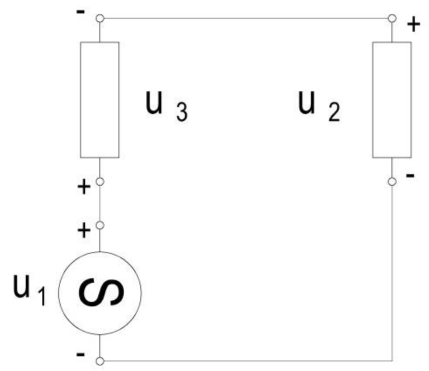
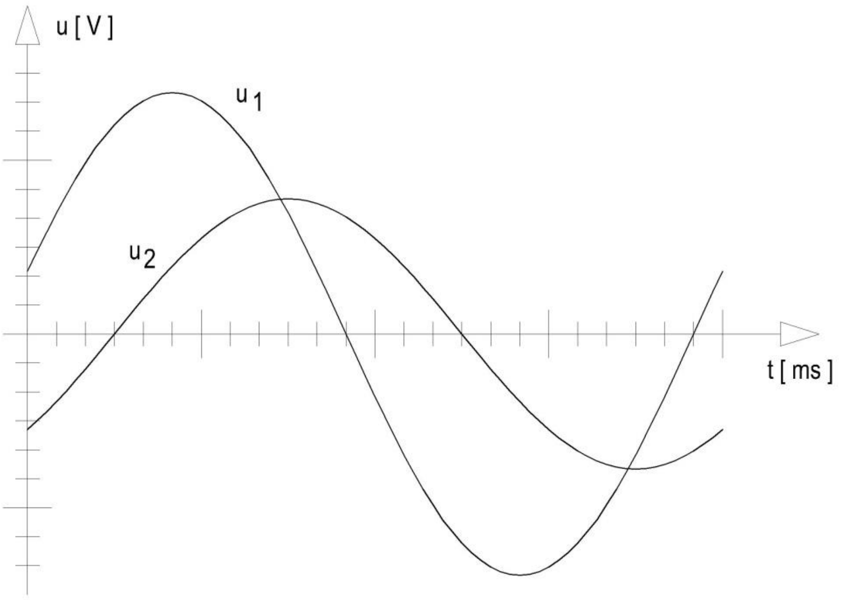
U2.05.- Hallar los valores instantáneos de las señales de tensión del circuito eléctrico mostrado a continuación para la fase **t_1** = 5,6 T.



En el siguiente gráfico (escala **t [ms]** = 0,6 [ms/div]) se representan las formas de onda de las señales alternas senoidales de tensión **$u_1(t)$** y **$u_2(t)$** , cuyos valores eficaces son :

U_1 = 125 [V] **U_2** = 65,6 [V]



RESPUESTA: **$u_1(t_1)$** = - 137,38 [V] ; **$u_2(t_1)$** = 14,51 [V] ;

$u_3(t_1)$ = - 151,90 [V]

<u>SOLUCIÓN U2.05</u>

La expresión general de una señal alterna senoidal es :

$$u(t) = \hat{U}\ sen(\omega t + \theta) = \sqrt{2}\, U\ sen(\omega t + \theta)$$

Para hallar la fase inicial (**θ** [º]) partiendo de la representación gráfica de la forma de onda de la señal se determina, en primer lugar, la fase correspondiente al valor pico positivo más cercano al origen de coordenadas.

$$para\ \ u_1(t)=\hat{U}_1 \qquad t\left(\hat{U}_1\right)=\left(n^o\ div\right)\times\left(ms/div\right)=5\times0{,}6=3{,}0\,[ms]$$

$$para\ \ u_2(t)=\hat{U}_2 \qquad t\left(\hat{U}_2\right)=\left(n^o\ div\right)\times\left(ms/div\right)=9\times0{,}6=5{,}4\,[ms]$$

La condición para que una dada señal alterna senoidal tenga un valor instantáneo igual al valor pico positivo, viene dada por :

$$u(t)=\hat{U} \quad\Rightarrow\quad sen\left[\omega\,t\left(\hat{U}\right)+\theta\right]=1 \quad\Rightarrow\quad \omega t\left(\hat{U}\right)+\theta=90\,[^o]$$

La fase inicial (**θ**) resulta entonces igual a :

$$\theta\,[^o]=90\,[^o]-\omega t\left(\hat{U}\right)\ [^o] \quad [1]$$

El valor de la pulsación (**ω**), expresado en [º] , viene dado por :

$$\omega\,[^o/s]=\frac{2\pi\,[rad]}{T\,[s]}\,\frac{180\,[^o]}{\pi\,[rad]}=\frac{360\,[^o]}{T\,[s]}$$

