Índice de temas de la Unidad 2

2-1.1.- Concepto de señal y clasificación

Se denomina **señal eléctrica** a toda función matemática de la forma ***u = f (t)*** *ó* ***i = f (t)*** (donde **u**, es una tensión eléctrica e, **i** es una intensidad de corriente eléctrica) que pueda obtenerse prácticamente utilizando aparatos y/o dispositivos eléctricos diseñados a tal fin.Por ejemplo :

$u = 150 + 230\ sen\left(314t - 15^{o} \right)$, es una señal porque es posible diseñar generadores de tensión que respondan a la relación ***u = f [sen (t)]***

$u = 150 + 230\ tg\left(314t - 15^{o} \right)$, NO es una señal porque no se puede diseñar un aparato eléctrico que genere una tensión del tipo ***u = f [tg (t)]***

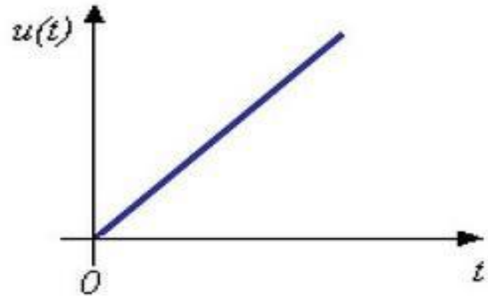
Para comprobar que un dado aparato (o dispositivo) eléctrico produce la señal conforme al diseño correspondiente, se requiere utilizar instrumentos especiales que permiten obtener información acerca de la señal.Dichos instrumentos son, básicamente, el ***osciloscopio*** y el ***analizador de señal***.

Los ***osciloscopios*** *se diferencian de los* ***analizadores de señal*** *, en que los primeros muestran la forma de la señal (* ***forma de onda*** *) en una pantalla, mientras que los analizadores sólo brindan datos de la señal.Existen dos tipos de osciloscopio : analógico y digital.El osciloscopio analógico permite observar la forma de onda de una dada señal en forma directa, mientras que el osciloscopio digital realiza una observación indirecta (la forma de onda de la señal se obtiene a partir de procesar numéricamente los valores medidos).Los osciloscopios digitales permiten el análisis completo de una dada señal mediante procesos de cálculo automáticos, mientras que en los osciloscopios analógicos dicho análisis se lleva a cabo a partir de los valores medidos observando la pantalla.*

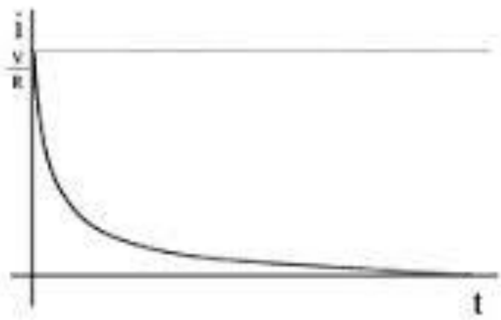
Las señales se clasifican según su ley de variación en función del tiempo en : **señal constante y señal variable**.
Una señal es ***constante*** cuando su *valor* ***no se modifica durante el intervalo de observación***.Por ejemplo, sea una batería para automóvil cuya diferencia de potencial entre bornes se mantendrá constante (si no está en uso) durante un intervalo de observación de varios días.En éstas condiciones la señal de tensión de la batería es constante.Pero, si el intervalo se extiende a algunos meses, la tensión en bornes de dicha batería comenzará a decaer y, por lo tanto, la señal de tensión es variable.
Cuando el valor de una señal varía muy poco (menos del 0,5 %) , en el intervalo de observación, con respecto a un valor tomado como referencia, se dice que dicha señal es ***cuasi-constante***.
Las **señales variables** van cambiando de amplitud a con el transcurso del tiempo.Cada una de las amplitudes de la señal variable para un dado instante de tiempo, denominado ***fase***, recibe el nombre de ***valor instantáneo***.Las señales variables se clasifican en :

.- señal aperiódica
.- señal periódica
.- señal seudoperiódica

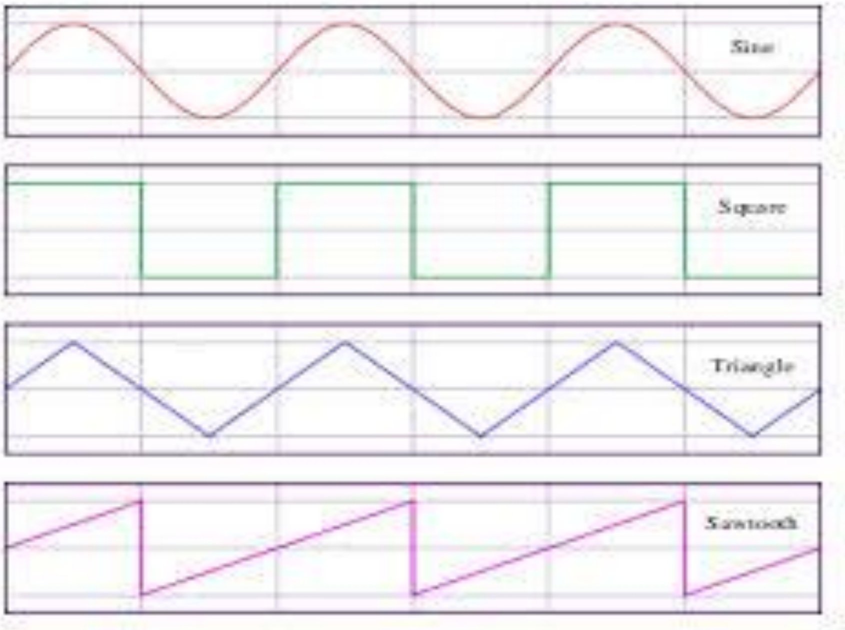
Si durante el intervalo de observación los valores instantáneos de la señal *no se repiten* (en otras palabras : *la amplitud se modifica contantemente*) la señal variable es del tipo **aperiódica**.
Generalmente las señales aperiódicas son continuamente crecientes o continuamente decrecientes.
En la siguiente figura se muestra una señal aperiódica denominada *señal rampa* que es continuamente creciente :



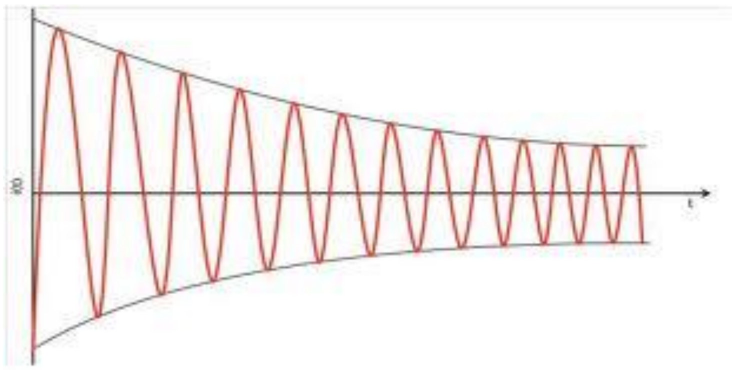
Otro ejemplo de señal variable aperiódica es el siguiente conocido como curva de descarga de un capacitor , que es del tipo continuamente decreciente :



Una señal variable es **periódica** cuando sus valores instantáneos se repiten en la misma secuencia a intervalos regulares de igual duración denominados **período**, indefinidamente (es decir, sin importar cuan largo sea el tiempo de observación).
En la siguiente figura se muestran diferentes señales periódicas a modo de ejemplo (de arriba hacia abajo : *señal senoidal* , *señal onda cuadrada* , *señal triangular* , *señal diente de sierra*)



Una señal variable es **seudoperiódica** cuando determinados puntos característicos (por ejemplo : máximo o mínimo) se repiten a intervalos regulares de tiempo pero, con distinta amplitud.En la siguiente figura se muestra un ejemplo de señal seudoperiódica en la que las amplitudes máxima y mínima decrecen continuamente :



Desde el punto de vista del estudio de los circuitos eléctricos funcionando con un flujo constante de energía nos interesan particularmente las señales constantes y las señales periódicas

---

2-1.2.- <u>Elementos característicos de las señales periódicas</u>

Toda señal periódica posee varios elementos característicos que son fundamentales para su análisis, a saber :

.- Período
.- Ciclo
.- Forma de la señal
.- Frecuencia
.- Frecuencia angular
.- Diferencia de fase
.- Simetría

El **período , T ,** es el intervalo de tiempo requerido para observar un juego completo de valores instantáneos de la señal periódica. El período se mide en *milisegundos* **[ms]** o *segundos* **[s]**
A modo de ejemplo consideremos la siguiente señal periódica :

El conjunto de valores instantáneos de la señal correspondientes a un período recibe el nombre de **ciclo**.Para la señal dada como ejemplo , el ciclo viene dado por el intervalo de valores [0,8 … - 1].
El sistema ortogonal de ejes utilizado para estudiar señales periódicas se elige siempre de modo que el **ciclo** (conjunto de valores instantáneos) esté contenido en el **eje de ordenadas** y las **fases** (valores de tiempo correspondientes a cada valor instantáneo) estén contenidas en el **eje de abcisas**.
Toda señal periódica puede considerarse, para un intervalo de observación igual a un período, como un conjunto de pares ordenados [valor instantáneo – fase].
El gráfico que se obtiene representando los pares ordenados [valor instantáneo – fase], para uno o más períodos , empleando el par de ejes ortogonales descripto, se denomina **forma de la señal** (también llamado **forma de onda**).El nombre que recibe una dada señal alude generalmente a su forma de onda.
Cuando el ciclo de una señal periódica posee valores instantáneos positivos y negativos se dice que la señal es **alterna**.
Se denomina **frecuencia** al número de ciclos que desarrolla una señal periódica en un dado intervalo de tiempo, Δ**t**, expresado en segundos.Puesto que en el lapso de un período **T**, toda señal periódica desarrolla un (1) **ciclo** , la frecuencia es igual a la inversa del período **T** expresado en *segundos* **[s].**En símbolos :

$$f = \frac{nro.\ ciclos}{\Delta t\,[\,s\,]} = \frac{1}{T\,[\,s\,]}$$

La unidad de medida de la frecuencia es el Hertz, **[Hz]**.

