad 2 \tilde{\sigma} = 0,228$$

se debe desechar el valor 17,7.

Entonces resultaría

$$\bar{z} = 17,416$$

$$s^2 = 0,0094$$

$$s = 0,097$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{23}{22}} s = 0,100$$

y habría que desechar el valor 17,2. Pero juzgamos, luego de otra serie de mediciones, que los valores 17,7 y 17,2 deben ser mantenidos. (Obsérvese las variaciones en \bar{z} y $\tilde{\sigma}$).

Ejemplo III. 11. 2

De la lectura de un segmento se ha obtenido la siguiente serie de valores, en mm

17,3	17,2	17,2	17,4	17,5
17,6	17,2	17,6	17,5	17,7
17,5	17,6	17,2	17,4	17,5
17,3	17,6	17,4	17,3	17,5
17,5	17,6	17,4	17,5	17,3

Con dichos valores se obtienen las siguientes frecuencias

$$z_i = 17,2 \quad 17,3 \quad 17,4 \quad 17,5 \quad 17,6 \quad 17,7$$

$$n_i = 4 \quad 4 \quad 4 \quad 7 \quad 5 \quad 1$$

Los parámetros de la distribución son

$$\bar{z} = 17,432 \text{ mm}$$

$$s^2 = 0,0214 \quad s = 0,146$$

$$\tilde{\sigma} = 0,149 \text{ mm} \quad h = 4,75$$

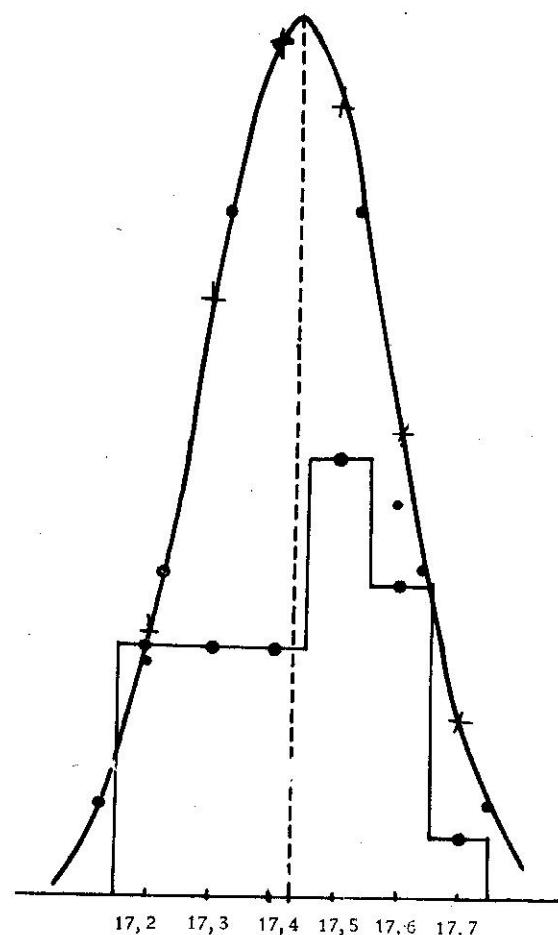
No corresponde desechar ningún valor.

Construyamos el modelo teórico de dicha distribución.

$$\bar{z} = 17,432 \quad h = 4,75 \quad n = 25$$

	n_i	$z_i - \bar{z}$	$h(z_i - \bar{z})$	y_{hx}	$n \cdot y_{hx}$
17,2	4	0,232	1,1	0,1682	4,21
17,3	4	0,132	0,627	0,3808	9,52
17,4	4	0,032	0,152	0,5512	13,78
17,5	7	0,068	0,323	0,5084	12,70
17,6	5	0,168	0,798	0,2984	7,46
17,7	1	0,268	1,27	0,1124	2,81

Su representación:



Absolutamente al azar hemos dividido la serie anterior en tres conjuntos de 7, 8 y 10 valores que arrojaron el siguiente cálculo:

z_i	n_i	z'	$z_i - z'$	$n_i(z_i - z')$	$n_i(z_i - z')^2$
Conjunto 1					
17,2	2		-0,2	-0,4	0,08
17,3	2		-0,1	-0,2	0,02
17,4	0	17,4	0	0	0
17,5	2		0,1	0,2	0,02
17,6	1		0,2	0,2	0,04
<hr/>					
7			-0,2	0,17	
<hr/>					
Conjunto 2					
17,2	2		-0,2	-0,4	0,08
17,3	0		-0,1	0	0
17,4	2	17,4	0	0	0
17,5	0		0,1	0	0
17,6	4		0,2	0,8	0,16
<hr/>					
8			0,4	0,24	
<hr/>					
Conjunto 3					
17,3	2		-0,2	-0,4	0,08
17,4	2		-0,1	-0,2	0,02
17,5	5	17,5	0	0	0
17,6	0		0,1	0	0
17,7	1		0,2	0,2	0,04
<hr/>					
10			-0,4	0,14	

Considerando los tres conjuntos como independientes, tendremos un grupo de $N = 3$.

Criterio para desechar observaciones

Por lo tanto,

$$\bar{z}_N = \frac{\sum \bar{z}_i}{N} = \frac{17,371 + 17,450 + 17,460}{3} = 17,427$$

$$s_N^2 = \frac{\sum s_i^2}{N} = \frac{10^{-4}}{3} (235 + 275 + 124) = 10^{-4} \cdot 211$$

$$s_N = 0,145$$

$$G_N = 0,178$$

Analicemos resultados.

	Serie $n = 25$	Conjuntos			Grupo $N = 3$
		$n = 7$	$n = 8$	$n = 10$	
Valor medio	\bar{z}	17,432	17,371	17,450	17,427
desviación	s	0,146	0,153	0,166	0,145
"	G	0,149	0,166	0,178	0,178
dispersión	$z - s$	17,286	17,218	17,284	17,349
valores	$z + s$	17,578	17,524	17,616	17,571
desviación de la media	$\frac{G}{\sqrt{n}}$	0,030	0,063	0,063	0,032
dispersión de la media	$\bar{z} - \frac{G}{\sqrt{n}}$	17,402			17,395
	\bar{z}	17,432			17,427
	$z + \frac{G}{\sqrt{n}}$	17,462			17,459

Se observa el libre juego estadístico en la concordancia de resultados.

Ejercicios III. 11. 1

- a) Establezcanse los límites de variabilidad de z si el criterio de probabilidad de ocurrencias es del 5%, 10% y 50%.
- b) Analicense los valores dados en la ejercitación del párrafo 6 con el criterio de Chauvenet.
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que ocurran errores superiores a $\frac{x}{\sigma} = 1,41$? ¿A qué valor de n corresponde según el criterio de Chauvenet?

III. 12. PESO DE LAS MEDIDAS

Muchos autores, al efectuar comparaciones de medidas, asignan distinta importancia a cada una de ellas (o a un conjunto de ellas), pensando que no todas las observaciones son igualmente "buenas"; dando como razón de ello que han sido obtenidas por experimentadores que no poseen la misma habilidad reconocida, o que han sido efectuadas en épocas distintas o que han sido obtenidas por procedimientos diferentes, etcétera.

Estas razones llevan a pensar que las observaciones que merecen más confianza deben tener mayor influencia en la determinación de los parámetros de la distribución. Esta "mayor confianza" la manifiestan asignándole mayor "peso" a las más, es decir, haciendo gravitar en forma distinta cada una de ellas en la determinación de los valores más probables, pues si no, como dice Parratt (*op. cit.*, pág. 118): "la media aritmética no es el mejor valor".

