

之所以将 Ω_c 称为 $3dB$ 点,是考虑到对任意的阶数 N ,当 $\Omega = \Omega_c$ 时, $R_c = 20 \log |H_a(j0)/H_a(j\Omega_c)| = -20 \log |H_a(j\Omega_c)| \approx 3 dB$,这就是我们称的 $3dB$ 不变性。

如果查看巴特沃斯滤波器的幅频函数衰减,我们不难发现:① $|H_a(j\Omega)|^2$ 在 $\Omega = 0$ 处的前 $2N - 1$ 阶导数为零,所以我们将巴特沃斯滤波器也称为最平幅度特性滤波器。随着 Ω 由0增大到 Ω_c , $|H_a(j\Omega)|$ 单调递减。 N 越大,衰减速率越慢。

② 当 $\Omega > \Omega_c$ 时, $|H_a(j\Omega)|$ 继续单调递减,且衰减速度比在通带内快得多

③ $\Omega = \Omega_{st}$ (截止频率)时,称此时 $A_s = 20 \log |H_a(j0)/H_a(j\Omega_{st})| = -20 \log |H_a(j\Omega_c)|$ 称阻带最小衰减。当 $\Omega > \Omega_{st}$ 时,幅度特性衰减会大于 $A_s(dB)$

根据(1)所指明的幅度平方函数,我们可以进一步确定其系统函数(模拟系统),有

$$H_a(s)H_a(-s) = |H_a(s)|^2 = |H_a(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=\frac{s}{j}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}} \quad (2)$$

从零极点分布的角度来看, $H_a(s)H_a(-s)$ 的极点分布在以 Ω_c 为半径的 s 平面单位圆上,共有 $2N$ 个极点,分别记作 s_1, \dots, s_{2N} ,有

$$s_k = \Omega_c e^{j\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right)\pi}, k = 1, 2, \dots, 2N \quad (3)$$

要从中求出系统函数 $H_a(s)$,需要对 s_k 进行分配,为了保证系统稳定,要使得 $H_a(s)$ 极点全部位于虚轴的左侧,而 $H_a(-s)$ 的极点就是与之关于 $j\Omega$ 对称的右侧。考虑 s_k 自身的分布特点,由于总不存在位于虚轴上的极点 s_k (这一点很容易有(3)给出的结构看出),所以我们说对其进行极点分配总是可行的。

求 s_k 位于左半平面的极点,即使 $\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N} < \frac{3}{2}$ 满足的情形。求得 $k = 1, 2, \dots, N$ 满足这一点,所以我们可以将其写为

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)} \quad (4)$$

由于其极点总是成共轭对出现,若记

$$H_k(s) = \frac{\Omega_c^2}{(s - s_k)(s - s_{N+1-k})} = \frac{\Omega_c^2}{s^2 - 2\Omega_c \cos\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right)\pi\right) + \Omega_c^2}$$

就可以将系统函数再表成二阶系统的级联形式

$$H_a(s) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{\frac{N}{2}} H_k(s), & N = \text{偶数} \\ \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c} \prod_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} (s - s_k), & N = \text{奇数} \end{cases} \quad (5)$$

我们随后将会看到进一步将 $H_a(s)$ 分别表成这些二阶系统级联的做法

对于(4)给出的 $H_a(s)$ 式,可以同除以 Ω_c ,也就是所谓的“归一化”系统函数 $H_{an}(s)$,由下式给出

$$H_{an}(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)}, s_k = e^{j\left(\frac{1}{2} + \frac{2k-1}{2N}\right)\pi}, k = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

归一化函数的方便之处在于，我们只由其阶数 N ，便可以确定巴特沃斯滤波器的形状，无论是查表或是仿真，这样做都是十分简便的；另一种理解角度是， $H_{an}(s)$ 相当于 $H_a(s)$ 固定参量 $\Omega_c = 1$ 的结构。对于具体设计的滤波器，我们只需要再按照下式进行反归一化，就可以得到

$$H_a(s) = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right) \quad (7)$$