Dada una señal periódica cuyo período, ***T****, es igual a 20 [ms], la frecuencia de la señal vale :*

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20\,x10^{-3}} = 50\,[\,Hz\,]$$

Dada una señal periódica cuya frecuencia, ***f*** *, es igual a 60 [Hz], el período de la señal vale :*

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{60} = 0{,}016667\,[\,s\,] = 16{,}7\,[\,ms\,]$$

Cuando se trabaja con señales senoidales es necesario hacer corresponder cada fase con un ángulo debido a que las funciones trigonométricas (***seno*** o ***coseno***) sólo admiten argumentos angulares (expresados en grados sexagesimales [º] o radianes [rad]).
En otras palabras, es necesario convertir la *fase temporal* en una *fase angular*.Cada ciclo de una señal senoidal tiene una duración de **T [s]** y toda función *seno* (o *coseno*) repite sus valores a intervalos iguales a **2 π [rad]** (o **360 [º]**).
En consecuencia puede establecerse la siguiente relación proporcional :

$$\frac{fase\ temporal}{T\left[s\right]} = \frac{fase\ angular}{2\pi\left[rad\right]}$$

Simbolizando la *fase temporal* con : **t [s]** y la *fase angular* con: **α [rad]**, la relación de equivalencia entre ambas viene dada por :

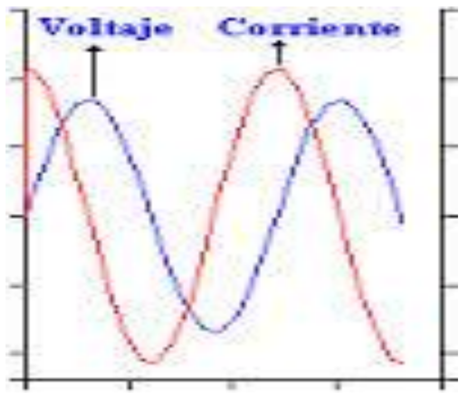
$$\alpha\left[rad\right] = \frac{2\pi\left[rad\right]}{T\left[s\right]}\, t\left[s\right] \qquad donde\ ,\ \frac{2\pi}{T} = \omega\left[\frac{rad}{s}\right]$$

El coeficiente **ω** , recibe el nombre de **frecuencia angular** o **pulsación**.Teniendo en cuenta que el período, **T** , es igual a la inversa de la frecuencia , **f** , la frecuencia angular puede también expresarse de la siguiente manera :

$$\omega = 2\,\pi\ f$$

Si una señal senoidal tiene un período de 20 [ms], su frecuencia es igual a 50 [Hz] y su pulsación es de 314 [rad / s].
Si una señal senoidal tiene una frecuencia igual a 60 [Hz], su período es de 16,7 [ms] y su pulsación es igual a 377 [rad / s]

Dadas dos señales senoidales de *igual frecuencia* puede ocurrir que para una dada fase no coincidan los valores instantáneos correspondientes a cada señal, tal como se muestra en la siguiente figura :

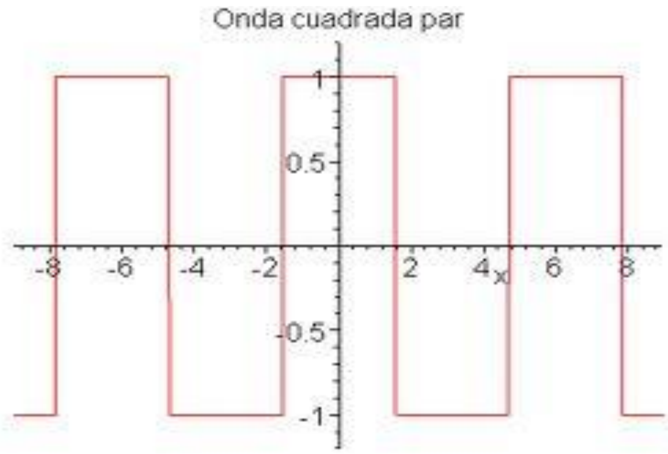


En tal caso se dice que existe una **diferencia de fase** entre las señales dadas que puede determinarse hallando el intervalo entre dos valores instantáneos determinados (dos máximos , dos mínimos).En el caso de las señales mostradas en la figura, el intervalo entre dos valores máximos es igual a ¼ de período.
La posición del origen del par de ejes ortogonales que se utilizan para graficar una señal permite definir el tipo de **simetría** de la forma de onda, elemento necesario cuando se realiza el análisis matemático de la señal considerada.Hay tres tipos de simetría :

.- una dada señal tiene **simetría par**, cuando dadas dos fases de igual valor y signo opuesto, los valores instantáneos de la señal correspondientes a dichas fases son iguales (en valor y signo), es decir :

$$u(t_1) = u(-t_1)$$

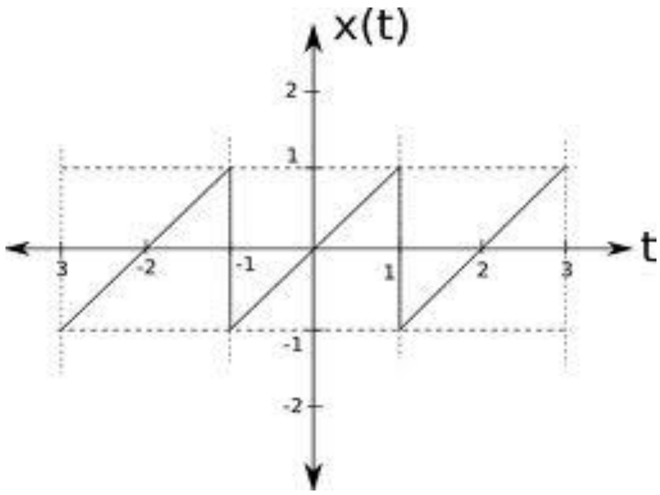
La señal onda cuadrada mostrada en la siguiente figura posee *simetría par* , porque el valor instantáneo para t = +1 es igual al valor instantáneo para t = -1.



.- una dada señal tiene **simetría impar**, cuando dadas dos fases de igual valor y signo opuesto, los valores instantáneos de la señal correspondientes a dichas fases son iguales en valor y de signo opuesto , es decir

$$u(t_1) = -u(-t_1)$$

La señal onda diente de sierra mostrada en la siguiente figura posee *simetría impar* , porque el valor instantáneo para t = 1 es igual y opuesto al valor instantáneo para t = - 1.



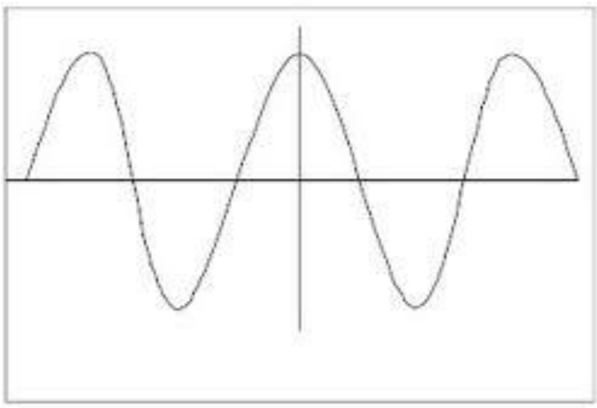
*Obsérvese que, en el ejemplo de la señal onda cuadrada, al desplazar el origen de coordenadas a la fase **t = 2**, la señal pasa a tener **simetría impar**.En el ejemplo de la señal diente de sierra, trasladando el origen de coordenadas a la fase **t = -1**, no se modifica el tipo de simetría (continúa siendo una onda **impar**).Pero si en el ejemplo de la onda diente de sierra, el origen de coordenadas se traslada a **x = -1**, la señal ya no poseerá simetría alguna.*

*Debido a ello decimos que la **simetría de onda** de una dada señal , no es una característica propia de la señal sino que viene impuesta al elegir el origen de coordenadas del par de ejes que se utiliza para dibujar la forma de la señal.*

.- una dada señal tiene **simetría de media onda**, cuando dadas dos fases con una diferencia igual a medio período, los valores instantáneos de la señal correspondientes a dichas fases son iguales en valor y de signo opuesto, es decir :

$$u\left(t_1\right) = -u\left(t_1 + \frac{T}{2}\right)$$

Observando el ejemplo de la señal onda cuadrada puede determinarse que su período es igual a **6,4 [s]**.La mitad del período es igual a **3,2 [s]**.El valor instantáneo de la señal para **t = 0,8 [s]**, vale **+ 1** , mientras que para **t = 4 [s]**, el valor instantáneo resulta igual a **- 1**.Por tal motivo la señal onda cuadrada tiene ***simetría de media onda***, además de la simetría par.Puede comprobarse que la simetría de media onda se conserva cuando el origen de coordenadas se elige de forma tal que la señal pase a tener simetría par.
La señal senoidal mostrada en la siguiente figura posee simetría par y simetría de media onda.Si se desplaza el origen de coordenadas una distancia igual a ¼ del período, la señal pasará a tener simetría impar, conservando la simetría de media onda



2-1.3.- <u>Valores característicos de las señales periódicas</u>

Las señales períodicas poseen ciertos valores característicos asociados que se utilizan a efectos de realizar cálculos y además, poseen un **significado físico**, a saber :

.- Valor pico
.- Valor pico a pico
.- Valor medio
.- Valor medio de módulo
.- Valor eficaz

El **valor pico** o **valor máximo** de una señal periódica es el mayor valor instantáneo correspondiente a un ciclo.Cuando la señal es alterna, se puede determinar un *valor pico positivo* y un *valor pico* negativo , que pueden o no ser iguales.En ciertos casos, cuando no cambia el signo de los valores instantáneos comprendidos en un ciclo, se tendrá un valor máximo y un valor mínimo.

La nomenclatura utilizada para indicar valor pico de una señal periódica cualquiera , **a = f (t)**, es la siguiente :

$$A_{\max} \qquad o \qquad \hat{A}$$

Físicamente el valor pico , en el caso de una señal alterna de corriente eléctrica, caracteriza el mayor transporte instantáneo de carga tanto en un sentido (pico positivo) como en el opuesto (pico negativo).
El **valor pico a pico** de una señal periódica viene dado por la diferencia entre el valor instantáneo máximo y el valor instantáneo mínimo correspondientes a un ciclo de la señal.La nomenclatura utilizada para indicar el valor pico a pico de una señal periódica cualquiera, **a = f (t)** , es la siguiente :

$$A_{pp} \qquad o \qquad \hat{\hat{A}}$$

El **valor medio** de una señal periódica cualquiera, **a = f (t)** , se define matemáticamente como **el promedio de los valores instantáneos comprendidos en un ciclo**, siendo su expresión de cálculo :

$$\overline{A}\,(\,o\ A_{me}\ ) = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T} a(\,t\,)\,d\,t$$

Teniendo en cuenta que, desde el punto de vista **geométrico**, la expresión de cálculo del valor medio define el **área neta** (*para el caso de señales alternas, el área neta viene dada por la diferencia de las áreas de los semiciclos positivo y negativo*) encerrada por la forma de onda de la señal y el eje de abcisas (o eje de fases) para el intervalo correspondiente a un período, **T** , se puede definir el valor medio como **la altura de un rectángulo que tiene por base un lado de longitud igual al período, T, y cuya área es igual al área neta encerrada por la forma de onda de la señal y el eje de fases, correspondiente a un ciclo**.
En los casos que la forma de onda está constituída por líneas rectas, el valor medio de la señal periódica puede hallarse fácilmente aplicando su definición geométrica.
Dada una señal periódica cualquiera de corriente , **i = f (t)** , su valor medio viene dado por :

$$\overline{I} = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T} i(\,t\,)\,d\,t = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T} \frac{d\,q}{d\,t}\,d\,t$$

de donde obtenemos :

$$\overline{I} = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T} d\,q = \frac{q_{\,neta}}{T}$$

expresión que indica que el valor medio de una señal periódica de corriente se puede interpretar, desde el punto de vista **físico**, como el de una señal constante que transporta igual **cantidad neta de carga eléctrica que la señal periódica en un intervalo igual a un período.**
En base a las definición del valor medio de una señal periódica resulta que **todas las señales periódicas alternas simétricas** (aquéllas constituídas por dos semiciclos que contienen valores instantáneos iguales y de signos opuestos como, por ejemplo una señal senoidal) **tienen valor medio nulo**.
En el caso de las señales alternas simétricas se define, matemáticamente, un **valor medio de módulo** como promedio de los valores intantáneos ***absolutos*** correspondientes a un ciclo.

