



MEDICION DE POTENCIA EN C. A.

I-Medición de Potencia Activa Trifásica

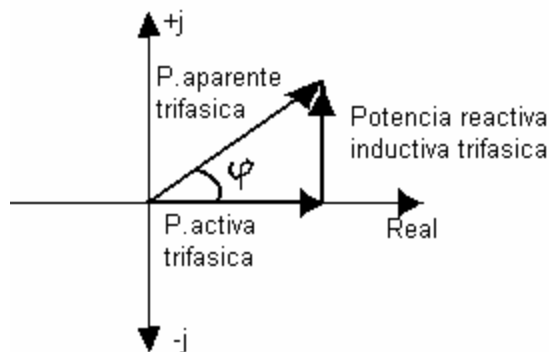
GENERALIDADES

Potencia: La potencia consumida en un elemento cualquiera de un circuito es la velocidad con que la energía eléctrica es convertida en cualquier otra forma de energía (calor, mecánica, química, etc.).

La potencia es la energía eléctrica consumida en la unidad de tiempo.

Los generadores eléctricos generan y entregan **potencia aparente**. Las máquinas eléctricas consumen esa potencia, es decir, la **potencia activa**, la transforman en potencia mecánica en el eje de la máquina, y la **potencia reactiva**, no la consumen, sino que la utilizan para crear su campo magnético.

Estas tres potencias trifásicas están relacionadas en el triángulo de potencia.



Podemos ver el ángulo ϕ que también aparece en el diagrama vectorial de tensión y corriente.

Potencia Monofásica:

$$P_f = U_f \cdot I_f \cdot \cos \phi$$
$$[W] = [V] \cdot [A]$$

Donde:

U_f = Tensión de fase

I_f = Corriente de fase

$\cos \phi$ = Factor de Potencia

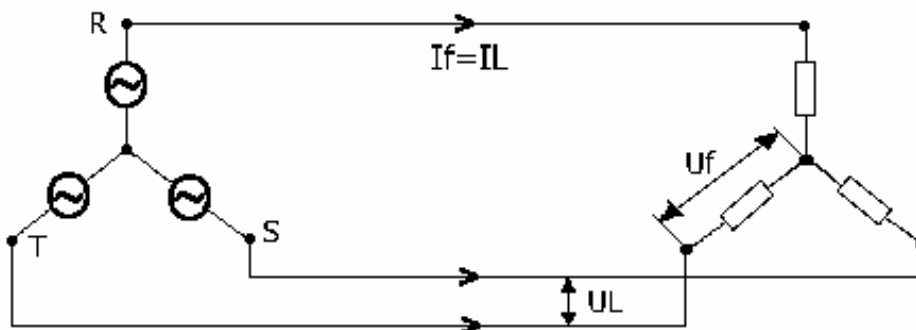
ϕ = ángulo entre U_f e I_f

En un sistema de **tres fases** es decir trifásico, la potencia es:

$$P_t = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos \phi$$

Potencia Trifásica

- Si la carga está conectada en estrella:



$$U_f = \frac{U_L}{\sqrt{3}}$$

$$I_f = I_L$$

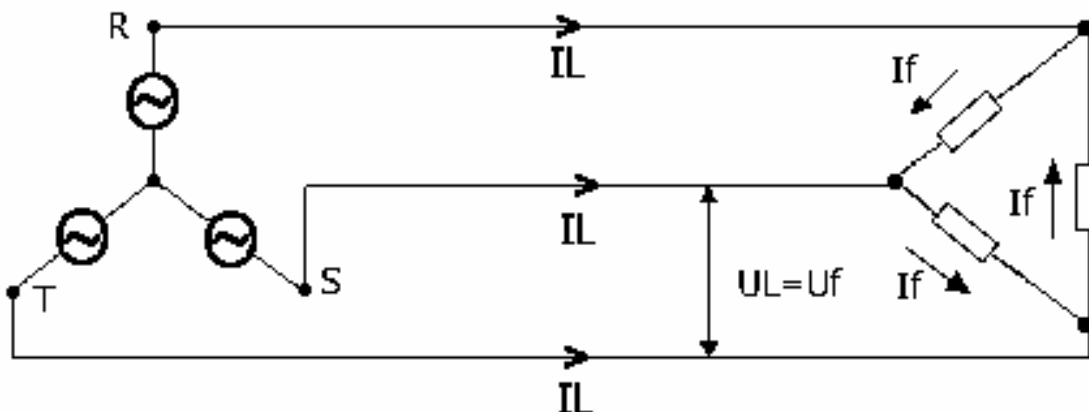
Entonces:

$$P_t = 3 \cdot \frac{U_L}{\sqrt{3}} \cdot I_L \cdot \cos \phi = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{U_L}{\sqrt{3}} \cdot I_L \cdot \cos \phi$$

Entonces la potencia trifásica es igual a :

$$P_t = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos \phi$$

- Si la carga está conectada en triángulo:





$$U_f = U_L$$

$$I_f = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$$

Entonces:

$$P_t = 3 \cdot U_L \cdot \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cdot \cos \mathbf{j} = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot U_L \cdot \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cdot \cos \mathbf{j}$$

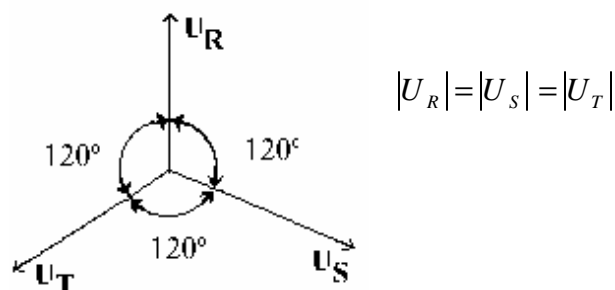
Entonces la potencia trifásica es igual a:

$$P_t = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos \mathbf{j}$$

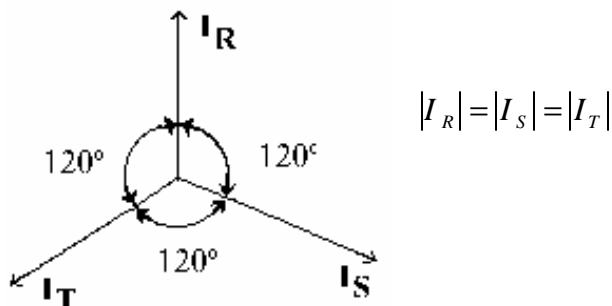
Conclusión: La ecuación de potencia es la misma, independientemente de si la carga está conectada en estrella o en triángulo.

Esta expresión de la potencia está deducida partiendo de la base de que las tres tensiones de fase son iguales y están desfasadas entre sí un mismo ángulo; además las tres corrientes son iguales entre sí, y están desfasadas un mismo ángulo. Es decir que el sistema es **simétrico y equilibrado** y es propio de las centrales generadoras, líneas de transporte de energía y las estaciones y subestaciones de transformación.

Simetría: se refiere a las **Tensiones**. Cuando en un sistema de tensiones, éstas tienen igual módulo y están desfasadas entre sí un mismo ángulo, se dice que el sistema es **simétrico**.



Equilibrio: se refiere a las **cargas o corrientes**. Cuando éstas en un sistema de intensidades tienen igual módulo y están desfasadas entre sí un mismo ángulo, se dice que el sistema es **equilibrado o balanceado**.



Teniendo en cuenta éstas últimas definiciones podremos clasificar los sistemas de tensiones y corrientes según sean:

$$\begin{array}{cc}
 \text{Tensiones} \left\{ \begin{array}{l} \text{simétrico} \\ \text{asimétrico} \end{array} \right. &
 \text{Corrientes} \left\{ \begin{array}{l} \text{equilibrados} \\ \text{desequilibrados} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Componiendo los distintos sistemas, decimos que podemos medir potencia en sistemas:

$\left. \begin{array}{l} \text{Simétricos y equilibrados} \\ \text{Simétricos y desequilibrados} \\ \text{Asimétricos y equilibrados} \\ \text{Asimétricos y desequilibrados} \end{array} \right\}$	Estos sistemas pueden ser estrella o Δ (triángulo) y si son estrella pueden tener o no neutro accesible.
---	---

Es decir que tomando un ejemplo, podemos medir potencia en un sistema asimétrico en las tensiones, y desequilibrado en las corrientes, sin neutro accesible.

Hasta ahora hemos hablado de potencia como $\sqrt{3}U_L \cdot I_L \cdot \cos \mathbf{j}$, que es **potencia activa**. Definiremos otras potencias como la reactiva, y la aparente.

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Potencia activa : } P_{ac} = \sqrt{3}U_L \cdot I_L \cdot \cos \mathbf{j} \\
 \text{Potencia reactiva : } P_r = \sqrt{3}U_L \cdot I_L \cdot \sen \mathbf{j} \\
 \text{Potencia aparente : } P_{ap} = \sqrt{3}U_L \cdot I_L
 \end{array} \right\} \quad \text{En "estrella" o "triángulo"}$$

Hemos calculado la potencia activa y reactiva multiplicando la tensión y corriente de línea por $\cos \varphi$ y $\sen \varphi$, siendo φ el ángulo entre la corriente y la tensión de fase. Al " $\cos \varphi$ ", lo denominamos **factor de potencia** y al " $\sen \varphi$ ", **factor de potencia reactivo**.

Así como medimos potencia activa para distintos sistemas de tensión y corriente, podemos medir también potencia reactiva y factor de potencia ($\cos \varphi$).

$$\left[\cos \mathbf{j} = \frac{P_{ac}}{\sqrt{3}U_L \cdot I_L} \right] \quad y \quad \left[\sen \mathbf{j} = \frac{P_r}{\sqrt{3}U_L \cdot I_L} \right]$$

En cada sistema según sea simétrico o no y equilibrado o no, habrá un método para la medición de potencia (P_{ap} , P_{ac} , P_r) y factor de potencia ($\cos \varphi$), que de resultados correctos con errores aceptables. Es importante recordar que para cada método habrá consideraciones o premisas de las que se partirán para justificar dicho método, de modo que serán restricciones para su aplicación en la práctica.



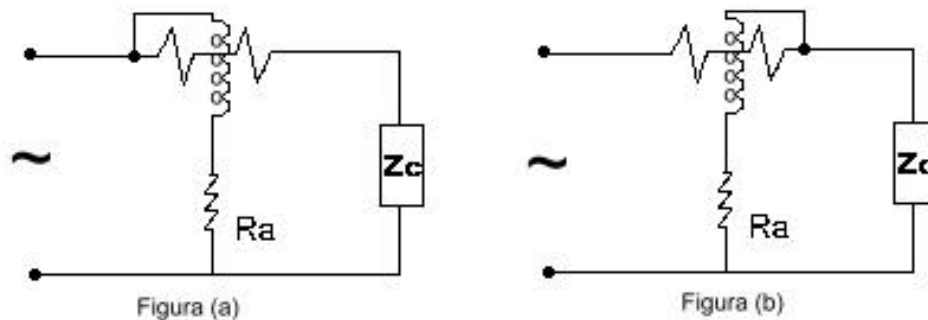
Por ejemplo: para medir potencia en un sistema simétrico y equilibrado según **Blondel** se necesitarán **tres** vatímetros para un sistema trifásico, pero podemos medir con **dos** vatímetros, según **Aron**, haciendo ciertas consideraciones.

Si no respetamos esas consideraciones, el método nos dará lecturas erróneas y no se pueden tomar en cuenta.