(2) 巴特沃斯 (Butterworth) 模拟滤波器技术指标

下面考察如何由特定的技术指标确定一个具体的巴特沃斯滤波器。

在介绍之初，我们便说，巴特沃斯滤波器由其阶数 N 和 $3dB$ 点 Ω_c 便可完全唯一确定。同时，像任何一种模拟低通滤波器一样，它都要有通带，过渡带，阻带，通带（最大）衰减，阻带（最小）衰减。由于巴特沃斯滤波器的幅频是随着 Ω 增大而恒定衰减的，所以通带最大衰减 R_p 在 $\Omega = \Omega_p$ 处取得，阻带最小衰减 A_s 在 $\Omega = \Omega_{st}$ 处取得。其中 Ω_p ， Ω_{st} 分别是通带截止频率和阻带起始频率，区间 (Ω_p, Ω_{st}) 是对应的过渡带。

用计算式表示，有

$$\begin{aligned} 20 \log \left| \frac{H_a(j0)}{H_a(j\Omega_p)} \right| &= -20 \log |H_a(j\Omega_p)| \leq R_p \\ 20 \log \left| \frac{H_a(j0)}{H_a(j\Omega_{st})} \right| &= -20 \log |H_a(j\Omega_{st})| \geq A_s \end{aligned} \quad (8)$$

将(1)式与(8)式结合起来，我们可以得到

$$\begin{aligned} 10 \log \left[1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2N} \right] &\leq R_p \\ 10 \log \left[1 + \left(\frac{\Omega_{st}}{\Omega_c} \right)^{2N} \right] &\geq A_s \end{aligned} \quad (9)$$

由(9)式最终可以得到

$$\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1R_p} - 1} \leq \left(\frac{\Omega_{st}}{\Omega_p} \right)^{2N} \quad (10)$$

这样，我们就确定了滤波器的阶次，进一步整理(10)，有

$$N \geq \frac{\log \frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1R_p} - 1}}{2 \log \frac{\Omega_{st}}{\Omega_p}} \quad (11)$$

也就是说，对 $\log \frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1R_p} - 1} / [2 \log \frac{\Omega_{st}}{\Omega_p}]$ 向上取整，可以得到巴特沃斯滤波器阶数。

另一方面，对于 Ω_c ，从(9)式可以得到

$$\begin{aligned}\Omega_c &\geq \frac{\Omega_p}{(10^{0.1R_p} - 1)^{\frac{1}{2N}}} \\ \Omega_c &\leq \frac{\Omega_{st}}{(10^{0.1A_s} - 1)^{\frac{1}{2N}}}\end{aligned}\quad (12)$$

在实践中，我们常取定 $\Omega_c = (\Omega_p + \Omega_{st})/2$ 作为 $3dB$ 点，这样可以(12)给出的要求。

(3) 双线性变换法

双线性变换法的变换思路，就是将 s 平面经由一个中介先变换到 s_1 平面上——这是一个 $\Omega \rightarrow -\pi/T \sim \pi/T$ 的窄带，然后再经 $z = e^{s_1 T}$ 变换到 z 平面上去，此从 s 平面到 z 平面是一一对应的，而不同与冲激响应不变法中对应关系 $z = e^{sT}$ (有“多对一”的多值映射关系)

具体的做法是，利用正切函数特性，可以将无穷区间映射到一个有限区间上，将整个 s 平面的 $j\Omega$ 轴压缩到 s_1 平面的 $\Omega_1: -\pi/T \sim \pi/T$ 的窄带

$$\Omega = \tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) \quad (13)$$

并乘上常数 c ，即

$$\Omega = c \cdot \tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) \quad (14)$$

将(14)式再做整理，即

$$j\Omega = c \cdot \frac{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} - e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}}{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} + e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}} \quad (15)$$

取 $s = j\Omega, s_1 = j\Omega_1$ 代入(15)式，有

$$s = c \cdot \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}} \quad (16)$$

并再由 $z = e^{s_1 T}$ 作替换，这样我们得到

$$s = c \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (17)$$

$$z = \frac{c + s}{c - s} \quad (18)$$

以上两式便是双线性变换法的对应法则， c 是一个确定常数，通常地，我们取 $c = 2/T$ ，以使其在零频率附近有确切的对应关系。

由(17)(18)给出的变换关系满足两个基本条件：

① 我们将 $z = e^{j\omega}$ 代入(17)式，有

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = \frac{2}{T} \frac{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}}} = j \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2} = j \frac{2}{T} \tan \frac{\Omega_1 T}{2} = j\Omega \quad (19)$$