Dada una señal alterna simétrica cualquiera , **a = f (t)** , su valor medio de módulo viene dado por :

$$\left|\overline{A}\right|\left(o\ A_{|me|}\right)=\frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T}\left|a(t)\right|dt$$

Teniendo en cuenta que, desde el punto de vista **geométrico**, la expresión de cálculo del valor medio de módulo define el **área total** (*para el caso de señales alternas, el área total viene dada por la suma de las áreas de los semiciclos positivo y negativo*) encerrada por la forma de onda de la señal y el eje de abcisas (o eje de fases) para el intervalo correspondiente a un período, **T** , se puede definir el valor medio de módulo como **la altura de un rectángulo que tiene por base un lado de longitud igual al período, T, y cuya área es igual al área total encerrada por la forma de onda de la señal y el eje de fases, correspondiente a un ciclo**.
Considerando una señal alterna simétrica de corriente puede interpretarse su valor medio de módulo, desde el punto de vista **físico**, como el de una ***señal constante*** que transporta igual cantidad de **carga eléctrica total (o bruta)** que la señal periódica en un intervalo igual a un período.En efecto :

$$\left|\overline{I}\right|=\frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T}\left|i(t)\right|dt=\frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T}\left|\frac{dq}{dt}\right|dt$$

$$\left|\overline{I}\right|=\frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T}\left|dq\right|=\frac{q_{total}}{T}$$

El **valor eficaz** de una señal periódica cualquiera, **a = f (t)** , se define **matemáticamente** como el **promedio cuadrático de los valores instantáneos correspondientes a un ciclo** y su expresión de cálculo es :

$$A=\sqrt{\frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T}\left[a(t)\right]^2\,dt}$$

Dada una señal periódica de corriente, **i = f (t)** , que recorre una resistencia de valor **R** , la potencia instantánea desarrollada en la misma , **p** ,viene dada por :

$$p=i^{2}\,R$$

El valor medio, **P** , de dicha potencia para un intervalo de tiempo igual a un período de la señal **i = f (t)**, resulta igual a :

$$P=\frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T}p\,dt=\frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T}\left(i^{2}\,R\right)dt=R\left(\frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T}i^{2}\,dt\right)=I^{2}\,R$$

de donde , desde el punto de vista **físico** , el valor eficaz de una señal periódica de corriente puede interpretarse como el valor de una señal constante que transporta **igual cantidad de energía por unidad de tiempo que la señal variable, en el intervalo de un período**.

Esta interpretación física del valor eficaz resulta fundamental en el análisis de circuitos eléctricos excitados con señales periódicas, cuando se consideran intervalos de tiempo en los que dichas señales no se modifican de manera alguna, estado de funcionamiento del circuito eléctrico considerado denominado régimen permanente.

En régimen permanente, el flujo de energía eléctrica en un dado circuito es constante y, en consecuencia, puede analizarse el circuito reemplazando las señales periódicas por señales constantes de valor igual al valor eficaz de aquéllas sin que se alteren los cálculos energéticos

---

2-1.4.- Factores característicos de las señales periódicas

Los denominados factores característicos de una señal periódica se definen para establecer cuán diferente es una dada señal obtenida en la práctica, respecto de la señal teórica pretendida.Los factores característicos de una señal periódica son tres, a saber :

.- factor de media de módulo, $\mathbf{F_{me}}$
.- factor de cresta, $\mathbf{F_{c}}$
.- factor de forma, $\mathbf{F_{f}}$

El **factor de media de módulo**, $\mathbf{F_{me}}$, de una dada señal periódica **a = f (t)** ,se define como el cociente entre el valor máximo y el valor medio de módulo de la señal dada; en símbolos :

$$F_{|me|} = \frac{A_{\max}}{A_{|me|}}$$

El *valor medio de módulo de una señal periódica cuadrada (o rectangular)* cualquiera *es siempre igual a la unidad,* porque $\mathbf{A_{me} = A_{max}}$.Toda señal periódica cuya *forma de onda no sea cuadrada (o rectangular)* tiene *valor medio de módulo menor a la unidad*, porque $\mathbf{A_{me} < A_{max}}$.
En consecuencia, la señal periódica cuadrada (o rectangular) es la que puede transportar la máxima carga eléctrica total (o bruta), con respecto a cualquier otra señal periódica de igual período y valor pico a pico que la señal cuadrada.
El factor de media de módulo de una señal periódica cuadrada (o rectangular) es, en consecuencia, siempre *igual a la unidad (* porque $\mathbf{A_{me} = A_{max}}$ *)*, mientras que cualquier otra señal periódica de igual período y valor pico a pico que la señal cuadrada tendrá un factor de media de módulo *mayor a la unidad (* porque $\mathbf{A_{me} < A_{max}}$).Por tal motivo *cuanto mayor sea el factor de media de módulo* de una señal periódica, *menor será su capacidad de transporte de carga eléctrica total (o bruta)* respecto de una señal cuadrada (o rectangular) de igual período y valor pico a pico que la señal periódica considerada.
El **factor de cresta**, $\mathbf{F_{c}}$, de una dada señal periódica **a = f (t)**, se define como el cociente entre el valor máximo y el valor eficaz de la señal dada; en símbolos :

$$F_{c} = \frac{A_{\max}}{A}$$

El *valor eficaz de una señal periódica cuadrada (o rectangular)* cualquiera *es siempre igual a la unidad,* porque $\mathbf{A = A_{max}}$.Toda señal periódica cuya *forma de onda no sea cuadrada (o rectangular)* tiene *valor eficaz menor a la unidad*, porque $\mathbf{A < A_{max}}$.
En consecuencia, la señal periódica cuadrada (o rectangular) es la que puede transportar la máxima energía eléctrica por unidad de tiempo, con respecto a cualquier otra señal periódica de igual período y valor pico a pico que la señal cuadrada.

El factor de cresta de una señal periódica cuadrada (o rectangular) es, en consecuencia, siempre *igual a la unidad (porque* **A = A max** *)*, mientras que cualquier otra señal periódica de igual período y valor pico a pico que la señal cuadrada tendrá un factor de cresta *mayor a la unidad (* porque **A < A max**).Por tal motivo *cuanto mayor sea el factor de cresta* de una señal periódica, *menor será su capacidad de transporte de energía eléctrica por unidad de tiempo* respecto de una señal cuadrada (o rectangular) de igual período y valor pico a pico que la señal periódica considerada.

El **factor de forma**, **F f** , de una señal periódica **a = f (t)** , se define como el cociente de su factor de media de módulo dividido por el factor de cresta ; en símbolos :

$$F_f = \frac{F_{|me|}}{F_c} = \frac{\dfrac{A_{\max}}{A_{|me|}}}{\dfrac{A_{\max}}{A}} = \frac{A}{A_{|me|}}$$

Vale decir que el factor de forma de una señal periódica **a = f (t)** puede definirse también como el cociente de su valor eficaz dividido por su valor medio de módulo.

El valor del factor de forma de una señal periódica depende de la forma de onda de la misma y, por ello, existe un factor de forma de valor único para todas las señales que poseen igual forma de onda.El factor de cresta de una dada señal periódica real permite apreciar cuan diferente es la forma de onda con respecto a la señal teórica.

2-2.1.- Señales senoidales

Las señales periódicas senoidales, **a = f (t)**, tienen como expresión general :

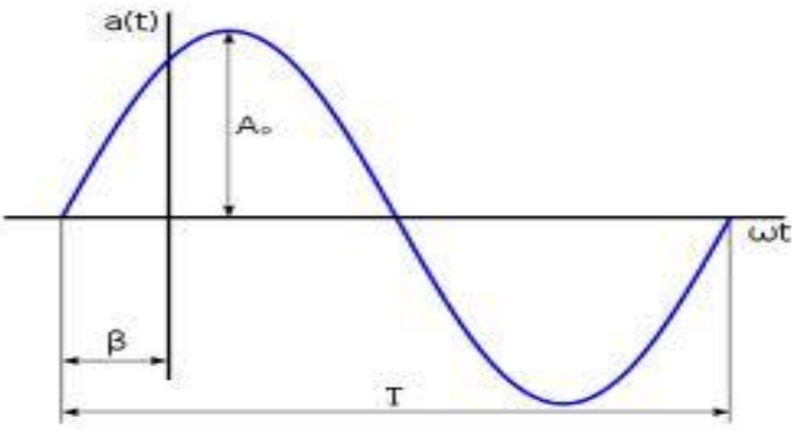
$$a = \hat{A}\, sen(\omega t \pm \theta)$$

donde, $\hat{A}$, es el valor máximo de la señal (si ésta es simétrica respecto del eje de fases se verifica : $+\hat{A} = -\hat{A}$

ω , es la frecuencia angular o pulsación de la señal ($\omega = 2\,\pi\, f$)

θ , es la fase inicial (o fase para t = 0) de la señal

Para la señal senoidal mostrada en la siguiente figura θ = β



Si bien una señal senoidal también puede expresarse como :

$$a = \hat{A}\cos\left(\omega\, t \pm \theta\right)$$

Dado que la función trigonométrica *coseno*, se puede expresar utilizando la función trigonométrica *seno* sumándole a la fase inicial, **θ** , el valor **π / 2 [rad]** (o **90º**), resulta entonces :

$$a = \hat{A}\cos\left(\omega\, t \pm \theta\right) = \hat{A}\, sen\left(\omega t \pm \theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

El valor pico a pico de toda señal senoidal es igual al doble del valor pico ($\mathbf{A_{pp} = 2\, A_{max}}$).El valor medio de toda señal senoidal es nulo ya que son del tipo alterno simétrico.
El valor medio de módulo de una señal senoidal cualquiera **$a = A_{max}$ sen (ω t)** es igual al doble del correspondiente a medio período; en símbolos :

$$\left|\overline{A}\right| = \frac{2}{T}\int_{t=\ldots0}^{t=T/2}\hat{A}\, sen\left(\omega t\right)dt = \frac{2}{\omega T}\,\hat{A}\left[-\cos\left(\omega t\right)\right]_{t=0}^{t=T/2} = \frac{1}{\pi}\,\hat{A}\left[\cos\left(0\right)-\cos\left(\pi\right)\right] =$$

$$\left|\overline{A}\right| = \frac{2}{\pi}\,\hat{A} = 0{,}6366\,\hat{A}$$

Teniendo en cuenta el significado físico del valor medio de módulo, una señal de corriente alterna senoidal cuya intensidad máxima es de 100 [A] transporta, en el intervalo correspondiente a un período, igual cantidad de carga eléctrica que una señal de corriente constante cuya intensidad sea 63,7 [A].
En todos los procesos electrometalúrgicos donde interesa lograr un determinado desplazamiento de carga por unidad de tiempo, el valor medio de módulo de la corriente alterna senoidal es de fundamental importancia.
El valor eficaz de una señal senoidal cualquiera **$a = A_{max}$ sen (ω t)** viene dado por :

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T}\left[\hat{A}\, sen\left(\omega t\right)\right]^{2}dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T}\hat{A}^{2}\left\{1-\left[\cos\left(\omega t\right)\right]^{2}\right\}dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T}\hat{A}^{2}\left[1-\frac{1}{2}-\frac{\cos\left(2\omega t\right)}{2}\right]dt} = \sqrt{\frac{\hat{A}^{2}}{2T}\left[\int_{t=0}^{t=T}dt+\int_{t=0}^{t=T}\cos\left(2\omega t\right)dt\right]} = \sqrt{\frac{\hat{A}^{2}}{2T}\left(T-0\right)} =$$

$$A = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}} = 0{,}7071\,\hat{A}$$

Teniendo en cuenta el significado físico del valor eficaz, una señal de corriente alterna senoidal cuya intensidad máxima es de 100 [A] transporta, en el intervalo correspondiente a un período, la misma cantidad de energía que una señal de corriente constante cuya intensidad sea 70,7 [A].
El valor eficaz de las señales senoidales de tensión e intensidad de corriente se utiliza en el análisis de circuitos eléctricos en régimen permanente para reemplazar las señales variables por señales constantes y eliminar así la variable tiempo en los cálculos.

