

Introducción a la Teoría de Errores de Medición

Autores: Dra. Paula Jasen – Dra. Estela González

La Física, como toda ciencia experimental, tiene como criterio de verdad la contrastación de sus teorías con datos surgidos de mediciones. Así, se dice que una ley, una hipótesis o un modelo representa adecuadamente la realidad (fenómeno físico) si las consecuencias que de ella se derivan se corresponden con los datos experimentales.

El progreso de la Ciencia se debe, en gran medida, a la observación de los fenómenos reproducidos en forma de experimentos, a fin de medir con más comodidad y a la posterior formulación de nuevas hipótesis luego de analizar los resultados obtenidos.

Antes de medir se debe desarrollar la capacidad de observar. Observar un fenómeno es descubrir las principales magnitudes físicas que están involucradas en él, analizar su comportamiento en forma global y estudiar cómo y con qué conviene medirlas.

Puesto que toda conclusión a que se llegue a partir de la experimentación debe ser, además de compatible con otros conocimientos, susceptible de verificación es imprescindible conocer el grado de confiabilidad de la medición efectuada para que la información sea intercambiable y reproducible; por ello, es necesario saber en qué condiciones se la obtuvo y qué tan fiable es dicha medición. Dicho grado de confiabilidad esta relacionado con el *error de la medición*.

Por tanto, el objetivo de este apunte es introducir al alumno en los procesos de medición y sus errores.

1. Conceptos básicos

1.1 Magnitud y cantidad

Una *magnitud física* es un atributo de un cuerpo, un fenómeno o una sustancia, que puede determinarse cuantitativamente; es decir, es un atributo susceptible de ser medido. Ejemplos de magnitudes son la longitud, la masa, la potencia, la velocidad, etc.

La operación de medir define la magnitud. Al pretender definir una magnitud en particular se recurre a una definición operacional. Estas propiedades se cuantifican por comparación con un patrón o con partes del mismo.

A la magnitud de un *objeto* específico, que es de interés medir, se llama *cantidad*. En otras palabras, una *cantidad* es el número, vector o matriz que permite comparar cualitativamente respecto de la que se tomó como unidad de la magnitud. Es decir, es el valor particular de la medición de una magnitud dada. Por ejemplo, si interesa medir la longitud de una barra, esa longitud específica será la cantidad.

1.2 Apreciación y estimación, precisión y exactitud

Se denomina *apreciación* o *apreciación nominal* de un instrumento a la menor división de escala de ese instrumento. Mientras que al menor intervalo que un observador puede estimar con ayuda de la escala se la denomina *estimación de una lectura*.

Se debe hacer una clara distinción entre *exactitud* y *precisión*. Es costumbre generalizada, sobre todo en algunas normas relativas a instrumentos de medida, designar a la exactitud como la precisión de los mismos pero, tienen significados muy diferentes.

La *exactitud* da una idea del grado de aproximación con que el valor medido concuerda con el valor verdadero; es decir, es la cercanía del valor experimental obtenido al valor real de dicha medida. Se la asocia con la *calidad* de la calibración del instrumento respecto de los patrones de medida.

La *precisión* indica repetibilidad de los resultados; es decir, el grado con el cual las medidas sucesivas arrojan idénticos valores. También está asociada a la *sensibilidad* o menor variación de la magnitud que se pueda detectar con un instrumento (o un método de medición).

En otras palabras, la *precisión* es la capacidad de un *instrumento* de dar el mismo resultado en diferentes mediciones realizadas en las mismas condiciones y *exactitud* es la capacidad de un *instrumento* de medir un valor cercano al valor de la magnitud real.

Ejemplo 1: El cronómetro utilizado en una experiencia de laboratorio es capaz de determinar la centésima de segundo pero adelanta dos minutos por hora mientras que el reloj de pulsera del observador no lo hace. En este caso se dice que el cronómetro continua siendo más preciso que el reloj común pero menos exacto.

Ejemplo 2: Considérese el tablero de dardos de la figura donde el objetivo es dar en el blanco. En esta analogía, el blanco simboliza el valor verdadero y cada tiro representa un valor medido:

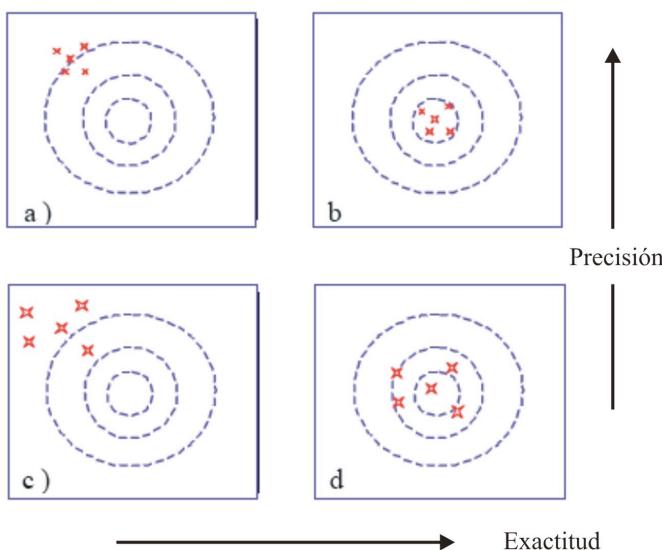


Figura 1.1: Ilustración de precisión y exactitud.

La dispersión de los puntos da una idea de la precisión (repetitividad de cada tiro), mientras que su centro efectivo (centroide) está asociado a la exactitud.

En la figura a), el tirador presenta una determinación precisa pero inexacta en el sentido de que cada tiro golpea en forma repetida el mismo punto (sector) en el tablero, pero no tiene buena puntería pues falla el blanco en cada ocasión. En cambio, la figura d) es más exacta pero imprecisa (cada tiro golpea en forma dispersa en una amplia zona cercana al centro pero ninguno repite el lugar).

La figura c) es menos precisa que a) (los tiros están más distanciados entre si que en caso a)).

La figura b) es una determinación más exacta y más precisa ya que cada tiro da en el centro.

1.3 Proceso de medición

Medir es asociar una cantidad a una dada magnitud física. Al resultado de medir se lo llama “medida”. El proceso de medición es una operación física experimental en la cual se asocia a una magnitud física un valor dimensionado, en relación a la unidad que arbitrariamente se ha definido para medir dicho valor.

Medir no representa en la mayoría de los casos una tarea sencilla. Requiere definir y ejecutar correctamente tres pasos: *qué* es lo que se va a medir, *cómo* se va a medir y *con qué* elementos se va a medir. Pueden distinguirse tres sistemas involucrados en el proceso de medición:

- 1 Sistema objeto (qué): la cantidad a medir.
- 2 Sistema de medición (con qué elementos): el instrumento que utilizamos para medir.
- 3 Sistema de comparación o referencia (cómo): la unidad empleada, con su definición y su patrón.

Ejemplo: Si se desea medir el largo de una mesa, el instrumento de medición podría ser una regla. Eligiendo el Sistema Internacional de Unidades (SI), la unidad será el metro y la regla a usar deberá estar calibrada en esa unidad o submúltiplos. La medición consistirá en determinar cuantas veces la regla y fracciones de ella entran en la longitud buscada.

El proceso, ha de ser efectuado por el operador u observador, puede ser definido únicamente en dos pasos:

- I. *Calibración*: involucra el sistema de medición y el sistema de comparación.
 - II. La medición propiamente dicha: involucra el sistema objeto y el sistema de medición.
- Una parte importante de la medición es la determinación del **error** o el **análisis de errores**.

1.4 Errores en el proceso de la medición

En todo proceso de medición existen limitaciones dadas por los instrumentos usados, el método de medición y/o el observador que realiza la medición. Estas limitaciones generan una diferencia entre el valor real o verdadero de la magnitud y la cantidad obtenida para la misma luego de medir. Dicha diferencia se debe a la *incertezza* o el error en la determinación del resultado de una medición; esta es inevitable y propia del acto de medir. Entonces, no hay mediciones reales con error nulo.

Ejemplo: Cuando se utiliza un termómetro para medir una temperatura el mismo proceso de medición

introduce un error ya que parte del calor del objeto fluye al termómetro (o viceversa), de modo que el resultado de la medición es un valor modificado del original debido a la inevitable interacción que se debe realizar. Es claro que esta interacción podrá o no ser significativa: Si se mide la temperatura de un metro cúbico de agua, la cantidad de calor transferida al termómetro puede no ser significativa, pero si lo será si el volumen en cuestión es de una pequeña fracción del mililitro.

Coloquialmente, es usual el empleo del término error como análogo o equivalente a equivocación. En ciencia e ingeniería, el error está más bien asociado al concepto de *incerteza* (también llamada inexactitud o incertidumbre) en la determinación del resultado de una medición. Por ello se dice que se conoce el valor de una magnitud dada en la medida en que se conocen sus errores. Con la indicación del error de medición se expresa, en forma cuantitativa y lo más precisamente posible, las limitaciones introducidas en la determinación de la magnitud medida.

Existen dos maneras de cuantificar el error de medición:

⇒ Mediante el llamado *error absoluto*, que corresponde a la diferencia entre el valor medido X_m y el valor real X_r :

$$E = |X_m - X_r| \quad (1.1)$$

⇒ Mediante el llamado *error relativo*, que corresponde a el cociente entre el error absoluto y el valor real X_r :

$$e = E/X_r \quad (1.2)$$

Normalmente es posible establecer un límite superior para el error absoluto, y el relativo, lo cual soluciona a efectos prácticos conocer la magnitud exacta del error cometido.

En general, en un dado experimento, todas las fuentes de incertidumbre estarán presentes, de modo que resulta útil definir el *error nominal de la medición* E_{nom} como:

$$E_{\text{nom}}^2 = E_{\text{ap}}^2 + E_{\text{def}}^2 + E_{\text{int}}^2 + E_{\text{exac}}^2 = E^2 \quad (1.3)$$

donde E_{ap} es el error de apreciación nominal del instrumento, que es la mínima variación de la magnitud que puede detectar el mismo; E_{def} es la incertidumbre asociada con la falta de definición del objeto a medir y representa su incertidumbre intrínseca (aquí se desprecia.). $E_{\text{int}} \equiv E_{\text{mét}}$ es la interacción con el método utilizado para medir; su valor se estima de un estudio cuidadoso del método usado. E_{exac} representa el error absoluto con que el instrumento en cuestión ha sido calibrado. (Es más útil en instrumentos eléctricos y se relaciona con la clase del instrumento; aquí se desprecia.)

