Relación Propuestos #1

Guillermo B. Morales

1. Los sentimientos de Ross (R) y Rachel (L) durante su tortuosa relación pueden describirse de forma sencilla por un par de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= aR + bL \\ \dot{L} &= cR + dL \end{aligned}$$

Donde $R > 0$ indica que Ross ama a Rachel, $R < 0$ que la odia y $R = 0$ que siente indiferencia por ella (el mismo criterio de signos se aplica a L). El signo de los parámetros a, b, c y d determinará el tipo de comportamiento que tiene cada uno de ellos en la relación. Por ejemplo, si $c > 0$ y $d < 0$, podríamos calificar a Rachel de amante "cauta", pues su amor por Ross aumentará en la medida en que este muestre más afecto por ella, pero se verá frenado por la intensidad de sus propios sentimientos.

a) Considere el caso en que los sentimientos de Ross y Rachel están únivocamente determinados por el trato que reciben del otro, sin verse afectados por sus propias emociones:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= aL \\ \dot{L} &= bR \end{aligned}$$

Caracterice el único punto fijo del sistema a partir de un análisis de la estabilidad lineal del mismo. Para los valores de a y b que conducen a los amantes a una relación tóxica, ¿qué fracción del tiempo pasan Ross y Rachel odiándose mútuamente?

b) Si Ross y Rachel se comportan exactamente igual (i.e. $\dot{R} = aR + bL$ y $\dot{L} = bR + aL$), ¿qué puede esperarse de su relación? Identifique en cada caso las direcciones a lo largo de las cuales un estado de indiferencia mutua es estable o inestable.

c) En ocasiones demasiado afecto puede ser contraproducente... De acuerdo a esta idea y para tener un modelo más realista, se propone sustituir el efecto de los sentimientos de la otra persona sobre los propios en el modelo anterior por una función de tipo $rX(1-X^2)$. Considere una relación en la que, después de darse un tiempo, un Ross ilusionado ($a = b = 1$) comienza nuevamente su relación con una Rachel bastante cauta ($c = -3\,, d = 1$), de acuerdo al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= aR + bL \\ \dot{L} &= cL + dR\left(1 - R^2\right) \end{aligned}$$

Encuentre los puntos fijos y analice su estabilidad en función de los parámetros del sistema, interpretando en cada caso el sentido "físico" de los resultados obtenidos.

2. El modelo de FitzHugh–Nagumo, paradigma de los modelos de excitabilidad, describe la dinámica de activación y desactivación de una neurona mediante el par de ecuaciones

$$\dot{V} = V(a - V)(V - 1) - w + I_{ext}$$

$$\dot{\omega} = bV - c\omega$$

a) Considera el caso más simple con $I_{ext} = 0$. Calcula los estados estacionarios del sistema. Determina, en función de los parámetros a, b y c, las condiciones de estabilidad del estado en el que la neurona está en reposo.

b) Fijados $a = 0.1$, $c = 0.033$, $I_{ext} = 0$ comprueba que existe un valor crítico b_c en el cual el sistema sufre una bifurcación tipo saddle-node y pasa de ser monoestable a biestable. Esto puede hacerse gráficamente representando las nulclinas y el campo vectorial asociado al sistema en cada fase. Conviene pintar también trayectorias del sistema (tanto en el espacio de las fases como en forma V vs t) con diferentes condiciones iniciales para confirmar la existencia de biestabilidad.

c) Sean $a = 0.1$, $c = 0.033$ y $b = 0.008$, estima a partir de representaciones gráficas el rango de valores de I_{ext} para el cual aparece un ciclo límite. Esto equivale a un tren de potenciales de acción en nuestro modelo.

3. Considérese el mapa unidimensional dado por $x_{n+1} = f(x_n)$ con $f(x_n) = -(1+r)\,x - x^2 - 2x^3$.

a) Clasifique la estabilidad lineal del punto fijo $x^* = 0$.

b) Demuestre que la estabilidad de dicho punto fijo cambia en $r = 0$ (bifurcación tipo "flip").

c) Demuestre mediante un diagrama "cobweb" para $f_2(x_n)$ que existe un ciclo de orden 2 inestable para $r < 0$ y que dicho ciclo se fusiona con $x^* = 0$ cuando $r \to 0^-$.

4. Dado el siguiente sistema de ecuaciones que describe la interacción entre dos sustancias químicas en términos de sus concentraciones u y v:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma\left(a - u + u^2 v\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma\left(b - u^2 v\right) + d\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

donde γ, a, b, d son parámetros positivos.

a) Encuentre el estado estacionario y homogéneo del sistema.

b) Estudie la estabilidad lineal del estado anterior frente a perturbaciones homogéneas de la forma:

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(t) \\ \tilde{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_u \\ A_v \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

Nótese que esto se reduce a un análisis de la estabilidad lineal de los que hemos estudiado en el caso sin difusión. Compruebe que el determinante de la matriz jacobiana J en este caso es siempre positivo y que, por tanto, la estabilidad del punto fijo frente perturbaciones homogéneas dependerá exclusivamente de la traza de J.

c) Considere ahora una perturbación no-homogénea del estado estacionario $u(x,t) = u^* + \tilde{u}(x,t))$, $v(x,t) = v^* + \tilde{v}(x,t)$ de la forma:

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}(x,t) \\ \tilde{v}(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_u \\ A_v \end{pmatrix} e^{\sigma t} e^{iqx}$$

donde σ representa la tasa de crecimiento de la perturbación y q la frecuencia espacial de la misma. Despreciando todos los términos de orden 2 o superior en la perturbación, convierta las ecuaciones originales del sistema en un par de ecuaciones algebraicas de la forma:

$$\sigma \vec{w} = H \vec{w} \,\mathrm{con}\, \vec{w} = \begin{pmatrix} \tilde{u}(x,t) \\ \tilde{v}(x,t) \end{pmatrix}$$

Compruebe que la matriz H que determina la evolución de las perturbaciones a primer orden puede escribirse como:

$$H = J - \begin{pmatrix} q^2 & 0 \\ 0 & dq^2 \end{pmatrix}$$

siendo J la matriz Jacobiana del sistema sin difusión evaluada en el estado estacionario homogéneo.

d) Considérese valores de a y b para los que el estado estacionario homogéneo es estable frente a perturbaciones homogéneas. Demuestre que, en vista de que $Tr(H) \leq Tr(J)$, dicho estado estacionario será inestable frente a perturbaciones no-homogéneas si $det(H) < 0$.

e) Encuentre el valor $q_c > 0$ que minimiza $det(H, q)$, luego determine las condiciones para las que $det(H, q_c) < 0$. Dichas condiciones marcarán el punto de inestabilidad del estado estacionario homogéneo frente a perturbaciones espaciales (i.e., la inestabilidad de Turing) y q_c será la frecuencia del primer modo en el que el sistema se desestabiliza.