Pero, ¿cómo podemos asignar valores numéricos a los distintos pesos?

Muchos autores [58], [41], [4] que hablan de los pesos que corresponden a cada una de las medidas obtenidas en un proceso de medición de una determinada cantidad, no dan, sin embargo, ninguna definición operacional de cómo se debe determinar cada uno de los correspondientes pesos. En realidad, sin decirlo, le asignan un valor subjetivo a los mismos. Esto

Peso de las medidas

143

no debe admitirse en estadística, pues en esa forma se podría verificar cualquier valor.

Por lo tanto, para que los pesos asignados tengan sentido físico es necesario dar una definición operacional del mismo, es decir, indicar concretamente el procedimiento objetivo que nos permita llegar al "peso" libre de apreciaciones subjetivas.

Asimismo se indica que al "pesar" las medidas asignándoles mayor preponderancia a las más precisas tiene la ventaja de poder despreciar las menos precisas, confundiendo precisión con exactitud. Pero ¿cómo podemos determinar cuáles son las más precisas?

Worthing y Geffner [58] consideran que "algunas lecturas de una serie, debido a determinadas condiciones, pueden ser más seguras o confiables que otras. Por lo tanto, es costumbre asignarles pesos a las medidas individuales. Comúnmente tales pesos son arbitrarios, aunque no sin razón". Si no se da un procedimiento objetivo y operacional para determinar el valor numérico de los correspondientes pesos es preferible, cuando algunas medidas de una determinada serie no nos merecen suficiente confianza, desechar toda la serie e iniciar otra que se efectúe en condiciones en que podamos admitir el libre juego del azar en el valor de las distintas mediciones.

Los autores citados, al asignar el peso ω_i a cada medida x_i , indican que el mismo es proporcional al módulo de precisión. Pero se debe recordar que este módulo (o su inversa, la varianza) es atributo obtenible de un conjunto de medidas y no de una medida individual. Por lo tanto, su definición no es aplicable al caso de cada una de una serie de mediciones.

Sobre la base de una medida no es posible asignar pesos operacionalmente. Cualquier otro criterio semejante tiene una base más subjetiva que objetiva. Atribuyendo pesos sin fundamento objetivo se desvirtúa toda la teoría de errores, pues se puede obtener cualquier valor en cada caso.

Si suponemos que $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$, son los resultados de una serie de medidas de una determinada magnitud, y que, a manera de hipótesis, pudiéramos atribuirles respectivamente los pesos $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$, tendríamos que,

por definición usual de peso:

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i z_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \quad (\text{III. 55})$$

que coincide con la definición de valor medio para pesos iguales.

Admitamos, también, que cada una de las medidas responde a una distribución gaussiana y que sus respectivas constantes de precisión sean $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$. En tal caso, la probabilidad de que el resultado sea el indicado más arriba será:

$$P(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^n \frac{h_i}{\sqrt{\pi}} e^{-h_i^2 x_i^2},$$

donde $x_i = z_i - \bar{z}$.

Esta probabilidad será máxima para $\frac{\partial P}{\partial \bar{z}} = 0$, o sea

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \lg P = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\sum_i \lg \frac{h_i}{\sqrt{\pi}} - \sum_i h_i^2 x_i^2 \right] = 0,$$

de donde

$$\sum_i h_i^2 x_i = \sum_i h_i (z_i - \bar{z}) = 0,$$

y, por lo tanto,

$$\bar{z} = \frac{\sum_i h_i^2 z_i}{\sum_i h_i^2} \quad (\text{III. 56})$$

Comparando (III. 55) y (III. 56) se obtiene que los pesos ω_i son proporcionales a h_i^2 , o bien, teniendo en cuenta la relación entre la constante de precisión h_i y la varianza, son proporcionales a $\frac{1}{2 \sigma_i^2}$.

Pero para determinar los h_i necesitamos realizar una se

rie de m mediciones, efectuadas en condiciones similares. Llámemos a estas mediciones $z_{i,1}; z_{i,2}; z_{i,3}; \dots; z_{i,m}$. De esta manera obtendríamos:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m (z_{i,j} - \bar{z}_i)^2}{m}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m x_{i,j}}{m}} = \frac{1}{2 \sigma_i^2}$$

Por consiguiente, vemos claramente que no es posible asignar pesos a medidas individuales, sino al promedio de m mediciones realizadas en condiciones similares. Consecuentemente, solo podemos asignar pesos de una manera objetiva y racional cuando se desea determinar el promedio, por ejemplo, de s series de medidas, cada una de las cuales comprende m_j mediciones efectuadas en condiciones similares.

Por ejemplo, supongamos que de una determinada magnitud física, s laboratorios diferentes hayan hecho sendas determinaciones de los valores medios y de las correspondientes desviaciones standard, \bar{z}_i y σ_i , respectivamente.

Podemos determinar un nuevo valor medio $\bar{\bar{z}}$, del promedio pesado de los promedios, de la siguiente manera:

$$\bar{\bar{z}} = \frac{\sum_i \omega_i \bar{z}_i}{\sum_i \omega_i} \quad (\text{III. 57})$$

donde los ω_i vienen dados por la relación de (III. 55) y (III. 56) :

$$\frac{\omega_i}{\sum_i \omega_i} = \frac{h_i^2}{\sum_i h_i^2} = \frac{1}{\sigma_i^2} \frac{1}{\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}, \quad (\text{III. 58})$$

para el conjunto de los $i = 1, \dots, s$, laboratorios.

Para el cálculo de la desviación standard $\sigma_{\bar{\bar{z}}}$ del promedio pesado de acuerdo con lo dicho en el párrafo III. 8 y las (III. 56) y (III. 57) resulta:

$$\tilde{\sigma}_{\bar{z}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^s \omega_i^2 h_i^4}{\left(\sum_{i=1}^n h_i^2\right)^2} \quad (III.59)$$

y siendo $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{2h^2}$ para toda distribución gaussiana es:

$$h_{\bar{z}}^2 = \sum_{i=1}^s h_i^2 \quad (III.60)$$

El módulo de precisión del promedio pesado es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los módulos de precisión de los conjuntos integrantes.

Las demostraciones anteriores implican que los valores medios de sendas distribuciones siguen la ley de Gauss. Para el caso específico de un solo conjunto de observaciones, en el cual cada una debe tener igual peso, las expresiones anteriores conducen a la (III.43) y la (III.45). Si se sospecha que algunas observaciones son "mejores" que otras se debe analizar que se están violando los postulados de la teoría de errores. Si se acepta el conjunto, los criterios estadísticos indicados en el párrafo 11 del capítulo III dirán qué observaciones deben ser desechadas; es una regla operacional estadística y no subjetiva.

La teoría de errores como caso particular de la teoría de muestras implica aceptar o no el conjunto. Si se sospecha de medidas "desigualmente buenas" se deben tomar otras muestras que admitan los postulados de Gauss. Si en las nuevas muestras se presentan los mismos problemas se debe cambiar de método, o de instrumento, o de observador y hasta rever íntegramente el proceso de medida y su teoría.

Por lo tanto, la teoría de los pesos debe ser aplicada a los valores medios y a su error probable, por lo que es imprescindible obtener conjuntos estadísticos o muestras, y no valores individuales.

Ejemplo III. 12. 1

Dos manuales dan los siguientes valores medios del potencial de ionización de la molécula de H_2 .