El error nominal de la medición es el **error absoluto** de la misma.

Observación: El procedimiento de sumar los cuadrados de los errores es un resultado de la estadística y proviene de suponer que todas las distintas fuentes de error son independientes entre sí.

1.4.1 Calidad de la medición

Una medida es más exacta y por lo tanto de mejor calidad cuanto menor sea su error absoluto E . Si se ha medido la misma magnitud usando dos instrumentos distintos, la “comparación” del error absoluto indica cuál es la de mayor calidad. Pero si se quiere comparar la calidad de una dada magnitud (longitud) pero de distinta especie como diámetro y altura, o bien dos magnitudes distintas, se debe recurrir sus respectivos errores relativos, ec. 1.2, o los errores relativos porcentuales, $e\% = e \times 100\%$.

Ejemplo 1: Para determinar las dimensiones de una pieza rectangular de algunos centímetros de espesor se utilizan los siguientes instrumentos:

- una regla calibrada, apreciación de hasta 1 mm (o 0,5 mm en el mejor de los casos);
- un calibre, apreciación de al menos 0,1 mm (o 0,02 mm si dispone de vernier);
- un micrómetro, que permitirá llegar hasta 0,01 mm.

Como se utilizan tres instrumentos diferentes para medir la misma magnitud surge la pregunta sobre ¿cuál de los valores obtenidos es de mejor calidad?.

La calidad de la medida se puede “cuantificar” mediante el error absoluto de la medición o, lo que es lo mismo en estos casos, la apreciación del instrumento. Cuanto menor, en valor absoluto, sea la apreciación mayor calidad tendrá la medición. Por tanto, la medición realizada con el micrómetro es la de mejor calidad.

Ejemplo 2: Se ha medido el diámetro Φ de un cilindro con un calibre de 0,02 mm de precisión y su altura H con una regla de apreciación 0,5 mm.

H $H = (537,1 \pm 0,5) \text{ mm}$	Φ $\Phi = (15,34 \pm 0,02) \text{ mm}$
Error Absoluto $E_H = 0,5 \text{ mm}$	Error Absoluto $E_\Phi = 0,02 \text{ mm}$
Error Relativo $e_H = \frac{0,5}{537,1} = 0,0009$	Error relativo $e_\Phi = \frac{0,02}{15,34} = 0,001$
ó Error Relativo % $e_H \% = 0,09\%$	ó Error Relativo % $e_\Phi \% = 0,1\%$

Luego, $E_H > E_\Phi$ indica que el calibre mide longitudes con más exactitud que la regla, aunque $e_H \% < e_\Phi \%$ señala que la altura H medida con la regla es de mejor calidad que la medida del diámetro Φ hecha por el calibre.

1.5 Resultado de la medición

El resultado de cualquier proceso de medición se compone del valor medido (valor o medida de la magnitud en cuestión), de un símbolo que representa la unidad y del error que indica la “exactitud” con que se conoce el valor medido. Con lo cual, el resultado de una medición queda expresado de la siguiente forma:

$$X = (X_m \pm E) [u] \quad (1.4)$$

donde X es la magnitud que se desea medir o conocer; X_m es el valor medido (representa el número de veces que contiene a la unidad seleccionada); E es el error absoluto o incerteza (indica la exactitud con que se conoce el valor medido) (ec. 1.1) y $[u]$ es la unidad de medida empleada.

Entonces, por *medir* se entiende *conocer el valor de una magnitud y conocer también el error con que se la mide en la unidad seleccionada*.

1.5.1 Intervalo de incerteza

Se dice que hay concordancia entre las predicciones teóricas de una hipótesis, modelo o teoría y los resultados de una medición, cuando ambos valores coinciden dentro de un rango definido por el error de medición. El error “ E ” define alrededor del valor medido un intervalo de incerteza igual al doble del error ($2E$). Es decir, indica una zona dentro de la cual está comprendido el verdadero valor de la magnitud:

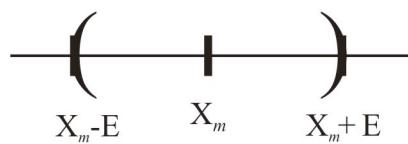


Figura 1.3: Intervalo de incerteza

1.6 Clasificación de errores de medición

Los errores pueden clasificarse según su naturaleza como:

- Errores groseros o espurios o fallas: son aquellos que provienen de la equivocación del operador (fallas). Por ejemplo, contar mal las oscilaciones del péndulo, anotar mal un valor por invertir los dígitos. Estos errores pueden evitarse siendo cautelosos y repitiendo la medición.

- Errores sistemáticos o sesgo: son errores inherentes al procedimiento de medición. Se deben en general a imperfecciones del instrumento, a la aplicación de un método erróneo, a la acción permanente de una causa exterior, etc. Actúan siempre con el mismo signo; por lo tanto, al reiterar las observaciones sus efectos se suman. Por ejemplo, un instrumento descalibrado repetirá, si se mide varias veces en las mismas condiciones, el mismo error con el mismo signo; es posible eliminarlo contrastando el instrumento con un patrón (esto es, calibrándolo). Estos errores son generalmente previsibles y pueden ser acotados, ya sea por la aplicación de correcciones o por dispositivos especiales del instrumento.
- Errores casuales o aleatorios o accidentales: se deben a perturbaciones que provienen de fuentes de error independientes e imposibles de detectar. Dan lugar a desviaciones pequeñas positivas y negativas, siendo más frecuentes cuanto más pequeña es la desviación. Este tipo de errores se acotan mediante un tratamiento estadístico.

1.7 Origen de los errores

Independientemente de la naturaleza de los errores, estos pueden deberse a causas que pueden clasificarse de la siguiente manera:

- Errores debidos al observador: son los que se atribuyen a un defecto en las percepciones sensoriales del observador (como por ejemplo mala visión) o a la posición incorrecta del mismo para observar la experiencia.
- Errores debidos al instrumento: estos errores dependen del instrumento utilizado y pueden dividirse en:
 - Defecto de construcción de escala o un corrimiento permanente de la misma*: se corrigen con una correcta calibración.
 - Deficiencias de construcción o desgastes*: estos errores los poseen todos los instrumentos y son muy difíciles de detectar (se pueden acotar con un correcto mantenimiento del aparato).
 - Limitaciones propias del sistema de lectura*: este tipo de error se entiende mejor con ejemplos: el grosor de la aguja indicadora o el espesor de la línea de división de la escala en un instrumento analógico.
- Errores debido al modelo físico elegido: son aquellos que provienen de las aproximaciones realizadas al modelar la realidad con fundamentos teóricos. Por ejemplo, para calcular el período de un péndulo se asume que este es puntual, el hilo es de masa despreciable y los ángulos pequeños.
- Errores causados por el propio acto de medición: estos errores se deben a que todas las veces que un experimentador hace una observación altera el fenómeno que está estudiando. Por ejemplo, cuando se mide la presión de un neumático con un manómetro, se libera algo de aire alterando la presión a medir.

Nota: Debido a que el origen de todos los tipos de error mencionados hasta aquí son de carácter sistemático, el error nominal es también utilizado como el error sistemático de la medición.

Estos errores se pueden disminuir tomando precauciones, pero nunca se puede eliminar completamente. Esto se debe a que el Principio de Incertezas de Heisenberg establece un límite inferior para el valor que pueden tomar una medida y en particular un error de medición.

- Errores producidos por condiciones externas al proceso de medición: Este tipo de errores se deben a las condiciones ambientales en las cuales se realiza una experiencia. Son, en general, calculables en forma de correcciones para cada instrumento y para cada método de medida. Por ejemplo, en las determinaciones calorimétricas hay que tener en cuenta la cantidad de calor que absorben el calorímetro, el termómetro, el agitador, etc.; esta cantidad se conoce como equivalente en agua del calorímetro.

2 Mediciones directas e indirectas

Se llama medición directa cuando la operación de lectura se hace directamente en el instrumento de medición utilizado para medir cierta magnitud. Por ejemplo, son mediciones directas la determinación de una distancia con una escala métrica, la de un peso con una balanza y la de una intensidad de corriente con un amperímetro.

No siempre es posible realizar una medida directa, porque no disponemos del instrumento adecuado, porque el valor a medir es muy grande o muy pequeño, porque hay obstáculos de otra naturaleza, etc.

Una medición indirecta es aquella que se puede calcular o determinar realizando la medición de una variable o más distintas de la que se desea conocer pero relacionadas de alguna manera con ella. Por tanto, una medición indirecta es la que resulta de una ley física o una relación matemática que vincula la magnitud a medir con otras magnitudes medibles directamente. Así, el volumen de un cuerpo esférico, por ejemplo,

$$V = (4/3)\pi r^3$$

relaciona la magnitud V a medir con el radio de la esfera r , medible en forma directa con un calibre o un tornillo micrométrico.

¿Con qué criterio se establece la incertezas cuando se realiza una sola medición?. No existe una receta para establecer el valor del error; es necesario un análisis detallado del método y del instrumento utilizado.

2.1 Error de una magnitud directa

Cuando se realiza una medición directa, el **error final** estará dado, generalmente, por el error nominal del instrumento (E_{ap}) siempre y cuando los otros términos de la ecuación (1.3) sean despreciables frente a éste:

$$E_{nom}^2 = E_{ap}^2 \quad (2.1)$$

Esto ocurre, en general, cuando una magnitud se mide una única vez donde el mejor valor será simplemente el valor medido y el error vendrá dado por el error nominal del instrumento.

Cuando el método introduce un error ($E_{int} = E_{mét}$) que no es despreciable frente al error nominal del instrumento entonces, el error efectivo estará dado por:

$$E_{nom}^2 = E_{ap}^2 + E_{int}^2 \quad (2.2)$$

Entonces, cuando se mide con una regla o un calibre, la inexactitud de la medición es directamente la del instrumento (regla: 1 mm, calibre: 0,02 mm).

