

中南大学

自动化学院本科生实验报告

课程实验报告

专业_____班级_____姓名_____学号_____

预定时间 星期_____节次_____ 实际实验时间 星期_____节次_____

地点_____台号_____授课教师_____指导教师_____

实验名称_____离散时间信号和系统响应_____

一、实验原理、目的与要求

1. 实验目的

- 熟悉连续信号经理想采样前后的频谱变化关系，加深对时域采样定理的理解。
- 熟悉时域离散系统的时域特性。
- 利用卷积方法观察分析系统的时域特性。
- 掌握序列傅里叶变换的计算机实现方法，利用序列的傅里叶变换对连续信号、离散信号及系统响应进行频域分析。

2. 实验原理

(1) 信号采样

采样是将连续信号处理为数字信号的第一个关键环节。设 $x_a(t)$ 是模拟信号，而 $\hat{x}_a(t)$ 是理想抽样信号，则有

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)p(t) = x_a(t)\delta_T(t)$$

其中抽样信号 $p(t)$ 是周期性的单位冲激信号 $\delta_T(t)$ ，有 $\delta_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT)$

从而有

$$\begin{aligned}\widehat{x_a}(t) &= x_a(t)\delta_T(t) \\ &= x_a(t)\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_a(mT)\delta(t - mT)\end{aligned}$$

其中将 T 称为抽样周期， $f_s = \frac{1}{T}$ 为抽样频率， $\Omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T}$ 称为抽样角频率

以上是理想的抽样过程，下面来讨论其频域特性，作理想抽样信号的傅里叶变换，有

$$FT(\widehat{x_a}(t)) = FT(x_a(t)\delta_T(t)) \stackrel{\text{乘积定理}}{=} \frac{1}{2\pi} FT(x_a(t)) * FT(\delta_T(t)) \quad (1-1)$$

要求取单位冲激串函数 $\delta_T(t)$ 的傅里叶变换，考虑到这是奇异函数，且为周期函数，故先求其傅里叶级数系数

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jn\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{1}{T}$$

所以我们可以把 $\delta_T(t)$ 写成

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\Omega_s t}$$

得到其傅里叶变换为

$$\begin{aligned}FT(\delta_T(t)) &= FT\left(\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\Omega_s t}\right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} FT(e^{jn\Omega_s t}) \\ &= \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - n\Omega_s)\end{aligned} \quad (1-2)$$

将(2)式代入(1)式，可得

$$\begin{aligned}\widehat{X_a}(j\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \left[\left(\frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - n\Omega_s) \right) * X_a(j\Omega) \right] \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(j\theta) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - n\Omega_s - \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X_a(j\theta) \delta(\Omega - n\Omega_s - \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_a(j(\Omega - n\Omega_s))\end{aligned} \quad (1-3)$$

由上式可以看出，理想抽样信号的频谱 $\widehat{X_a}(j\Omega)$ 可以视为是被抽样信号 $x_a(t)$ 频谱 $X_a(j\Omega)$ 以周期为 Ω_s 的周期延拓，同时频谱函数的幅度是 $\frac{1}{T} = f_s$ 的加权。

由此可见，如果模拟信号是带限信号，也即是频带有限信号，信号的最高频率分量是 f_h ，只有当抽样频率 f_s 高于 $2f_h$ ，则理想抽样信号在频域才不会发生混叠现象。这就是我们熟知的奈奎斯特抽样定理。它的完整表述是

若 $x_a(t)$ 是频带宽度有限的信号，要想抽样后的信号能够不失真地还原出原信号，则必须抽样频率 f_s 大于或等于信号最高频率分量 f_h 的两倍，即

$$f_s \geq 2f_h \quad (1-4)$$

上式等价于 $\Omega_s \geq 2\Omega_h$

在应用中我们常用抽样序列 $x(n)$ ，其与 $x_a(t)$ 在时域上的关系是

$$x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT)$$

从刚才的分析中也可以得出

$$\widehat{X}_a(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT)e^{-j\Omega nT} = DTFT[x(n)] = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T} \quad (1-5)$$

这从一个方面揭示了连续信号与离散信号频域间的对应关系，数字频率 ω 对应于模拟角频率对抽样频率 f_s 的归一化频率，也即

$$\omega = \Omega T = 2\pi \frac{f}{f_s}$$

按照抽样定理，信号最高频率 f_h 满足 $f_h \leq f_s/2$ 所以数字域最高频率应满足 $\omega_h = 2\pi f_h/f_s \leq \pi$ 所以说信号的高频成分在 $\omega = \pi$ 处，而低频分量在 $\omega = 0$ 附近

(2) 序列傅里叶变换 (DTFT)

