

Capítulo zz

Puente de Wheatstone

En este capítulo estudiamos el puente de Wheatstone y el puente de hilo para medir resistencias y variaciones pequeñas de resistencias.

Objetivos

- ✓ Puente de Wheatstone Ley de Ohm
- ✓ Puente de hilo

zz.1 Introducción

En muchas ocasiones es útil poder detectar pequeñas *variaciones* en el valor de una resistencia, más que su valor absoluto. El puente ideado por Samuel H. Christie y luego mejorado por Sir **Charles Wheatstone** es muy útil para este fin y se ilustra esquemáticamente en la Fig.ZZ.1. Este circuito se conoce como **puente de Wheatstone**.^{1,2,3} Modificado apropiadamente, este arreglo experimental se puede usar para medir impedancias, capacidades e inductancias. Este puente también es ampliamente utilizado en instrumentación electrónica.³

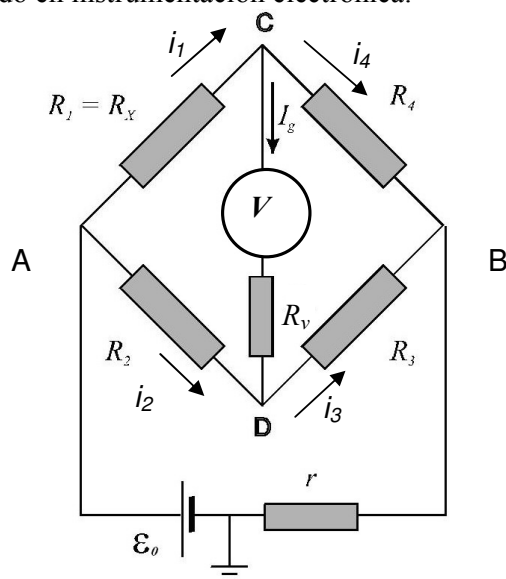


Figura ZZ.1 Puente de Wheatstone, r es una resistencia limitadora de la corriente por el circuito y \mathcal{E}_0 la tensión de alimentación del puente. El voltímetro conectado entre C y D mide la diferencia de potencial entre estos puntos y R_v su resistencia interna.

Suponemos que entre los puntos C y D hay un instrumento de medición de tensión o corriente (galvanómetro o amperímetro) cuya resistencia interna la designamos con R_v . Sin pérdida de generalidad supondremos que la resistencia $R_1 \equiv R_x$ puede variar, mientras que las otras resistencias (R_2, R_3, R_4, R_v y r) son constantes.

Si un galvanómetro o miliamperímetro mide la corriente I_g entre los nodos C y D, cuando I_g es nula se dice que el *punte está equilibrado* o balanceado, alternatively, si entre los puntos C y D se coloca un milivoltímetro, el puente está equilibrado si la diferencia de tensión entre C y D es nula. En definitiva, si el puente está equilibrado los potenciales eléctricos de los puntos C y D son iguales, es decir $V_{CD} = 0$. Es fácil ver que en tal caso $i_1 = i_4$ e $i_2 = i_3$, y que las caídas de tensión V_{CA} y V_{AD} son iguales y por consiguiente:

$$i_1 R_x = i_2 R_2, \quad (\text{ZZ.1})$$

y

$$i_1 R_4 = i_2 R_3. \quad (\text{ZZ.2})$$

Dividiendo miembro a miembro las dos últimas expresiones obtenemos:

$$R_x = \frac{R_2}{R_3} R_4 \equiv R_1^0, \quad (\text{ZZ.3})$$

que es la *condición de equilibrio o balance del puente*. Por lo tanto si se conocen los valores de R_2 , R_3 y R_4 , es posible calcular el valor de R_x . Con la notación R_1^0 designamos el valor de $R_1^0 \equiv R_1 \equiv R_x(\text{Equilibrio})$ que equilibra el puente.