MEDICIÓN DE POTENCIA EN CORRIENTE ALTERNA

A) LÍNEA MONOFÁSICA: Medición de potencia activa

La potencia activa en líneas monofásicas se mide con un vatímetro según se indica en los circuitos siguientes:



Dependiendo del valor de Z_c se colocará antes o después la bobina voltimétrica respecto de la amperométrica según se analizó para corriente continua en el método de medición de resistencia y potencia por el método voltímetro y amperímetro. En CA la Z de la carga se compara con la Z de la bobina voltimétrica del vatímetro; y en CC la R de la Carga se compara con la resistencia de la bobina voltimétrica del voltímetro.

Se podría utilizar para medir potencia monofásica un voltímetro, un amperímetro y un cosfímetro. $P_{ac} = U \cdot I \cdot \cos \phi$. La medición resulta ser indirecta y poco precisa ya que debemos leer tres instrumentos cometiendo en cada caso los errores sistemáticos del método (propagación del error) y accidentales, además la sensibilidad de cada uno de ellos, que es distinta, aparece una imprecisión igual o mayor que si usamos un vatímetro solamente. Agregamos que el costo total de la medida es menor en éste último caso, pues usamos un solo instrumento.

B) LÍNEA TRIFÁSICA: Medición de potencia activa

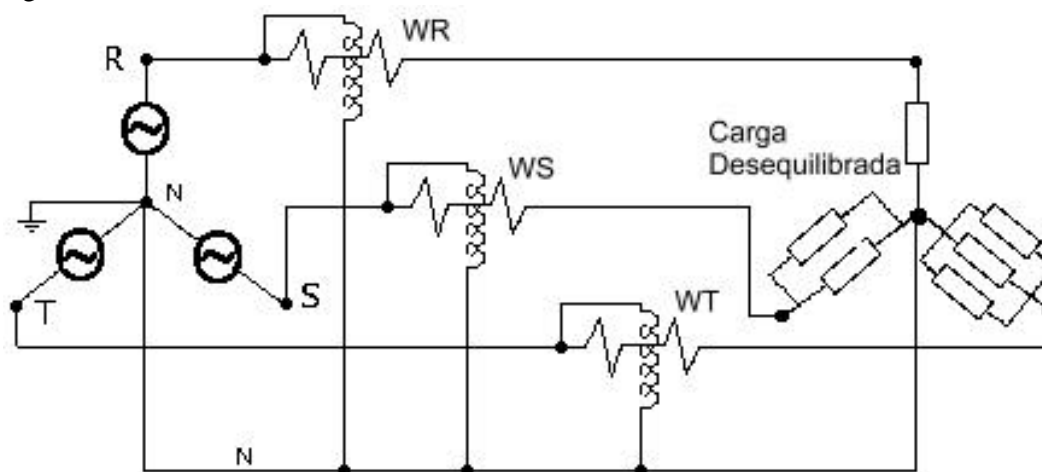
Las líneas trifásicas pueden clasificarse en:

1) Líneas Tetrafilares: Cuatro hilos (tres fases y neutro).

Teorema de Blondel: “La potencia en un circuito de n conductores se puede medir con n vatímetros de modo tal que cada uno tenga su bobina de intensidad en uno de los n conductores y la bobina de tensión esté entre cada conductor y un punto en común”.

1.a) Sistema Simétrico y desequilibrado.

Para un sistema trifásico tetrafilar deberemos usar tres vatímetros conectados de la siguiente forma:

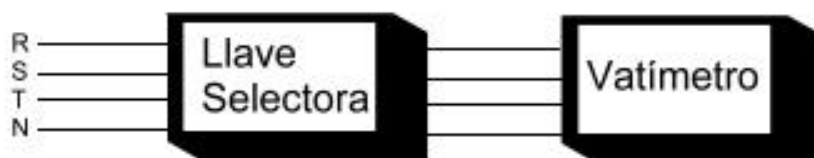


$$P_{trif} = P_{WR} + P_{WS} + P_{WT}$$

$$P_{trif} = U_{R-N} \cdot I_R \cdot \cos \phi_R + U_{S-N} \cdot I_S \cdot \cos \phi_S + U_{T-N} \cdot I_T \cdot \cos \phi_T$$

La suma de las tres lecturas es igual a la potencia total consumida por la carga.

Si la potencia **no varía con el tiempo**, se puede utilizar un solo vatímetro, que se conecta sucesivamente en las 3 posiciones indicadas anteriormente como W_R , W_S y W_T . Existen un par de llaves selectoras que forman un conjunto que permiten realizar rápidamente estas tres mediciones sin necesidad de conectar o desconectar tres veces el vatímetro, como se indica en la siguiente figura:



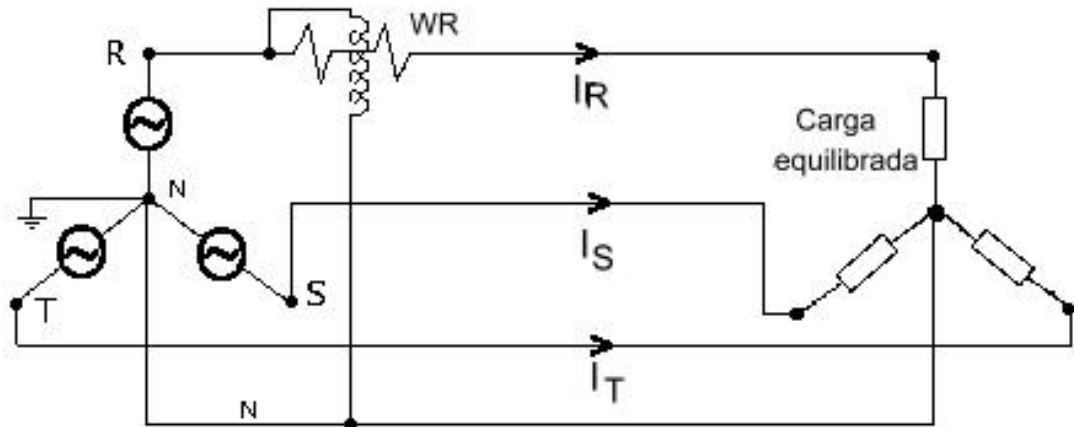
1.b) Sistema Simétrico y equilibrado.

Si la carga es equilibrada, es decir que los tres circuitos monofásicos son idénticos entre sí, bastará medir uno de ellos y multiplicar por tres su indicación para tener la potencia trifásica.

$$P_R = P_S = P_T$$

$$P_{trif} = 3 \cdot P_R = 3 \cdot U \cdot I \cdot \cos \phi$$

Lo podemos apreciar en el siguiente gráfico:



Sino se puede asegurar que el sistema es equilibrado **no** se puede medir potencia trifásica colocando un solo vatímetro en una fase.

Si se produjera algún cambio en la carga o en la tensión de generación cambiaría la potencia en cada una de las fases a través del tiempo y los valores simultáneos.

Por lo general las cargas trifásicas son siempre motores.

El método de medición sucesiva es equivalente al método de medición simultáneo, si en el primero no hay variación de ningún parámetro.

2) Líneas Trifilares (Sin neutro)

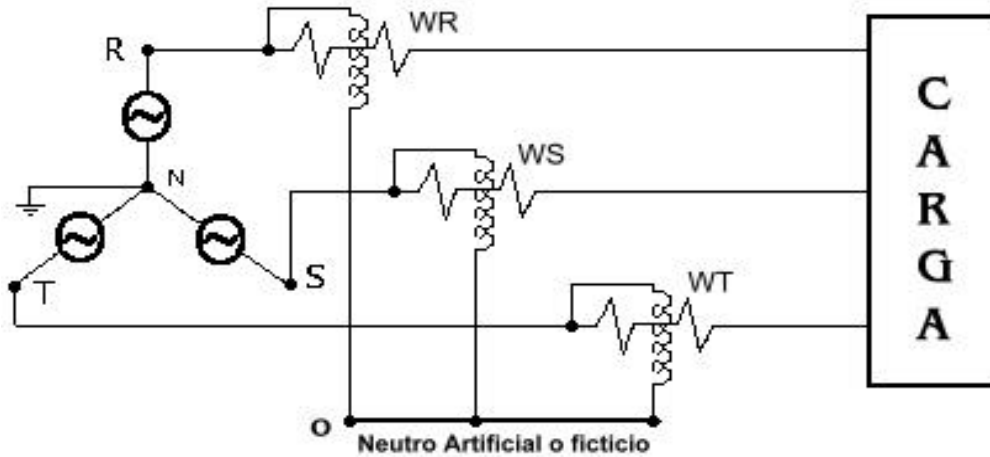
- a) Medición con tres vatímetros: Neutro Artificial
- b) Medición con dos vatímetros: Método de Aron

2.a) Medición de Potencia con tres vatímetros: Neutro Artificial

La forma más simple de medir potencia activa en sistemas trifásicos sin neutro, hace uso de 3 vatímetros gemelos que se conectan formando una estrella, por lo que convergen sus circuitos voltimétricos a un punto único llamado **neutro artificial** o ficticio.

Justificación: siendo los 3 vatímetros iguales, sus circuitos voltimétricos tomarán iguales intensidades, pero desfasadas entre sí 120° , de modo que en el punto de unión, centro de estrella, las tres corrientes se compensarán totalmente, dando **resultante nula**, no se requiere conductor de retorno al generador como lo haría el conductor neutro.

Conectamos los tres vatímetros según indica la figura siguiente:



La potencia media total entregada a la carga trifásica durante un intervalo T es:

$$P_T = \frac{1}{T} \int_0^T (u_{Rn} \cdot i_R + u_{Sn} \cdot i_S + u_{Tn} \cdot i_T) dt$$

La potencia media total medida por los tres vatímetros es:

$$P_{3W} = \frac{1}{T} \int_0^T (u_{R0} \cdot i_R + u_{S0} \cdot i_S + u_{T0} \cdot i_T) dt \quad (1)$$

En cualquier condición siempre se cumple:

$$u_{R0} = u_{Rn} - u_{0n} \quad ; \quad u_{S0} = u_{Sn} - u_{0n} \quad ; \quad u_{T0} = u_{Tn} - u_{0n}$$

La expresión (1) se puede escribir:

$$P_{3W} = \frac{1}{T} \int_0^T (u_{Rn} \cdot i_R + u_{Sn} \cdot i_S + u_{Tn} \cdot i_T) dt - \frac{1}{T} \int_0^T \left[u_{0n} \cdot \underbrace{(i_R + i_S + i_T)}_{=0} \right] dt$$

Entonces:

$$P_{Trif. Act} = P_{W_R} + P_{W_S} + P_{W_T} = P_{3W}$$

Si las impedancias de las ramas voltimétricas de los tres vatímetros son iguales (vatímetros gemelos), la unión en estrella forma un neutro artificial, ya que cumple con su definición. Neutro: cuando las tensiones desde el nodo hacia cada línea es la misma (en módulo) y desfasada 120°.

$$|\overline{U}_{R-0}| = |\overline{U}_{S-0}| = |\overline{U}_{T-0}|$$



Conclusión: Tres vatímetros miden la potencia de la **carga** independientemente del equilibrio de corrientes, de la simetría de las tensiones, de la forma de onda de ambos parámetros y del potencial del punto “O”. Esto indica que no necesariamente las impedancias de las bobinas voltimétricas de los vatímetros deben ser iguales cuando se emplea el circuito visto. A su vez también es válido el método aunque la carga esté conectada en estrella o en triángulo, ya que si se reduce el triángulo a estrella se verifica lo enunciado.