对于序列的傅里叶分析常用离散傅里叶变换，也即 DTFT。序列 $x(n)$ 的 DTFT 定义为

$$DTFT(x(n)) = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT)e^{-j\omega nT} \quad (2-1)$$

在实践中，通常再对其在区间 $[0, 2\pi]$ 等距离取 M 点抽样，对于有限长序列 $x(n)$ (设其在 $n = 0, 1, \dots, N-1$ 上有非零值)，得到

$$X(e^{j\omega_k}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_a(nT)e^{-j\omega_k nT}, \text{ where } \omega_k = \frac{2\pi}{M}k, k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2-2)$$

这也属于 DFT 的内容

(3) 离散时间线性移不变系统(LSI)

离散时间线性移不变系统是指同时具有线性和移不变的离散时间系统，这是我们学习数字信号处理课程系统部分的重要内容，从时域上看，其单位抽样响应是一大重要表征

所谓单位抽样响应是指输入为单位抽样序列 $\delta(n)$ ($\delta(n) = 1, n = 0; = 0, \text{ otherwise}$) 时，LSI 系统的输出序列，一般用 $h(n)$ 表示，即

$$h(n) = T[\delta(n)] \quad (3-1)$$

有了单位抽样响应，我们可以描述该 LSI 系统输入序列与输入序列在时域中的关系——卷积和关系。具体地，记输入为 $x(n)$ ，输出为 $y(n)$ ，系统单位抽样为 $h(n)$ ，有

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad (3-2)$$

在这里需要补充说明关于离散卷积的基本知识，设 $x(n)$ 是定义在 $N_1 \leq n \leq N_2$ 的有限长序列， $h(n)$ 是定义在 $N_3 \leq n \leq N_4$ 的有限长序列。可以推出的是，其卷积 $y(n) = x(n) * h(n)$ 则为定义在 $N_1 + N_3 \leq n \leq N_2 + N_4$ 上的有限长序列

关于这个性质的一个更简洁的说法（但也漏去了一点信息）是，设 $x(n)$ ， $h(n)$ 分别是长度为

N_1, N_2 的有限长序列, 那么 $(n) = x(n) * h(n)$ 是长度为 $N_1 + N_2 - 1$ 的有限长序列

从频域上来看, 记单位抽样响应 $h(n)$ 的离散时间傅里叶变换 (定义见(2-1)式) 为 $H(e^{j\omega})$, 这被称为系统函数, 基于离散时间傅里叶变换的卷积定理, 根据(3-2)式可知

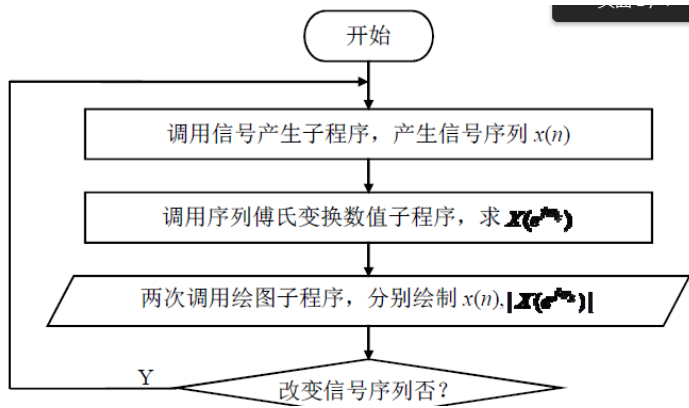
$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) \quad (3-3)$$

二、实验仪器设备 (标注实验设备名称及设备号)

装有 Matlab R2018a 的计算机一台

三、实验线路示图、内容步骤

(1) 设计离散序列处理子程序



这一部分主要包括序列的产生, 序列的傅里叶变换以及相关绘图程序

对于由连续信号的序列产生部分, 由用户输入相应的函数句柄, 默认为实验中提供函数

```
f = @(t) A*exp(-a*t).*sin(omega_0*t);
```

然后由用户继续输入余下抽样参数, 如抽样频率 $f_s = 1000$; % Sampling frequency 抽样点数 N

由抽样原理 $x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT)$ 就可以得到抽样序列, 关键代码为

```
x_n = f(t*T)
```

这里需要验证抽样定理, 获得直观认识, 改变抽样频率 f_s , 观察不同情形下的频域幅值曲线

对于实验中余下两类序列: b.单位脉冲序列; c.矩形序列。其构造方式较为简单, 如

```
x_n = [1 zeros(1, N-1)]
```

```
x_n = [ones(1, rect_N) zeros(1, N-rect_N)]
```