Lo importante de este circuito es que permite determinar pequeñas variaciones en el valor de una de las resistencias (R_x) si las otras se mantienen constantes. Nótese que la condición de equilibrio (ZZ.3) es independiente del valor de la tensión aplicada \mathcal{E}_0 o si la tensión aplicada es continua (DC) o alterna (AC). Al depender la condición de equilibrio de una “*determinación de valor nulo*”, esta condición de equilibrio tampoco depende de la calibración absoluta de la escala del instrumento. Sólo el registro del valor cero debe ser confiable. Este tipo de circuito es muy útil cuando lo que *se necesita medir son variaciones* de resistencias.

Usualmente se mide la diferencia de tensión entre los puntos C y D con un voltímetro de muy alta resistencia, en este caso $R_v \geq 1 \text{ M}\Omega$, de modo que en general se cumple que:

$$R_v \gg \text{Máx} (R_1, R_2, R_3, R_4). \quad (\text{ZZ.4})$$

Si se cumple esta condición, podemos suponer que R_1 y R_4 están en paralelo con la combinación R_2 y R_3 . Además, esta condición implica que $I_g = 0$. Bajo estas condiciones, la diferencia de potencia entre los puntos C y D en función de la diferencia de potencia de A y B es:

$$V_{CD} = \frac{V_{AB}}{(R_1 + R_4)} R_1 - \frac{V_{AB}}{(R_2 + R_3)} R_2 = V_{AB} \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_4)(R_2 + R_3)}. \quad (\text{ZZ.5})$$

Incluyendo el efecto de la resistencia limitadora, r , usando las leyes de Kirchhoff^{1,2,3} se puede mostrar que, el valor de la diferencia de potencial entre los puntos C y D, V_{CD} , viene dada en general por:^{4,5}

$$\varepsilon = \frac{V_{CD}}{\varepsilon_0} = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{\Delta} \quad (\text{ZZ.6})$$

donde

$$\Delta = r \cdot (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) + (R_1 + R_4)(R_2 + R_3). \quad (\text{ZZ.7})$$

Se ve que la Ec.(zz.6) se reduce a las Ec.(zz.5) si $r \rightarrow 0$. En cualquier caso, cuando se cumple la condición de equilibrio (zz.3) la caída de tensión entre C y D: $V_{CD} = \varepsilon = 0$.

La Ec. (zz.6) también puede escribirse como:

$$\varepsilon(x) = \frac{V_{CD}}{\varepsilon_0} = \frac{R_1^0 \cdot R_3}{r \cdot (R_1(x) + R_2 + R_3 + R_4) + (R_1(x) + R_4) \cdot (R_2 + R_3)} \cdot x, \quad (\text{ZZ.8})$$

donde hemos introducido el parámetro adimensional x , definido por:

$$x \equiv (R_1/R_1^0) - 1 \quad \text{o bien} \quad R_1(x) = R_1^0(1+x), \quad (\text{ZZ.9})$$

Como se indicó previamente, R_1^0 es el valor de R_1 cuando el puente está balanceado ($x=0$).