Como vemos el esquema eléctrico de la figura, los tres vatímetros tienen sus circuitos voltimétricos unidos al punto “O”, éste punto es un **centro de estrella**. Para que éste punto tenga las características de un neutro artificial debe tener la misma d. d. p. (diferencia de potencial) con cada una de las tres fases, es decir:

$$\left| \overline{U}_{R-0} \right| = \left| \overline{U}_{S-0} \right| = \left| \overline{U}_{T-0} \right|$$

Para que esto sea cierto, las tres tensiones compuestas deben ser iguales:

$$\left| \overline{U}_{R-S} \right| = \left| \overline{U}_{S-T} \right| = \left| \overline{U}_{T-R} \right|$$

Además se debe cumplir que la impedancia de las tres ramas voltimétricas de los vatímetros, sean iguales entre sí, a fin de que la distribución de tensiones sea uniforme.

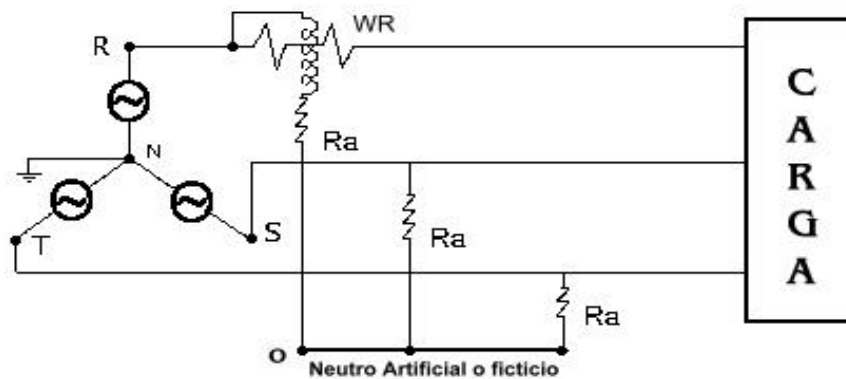
$$Z_{V_{(WR)}} = Z_{V_{(WS)}} = Z_{V_{(WT)}}$$

En general las ramas voltimétricas son prácticamente resistivas puras, para limitar la corriente, y a su vez aumentar el alcance, todos los vatímetros tienen en esa rama resistencia óhmica (anti-inductiva) muy elevada. Además ésta resistencia nos asegura que la intensidad que circula por la rama voltimétrica el error de fase (o ángulo de error) θ es nulo. Concluimos que la igualdad de impedancias se convierte en igualdad de resistencias

$$R_{V_{(WR)}} = R_{V_{(WS)}} = R_{V_{(WT)}} \quad (2)$$

Esta última nos da la posibilidad de medir con un solo vatímetro si el sistema es equilibrado, ya que entonces sabemos de antemano que las tres potencias monofásicas son iguales. Bastará medir una sola y multiplicar por tres para hallar la potencia trifásica total.

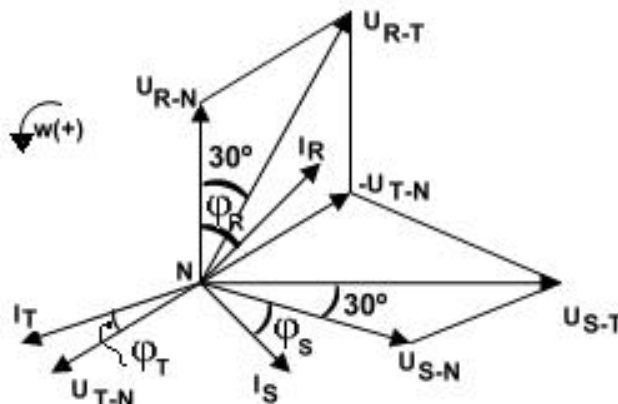
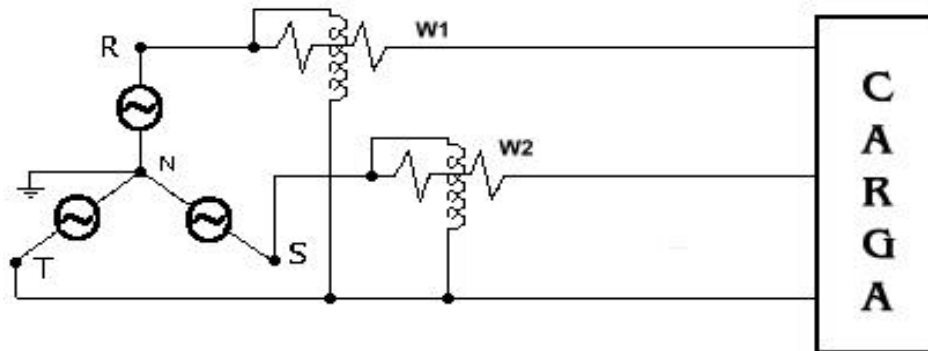
Para satisfacer la expresión (2) reemplazaremos los otros dos instrumentos por resistencias de igual valor óhmico a la rama voltimétrica del vatímetro. Para realizar ésta medición se construyen vatímetros que ya cuentan internamente con las resistencias para las otras fases.



Conclusión: El método de los tres vatímetros da la potencia exacta e invariable cualquiera sea el punto de referencia tomado como centro de estrella, siempre que no variemos ni la fuente ni la carga. Si las tres impedancias que forman el **centro de estrella son iguales**, éste centro se convierte en un **neutro artificial**

2.b) Medición de potencia con dos vatímetros: Método de Aron

Se puede medir potencia activa trifásica con dos vatímetros cuando el sistema no tiene neutro, es decir que es trifilar. Se utiliza el circuito de la figura siguiente donde el punto común de los dos vatímetros es la fase T, por ejemplo.



Vamos a imponer solamente una condición: las tensiones e intensidades varían senoidalmente para poder representarlas vectorialmente, más adelante veremos que la fórmula de Aron también es válida sin que se cumpla dicha condición. Demostraremos que:

$$\overline{P}_{trif} = \overline{P}_{R-T} + \overline{P}_{S-T} = W1 + W2$$

Donde:

$$\overline{P}_{R-T} = \overline{U}_{R-T} \times \overline{I}_R$$

$$\overline{P}_{S-T} = \overline{U}_{S-T} \times \overline{I}_S$$

Siendo $\overline{U}_{R-T}, \overline{U}_{S-T}, \overline{I}_R, \overline{I}_T$, tensiones e intensidades de línea puesto que no se conoce la carga. Aplicando las Leyes de Kirchoff para intensidades y tensiones:

$$\overline{I}_R + \overline{I}_S + \overline{I}_T = 0 \quad (1) \quad \text{Sistema Trifilar (3hilos).}$$

- **No** imponemos la condición de que el sistema sea equilibrado

$$\overline{U}_{R-S} + \overline{U}_{S-T} + \overline{U}_{T-R} = 0$$

- **No** imponemos la condición de que el sistema sea simétrico.

Además se cumple siempre que:

$$\begin{aligned} \overline{U}_{R-T} &= \overline{U}_{R-N} - \overline{U}_{T-N} \\ \overline{U}_{S-T} &= \overline{U}_{S-N} - \overline{U}_{T-N} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(En nuestro caso el vatímetro W1 está conectado en la fase R, de} \\ \text{modo que la tensión es } U_{R-T}) \end{array}$$

$$\overline{U}_{R-T} = -\overline{U}_{T-R}$$

Entonces, podemos demostrarlo vectorialmente:

$$P_{w1} = U_{R-T} \cdot I_R \cdot \cos(\overline{U}_{R-T} \wedge \overline{I}_R) = U_{R-T} \cdot I_R \cdot \cos(\mathbf{j}_R - 30^\circ) = \overline{U}_{R-T} \times \overline{I}_R \quad (\text{prod.escalar})$$

$$P_{w2} = U_{S-T} \cdot I_S \cdot \cos(\overline{U}_{S-T} \wedge \overline{I}_S) = U_{S-T} \cdot I_S \cdot \cos(\mathbf{j}_S + 30^\circ) = \overline{U}_{S-T} \times \overline{I}_S$$

$$P_{w1} + P_{w2} = \overline{U}_{R-T} \times \overline{I}_R + \overline{U}_{S-T} \times \overline{I}_S = [\overline{U}_{R-N} - \overline{U}_{T-N}] \times \overline{I}_R + [\overline{U}_{S-N} - \overline{U}_{T-N}] \times \overline{I}_S$$

$$P_{w1} + P_{w2} = \overline{U}_{R-N} \times \overline{I}_R - \overline{U}_{T-N} \times \overline{I}_R + \overline{U}_{S-N} \times \overline{I}_S - \overline{U}_{T-N} \times \overline{I}_S$$

$$P_{w1} + P_{w2} = \overline{U}_{R-N} \times \overline{I}_R + \overline{U}_{S-N} \times \overline{I}_S + \overline{U}_{T-N} \times \left(\underbrace{-\overline{I}_R - \overline{I}_S}_{\overline{I}_T} \right)$$

$$\text{De (1)} \quad \overline{I}_T = -\overline{I}_R - \overline{I}_S$$

$$P_{w1} + P_{w2} = \overline{U}_{R-N} \times \overline{I}_R + \overline{U}_{S-N} \times \overline{I}_S + \overline{U}_{T-N} \times \overline{I}_T$$

$$P_{w1} + P_{w2} = \overline{U}_{R-N} \cdot \overline{I}_R \cdot \cos \mathbf{j}_R + \overline{U}_{S-N} \cdot \overline{I}_S \cdot \cos \mathbf{j}_S + \overline{U}_{T-N} \cdot \overline{I}_T \cdot \cos \mathbf{j}_T$$

$$\boxed{P_{w1} + P_{w2} = P_{wR} + P_{wS} + P_{wT} = P_{trif}.act.}$$

En este desarrollo no se impuso ninguna condición, excepto que el sistema sea trifilar, entonces se puede tener el caso de que :

$$|U_{RS}| \neq |U_{ST}| \neq |U_{TR}| \quad \text{y/o} \quad |I_R| \neq |I_S| \neq |I_T|$$

Conclusión:

1. La suma de las mediciones de los dos vatímetros es igual a la suma de las indicaciones que hubieran revelado tres vatímetros conectados a cada una de las fases y neutro artificial. Es decir que se obtiene con éste método una medición de potencia trifásica.
2. Como no hemos impuesto condiciones de simetría ni de equilibrio para demostrar el método, decimos que sirve para medir potencia en **cualquier sistema trifásico**, simétrico o no, equilibrado o no, **siempre que sea trifilar**.
3. Este método solo es posible de utilizarse, cuando no existe conductor neutro, o bien si previamente puede garantizarse (por medición) que la intensidad del neutro es nula.
4. Es independiente de que la carga esté conectada en estrella o triángulo.
5. El método de Aron se emplea en sistemas de transmisión (alta tensión) y de distribución primaria (media tensión), que son sistemas trifásicos que nunca poseen neutro. Desde luego que habrá que utilizar transformadores de medida (TI, TV) para conectar los vatímetros.
6. También se los utiliza en la industria cuando se trata de grandes potencias, por ejemplo, en explotaciones petrolíferas, explotaciones mineras, etc., pues constituyen sistemas trifásicos sin neutro.