Los factores característicos asociados a una señal senoidal cualquiera, **a = A$_{max}$ sen (ω t)**, valen :

Factor de media de módulo , $F_{|me|} = \dfrac{A_{max}}{A_{|me|}} = \dfrac{A_{max}}{\dfrac{2A_{max}}{\pi}} = \dfrac{\pi}{2} = 1{,}5708$

Factor de cresta, $F_c = \dfrac{A_{max}}{A} = \dfrac{A_{max}}{\dfrac{A_{max}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} = 1{,}4142$

Factor de forma , $F_f = \dfrac{F_{|me|}}{F_c} = \dfrac{A}{A_{|me|}} = \dfrac{1{,}5708}{1{,}4142} = 1{,}11$

De acuerdo a los valores obtenidos una señal alterna cuadrada de igual valor pico y período que una dada señal alterna senoidal es capaz de transportar, en el intervalo de un período, un 57 % más de carga eléctrica y un 41 % más de energía.
Por otra parte, toda señal periódica alterna cuyo cociente (valor eficaz / valor medio de módulo) de un resultado igual al valor 1,11 (+/- 0,05 %) se puede considerar como señal senoidal.
La fase inicial, **θ** , permite hallar fácilmente la diferencia de fase dadas dos o más señales senoidales de **igual frecuencia.**Sean dos señales senoidales dadas por :

$$a_1 = \hat{A}_1\, sen\left(\omega t + \theta_1\right) \qquad a_2 = \hat{A}_2\, sen\left(\omega t + \theta_2\right)$$

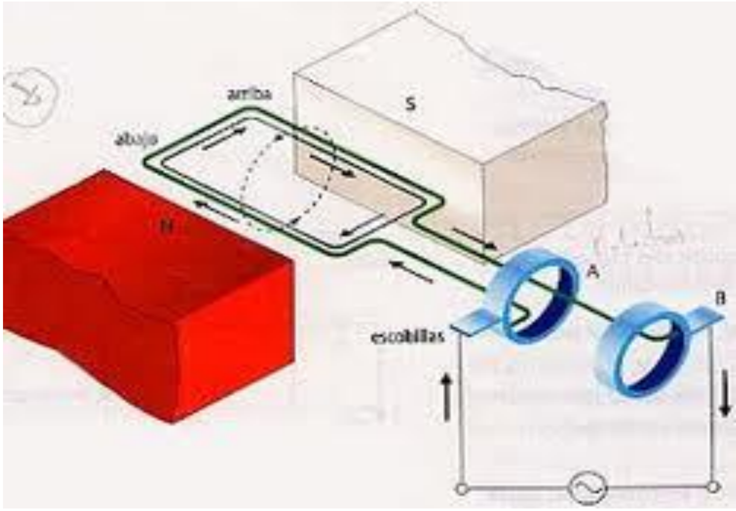
Si θ_1 y θ_2 , son ambos positivos y $\theta_1 > \theta_2$, la diferencia de fase viene dada por : $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$. En caso que $\theta_1 < \theta_2$, la diferencia de fase viene dada por : $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.
Si θ_1 y θ_2 , son ambos negativos la diferencia de fase se calcula tomando los valores absolutos de θ_1 y θ_2 de la misma manera que si fueran ambos positivos.
Si una cualquiera de las fases iniciales es negativa (θ_1 ó θ_2) la diferencia de fase se calcula como suma de los valores absolutos de θ_1 y θ_2 .
En todos los casos que el valor de la **diferencia de fase resulte mayor a 180º (ó π [rad])**, *se deberá utilizar el valor angular complementario dado por :* ***360º - Δ θ (ó 2π -Δ θ [rad]***
Para convertir la diferencia de fase entre dos señales senoidales de igual frecuencia a unidades de tiempo se procede de la siguiente manera :

$$\Delta\theta\left[ms\right] = \frac{\Delta\theta\left[^{\circ}\right]}{180\left[^{\circ}\right]}\frac{\pi}{\omega}10^{3} \quad si\ la\ diferencia\ de\ fase\ se\ obtuvo\ en\left[^{\circ}\right]$$

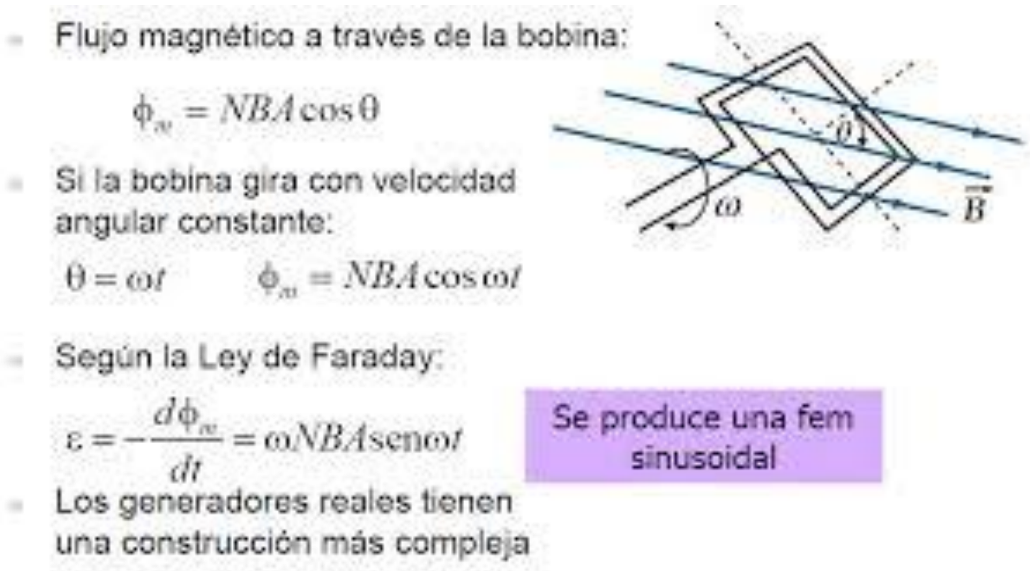
$$\Delta\theta\left[ms\right] = \frac{\Delta\theta\left[rad\right]}{\omega}10^{3} \quad si\ la\ diferencia\ de\ fase\ se\ obtuvo\ en\left[rad\right]$$

2-2.1.1.- Obtención de una señal senoidal

Sea un generador elemental constituído por una espira de forma rectangular de ***N*** *espiras y sección* ***A*** *, montada dentro de un campo magnético constante de inducción* ***B*** *creado por imanes permanentes ,de forma tal que pueda girar alrededor de un eje, como se muestra en la siguiente figura :*



Los extremos de la bobina se conectan a unos anillos conductores (denominados anillos rozantes) que están montados en el eje y aislados del mismo.Mediante sendas pastillas de carbón denominadas escobillas, colocadas de tal manera que estén en contacto con la superficie de cada anillo rozante se puede conectar la espira a un osciloscopio.
Al poner en rotación la espira con una velocidad angular, ***ω*** *, constante se observará en la pantalla del osciloscopio una señal de tensión alterna senoidal tal como surge de aplicar la ley de Faraday :*



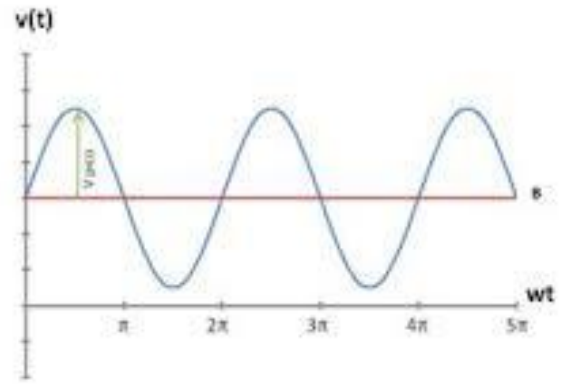
El generador elemental descripto no puede aplicarse para obtener señales de tensión similares a las utilizadas habitualmente debido a que el campo magnético utilizado es muy débil.

2-2.1.2.- Señales senoidales con componente de continua

Es bastante frecuente que en los circuitos eléctricos se establezcan señales de la forma :

$$a = B + \hat{C}\ sen\left(\omega t \pm \theta \right)$$

donde, **B** , es una señal constante.Este tipo se señal recibe el nombre de **señal senoidal con componente de continua** , cuya forma de onda se muestra en la siguiente figura :



Los valores pico de una señal senoidal con componente de continua vienen dados por :

$$+A_{max} = B + \hat{C} \qquad ; \qquad -A_{max} = B - \hat{C}$$

El valor pico a pico de la señal senoidal con componente de continua es igual al valor pico a pico de la componente senoidal, vale decir : **A $_{pp}$ = 2 C $_{max}$.**
El valor medio de una señal senoidal con componente de continua es igual al valor de la componente constante ; en símbolos :

$$\overline{A} = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T}\left[B + \hat{C}\,sen\left(\omega t \pm \theta \right) \right] d\,t = \frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T} B\,d\,t + \frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T}\hat{C}\ sen\left(\omega t \pm \theta \right) d\,t = \frac{B\,T}{T} + 0 = B$$

El valor medio de módulo de una señal senoidal con componente de continua es el doble del valor medio correspondiente a la mitad de un período y es fácil deducir que resulta igual a :

$$\left| \overline{A} \right| = B + \frac{2}{\pi}\hat{C}$$

El valor eficaz de una señal senoidal con componente de continua viene dada por :

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t=0}^{t=T}\left[B + \hat{C}\,sen\left(\omega t \pm \theta \right) \right]^2\ d\,t} = \sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_{t=0}^{t=T} B^2\,d\,t + \int_{t=0}^{t=T} 2\,B\hat{C}\,sen\left(\omega t \pm \theta \right) d\,t + \int_{t=0}^{t=T}\hat{C}^2\,sen^2\left(\omega t \pm \theta \right) d\,t \right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\left[B^2\,T + 0 + \frac{\hat{C}^2}{2}T \right]} = \sqrt{B^2 + 0{,}5\,\hat{C}^2}$$

El factor de media de módulo de una señal senoidal con componente de continua viene dado por :

$$F_{|me|} = \frac{A_{\max}}{A_{|me|}} = \frac{B + C_{\max}}{B + \frac{2}{\pi} C_{\max}}$$

El factor de cresta de una señal senoidal con componente de continua viene dado por :

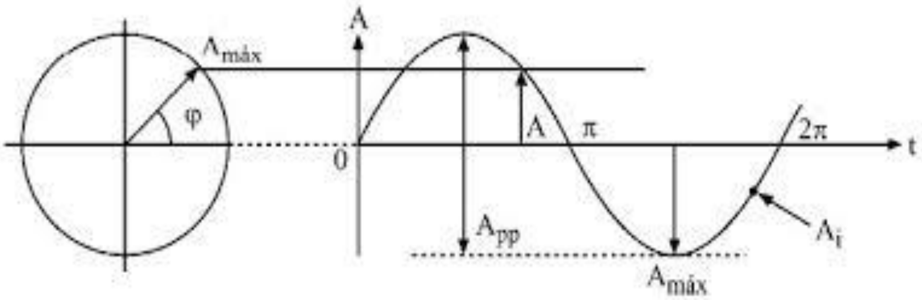
$$F_c = \frac{A_{\max}}{A} = \frac{B + C_{\max}}{\sqrt{B^2 + 0{,}5\, C_{\max}^2}}$$

El factor de forma de una señal senoidal con componente de continua viene dado por :

$$F_f = \frac{F_{|me|}}{F_c} = \frac{\sqrt{B^2 + 0{,}5\, C_{\max}^2}}{B + \frac{2}{\pi} C_{\max}}$$

2-2.1.3.- <u>Concepto de fasor</u>

Dada una señal senoidal cualquiera de la forma : **a = A $_{max}$ sen (ωt)**, su representación gráfica o forma de onda es la mostrada a la derecha de la siguiente figura :



El ciclo de la señal está representado por el segmento de longitud **A $_{pp}$** del eje de ordenadas (dicho segmento contiene todos los valores instántaneos comprendidos en un intervalo de tiempo igual a un período).La forma de onda se obtiene ubicando los puntos definidos por los **pares valor instantáneo – fase** en el intervalo de tiempo igual a un período.Resulta así el conocido gráfico de la función trigonométrica seno mostrado a la derecha de la figura.
En la parte izquierda de la figura se muestra una circunferencia de radio igual al valor pico (**A $_{max}$**) .Es fácil ver que cada uno de los puntos de la circunferencia corresponde a uno y sólo uno de los pares valor instantáneo – fase que definen la forma de onda mostrada a la derecha.
La figura muestra, entonces, una *representación rectangular* de la señal senoidal **a = A $_{max}$ sen (ωt)** (derecha) y una *representación circular* de la misma señal (izquierda).
Dada una fase cualquiera, **φ**, el valor instantáneo correspondiente se determina, *utilizando la representación rectangular*, hallando primero la intersección con la forma de onda de un segmento paralelo al eje de ordenadas que pase por el valor de la fase dada, para luego proyectar dicha intersección sobre el eje de ordenadas y determinar así el valor instantáneo.