Manual 1 $V_1 = 16,5 \pm 0,5$ volt (4 observaciones)

" 2 $V_2 = 15,4 \pm 0,1$ volt (8 observaciones)

donde 0,5 y 0,1 son los errores probables.

Para encontrar el promedio pesado calculamos

$$\tilde{\sigma}_1 \approx \frac{0,5}{0,68} = 0,736$$

$$\tilde{\sigma}_2 \approx \frac{0,1}{0,68} = 0,147$$

$$h_1^2 = \frac{1}{2\tilde{\sigma}_1^2} = \frac{1,85}{2}$$

$$h_2^2 = \frac{1}{2\tilde{\sigma}_2^2} = \frac{46,3}{2}$$

Luego

$$\bar{V} = \frac{1,85 \cdot 16,5 + 46,3 \cdot 15,4}{1,85 + 46,3} = 15,46 \text{ volt}$$

$$h_{\bar{V}}^2 = \frac{48,15}{2} \quad \therefore \quad \tilde{\sigma}_{\bar{V}} = \frac{1}{\sqrt{48,15}} = 0,144$$

por lo que se puede estimar: $E.P. \approx 0,68, \tilde{\sigma}_{\bar{V}} \approx 0,1$ volt.

Ejemplo III. 12. 2

De acuerdo con (III.57), \bar{z} no cambia si a todos los ω_i se los afecta de un mismo coeficiente, o sea tomando factores proporcionales a h_i^2 .

Conjunto	\bar{z}_i	$\sigma_{\bar{z}}$	$2h \frac{2}{z} = \frac{1}{\sigma_{\bar{z}}^2}$	Factor ω_i	$\bar{z}_i \cdot \omega_i$
A	39765	125	$6,39 \cdot 10^{-5}$	1,54	61.238,1
B	39810	80	$15,7 \cdot 10^{-5}$	3,77	150.083,7
C	39716	155	$4,16 \cdot 10^{-5}$	1,00	39.716,0
D	39791	140	$5,10 \cdot 10^{-5}$	1,23	48.942,9
\sum			$31,35 \cdot 10^{-5}$	7,54	299.980,7

$$\bar{z} = \frac{299980,7}{7,54} = 39785,2$$

$$h_{\bar{z}} = \sqrt{\frac{31,35 \cdot 10^{-5}}{2}} = 0,01253$$

$$\sigma_{\bar{z}} = 56,5$$

Por lo tanto, la mejor estimación de \bar{z} con el 68% de confiabilidad

$$39934 > \bar{z} > 39819$$

Repita lo anterior sin considerar al conjunto C y saque consecuencias.

Ejemplo III. 12. 3

Muchas veces se indica que el promedio pesado \bar{z} de dos conjuntos de \bar{z}_1 y \bar{z}_2 con n_1 y n_2 observaciones puede calcularse por

$$\bar{z} = \frac{n_1 \bar{z}_1 + n_2 \bar{z}_2}{n_1 + n_2},$$

que surge al considerar \bar{z} como media aritmética simple

del conjunto total. En nuestro caso sería

$$\bar{z} = \frac{4 \cdot 16,5 + 15,4 \cdot 8}{4 + 8} = 15,77.$$

Lo anterior no es aceptable pues no interviene la precisión de cada conjunto, anulando el concepto de peso al mezclar conjuntos que pueden ser desigualmente precisos.

Si un mismo observador, con el mismo método e igual instrumento, obtiene conjuntos de distinta precisión, antes de ponderar los conjuntos habrá que analizar si no se han modificado las hipótesis que fundamentan la teoría de Gauss (modificación de la habilidad del observador al ir adquiriendo experiencia, inconstancia de las condiciones ambientales, etcétera).

III. 13. ERROR PROBABLE DE LA DESVIACIÓN STANDARD

Sean z_1, z_2, \dots, z_n los resultados obtenidos al efectuar n mediciones de una determinada magnitud física y llamemos: $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ a los correspondientes desvíos con respecto al valor medio \bar{z} ; $P(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n | H)$ a la probabilidad de obtener la indicada sucesión de desvíos si se supone que el valor de la constante de precisión es conocido e igual a H ; $P(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n | H+\lambda)$ la probabilidad de obtener el referido conjunto de desvíos cuando la constante de precisión es $H+\lambda$; $P(H+\lambda)$ la probabilidad a priori, o sea anterior a la obtención de los residuos ϵ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), de que la constante de precisión sea $H+\lambda$; $P(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ la probabilidad de obtener el conjunto de residuos considerado cuando se desconoce el valor de la constante de precisión; $P(H+\lambda | \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$ la probabilidad de que la constante de precisión, sobre la base de que los residuos obtenidos son ϵ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), sea $H+\lambda$.

De estas definiciones podemos escribir [ver (III. 4)]

$$P(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) =$$

$$\sum P(H+\lambda) P(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n | H+\lambda). \quad (\text{III. 61})$$

la sumatoria se extiende para todos los valores posibles de λ

Sobre la base del Teorema de Bayes (párrafo III. 2. B), tenemos

$$P(H+\lambda | \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = \frac{P(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n | H+\lambda) P(H+\lambda)}{\sum_{\lambda} P(H+\lambda) \cdot P(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n | H+\lambda)} \quad (\text{III. 62})$$

Admitiendo que la probabilidad a priori, es decir, con antelación a la obtención de las mediciones, de que la constante de precisión tenga el valor $H+\lambda$, es independiente del valor de λ , es decir, que:

$$P(H+\lambda) = \text{constante} \quad (\text{III. 63})$$

podemos escribir la (III. 62)

$$P(H+\lambda | \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = C \cdot P(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n | H+\lambda) \quad (\text{III. 64})$$

siendo C una constante que luego determinaremos mediante la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(H+\lambda | \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) d\lambda = C \int_{-\infty}^{\infty} p(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n | H+\lambda) d\lambda = 1 \quad (\text{III. 65})$$

Teniendo en cuenta la curva de error

$$p(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n | H) = \frac{H^n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-H^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2)} \quad (\text{III. 66})$$

y

$$p(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n | H+\lambda) = \frac{(H+\lambda)^n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-(H+\lambda)^2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2)} \quad (\text{III. 67})$$

Sea H el valor que hace máxima la ecuación (III. 66) cuando se suponen conocidos los valores de los residuos, es decir,

$$\frac{d}{dH} \lg p(H | \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = \frac{n}{H} - 2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = 0, \quad (\text{III. 68})$$

o sea

$$H = \sqrt{\frac{n}{2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}} \quad (\text{III. 69})$$

Teniendo en cuenta (III. 67) y (III. 68), obtenemos

$$\begin{aligned} \lg p(H+\lambda | \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) &= \lg p(H | \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{dH^2} \lg p(H | \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \right] \lambda^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{III. 70})$$

Dado que $\lambda \ll H$ podemos despreciar términos de orden superior al segundo. Efectuando las operaciones indicadas y usando las relaciones (III. 64), (III. 66) y (III. 69), la (III. 70) se puede expresar así:

$$p(H+\lambda | \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = C \frac{H^n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{H^2}{H^2} \lambda^2} \quad (\text{III. 71})$$

Como los valores de H y n son conocidos, podemos escribir la ecuación (III. 71)

$$p(H+\lambda | \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = K e^{-\frac{n}{H^2} \lambda^2}, \quad (\text{III. 72})$$

donde K es una constante que se determina mediante la (III. 65), es decir:

$$K \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n}{H^2} \lambda^2} d\lambda = 1 \quad (\text{III. 73})$$

$$K = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{n}{\pi}} \quad . \quad (\text{III. 74})$$