Habíamos impuesto una única condición para deducir el método de Aron y es que tensiones e intensidades variasen senoidalmente. Pero la formula final es también válida aunque no se cumpla dicha condición. Tomando valores instantáneos:

$$p_t = u_R \cdot i_R + u_S \cdot i_S + u_T \cdot i_T = u_R \cdot i_R + u_S \cdot i_S + u_T \cdot (-i_R - i_S)$$

$$p_t = \left(\underbrace{u_R - u_T}_{u_{R-T}} \right) i_R + \left(\underbrace{u_S - u_T}_{u_{S-T}} \right) i_S$$

$$p_t = u_{R-T} \cdot i_R + u_{S-T} \cdot i_S$$

Entonces la potencia instantánea trifásica es igual a la suma de las potencias instantáneas $u_{R-T} \cdot i_R$ y $u_{S-T} \cdot i_S$.

Es importante recordar que los vatímetros son sensibles a los valores eficaces de tensión e intensidad y por lo tanto su indicación de potencia activa no está afectada de la forma de onda.

Antes de conectar un vatímetro se debe medir la intensidad y la tensión para evitar el deterioro del instrumento por someterlo a magnitudes excesivas.

220 – 380	[V]	B. T.
13,2 – 33 – 66	[KV]	M. T.
132 – 220 – 500	[KV]	A. T.



Aplicación del Método de ARON para sistemas simétricos y equilibrados

1. Potencia Activa Trifásica

De acuerdo al circuito eléctrico y al diagrama vectorial tenemos:

$$P_{W1} = U_{R-T} \cdot I_R \cdot \cos(\mathbf{j}_R - 30^\circ)$$

$$P_{W2} = U_{S-T} \cdot I_S \cdot \cos(\mathbf{j}_S + 30^\circ)$$

Entonces si es simétrico y equilibrado:

$$|\overline{U}_{R-T}| = |\overline{U}_{S-T}| = |\overline{U}_C|$$

$$|\overline{I}_R| = |\overline{I}_S| = |\overline{I}|$$

$$\mathbf{j}_R = \mathbf{j}_S = \mathbf{j}$$

Si hacemos la suma de los valores leídos de Pw1 y Pw2 obtendremos:

$$P_{W1} + P_{W2} = U_C \cdot I \cdot \cos(\mathbf{j} - 30^\circ) + U_C \cdot I \cdot \cos(\mathbf{j} + 30^\circ)$$

$$P_{W1} + P_{W2} = U_C \cdot I \cdot [\cos(\mathbf{j} - 30^\circ) + \cos(\mathbf{j} + 30^\circ)]$$

$$P_{W1} + P_{W2} = U_C \cdot I \cdot (\cos \mathbf{j} \cdot \cos 30^\circ + \text{sen} \mathbf{j} \cdot \text{sen} 30^\circ + \cos \mathbf{j} \cdot \cos 30^\circ - \text{sen} \mathbf{j} \cdot \text{sen} 30^\circ)$$

$$P_{W1} + P_{W2} = U_C \cdot I \cdot \cos \mathbf{j} \cdot \underbrace{2 \cdot \cos 30^\circ}_{\sqrt{3}}$$

$$P_{W1} + P_{W2} = \sqrt{3} \cdot U_C \cdot I \cdot \cos \mathbf{j} = P_{trif.act.}$$

Si ahora suponemos que vamos a medir la potencia que consume un motor trifásico, alimentado simétricamente. La potencia activa como vimos anteriormente será:

$$P_{W1} = U_{R-T} \cdot I_R \cdot \cos(\mathbf{j}_R - 30^\circ)$$

$$P_{W2} = U_{S-T} \cdot I_S \cdot \cos(\mathbf{j}_S + 30^\circ)$$

$$P_T = P_{W1} + P_{W2}$$

Por el tipo de carga podemos escribir :

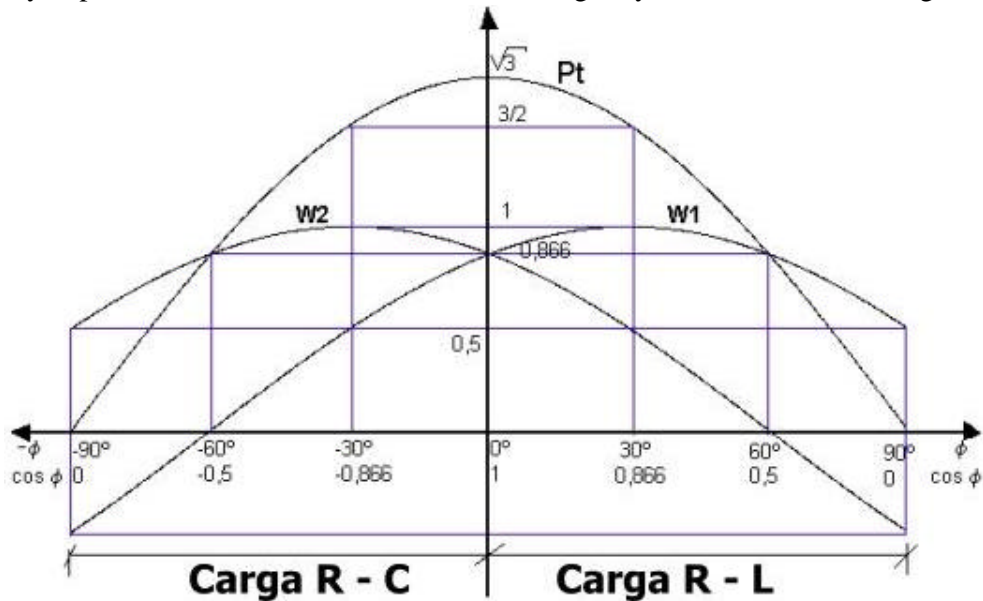
$$P_{W1} = U_C \cdot I \cdot \cos(\mathbf{j} - 30^\circ) = k \cdot \cos(\mathbf{j} - 30^\circ)$$

$$P_{W2} = U_C \cdot I \cdot \cos(\mathbf{j} + 30^\circ) = k \cdot \cos(\mathbf{j} + 30^\circ)$$

Si ahora creamos una tabla dándole valores a Pw1, Pw2 y a su suma PT, obtenemos:

f	Pw1	Pw2	PT	
0°	$\frac{\sqrt{3}}{2}k$	$\frac{\sqrt{3}}{2}k$	$\sqrt{3}k$	Tipo de Carga: Resistiva
30°	k	$\frac{1}{2}k$	$\frac{3}{2}k$	
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}k$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}k$	Tipo de Carga: Inductiva - Resistiva
90°	$\frac{1}{2}k$	$-\frac{1}{2}k$	0	
-30°	$\frac{1}{2}k$	k	$\frac{3}{2}k$	Tipo de Carga: Capacitiva - Resistiva
-60°	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}k$	$\frac{\sqrt{3}}{2}k$	
-90°	$-\frac{1}{2}k$	$\frac{1}{2}k$	0	

Si ahora representamos para un mismo gráfico la lectura del vatímetro 1, del vatímetro 2 y la potencia activa trifásica en función del ángulo y del coseno ϕ de la carga.



Potencia Reactiva Trifásica.

Si efectuamos la diferencia de las lecturas de los vatímetros Pw1 y Pw2 resulta:

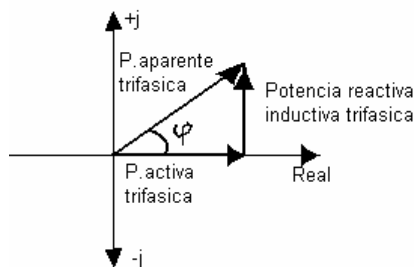
$$\begin{aligned}
 P_{w_1} - P_{w_2} &= U_c \cdot I \cdot \cos(\mathbf{j} - 30^\circ) - U_c \cdot I \cdot \cos(\mathbf{j} + 30^\circ) \\
 P_{w_1} - P_{w_2} &= U_c \cdot I \cdot [\cos(\mathbf{j} - 30^\circ) - \cos(\mathbf{j} + 30^\circ)] \\
 P_{w_1} - P_{w_2} &= U_c \cdot I \cdot (\cos \mathbf{j} \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{sen} \mathbf{j} \cdot \operatorname{sen} 30^\circ - \cos \mathbf{j} \cdot \cos 30^\circ + \operatorname{sen} \mathbf{j} \cdot \operatorname{sen} 30^\circ) \\
 P_{w_1} - P_{w_2} &= U_c \cdot I \cdot \operatorname{sen} \mathbf{j} \cdot \underbrace{2 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ}_1 \\
 P_{w_1} - P_{w_2} &= U_c \cdot I \cdot \operatorname{sen} \mathbf{j}
 \end{aligned}$$

Pero nuestro objetivo es obtener la potencia reactiva trifásica y no la monofásica, por lo que afectamos a ambos miembros de la igualdad anterior por $\sqrt{3}$.

$$\boxed{\sqrt{3} \cdot (P_{w_1} - P_{w_2}) = \sqrt{3} \cdot U_c \cdot I \cdot \operatorname{sen} \mathbf{j} = P_{\text{Re act. Trif.}}}$$

Nota: se puede aplicar Aron directamente, para calcular potencia reactiva trifásica, mediante dos **varímetros**.

Factor de Potencia Trifásico.



$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \mathbf{j} &= \frac{P_{\text{react.trif.}}}{P_{\text{act.trif.}}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (P_{w_1} - P_{w_2})}{P_{w_1} + P_{w_2}} \\
 \mathbf{j} &= \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \cdot (P_{w_1} - P_{w_2})}{P_{w_1} + P_{w_2}} \Rightarrow \cos \mathbf{j} = \cos \left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \cdot (P_{w_1} - P_{w_2})}{P_{w_1} + P_{w_2}} \right]
 \end{aligned}$$

También puede utilizarse la siguiente expresión:

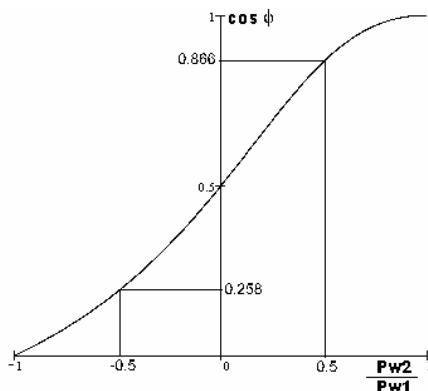
$$\boxed{\cos \mathbf{j} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \mathbf{j}}}}$$

Partiendo de dos lecturas w_1 y w_2 se puede determinar el factor de potencia, haciendo el cociente de la lectura **menor** y la **mayor**:

$$\begin{aligned}
 |w_1| &> |w_2|, \text{ para carga inductiva.} \\
 |w_2| &> |w_1|, \text{ para carga capacitiva}
 \end{aligned}$$

Si hacemos una tabla para algunos valores del ángulo ϕ :

ϕ	$\cos \phi$	$\frac{w_2}{w_1}$
0°	1	1
30°	0,866	0,5
60°	0,5	0
90°	0	-1



De la curva podemos obtener para cualquier relación de w_2/w_1 , el factor de potencia. Se puede construir ésta tabla de otro modo, utilizando la siguiente fórmula, para graficar la curva $\cos \phi = f(w_2/w_1)$, para luego utilizarla como ábaco:

$$\cos \phi = \frac{1+x}{2\sqrt{x^2-x+1}} \quad \text{donde:} \quad x = \frac{W_{\text{menor}}}{W_{\text{mayor}}} = \frac{W_2}{W_1}$$