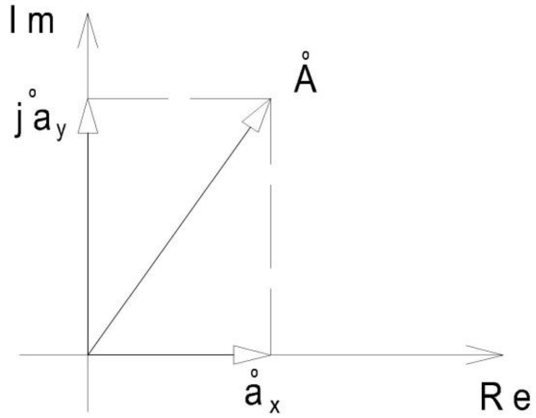
Si, en cambio, se utiliza la *representación circular* se debe desplazar el radio de la circunferencia ***en sentido antihorario*** hasta que forme un ángulo con el eje de abcisas igual al valor dado de fase (**φ**) determinando así un punto de la circunferencia cuya proyección sobre el eje de ordenadas da el valor instantáneo buscado.
Si utilizando la representación rectangular se quiere hallar los valores instantáneos correspondientes a cada fase a medida que la señal los va tomando, es necesario realizar el proceso descripto para una dada fase sucesivamente y ello obliga a desplazarse a lo largo del eje de abcisas *en sentido de tiempo creciente* a una velocidad ***igual a la frecuencia angular, ω*** , conocida como **velocidad angular de sincronismo o velocidad angular sincrónica**.
Si se quiere hallar los valores instantáneos correspondientes a cada fase a medida que la señal los va tomando *utilizando la representación angular* es necesario desplazar el radio de la circunferencia ***girándolo en sentido antihorario a la velocidad angular sincrónica, ω*** , repitiendo el procedimiento indicado para una dada fase, sucesivamente.
Si ahora consideramos una circunferencia concéntrica a la que representa circularmente la señal dada ,
a = A$_{max}$ sen (ωt) , de radio **A** igual al valor eficaz de la señal ($A = A_{\max} / \sqrt{2}$), al desplazar dicho radio en sentido antihorario a la velocidad angular sincrónica podrán obtenerse los sucesivos valores instantáneos de la señal *divididos por el factor* $\sqrt{2}$.

Se denomina **fasor** de una señal senoidal al radio de longitud igual al valor eficaz de la señal que gira en sentido antihorario a la velocidad angular sincrónica, **ω**.Dada una señal senoidal **a = A$_{max}$ sen (ωt $^{+}$/$_{-}$ θ)** el fasor correspondiente a la misma viene dado por :

$$\overset{\circ}{A} = A \langle \pm \theta \qquad donde \quad A = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}}$$

Los fasores se representan gráficamente utilizando flechas en forma similar a un vector pero, debe tenerse siempre presente que **un fasor NO ES UN VECTOR**.

La definición de fasor contiene implícitamente la condición que toda señal senoidal debe expresarse utilizando la *función trigonométrica* ***seno***.En los casos que la señal senoidal a tratar esté representada por la función trigonométrica coseno, se deberá transformarla en la función seno sumando 90 [º] ó π / 2 [rad] a la fase inicial, **θ** de la señal dada.
Para poder representar matemáticamente un fasor es necesario emplear un par de ejes ortogonales donde el eje de abcisas es el lugar geométrico del conjunto de los números reales y el eje de ordenadas es el lugar geométrico del conjunto de los números imaginarios (los números imaginarios se obtienen multiplicando los números reales por el número imaginario **j =** $\sqrt{-1}$).
De ésta manera todo fasor puede considerarse como resultado de la suma de otros dos tales que estén ubicados en los ejes real (abcisas) e imaginario (ordenadas), respectivamente, como se muestra en la siguiente figura :



El término, **j** , se interpreta como un fasor de módulo $\sqrt{-1}$ y ángulo 90 [º] (ó π / 2 [rad]), de tal manera que (ver ítem 2-2.1.2.4.-) , de acuerdo a las reglas del producto de números complejos :

$$j^2 = \mathring{j} \; x \; \mathring{j} = \sqrt{-1} \langle 90^o \; x \; \sqrt{-1} \langle 90^o = -1 \langle 180^o$$

$$j^3 = j^2 \; x \; \mathring{j} = -1 \langle 180^o \; x \; \sqrt{-1} \langle 90^o = -\sqrt{-1} \langle 270^o = -\mathring{j}$$

$$j^4 = j^2 \; x \; j^2 = \left(-1 \langle 180^o \right) x \left(-1 \langle 180^o \right) = 1 \langle 0^o$$

$$j^n = \left(\sqrt{-1}\right)^n \langle n 90^o$$

El ángulo formado por el fasor respecto del *semieje real positivo* debe ser ***siempre igual al valor de la fase inicial, θ , de la señal senoidal representada***.De acuerdo al sistema de ejes ortogonales definido para representar gráficamente fasores, resulta (los valores **a x** , **a y** *deben tomarse con su signo*):

$$\theta = arc\,tg \left(\frac{a_y}{a_x} \right) \quad si\; el \;\; fasor \; está \; en \; el \;\; primer \; o \; en \; el \; cuarto \; cuadrante$$

$$\theta = 180^o + arc\,tg \left(\frac{a_y}{a_x} \right) \quad si\; el \;\; fasor \; está \; en \; el \; segundo \; cuadrante$$

$$\theta = arc\,tg \left(\frac{a_y}{a_x} \right) - 180^o \quad si\; el \;\; fasor \; está \; en \; el \; tercer \; cuadrante$$

De acuerdo a la *representación (o forma) rectangular* el fasor viene dado por :

$$\mathring{A} = \mathring{a}_x + j \, \mathring{a}_y$$

Desarrollando ésta expresión, obtenemos :

$$\overset{\circ}{A} = A\cos(\theta)\langle 0^{o} + A sen(\theta)\langle 90^{o} = A\left[sen(\theta)\langle 0^{o} + \cos(\theta)\langle 90^{o}\right] = A\left[sen(\theta) + j\cos(\theta)\right]$$

Utilizando la notación de Euler : $A\left[sen(\theta) + j\cos(\theta)\right] = e^{j\theta}$, podemos expresar el fasor de acuerdo a la *representación (o forma) polar* , de la siguiente manera :

$$\overset{\circ}{A} = A\, e^{j\theta}$$

Donde , $A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ y θ = arc tg (a_y / a_x) (en general, porque la expresión de cálculo del ángulo depende del cuadrante donde está ubicado el fasor).Por otra parte, a_x = A cos (θ) y a_y = A sen (θ).
Empleando éstas igualdades resulta sencillo pasar de la representación o forma rectangular a la representación o forma polar y viceversa.
La representación fasorial de las señales senoidales permite realizar los cálculos numéricos necesarios para el análisis de los circuitos eléctricos en régimen permanente aplicando las reglas de operación definidas para los números complejos (ver ítem 2-2.1.2.4.-) y teniendo en cuenta que :

.- la *suma algebraica* de fasores da por resultado ***un fasor***
.- el *producto y el cociente* de fasores da por resultado ***un número complejo***
.- el *producto de un fasor multiplicado por un número complejo* da por resultado ***un fasor***
.- el *cociente de un fasor dividido por un número complejo* da por resultado ***un fasor***

La representación en un mismo gráfico de varias señales senoidales representadas mediante fasores recibe el nombre de **diagrama fasorial** y permite visualizar rápidamente *las diferencias de fase* entre las señales representadas.
Recordando cómo se obtiene el valor instántaneo de una señal senoidal de la forma **$a = A_{max}$ sen (ω t $^{+}/_{-}$ θ)** dada su forma de onda según representación circular (proyección de la intersección del radio con la circunferencia sobre el eje de ordenadas) y siendo la expresión en forma rectangular del fasor representativo de la señal dada :

$$\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{a}_x + j\,\overset{\circ}{a}_y$$

Es inmediato deducir que el valor instántaneo de la señal considerada para la fase inicial (**$^{+}/_{-}$ θ**) resulta igual a :

$$a(\pm\theta) = \sqrt{2}\, a_y = \sqrt{2}\, A\cos(\pm\theta)$$

Dadas dos señales senoidales **$a_1 = A_{1,max}$ sen (ω t + θ_1)** y **$a_2 = A_{2,max}$ sen (ω t + θ_2)** , ambas de igual frecuencia angular, puede obtenerse la señal **a_3** como suma de aquéllas haciendo :

$$a_3 = a_1 + a_2 = A_{1,max}\, sen(\omega t + \theta_1) + A_{2,max}\, sen(\omega t + \theta_2) \qquad [1]$$

Los fasores que representan las señales **a_1** y **a_2** , expresados en forma rectangular, son :

$$\overset{\circ}{A}_1 = \overset{\circ}{a}_{1,x} + j\,\overset{\circ}{a}_{1,y} \qquad\qquad \overset{\circ}{A}_2 = \overset{\circ}{a}_{2,x} + j\,\overset{\circ}{a}_{2,y}$$

La suma de ambos fasores resulta igual a :

$$\overset{\circ}{A}_3 = \overset{\circ}{A}_1 + \overset{\circ}{A}_2 = \left(\overset{\circ}{a}_{1,x} + \overset{\circ}{a}_{2,y} \right) + \overset{\circ}{j}\left(a_{1,y} + a_{2,y} \right) \quad [2]$$

El fasor $\overset{\circ}{A}_3$ representa una señal senoidal de frecuencia angular **ω** , cuyor valor instantáneo para la fase inicial **θ 3** viene dado por :

$$a_3(\theta_3) = \sqrt{2}\left(a_{1,y} + a_{2,y} \right) \qquad donde \quad \theta_3 = arctg\left(\frac{a_{1,y} + a_{2,y}}{a_{1,x} + a_{2,x}} \right)$$

Los valores instantáneos de las señales **a 1** y **a 2** , para sus respectivas fases iniciales **θ 1** y θ 2 , en función de sus fasores representativos vienen dados por :

$$a_1(\theta_1) = \sqrt{2}\, a_{1,y} \qquad\qquad a_2(\theta_2) = \sqrt{2}\, a_{2,y}$$

en consecuencia ,

$$a_1(\theta_1) + a_2(\theta_2) = \sqrt{2}\, a_{1,y} + \sqrt{2}\, a_{2,y} = a_3(\theta_3) \qquad [3]$$

La expresión [3] demuestra que la suma fasorial dada por la ecuación [2] verifica la igualdad [1] para las fases iniciales de las señales senoidales dadas.Luego, el fasor $\overset{\circ}{A}_3$, representa la señal senoidal resultante de la suma de las señales **a 1** y **a 2** .
Para analizar en régimen permanente un circuito eléctrico es necesario aplicar las leyes de Kirchhoff y resolver las ecuaciones de lazos y de nodos correspondientes.Si el circuito es excitado con señales senoidales ,reemplazando éstas por sus correspondientes fasores es posible realizar los cálculos necesarios para resolver las ecuaciones planteadas.