Por consiguiente, la probabilidad de que la constante de precisión esté comprendida entre $H + \lambda$ y $H + \lambda + d\lambda$ es:

$$p(H + \lambda | \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) d\lambda = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-\frac{n}{H^2} \lambda^2} d\lambda \quad . \quad (\text{III. 75})$$

Llamando $\tilde{\sigma}_H$ a la desviación standard de la constante de precisión, de (III. 75) tenemos:

$$\tilde{\sigma}_H = \frac{H}{\sqrt{2n}} \quad , \quad (\text{III. 76})$$

y el error probable en la determinación de la constante de precisión, cuando ésta se determina por (III. 69) es

$$E P_H = 0,6745 \frac{H}{\sqrt{2n}} \quad . \quad (\text{III. 77})$$

Por un procedimiento en un todo análogo se halla fácilmente que la desviación standard

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n}} \quad . \quad (\text{III. 78})$$

esté comprendida entre $\tilde{\sigma} + x$ y $\tilde{\sigma} + x + dx$ es:

$$p(\tilde{\sigma} + x | \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) dx = \frac{1}{\tilde{\sigma}} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-\frac{n}{\tilde{\sigma}^2} x^2} dx \quad . \quad (\text{III. 79})$$

Por consiguiente, el desvío standard de la desviación standard será

$$\tilde{\sigma}_{\tilde{\sigma}} = \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{2n^2}} \quad . \quad (\text{III. 80})$$

Varianza del promedio y de la varianza y su error probable

$$E P \tilde{\sigma} = 0,6745 \tilde{\sigma}_H = 0,4769 \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

Debe tenerse en cuenta que en la (III. 76) la unidad de $\tilde{\sigma}_H$ es la de H , y en la (III. 80) la unidad de $\tilde{\sigma}_{\tilde{\sigma}}$ es la de $\tilde{\sigma}$.

Ejemplo III. 13. 1

Para los datos del ejemplo III. 10. 1 tuvimos $\tilde{\sigma} = 01,79''$.

$$\text{Por lo tanto, } \tilde{\sigma}_{\tilde{\sigma}} = \frac{01,79}{\sqrt{2,20}} = 0,282''$$

$$EP \tilde{\sigma} = 0,6745 \cdot \tilde{\sigma}_{\tilde{\sigma}} = 0,19''$$

Se deduce que los centésimos de segundo deben desecharse,

Ejercicios III. 13. 1

- 1) Demuestre la (III. 79).
- 2) Discuta las unidades de (III. 69, 74, 76, 77, 80).
- 3) ¿Qué número mínimo de observaciones deben efectuarse para que la desviación standard pueda expresarse con tres cifras significativas?

III. 14. VARIANZA DEL PROMEDIO Y DE LA VARIANZA (*)

Ya hemos visto que, dada una variable aleatoria z y su correspondiente función de distribución de probabilidad $p(z)$ se define la varianza, que es una medida de la concentración en torno del momento de primer orden m_1 , de la siguiente manera

$$\mu_2 = \tilde{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n (z_i - m_1)^2 p(z_i) \quad (\text{caso discontinuo}) \quad (\text{III. 81})$$

(*) Véase también L. Jánossy "Theory and Practice of the Evaluation of Measurement", Oxford, at The Clarendon Press, 1965.

$$\mu_2 = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (z - m_1)^2 p(z) dz \quad (\text{caso continuo}) \quad (\text{III. 82})$$

donde

$$m_1 = \sum_{i=1}^n z_i p(z_i) \quad \text{y} \quad m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} z p(z) dz .$$

También hemos visto que la dispersión alrededor de un punto cualquiera z_0 es:

$$m_2 = \sum_{i=1}^n (z_i - z_0)^2 p(z_i) \quad (\text{caso discontinuo}) \quad (\text{III. 83})$$

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (z - z_0)^2 p(z) dz \quad (\text{caso continuo}) \quad (\text{III. 84})$$

De estas ecuaciones se obtiene fácilmente que:

$$m_2 = \mu_2 + (z_0 - m_1)^2 = \sigma^2 + (z_0 - m_1)^2 . \quad (\text{III. 85})$$

Sean z_γ ($\gamma = 1, 2, 3, \dots, r$), r variables aleatorias; $P(z_1, z_2, z_3, \dots, z_r)$ la función de distribución conjunta de probabilidad; $p(z_1, z_2, z_3, \dots, z_r)$ la correspondiente densidad de probabilidad; y $F(z_1, z_2, z_3, \dots, z_r)$ una función cualquiera del indicado conjunto de variables aleatorias. Se define la expectación o esperanza matemática de la función $F(z_1, z_2, z_3, \dots, z_r)$ con respecto a $P(z_1, z_2, z_3, \dots, z_r)$ o $p(z_1, z_2, z_3, \dots, z_r)$ al valor medio de la misma, es decir:

$$\begin{aligned} E[F(z_1, z_2, z_3, \dots, z_r)] &= \\ &= \dots \int F(z_1, z_2, z_3, \dots, z_r) dP(z_1, z_2, z_3, \dots, z_r) = \\ &= \dots \int F(z_1, z_2, z_3, \dots, z_r) p(z_1, z_2, z_3, \dots, z_r) dz_1 dz_2 \dots dz_r. \end{aligned} \quad (\text{III. 86})$$

Dadas dos funciones de las variables aleatorias, $F_1(z_1, z_2, \dots, z_r)$ y $F_2(z_1, z_2, \dots, z_r)$, y dos constantes k_1 y k_2 , se satisface la relación:

$$E[k_1 F_1(z_1, z_2, \dots, z_r) + k_2 F_2(z_1, z_2, \dots, z_r)] = k_1 E[F_1] + k_2 E[F_2] . \quad (\text{III. 87})$$

Si las variables z_γ son independientes, tenemos que

$$P(z_1, z_2, \dots, z_r) = P_1(z_1) P_2(z_2) \dots P_r(z_r) .$$

Si llamamos $m_{1\gamma}$ y $\sigma_{1\gamma}^2$ al momento de primer orden y al de segundo orden centrado de la variable aleatoria z_γ , respectivamente, podemos escribir:

$$m_{1\gamma} = \int z dP_\gamma(z) \quad \text{y} \quad \sigma_{1\gamma}^2 = \int (z - m_{1\gamma})^2 dP_\gamma(z) = \int z^2 dP_\gamma(z) - m_{1\gamma}^2 \quad (\text{III. 88})$$

o sea

$$E[z_\gamma] = m_{1\gamma} \quad E[z_\gamma^2] = \int z^2 dP_\gamma(z) = \sigma_{1\gamma}^2 + m_{1\gamma}^2 . \quad (\text{III. 89})$$

Si designamos por z_1, z_2, \dots, z_r , un conjunto de resultados de medir una magnitud física o, en general, un conjunto de datos estadísticos, se expresa el valor promedio \bar{z} y el cuadrado de la dispersión o el error cuadrático medio s^2 , por

$$\bar{z} = \frac{1}{r} \sum_{\gamma=1}^r z_\gamma \quad s^2 = \frac{1}{r} \sum_{\gamma=1}^r (z_\gamma - \bar{z})^2 = \frac{1}{r} \sum_{\gamma=1}^r z_\gamma^2 - \bar{z}^2 . \quad (\text{III. 90})$$

Considerando que cada uno de los resultados z_γ son independientes, la expectación y la dispersión de cada z_γ se escriben

$$E[z_\gamma] = \int z dP_\gamma(z) = m_{1\gamma} \quad \text{y} \quad E[z_\gamma^2] = \int z^2 dP_\gamma(z) = \sigma_{1\gamma}^2 + m_{1\gamma}^2 . \quad (\text{III. 91})$$

La expectación del valor promedio (III. 90) será:

$$E[\bar{z}] = \frac{1}{r} \sum_{\gamma=1}^r E[z_\gamma] = \frac{1}{r} (m_{11} + m_{12} + \dots + m_{1r}) . \quad (\text{III. 92})$$

Es decir, que la expectación del valor medio de z_1, z_2, \dots, z_r es el promedio de los valores medios m_{1j} .