En el análisis efectuado del método de Aron, ya sea en forma general o aplicado a sistemas simétricos y equilibrados, se ha supuesto una carga R-L, en donde se observa que la lectura del vatímetro W_1 es siempre positiva, cualquiera sea el desfase en la carga, en cambio el vatímetro W_2 puede reflexionar en forma negativa, positiva o no deflexionar. Es decir:

$$\begin{aligned}
 \text{si } \left\{ \begin{array}{l} \phi = 0^\circ \Rightarrow P_{w1} = + \\ \phi = 90^\circ \Rightarrow P_{w1} = + \end{array} \right. \\
 \text{si } \left\{ \begin{array}{l} \phi = 0^\circ \Rightarrow P_{w2} = + \\ \phi = 60^\circ \Rightarrow P_{w2} = 0 \\ \phi = 90^\circ \Rightarrow P_{w2} = - \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión analítica del método de Aron queda:

$$\left. \begin{aligned} P_{act.trif.} &= P_{W_1} \pm P_{W_2} \\ P_{react.trif.} &= \sqrt{3} \cdot (P_{W_1} \mp P_{W_2}) \end{aligned} \right\} \text{ para carga } R-L$$

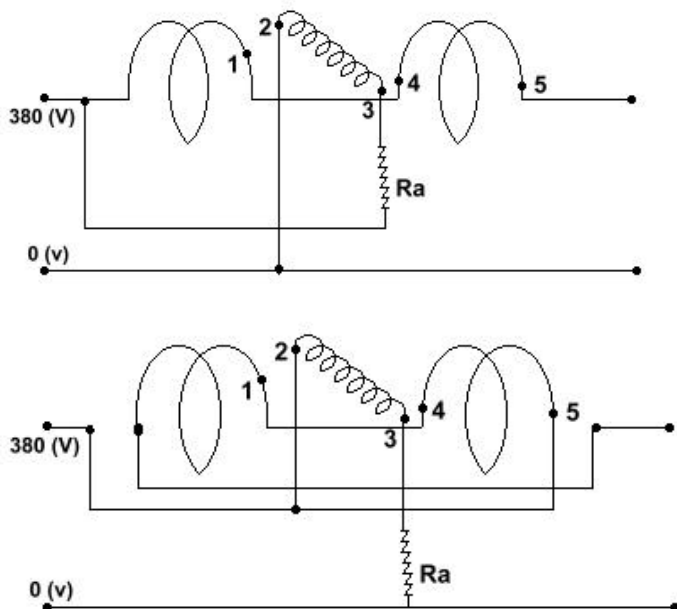
$$\left. \begin{aligned} P_{act.trif.} &= P_{W_2} \pm P_{W_1} \\ P_{react.trif.} &= \sqrt{3} \cdot (P_{W_2} \mp P_{W_1}) \end{aligned} \right\} \text{ para carga } R-C$$

Cuando la carga es R-L la indicación de W1 siempre es positiva, y si la carga es R-C, W2 siempre es positivo y el que cambia de signo en algún momento es W1.

Es necesario que se respete la secuencia de conexión de los vatímetros, es decir, que debe determinarse claramente que lecturas corresponden al W1 y cuales al W2.

FORMAS DE CONEXIÓN Y PRECAUCIONES EN MEDICIONES CON VATÍMETRO.

Generalmente en un vatímetro de precisión la d.d.p. admitida entre las bobinas de intensidad y de tensión es de 100v a 120v. Si se sobrepasa éste valor pueden originarse desviaciones de la aguja por fenómenos de cargas electrostáticas y en consecuencia errores en la medida. Además, el instrumento puede romperse debido a las altas tensiones, en el caso que éstas produzcan una perforación del aislamiento de las bobinas. Esto ocurrirá si en lugar de invertir la bobina amperométrica se invirtiera la voltimétrica, veamos un ejemplo:



En la Fig. A, en el punto 1 hay 379v, en 2 hay 0v, hay una d.d.p. de 379v en un espacio muy pequeño. Se puede producir un arco eléctrico entre ambos puntos y esto rompe el instrumento. Con esto estamos contradiciendo la primera regla de conexión, ya que entre las bobinas de intensidad y de tensión hay una d.d.p. de más de 120v.

Invirtiéndolo los bornes de la bobina amperométrica Fig. B, en el punto 1 hay 379v, en el 2, 380v, en 3 hay 375v, en 4 hay 379v y en 5 380v. Entre los puntos más próximos (1 y 2) hay una d.d.p. de 1 Volt y entre 2 y 4, habrá 4 Volts, entonces nunca habrá problemas.

Cuando la tensión del circuito es baja (menos de 100v), es indistinto invertir una u otra bobina. En la práctica se suele invertir la bobina de tensión teniendo en cuenta que maneja menos corriente que la amperométrica y no tenemos que cortar el servicio (no abrimos el circuito de carga).

En las medidas indirectas, es decir con transformadores de tensión e intensidad, la d.d.p. entre las bobinas de intensidad y tensión del vatímetro, está dada por la línea de tierra que une los secundarios de los transformadores. Esta d.d.p. es de unos 100v en el caso del método de los dos vatímetros ya que los dos puntos de los transformadores de tensión que están unidos a la fase común, están puestos a tierra. Los vatímetros tipo industrial o de campo admiten una d.d.p. de 500v entre sus bobinas, éste valor determina la aislamiento entre dichas bobinas, que es un factor determinante para la elección de la tensión admisible.

Para tener en cuenta:

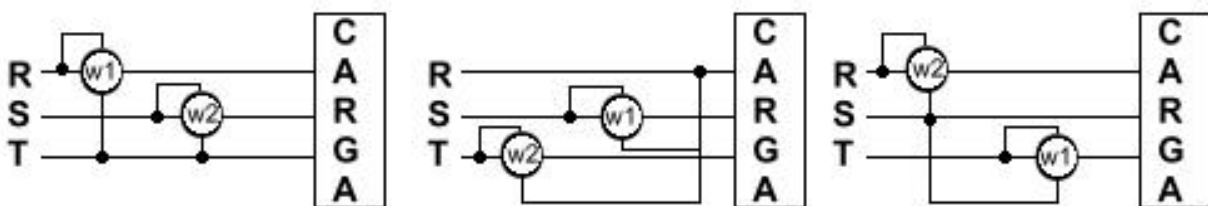
La d.d.p. entre la bobina de intensidad y la de tensión debe ser la menor posible.

Para obtener la deflexión correcta se debe respetar la polaridad del instrumento. El sentido de la desviación de la aguja, en cualquier vatímetro no depende del sentido de la corriente en las bobinas de intensidad y de tensión, sino de la relación de las direcciones entre ellas.

Los conductores de tensión, deben ser protegidos para evitar la colocación incorrecta de los conductores que puede dar lugar a cortocircuitos.

En la práctica no se conoce generalmente el tipo de carga a la que vamos a medir la potencia consumida. Necesitamos saber la tensión del sistema y el orden de la corriente, para poder elegir el vatímetro a utilizar y en que rango hacerlo trabajar.

En el método de Aron es necesario respetar la secuencia de conexión de los vatímetros, para conocer correctamente cual de los vatímetros es W1 y cual es W2.



De no ser así, cuando calculemos la potencia reactiva para cualquier ángulo ϕ nos dará con signo contrario, y sino conocemos el tipo de carga, interpretaremos erróneamente la medición.



II-Medición de Potencia Reactiva

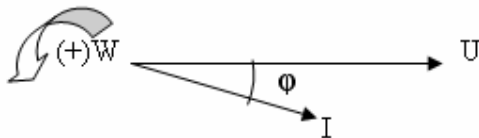
MEDICIÓN DE POTENCIA REACTIVA MONOFÁSICA

A) Método Directo

La potencia reactiva Monofásica queda expresada, por la siguiente fórmula:

$$P_{react.monof} = U.I.\sin \mathbf{j} \text{ [VAR]}$$

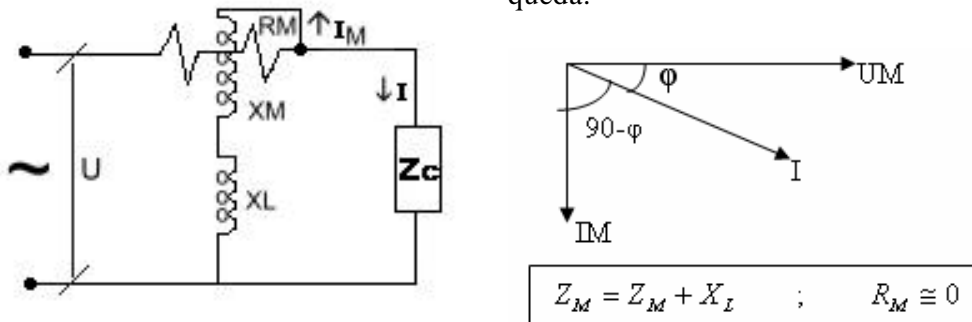
Siendo \mathbf{j} el ángulo de desfase entre I y U en la carga:



La potencia Reactiva monofásica se mide con el **Varímetro**, que es un instrumento similar al vatímetro, constituido por dos bobinas, una fija y una móvil, en serie con ésta última se conecta una bobina adicional, de tal forma que los flujos magnéticos que ambas generan están desfasados 90° entre sí. Es un instrumento de lectura Directa y se lo conecta en forma análoga al vatímetro.

Varímetro [VAR]

Supongamos que en la rama voltimétrica colocamos una reactancia pura, por ejemplo una auto-inductancia, el diagrama vectorial queda:



En este caso, la potencia que vamos a medir es:

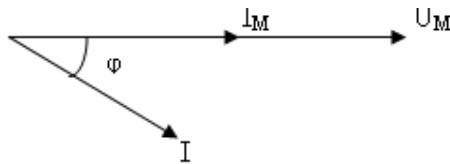
$$\mathbf{a}_{eq} = K1.I_{ef}.U_{ef}.\cos(90 - \mathbf{j}) = K1.I_{ef}.U_{ef}.\sin \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}_{eq} = P_{react.monof} = K1.I_{ef}.U_{ef}.\sin \mathbf{j}$$

Entonces haciendo circular una corriente I_M desfasada 90° respecto a U_M , por la rama voltimétrica, de modo que este desfasada un ángulo $(90 - \mathbf{j})$ respecto de I ; podremos medir **potencia reactiva**. Recordemos que el par eléctrico para instrumentos electrodinámicos es proporcional al producto de dos corrientes, I e I_M en corriente continua; y en corriente alterna,



las corrientes son valores instantáneos i e i_M . Cuando vamos a medir potencia, un bobinado es excitado con una corriente i_M proporcional a la tensión aplicada, y la ecuación del par M_E queda en función de ésta tensión, de la corriente de la bobina fija y del ángulo que forman ambas magnitudes. Este ángulo depende sólo del tipo de carga, pero la función trigonométrica que lo afecta depende de la potencia que deseamos medir, activa o reactiva.

