Tarea 0 Seminario de Estadística I

Complejidad Computacional Notación O(n) (asymptotic upper bound)

Demuestre lo siguiente

1. Si f_1 es $O(g_1)$ y f_2 es $O(g_2)$ entonces $(f_1 + f_2)$ es $O(max|g_1|, |g_2|)$
2. Si f_1 es $O(g_1)$ y f_2 es $O(g_2)$ entonces $(f_1 f_2)$ es $O(g_1 g_2)$

Sol.

1. Por definición, como f_1 es $O(g_1)$ esto quiere decir que:

$\exists c_1$ y n_0^1 t.q. $0 \leq f_1(n) \leq c_1 g_1(n) \quad \forall n \geq n_0^1 \; \ldots \; (1)$

y f_2 es $O(g_2)$ esto es:

$\exists c_2$ y n_0^2 t.q $0 \leq f_2(n) \leq c_2 g_2(n) \quad \forall n \geq n_0^2 \; \ldots \; (2)$

Sabemos que necesariamente $g_1(n) \geq g_2(n) \quad \forall n \geq n_1^*$

ó $g_2(n) \geq g_1(n) \quad \forall n \geq n_2^*$

Con (1) y (2) Tenemos que:

$0 \leq f_1(n) + f_2(n) \leq c_1 g_1(n) + c_2 g_2(n) \quad \forall n \geq N$, con $N = max\{n_1, n_2\}$

Caso 1

Suponemos $g_1(n) \leq g_2(n) \quad \forall n \geq n^*$

$\Rightarrow \; 0 \leq f_1(n) + f_2(n) \leq c_1 g_1(n) + c_2 g_2(n) \leq c_1 g_2(n) + c_2 (g_2(n)) \quad \forall n \geq N$

$\Rightarrow \; 0 \leq f_1(n) + f_2(n) \leq g_2(n)(c_1 + c_2)$

$\Rightarrow \; 0 \leq f_1 + f_2(n) \leq c^* g_2(n) \quad \forall n \geq N$ con $N = max\{n_1, n_2\}$

Caso 2.

Si sucediera que $g_2(n) \leq g_1(n) \quad \forall n \geq n^*$

con un razonamiento análogo al anterior, concluiríamos que:

$0 \leq f_1(n) + f_2(n) \leq c^* g_1(n) \quad \forall n \geq N$ con $N = max\{n_1, n_2\}$

$\therefore \; \exists \; c^*$ y N t.q

$0 \leq f_1(n) + f_2(n) \leq c^* max\{g_1(n), g_2(n)\} \quad \forall n \geq N$

$\therefore \; f_1 + f_2$ es $O(max\{g_1, g_2\})$

2.

De nuevo f_1 es $O(g_1)$ y f_2 es $O(g_2)$ por lo que

$\exists c_1$ y n_0^1 t.q : $0 \leq f_1(n) \leq c_1 g_1(n) \quad \forall n \geq n_0^1$

y $\exists c_2$ y n_0^2 t.q $0 \leq f_2(n) \leq c_2 g_2(n) \quad \forall n \geq n_0^2$

$\Rightarrow 0 \leq f_1(n) \cdot f_2(n) \leq c_1 \cdot c_2 \, g_1(n) g_2(n) \quad \forall n \geq n_0, \quad n_0 = n_0^1 \cdot n_0^2$

$\Rightarrow 0 \leq f_1(n) f_2(n) \leq c^* g_1(n) g_2(n) \quad \forall n \geq n_0$

$\therefore \exists n_0$ y c^*

$\therefore f_1 \cdot f_2$ es $O(g_1 \cdot g_2)$

3. ¿Cuál es la complejidad del siguiente algoritmo(O)?

```
for (i = 0; i < N; i++) {

    for (j = 0; j < M; j++) {
        print(i,j)
    }


}
```

for(i=0; i<N; i++){ $\rightarrow O(1)+O(n)+O(n) = O(2n+1) = O(n)$

for(j=0; j<M; j++){ $\rightarrow O(1)+O(n)+O(n) = O(n)$

print(i,j) $\rightarrow O(1)$

}

}

propiedad 2 de esta Tarea

$= \underbrace{O(n) \cdot O(n)}_{\text{for's anidados}} = O(n^2)$

① Estadistica Descriptiva

① Demuestre $-1 \leq r_{xy} \leq 1$ donde: $r_{xy} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}$