En el caso de medir el periodo de un péndulo con un cronómetro digital (apreciación 0,01 s) disparado por el observador en forma manual, se debe tenerse en cuenta también interviene el error del observador (cuyo valor varía entre 0,1 - 0,2 s). Con lo cual, el error de la medición será la suma de los errores ya que la demora del operador al disparar y detener el cronómetro influye en la medición. Si el disparo del cronómetro se hiciera sin intervención humana, es decir, con un fotodiodo, el cual no introduce incertezas apreciables, entonces el error de la medición sería simplemente el error del instrumento.

2.2 Error de una magnitud indirecta: Propagación de errores o errores por propagación

Cuando se trabaja con magnitudes indirectas, el error de la medición estará dado por la transmisión de los errores de las magnitudes medidas directamente (al aplicar un determinado método ó formula matemática para obtener la magnitud requerida). A este procedimiento se le llama propagación de errores.

Sea L una magnitud que depende de otras que se pueden medir en forma directa, tal que

$$L = f(X, Y, Z) = L(X, Y, Z)$$

donde X, Y, Z son magnitudes medibles directamente:

$$\begin{aligned} X = X_m \pm E_X &\rightarrow E_X = \Delta X \\ Y = Y_m \pm E_Y &\rightarrow E_Y = \Delta Y \\ Z = Z_m \pm E_Z &\rightarrow E_Z = \Delta Z \end{aligned}$$

siendo el subíndice m indicativo de valor medido u observado.

El problema a resolver es cómo los errores de X , Y y Z afectan al error de L . Para ello, se expande la función $L = L(X, Y, Z)$ mediante su serie de Taylor

$$L = L(X_0, Y_0, Z_0) + \left. \left(\frac{\partial L}{\partial X} \right) \right|_{X_0} (X - X_0) + \left. \left(\frac{\partial L}{\partial Y} \right) \right|_{Y_0} (Y - Y_0) + \left. \left(\frac{\partial L}{\partial Z} \right) \right|_{Z_0} (Z - Z_0) + \left. \left(\frac{\partial^2 L}{\partial X^2} \right) \right|_{X_0} (X - X_0)^2 + \dots$$

donde las derivadas parciales están evaluadas en los valor medidos (o en los valores promedios, en el caso de varias mediciones).

Tomando $(X_0, Y_0, Z_0) = (X_m, Y_m, Z_m)$ en la expresión anterior resulta

$$\begin{aligned} (X - X_0) &= (X - X_m) = E_X \\ (Y - Y_0) &= (Y - Y_m) = E_Y \\ (Z - Z_0) &= (Z - Z_m) = E_Z \\ L(X_m, Y_m, Z_m) &= L_m \end{aligned}$$

Despreciando los términos de orden superior a uno y teniendo en cuenta que la incertezas no puede ser nula, resulta

$$E_L = L - L_m = \left| \frac{\partial L}{\partial X} E_X \right| + \left| \frac{\partial L}{\partial Y} E_Y \right| + \left| \frac{\partial L}{\partial Z} E_Z \right| \quad (2.3)$$

Es importante recordar que las derivadas parciales están evaluadas en los valores medidos (o medios en el caso de varias mediciones). El error obtenido en la expresión (2.3) es el máximo error posible.

Teniendo en cuenta las expresiones (1.3) y (2.3), el **error final de una medición indirecta** estará dado entonces por:

$$E^2 = E_{\text{int}}^2 = E_L^2 \quad (2.4)$$

3 Cifras Significativas (c.s.)

Los científicos e ingenieros procuran que sus datos experimentales no digan más de lo que pueden decir (“asegurar”) según las condiciones de medida en que fueron obtenidos. Por ello, ponen cuidado en el número de cifras con que expresan el resultado de una medición. El propósito de ello es incluir sólo aquellas que tienen algún significado experimental. Tales cifras reciben el nombre de cifras significativas. Una cifra es significativa cuando se la conoce con una exactitud aceptable. Así, cuando se mide con un termómetro que aprecia hasta $0,1^\circ\text{C}$ no tiene ningún sentido que se escriban resultados, por ejemplo, del tipo $36,25^\circ\text{C}$ o $22,175^\circ\text{C}$. Esto es, la cantidad de decimales después de la coma esta relacionada con la exactitud del instrumento (y no con la cantidad de dígitos que maneja una calculadora).

Las cifras significativas no tienen ninguna relación “fija” con la posición de la coma decimal; esto es, no tiene siempre que ser 1 o 2 lugares. La cantidad de decimales depende del instrumento utilizado para medir.

Una posible fuente de ambigüedad se presenta con el número de cifras significativas cuando se hace un cambio de unidades. El número de cifras significativas de un resultado es el mismo, cualquiera que sea la unidad en la que se lo exprese.

Dada una cantidad, la pregunta es ¿cuáles son cifras significativas?:

- a) Los ceros a la izquierda **no** son c.s.: Cuando los ceros figuran como primeras cifras de un resultado no son considerados como cifras significativas. No indican exactitud en el resultado de la medición sino que indican el orden de magnitud de la unidad que acompaña al mismo.

Ejemplo: La longitud d de un objeto es medida con una regla que aprecia hasta el milímetro; la cantidad

obtenida es de 3,2 cm. Este valor tiene dos c.s.. Ahora, se desea expresar dicho valor en metros, entonces:

$$d = 3,2 \text{ cm} = 0,032 \text{ m}$$

y el resultado sigue teniendo dos c.s.. Por esta razón es que se acostumbra a escribirlo recurriendo a las potencias de 10:

$$d = 3,2 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

b) Los ceros a la derecha: Cuando los ceros figuran como últimas cifras de números enteros, ello no implica que deban ser considerados necesariamente como cifras significativas:

i. Significativos: Cuando los ceros figuran como parte verdadera de la medición.

Ejemplo: No es lo mismo escribir que algo pesa 1 kg (1 c.s.) que anotar que pesa 1,00 kg (3 c.s.). La primera magnitud implica haber realizado la medición con una balanza graduada en kilogramos y la segunda involucra una balanza graduada en centésimos de kilogramos. Por lo que la segunda es *cien* veces más exacta que la primera.

ii. No significativos: Cuando los ceros figuran como últimas cifras de números enteros, su única función es especificar la posición del punto decimal.

Ejemplo: Considérese el valor estándar de la velocidad de la luz: $c = 300000000 \text{ m/s}$. Es razonable sospechar que las 9 cifras no sean significativas (ya que esto implicaría conocer la velocidad de la luz con una exactitud del orden de 1 m/s!). Expresando la cantidad de esa forma es imposible saber cuales son las c.s.. Podemos evitar esta ambigüedad utilizando la notación científica, por ejemplo, con 3 c.s.: $3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$.

3.1 Notación Científica

Una forma más compacta de escribir un resultado es expresarlo en su equivalente *notación científica*; esto consiste en reescribirlo respetando el siguiente formato:

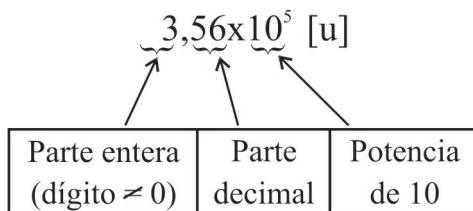


Figura 1.2: Esquematización de un número y sus partes.

Las ventajas de esta notación son:

- es compacta.
- es simple operar con ella.
- sirve para realizar comparaciones de ordenes de magnitud.

Observación: No se puede utilizar esta notación para “arreglar” las cifras significativas de un resultado.

3.2 Empleo de cifras significativas

- **Cifras significativas en operaciones aritméticas**

Cuando se dispone de una calculadora electrónica parece como si fuese “correcto” o “más exacto” escribir los resultados con tantas cifras decimales como aparecen en pantalla, pero esto la mayoría de las veces carece de sentido.

Para expresar correctamente los resultados de operaciones aritméticas, mediante cifras significativas, es necesario tener en cuenta que **dicho resultado no puede tener más decimales que el número de menor cantidad de decimales involucrado en la operación**.

- **Reglas de aproximación o acotación de números**

Cuando se requiere acotar la parte decimal de un número hay que fijarse en el número de su derecha. Si éste es mayor que 5, entonces se redondea incrementando el “último” dígito significativo en +1. Si es menor o igual a 5, el “último” dígito significativo permanece sin cambio; es decir, no se modifica.

Ejemplo: Se desea encontrar cuál es la superficie S de una tira de papel. Se mide su longitud y su ancho utilizando una regla que aprecia hasta el milímetro y se obtienen 53,2 y 4,1 cm, respectivamente. Multiplicando ambos resultados para calcular la superficie resulta:

$$S = 53,2 \times 4,1 = 218,12 \text{ cm}^2$$

Pero, ¿cuántas de estas cifras son verdaderamente significativas?. Teniendo en cuenta que, el número de cifras significativas de un producto entre datos que corresponden a resultados de medidas experimentales no puede ser superior al de cualquiera de los factores, el resultado en rigor se debe escribir como

$$S = 218,1 \text{ cm}^2.$$

4 Teoría Estadística de errores

En esta sección se estudia cómo minimizar la incidencia de los **errores casuales** en la medición de una magnitud que se repite N veces. Dado el carácter al azar de los errores casuales es claro que, al promediar los resultados, el promedio estará menos afectado por las desviaciones estadísticas que los valores individuales. Se asume que no se cometan errores groseros y que los sistemáticos han sido debidamente acotados de manera tal que, **los únicos errores a considerar sean los casuales**.

Para analizar la serie de N mediciones de una misma magnitud obtenida en igualdad de condiciones se emplea la Teoría Estadística. La idea es investigar la causalidad, y en particular, extraer alguna conclusión del efecto que algunos cambios en una de las variables (**variables¹ independientes**) tienen sobre las otras (**variables dependientes**).