La expectación de la dispersión s^2 de (III. 90), se indica

$$\begin{aligned} E[s^2] &= \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r E[z_j^2] - E[\bar{z}^2] = \\ &= \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r (\sigma_j^2 + m_{1j}^2) - \frac{1}{r^2} E[(z_1 + z_2 + \dots + z_r)^2] . \quad (\text{III. 93}) \end{aligned}$$

Se verifica fácilmente que, dada la independencia asumida entre los distintos z_j :

$$\{ z_i z_j dP_i(z_i) dP_j(z_j) = m_{1i} \cdot m_{1j} . \quad (\text{III. 94})$$

Como

$$(z_1 + z_2 + \dots + z_r)^2 = \sum_{j=1}^r z_j^2 + 2 \sum_{i < j=1}^r z_i z_j$$

obtenemos

$$\begin{aligned} E[(z_1 + z_2 + \dots + z_r)^2] &= \sum_{j=1}^r (\sigma_j^2 + m_{1j}^2) + 2 \sum_{i < j=1}^r m_{1i} m_{1j} = \\ &= \sum_{j=1}^r \sigma_j^2 + \left(\sum_{j=1}^r m_{1j} \right)^2 . \quad (\text{III. 95}) \end{aligned}$$

De las ecuaciones (III. 93) y (III. 95)

$$E[s^2] = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sum_{j=1}^r \sigma_j^2 + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r m_{1j}^2 - \left(\frac{1}{r} \sum_{j=1}^r m_{1j} \right)^2 . \quad (\text{III. 96})$$

Llamando

$$\bar{m}_1 = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r m_{1j} \quad (\text{III. 97})$$

tenemos

$$\frac{1}{r} \sum_{j=1}^r m_{1j}^2 - \bar{m}_1^2 = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r (m_{1j} - \bar{m}_1)^2 . \quad (\text{III. 98})$$

La expectación de la dispersión, ecuación (III. 96), usando las relaciones (III. 97) y (III. 98), se expresa

$$E[s^2] = \frac{r-1}{r} \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r \sigma_j^2 + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r (m_{1j} - \bar{m}_1)^2 . \quad (\text{III. 99})$$

Este resultado, en palabras, dice: la expectación de la dispersión s^2 de los datos z_1, z_2, \dots, z_r es igual a $\frac{r-1}{r}$ veces el valor promedio de las correspondientes varianzas σ_j^2 más la dispersión de los valores medios m_{1j} de las distribuciones individuales $P_j(z)$. Esta relación (III. 99) puede emplearse cuando se consideran los resultados obtenidos de la medición de una cantidad física por distintos experimentadores.

Si todas las distribuciones $P_j(z)$ de las variables aleatorias $z_1, z_2, z_3, \dots, z_r$, tienen iguales valores para la expectación o valores medios y la varianza, la ecuación (III. 99) se simplifica

$$E[s^2] = \frac{r-1}{r} \sigma^2 . \quad (\text{III. 100})$$

La varianza del promedio, ecuación (III. 90), será:

$$\sigma_{\bar{z}}^2 = E[(\bar{z} - E[\bar{z}])^2] = \frac{1}{r^2} \sum_{j=1}^r \sigma_j^2 , \quad (\text{III. 101})$$

y, cuando los valores medios \bar{z}_j y las varianzas σ_j^2 no dependen de j ,

$$\sigma_{\bar{z}}^2 = \frac{\sigma^2}{r} . \quad (\text{III. 102})$$

Para determinar la varianza del promedio del conjunto de

r variables aleatorias z_j ($j = 1, 2, \dots, r$), cuando éstas dependen de una distribución general conjunta $P(z_1, z_2, \dots, z_r)$, necesitamos efectuar previamente los siguientes cálculos, los que son inmediatos teniendo presente la ecuación (III. 87) :

$$E[(z_1 + z_2 + \dots + z_r - m_{11} - m_{12} - \dots - m_{1r})^2] = \quad (\text{III. 103})$$

$$\begin{aligned} &= E\left[\sum_{j=1}^r (z_j - m_{1j})^2 + 2 \sum_{i < j=1}^r (z_i - m_{1i})(z_j - m_{1j})\right] = \\ &= \sum_{j=1}^r \sigma_j^2 + 2E\left[\sum_{i < j=1}^r (z_i - m_{1i})(z_j - m_{1j})\right] = \sum_{j=1}^r \sigma_j^2 + 2 \sum_{i < j=1}^r \mu_{ij}, \end{aligned}$$

siendo μ_{ij} la covarianza de las variables aleatorias z_i y z_j , o sea el momento de segundo orden centrado de las variables indicadas con respecto a la distribución $P_{ij}(z_i, z_j)$.

Por lo tanto, de las ecuaciones (III. 92), (III. 101) y (III. 103) tenemos

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= E\left[\left(\frac{z_1 + z_2 + \dots + z_r}{r} - \frac{m_{11} + m_{12} + \dots + m_{1r}}{r}\right)^2\right] = \\ &= \frac{1}{r^2} \sum_{j=1}^r \sigma_j^2 + \frac{2}{r^2} \sum_{i < j=1}^r \mu_{ij}. \quad (\text{III. 104}) \end{aligned}$$

Cuando las distintas variables aleatorias z_j son independientes, tenemos que $\mu_{ij} = 0$ ($i \neq j$) y la ecuación (III. 104) se reduce a la (III. 101).

Calcularemos ahora la varianza del cuadrado del error medio cuadrático, o sea del cuadrado de la dispersión del conjunto de datos, es decir, de la muestra considerada. Supondremos que la función de distribución $P_j(z)$ es la misma para cada una de las variables aleatorias y que éstas son independientes entre sí. Llamando x_j a los valores de dichas variables con respecto al valor medio m_1 , podemos escribir las siguientes relaciones

$$E[x_j] = 0 \quad E[x_j^2] = \mu_2 = \sigma^2 \quad (\text{III. 105})$$

$$E[x_j^4] = \mu_4 = \int (z - m_1)^4 dP(z) \quad (\text{III. 106})$$

$$\begin{aligned} E[x_i^2 x_j^2] &= \int \int (z_i - m_{1i})^2 (z_j - m_{1j})^2 dP(z_i) dP(z_j) = \\ &= \int (z_i - m_{1i})^2 dP(z_i) - \int (z_j - m_{1j})^2 dP(z_j) = \sigma^4 \quad (\text{III. 107}) \end{aligned}$$

dado que z_i y z_j ($i \neq j$) son variables independientes; por esta misma razón, las esperanzas matemáticas o expectaciones de los productos que contengan como factor una variable x_j a la primera potencia, serán nulas. Es decir:

$$E[x_i x_j] = 0 \quad (i \neq j) \quad ; \quad E[x_i x_j^2] = 0 \quad (i \neq j). \quad (\text{III. 108})$$