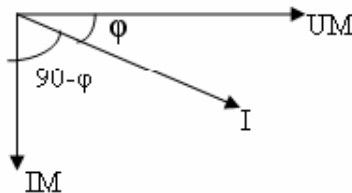


Watímetro:

I_M está en fase con U_M

Mide directamente potencia activa

$$\alpha_{eq} = K1.U_{ef}.I_{ef}.\cos \varphi$$



Varímetro:

I_M está a 90° respecto de U_M

Para medir potencia reactiva deberemos desfasar a I_M ($90-\varphi$) respecto de I .

$$M_E = K.I.I_M$$

$$\alpha_{eq} = K1.U_{ef}.I_{ef}.\sin \varphi$$

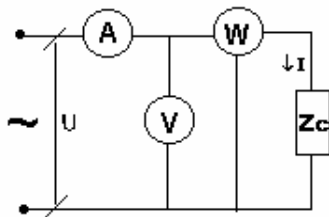
Si en lugar de conectar una auto-inductancia en la rama voltimétrica, conectamos una capacidad para lograr el desfase de 90° entre U_M e I_M no altera en nada todo el razonamiento (sólo deflexaría en sentido contrario). Pero, tanto auto-inductancias como capacidades, en la práctica no son puras, es decir que el mayor desfase que se puede conseguir es de unos 80° ; de esto surge de la necesidad de recurrir a otro método para lograr los 90° y éste es utilizar una red desfasadota denominada: CONEXIÓN HÜMMEL.

B) Método Indirecto.

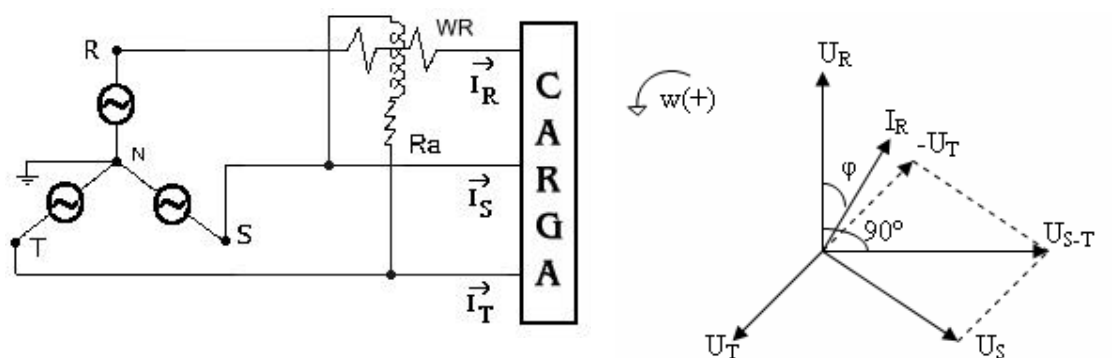
En éste caso podemos obtener la potencia reactiva monofásica, con la ayuda de un vatímetro, un voltímetro y un amperímetro. Con la lectura de éstos instrumentos obtenemos el

$$\cos \varphi = \frac{P_{\text{vatímetro}}}{U.I} = \frac{P_{\text{activa}}}{P_{\text{aparente}}}, \text{ y de aquí obtenemos mediante el arco coseno el ángulo } \varphi,$$

luego de conocido éste, podemos calcular el seno de φ , que multiplicado por las lecturas del voltímetro y amperímetro, nos da el valor de la **potencia reactiva monofásica**.



2) Medición de potencia reactiva trifásica en un sistema simétrico y equilibrado mediante un vatímetro.



$$P_W = I_R U_{S-T} \cdot \cos(\vec{I}_R \wedge \vec{U}_{S-T})$$

$$P_W = I_R U_{S-T} \cdot \cos(90^\circ - \mathbf{j}) \quad (1)$$

$$\cos(90^\circ - \mathbf{j}) = \text{sen} \mathbf{j} \quad (2)$$

$$P_W = I_R U_{S-T} \cdot \text{sen} \mathbf{j}$$

$$P_W = I_R \underbrace{\sqrt{3} U_{\text{fase}}}_{U_{S-T}} \cdot \text{sen} \mathbf{j}$$

$$P_W = \sqrt{3} \cdot P_{\text{reactiva monofásica}}$$

$$\sqrt{3} \cdot P_W = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot I_R \cdot U_f \cdot \text{sen} \mathbf{j} = 3 \cdot I_R U_f \cdot \text{sen} \mathbf{j} = P_{\text{reactiva trifásica}}$$

$$P_{\text{react. trif.}} = \sqrt{3} \cdot P_W$$

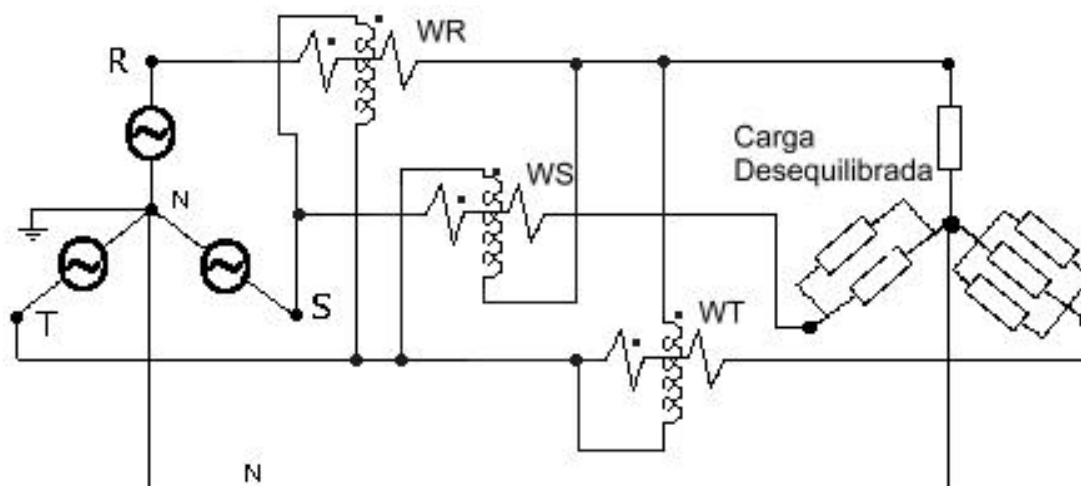
Teniendo un sistema simétrico y equilibrado es posible obtener la potencia reactiva trifásica, contando con un vatímetro y conectándolo de acuerdo al esquema anterior, teniendo en cuenta que la bobina de intensidad se conecta a una de las fases y la de tensión a las fases restantes, de esta forma se produce un desfase de 90° entre la tensión correspondiente a la fase que se conecta la bobina de intensidad (U_R) y la tensión con la cual trabaja la bobina de tensión (U_{S-T}).

Según (1), el vatímetro trataría de medir la potencia activa, pero según la relación trigonométrica (2), resulta que la lectura del vatímetro es proporcional a la potencia reactiva trifásica debemos multiplicar dicha lectura del vatímetro por $\sqrt{3}$.

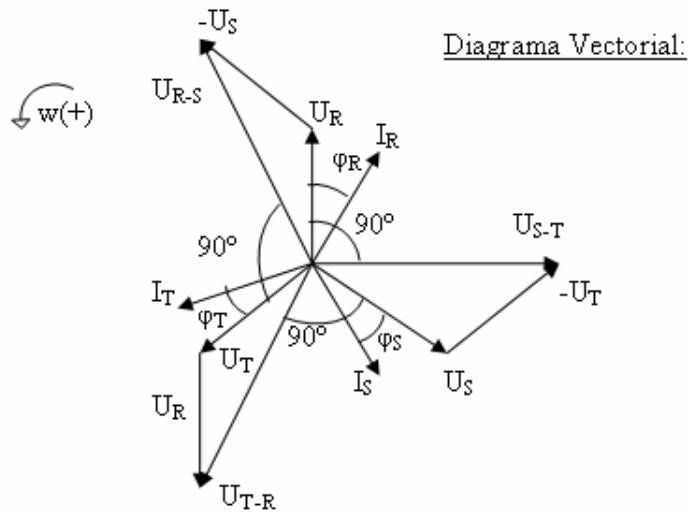
3) Medición de potencia reactiva trifásica en un sistema simétrico y desequilibrado.

En éste caso podemos utilizar dos métodos, el método de los **3 vatímetros** para redes trifásicas de **4 hilos** y el método de los **2 vatímetros** para redes trifásicas de **3 hilos**, siempre conectándolo como ya se ha mencionado, es decir, la bobina amperométrica en una fase y la voltimétrica en las dos restantes, a fin de lograr el desfase de 90° entre las tensiones correspondientes.

Método de los tres Vatímetros.



$$P_{react.trif} = \frac{1}{\sqrt{3}} (P_{WR} + P_{WS} + P_{WT})$$



$$\sum \text{lectura de los 3 vatímetros} = \left[I_R \cdot U_{S-T} \cdot \cos \left(\bar{I}_R \wedge \bar{U}_{S-T} \right) + I_S \cdot U_{T-R} \cdot \cos \left(\bar{I}_S \wedge \bar{U}_{T-R} \right) + I_T \cdot U_{R-S} \cdot \cos \left(\bar{I}_T \wedge \bar{U}_{R-S} \right) \right]$$

Por ser alimentación simétrica $\Rightarrow |\bar{U}_{S-T}| = |\bar{U}_{T-R}| = |\bar{U}_{R-S}| = U_{compuestas}$

$$\cos \left(\bar{I}_R \wedge \bar{U}_{S-T} \right) = \cos(90 - \mathbf{j}_R) = \text{sen} \mathbf{j}_R$$

$$\cos \left(\bar{I}_S \wedge \bar{U}_{T-R} \right) = \cos(90 - \mathbf{j}_S) = \text{sen} \mathbf{j}_S$$

$$\cos \left(\bar{I}_T \wedge \bar{U}_{R-S} \right) = \cos(90 - \mathbf{j}_T) = \text{sen} \mathbf{j}_T$$

$$\sum \text{lectura de los 3 vatímetros} = U_{comp} \cdot I_R \cdot \text{Sen} \mathbf{j}_R + U_{comp} \cdot I_S \cdot \text{Sen} \mathbf{j}_S + U_{comp} \cdot I_T \cdot \text{Sen} \mathbf{j}_T$$

Por ser $U_{comp} = \sqrt{3} U_{fase} \Rightarrow$ La potencia Reactiva Trifásica :

$$P_{React.trif.} = \frac{U_{comp}}{\sqrt{3}} (I_R \cdot \text{Sen} \mathbf{j}_R + I_S \cdot \text{Sen} \mathbf{j}_S + I_T \cdot \text{Sen} \mathbf{j}_T)$$

$$P_{React.trif.} = P_{\text{Reactiva monofásica R}} + P_{\text{Reactiva monofásica S}} + P_{\text{Reactiva monofásica T}}$$

$$P_{react.trif.} = \frac{1}{\sqrt{3}} (P_{WR} + P_{WS} + P_{WT})$$

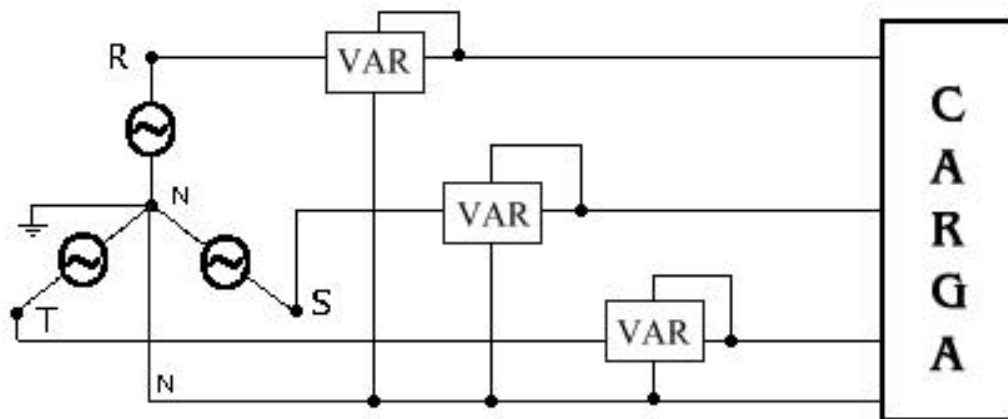
Como se puede observar en el esquema de conexión anterior, se utilizan 3 vatímetros para potencia activa conectados en la forma indicada, es decir con la bobina de tensión trabajando con las fases que quedan libres, con respecto a donde se conectó la bobina de intensidad. Entonces la bobina voltimétrica tiene aplicada la tensión compuesta o de línea que es $\sqrt{3}$ veces mayor que la tensión de fase (considerando siempre un sistema de alimentación en estrella).