La teoría estadística se basa en los tres postulados de Gauss:

- i) *Dada una serie de mediciones x_1, x_2, \dots, x_N , la mejor estimación de la magnitud medida o valor más probable de la misma es el promedio aritmético de todas las mediciones de esa cantidad efectuadas en las mismas condiciones:*

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} \quad \text{o bien} \quad \bar{x} = \left(\sum_{i=1}^N f_i x_i \right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^N f_i \right) \quad (3.1)$$

donde f_i representa las veces que el i -ésimo valor x_i se repite y $N = \sum_{i=1}^N f_i$. Es decir, la media aritmética o promedio, de una cantidad finita de números, es igual a la suma de todos ellos dividida entre el número de sumandos.

- ii) *Es igualmente probable cometer errores del mismo valor numérico y distinto signo.*
 iii) *En una serie de mediciones, es tanto más probable un error cuanto menor sea su valor absoluto. Es decir, los errores más pequeños son los más probables de cometer.*

Se dice que la calidad de una medición será tanto mejor cuanto más parecidos sean entre sí los valores medidos, o dicho de otra forma, más parecidos al valor medio \bar{x} .

Otros conceptos útiles en el análisis de una serie de mediciones son la mediana y la moda. La mediana hace énfasis en el verdadero “centro” del conjunto de datos. En otras palabras, la mediana es el valor central de un conjunto de observaciones ordenado por magnitud creciente o decreciente. El propósito de la misma es reflejar la tendencia central de la serie de medidas de manera que no esté influenciada por los valores extremos. Mientras que la moda (M) es aquel valor que ocurre más a menudo o con mayor frecuencia. La moda puede no existir, y cuando existe no necesariamente es única.

4.1 Error estadístico de la serie de N medidas

Dada una serie de N mediciones de la magnitud x , se define en primer lugar la desviación de la medición ε_i , la cual se mide respecto del valor medio \bar{x} y no es más que la diferencia existente

¹Variable: una cantidad que puede asumir cualquiera de un conjunto de valores (Diccionario Webster).

entre el valor i -ésimo medido y el valor más probable (o valor medio o promedio aritmético de la serie):

$$\varepsilon_i = \bar{x} - x_i = f_i(\bar{x} - x_i) \quad (3.2)$$

siendo, de nuevo, f_i las veces que el i -ésimo valor x_i se repite.

La sumatoria de la desviación ($\sum_i \varepsilon_i$) no tiene significado físico e incluso puede ser cero; en cambio, sí lo tiene la sumatoria de las desviaciones al cuadrado ($\sum_i \varepsilon_i^2$) que representa la forma en que los valores individuales fluctúan alrededor del promedio. Pero esta última cantidad depende de N . Para independizarse de N es que se define la varianza v como el promedio de las desviaciones cuadráticas:

$$v = \frac{\sum_i \varepsilon_i^2}{N}, \quad [v] = [u^2]$$

Es más común utilizar la raíz cuadrada de la varianza (\sqrt{v}) que proporciona la distribución de las mediciones alrededor del valor más probable pero con la misma unidad que los datos originales. Dicha cantidad se denomina la dispersión ó desviación estándar ó error cuadrático medio (σ) de cada lecturas:

$$\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{\sum_i \varepsilon_i^2 / N}, \quad [\sigma] = [u] \quad (3.3)$$

La desviación estándar es una medida del grado de dispersión de los datos alrededor del valor promedio. Dicho de otra manera, la desviación estándar es simplemente el "promedio" o variación esperada con respecto de la media aritmética. Una desviación estándar grande indica que los puntos están lejos de la media, y una desviación pequeña indica que los datos están agrupados cercanos a la media. Se suele representar por una **S** o con la letra sigma (σ). Aquí se adopta esta última.

Si, ahora, se realizan M series de N mediciones de x , y a cada una se le calcula el valor medio \bar{x} , es de esperar que estos valores $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_M$ varíen entre sí pero con una menor dispersión que las mediciones individuales y que lo hagan alrededor de un promedio general o "promedio de los promedios" de valor

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^M \bar{x}_j}{M} = \frac{\sum_{i,j=1}^{MN} \frac{x_i}{N}}{MN}$$

y la dispersión esos promedios, considerados como datos individuales de una serie de valores, será:

$$\xi = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^M (\bar{\bar{x}} - \bar{x}_j)^2}{M}}$$

Ésta es la dispersión estándar de cada promedio de las series de mediciones. Se puede demostrar que, para los casos de errores casuales de medición, esta dispersión o error estándar vale

$$\xi = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (3.4)$$

Esta relación es aproximada pero se convierte en igualdad para N suficientemente grandes, siendo σ la dispersión estándar en una de las M series de mediciones. Como el orden de magnitud es el mismo para cada una de las M desviaciones, la expresión (3.4) permite predecir la fluctuación

del promedio de una serie de N mediciones sin necesidad de volver a realizar más series de mediciones. A medida que el número N de mediciones aumenta, la distribución de los \bar{x}_j será normal con un error estándar del promedio. Éste será el estimador del error asociado a \bar{x} y es llamado error estadístico E_{est} (ó también error medio cuadrático de los promedios):

$$E_{est} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (3.5)$$

E_{est} nos da el orden de magnitud con el cuál el promedio habrá de fluctuar alrededor del “verdadero valor” de la magnitud en cuestión y se mantendrá casi constante cuando el número de observaciones es suficientemente grande. Cuanto más mediciones se hagan, tanto más se acercará el promedio al “verdadero valor” de la magnitud en cuestión, y la fluctuación será cada vez menor. Es por ello que el promedio es utilizado como ente representativo del valor más probable de una magnitud.

La expresión (3.5) representa la calidad del proceso de medición. La calidad del proceso de medición será mayor cuanto menor sea el cociente σ/\bar{x} , que en general es una constante del proceso de medición y no disminuye al aumentar N .

Resulta claro que, como E_{est} depende de N y es menor si se aumenta el número de mediciones, es posible disminuir el error estadístico pero nunca, desde el punto de vista físico, el error de \bar{x} puede ser cero. Sólo puede hacerse igual o del orden del E_{ap} . El mejor balance se logra cuando $E_{est} \approx E_{ap}$, dando así un criterio para determinar el número, óptimo (N_{op}) de mediciones que deben realizarse:

$$N_{op} \approx \left(\frac{\sigma}{E_{ap}} \right)^2$$

Observación: Como no tiene sentido disminuir E_{est} más allá de la apreciación Δx del instrumento de medición, resulta más conveniente cambiar el instrumento o mejorar el método que aumentar el número de mediciones. Es preferible obtener veinte “buenas” medidas y no mil mediocres.

De manera análoga a la sección 1.5.1, se pueden definir la desviación estándar relativa y la relativa porcentual.

4.2 Error final o efectivo de la medición

Cuando se desea combinar los errores sistemáticos (nominales) con los estadísticos, la prescripción usual es sumar los cuadrados de los errores absolutos y luego tomar la raíz cuadrada de este resultado. Si se esta midiendo una magnitud Z , el error final o efectivo de Z , E_Z , vendrá dado por la suma de los errores nominal y estadístico al cuadrado:

$$E_Z = \sqrt{E_{est}^2 + E_{nom}^2} \quad (3.6)$$

4.3 Histograma

Los histogramas son un método eficiente y común para describir distribuciones de variables continuas con un gran número de datos obtenidos experimentalmente (x_1, x_2, \dots, x_N). Un histograma es una gráfica de barras verticales u horizontales. Las barras o clases se definen de manera tal que cada una de las N observaciones medidas sea parte de una y sólo una categoría. El ancho de cada barra (Δx) es igual y fijo, de modo que el área de la barra sea proporcional al número de observaciones de la clase respectiva (Δn) que pertenecen al intervalo seleccionado, facilitando las comparaciones visuales. La gráfica constituye un despliegue visual de los datos que aporta, dando una idea de la forma que tiene la densidad de la variable x en estudio.

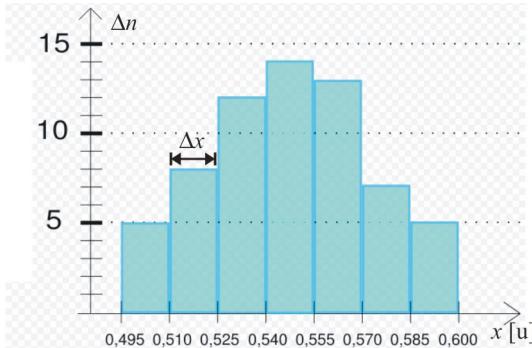


Figura 3.2: Gráfico típico de un histograma.

Entonces, los histogramas grafican las frecuencias (Δn) de aparición de una observación dentro de un intervalo de ancho fijo dado (Δx), siendo cada dato acomodado dentro de una de varias barras de acuerdo a alguna propiedad. Si la forma obtenida para el histograma es una barra central rodeada por barras decrecientes distribuidas más o menos simétricamente a su alrededor, se dice entonces que dicho histograma “presenta” una típica distribución normal o gaussiana.

Observación: La longitud del ancho del intervalo (Δx) es la mínima necesaria para que todos los valores de la serie estén representados en el histograma, si se toma como punto inicial de los intervalos el valor mínimo de dicha serie.

4.3.1 Pasos para la construcción de un histograma

Paso 1: Localizar los valores máximo y mínimo de las N observaciones. Calcular el rango de los datos, esto es la diferencia entre el valor máximo (x_{\max}) y el valor mínimo (x_{\min}) de las observaciones:

$$Rango = x_{\max} - x_{\min}$$

Paso 2: Calcular la longitud del ancho del intervalo Δx necesaria para cubrir dicho rango. Esto se logra dividiendo el rango por \sqrt{N} o bien por el número de barras que se pretende tener:

$$\Delta x = \frac{Rango}{\sqrt{N}} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\sqrt{N}} \quad \text{o bien} \quad \Delta x = \frac{Rango}{n^{\circ} \text{ barras}} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{n^{\circ} \text{ barras}}$$

La elección de una u otra forma de calcular Δx depende del caso particular analizado. Existen otras maneras pero estas son las más usadas. Recordar tener en cuenta las cifras significativas para acotar Δx .