El período , **T** , para las señales de tensión **u_1(t)** y **u_2(t)** , vale :

$$T=2\times\left(n^o\ div\ semiciclo\right)\times\left(ms/div\right)=2\times12\times0{,}6=14{,}4\,[ms]$$

en consecuencia :

$$\omega\,[^o/s]=\frac{360\,[^o]}{T\,[s]}=\frac{360}{14{,}4\times10^{-3}}=25000\,[^o/s]$$

Reemplazando valores en la expresión [1] se obtienen las fases iniciales para las señales de tensión cuya forma de onda es dato :

$$para\,u_1(t) \qquad \theta_1\,[^o]=90\,[^o]-\omega t\left(\hat{U}_1\right)\ [^o]=90-\frac{360}{14{,}4}\times3{,}0=15\,[^o]$$

$$para\,u_2(t) \qquad \theta_2\,[^o]=90\,[^o]-\omega t\left(\hat{U}_2\right)\ [^o]=90-\frac{360}{14{,}4}\times5{,}4=-45\,[^o]$$

Las expresiones correspondientes a las señales **u_1(t)** y **u_2(t)** vienen dadas por :

$$u_1(t)=\sqrt{2}\,U_1\ sen\left(\omega t+\theta_1\right)=\sqrt{2}\,125\ sen\left(25000\ t+15^o\right)\quad [V]$$
$$u_2(t)=\sqrt{2}\,U_2\ sen\left(\omega t+\theta_2\right)=\sqrt{2}\ 65{,}6\ sen\left(25000\ t-45^o\right)\quad [V]$$

Luego los valores instantáneos de éstas señales para **t_1** = 5,6 T, valen :

$$u_1(t_1)=1{,}4142\times125\ sen\left(25000\times5{,}6\times14{,}4\times10^{-3}+60^o\right)=-137{,}38\quad [V]$$

$$u_2(t_1)=1{,}4142\times 65{,}6\ sen\left(25000\times 5{,}6\times 14{,}4\times 10^{-3}-45^{o}\right)=14{,}51\quad [V]$$

Aplicando la ley de lazos de Kirchhoff al circuito eléctrico dado se obtiene la siguiente expresión :

$$u_1(t)-u_2(t)-u_3(t)=0\quad [2]$$

Esta igualdad se cumple también si se representan las señales de tensión mediante sus correspondientes fasores, vale decir :

$$\mathring{U}_1-\mathring{U}_2-\mathring{U}_3=0\quad \therefore\quad \mathring{U}_3=\mathring{U}_1-\mathring{U}_2\quad [3]$$

Desarrollando la expresión [3] resulta :

$$\mathring{U}_3=125\ \langle\ 15^{o}-65{,}6\ \langle\ -45^{o}=\left(120{,}7407+j\,32{,}3524\right)-\left(46{,}3862-j\,46{,}3862\right)=$$

$$\mathring{U}_3=74{,}3545+j\,78{,}7386\ [V]$$

El valor eficaz de la señal **u $_3$ (t)** viene dado por el módulo del fasor correspondiente :

$$U_3=\sqrt{\left[\mathrm{Re}\left(\mathring{U}_3\right)\right]^2+\left[\mathrm{Im}\left(\mathring{U}_3\right)\right]^2}=\sqrt{(74{,}3545)^2+(78{,}7386)^2}=108{,}30\quad [V]$$

La fase inicial de la señal **u $_3$ (t)**, teniendo en cuenta que el fasor correspondiente está ubicado en el primer cuadrante (parte real y parte imaginaria, valor positivo) viene dada por :

$$\theta_3\,[^{o}]=arctg\left[\frac{\mathrm{Im}\left(\mathring{U}_3\right)}{\mathrm{Re}\left(\mathring{U}_3\right)}\right]=arctg\left(\frac{78{,}7386}{74{,}3545}\right)=46{,}64\,[^{o}]$$

En base a éstos resultados, la expresión de la señal **u $_3$ (t)** es la siguiente :

$$u_3(t_1)=\sqrt{2}\,U_3\ sen(\omega t+\theta_3)=\sqrt{2}\,108{,}30\ sen\,(25000\,t+46{,}64^{o})\quad [V]$$

Luego el valor instantáneo de ésta señal para **t $_1$** = 5,6 T, vale :

$$u_3(t_1)=1{,}4142\times 108{,}30\ sen\,(25000\times 5{,}6\times 14{,}4\times 10^{-3}+46{,}64^{o})=-151{,}90\quad [V]$$

A modo de verificación de los resultados obtenidos debe comprobarse la igualdad [2] :

$$u_1(t)-u_2(t)-u_3(t)=(-137{,}38)-(14{,}51)-(-151{,}90)=0{,}01\cong 0\,[V]$$