Podemos ahora calcular la varianza del cuadrado del error medio cuadrático, es decir:

$$\sigma_s^2 = E[(s^2 - E[s^2])^2] = E[s^4] - (E[s^2])^2. \quad (\text{III. 109})$$

Teniendo en cuenta la segunda de las ecuaciones (III. 90) podemos escribir:

$$s^2 = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^r x_j^2 - \frac{1}{r^2} \left(\sum_{j=1}^r x_j \right)^2 = \frac{r-1}{r^2} \sum_{j=1}^r x_j^2 - \frac{2}{r^2} \sum_{i < j=1}^r x_i x_j. \quad (\text{III. 110})$$

Recordando las relaciones (III. 108) obtenemos

$$E[s^4] = \frac{(r-1)^2}{r^4} \left\{ \sum_{j=1}^r E[x_j^4] + 2 \sum_{i < j=1}^r E[x_i^2 x_j^2] \right\} + \frac{4}{r^4} \sum_{i < j=1}^r E[x_i^2 x_j^2]. \quad (\text{III. 111})$$

El número de términos que contiene cada una de las dos últimas sumatorias es igual a $\frac{r(r-1)}{2}$, por lo tanto, sobre la base de la ecuación (III. 107), tenemos

$$E[s^4] = \frac{(r-1)^2}{r^2} \mu_4 + \left[\frac{(r-1)^3}{r^3} + 2 \frac{r-1}{r^3} \right] \sigma^4. \quad (\text{III. 112})$$

De las ecuaciones (III. 100), (III. 109) y (III. 112), se obtiene

$$\sigma_s^2 = \frac{r-1}{r^3} [(r-1)\mu_4 - (r-1)\sigma^4] \sim \frac{1}{r} (\mu_4 - \sigma^4). \quad (\text{III. 113})$$

Por consiguiente, para r distribuciones iguales con valor medio m_1 y varianza σ^2 , se tiene:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \bar{z} + \frac{\sigma}{\sqrt{r}} \\ s^2 &= \frac{r-1}{r} \sigma^2 + \sqrt{\frac{\mu_4 - \sigma^4}{r}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 114})$$

Si la distribución es gaussiana $\mu_4 = 3\sigma^4$, luego

$$s^2 = \frac{r-1}{r} \sigma^2 + \sqrt{\frac{2}{r}} \sigma^2.$$

Ejercicios III. 14. 1

- 1) Compare la (III. 92), (III. 99), (III. 100) y (III. 102) con lo dicho en el párrafo III. 8.
- 2) Discuta la (III. 101).

III. 15. PROYECTO DE EXPERIENCIAS DE MEDIDAS FÍSICAS

El problema fundamental en el proyecto de experiencia consiste en determinar el valor más probable de una magnitud y y su error E_y asociado.

En mediciones indirectas $y = f(z_1, z_2, \dots, z_s)$, midiendo los z_i ($i = 1, 2, \dots, s$) se podrá calcular y . Admitimos que la función que define a y es conocida, y que le es aplicable lo analizado en el párrafo III. 8. Si la dependencia funcional no se conoce teóricamente, o bien si las variables no son independientes, remitimos al lector al estudio del capítulo V.

El problema que nos ocupa puede tener dos enfoques: A) Dados los instrumentos que permiten medir los z_i , calcular el valor más probable de y y su error E_y . B) Se desea determinar el valor de y con un error máximo prefijado, y determinar la posibilidad y los instrumentos necesarios para alcanzar el objetivo perseguido.

En ambos casos, si la magnitud y está definida por dos o más funciones equivalentes, éstas deben ser sometidas a un análisis previo para estudiar la influencia que las z_i y sus E_i tienen en la determinación de y y su E_y , para conocer los errores máximos admisibles, para evitar precisiones superfluas, para conocer la posibilidad de la medición, etcétera. Todo esto equivale a efectuar un estudio previo de los posibles métodos de medida. Por ejemplo, para medir el equivalente calórico del trabajo y se puede utilizar la transformación de energía eléctrica en calor mediante una resistencia eléctrica sumergida en un calorímetro o transformando energía mecánica en calor, mediante la clásica experiencia de Joule, o midiendo los calores molares en la relación de Víctor Mayer, etcétera. Cada función de definición implica un método de medida, y el orden de magnitud de las variables z_i que intervienen y su posible E_z pueden ser estimados o medidos en una experiencia previa.

Decidido el método de medida y tratándose de mediciones indirectas, cada subconjunto z_i debe tener un número suficiente de observaciones que permita determinar convenientemente su valor más probable y su error. Conviene que el número de medidas de cada subconjunto sea el mismo para evitar afectación de las desviaciones standard. Si de cada z se tienen varios subconjuntos, el valor medio de la misma se calculará como "promedio pesado" de acuerdo con el párrafo III. 11; y si los mismos se han realizado en épocas diferentes, por observadores distintos, por diferentes métodos, etcétera, deben ser sometidos antes de ser incluidos en los cálculos a las pruebas de significación que analizaremos en el capítulo IV.

En el caso A), al dar los instrumentos de medida, se conocen los límites de error de las magnitudes z_i . Este límite, de acuerdo con lo expresado en el párrafo III. 6, no será me-

nor que una fracción de la menor división de la escala del instrumento. La aplicación de la (III.44) o (III.42) soluciona el problema. Muchas veces se toma el logaritmo de la ecuación de definición de $\frac{y}{z_i}$, por cuanto al diferenciar aparece la suma de términos $\frac{dz_i}{z_i} \approx \frac{\Delta z_i}{z_i}$, que no es más que el intervalo de indeterminación sobre la magnitud de la variable, o sea el error relativo E_y , que permite calcular rápidamente el E_y' [ver consecuencia g) del párrafo III.8].

El caso B) es el más interesante y el más delicado, por cuanto no siempre tiene solución. El análisis del mismo es semejante al anterior, pero deben estimarse los errores en los subconjuntos z_i para alcanzar el error E_y prefijado. Dicha estimación exige conocer la precisión posible de los instrumentos de medida, como así también los coeficientes de propagación de los errores $(\frac{\partial f}{\partial z_i})^2$ que indica la (III.42').

Esta última nos enseña que siempre $E_y > E_z$; por ello las magnitudes z_i conviene que no sean derivadas. Como las medidas más precisas son las directas (patrones de medidas), mejorando éstas pueden mejorarse todas las magnitudes derivadas. Es el gran trabajo de la metrología científica. Se exige aquí no sólo la evaluación de la (III.42'), sino un análisis crítico de los métodos de medida y la satisfacción de las hipótesis impuestas.

Por ejemplo, la determinación del equivalente mecánico del calor J° [ver Mark W. Zemansky, Heat and Thermodynamics, Mc Graw Hill, New York, 1957, pág. 64], realizado por Joule a mediados del siglo XIX, dio un valor de $4,155 \frac{\text{joule}}{\text{cal}}$ con un error porcentual relativo menor del 1%. A fines de dicho siglo, la mejora en las medidas de temperatura y del control de las pérdidas calorimétricas, permitió a Rowland obtener el valor de $4,188 \frac{\text{joule}}{\text{cal}}$ con error porcentual relativo menor de 0,2%.