Paso 3: Construir una tabla de intervalos – frecuencia (Δn). Cada intervalo corresponderá a una barra del gráfico cuya altura será, justamente, la cantidad de valores contenidos en él (Δn). Los intervalos se toman como cerrado-abierto o bien abierto-cerrado, siendo más usual la primera forma. El primero intervalo se construye tomando como punto inicial el valor mínimo de las observaciones y como punto final del mismo a la cantidad resultante de sumar $x_{\min} + \Delta x$. El segundo intervalo se construye tomando como valor de inicio el final del anterior y como final el inicial del mismo más Δx . Los demás intervalos se construyen de manera similar. Luego, contar cuantos datos caen dentro de cada intervalo (frecuencia absoluta de valores) e ingresarlos en la tabla.

Paso 4: Realizar la gráfica de la tabla construida mediante ejes ortogonales donde en el eje de las abscisas se colocan los intervalos y el eje de las ordenadas las frecuencias correspondientes. Cuando la gráfica se realiza “a mano” es conveniente utilizar papel milimetrado.

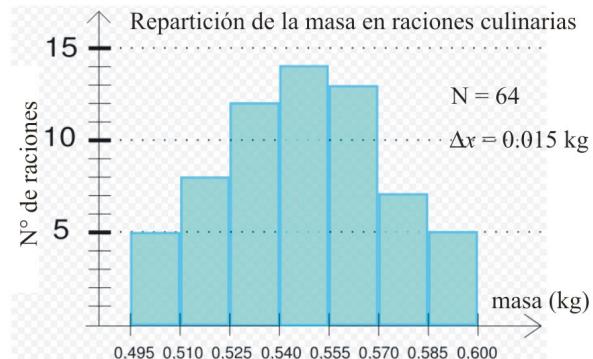


Figura 3.3: Histograma de la repartición de la masa en raciones.

Como todo gráfico debe llevar el título correspondiente (arriba al centro) e indicar los parámetros N y Δx que permitieron construir dicho gráfico (lado derecho) (ver Figura 3.3).

Es de práctica común utilizar en el eje de las ordenadas las frecuencias relativas en lugar de las frecuencias de observación. Las *frecuencias relativas* son calculadas dividiendo la frecuencia absoluta de cada intervalo por el número total de observaciones: $\Delta n/N$. Si la frecuencia por clase corresponde al eje vertical la gráfica de barras resultante se denomina *histograma de frecuencia*, mientras que en caso de usar dicho eje para la frecuencia relativa por clase se llama *histograma de frecuencias relativas*.

Ver en Apéndice A un ejemplo de construcción de un Histograma.

4.4 Distribución de Gauss

La experiencia muestra que, para todos los casos de **errores casuales**, el histograma correspondiente a la serie de N mediciones (x_1, x_2, \dots, x_N) puede ser aproximado por una función continua bien definida y única, cuya forma es siempre la misma, dependiendo sólo de dos parámetros que podrán variar de caso en caso. Los datos están distribuidos alrededor del promedio \bar{x} , donde algunos valores que estarán cerca del promedio y , otros menos en número, estarán lejos.

Se comprueba experimentalmente que Δn (esto es, el número de valores numéricos de la serie de mediciones que caen en un determinado intervalo entre x y $x+\Delta x$) depende del valor de x y de la longitud del intervalo Δx en forma aproximada según la expresión de tipo exponencial

$$\Delta n \approx \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right) \Delta x \quad (3.7)$$

La aproximación es tanto mejor cuanto mayor sea N y más pequeño sea Δx . La relación se transforma en igualdad para los diferenciales dn y dx . Como se ve, aparecen dos parámetros: σ y \bar{x} . N es sólo un factor de escala puesto que no modifica la forma de la curva, σ es la desviación estándar de cada medición y \bar{x} es el valor medio.

La expresión anterior en términos de diferenciales se llama *densidad de observaciones*:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Delta n}{\Delta x} = \frac{dn}{dx} = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Nuevamente, dn es el número de observaciones cuyos valores están comprendidos entre x y $x+dx$. La variable x en el exponente se ubica en el intervalo dx que tiene una frecuencia de observaciones dn . La representación gráfica de la densidad de observaciones se llama *curva de distribución de Gauss* (ver Figura 3.4). La distribución da el número de observaciones en función de x y es la integral de la expresión anterior.

La curva de Gauss presenta un máximo en $x = \bar{x}$, es simétrica respecto de ese valor medio presentando una forma de campana y sus puntos de inflexión son $\bar{x} \pm \sigma$; tiende a cero a medida que el valor x se aleja del promedio.

Si bien es imposible predecir el valor exacto que saldrá de una medición dada, sí se puede decir algo sobre la probabilidad de que ese valor este comprendido en un intervalo dado. La predicción de estas probabilidades es la utilidad fundamental de la función de Gauss. La probabilidad es, por definición, el cociente entre el número de casos que están en el intervalo seleccionado, y comprendido por dos de los valores de x (ΔN), y el número total de datos (N). La probabilidad de que un valor dado caiga entre $\bar{x} - \sigma$ y $\bar{x} + \sigma$ es del 68%:

$$\frac{\Delta N}{N} \times 100\% = \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{x}-x}^{\bar{x}+x} \exp\left(-\frac{(\bar{x}-x)^2}{2\sigma^2}\right) dx \right] \times 100\% = 68\%$$

El valor de μ que determina el intervalo $x \pm \mu$ dentro del cual cae el 50% de las observaciones se denomina *error más probable del promedio*; dicho valor se obtiene de una integración, similar a la anterior, y de donde resulta que $\mu \approx (2/3)\sigma$.

Para graficar “analíticamente” (sin la ayuda de una computadora) la curva de Gauss se requiere el cálculo previo de ciertos puntos de característicos de la expresión (3.7), entre los que se encuentran los puntos de inflexión, y sus frecuencias absolutas (Δn). Siendo lo más conveniente para reflejar dichos cálculos la confección de una tabla, como la que se da a continuación. Los puntos mencionados son mostrados en la Figura 3.4.

Tabla 4.1: Puntos característicos de la curva de Gauss con sus frecuencias respectivas.

x_i	$e^{-(\bar{x}-x_i)^2/2\sigma^2}$	Δn
\bar{x}	1	
$\bar{x} \pm \sigma/2$	$e^{-1/8}$	
$\bar{x} \pm \sigma$	$e^{-1/2}$	
$\bar{x} \pm 2\sigma$	e^{-2}	

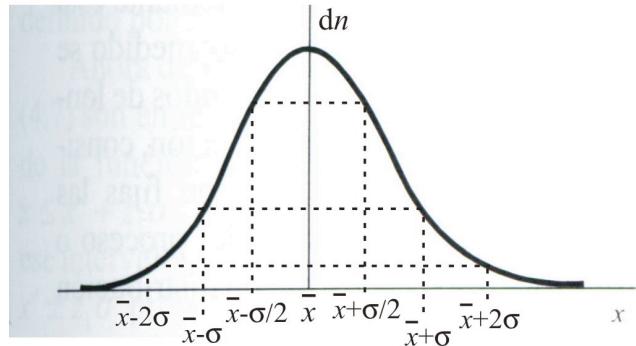


Figura 3.4: Curva de distribución de Gauss con sus puntos de inflexión.

Ver en Apéndice B un ejemplo de construcción de una Curva de Gauss.

5 Método de los cuadrados mínimos

Hasta ahora se ha aprendido a medir una magnitud física y valorar el resultado desde el punto de vista estadístico, pero esto por lo general es sólo el primer paso y no alcanza para comprender el fenómeno. La física real empieza cuando se estudia la interdependencia casual entre dos o mas magnitudes. Por lo tanto, para establecer leyes físicas que permitan predecir la evolución de un sistema es necesario conocer en forma experimental el tipo de relación que hay entre las cantidades de las magnitudes involucradas y representarla matemáticamente.

En la práctica, las cantidades están afectadas por errores de medición o fluctuaciones intrínsecas, por lo que es necesario aplicar un algoritmo que permita determinar algo así como “la relación más probable” entre las magnitudes físicas vinculadas en forma casual por un mecanismo físico. El caso más sencillo es suponer que la relación entre las magnitudes es lineal, y es que se estudiará en esta sección.

Con el propósito o bien de descubrir o bien de verificar la ley física que vincula las variables de la serie de valores (x, y) obtenida experimentalmente se asume que estas son en principio independientes, de modo que sus incertezas también lo son. Como consecuencia, se han obtenido N pares de valores (x_i, y_i). Para definir cuál es la variable dependiente y cuál la independiente, se observan los errores de medición de cada uno. La de menor error absoluto será considerada la variable independiente; siendo el error de esta variable, en general, despreciable en comparación

con la otra. Por lo tanto, el método de ajuste por Cuadrados Mínimos consiste en obtener una curva tal que la distancia vertical de los valores experimentales a la misma sea mínima.

Suponiendo que los puntos experimentales están visiblemente sobre una recta, en general, la ecuación es de la forma

$$y = ax + b \quad (4.1)$$

y el problema es determinar el valor más adecuado de cada parámetro (a y b). Si todos los puntos estuviesen exactamente sobre una recta, se cumpliría que

$$y_i - ax_i - b = 0 \quad \forall i$$

pero como son mediciones de laboratorio, siempre ha de encontrarse una diferencia o desviación entre ambos miembros de la ecuación (4.1), a la que se llama residuo e_i :

$$y_i - ax_i - b = e_i \neq 0$$

donde e_i describe el error en el ajuste del modelo en el punto i -ésimo.

