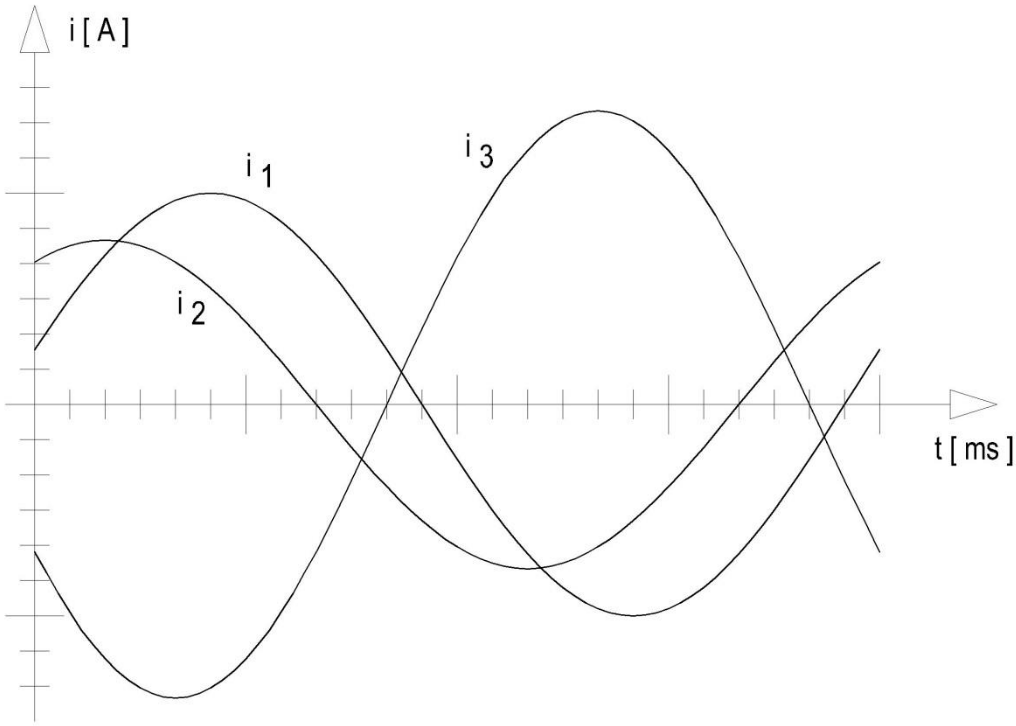
U2.04.- En el siguiente gráfico (escala **t [ms]** = 0,8 [ms/div]) se representan las formas de onda de tres señales alternas senoidales de corriente : $\mathbf{i_1(t)}$, $\mathbf{i_2(t)}$ e $\mathbf{i_3(t)}$ que concurren al nodo **C** de un dado circuito eléctrico.Los valores eficaces de dichas corrientes son :

$\mathbf{I_1}$ = 36 [A] $\mathbf{I_2}$ = 28 [A] $\mathbf{I_3}$ = 54 [A]

Hallar la expresión de la corriente resultante [$\mathbf{i_4(t)}$] en el nodo **C**



RESPUESTA: $$i_4(t) = 9{,}72\ sen\,(18750t - 107^o)\quad [A]$$

SOLUCIÓN U2.04

Aplicando la ley de nodos de Kirchhoff al nodo **C** se obtiene la siguiente expresión :

$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + i_4(t) = 0$$

Esta igualdad se cumple también si se representan las señales de corriente mediante sus correspondientes fasores, vale decir :

$$\mathring{I}_1 + \mathring{I}_2 + \mathring{I}_3 + \mathring{I}_4 = 0 \quad \therefore \quad \mathring{I}_4 = -\left(\mathring{I}_1 + \mathring{I}_2 + \mathring{I}_3\right) \quad [1]$$

La expresión general de una señal alterna senoidal es :

$$i(t) = \hat{I}\ sen(\omega t + \theta) = \sqrt{2}\ I\ sen(\omega t + \theta)$$

Para hallar la fase inicial (**θ** [º]) partiendo de la representación gráfica de la forma de onda de la señal se determina, en primer lugar, la fase correspondiente al valor pico positivo más cercano al origen de coordenadas.

$$para\ \ i_1(t)=\hat{I}_1 \qquad t\left(\hat{I}_1\right)=(n^o\ div)\times(ms/div)=5\times0{,}8=4\,[ms]$$

$$para\ \ i_2(t)=\hat{I}_2 \qquad t\left(\hat{I}_2\right)=(n^o\ div)\times(ms/div)=2\times0{,}8=1{,}6\,[ms]$$

$$para\ \ i_3(t)=\hat{I}_3 \qquad t\left(\hat{I}_3\right)=(n^o\ div)\times(ms/div)=16\times0{,}8=12{,}8\,[ms]$$

La condición para que una dada señal alterna senoidal tenga un valor instantáneo igual al valor pico positivo, viene dada por :

$$i(t)=\hat{I} \quad\Rightarrow\quad sen\left[\omega\, t\left(\hat{I}\right)+\theta\right]=1 \quad\Rightarrow\quad \omega t\left(\hat{I}\right)+\theta=90\,[^o]$$

La fase inicial (**θ**) resulta entonces igual a :

$$\theta\,[^o]=90\,[^o]-\omega t\left(\hat{I}\right)\ [^o] \quad [2]$$

El valor de la pulsación (**ω**), expresado en [º] , viene dado por :

$$\omega\,[^o/s]=\frac{2\pi\,[rad]}{T\,[s]}\,\frac{180\,[^o]}{\pi\,[rad]}=\frac{360\,[^o]}{T\,[s]}$$

