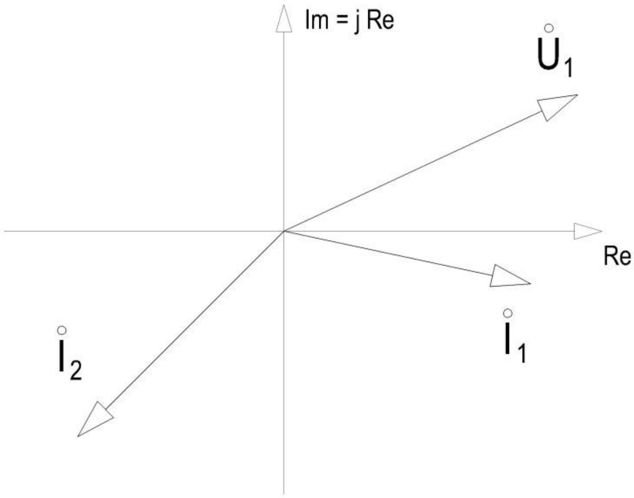
U2.09.- Dado el siguiente grupo de fasores que rotan en sentido antihorario con una velocidad constante igual a 4500 [rpm] :

a.- hallar la diferencia de fase entre $\mathbf{u}_1(t)$ e $\mathbf{i}_2(t)$ expresada en [ms]

b.- hallar el valor de la señal $\mathbf{i}_3(t) = \mathbf{i}_1(t) - \mathbf{i}_2(t)$, para $\mathbf{t}_1 = 2{,}5\ T$

c.- hallar el valor de la señal $\mathbf{p}_1(t) = \mathbf{u}_1(t) \times \mathbf{i}_1(t)$, para $\mathbf{t}_2 = 3{,}2\ T$



$$\mathring{U}_1 = 60 + j25 \quad [V] \qquad \mathring{I}_1 = 50 - j15 \quad [A] \qquad \mathring{I}_2 = -35 - j30 \quad [A]$$

RESPUESTAS: **a.-** $\Delta\,\theta = 6\ [\,ms\,]$ **b.-** $\mathbf{i}_3(\mathbf{t}_1) = 16{,}48\ [\,A\,]$

c.- $\mathbf{p}_1(\mathbf{t}_2) = 5375{,}34\ [\,V\,A\,]$

<u>SOLUCIÓN U2.09.a</u>

La fase inicial de la señal $\mathbf{u}_1(t)$ teniendo en cuenta que su fasor representativo está ubicado en el primer cuadrante viene dada por :

$$\theta u_1 = arctg\left[\frac{\operatorname{Im}\left(\mathring{U}_1\right)}{\operatorname{Re}\left(\mathring{U}_1\right)}\right] = arctg\left(\frac{25}{60}\right) = 22{,}62\,[\,^{\text{o}}\,]$$

La fase inicial de la señal $\mathbf{i}_2(t)$ teniendo en cuenta que su fasor representativo está ubicado en el tercer cuadrante viene dada por :

$$\theta i_2 = arctg\left[\frac{\mathrm{Im}\left(\mathring{I}_2\right)}{\mathrm{Re}\left(\mathring{I}_2\right)}\right] - 180 = arctg\left(\frac{-30}{-35}\right) - 180 = 40{,}60 - 180 = -139{,}40\,[\,^\circ\,]$$

La diferencia de fase angular entre las señales **u** $_1$ (t) e **i** $_2$ (t) , teniendo en cuenta que los ángulos se miden tomando como referencia el semieje **Re** (+) siendo positivos en sentido antihorario y negativos en sentido horario, viene dada por :

$$\Delta\theta = \theta u_1 - \theta i_2 = 22{,}62 - (-139{,}40) = 162{,}02\,[\,^\circ\,]$$

Para expresar la diferencia de fase en unidades tiempo se debe tener en cuenta la siguiente relación :

$$\frac{\Delta\theta\,[\,^\circ\,]}{\Delta\theta\,[\,s\,]} = \frac{360\,[\,^\circ\,]}{T\,[\,s\,]} \quad \therefore \quad \Delta\theta\,[\,s\,] = \frac{\Delta\theta\,[\,^\circ\,]}{360\,[\,^\circ\,]}\,T\,[\,s\,]$$

El período **T** , conocida la velocidad de rotación de los fasores **n** [rpm] ,viene dado por :

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega} = \frac{2\,\pi}{\frac{2\,\pi\,n}{60}} = \frac{60}{n} = \frac{60}{4500} = 0{,}0133\,[\,s\,]$$

Por lo tanto la diferencia de fase ∆**θ** [ms] , vale :

$$\Delta\theta\,[\,s\,] = \frac{\Delta\theta\,[\,^\circ\,]}{360\,[\,^\circ\,]}\,T\,[\,s\,] = \frac{162{,}02}{360}\,0{,}0133 = 0{,}006\,[\,s\,] = 6\,[\,ms\,]$$

<u>SOLUCIÓN U2.09.b</u>

La expresión de la señal **i** $_3$ (t) se obtiene a partir de hallar su fasor representativo :

$$\mathring{I}_3 = \mathring{I}_1 - \mathring{I}_2 = (50 - j15) - (-35 - j30) = 85 + j15\,[\,A\,]$$