Entonces, se han obtenido N lecturas (x_i, y_i) y se han producido, por lo tanto, N desviaciones o errores e_i ; pero obsérvese que el valor correspondiente a cada par depende del valor que se le asignen a los parámetros a y b . Se puede aplicar el criterio conocido de elegir como valores más probable de estos parámetros aquellos que hacen mínima a $S = \sum e_i^2$; o sea, serán las soluciones a la condición doble:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a} \right) \Big|_{a=\bar{a}} = 0; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial b} \right) \Big|_{b=\bar{b}} = 0$$

En el caso de una recta:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial a} \right) \Big|_{a=\bar{a}} &= \frac{\partial}{\partial a} \sum (y_i - ax_i - b)^2 \Big|_{a=\bar{a}} = 2 \sum (y_i - \bar{a}x_i - \bar{b})(-x_i) = 0 \\ \left(\frac{\partial S}{\partial b} \right) \Big|_{b=\bar{b}} &= \frac{\partial}{\partial b} \sum (y_i - ax_i - b)^2 \Big|_{b=\bar{b}} = 2 \sum (y_i - \bar{a}x_i - \bar{b})(-1) = 0^2 \end{aligned}$$

de donde resulta el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \bar{a} \sum x_i^2 + \bar{b} \sum x_i - \sum x_i y_i &= 0 \\ \bar{a} \sum x_i + \bar{b} N - \sum y_i &= 0 \end{aligned}$$

y cuya solución provee los valores buscados \bar{a} y \bar{b} :

$$\bar{a} = \frac{\sum x_i \cdot \sum y_i - N \sum x_i y_i}{(\sum x_i)^2 - N \sum x_i^2}; \quad \bar{b} = \frac{\sum x_i \cdot \sum x_i y_i - \sum x_i^2 \sum y_i}{(\sum x_i)^2 - N \sum x_i^2} \quad (4.2)$$

Observación: Para la mayor parte de las aplicaciones científicas o ingenieriles hay una distinción clara entre las variables en lo que respecta a su papel en el proceso experimental. A menudo existe una sola variable *dependiente* o *respuesta* (y) que no se controla en el experimento. Dicha respuesta depende del valor particular de una o más *variables de independientes*, x o x_i respectivamente; éstas se miden con un error insignificante y a menudo realmente se controlan en el experimento (es decir, se conocen anticipadamente ayudando a predecir la variable y). Las variables independientes no son variables aleatorias.

5.1 Errores de los parámetros

² Obsérvese que esta condición es $\sum e_i = 0$.

¿Cuán bien han quedado determinados los parámetros \bar{a} y \bar{b} mediante el método de los cuadrados mínimos?. Dicho de otra manera, ¿qué intervalos de incertezas corresponde asignar a los valores de \bar{a} y \bar{b} así determinados?

Se mantiene la hipótesis, para simplificar el trabajo, que las incertezas de x son despreciables comparadas con las de y . Además, se repiten M veces las mediciones de cada una de las y_i , con lo cual, los valores de y_i fluctuarán mientras que los de x_i no, obteniéndose así un conjunto de valores

$$y_{ik} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, M) \quad \text{para cada } x_i$$

Se puede considerar a \bar{a} y a \bar{b} como cantidades medidas indirectamente, siendo y_i (con $i = 1, 2, 3, \dots, N$) las N cantidades medidas directamente, cada una con su error medio cuadrático $\sigma(y_i)$. Entonces, se puede aplicar tanto a \bar{a} como a \bar{b} la fórmula para calcular el error medio cuadrático de N lecturas indirectas:

$$\sigma_a = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \bar{a}}{\partial y_i} \right)^2 \sigma^2(y_i)} ; \quad \sigma_b = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \bar{b}}{\partial y_i} \right)^2 \sigma^2(y_i)}$$

Si las diferentes y_i han sido obtenidas en las mismas condiciones, todas tendrán prácticamente el mismo σ :

$$\sigma(y_1) = \sigma(y_2) = \dots = \sigma(y_i) = \dots = \sigma(y)$$

resultando entonces una simplificación en la expresión de los errores medios cuadráticos de a y b

$$\sigma_a = \sigma(y) \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \bar{a}}{\partial y_i} \right)^2} ; \quad \sigma_b = \sigma(y) \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \bar{b}}{\partial y_i} \right)^2}$$

Pero quedan aún por calcular $(\partial \bar{a} / \partial y_i)$ y $(\partial \bar{b} / \partial y_i)$. Llamando D al denominador común de las expresiones de \bar{a} y \bar{b} , las derivadas resultan

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial y_i} = \frac{1}{D} \left(\sum_{j=1}^N x_j - Nx_i \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \bar{b}}{\partial y_i} = \frac{1}{D} \left[\left(\sum_{j=1}^N x_j \right) x_i - \sum_{j=1}^N x_j^2 \right];$$

luego, la suma de los cuadrados para la primera de ellas es

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \bar{a}}{\partial y_i} \right)^2 &= \frac{1}{D^2} \sum_{i=1}^N \left[\left(\sum_{j=1}^N x_j - Nx_i \right)^2 \right] = \frac{1}{D^2} \sum_{i=1}^N \left[\left(\sum_{j=1}^N x_j \right)^2 - 2Nx_i \sum_{j=1}^N x_j + N^2 x_i^2 \right] \\ &= \frac{1}{D^2} \left[N \left(\sum_{j=1}^N x_j \right)^2 - 2N \sum_{i=1}^N x_i \sum_{j=1}^N x_j + N^2 \sum_{i=1}^N x_i^2 \right] \end{aligned}$$

Teniendo presente que $\sum_{i=1}^N x_i = \sum_{j=1}^N x_j$ (pues sólo difieren en el nombre del índice) entonces

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \bar{a}}{\partial y_i} \right)^2 = \frac{1}{D^2} \left[-N \left(\sum_{j=1}^N x_j \right)^2 + N^2 \sum_{i=1}^N x_i^2 \right] = \frac{N(-D)}{D^2} = -\frac{N}{D}$$

Con un desarrollo similar se llega a que

$$\sum_{i=1}^D \left(\frac{\partial b}{\partial y_i} \right)^2 = - \frac{\sum x_i^2}{D}.$$

Por lo tanto, las expresiones para los errores quedan reducidas a

$$\sigma_a = \sigma(y) \sqrt{\frac{-N}{D}} ; \quad \sigma_b = \sigma(y) \sqrt{\frac{-\sum x_i^2}{D}}$$

En la práctica no es frecuente que se tengan M lecturas de cada punto (x_i, y_i) , más bien para cada x_i sólo se lee y_i una vez o unas pocas veces de modo que no hay cómo calcular $\sigma(y)$. Sin embargo, es posible estimar el valor sobre la base de la siguiente hipótesis: las desviaciones de las y_{jk} alrededor de su promedio y_i son del mismo orden que las diferencias e_i ; en cuyo caso

$$\sigma(y) \approx \sqrt{\sum e_i^2 / N} ;$$

con lo cual, las expresiones finales para los errores resultan

$$\begin{aligned} \sigma_a &\approx \sqrt{N/-D} \cdot \sqrt{\sum e_i^2 / N} \approx \sqrt{\sum e_i^2 / -D} \\ \sigma_b &\approx \sqrt{\sum x_i^2 / -D} \cdot \sqrt{\sum e_i^2 / N} \approx \sigma_a \sqrt{\sum x_i^2 / N}. \end{aligned}$$

Obsérvese que este método de cuadrados mínimos puede aplicarse a funciones no lineales, siempre que la función que relacione los puntos sea linearizable (como por ejemplo $y = bx^a$).

5.2 Diagramas de dispersión

Ahora bien, la pregunta es cuando es posible aplicar el método de Cuadrados Mínimos o Regresión Lineal. Si las cantidades observadas tienen una fuente común de variación se dice que ellas están correlacionadas. Para averiguar si existe o no correlación entre las dos variables se construye un diagrama de puntos (x,y) en base a un sistema de ejes cartesianos. Se obtiene así gráficamente un conjunto de puntos espaciados al azar llamado diagrama de dispersión. En general se presentan tres situaciones:

- a) Los valores están distribuidos simétricamente alrededor de los valores de los promedios de \bar{x} y de \bar{y} o sea, del punto de coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) , formando una nube aproximadamente circular (Figura 4.1a).
- b) La distribución de puntos (valores) se aproxima a una curva con desviaciones de poca entidad (Figura 4.1b).
- c) Los puntos forman una nube alrededor de una curva con fluctuaciones de cierta importancia (Figura 4.1c).

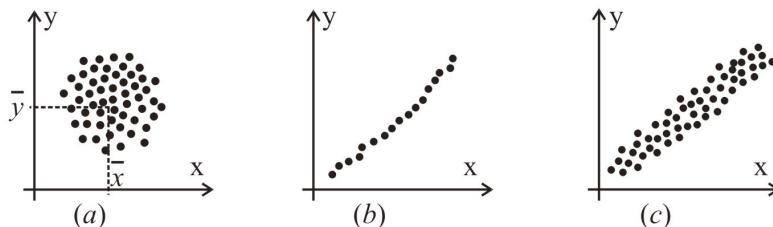


Figura 4.1: Representación gráfica de series de puntos experimentales formando distintos tipos de distribución: (a) circular, (b) con poca fluctuación, casi lineal, y (c) con fluctuaciones de importancia.

En el caso a), las variables no tienen correlación, es decir, no hay dependencia entre ellas y se puede observar que las distancias de estos puntos a una recta hipotética es muy grande, por lo que no se cumple con la hipótesis establecida.

En el caso b), existe una dependencia casi total entre x e y ; esto es, existe correlación y es “fuerte”. Es decir, hay una relación funcional $y = f(x)$. Las fluctuaciones se deben a las incertezas casuales y de apreciación, y pueden ser compensadas con un análisis estadístico.

En el caso c), existe una zona de dispersión con pendiente positiva o negativa. La correlación es estadística; es decir, las variables están vinculadas por factores conocidos o ignorados pero muy difíciles de aislar. No es interesante desde el punto de vista de la experimentación ya que el diseño de la experiencia incorpora excesivas incertezas; lo que permitiría encontrar más de una recta posible, siendo imposible determinar cual de ellas es la correcta.

La gráfica de la curva a la que se aproximan los datos del caso b) es la llamada *curva de regresión de y sobre x*. Cuando la curva es una recta se llama recta de regresión de y sobre x.

Es claro que *el primer paso* es realizar el diagrama de dispersión y una vez comprobado el comportamiento lineal se puede proceder a realizar los cálculos correspondientes a fin de determinar los coeficientes de la recta correspondiente a esos puntos.

Un ejemplo de aplicación de este método se encuentra detallado en el Apéndice C.

Apéndices

Apéndice A: Ejemplo de confección de un Histograma

Se desea dibujar el histograma para la serie de 30 valores de la altura (m) de los estudiantes de un curso que se detallan en la siguiente tabla:

1,61	1,63	1,62	1,61	1,63	1,64	1,60	1,64	1,63	1,61
1,64	1,62	1,63	1,60	1,65	1,64	1,61	1,62	1,63	1,64
1,63	1,65	1,61	1,62	1,65	1,62	1,63	1,64	1,63	1,62

Para ello hay que tener en cuenta los pasos de construcción de histogramas dados en la sección 3.4.1.