也就是说， $s = j\Omega$ 这个模拟频域轴与 $z = e^{j\omega}$ 这个数字频域轴在双线性变换中是一一对应的关系。

此外，模拟频域和数字频域的对应关系也可从中见得，是

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (20)$$

变换关系是非线性的。

在由模拟滤波器设计数字滤波器的过程中，(20)式即为模拟频域与数字频域的对照依据。若给定数字滤波截止频率 ω_{st} ，先由 $\Omega_{st} = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_{st}}{2}\right)$ 特征设计模拟滤波器，这就是频率预畸变，再进行双线性变换，就得到所需的数字滤波器。

② 取 $s = \sigma + j\Omega$ ，也即包括整个 s 平面的范围，代入(18)式，有

$$z = \frac{\left(\frac{2}{T} + \sigma\right) + j\Omega}{\left(\frac{2}{T} - \sigma\right) - j\Omega}$$

再取模，得

$$|z| = \frac{\sqrt{\left(\frac{2}{T} + \sigma\right)^2 + \Omega^2}}{\sqrt{\left(\frac{2}{T} - \sigma\right)^2 + \Omega^2}} \quad (21)$$

容易看出，当 $\sigma < 0$ 时， $|z| < 1$ ；当 $\sigma > 0$ 时， $|z| > 1$ ；当 $\sigma = 0$ 时，就是①中所讨论的，有 $|z| = 1$ 。

这也就保证了，一个因果稳定的模拟系统，经双线性变换为数字系统后，仍然是因果稳定的。

由模拟系统经双线性变换到数字系统，从系统函数的角度来看，就是(17)代入到原系统函数 $H(s)$ 中，有

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (22)$$

在后续实验中，我们可以通过调用程序内置函数，或是自编函数完成这个过程。

二、实验仪器设备（标注实验设备名称及设备号）

装有 Matlab R2018a 的计算机一台

二、实验线路示图、内容步骤

本次实验相关参考

<https://www.mathworks.com/help/signal/ref/tf2sos.html>

<https://ww2.mathworks.cn/help/signal/ref/butter.html#buct21r>

<https://www.mathworks.com/help/signal/ref/buttord.html>

<https://ww2.mathworks.cn/help/signal/ref/freqz.html>

(1) 设计巴特沃斯原型滤波器

由于总体设计方案是双线性变换完成由 AF 到 DF 的转换, 需要先进行频率预畸变, 理论依据即为(20)式所表明的, 通常, 我们取 $T = 1$, 2这里取 $T = 1$, 故预畸变为

$$\Omega = \tan \omega/2$$

给出代码为

```
OmegaP = 2/T * tan(omegaP/2);
OmegaS = 2/T * tan(omegaS/2);
```

然后是对巴特沃斯滤波器的设计, 这里用 Matlab 内置的两个函数 `buttord` 和 `butter` 完成。首先, 确定一个巴特沃斯滤波器需要确定阶数 N 和 Ω_c , 这些由 $\omega_p, \omega_{st}, R_p, A_s$ 共同决定, 具体由(11), (12)式给出函数 `buttord` 调用式为`[n,Wn] = buttord(Wp,Ws,Rp,Rs)`, 其输出 `n,Wn` 即为阶数 N 和 Ω_c 。接下来, 使用函数 `butter` 完成对巴特沃斯滤波器的表示, 可将 `buttord` 输出直接输入到 `butter` 函数, 返回的是系统函数的多项式, 如下图所示

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b(1)s^n + b(2)s^{n-1} + \dots + b(n+1)}{a(1)s^n + a(2)s^{n-1} + \dots + a(n+1)}.$$

为了保证截止频率是 `Wn`, 注意在调用 `butter` 时需额外传关键字 `'s'`

```
[N, OmegaC] = buttord(OmegaP, OmegaS, Rp, As, 's');
[b,a] = butter(N, OmegaC, 's');
```

随后利用函数 `freqs` 作图绘制 AF 的幅频响应和对数幅频响应 (单位: dB)

```
[h, w] = freqs(b, a, linspace(0, OmegaC+.2*pi, 100));
```

(2) 进行双线性变换

这一步的关键是利用式(22)给出的变换求解对应的 DF 系统函数, 为此, 构造新的 `bilinear` 函数, 使其接受来自 AF 的系统函数多项式向量`b,a`以及 F_s , 返回 DF 系统函数多项式向量