Medidas posteriores, con métodos distintos, en las que debió intervenir la variación del calor específico del agua con la temperatura, la discrepancia entre el joule internacional y el joule absoluto, etcétera, permitieron a Osborne, Stimson y Gilmings en 1939, usando los "tremendos recursos" del Natio-

nal Bureau of Standards de E.E.U.U., obtener el valor más preciso, hasta el presente, de $J = 4,1858 \frac{\text{joule}}{\text{cal}}$.

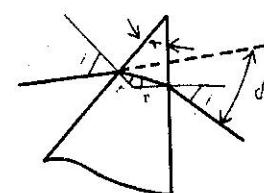
En los ejemplos que siguen trataremos de concretar los fundamentos indicados.

Ejemplo III. 15. 1

Supongamos que se desea medir el índice de refracción del cristal con que está hecho un prisma. Se conocen varios métodos y se dispone de un goniómetro que permite apreciar $5''$. Primeramente se debe estudiar cada método (las funciones que dan y) analizando la influencia de cada variable en la (III.42'), para deducir cuál de ellos es el más conveniente. Determinado el mejor método, la elección adecuada de los valores de las magnitudes que intervienen y el error medio con que resulten medidas, conducirán a la mejor estimación de y y su E_y .

Para la obtención de las ecuaciones que se usan a continuación consultar E. Perucca, **Física general y experimental**, tomo II, Luz monocromática, Ed. Labor, Barcelona, 1958, págs. 45 a 48 y págs. 402 a 412.

1) Método de la desviación mínima.



Sabemos que para δ_m (desviación mínima) se cumple que el índice de refracción de la sustancia con respecto al aire (índice de refracción relativo) es

$$n = \frac{\sin(\frac{\alpha + \delta_m}{2})}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

siendo α , el ángulo refringente del prisma.

Teniendo en cuenta la consecuencia b) del párrafo III.8

calculemos el error E_n en el índice de refracción n buscado.

$$\frac{\partial n}{\partial \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{\alpha + \delta_m}{2} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \delta_m}{2} \right) \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\delta_m}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial n}{\partial \delta_m} = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\alpha + \delta_m}{2} \right) = \frac{\cos \left(\frac{\alpha + \delta_m}{2} \right)}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

Como α y δ_m se miden con el mismo goniómetro, los errores correspondientes son iguales; es $E_\alpha = E_\delta = E$.

Por lo tanto, de (III. 42')

$$E_n^2 = \left[\left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\delta_m}{2}}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} \right)^2 + \left(\frac{\cos \frac{\alpha + \delta_m}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \right)^2 \right] \cdot E^2 \quad (1)$$

Para que E_n sea pequeño α debe ser grande, pero está limitado por el fenómeno de reflexión total, que depende de n . Generalmente, el valor máximo que se adopta es $\alpha = 60^\circ$. Como el índice de refracción a medir (u obtenido por un ensayo previo) es del orden $n = 1,5$, resultan los siguientes valores aproximados:

$$\text{Para desviación mínima } i = \frac{\alpha + \delta_m}{2} \quad r = \frac{\alpha}{2}$$

$$\operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} r = n \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = 1,5 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{3}{4}$$

$$\operatorname{sen} i = \operatorname{sen} \frac{\alpha + \delta_m}{2} = \frac{3}{4} \quad \therefore \quad \cos \frac{\alpha + \delta_m}{2} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\delta_m}{2} = \operatorname{sen} \left(i - \frac{\alpha}{2} \right) = \operatorname{sen} i \cos \frac{\alpha}{2} - \cos i \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{3}{4} \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} (3\sqrt{3} - \sqrt{7}).$$

Reemplazando en (1)

$$E_n = \frac{E}{2} \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2} \right)^2} = \sqrt{6,4 + 7} \cdot \frac{E}{4} \approx 0,92 E \approx E. \quad (2)$$

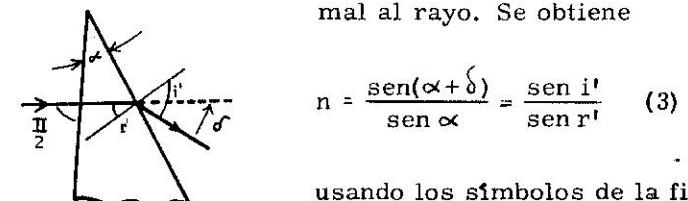
Como $E = 5'' \approx 0,000024 \text{ rad}$

$$E_n \leq 0,00003$$

El índice de refracción se podrá obtener con 4 decimales exactos. De (2) se deduce que las contribuciones de error de α y δ_m son aproximadamente iguales.

2) Método de Descartes.

La cara de incidencia es normal al rayo. Se obtiene



usando los símbolos de la figura.

Operando igual que antes

$$\frac{\partial n}{\partial \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos(\alpha + \delta) - \operatorname{sen}(\alpha + \delta) \cdot \cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = -\frac{\operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen}^2 \alpha}$$

$$\frac{\partial n}{\partial \delta} = \frac{\cos(\alpha + \delta)}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Por lo tanto,

$$E_n = E \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen}^2 \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\cos(\alpha + \delta)}{\operatorname{sen} \alpha} \right)^2}$$

Si $n = 1,5$ el ángulo límite λ es $\sin \lambda = \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$
 $\therefore \lambda \approx 42^\circ$ y, por lo tanto, α no puede ser mayor. Generalmente se toma $\alpha = 40^\circ$.

Por lo tanto, con los valores aproximados, resulta

$$\sin \alpha = \sin 40^\circ = 0,64 \quad \cos \alpha = 0,77$$

$$\sin(\alpha + \delta) = n \cdot \sin \alpha = 1,5 \cdot 0,64 = 0,96$$

$$\cos(\alpha + \delta) = \sqrt{1 - 0,96^2} = 0,28$$

Como $\delta = i' - \alpha$

$$\sin \delta = \sin(i' - \alpha) = \sin i' \cos \alpha - \cos i' \sin \alpha$$

$$\sin i' = n \sin \alpha = 1,5 \cdot 0,64 = 0,96$$

$$\therefore \sin \delta = 0,96 \cdot 0,77 - 0,28 \cdot 0,64 = 0,56$$

Reemplazando valores,

$$E_n = E \sqrt{(1,4)^2 + (0,4)^2} = 1,46 E \quad (4)$$

Comparando con el método anterior, el error E_n es 50% mayor y con contribuciones distintas como indica la (4).

Lo anterior es cierto si el ángulo de incidencia i es cero. Si se comete un ligero error di en la perpendicularidad supuesta, se puede estudiar su influencia como sigue

$$di = n dr$$

$$dr = \frac{di}{n} = \frac{di}{1,5} ;$$

esta desviación en el rayo refractado es igual a la desviación dr' en el ángulo de incidencia a la salida, motivada por el di

Como

$$\sin i' = n \sin r'$$

es

$$\cos i' \cdot di = n \cos r' dr'$$

$$\therefore \frac{\cos r'}{\cos i'} di = di$$

Con los valores anteriores

$$r \approx 40^\circ \quad \cos r' = 0,77$$

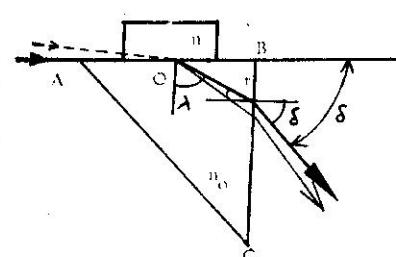
$$\cos i' = \sqrt{1 - 0,96^2} = 0,28$$

$$di' = \frac{0,77}{0,28} di = 2,7 \cdot di$$

Por lo tanto, una diferencia di con respecto a $\frac{\pi}{2}$ en el ángulo de incidencia, aproximadamente triplica el error en el ángulo i' de emergencia y, por lo tanto, puede considerarse $E\delta = 2,7 E$, o sea

$$E_n = E \sqrt{(1,4)^2 + (0,4 \cdot 2,7)^2} = 1,745 E$$

3) Refractómetro de Pulfrich.