Paso 1: Lo primero que se debe hacer es buscar los valores máximo y mínimo. Estos son: 1,65 m y 1,60 m. Luego, con ellos calcular el Rango:

$$\text{Rango} = 1,65 \text{ m} - 1,60 \text{ m} = 0,05 \text{ m}$$

Paso 2: Entonces, el intervalo será de un ancho de:

$$\Delta x = 0,05 \text{ m} / \sqrt{30} = 0,0091 \text{ m}$$

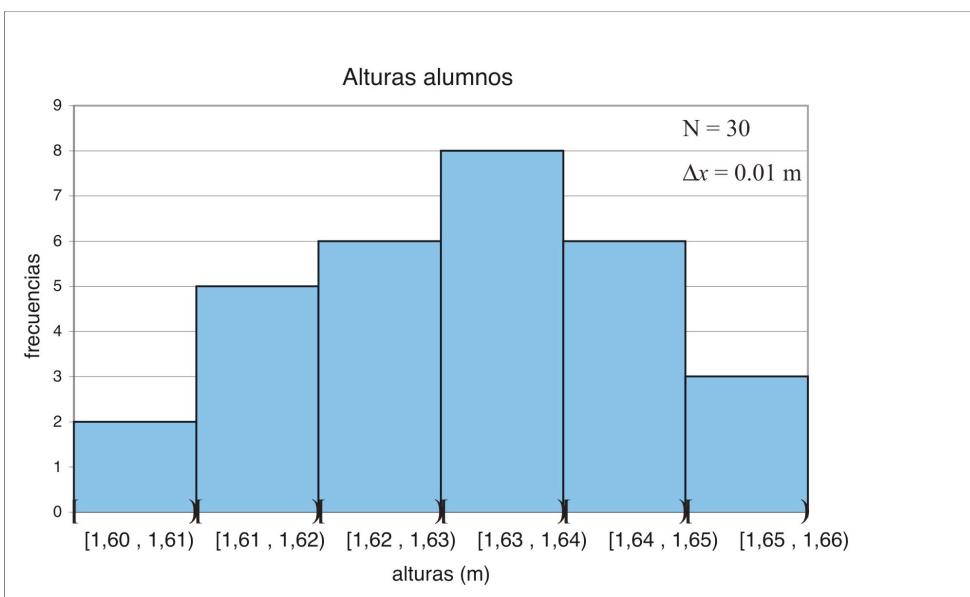
Pero este valor es mas pequeño que la apreciación del instrumento por lo cual no se puede utilizar. Si acotamos dicho valor a la cantidad de cifras significativas y la magnitud correspondiente, se obtiene que:

$$\Delta x \approx 0,01 \text{ m} \text{ (coincidente con la apreciación del instrumento de medida).}$$

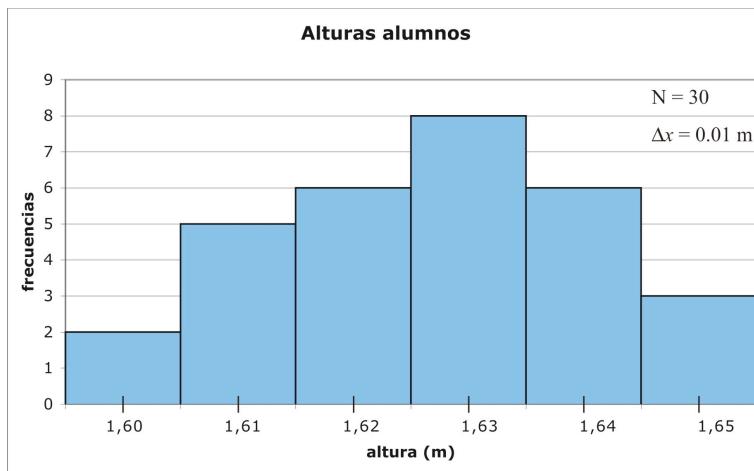
Paso 3: Luego, la tabla correspondiente a los intervalos y sus frecuencias es

Intervalos (m)	frecuencia
[1,60 , 1,61)	2
[1,61 , 1,62)	5
[1,62 , 1,63)	6
[1,63 , 1,64)	8
[1,64 , 1,65)	6
[1,65 , 1,66)	3

Paso 4: El histograma se realiza levantando por cada intervalo una “barra” o “columna” tan alta como la frecuencia de valores asociada correspondiente; entonces,



Otra manera de realizar el mismo gráfico es colocando el centro de la “barra” en el valor que se está representando en ella; esto se suele hacer cuando son pocos los valores a representar en el eje horizontal y el ancho de la barra coincide con la apreciación del instrumento:



Apéndice B: Ejemplo de construcción de una Campana de Gauss.

Se desea construir la campana de Gauss para la serie de $N = 30$ valores dada en el Apéndice anterior. Para ello se precisa completar la Tabla 3.1, con lo cual es necesario calcular previamente el valor medio de la serie y la desviación estándar:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} = 1,63 \text{ m}$$

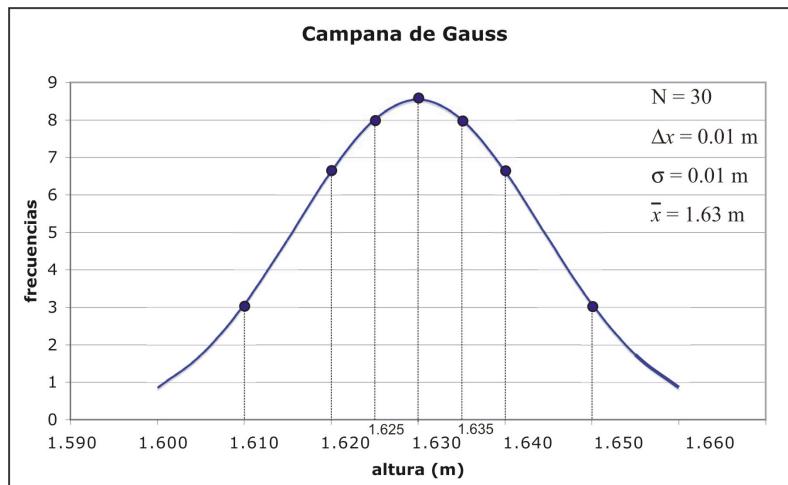
$$\sigma = \sqrt{v} = \sqrt{\sum_i \varepsilon_i^2 / N} = \sqrt{\sum_i (\bar{x} - x_i)^2 / N} = 0,014 \text{ m} \cong 0,01 \text{ m}$$

Entonces, siendo $\Delta n \cong \frac{N}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\bar{x} - x_i)^2}{2\sigma^2}\right) \Delta x$ y $\Delta x = 0,01 \text{ m}$ se obtiene

Tabla: Valores para construir la Campana de Gauss.

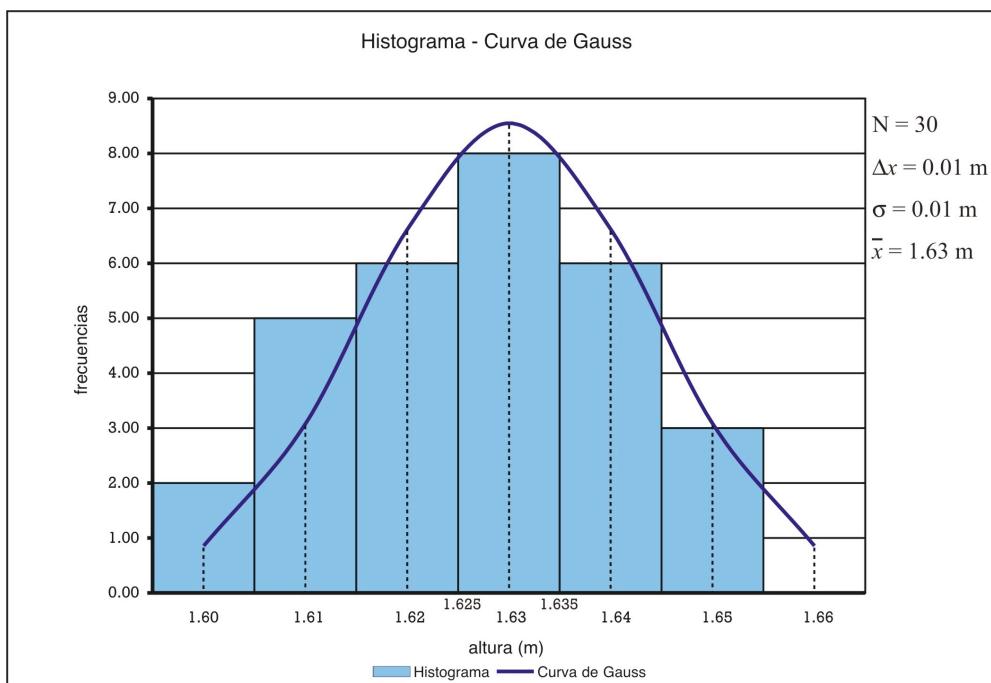
x_i	Valor	$\exp\left(-(\bar{x} - x_i)^2 / 2\sigma^2\right)$	Δn^\bullet
\bar{x}	1,63 m	1	8,55 m
$\bar{x} - \sigma/2$	1,625	$e^{-1/8}$	7,54 m
$\bar{x} + \sigma/2$	1,635 m	$e^{-1/8}$	7,54 m
$\bar{x} - \sigma$	1,62 m	$e^{-1/2}$	5,18 m
$\bar{x} + \sigma$	1,64 m	$e^{-1/2}$	5,18 m
$\bar{x} - 2\sigma$	1,61 m	e^{-2}	1,16 m
$\bar{x} + 2\sigma$	1,65 m	e^{-2}	1,16 m

Con lo cual la gráfica queda de la siguiente forma



♦ Los cálculos de los valores de Δn están hechos con $\sigma = 0,014 \text{ m}$

Observación: La curva de Gauss por si sola no es útil para sacar una conclusión; es por ello que se la superpone con el histograma de la serie respectiva. Por ejemplo, un corrimiento hacia la izquierda o la derecha de la curva de Gauss respecto del histograma indica que hay errores sistemáticos además de los casuales.