具体的做法参考书本 P452 页 `bilinear` 定义

下面是具体的调用过程

```
[zb, za] = bilinear(b, a, Fs);
```

随后, 为了方便对 $H(z)$ 结果进行验证, 需要将其写成级联式, 用到函数 `tf2sos`, 最简单的调用格式为 `[sos,g] = tf2sos(b,a)`, 其中 `b,a` 是 DF 的系统函数多项式向量, `sos` 是二阶系统函数多项式向量矩阵, `g` 是增益

举个例子，若 $\text{sos} = [1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1; \ 3 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]$ ， $g = 37.3$ ，则该系统函数的级联形式为

$$H(z) = 37.3 \cdot \frac{(1 + z^{-2})}{2 + 2z^{-1} + z^{-2}} \cdot \frac{3 + 2z^{-1}}{1 + z^{-2}}$$

反过来，如果我们希望由 sos 矩阵和增益 g 给出系统函数，可以利用 `sos2tf` 函数，这里就不再额外介绍了。

然后，我们利用函数 `freqz` 完成数字滤波器频率响应的分析，`freqz` 的基本调用格式为

[`\[h,w\] = freqz\(b,a,n\)`](#)

其中 b ， a 是数字滤波的传输函数的多项式向量， n 是将要抽样的点数（频域抽样），另可传入关键字 'whole' 声明在 $[0, 2\pi]$ 上进行频域采样。

调用过程为

```
[h, w] = freqz(zb, za, 100, 'whole');
```

由于已经要求抽样间隔为 0.02π ，不难得知此即是在 $[0, 2\pi]$ 上完成 100 点采样。

(3) 利用已得滤波器完成对心电图信号滤波

前面已经看到，Matlab 中可以用系统函数多项式向量组 b ， a 表征 AF 或 DF 。要求某信号 $x(n)$ 通过某 DF 后输出，可以使用函数 `filter` 完成，基本调用格式为

[`y = filter\(b,a,x\)`](#)

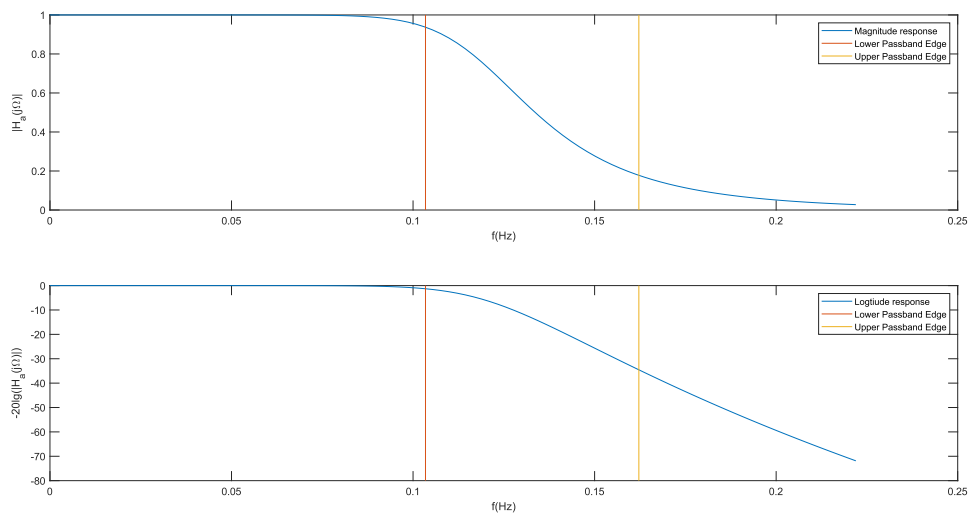
在实验中涉及到此过程的步骤为

```
y_n = filter(zb, za, x_n);
```