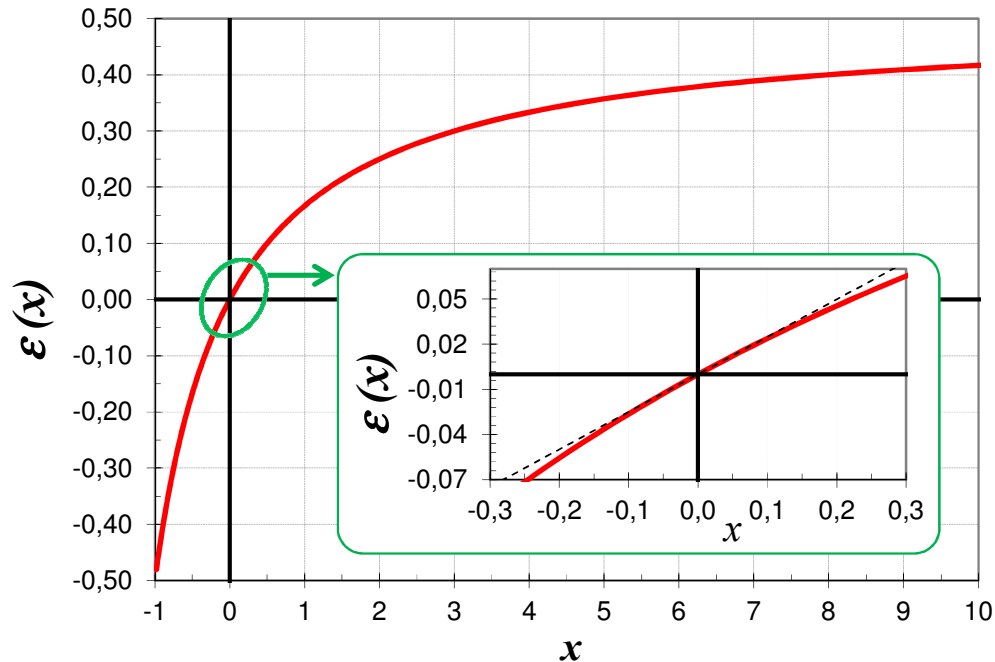


Figura ZZ.2 Representación de $\varepsilon(x) = V_{CD}/\varepsilon_0$ como función de x , según la Ec.(zz.8). La figura inserta ilustra la variación de $\varepsilon(x)$ para pequeñas variaciones de x .

La Figura zz.2, ilustra la dependencia de $\varepsilon(x)$ como función de x , descrita por la Ec.(zz.8). Hay dos propiedades interesantes del puente de Wheatstone:

- A) El valor de la tensión medida entre los puntos C y D, depende sólo de cuanto se desvía R_I respecto de su valor de equilibrio, R_1^0 , a través de la variable x ;
- B) Si la desviación de R_I respecto R_1^0 es pequeña ($|x| \leq 0,2$), $\varepsilon(x)$ varía aproximadamente linealmente con x . Por el contrario si la variación de R_I respecto de su valor de equilibrio es grande, la dependencia de $\varepsilon(x)$ con x , no es lineal, como se ilustra en la Figura zz.2.

En particular, si $r \ll \text{Min}(R_1, R_2, R_3, R_4)$, la expresión (ZZ.8) es equivalente a la Ec.(zz.6) y $\varepsilon(x)$ se puede escribir como:

$$\varepsilon(x) = \frac{R_1^0 R_3}{(R_2 + R_3)(R_1^0 + R_1^0 x + R_4)} x = S_R(\lambda, x) \cdot x \quad (\text{ZZ.10})$$

donde

$$S_R(\lambda, x) = \frac{R_1^0 R_3}{(R_2 + R_3)(R_1^0 + R_1^0 x + R_4)} = \frac{\lambda}{(\lambda + 1) \cdot (\lambda + \lambda \cdot x + 1)} \quad (\text{ZZ.11})$$

con

$$\lambda \equiv \frac{R_1^0}{R_4} = \frac{R_2}{R_3} \quad (\text{ZZ.12})$$

Una propiedad importante del puente de Wheatstone es que su sensibilidad, es decir el valor de $\varepsilon(x)$, para una pequeña variación de R_I o x . Según (zz.10), esta sensibilidad depende de la función $S_R(\lambda, x)$. Para $x \approx 0$, $S_R(\lambda, 0)$ tiene un máximo para $\lambda = 1$. Es decir la máxima sensibilidad del puente de Wheatstone se obtiene cuando opera cerca de las condiciones de equilibrio, o sea cuando se cumple: $R_1^0 \approx R_4$ y $R_3 \approx R_2$. Esta propiedad hace que este circuito sea muy útil para realizar mediciones muy precisas de *variación de una resistencia* (R_I), independientemente de su valor absoluto.

Nótese que cuando se usa un puente de Wheatstone, el instrumento que mide el desbalance entre C y D debe ser un dispositivo que opere *en modo diferencial*, ver Sección 24.4. Es decir, el instrumento debe tener una “tierra flotante”, por ejemplo un multímetro a baterías. Por lo general los sistemas de adquisición de datos estándares (interfaces A/D) conectados a las computadoras operan en *modo común*, por lo tanto no pueden usarse directamente para medir la diferencia de tensión entre C y D. Observemos que si la tierra común se conecta al punto C, por ejemplo; sería equivalente colocar un cable uniendo el extremo de la fuente que está a tierra con el punto C. Esto haría que el circuito resultante sea completamente diferente al de la Figura zz.2 que estamos analizando.