Nota: El valor medio y la desviación estándar de la serie han sido calculados con la calculadora en modo SD insertando los datos de la serie acorde a cada modelo y marca. Dichos valores también podrían ser utilizado un software que realice tales cálculos.

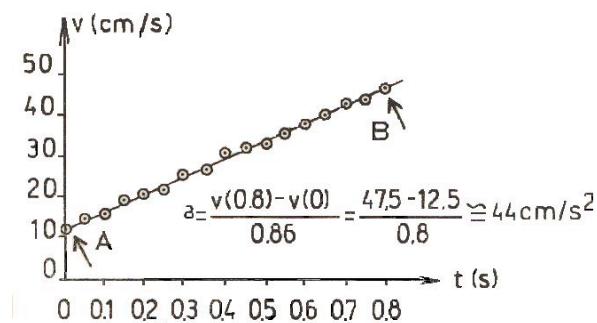
Apéndice C: Método de Cuadrados Mínimos. Ejemplo de Aplicación.

Se trata de determinar los parámetros de la recta que más se acerca al conjunto de puntos dado por valores experimentales. En este caso “ $y = ax + b$ ” toma la forma “ $v = at + v_0$ ”, pues $y = v$, $x = t$, $a = a$, y $b = v_0$. Se pretende comparar los valores obtenidos por el método de regresión con los valores experimentales (gráficas) correspondientes.

A continuación la tabla muestra la serie de datos experimentales correspondiente a un práctico de cinemática realizado por un carrito que baja por un plano inclinado con una cinta adherida a él y conectada con un registrador de pulso que marca un punto cada 0,01 s. El movimiento que se ha registrado es un movimiento rectilíneo uniformemente variado (i.e. acelerado) (MRUV):

P _j	t (s)	s (cm)	d _j	v (cm/s)	a (cm/s ²)
P ₀	0	0	0,25	12,50	50
P ₁	0,05	0,50	0,30	15,00	25
P ₂	0,10	1,40	0,325	16,25	75
P ₃	0,15	2,25	0,40	20,00	25
P ₄	0,20	3,25	0,425	21,25	25
P ₅	0,25	4,35	0,45	22,50	75
P ₆	0,30	5,60	0,525	26,25	25
P ₇	0,35	6,90	0,55	27,50	75
P ₈	0,40	8,35	0,625	31,25	25
P ₉	0,45	9,90	0,65	32,50	25
P ₁₀	0,50	11,60	0,675	33,75	25
P ₁₁	0,55	13,35	0,725	36,25	50
P ₁₂	0,60	15,25	0,775	38,75	50
P ₁₃	0,65	17,25	0,825	41,25	50
P ₁₄	0,70	19,35	0,875	43,75	25
P ₁₅	0,75	21,50	0,90	45,00	50
P ₁₆	0,80	23,80	0,95	47,50	

La gráfica de los puntos correspondientes para tiempo y velocidad (las variables x e y) muestra un comportamiento casi lineal de los mismos:



De la tabla se puede sacar que la velocidad inicial del movimiento es:

$$v_0 = 12,5 \text{ cm/s.}$$

La aceleración es la pendiente del gráfico anterior y coincide con aceleración media aritmética del movimiento; esta posee un valor de

$$a \approx 44,0 \text{ cm/s}^2.$$

Como la gráfica velocidad – tiempo posee un comportamiento casi lineal se puede aplicar el método de cuadrados mínimos para determinar los parámetros a y b de esta serie de valores experimentales. Entonces, teniendo en cuenta el método de cuadrados mínimos y los datos experimentales se construye la siguiente tabla a modo de resumir los resultados de los cálculos intermedios necesarios:

i	$t_i = x_i$	x_i^2	$v_i = y_i$	$x_i y_i$	e_i	e_i^2
1	0	0	12,50	0	0,070	0,0049
2	0,05	0,0025	15,00	0,75	-0,242	0,0588
3	0,10	0,0100	16,25	1,625	0,695	0,4830
4	0,15	0,0225	20,00	3,000	-0,867	0,7526
5	0,20	0,0400	21,25	4,250	0,070	0,0049
6	0,25	0,0625	22,50	5,625	1,007	1,0151
7	0,30	0,0900	26,50	7,875	-0,555	0,3080
8	0,35	0,1225	27,50	9,625	0,382	0,1463
9	0,40	0,1600	31,25	12,500	-1,180	1,3924
10	0,45	0,2025	32,50	14,625	-0,242	0,0588
11	0,50	0,2500	33,50	16,875	0,695	0,4830
12	0,55	0,3025	36,25	19,938	0,382	0,1463
13	0,60	0,3600	38,75	23,250	0,070	0,0049
14	0,65	0,4225	41,25	26,812	-0,242	0,0588
15	0,70	0,4900	43,75	30,625	-0,555	0,3080
16	0,75	0,5625	45,00	33,750	0,382	0,1463
N = 17	0,80	0,6400	47,50	38,000	0,070	0,0049
$\Sigma X_i = 6,80$		$\Sigma X_i^2 = 3,740$	$\Sigma Y_i = 511,25$	$\Sigma X_i Y_i = 249,125$	$\Sigma e_i^2 = 5,3770$	

El sistema a resolver es, entonces:

$$3,74 a + 6,80 v_0 - 249,125 = 0$$

$$6,80 a + 17,0 v_0 - 511,25 = 0$$

La solución es:

$$a = 43,75 \text{ cm/s}^2 ; v_0 = 12,57 \text{ cm/s}$$

Los valores son casi idénticos a los obtenidos en las soluciones gráficas ($a = 44,0 \text{ cm/s}^2$ y $v_0 = 12,5 \text{ cm/s}$). En resumen, si se acepta que la representación gráfica del fenómeno estudiado es una recta entonces, los parámetros de la recta que más se acercan al conjunto de los puntos experimentales son los que se han calculado.

Continuando,

$$\Sigma e_i^2 = 5,3770 ; N = 17 ; \Sigma X_i^2 = 3,74 ; (\Sigma X_i)^2 = 46,24 ; D = -(17 \times 3,74 - 46,24) = -17,34$$

$$\sigma_a \cong \sqrt{5,3770 / -(-17,34)} \text{ cm/s}^2 \cong 0,56 \text{ cm/s}^2 \cong 0,6 \text{ cm/s}^2$$

$$\sigma_b \cong \sqrt{3,74 / 17} \times 0,56 \text{ cm/s} \cong 0,46 \times 0,6 \text{ cm/s} \cong 0,26 \text{ cm/s} \cong 0,3 \text{ cm/s}$$

La expresión final de los valores de los parámetros de la recta, es entonces:

$$a = a = 43,8 \text{ cm/s}^2 \pm 0,6 \text{ cm/s}^2$$

$$b = v_0 = 12,6 \text{ cm/s} \pm 0,3 \text{ cm/s.}$$

Nota: Estos cálculos podrían haberse hecho mediante la calculadora en modo estadístico LR o modo regresión lineal, dependiendo del modelo y marca de la misma.

Apéndice D: Coeficiente de correlación Pearson

Para dar una medida numérica que exprese cuan fuertemente depende una variable de otra se define el *coeficiente de correlación de Pearson r* o coeficiente de correlación muestral. El análisis de correlación intenta medir la fuerza de la relación lineal entre dos variables por medio de un sólo número. El coeficiente define por sí mismo el grado de asociación entre las variables seleccionadas, ya que la correlación entre variables es el grado de relación o conexión entre ellas.

Si “ x_i ” e “ y_i ” forman el conjunto de valores experimentales obtenidos, entonces, el coeficiente de correlación r esta dado por la expresión:

$$r = S_{12} / \sqrt{S_{11}S_{22}}$$

donde

$$S_{12} = \sum x_i y_i - ((\sum x_i)(\sum y_i)) / N$$

$$S_{11} = \sum (x_i)^2 - [(\sum x_i)^2 / N]$$

$$S_{22} = \sum (y_i)^2 - [(\sum y_i)^2 / N]$$

con “ N ” es el número de determinaciones efectuadas de “ x ” e “ y ”.

El coeficiente de correlación entre dos variables se sitúa entre -1 y +1, inclusive. Si existe una relación lineal entre las variables el coeficiente es 1 o -1. El signo “-” indica que la relación lineal tiene pendiente negativa. El valor 0 (cero) refleja la ausencia de una relación lineal pero no de asociación entre las variables. En este caso se dice que las variables no están correlacionadas (es decir, son independientes). Toma valores intermedios si las variables están correlacionadas (pero no puede decirse nada del tipo de relación que las asocia); los valores serán más altos cuanto más fuerte sea la correlación. Se puede asegurar que los valores cercanos a +1 o -1 indican una tendencia lineal.

Es importante recordar que el coeficiente de correlación entre dos variables es una medida de su grado de linealidad.

Bibliografía:

- J.G. Roederer, “Mecánica Elemental”, EUDEBA (1963).
- J. Goldemberg, “Física general y experimental”, Volumen 1.
- S. Gill, E. Rodríguez, “Física re-creativa”, Prentice-Hall (2001).
- A. Maiztegui, R. Gleiser, “Introducción a las mediciones de laboratorio”, Kapelusz, Buenos Aires (1980).
- F. Cernuschi, F.I. Greco, “Teoría de errores de mediciones”, EUDEBA, Buenos Aires (1968).
- R. Walpole, R. Myers, S. Myers, “Probabilidad y Estadística para ingenieros”. Prentice-Hall (1998).
- M. Spiegel, “Estadística”, Schaum Series - McGraw Hill, 2da. ed., Madrid (1995).
- H. Cramér, :Teoría de probabilidades y aplicaciones”, Aguilar, Madrid (1968).
- R.S. Figliola, D.E. Beasley, “Mediciones Mecánicas, teoría y diseño”, Alfaomega Grupo editorial, S.A. de C.V. (2003).
- D.C. Baird, “Experimentation: An introduction to measurement theory and experiment design, Englewood Cliffs”, Prentice-Hall (1962).