三、实验数据记录及数据处理

(1) EXP1

经由频率预畸变，我们涉及得到的巴特沃斯模拟滤波器其幅频响应以及对数幅频响应如下图所示



查看相关参量，其阶数以及 $3dB$ 点由 buttord 给出为

```
N = 6
OmegaC = 0.7662
```

随后利用编写的 `bilinear` 求解数字滤波的系统函数，并传入 `tf2sos` 函数，查看结果为

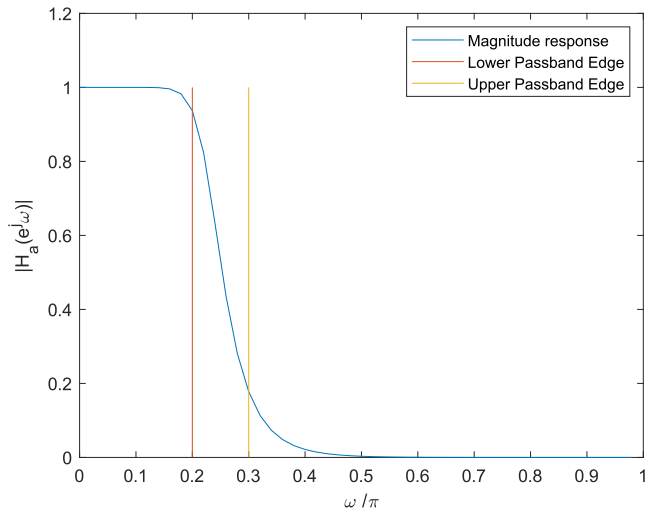
Demo.mlx | sos = 3×6

	1	2	3	4	5	6
1	1.0000	2.0003	0.9999	1.0000	-0.9044	0.2155
2	1.0000	2.0178	1.0181	1.0000	-1.0106	0.3583
3	1.0000	1.9820	0.9823	1.0000	-1.2686	0.7051

并有增益

```
g = 7.3782e-04
```

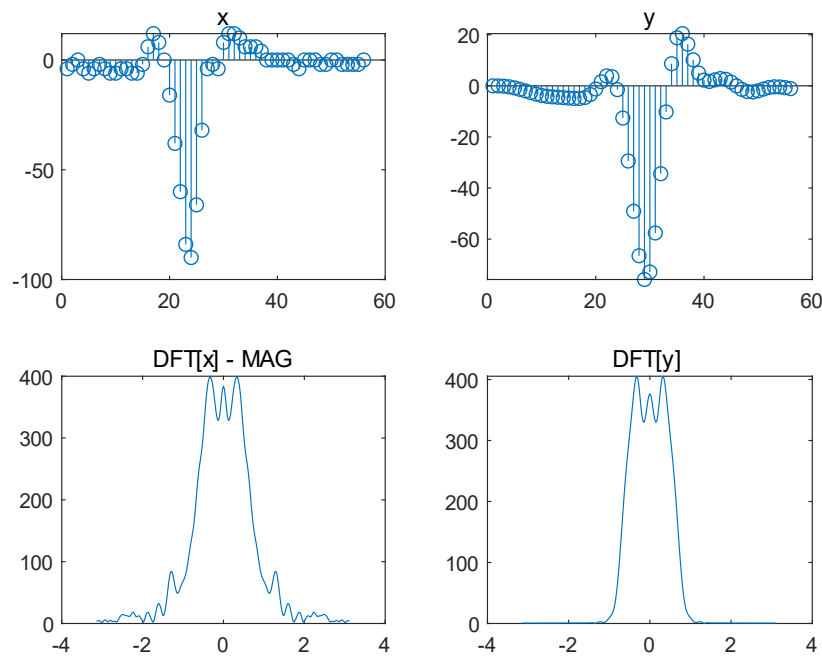
验证了本实验得到的函数是正确的（计算上存一定误差），随后得到的 DF 幅频函数为



如果我们比较双线性变换前后的幅频特点, 我们就会发现它们在整个形状, 更具体地, 在衰减参数如 R_p, A_s 上是一致地, 这也正通过实验说明了本报告 P3, P4 阐明的观点, 也就是数字域与模拟域在变换前后是一一对应的关系。