El valor eficaz de la señal **i** $_3$ (t) viene dado por :

$$I_3 = \sqrt{\left[\mathrm{Re}\left(\mathring{I}_3\right)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}\left(\mathring{I}_3\right)\right]^2} = \sqrt{(85)^2 + (15)^2} = 86{,}3134\,[\,A\,]$$

La fase inicial de la señal **i $_3$** (t) teniendo en cuenta que su fasor representativo está ubicado en el primer cuadrante (parte real y parte imaginaria, positivas) viene dada por :

$$\theta i_3 = arctg\left[\frac{\mathrm{Im}\left(\overset{\circ}{I}_3\right)}{\mathrm{Re}\left(\overset{\circ}{I}_3\right)}\right] = arctg\left(\frac{15}{85}\right) = 10{,}01\,[\,^{\mathrm{o}}\,]$$

La expresión de la señal **i $_3$** (t) resulta entonces igual a :

$$i_3(t) = \sqrt{2}\; I_3\; sen(\omega t + \theta_3) = \sqrt{2}\; 86{,}3134\; sen\left(27\times 10^3\; t + 10{,}01^{\mathrm{o}}\right) \quad [A]$$

$$\omega = \frac{2\,\pi\, n}{60} = \frac{2\times 3{,}1416\times 4500}{60} = 471{,}24\left[\frac{rad}{s}\right] = 471{,}24\;\frac{180}{3{,}1416} = 27\times 10^3\left[\frac{^{\mathrm{o}}}{s}\right]$$

Para **t $_1$** = 2,5 T, se obtiene :

$$i_3(t_1) = \; 122{,}0644\; sen\left(27\times 10^3 \times 2{,}5\times 0{,}0133 + 10{,}01^{\mathrm{o}}\right) = 122{,}0644\; sen(907{,}76^{\mathrm{o}}) =$$
$$i_3(t_1) = \; 122{,}0644\times(-0{,}1350) = -16{,}48\,[\,A\,]$$

<u>SOLUCIÓN U2.09.c</u>

Para hallar el valor de la señal **p $_1$** (t $_2$) = **u $_1$** (t) x **i $_1$** (t), **t $_2$** = 3,2 T , resulta conveniente hallar los valores instantáneos correspondientes a las señales **u $_1$** e **i $_1$** para dicho instante de tiempo. Las expresiones de las señales de tensión y corriente son :

$$u_1(t) = \sqrt{2}\, U_1\; sen(\omega t + \theta_1) \quad [V] \qquad\qquad i_1(t) = \sqrt{2}\; I_1\; sen(\omega t + \theta_1) \quad [A]$$

El valor eficaz de la señal **u $_1$** (t) viene dado por :

$$U_1 = \sqrt{\left[\mathrm{Re}\left(\overset{\circ}{U}_1\right)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}\left(\overset{\circ}{U}_1\right)\right]^2} = \sqrt{(60)^2 + (25)^2} = 65\,[\,V\,]$$

El valor eficaz de la señal **i $_1$** (t) viene dado por :

$$I_1 = \sqrt{\left[\mathrm{Re}\left(\overset{\circ}{I}_1\right)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}\left(\overset{\circ}{I}_1\right)\right]^2} = \sqrt{(50)^2 + (-15)^2} = 52{,}20\,[\,A\,]$$

La fase inicial de la señal **i $_1$** (t) teniendo en cuenta que su fasor representativo está ubicado en el cuarto cuadrante viene dada por :

$$\theta i_1 = arctg\left[\frac{\operatorname{Im}\left(\overset{\circ}{I}_1\right)}{\operatorname{Re}\left(\overset{\circ}{I}_1\right)}\right] = arctg\left(\frac{-15}{50}\right) = -16{,}70\,[\,^{o}\,]$$

Los valores instantáneos de las señales **u $_1$** (t) e **i $_1$** (t), para **t $_2$** = 3,2 T, vienen dados por :

$$u_1(t_2) = \sqrt{2}\,U_1\,sen(\omega t + \theta_1) = 1{,}4142 \times 65\,sen\left(27 \times 10^3 \times 3{,}2 \times 0{,}0133 + 22{,}62^{o}\right) =$$

$$u_1(t_2) = 91{,}9230\,sen\left(1171{,}74^{o}\right) = 91{,}8806\ [V]$$

$$i_1(t) = \sqrt{2}\,I_1\,sen(\omega t + \theta_1) = 1{,}4142 \times 52{,}20\,sen\left(27 \times 10^3 \times 3{,}2 \times 0{,}0133 - 16{,}70^{o}\right) =$$

$$i_1(t) = 73{,}8212\,sen\left(1132{,}42^{o}\right) = 58{,}5035\,[A]$$

El valor de la señal **p $_1$** (t $_2$) = **u $_1$** (t) x **i $_1$** (t), **t $_2$** = 3,2 T , resulta entonces igual a :

$$p_1(t_2) = u_1(t_2)\,i_1(t_2) = 91{,}8806 \times 58{,}5035 = 5375{,}34\,[VA]$$