2-2.1.4.- Operaciones con números complejos

NOTA : *la solución de los cálculos propuestos se halla al final del presente ítem*

Los números complejos son aquéllos que poseen una parte real y otra imaginaria ; en símbolos :

$$\dot{a} = a_x + j\,a_y \qquad donde\,, \quad j = \sqrt{-1}$$

La expresión anterior de un número complejo se denomina *forma rectangular*.También puede expresarse un número complejo en *forma polar* de la siguiente manera :

$$\dot{a} = A\langle \theta \qquad donde \quad A = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad ; \quad \theta = arctg\left(\frac{a_y}{a_x} \right)$$

donde **A** , es el **módulo** y **θ** , es el **argumento** del número complejo dado

Para determinar el argumento de un número complejo debe tenerse en cuenta que

$$\theta = arc\,tg\left(\frac{a_y}{a_x}\right) \quad para\ el\ \ primer\ o\ el\ cuarto\ cuadrante$$

$$\theta = 180^{o} + arc\,tg\left(\frac{a_y}{a_x}\right) \quad para\ el\ segundo\ cuadrante$$

$$\theta = arc\,tg\left(\frac{a_y}{a_x}\right) - 180^{o} \quad para\ el\ tercer\ cuadrante$$

$$a_x \quad y \quad a_y \quad deben\ escribirse\ con\ su\ signo\ (+ \quad ó \quad -)$$

Se propone a continuación realizar algunas operaciones de cambio de forma de expresión de un número imaginario :

01.- Expresar los siguientes números complejos en forma polar dada su expresión en forma rectangular :

a .- (15 + j 25) = ; b.- (- 32 + j 16) = ; c.- (28,52 – j 55,43) =

d.- (- 55,43 – j 23,89) = ; e.- (- 123,37 + j 63,79) = ; f.- (- 9,16 – j 31,69) =

02*.- Expresar los siguientes números complejos en forma rectangular dada su expresión en forma polar*

a.- 132,26 e $^{j\,132º,45}$ = b.- 95,73 e $^{-j\,165º,28}$ = c.- 58,25 e $^{j\,257º,78}$ =

d.- 75,28 e $^{j\,78º,45}$ = e.- 262,73 e $^{-j\,82º,35}$ = f.- 27,81 e $^{-j\,98º,62}$ =

<u>SUMA</u> : dados dos números complejos $\dot{a} \quad y \quad \dot{b}$, su suma viene dada por :

$$\dot{c} = \dot{a} + \dot{b} = (a_x + j\,a_y) + (b_x + j\,b_y) = (a_x + b_x) + j(a_y + b_y) = c_x + j\,c_y$$

Por ejemplo : $\dot{d} = (4 + j\,8) + (-2 + j\,3) - (-7 + j\,9) + (1 - j\,6) = 10 - j\,4$

<u>PRODUCTO</u> : dados dos números complejos $\dot{a} \quad y \quad \dot{b}$, su producto viene dada por :

$$\dot{c} = \dot{a}\ x\ \dot{b} = (a_x + j\,a_y)\ (b_x + j\,b_y) = (a_x\,b_x - a_y\,b_y) + j(a_x\,b_y + a_y\,b_x) = c_x + j\,c_y$$

Por ejemplo $\dot{a} = (4 - j\,5)(3 + j\,2) = (12 + 10) + j(8 - 15) = 22 - j\,7$

Si los números complejos $\dot{a} \quad y \quad \dot{b}$ están expresados en forma polar, su producto viene dado por :

$$\dot{c} = \dot{a}\ x\ \dot{b} = A\langle\theta_a\ x\ B\langle\theta_b = A\ x\ B\langle(\theta_a + \theta_b) = C\langle\theta_c$$

Por ejemplo , $\dot{k} = (12 \langle -30^{o})(5 \langle 75^{o}) = 60 \langle 45^{o}$

COCIENTE : Si los números complejos $\dot{a}$ y $\dot{b}$ están expresados en forma polar, su cociente viene dado por :

$$\dot{c} = \frac{\dot{a}}{\dot{b}} = \frac{A \langle \theta_a}{B \langle \theta_b} = \frac{A}{B} \langle (\theta_a - \theta_b) = C \langle \theta_c$$

Por ejemplo , $\dot{e} = (18 \langle -50^{o}) / (6 \langle -75^{o}) = 3 \langle 25^{o}$

Si los números complejos $\dot{a}$ y $\dot{b}$ están expresados en forma rectangular, para poder realizar la operación

$$\dot{c} = \frac{\dot{a}}{\dot{b}} = \frac{a_x + j a_y}{b_x + j b_y}$$

es necesario *multiplicar el numerador y el denominador por el* ***número conjugado*** *del denominador.*

Dado un número complejo cualquiera $\dot{a}$, el número complejo conjugado $\dot{a}^{*}$ es aquél que posee parte real igual (en valor y signo) y parte imaginaria de igual valor y signo contrario, a las partes real e imaginaria, del número complejo dado, $\dot{a}$ .Dado el número complejo **5 – j 8** , su conjugado es **5 + j 8**.Si el número complejo cuyo conjugado se quiere obtener está expresado en forma polar, resulta :

$$\dot{a} = A e^{j\theta} \quad tiene\ por\ conjugado \quad \dot{a}^{*} = A e^{-j\theta}$$

vale decir que el número complejo **6 < - 38 º** tiene por conjugado **6 < 38 º**.El producto de un número complejo multiplicado por su conjugado es igual a su módulo elevado al cuadrado , en símbolos :

$$\dot{a}\, x\, \dot{a}^{*} = (a_x + j a_y)(a_x - j a_y) = a_x^2 - j a_x a_y + j a_y a_x - j^2 a_y^2 = a_x^2 + a_y^2 = A^2$$

El cociente de dos números complejos expresados en forma rectangular, resulta igual a :

$$\dot{c} = \frac{\dot{a}}{\dot{b}} = \frac{a_x + j a_y}{b_x + j b_y} \frac{b_x - j b_y}{b_x - j b_y} = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{b_x^2 + b_y^2} + j \frac{a_y b_x - a_x b_y}{b_x^2 + b_y^2} = c_x + j c_y$$

Por ejemplo : $\dot{g} = \dfrac{2 + j4}{3 - j5} = \dfrac{(2 - j4)(3 + j5)}{9 + 25} = \dfrac{6 + 20}{34} + j\dfrac{-12 + 10}{34} = \dfrac{26}{34} - j\dfrac{2}{34}$

Se propone ahora realizar algunos cálculos con números complejos utilizando las operaciones básicas definidas.

03.- calcular : $\dfrac{(32 - j25) + (16 + j78)}{-23{,}71 - j89{,}34} =$

04.- calcular : $\left(69{,}51\,e^{-j73^\circ{,}67} - 54{,}92\,e^{j58^\circ{,}25}\right) \times \left(-16{,}72 - j\,78{,}15\right) =$

05.- calcular : $\dfrac{23{,}78 - j\,65{,}12}{-75{,}41 + j\,13{,}97} \times 69{,}57\,e^{-j105^\circ{,}38} =$

06.- calcular : $\dfrac{25{,}79\,e^{-j98^\circ{,}27} - 34{,}17\,e^{j41^\circ{,}68} + 72{,}35\,e^{j115^\circ{,}41}}{23{,}75\,e^{-j15^\circ{,}49} - 6{,}21\,e^{j28^\circ{,}63}} =$

07.- calcular : $\dfrac{\left(45{,}18 - j17{,}49\right) \times 67{,}13\,e^{-j61^\circ{,}87} + 1735{,}82\,e^{j141^\circ{,}67}}{-17{,}67 - j\,56{,}15} =$

08.- calcular : $\dfrac{\left(34{,}79 + j11{,}56\right) \times 2{,}53\,e^{j152^\circ{,}21}}{\left(-38{,}91 - j\,25{,}67\right) - \left(6{,}87 - j\,7{,}43\right) + 15{,}23\,e^{-j108^\circ{,}23}} =$

09.- calcular : $\dfrac{3{,}56\,e^{-j34^\circ{,}78} \times 2{,}45\,e^{j27^\circ{,}68} + 7{,}31\,e^{j72^\circ{,}37} \times 5{,}18\,e^{-j156^\circ{,}32}}{4{,}23\,e^{j75^\circ{,}56} \times 6{,}82\,e^{-j45^\circ{,}67}} =$

10.- calcular : $\dfrac{\left(12{,}89 + j\,67{,}52\right)}{1{,}89\,e^{-j73^\circ{,}25}} + \dfrac{6{,}39\,e^{j128^\circ{,}56} - 3{,}89\,e^{j67^\circ{,}15}}{-3{,}25 - j\,2{,}75} - \left(7{,}89 - j\,6{,}45\right) =$

11.- calcular : $7{,}56\,e^{-j35^\circ{,}72} \times 1{,}34\,e^{-j22^\circ{,}73} + 3{,}65\,e^{j23^\circ{,}61} \times 2{,}18\,e^{-j123^\circ{,}63} =$

12.- calcular : $\dfrac{\left(4{,}78 - j\,3{,}25\right) - \left(1{,}27 + j\,2{,}28\right)}{\left(2{,}34 - j\,2{,}78\right) + \left(-1{,}34 - j\,0{,}97\right)} \times \dfrac{3{,}27 - j\,2{,}45}{2{,}36 + j\,1{,}89} =$

13.- calcular : $\dfrac{5{,}34 - j\,4{,}67}{3{,}18\,e^{j45^\circ{,}23}} \times \left(-3{,}67 + j\,2{,}74\right) \times \dfrac{1}{3{,}18 - j\,2{,}27} =$

14.- calcular : $\dfrac{5{,}76\,e^{-j67^\circ{,}46} \times 0{,}38\,e^{j21^\circ{,}73}}{-2{,}78 + j\,2{,}23} - \dfrac{1}{3{,}25 + j\,2{,}74} =$

15.- calcular : $\left(3{,}47 - j\,2{,}89\right) \times \dfrac{1}{-1{,}25 - j\,2{,}67} + 5{,}89\,e^{-j27^\circ{,}76} - \dfrac{2}{4{,}73\,e^{j56^\circ{,}23}} =$

RESULTADOS

01.-
a.- = 29,15 $e^{j\,59º,04}$ b.- = 35,78 $e^{j\,153º,43}$ c.- = 62,34 $e^{-j\,62º,77}$ d.- = 60,36 $e^{-j\,156º,68}$
e.- = 138,89 $e^{j\,152º,66}$ f.- = 32,99 $e^{-j\,106º,12}$

02.-
a.- = (- 89,27 + j 97,59) b.- = (- 92,59 – j 24,32) c.- = (- 12,33 – j 56,95)
d.- = (15,07 + j 73,76) e.- = (34,97 – j 260,39) f.- = (- 4,17 – j 27,50)

03.- = 0,77 $e^{j\,152º,69}$ 04.- = (- 8705,98 + j 2628,49) 05.- = 62,89 $e^{j\,15º,18}$

06.- = (- 3,10 - j 0,67) 07.- = (39,80 – j 4,70) 08.- = (1,14 – j 1,04)

09.- = (- 0,29 – j 1,38) 10.- = 45,19 $e^{j\,150º,59}$ 11.- = 16,93 $e^{-j\,76º,62}$

12.- = (1,21 – j 1,94) 13.- = (- 0,11 + j 2,61) 14.- = 0,82 $e^{j\,164º,00}$ rad

15.- = 5,44 $e^{-j\,9º,63}$

2-2.1.5.- Señales senoidales trifásicas

Dadas tres señales alternas senoidales de tensión (o intensidad de corriente) de igual frecuencia, definidas por :

$$u_1 = \sqrt{2}\,U\,sen\left(\omega t\right) \quad ; \quad u_2 = \sqrt{2}\,U\,sen\left(\omega t - 120º\right) \quad ; \quad u_3 = \sqrt{2}\,U\,sen\left(\omega t - 240º\right)$$