En el caso que se desee monitorear con un sistema de adquisición de datos estándar las variaciones de tensión CD, se pueden usar dos canales de la interfase, uno mide la tensión de C respecto de la tierra y otro la tensión de D respecto de la tierra común. Luego por software, se obtiene la diferencia de estas dos señales, de donde resulta V_{CD} . Otra alternativa, que sí permitiría usar un sistema de adquisición de datos, consistiría en alimentar el puente con una batería de tierra flotante, en este caso sí sería posible medir V_{CD} directamente con un solo canal del sistema de adquisición. Desde luego este problema también se evita si se utiliza un sistema de adquisición de datos con entrada diferencial.

Proyecto 75. Estudio experimental del puente Wheatstone

Equipamiento básico recomendado: Resistencias de carbón de 1 a 10 k Ω . Un potenciómetro de 10 k Ω o una caja de resistencia variable. Una fuente de tensión continua o batería. Un milivoltímetro.

Construya un puente de Wheatstone usando cuatro resistencias similares de resistencia entre 1 a 10 k Ω , con una de ellas (R_I) variable. Para R_I se puede usar una caja de resistencias o un potenciómetro. Elija una resistencia limitadora r , de modo que las corrientes en las distintas ramas del puente no excedan las corrientes máximas permitidas. Si se usa un potenciómetro como R_I es conveniente que el mismo tenga un contador de vueltas o un dial que indique el valor de la resistencia. Si se usa una caja de resistencias como R_I , su valor puede modificarse fácilmente de modo controlable.

Sugerencias de trabajo:

- ✓ Si la resistencia R_I es un potenciómetro no calibrado, usando un óhmetro, calibre el dial de la resistencia R_I , de modo de poder conocer en lo sucesivo el valor de esta resistencia por medio de la lectura del dial. Si usa una caja de resistencia, constate su calibración con el óhmetro. Asimismo, mida cada una de las resistencias, R_2 , R_3 , R_4 , y r .
- ✓ Con este puente someta a prueba experimental las expresiones (ZZ.6) y (ZZ.8). Represente gráficamente los valores medidos de V_{CD} y $\varepsilon(x)$ en función de x , junto a las predicciones teóricas, es decir las Ec.(zz.8). Elija el rango de variación de R_I de modo que x varíe entre 0,2 y 15 aproximadamente. ¿Qué puede decir acerca de la sensibilidad del método para detectar variaciones de $R_I(x)$ y de la linealidad de la función $\varepsilon(x)$ respecto de x .
- ✓ Discuta la posibilidad de usar una computadora para registrar la variación de V_{CD} . Para este fin, es aconsejable usar una batería, de por ejemplo 9V, para alimentar el circuito y evitar posibles problemas introducidos por las tierras de la fuente y el sistema de adquisición de datos.

zz.2 Puente de hilo

Una variante del puente de Wheatstone es el **puente de hilo** ilustrado en la Figura ZZ.2. Observamos que la topología del circuito es la misma que la descrita en la Figura ZZ.1, pero R_2 y R_3 son ahora las resistencias de los tramos AD y DB de un mismo alambre que une los puntos A y B. Es usual que el alambre tenga una longitud de aproximadamente un metro y sea de aleación metálica. El nicromel por ejemplo, tiene una alta resistividad comparada a los metales puros y buenas propiedades mecánicas. También es deseable que su sección transversal sea lo más uniforme posible.

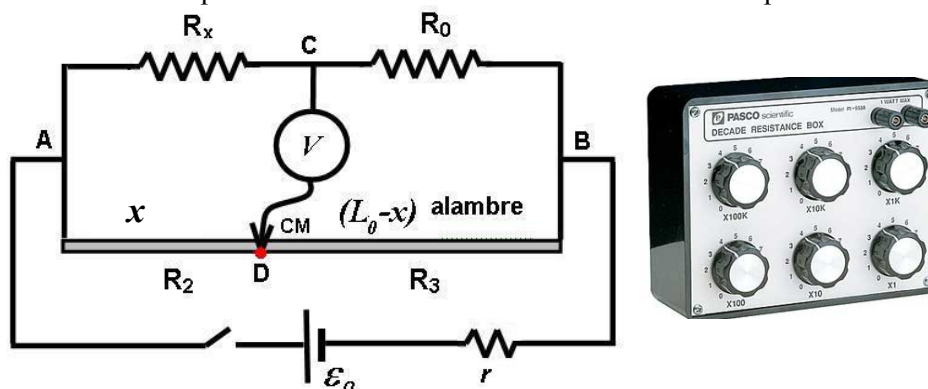


Figura ZZ.2 A la izquierda, puente de hilo. A la derecha una caja de resistencias.