随后的关键在于对序列进行离散时间傅里叶变换, 且频域抽样, 实质为进行 DFT, 由(2-2)式, 可以得到矩阵形式的算法, 关键代码如下

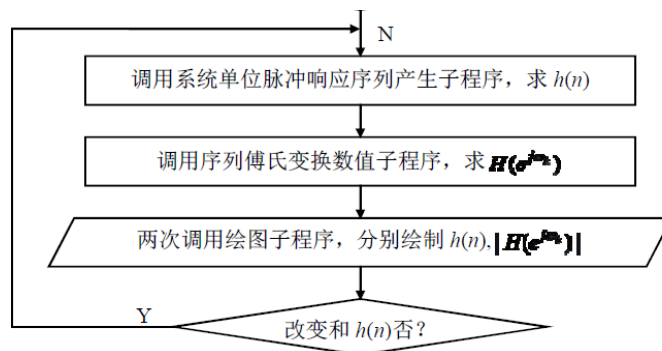
```
X_w = x * (exp(-1j*omega_k)).^((0:length(x)-1)*k);
```

其中 x 是要进行变换的序列, ω_k 对应于公式中的 $\omega_k = 2\pi/k$, 在实践中值得注意的是可能出现形为“0/0”的计算, 这就需要对 ω_k 加上一个小量, 如 $1e-10$ 。 k 是一个长度为 M 的一维数组, M 对应于公式中的 M , 也即是我们频域的抽样点数, 上述公式返回 X_w 即为序列 x 的 M 点 DFT 完整的部分被封装进函数 `dfs` 中以便重复使用

同时, 查阅相关资料, 我们还得到一种计算序列 x DFT 的办法, 就是调用函数 `freqz`, 这本是由系统特征计算输入的函数, 也可用在这里, 具体代码为

```
[mag_X, mag_w] = freqz(x_n, 1, M)
```

(2) 设计离散系统单位脉冲响应分析程序



这一部分与前一部分有些相像, 不同之处在于所要分析的序列变成了离散系统单位脉冲响应 h_n , 但是主要过程是一致的

对于本次用到的两种 FIR 系统:

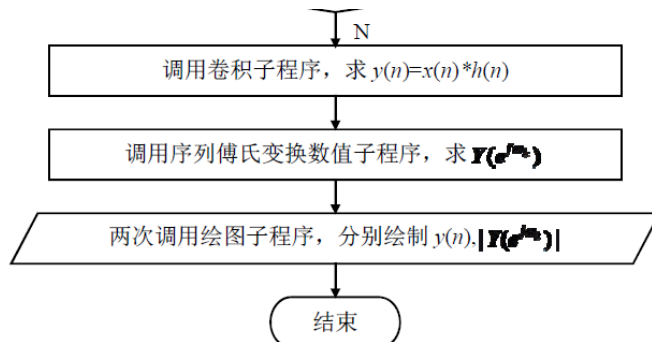
a. $h(n) = R_{10}(n)$

b. $h(n) = \delta(n) + 2.5\delta(n-1) + 2.5\delta(n-2) + \delta(n-3)$

这里使用了相较而言最为简单的方式:

```
if h_type == 1
    h_n = [[1 2.5 2.5 1], zeros(1, N-4)];
elseif h_type == 2
    rect_n = 10; h_n = [ones(1, rect_n) zeros(1, N-rect_n)];
end % Decide the h_n by choosing \h_type\
```