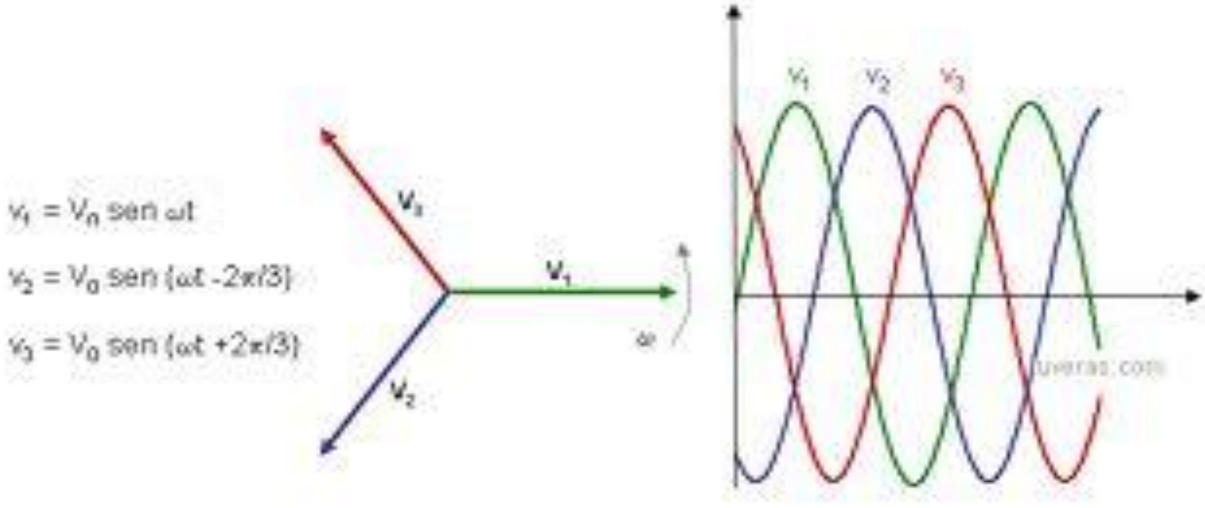
dichas señales definen un **sistema trifásico, equilibrado, simétrico de secuencia directa**.
El sistema es **trifásico** porque cada una de las señales tiene una fase inicial distinta a la de las otras dos señales.
El sistema es **equilibrado** porque las tres señales poseen el mismo valor eficaz :

$$U_1 = U_2 = U_3 = U$$

El sistema es **simétrico** porque la diferencia de fase entre un par cualquiera de las señales dadas tiene un único valor (120 [º] ó 2 π / 3 [rad]) :

$$\Delta\theta_{1,2} = \Delta\theta_{2,3} = \Delta\theta_{3,1} = 120º = \frac{2}{3}\pi\left[\,rad\,\right]$$

El sistema es de **secuencia directa** porque el orden en que se suceden los valores pico positivos de cada una de las señales es : 1 – 2 – 3 (en otras palabras, la señal $\mathbf{u_1}$ alcanza el valor pico positivo en primer lugar, un tercio de período después la señal $\mathbf{u_2}$ es máxima positiva y luego de transcurrido otro tercio de período, la señal $\mathbf{u_3}$ alcanza su pico positivo).
En la siguiente figura se representa, a la derecha, un sistema trifásico de señales alternas senoidales, equilibrado, simétrico y de secuencia directa :



En el sector izquierdo de la figura están representados los fasores correspondientes a cada una de las señales, cuyas expresiones son :

$$\mathring{U}_1 = U\,e^{\,j0^o} \quad ; \quad \mathring{U}_2 = U\,e^{\,-j120^o} \quad ; \quad \mathring{U}_3 = U\,e^{\,-j240^o}$$

Un sistema trifásico, equilibrado , simétrico, de **secuencia inversa** , es aquél en el que el orden de sucesión de los valores pico positivo de cada una de las señales es : 1 - 3 - 2.Las expresiones correspondientes de las señales y sus fasores (considerando señales de tensión) para un sistema trifásico de éste tipo son :

$$u_1 = \sqrt{2}\,U\,sen\left(\omega t\right) \quad ; \quad u_2 = \sqrt{2}U\,sen\left(\omega t - 240^o\right) \quad ; \quad u_3 = \sqrt{2}U\,sen\left(\omega t - 120^o\right)$$

$$\mathring{U}_1 = U\,e^{\,j0^o} \quad ; \quad \mathring{U}_2 = U\,e^{\,-j240^o} \quad ; \quad \mathring{U}_3 = U\,e^{\,-j120^o}$$

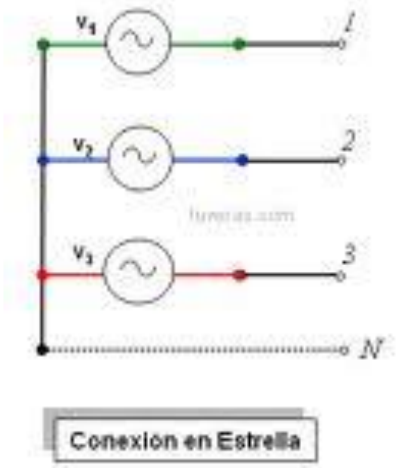
Comparando las expresiones del juego de señales para un sistema trifásico, equilibrado, simétrico , secuencia directa con las expresiones de un sistema trifásico similar pero de *secuencia inversa* , resulta evidente que para <u>*modificar la secuencia basta con permutar la denominación de un par cualquiera de las señales*</u> del sistema.En otras palabras, dado un sistema trifásico, equilibrado, simétrico, secuencia directa compuesto por las señales alternas senoidales de tensión $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$ para convertirlo en un sistema similar pero de *secuencia inversa* basta con denominar a la señal $\mathbf{u_2}$ como $\mathbf{u_3}$ y, a la señal $\mathbf{u_3}$ como $\mathbf{u_2}$.
La secuencia de un sistema trifásico de señales de tensión (o de intensidad eléctrica) es una característica fácilmente modificable permutando denominaciones entre un par cualquiera de las señales del sistema dado.
En general, la expresión de las señales (sean de tensión o de intensidad de corriente) y sus fasores, de un sistema trifásico, equilibrado y simétrico es :

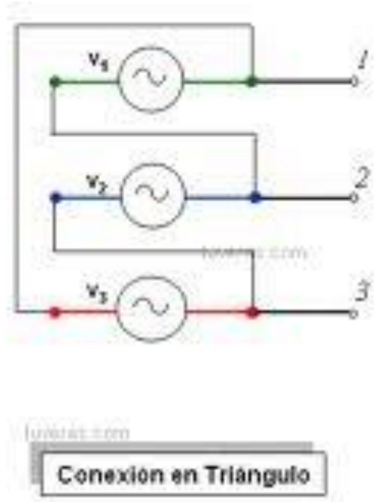
$$a_1 = \sqrt{2}\,Asen\left(\omega t\right) \quad ; \quad a_2 = \sqrt{2}\,Asen\left(\omega t \mp 120^o\right) \quad ; \quad a_3 = \sqrt{2}\,Asen\left(\omega t \pm 120^o\right)$$

$$\mathring{A}_1 = Ae^{\,j0^o} \quad ; \quad \mathring{A}_2 = A\,e^{\,\mp j120^o} \quad ; \quad \mathring{A}_3 = A\,e^{\,\pm j120^o}$$

Para SECUENCIA DIRECTA utilizar (-) para $\mathbf{a_2}$ *y (+) para* $\mathbf{a_3}$*. Para SECUENCIA INVERSA utilizar (+) para* $\mathbf{a_2}$ *y (-) para* $\mathbf{a_3}$

En la práctica se utilizan fuentes de tensión alterna senoidal trifásicas, equilibradas y simétricas, de secuencia directa o inversa, que pueden estar conectadas en estrella o en triángulo como se muestra en la siguiente figura :





En la conexión estrella, las tensiones medidas entre cada uno de los terminales (1, 2 ó 3) y el centro de estrella (N) reciben el nombre de ***sistema trifásico de tensiones de fase*** , para diferenciarlas de las tensiones medidas entre pares de terminales (1 – 2 ; 2 – 3 ; 3 – 1) que se denominan ***sistema trifásico de tensiones de línea***.En la conexión triángulo resulta evidente, observando el esquema de conexión, que sólo existe el sistema trifásico de tensiones de línea (también se acostumbra decir que en la conexión triángulo de una fuente trifásica de tensión *las tensiones de fase son iguales a las tensiones de línea*).
Por convención, dada una fuente de tensión alterna senoidal trifásica, equilibrada y simétrica, conectada en estrella el sistema de tensiones de línea se obtiene de la siguiente manera :

$$\overset{\circ}{U}_{1,2} = \overset{\circ}{U}_1 - \overset{\circ}{U}_2 \qquad \overset{\circ}{U}_{2,3} = \overset{\circ}{U}_2 - \overset{\circ}{U}_3 \qquad \overset{\circ}{U}_{3,1} = \overset{\circ}{U}_3 - \overset{\circ}{U}_1$$

desarrollando las expresiones anteriores, considerando secuencia directa, obtenemos :

$$\overset{\circ}{U}_{1,2} = U\,e^{\,j0^\circ} - U\,e^{-j120^\circ} = U - \left(-\frac{1}{2}U - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}U \right) = \frac{3}{2}U + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}U = \sqrt{3}\,U\,e^{\,j30^\circ}$$

$$\overset{\circ}{U}_{2,3} = U\,e^{-j120^\circ} - U\,e^{\,j120^\circ} = \left(-\frac{1}{2}U - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}U \right) - \left(-\frac{1}{2}U + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}U \right) = -\,j\,\sqrt{3}\,U = \sqrt{3}\,U\,e^{-j90^\circ}$$

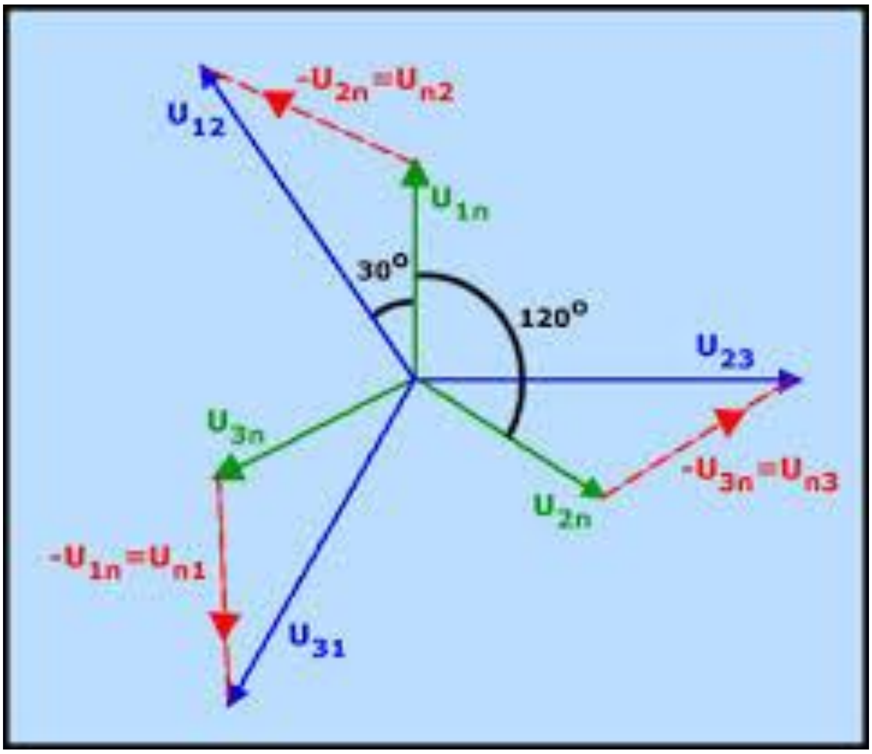
$$\overset{\circ}{U}_{3,1} = U\,e^{\,j120^\circ} - U\,e^{\,j0^\circ} = \left(-\frac{1}{2}U + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}U \right) - U = -\frac{3}{2}U + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}U = \sqrt{3}\,U\,e^{\,j150^\circ}$$