Demostración

Sabemos que $Cov(x,y) = \mathbb{E}\left[(x - \mathbb{E}(x))(y - \mathbb{E}(y))\right]$

Aplicando valor absoluto

$$|Cov(x,y)| = \left|\mathbb{E}\left[(x - \mathbb{E}(x))(y - \mathbb{E}(y))\right]\right|$$

Desigualdad de Cauchy - Schwarz

Sean x, y v.a sobre el mismo espacio de probabilidad, entonces

$$|\mathbb{E}(xy)|^2 \leq \mathbb{E}(x^2)\,\mathbb{E}(y^2)$$

Sea $W = x - \mathbb{E}(x)$ y $Z = y - \mathbb{E}(y)$, aplicando Cauchy - Schwartz

$$|\mathbb{E}(WZ)|^2 \leq \mathbb{E}(W^2)\,\mathbb{E}(Z^2)$$

$\Rightarrow$

$$|\mathbb{E}(WZ)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(W^2)\,\mathbb{E}(Z^2)}$$

(*) $|a| \leq b \Rightarrow -b \leq a \leq b$

$\Rightarrow$ (*)

$$-\left(\sqrt{\mathbb{E}(W^2)\,\mathbb{E}(Z^2)}\right) \leq E(WZ) \leq \sqrt{\mathbb{E}(W^2)\,\mathbb{E}(Z^2)}$$

Dividiendo por $\sqrt{\mathbb{E}(W^2)\,\mathbb{E}(Z^2)}$

$$-1 \leq \frac{\mathbb{E}(WZ)}{\sqrt{\mathbb{E}(W^2)\,\mathbb{E}(Z^2)}} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{Var(x)\,Var(y)}} \leq 1$$

$$-1 \leq r_{xy} \leq 1$$

$\blacksquare$

② Demuestre que $|r_{xy}| = 1 \iff$ Existe una relacion lineal entre las variables x, y, es decir $y_i = a + \beta x_i$; $\beta \neq 0$

($\Leftarrow$) Si existe una relación podemos escribir a $y = a + \beta x$.

$$\Rightarrow \quad Cov(x, y) = Cov(x, \alpha + \beta x) = \beta \, Var(x)$$

y además

$$Var(y) = Var(\alpha + \beta x) = \beta^2 \, Var(x)$$

$$\Rightarrow \quad r_{xy} = \frac{Cov(x, y)}{\sqrt{Var(x)\, Var(y)}} \Rightarrow \frac{\beta \, Var(x)}{\sqrt{Var(x)\, \beta^2 Var(x)}} \Rightarrow \frac{\beta \, Var(x)}{\beta \sqrt{Var(x)^2}}$$

$$\Rightarrow \quad r_{xy} = 1$$

Si $\beta < 0 \Rightarrow Cov(x, y) = \beta \, Var(x) \leq 0$

$$\therefore \quad r_{xy} = -1$$

En ambos casos $|r_{xy}| = 1$

($\Rightarrow$) Si $|r_{xy}| = 1$

Sea x y y v.a con σ_x^2 y σ_y^2 respectivamente

$$\Rightarrow Var\left(\frac{x}{\sigma_x} - \frac{y}{\sigma_y}\right) = \frac{Var(x)}{\sigma_x^2} + \frac{Var(y)}{\sigma_y^2} - \frac{2 \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_y^2} - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

Recordemos que la varianza de una constante es 0.

$$\therefore \quad \frac{x}{\sigma_x} - \frac{y}{\sigma_y} = c \quad ; \; c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\sigma_x} - c = \frac{y}{\sigma_y} \Rightarrow \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x - c\sigma_y = y$$

$\therefore \quad y = a + \beta x \quad$ cur $\quad a, \beta \in \mathbb{R}$

Si $\quad r_{xy} = -1$

$\Rightarrow$

$$Var\left(\frac{x}{\sigma_x} + \frac{y}{\sigma_y}\right) = \frac{Var(x)}{\sigma_x^2} + \frac{Var(y)}{\sigma_y^2} + \frac{2\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_{xy}}$$

$$\Rightarrow \quad Var\left(\frac{x}{\sigma_x} + \frac{y}{\sigma_y}\right) = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{x}{\sigma_x} + \frac{y}{\sigma_y} = c$$

$$\Rightarrow \quad y = \beta x + a \quad ; \quad a, \beta \in \mathbb{R}$$

$\boxtimes$