El cursor o contacto móvil CM puede desplazarse sobre el alambre, cambiando así la longitud de cada tramo y, en consecuencia, los valores de R_2 y R_3 . En estas condiciones, el voltímetro queda conectado entre el punto fijo C y un punto D móvil.

Para un alambre de largo L_0 , área transversal uniforme A y resistividad ρ , de acuerdo con la Ec.(24.2), es proporcional a su longitud,

$$R_2 = R_{23} \frac{x}{L_0}, \text{ y } R_3 = R_{23} \frac{L_0 - x}{L_0}, \text{ con } R_{23} = \rho \frac{L_0}{A}. \quad (\text{ZZ.13})$$

La condición de balance del puente (ZZ.3) queda expresada como:

$$R_x = \frac{R_2}{R_3} R_0 = \frac{x}{L_0 - x} R_0, \quad (\text{ZZ.14})$$

que permite obtener R_x a partir del conocimiento de R_0 y la medición de las longitudes x y L_0 .

zz.2.1 ♣ Precisión del puente de hilo

Analicemos la precisión con que medimos R_x con el puente. Si llamamos ΔR_x a la incertidumbre absoluta de la determinación de R_x , $\Delta R_x / R_x$ es una medida de la precisión de la determinación. Para estimar la incertidumbre en la determinación de R_x , partimos de (zz.14):

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} \approx \frac{\Delta R_0}{R_0} + \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta(L_0 - x)}{L_0 - x} = \frac{\Delta R_0}{R_0} + \Delta x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{L_0 - x} \right) = \frac{\Delta R_0}{R_0} + \Delta x \cdot g(x), \quad (\text{ZZ.15})$$

donde hemos tomado $\Delta L_0=0$, ya que la longitud del hilo es fija y no varía. Para medir R_x debemos conocer el valor de R_0 con la mayor precisión posible. Por esta razón la resistencia R_0 debe ser una resistencia de precisión, de valor bien conocido. En caso de no disponer de una caja de resistencias bien calibrada, se puede utilizar una resistencia de valor conocido o que hayamos medido cuidadosamente. La variación de $\Delta R_x/R_x$ como función de x , puede analizarse utilizando la Ec.(ZZ.15). Esta función tiene un extremo cuando:

$$\frac{d(\Delta R_x/R_x)}{dx} = 0. \quad (\text{ZZ.15})$$

De la expresión (ZZ.15) resulta:

$$\frac{d(\Delta R_x/R_x)}{dx} \approx -\frac{\Delta x}{x^2} + \frac{\Delta x}{(L_0 - x)^2} = 0, \quad (\text{ZZ.16})$$

de donde surge que el error relativo mínimo en R_x se logra cuando $x \approx L_0/2$. Este resultado indica que el puente nos dará valores más precisos si el balance se alcanza con el cursor ubicado en el punto medio del alambre. En estas condiciones, de la Ec. (ZZ.11), vemos que $R_x \approx R_0$.

zz.2.2 ♣ Incertidumbres en las mediciones con puente de hilo: Para encontrar ΔR_x usando (ZZ.12), es necesario estimar las incertidumbres de las longitudes $L_1=x$ y $L_2=L_0-x$. Como las incertezas ΔL_1 y ΔL_2 están relacionadas, es razonable proponer $\Delta x \equiv \Delta L_2 = -\Delta L_1$. Por otra parte, la incerteza x tiene dos fuentes:

- a) La apreciación del instrumento de medición de la longitud x , Δx_{ap} .
- b) La determinación de la posición del cursor cuando equilibramos el puente, Δx_{det} , que depende de la sensibilidad del voltímetro y del tamaño del contacto entre el cursor y el alambre.