El sistema trifásico, equilibrado, simétrico de las tensiones de línea debidas a un sistema trifásico, equilibrado, simétrico, **secuencia directa**, de tensiones de fase alternas senoidales producidas por una fuente de tensión conectada en estrella presenta las siguientes características :

.- el valor eficaz de la tensión de línea es igual al valor eficaz de la tensión de fase multiplicado por $\sqrt{3}$

.- la terna de señales de tensión de línea está <u>adelantada 30º (o T / 12)</u> respecto de la terna de señales de tensión de fase

En el siguiente diagrama fasorial se representan las ternas de tensiones de línea y de fase correspondientes a una fuente de tensión alterna senoidal, trifásica, equilibrada, simétrica, de secuencia directa, conectada en estrella :



Si ahora consideramos una fuente de tensión alterna senoidal trifásica, simétrica, equilibrada, de ***secuencia inversa*** , conectada en estrella, el sistema de tensiones de línea (o compuestas) que resulta viene dado por :

$$\mathring{U}_{1,2} = U\,e^{\,j0°} - U\,e^{\,j120°} = U - \left(-\frac{1}{2}U + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}U \right) = \frac{3}{2}U - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}U = \sqrt{3}\,U\,e^{\,-j30°}$$

$$\mathring{U}_{2,3} = U\,e^{\,j120°} - U\,e^{\,-j120°} = \left(-\frac{1}{2}U + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}U \right) - \left(-\frac{1}{2}U - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}U \right) = +\,j\sqrt{3}\,U = \sqrt{3}\,U\,e^{\,j90°}$$

$$\mathring{U}_{3,1} = U\,e^{\,-j120°} - U\,e^{\,j0°} = \left(-\frac{1}{2}U - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}U \right) - U = -\frac{3}{2}U - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}U = \sqrt{3}\,U\,e^{\,-j150°}$$

El sistema trifásico, equilibrado, simétrico de las tensiones de línea debidas a un sistema trifásico, equilibrado, simétrico, **secuencia inversa**, de tensiones de fase alternas senoidales producidas por una fuente de tensión conectada en estrella presenta las siguientes características :

.- ***el valor eficaz de la tensión de línea es igual al valor eficaz de la tensión de fase multiplicado por*** $\sqrt{3}$
.- ***la terna de señales de tensión de línea está <u>retrasada 30º (o T / 12)</u> respecto de la terna de señales de tensión de fase***

Se deja como ejercicio el trazado del diagrama fasorial que representa las ternas de tensiones de línea y de fase correspondientes a una fuente de tensión alterna senoidal, trifásica, equilibrada, simétrica, de secuencia inversa, conectada en estrella.

Cuando la fuente trifásica, simétrica y equilibrada, de tensión alterna senoidal se conecta en triángulo no se produce ninguna corriente de circulación interna, pese a que el lazo está cerrado, porque al conectar en serie las fuentes correspondientes a cada fase la suma de las tensiones resulta nula, independientemente de la secuencia.En efecto :

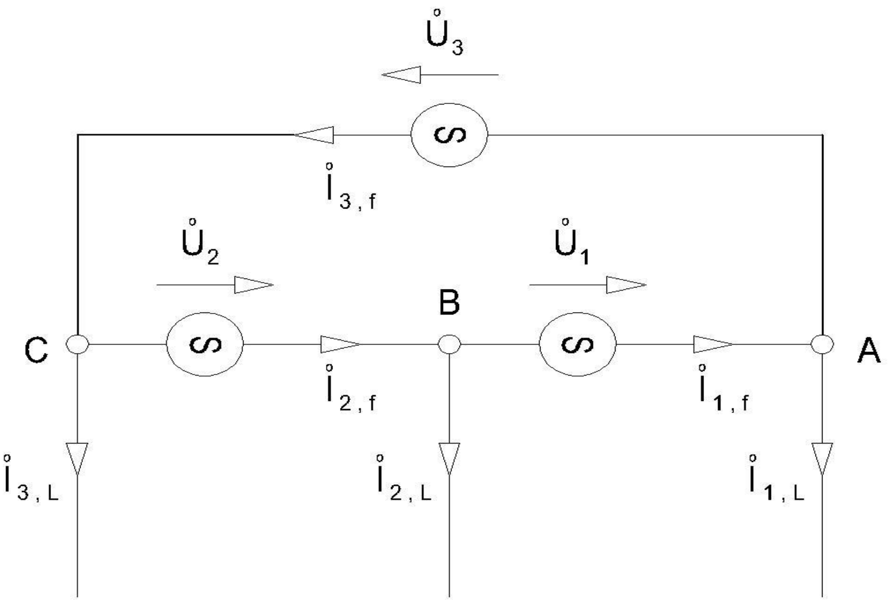
$$\mathring{U}_1 + \mathring{U}_2 + \mathring{U}_3 = U\,e^{j0^\circ} + U\,e^{\mp j120^\circ} + U\,e^{\pm j120^\circ} = U + \left(-\frac{1}{2}U \mp j\,\frac{\sqrt{3}}{2}U \right) + \left(-\frac{1}{2}U \pm j\,\frac{\sqrt{3}}{2}U \right) = 0$$

Para analizar el comportamiento de una fuente trifásica, simétrica y equilibrada, de tensión alterna senoidal conectada en triángulo es necesario aplicarle carga.Consideremos que la fuente se conecta a una carga trifásica *equilibrada y simétrica* tal que las intensidades de corriente que entregan cada una de las fuentes de fase conforman un **sistema trifásico**, equilibrado, simétrico, de secuencia directa de **corrientes alternas senoidales de fase**, cuya expresión es la siguiente :

$$i_{1,f} = \sqrt{2}\,I\,sen\left(\omega t\right) \quad ; \quad i_{2,f} = \sqrt{2}\,I\,sen\left(\omega t - 120^\circ\right) \quad ; \quad i_{3,f} = \sqrt{2}\,I\,sen\left(\omega t - 240^\circ\right)$$

$$\mathring{I}_{1,f} = I\,e^{j0^\circ} \quad ; \quad \mathring{I}_{2,f} = I\,e^{-j120^\circ} \quad ; \quad \mathring{I}_{3,f} = I\,e^{-j240^\circ}$$

En la siguiente figura se muestra una fuente trifásica, simétrica, equilibrada, secuencia directa , de tensión alterna senoidal conectada en triángulo funcionando en las condiciones de carga trifásica, equilibrada y simétrica :



Por convención, dada una fuente de tensión alterna senoidal trifásica, equilibrada y simétrica, conectada en triángulo el sistema de tensiones de línea se obtiene de la siguiente manera :

$$\mathring{I}_{1,L} = \mathring{I}_{1,f} - \mathring{I}_{3,f} \qquad \mathring{I}_{2,L} = \mathring{I}_{2,f} - \mathring{I}_{1,f} \qquad \mathring{I}_{3,L} = \mathring{I}_{3,f} - \mathring{I}_{2,f}$$

desarrollando las expresiones anteriores, considerando secuencia directa, obtenemos :

$$\mathring{I}_{1,L} = I\,e^{\,j0^\circ} - I\,e^{-j\,240^\circ} = I - \left(-\frac{1}{2}\,I + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,I \right) = \frac{3}{2}\,I - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,I = \sqrt{3}\,I\,e^{-j30^\circ}$$

$$\mathring{I}_{2,L} = I\,e^{-j120^\circ} - I\,e^{\,j\,0^\circ} = \left(-\frac{1}{2}\,I - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,I \right) - I = -\frac{3}{2}\,I - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,I = \sqrt{3}\,I\,e^{-j\,150^\circ}$$

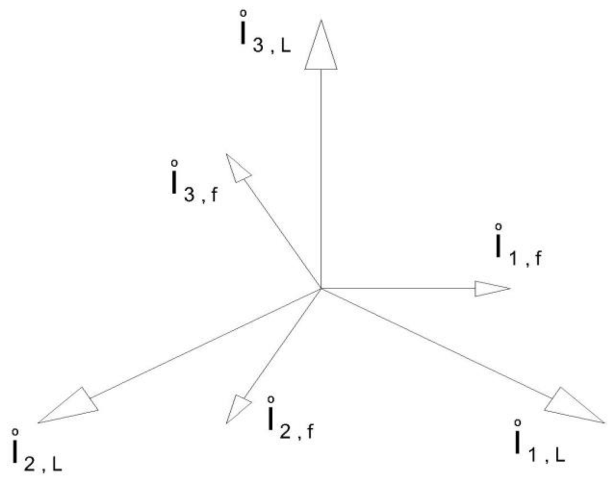
$$\mathring{I}_{3,L} = I\,e^{-j\,240^\circ} - I\,e^{-j\,120^\circ} = \left(-\frac{1}{2}\,I + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,I \right) - \left(-\frac{1}{2}\,I - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,I \right) = j\,\sqrt{3}\,I = \sqrt{3}\,I\,e^{\,j\,90^\circ}$$

El sistema trifásico, equilibrado, simétrico de las intensidades de corriente de línea debidas a un sistema trifásico, equilibrado, simétrico, **secuencia directa**, de tensiones de fase alternas senoidales producidas por una fuente de tensión conectada en triángulo presenta las siguientes características :

.- ***el valor eficaz de la intensidad de corriente de línea es igual al valor eficaz de la intensidad de corriente de fase multiplicado por*** $\sqrt{3}$

.- ***la terna de señales de intensidades de corriente de línea está <u>retrasada 30º (o T / 12)</u> respecto de la terna de señales de intensidades de corriente de fase***

En el siguiente diagrama fasorial se representan las ternas de intensidades de corriente de línea y de fase correspondientes a una fuente de tensión alterna senoidal, trifásica, equilibrada, simétrica, de secuencia directa, conectada en triángulo :



Si ahora consideramos una fuente de tensión alterna senoidal trifásica, simétrica, equilibrada, de ***secuencia inversa*** , conectada en triángulo, el sistema de intensidades de corriente de línea (o compuestas) que resulta viene dado por :

$$\mathring{I}_{1,L} = I\,e^{\,j0^\circ} - I\,e^{-j120^\circ} = I - \left(-\frac{1}{2}\,I - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,I \right) = \frac{3}{2}\,I + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,I = \sqrt{3}\,I\,e^{\,j30^\circ}$$

$$\mathring{I}_{2,L} = I\,e^{-j240^\circ} - I\,e^{\,j0^\circ} = \left(-\frac{1}{2}\,I + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,I \right) - I = -\frac{3}{2}\,I + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,I = \sqrt{3}\,I\,e^{\,j150^\circ}$$

$$\mathring{I}_{3,L} = I\,e^{-j120^\circ} - I\,e^{-j240^\circ} = \left(-\frac{1}{2}\,I - j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,I \right) - \left(-\frac{1}{2}\,I + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,I \right) = -j\sqrt{3}\,I = \sqrt{3}\,I\,e^{-j\,90^\circ}$$

El sistema trifásico, equilibrado, simétrico de las intensidades de corriente de línea debidas a un sistema trifásico, equilibrado, simétrico, **secuencia inversa**, de tensiones de fase alternas senoidales producidas por una fuente de tensión conectada en triángulo presenta las siguientes características :

.- ***el valor eficaz de la intensidad de corriente de línea es igual al valor eficaz de la intensidad de corriente de fase multiplicado por*** $\sqrt{3}$

.- ***la terna de señales de intensidades de corriente de línea está <u>adelantada 30º (o T / 12)</u> respecto de la terna de señales de intensidades de corriente de fase***

Se deja como ejercicio el trazado del diagrama fasorial que representa las ternas de intensidades de corriente de línea y de fase correspondientes a una fuente de tensión alterna senoidal, trifásica, equilibrada, simétrica, de secuencia inversa, conectada en triángulo.