(2) EXP2

下面我们让给出的心电图信号通过求得的数字低通滤波器, 并用256点DFT计算输入输出频谱, 作图为



从图中可以明显看出, 原信号 $x(n)$ 不如处理后的信号 $y(n)$ 光滑, 从频谱更直观可以看出, 信号 $x(n)$ 的高频成分被滤过了。

另附输出 $y(n)$ 的序列为

```
y_n =

1 至 16 列

-0.0030 -0.0286 -0.1305 -0.3785 -0.8006 -1.3554 -1.9786 -2.6247 -
3.2432 -3.7553 -4.1020 -4.3067 -4.4537 -4.6094 -4.7805 -4.9257

17 至 32 列

-4.9351 -4.5547 -3.4024 -1.2344 1.6059 3.8751 3.5616 -1.4841 -
12.6148 -29.4248 -49.0903 -66.5217 -75.8283 -72.8782 -57.6058 -34.4136

33 至 48 列

-10.2124 8.6607 18.8158 20.4395 16.3288 10.1790 5.0025 2.2378
1.7206 2.3272 2.8394 2.5622 1.4698 -0.0228 -1.3901 -2.2299
```

-2.3802 -1.9505 -1.2574 -0.6582 -0.3744 -0.4286 -0.7109 -1.0838

五、实验结论探讨及分析

通过本次实验，我们熟悉并掌握了 IIR 数字滤波器的一大设计方法，也即是从模拟滤波器经由频带变换得到数字滤波器。其中格外侧重于巴特沃斯滤波器，双线性变换法的内容，并从中学到了许多 Matlab 相关函数的使用方式。巴特沃斯滤波器是一类常见的模拟滤波器，由 $\Omega_p, \Omega_{st}, R_p, A_s$ 一系列技术参数共同决定了巴特沃斯滤波器的阶数 N 以及 $3dB$ 点 Ω_c 。在程序中，我们使用 `buttord` 求解这些参量，并再通过 `butter` 返回系统函数的多项式向量组。

双线性变换法的基本变换关系为

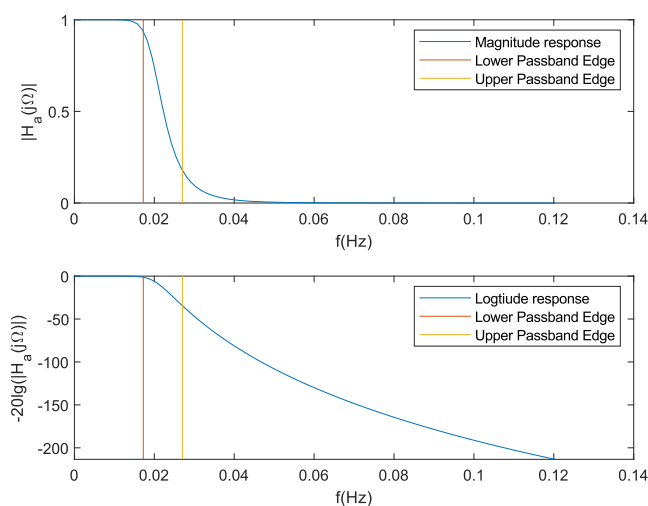
$$s = \frac{2}{T} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

将上述关系代入到模拟滤波器的系统函数中，比如刚求取的巴特沃斯滤波器系统函数，返回得到数字滤波器的系统函数（的多项式向量组）。这一过程同样可以由程序实现，调用 `bilinear` 函数即可。