Para la determinación de la primera componente definimos:

$$\Delta x_{\text{ap}} = \frac{1}{2} (\text{Apreciación nominal de la regla}).$$

Para determinar Δx_{det} consideraremos la sensibilidad del voltímetro. Para determinar este parámetro, una posibilidad consiste en posicionar el voltímetro en la escala más sensible y buscar la posición x que equilibre el puente. Luego desplazamos el cursor (aumentamos x) lentamente hasta que el voltímetro aumente en un valor igual a la apreciación del instrumento (la menor variación que podemos detectar con nitidez) y medimos la nueva posición $x + d_1$. Seguidamente, disminuimos el valor de x , hasta que el voltímetro de nuevo aumente en un valor igual a la apreciación, registramos la nueva posición $x + d_2$:

$$\Delta x_{\text{det}} = \frac{d_1 + d_2}{2}. \quad (\text{ZZ.17})$$

La incertidumbre combinada de x es:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{ap}^2 + \Delta x_{det}^2} . \quad (ZZ.18)$$

Este valor puede usarse en la expresión ZZ.15 para el cálculo de ΔR_x .

Proyecto 76. Determinación del valor de una resistencia incógnita usando un puente de hilo

Equipamiento básico recomendado: Fuente de tensión de 0 a 10V. Puente de hilo, voltímetro, resistencia de valor conocido y una resistencia incógnita cuyo valor se busca.

Sugerencias de trabajo:

- ✓ Usando un puente de hilo, determine el valor de una resistencia incógnita R_x . Para ello se propone utilizar el circuito de la Figura ZZ.2. De ser posible, obtenga el valor aproximado de la resistencia incógnita con un óhmetro y elija la resistencia R_0 de modo que tenga un valor cercano al de R_x , a fin de minimizar los errores en la determinación de R_x .
- ✓ Conecte la resistencia incógnita R_x y R_0 en la rama correspondiente del puente usando cables de conexión cortos. Es conveniente usar como R_0 una caja de resistencias.
- ✓ Conecte el voltímetro entre los puntos A y B (cursor sobre el alambre) y hágalo operar inicialmente en una escala poco sensible. Esto es necesario puesto que no sabremos de antemano cuál será la magnitud de V_{AB} cuando el puente esté fuera de balance. Una vez logrado el equilibrio, puede pasar a una escala más sensible.
- ✓ Determine el mejor valor de R_x y su correspondiente incertidumbre.
- ✓ Use otras resistencias incógnitas, preferentemente de valores conocidos, de modo de obtener una verificación adicional del método experimental usado. Expresé sus resultados en la forma $R_x \pm \Delta R_x$.

Nota 1. Deslice con suavidad el cursor sobre el alambre y no apriete en exceso para hacer un buen contacto. Si el alambre se daña en los puntos de contacto, la resistencia del alambre ya no será uniforme debido a la disminución local de la sección del alambre.

Preguntas de evaluación

- ✓ Analice el efecto del voltaje de la fuente (\mathcal{E}_0) sobre la precisión del puente de Wheatstone. ¿Es razonable pensar que una duplicación del voltaje duplique la precisión?

- ✓ Analice el efecto de la sensibilidad voltímetro sobre la precisión del puente. ¿Es razonable pensar que se conseguirá el doble de precisión con un voltímetro doblemente más sensible?

Índice Alfabético

Marcadores	Nombre Marcador
Charles Wheatstone	C_Wheatstone
puente de Wheatstone	P_Wheatstone
Puente de hilo	Puente_hilo

Referencias

- ¹ R. Halliday, D. Resnick y M. Krane, Física para estudiantes de ciencias e ingeniería, 4ª ed., vol. II México, (1992).
- ² E.M. Purcell, Electricidad y Magnetismo Berkeley Physics Course – Vol. 2, , Editorial Reverté, Barcelona, (1969).
- ³ P. Horowitz and W. Hill, The art of electronics, 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, (1989).
- ⁴ R.P. Areny, Sensores y acondicionadores de señal, Marcombo Boireau Ed., Barcelona, (1994).
- ⁵ J. E. Fernández y E. Galloni, Trabajos prácticos de física, Editorial Nigar, Buenos Aires, (1968).