Übungsblatt 5

Abgabe bis 31.05.2018

Besprechung: 04.06.2018 – 07.06.2018

Aufgabe 1: Bucketsort (3 Punkte)

Gegeben seien n Zahlen im Bereich $[0, \ldots, n^k - 1]$ für ein festes $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass mittels Bucketsort die Zahlen mit einer Worstcase-Laufzeit von $O(n)$ sortiert werden können.
Hinweis: Stellen Sie die Zahlen zur Basis n dar.

Aufgabe 2: Mediansuche in Linearzeit (3 + 6 Punkte)

(a) In der Vorlesung haben Sie gelernt, wie Sie den Median von fünf Zahlen mit 7 Vergleichen bestimmen können. Verallgemeinern Sie dieses (rekursive) Vorgehen für Eingaben ungerader Länge. Geben Sie die Anzahl benötigter Vergleiche für Listen der Länge n, mit $n \in \{7, 9, 11, 13, 15, 17\}$ an.

(b) Für die Laufzeitanalyse der Medianbestimmung ergab sich bei einer Unterteilung in Fünfergruppen die folgende Rekursionsgleichung:

$$T(n) \leq T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{7}{10}n\right) + c \cdot n$$

i. Geben Sie eine möglichst gute Konstante c an.

ii. Wie verändert sich die Rekursionsgleichung, wenn die Liste in Siebener- statt in Fünfergruppen geteilt wird? Geben Sie auch hier eine möglichst gute Abschätzung der Konstante c an.

Aufgabe 3: Median in sortierten Arrays (3 + 3 Punkte)

Seien $A[1..n]$ und $B[1..n]$ zwei sorrtierte Arrays der Größe n.

(a) Beschreiben Sie einen Algorithmus, der den Median aller $2n$ Elemente aus A und B in Zeit $\mathcal{O}(\log n)$ findet.

(b) Begründen Sie die Laufzeit und die Korrektheit Ihres Algorithmus.

Für die Analyse Ihres Algorithmus dürfen Sie annehmen, dass n eine Zweierpotenz ist.

Aufgabe 4: Konvexe Hülle (4 Punkte)

Gegeben sei eine Menge $M = \{(x_i, y_i) \in \mathbb{Q}^2 \mid 1 \leq i \leq n\}$. Die konvexe Hülle $\text{conv}(M)$ einer Menge M ist der kleinste Polyeder der alle Punkte in M enthält. Eine einfache Repräsentation der konvexen Hülle ist die kleinste Menge $N \subseteq M$ von Punkten, so dass $\text{conv}(N) = \text{conv}(M)$. Bildlich gesprochen: die *Eckpunkte* der Menge M. Eine *zyklische Sortierung* der Eckpunkte ist eine Ordnung der Punkte in N so, dass beim Ablaufen der Punkte nach der Sortierung ein Weg um das Polygon entsteht.

Nehmen Sie an, dass Sie einen Algorithmus haben der in Zeit $T(n)$, gegeben eine Menge M (wie oben), eine zyklische Sortierung der Eckpunkte der konvexen Hülle ausgibt. Zeigen Sie, dass $\Omega(n \log n)$ eine untere Schranke für die worst-case Laufzeit des Algorithmus ist.

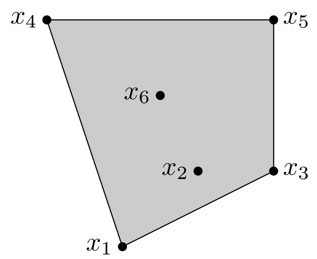

Abbildung 1: Der Algorithmus erhält die Punktemenge $\{x_1, \ldots, x_6\}$ und gibt die Punkteliste (x_1, x_4, x_5, x_3) aus. Der grau gefärbte Bereich ist die konvexe Hülle.

Aufgabe 5: Untere Schranken (3 + 5 Punkte)

Sei A eine sortierte Liste der Größe n.

(a) Das erste Problem besteht daraus, zu entscheiden, ob in der Liste A Duplikate vorkommen. Beweisen Sie, dass $n - 1$ eine untere Schranke für die Anzahl der Vergleiche ist, die man dafür braucht.

(b) Das zweite Problem ist es, zu entscheiden, ob in der Liste A ein beliebiger Wert x vorkommt. Beweisen Sie, dass im worst-case $\Omega(\log n)$ Vergleiche dafür benötigt werden (unabhängig vom verwendeten Algorithmus).