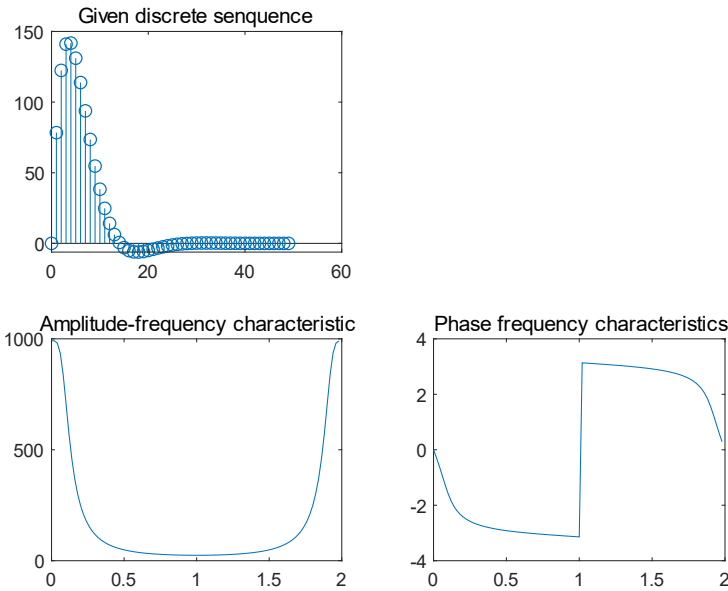
(3) 设计离散系统输入输出程序



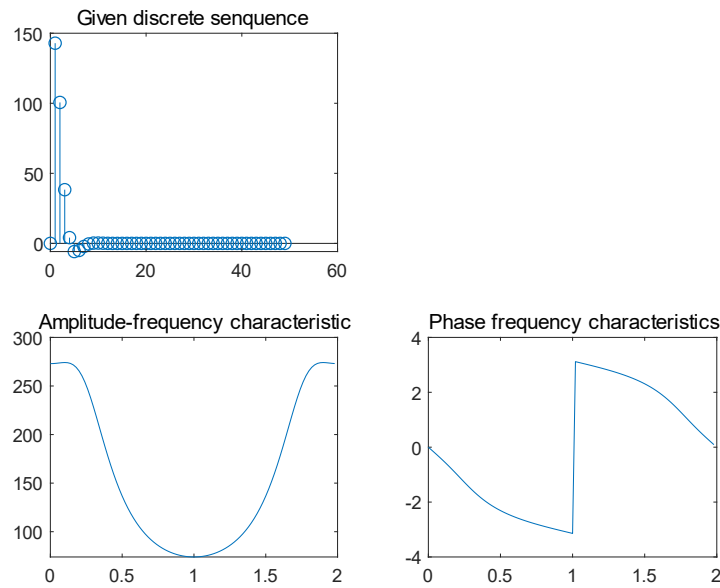
这里的关键之一在于卷积的处理，我们应用 Matlab 预定义好的函数 conv

四、实验数据记录及数据处理

对连续信号 $x_a(t) = Ae^{-at} \sin(\Omega_0 t)u(t)$ 以采样频率 $f_s = 1000\text{Hz}$ 得到的序列及其频谱



同样的，我们选取采样频率 $f_s = 300\text{Hz}$ 再作分析，结果为



样的，我们选取采样频与已给出的对应连续信号的频谱比较（如下图）

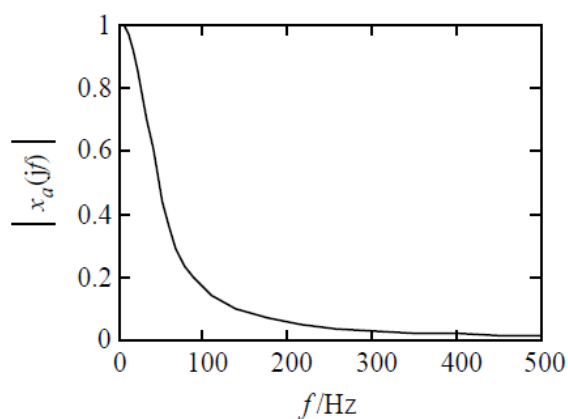
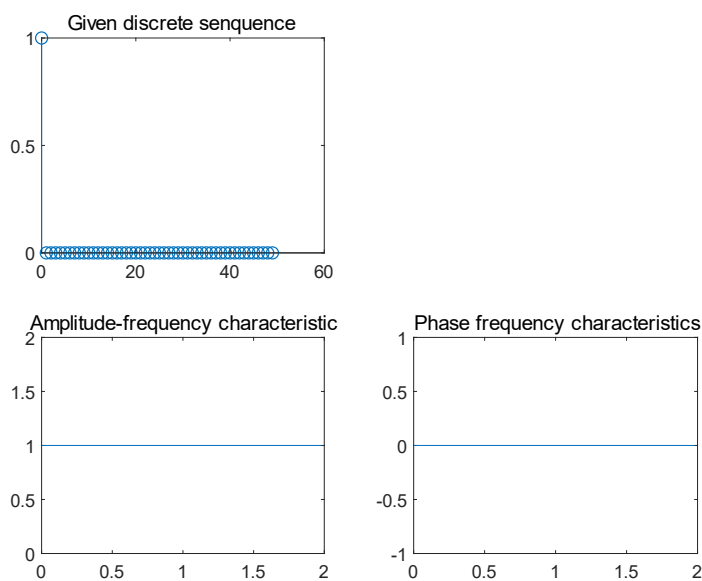


图 2.2 $x_a(t)$ 的幅频特性曲线

可以看出当 $f_s = 1000\text{Hz}$ 时, 波形一致性强, 且 $\frac{1}{T}(f_s)$ 的权值易于观察, 而当 $f_s = 300\text{Hz}$ 时, 波形发生了混叠现象, 与原频谱形状不一致。这里 $f_s = 1000\text{Hz}$ 恰为其模拟信号最高频率分量 500Hz 的二倍, 验证了抽样定理的正确性。

下图是 $x_b(n) = \delta(n)$ 的序列及频谱图



下图是 $x_c(n) = R_N(n)$, $N=10$ 的序列及频谱图

五、实验结论探讨及分析