La potencia reactiva trifásica es igual a la suma de las lecturas de los vatímetros dividido por $\sqrt{3}$, puesto que cada vatímetro mide la potencia reactiva de una fase aumentada en $\sqrt{3}$, por el hecho de que la bobina de tensión trabaja con una tensión compuesta en vez de hacerlo con la tensión de fase.

A pesar de existir el conductor **neutro**, **no es posible conectar** las bobinas de tensión a la **tensión de fase**, porque no se lograría obtener el desfase de 90° entre la tensión simple de la fase donde se ha conectado la bobina amperométrica y la tensión compuesta a la que está sometida la bobina de tensión.

3) Medición de la potencia reactiva trifásica mediante varímetros.

a) Método de los 3 (tres) varímetros:

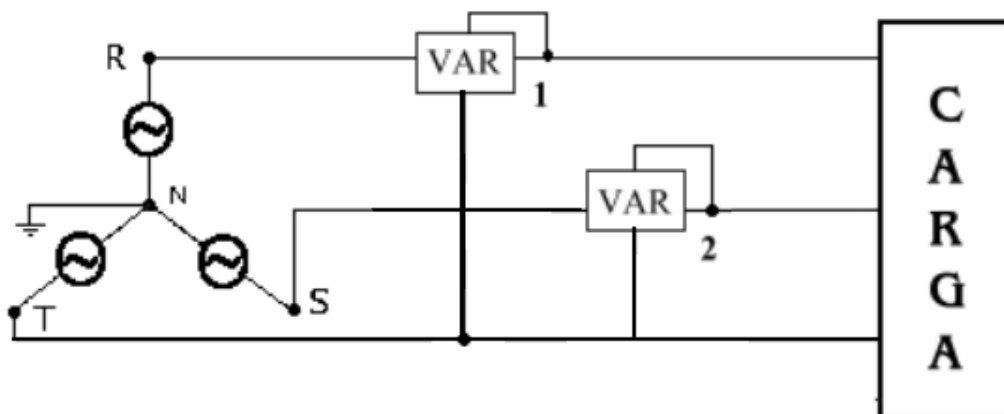


$$P_{react.trif.} = U_{R-N} \cdot I_R \cdot \text{sen} \mathbf{j}_R + U_{S-N} \cdot I_S \cdot \text{sen} \mathbf{j}_S + U_{T-N} \cdot I_T \cdot \text{sen} \mathbf{j}_T$$

$$P_{react.trif.} = P_{VAR_R} + P_{VAR_S} + P_{VAR_T}$$

El método es para sistemas tetrafilares o con neutro artificial, y no importa si el sistema es simétrico y/o equilibrado.

b) Método de los 2 (dos) varímetros.



$$P_{react.trif.} = U_{R-T} \cdot I_R \cdot \sin(\bar{U}_{R-T} \wedge \bar{I}_R) + U_{S-T} \cdot I_S \cdot \sin(\bar{U}_{S-T} \wedge \bar{I}_S)$$

$$P_{react.trif.} = P_{VAR(R-T)} + P_{VAR(S-T)}$$

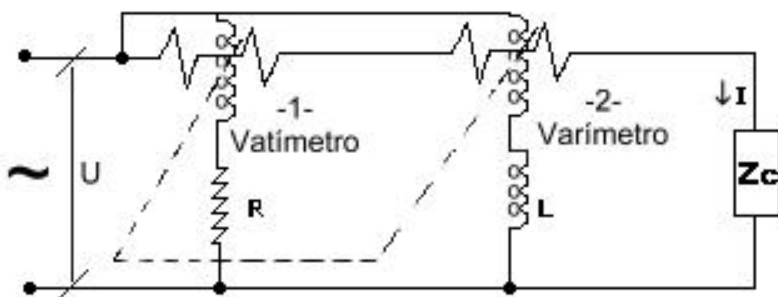
Este método se utiliza en sistemas trifilares, y tampoco importa si el sistema es equilibrado.

III - Medición Del Factor De Potencia

1) Métodos de Lectura Directa: Cosfímetro.

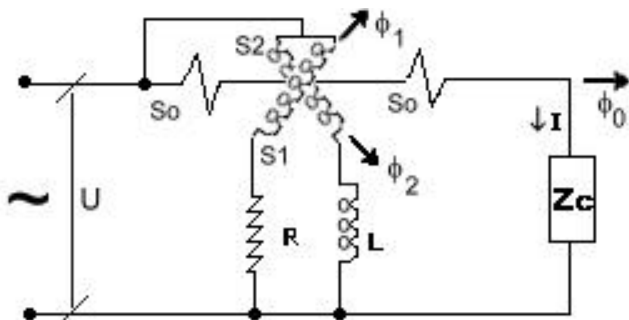
Se podría decir que es un electroimán de bobinas cruzadas, como veremos a continuación.

Hemos visto como funciona un vatímetro y un varímetro. Si tomamos ambos instrumentos y los conectamos como indica el circuito de la figura siguiente, es decir las bobinas están montadas sobre el mismo eje, son mecánicamente solidarias.



La aguja del instrumento -1- tenderá a medir potencia activa, la aguja de -2- tenderá a deflexionar en proporción a la potencia reactiva, pero como están solidarias sobre el mismo eje, van a tomar una posición intermedia que indica cual potencia prevalece sobre la otra. Este mecanismo es en esencia un **cosfímetro**, la construcción real es de forma más sencilla.

El instrumento está formado por una bobina amperométrica y dos bobinas voltimétricas móviles, cruzadas formando un ángulo de 90°. Se conecta como un vatímetro.





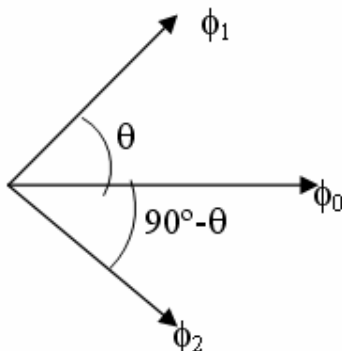
Los flujos magnéticos ϕ_0 y ϕ_1 son proporcionales a las corrientes I_0 e I_1 . El campo ϕ_0 está en fase con I_0 . Entre U e I hay un desfase f .

La bobina **S1** está en serie con una resistencia anti-inductiva R_1 de modo que la corriente **I_1 está en fase con U** .

La bobina S_2 está en serie con una auto-inductancia pura, entonces la corriente I_2 está retrasada respecto de la tensión U .

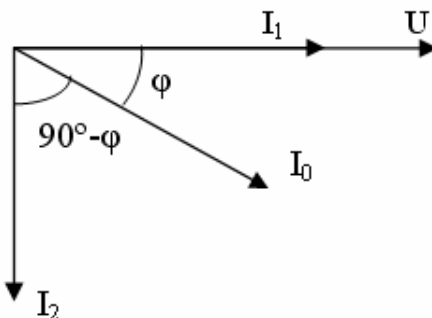
El ángulo que forman las bobinas móviles con la fija está en función de la posición que tome la aguja, de ésta manera tendremos ángulos en el tiempo y en el espacio. Entonces podemos hacer dos diagramas:

a) Flujos en el espacio: decalaje o ángulo geométrico.

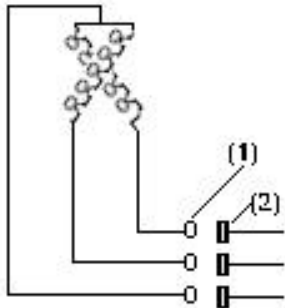


b) Corrientes en el tiempo: ángulos eléctricos.

Tomando como
referencia la tensión U :



Éste aparato no tiene par antagónico mecánico, el par que siempre hemos logrado con espirales elásticas, simplemente posee dos pares que se oponen entre sí, es decir que la bobina S_1 tiende a girar en sentido horario y la S_2 en sentido antihorario, por lo tanto un par hace las veces de antagónico del otro. A continuación veremos que un par es función del **sen q** , y el otro, del **cos q** , esto significa que un par se atenúa mientras que el otro aumenta, de tal manera que el par mayor hará girar el sistema.



Las bobinas móviles S_1 y S_2 se alimentan por medio de escobillas como indica la figura siguiente:

El rozamiento de las escobillas, se ha reducido prácticamente a cero, haciendo que las superficies sean bien pulidas, limpias y que apenas tengan presión entre sí, para que la fuerza causada por el rozamiento no ocasione un par importante, los aritos (1) son pequeños, de tal manera, que aunque la fuerza no sea nula, el brazo de palanca es pequeño, para que su momento



sea despreciable. Con esto se logra independencia en el giro.

Si alimentáramos las bobinas mediante espirales, el sistema giraría un cierto ángulo máximo, por ello es que se prefieren los aros y escobillas.

Respuesta del sistema:

Los pares eléctricos que se forman entre la bobina S1 y S, y S2 y S son:

$$M_{E_{10}} = K_1 \cdot \underbrace{f_1 \cdot f_0}_{\text{espacio}} \cdot \underbrace{\cos(\hat{f}_1 \hat{f}_0)}_{\text{tiempo}}$$

$$M_{E_{10}} = K_1 \cdot f_1 \cdot f_0 \cdot \text{sen } q \cdot \cos j$$

$$M_{E_{20}} = K_2 \cdot f_2 \cdot f_0 \cdot \text{sen}(90 - q) \cdot \cos(90 - j)$$

Hemos dicho que los flujos son proporcionales a las corrientes:

$$\underbrace{(\hat{f}_1 \hat{f}_0)}_{\text{tiempo}} = \underbrace{(\hat{I}_1 \hat{I}_0)}_{\text{tiempo}}$$

$$f_1 = K' \cdot I_1, \quad f_2 = K'' \cdot I_2, \quad f_0 = K \cdot I_0$$

En equilibrio, los pares M_{10} y M_{20} se igualan :

$$M_{E_{10}} = M_{E_{20}}$$

$$[K_1 \cdot K' \cdot K \cdot I_1 \cdot I_0 \cdot \text{sen } q \cdot \cos j = K_2 \cdot K'' \cdot K \cdot I_2 \cdot I_0 \cdot \cos q \cdot \text{sen } j] \quad (1)$$

Constructivamente puede lograrse que:

$$a) \begin{cases} K' = K'' \\ K_1 = K_2 \end{cases}$$

$$b) |I_1| = |I_2|$$

$$I_1 = \frac{U}{R} = K_3 \cdot U, \quad I_2 = \frac{U}{w \cdot L} = K_4 \cdot U$$

$$\text{Si } |R| = |w \cdot L| \Rightarrow K_3 = K_4 \Rightarrow |I_1| = |I_2|$$

La expresión (1) queda:

$$[K_1 \cdot K' \cdot K \cdot I_1 \cdot I_0 \cdot \text{sen } q \cdot \cos j = K_2 \cdot K'' \cdot K \cdot I_2 \cdot I_0 \cdot \cos q \cdot \text{sen } j]$$

$$\text{sen } q \cdot \cos j = \cos q \cdot \text{sen } j$$

$$\frac{\text{sen } q}{\cos q} = \frac{\text{sen } j}{\cos j}$$

$$\text{tg } q = \text{tg } j$$

Entonces:

$$\boxed{q = j}$$



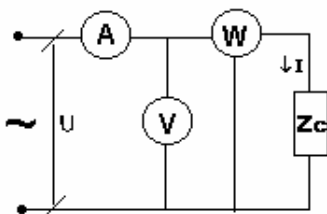
El aparato se construye de tal forma que el ángulo que adopta en la porción de equilibrio, sea el ángulo de desfase ϕ .