El período , **T** , para las señales de corriente **i_1(t)**, **i_2(t)** e **i_3(t)**, vale :

$$T=2\times(n^o\ div\ semiciclo)\times(ms/div)=2\times12\times0{,}8=19{,}2\,[ms]$$

en consecuencia :

$$\omega\,[^o/s]=\frac{360\,[^o]}{T\,[s]}=\frac{360}{19{,}2\times10^{-3}}=18750\,[^o/s]$$

Reemplazando valores en la expresión [2] se obtienen las fases iniciales para las señales de corriente dadas :

$$para\ i_1(t) \qquad \theta_1\,[^o]=90\,[^o]-\omega t\left(\hat{I}_1\right)\ [^o]=90-\frac{360}{19{,}2}\times4=15\,[^o]$$

$$para\ i_2(t) \qquad \theta_2\,[^o]=90\,[^o]-\omega t\left(\hat{I}_2\right)\ [^o]=90-\frac{360}{19{,}2}\times1{,}6=60\,[^o]$$

$$para\ i_{31}(t) \qquad \theta_3\,[^o]=90\,[^o]-\omega t\left(\hat{I}_3\right)\ [^o]=90-\frac{360}{19{,}2}\times12{,}8=-150\,[^o]$$

Las expresiones correspondientes a las señales **i_1(t)**, **i_2(t)** e **i_3(t)** vienen dadas por :

$$i_1(t)=\sqrt{2}\ I_1\ sen(\omega t+\theta_1)=\sqrt{2}\ 36\ sen(18750t+15^o)\quad [A]$$

$$i_2(t)=\sqrt{2}\ I_2\ sen(\omega t+\theta_2)=\sqrt{2}\ 28\ sen(18750t+60^o)\quad [A]$$

$$i_3(t)=\sqrt{2}\ I_3\ sen(\omega t+\theta_3)=\sqrt{2}\ 54\ sen(18750t-150^o)\quad [A]$$

Empleando fasores las expresiones de las señales **i 1 (t)**, **i 2 (t)** e **i 3 (t)** toman la forma :

$$\overset{\circ}{I}_1 = 36 \langle 15^{o} \quad [A] \quad ó \quad \overset{\circ}{I}_1 = 36 \times \cos(15^{o}) + j\, 36 \times sen(15^{o}) \quad [A]$$

$$\overset{\circ}{I}_2 = 28 \langle 60^{o} \quad [A] \quad ó \quad \overset{\circ}{I}_2 = 28 \times \cos(60^{o}) + j\, 28 \times sen(60^{o}) \quad [A]$$

$$\overset{\circ}{I}_3 = 54 \langle -150^{o} \quad [A] \quad ó \quad \overset{\circ}{I}_3 = 54 \times \cos(-150^{o}) + j\, 54 \times sen(-150^{o}) \quad [A]$$

Operando se llega a :

$$\overset{\circ}{I}_1 = 36 \times 0{,}9659 + j\, 36 \times 0{,}2588 = 34{,}7724 + j\, 9{,}3168 \quad [A]$$

$$\overset{\circ}{I}_2 = 28 \times 0{,}5 + j\, 28 \times 0{,}866 = 14 + j\, 24{,}2480 \quad [A]$$

$$\overset{\circ}{I}_3 = 54 \times (-0{,}866) + j\, 54 \times (-0{,}5) = -46{,}7640 - j\, 27 \quad [A]$$

Reemplazando valores en la expresión [1] se obtiene el fasor correspondiente a la corriente resultante en el nodo **C** :

$$\overset{\circ}{I}_4 = -\left(\overset{\circ}{I}_1 + \overset{\circ}{I}_2 + \overset{\circ}{I}_3 \right) = -\left[(34{,}7724 + 14 - 46{,}7640) + j\,(9{,}3168 + 24{,}2480 - 27) \right]$$

$$\overset{\circ}{I}_4 = -[2{,}0084 + j\,6{,}5648] = -2{,}0084 - j\,6{,}5648 \quad [A]$$

El valor eficaz de la señal **i 4 (t)** viene dado por el módulo del fasor correspondiente :

$$I_4 = \sqrt{\left[\mathrm{Re}\left(\overset{\circ}{I}_4 \right) \right]^2 + \left[\mathrm{Im}\left(\overset{\circ}{I}_4 \right) \right]^2} = \sqrt{(-2{,}0084)^2 + (-6{,}5648)^2} = 6{,}87 \quad [A]$$

La fase inicial de la señal **i 4 (t)**, teniendo en cuenta que el fasor correspondiente está ubicado en el tercer cuadrante (parte real y parte imaginaria, valor negativo) viene dada por :

$$\theta_4 [^{o}] = arctg \left[\frac{\mathrm{Im}\left(\overset{\circ}{I}_4 \right)}{\mathrm{Re}\left(\overset{\circ}{I}_4 \right)} \right] - 180 = arctg \left(\frac{-6{,}5648}{-2{,}0084} \right) - 180 = -107 [^{o}]$$

En base a éstos resultados, la expresión de la señal **i 4 (t)** es la siguiente :

$$i_4(t) = \sqrt{2}\; I_4\; sen(\omega t + \theta_4) = \sqrt{2}\; 6{,}87\; sen\,(18750t - 107^{o}) \quad [A]$$

$$i_4(t) = 9{,}72\; sen\,(18750t - 107^{o}) \quad [A]$$