El prisma recto ABC tiene un índice de refracción n_0 conocido con suficiente precisión. El rayo rasante AO emerge con una desviación δ . El índice de refracción de la muestra está dado por

$$n = \sqrt{n_0^2 - \sin^2 \delta}. \quad (5)$$

Operando

$$\frac{\partial n}{\partial \delta} = \frac{-2 \cdot \sin \delta \cos \delta}{2 \sqrt{n_0^2 - \sin^2 \delta}}$$

y por ser $E_{n_0} \approx 0$ resulta de (III. 42')

$$E_n = \frac{\sin \delta \cos \delta}{\sqrt{n_0^2 - \sin^2 \delta}} E \quad . \quad (6)$$

Tomando valores previos $n = 1,5$ $n_0 = 1,7$

$$\sin \lambda = \frac{n}{n_0} = 0,88 \quad \therefore \quad \lambda = 62^\circ \quad r = 28^\circ$$

$$\sin \delta = n_0 \sin r \quad \therefore \quad \delta = 52^\circ 45' .$$

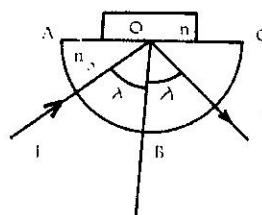
Reemplazando valores,

$$E_n = 0,32 E$$

$$\text{si } E = 0,000024 \quad E_n = 0,000008 .$$

Este método es superior al de mínima desviación.

4) Totalrefractómetro de media esfera de Abbe.



El rayo incidente IO en la semiesfera ABC lo hace con el ángulo límite λ y se refleja con el ángulo BOI' que se mide. El índice de refracción de la muestra está dado por

$$n = n_0 \sin \lambda \quad . \quad (7)$$

Operando

$$E_n = n_0 \cos \lambda \cdot E \quad . \quad (8)$$

Con los valores anteriores

$$\cos \lambda \approx \cos 62^\circ = 0,45 .$$

Reemplazando

$$E_n = 0,76 E .$$

El error en n es superior al del caso anterior.

Se concluye (sin agotar los métodos de medida) que con las hipótesis hechas el método de Pulfrich es el que da menos error. En los dos últimos métodos (llamados de ángulo límite) se elimina una medida angular pero exige conocer n_0 con suficiente precisión.

Debe completarse el estudio anterior con el análisis de facilidades experimentales en la realización de las medidas, por ejemplo, opacidad de las muestras, posibilidad de pulido de superficies, etcétera.

Ejemplo III. 15. 2

Se desea determinar el calor específico medio c de una substancia mediante el calorímetro de las mezclas. La fórmula a usar es:

$$c = \frac{m_a c_a (t_f - \theta)}{m(t_2 - t_f)} ,$$

siendo m_a = masa agua (incluyendo el equivalente en agua) ≈ 300 g

m = " de la substancia ≈ 100 g

c_a = calor específico medio del agua (entre t_f y θ) = dato.

t_f = temp. final de la mezcla $\approx 30^\circ C$

θ = " inicial del sistema calorimétrico $\approx 25^\circ C$

t_2 = " de la substancia a introducir $\approx 95^\circ C$

donde se han indicado los valores aproximados a considerar.

Se admite, como simplificación inicial, que no existen pérdidas (calorímetro adiabático). Se desea determinar c con

dos cifras exactas; por lo tanto, el error final debe ser del orden de 10^{-3} (una parte en mil). Se admite también c_a constante conocida.

Como la ecuación de definición es un producto conviene operar con errores relativos E' . Tomando logaritmos

$$\log c = \log m_a + \log c_a + \log(t_f - \theta) - \log m - \log(t_2 - t_f)$$

a) Influencia de m_a .

$$\text{Diferenciando } \frac{dc}{c} = \frac{dm_a}{m_a}$$

$$\text{Si } \frac{dc}{c} = 10^{-3} \text{ es } \frac{dm_a}{m_a} = 10^{-3} \therefore dm_a = m_a \cdot 10^{-3} = 0,3g$$

Hace falta una balanza que aprecie el décimo de gramo.

b) Influencia de m

$$dm = m \frac{dc}{c} = m \cdot 10^{-3} = 0,1g$$

La balanza anterior es utilizable.

c) Influencia de θ

$$\frac{dc}{c} = -\frac{d\theta}{t_f - \theta} .$$

$$\text{Como } t_f - \theta \approx 5^\circ C \quad |d\theta| = 0,005^\circ C .$$

Imposible de obtener con un termómetro de mercurio, aun diferencial (inercia termométrica, corrección escalas, etc.). Esto implica que el termómetro a usar debe ser estudiado minuciosamente.

d) Influencia de t_2

$$|dt_2| = \frac{dc}{c} \cdot (t_2 - t_f) = 0,065^\circ C .$$

El problema aquí es menor que en el caso anterior debido a los órdenes de magnitud que se miden.

e) Influencia de t_f .

$$\frac{dc}{c} = dt_f \left(\frac{1}{t_f - \theta} + \frac{1}{t_2 - t_f} \right)$$

$$\therefore dt_f = 10^{-3} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{65} \right)^{-1} = \frac{65}{14} \cdot 10^{-3} \approx 0,005^\circ C .$$

El problema es el mismo que con θ , cuya influencia es determinante.

Se deduce, pues, que deben extremarse los cuidados en la medición de θ y t_f .

Si se dispone de un termómetro calibrado al décimo de $^\circ C$ entonces $|d\theta| \leq 0,1^\circ C$; por lo tanto,

$$\frac{d\theta}{t_f - \theta} = \frac{0,1}{5} = 0,02 \quad dt_f \left(\frac{1}{t_f - \theta} + \frac{1}{t_2 - t_f} \right) = 0,1 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{65} \right) \approx 0,02$$

$$\frac{dt_2}{t_2 - t_f} = \frac{0,1}{65} = 0,0015$$

$$\therefore \left| \frac{dc}{c} \right| = \left| \frac{dm_a}{m_a} \right| + \left| \frac{dm}{m} \right| + \left| \frac{d\theta}{t_f - \theta} \right| + \left| dt_f \left(\frac{1}{t_f - \theta} + \frac{1}{t_2 - t_f} \right) \right| + \left| \frac{dt_2}{t_2 - t_f} \right|$$

$$\left| \frac{dc}{c} \right| = \left| \frac{dm_a}{m_a} \right| + \left| \frac{dm}{m} \right| + 0,02 + 0,02 + 0,0015 ,$$

donde se consideran los módulos de los errores relativos como cota máxima al tener en cuenta lo azaroso de los mismos.

Se deduce que el error $\frac{dc}{c}$ nunca podrá ser inferior a $5 \cdot 10^{-2}$ debido a los termómetros. La medida de t_2 no es tan determinante (con un termómetro al grado es suficiente).

La determinación de m requiere que $\frac{dm}{m} \approx 0,01$; por lo tanto, exigir precisión en m es inútil (con una balanza de Roverbal es suficiente). En estas condiciones, $\frac{dc}{c} \leq 10^{-1}$,