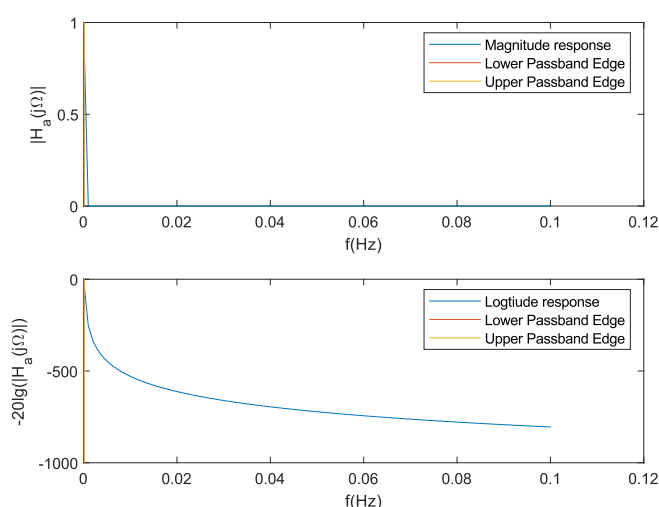
思考题：

1. 利用双线性变换求 DF 时，变换公式中的 T 对设计有无影响？

答案是没有影响，我们首先通过实验看一下，分别取 $T = 6, 1000$ （较为极端的一个取值），它们的模拟巴特沃斯幅频曲线分别为



$T=6$



$T=1000$

显然，对应于不同的 T 值，模拟滤波的结果是不同的，那么数字滤波器的幅频曲线又如何呢？可以观察到并未受到影响（由于是一样的，这里就不再放图了）

我们从巴特沃斯滤波器的参量来考虑，(11)给出了 N 的求解办法，式中结构有 Ω_{st}/Ω_P ，在这里 $T/2$ 被抵消，不会产生影响。此外，对于 $\Omega_c = (\Omega_{st} + \Omega_P)/2$ ，有一个隐含的 $T/2$ 乘数，在将其反变换回去的时候（变换到数字域上）这个 $T/2$ 也会消去。所以，总得来看，利用双线性变化法将巴特沃斯滤波器变换成数字滤波器，其中的 T （或者 $F_s = 1/T$ ）并不会对数字滤波器的设计造成任何影响。

六、附录

代码地址见 <https://github.com/pacria/MatlabExp/blob/master/MatlabExp/DSP/exp3/Demo.m>

图片地址见 <https://github.com/pacria/MatlabExp/tree/master/MatlabExp/DSP/exp3/checked>

预设变量区

```
x_n = [-4 -2 0 -4 -6 -4 -2 -4 -6 -6 ...
        -4 -4 -6 -6 -2 6 12 8 0 -16 ...
        -38 -60 -84 -90 -66 -32 -4 -2 -4 8 ...
        12 12 10 6 6 6 4 0 0 0 ...
        0 0 -2 -4 0 0 0 -2 -2 0 ...
        0 -2 -2 -2 -2 0]
omegaP = .2*pi; omegaS = .3*pi; T =1; Fs = 1/T;
Rp = 1; As = 15;
```

模拟巴特沃斯滤波器设计

```
OmegaP = 2*Fs * tan(omegaP/2);
```

```
OmegaS = 2*Fs * tan(omegaS/2);
[N, OmegaC] = buttord(OmegaP, OmegaS, Rp, As, 's')
[b,a] = butter(N, OmegaC, 's');
[h, w] = freqs(b, a, linspace(0, OmegaC+.2*pi, 100));
[O1, O2] = meshgrid([OmegaP/(2*pi), OmegaS/(2*pi)], ylim);
subplot(2, 1, 1)
plot(w/(2*pi), abs(h))
hold on
plot(O1, O2)
hold off
xlabel('f(Hz)')
ylabel('|H_a(j\Omega)|')
legend('Magnitude response','Lower Passband Edge','Upper Passband Edge')
subplot(2, 1, 2)
plot(w/(2*pi), 20*log(abs(h)))
hold on
[O1, O2] = meshgrid([OmegaP/(2*pi), OmegaS/(2*pi)], ylim);
plot(O1, O2)
hold off
xlabel('f(Hz)')
ylabel('-20lg(|H_a(j\Omega)|)')
legend('Logtiude response','Lower Passband Edge','Upper Passband Edge')
```

双线性变换过程

```
[zb, za] = bilinear(b, a, Fs);
[sos, g] = tf2sos(zb, za)
[h, w] = freqz(zb, za, 100, 'whole');
mag_h = abs(h);
figure
[o1, o2] = meshgrid([omegaP/(pi), omegaS/(pi)], ylim);
plot(w(1:50)/pi, mag_h(1:50))
hold on
plot(o1, o2)
hold off
legend('Magnitude response','Lower Passband Edge','Upper Passband Edge')
xlabel('\omega /\pi')
ylabel('|H_a(e^j\omega)|')
```

心电图信号处理过程

```
y_n = filter(zb, za, x_n);
N = 256;
n = floor(-(N-1)/2:(N-1)/2);
n = n*2*pi/N;
figure
subplot(2, 2, 1)
stem(x_n)
title('x')
```

```
subplot(2, 2, 2)
stem(y_n)
title('y')
subplot(2, 2, 3)
X = abs(fftshift(fft(x_n, N)));
plot(n, X)
title('DFT[x] - MAG')
subplot(2, 2, 4)
Y = abs(fftshift(fft(y_n, N)));
plot(n, Y)
title('DFT[y]')
```