La escala del instrumento se podrá graduar en ángulos o en coseno del ángulo. En el primer caso tendremos un fasímetro, en el segundo un cosfímetro.

Existen cosfímetros monofásicos y trifásicos. Generalmente se fabrican para 5A y 100V, para intensidades y tensiones mayores se los conectan a través de transformadores de medición. (TI y TV)

2) Medición Indirecta, para sistemas Monofásicos.

Utilizando un amperímetro, un voltímetro y un vatímetro

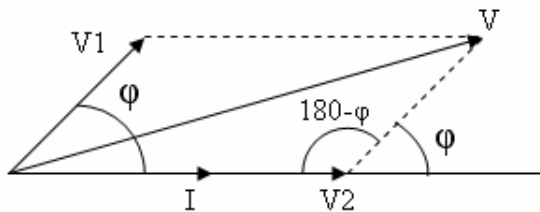
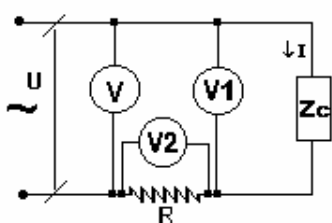


Luego se aplica la formula:

$$\cos \phi = \frac{\text{Lectura del vatímetro}}{\text{Lectura del amperímetro} \times \text{Lectura del voltímetro}}$$

b) Método de los tres voltímetros.

Utilizamos una resistencia auxiliar no inductiva R.



Considerando una carga inductiva, la intensidad I atrasa un ángulo ϕ , respecto de la tensión $V1$. Por otra parte la resistencia R es no inductiva, por lo tanto, la intensidad I está en fase con la tensión $V2$. Además la lectura del voltímetro V es la suma vectorial de $V1$ y $V2$. Aplicando el teorema del coseno:

$$V^2 = V2^2 + V1^2 - 2.V1.V2.\cos(180 - \phi)$$

$$\cos(180 - \phi) = -\cos \phi$$

$$V^2 = V2^2 + V1^2 + 2.V1.V2.\cos \phi$$



$$\cos \mathbf{j} = \frac{V^2 - V_1^2 - V_2^2}{2.V_1.V_2}$$

Como podemos ver, es fácil obtener el valor del coseno \mathbf{j} , contando con las lecturas de los voltímetros.

Este método se utiliza, además para obtener la potencia activa de un sistema monofásico, cuando la potencia es pequeña y por consiguiente también la intensidad (alrededor de los 15 mA), de éste modo los errores producidos en los instrumentos son ínfimos.

$$P_{act.} = V_1.I_1.\cos \mathbf{j}$$

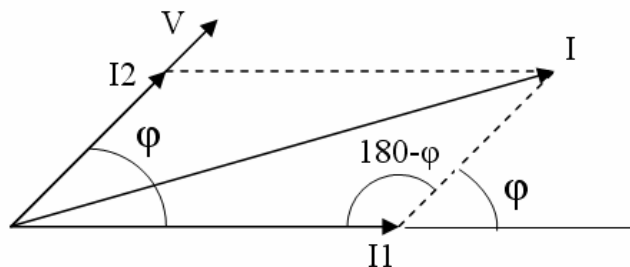
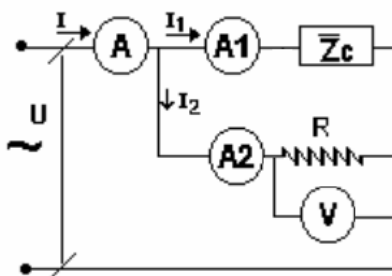
$$P_{act.} = V_1.I_1 \left(\frac{V^2 - V_1^2 - V_2^2}{2.V_1.V_2} \right) = I_1 \left(\frac{V^2 - V_1^2 - V_2^2}{2.V_2} \right)$$

$$V_2 = R.I_1 \Rightarrow P_{act.} = I_1 \left(\frac{V^2 - V_1^2 - V_2^2}{2.R.I_1} \right)$$

$$P_{act.} = \left(\frac{V^2 - V_1^2 - V_2^2}{2.R} \right)$$

c) Método de los tres Amperímetros.

Análogamente al método anterior es posible obtener el valor del factor de potencia contando con tres amperímetros y una resistencia auxiliar no inductiva, además consideramos que la caída de tensión en los amperímetros es cero.



Aplicando el teorema del coseno:

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 - 2.I_1.I_2.\cos(180 - \mathbf{j})$$

$$\cos(180 - \mathbf{j}) = -\cos \mathbf{j}$$

$$I^2 = I_2^2 + I_1^2 + 2.I_1.I_2.\cos \mathbf{j}$$

$$\cos \mathbf{j} = \frac{I^2 - I_1^2 - I_2^2}{2.I_1.I_2} \quad (1)$$



Este método también permite medir la potencia activa monofásica:

$$P_{act.} = V I_1 \cos \phi$$

$$P_{act.} = V I_1 \left(\frac{I^2 - I_1^2 - I_2^2}{2 I_1 I_2} \right) = V I_1 \left(\frac{I^2 - I_1^2 - I_2^2}{2 I_2} \right)$$

$$V = R I_2 \Rightarrow \frac{V}{R}$$

$$P_{act.} = V \left(\frac{I^2 - I_1^2 - I_2^2}{2 \cdot \frac{V}{R}} \right)$$

$$P_{act.} = R \left(\frac{I^2 - I_1^2 - I_2^2}{2} \right) \quad (2)$$

A los efectos de construir el diagrama vectorial se supone la carga de tipo resistiva – inductiva, por ello I_1 está retrasada con respecto de V , un ángulo ϕ , cuyo coseno hemos determinado.

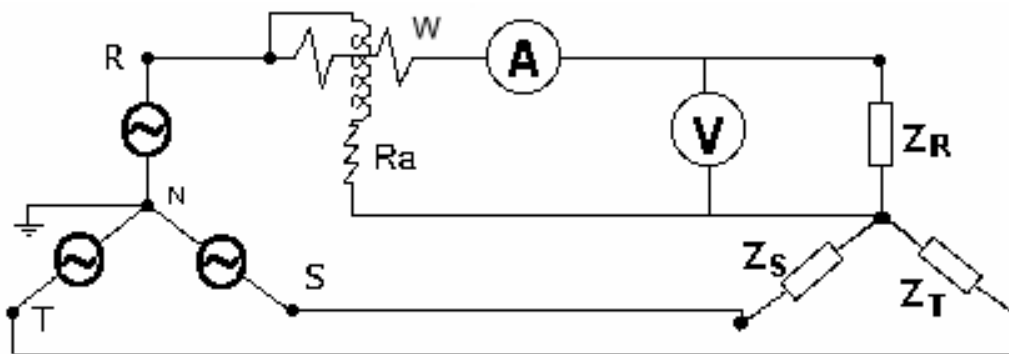
La resistencia auxiliar R es de tipo no inductiva y de valor conocido, con el cual podemos calcular la potencia activa.

Como vemos, el valor del coseno ϕ queda determinado por la fórmula (1), en función de las lecturas de los amperímetros.

3) Medición del factor de potencia en sistemas trifásicos.

a) SISTEMA SIMÉTRICO Y EQUILIBRADO.

a.1) Utilizando un vatímetro, un amperímetro y un voltímetro.



Quando el sistema es simétrico y equilibrado, el desfase entre la tensión y corriente, es el mismo para cada fase, por lo cual el factor de potencia trifásico medio coincidirá con el factor de potencia en cada fase. Éste valor se determina con un vatímetro, un voltímetro y un amperímetro, que medirán la potencia de una fase, la tensión de una fase y la corriente de la fase respectiva.



a.2) Método de Aron.

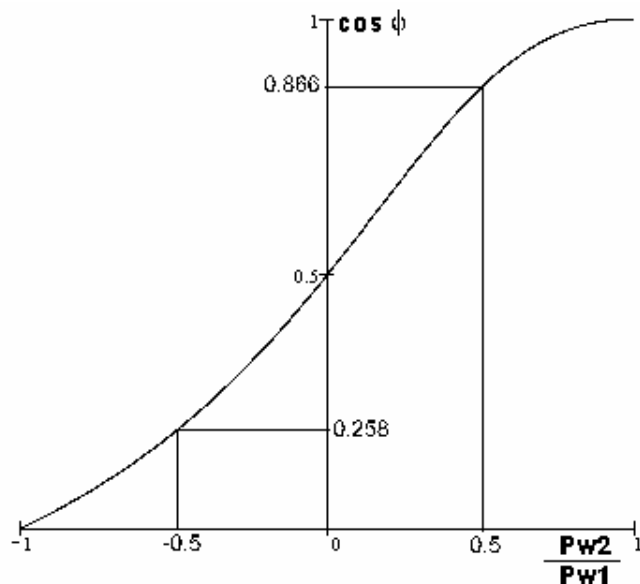
Partiendo de dos lecturas w_1 y w_2 se puede determinar el factor de potencia, haciendo el cociente de la lectura **menor** y la **mayor**.

$|w_1| > |w_2|$, para carga inductiva.

$|w_2| > |w_1|$, para carga capacitiva.

Si hacemos una tabla para algunos valores del ángulo f :

f	$\cos f$	$\frac{w_2}{w_1}$
0°	1	1
30°	0,866	0,5
60°	0,5	0
90°	0	-1



De la curva podemos obtener para cualquier relación de $\frac{w_2}{w_1}$, el factor de potencia. Se puede construir ésta tabla de otro modo, utilizando la siguiente fórmula, para graficar la curva $\cos \phi = f\left(\frac{P_{w2}}{P_{w1}}\right)$, para luego utilizarla como ábaco:

$$\cos \phi = \frac{1+x}{2\sqrt{x^2-x+1}} \quad \text{donde:} \quad x = \frac{W_{\text{menor}}}{W_{\text{mayor}}} = \frac{W_2}{W_1}$$

b) SISTEMA SIMÉTRICO Y DESEQUILIBRADO

Cuando las cargas están repartidas desigualmente entre las fases, habrá que obtener el factor de potencia por cada fase y luego calcular el valor promedio de las tres fases, obteniendo así el **valor medio del coseno ϕ trifásico**.

Integrantes de la Cátedra :

Titular: Ing. Roberto Martínez

JTP: Ing. Eduardo Grosso

Ayudantes:

Ing. Pedro Pérez

Ing. Walter Javier Paris

Unidad Compilada por:

Ing. Walter Javier Paris

Revisión:

Ing. Roberto Martínez