Sarah Ertel
Patrick Greher
Eugen Ljavin

1	2	3	4	Σ

Übungsblatt Nr. 3

(Abgabetermin 10.05.2018)

Aufgabe 1

a)

Algorithm 1: Insertion Sort Algorithmus

```
1  function insertionSort(toSort[ ])
2  for i ← 1; i < toSort.length; i ← i + 1 do
3  |   j ← i;
4  |   while (j > 0) ∧ (toSort[j − 1] > toSort[j]) do
5  |   |   tmp ← toSort[j - 1];
6  |   |   toSort[j-1] ← toSort[j];
7  |   |   toSort[j] ← tmp;
8  |   |   j ← j-1;
9  |   end
10 end
```

Algorithm 2: Minimumsuche + Austausch Algorithmus

```
1  function minimumSwapSort(toSort[ ])
2  for i ← 0; i < toSort.length − 1; i ← i + 1 do
3  |   for j ← i + 1; j < toSort.length; i ← j + 1 do
4  |   |   if toSort[i] > toSort[j] then
5  |   |   |   tmp ← toSort[i];
6  |   |   |   toSort[i] ← toSort[j];
7  |   |   |   toSort[j] ← tmp;
8  |   |   end
9  |   end
10 end
```

b)

Insertion Sort:
Bei der Insertion Sort wird ein Element mit seinem nachfolgenden Element verglichen. Ist es größer werden beide vertauscht. Das kleinere Element muss im Fall eines Tausches auch mit dem neuen Vorgänger verglichen werden. Ist der Vorgänger ebenfalls kleiner, müssen die Elemente weiterhin vertauscht werden.
Somit wandern kleine Elemente langsam nach vorne.
Sobald es kein kleineres Element mehr gibt, wird das alte Element weiter mit nachfolgenden Elementen verglichen.
Somit wandern die großen Elemente langsam nach oben.

Minumumsuche + Austausch:

c)

	Minimumsuche + Austausch Algorithmus	Insertion Sort
Vertauschungen	0	0
Vergleiche	maximal: $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$	$n - 1$

d)

$n \in \mathbb{N}$

	Minimumsuche + Austausch Algorithmus	Insertion Sort
Array	$A = \langle n, n+1, n+2, ... \rangle$	$A = \langle n, n-1, n-2, ... \rangle$
Anzahl Vergleiche	$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$	$\frac{n^2-n}{2}$

e)

$n \in \mathbb{N}$

	Minimumsuche + Austausch Algorithmus	Insertion Sort
Array	$A = \langle n, n-1, n-2, ... \rangle$	$A = \langle n, n-1, n-2, ... \rangle$
Anzahl Vertauschungen	$\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$	$\frac{n^2-n}{2}$

Aufgabe 2

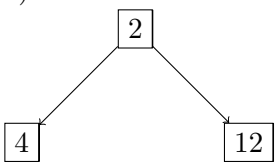
$A = \langle 4, 2, 12, 10, 18, 14, 6, 16, 8 \rangle$

a)

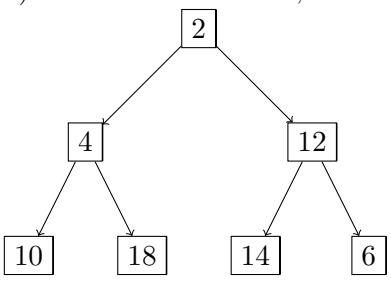
1) Die erste Zahl aus dem Array nehmen und als Wurzel einsetzen

2) Die nächste Zahl aus dem Array als Child a

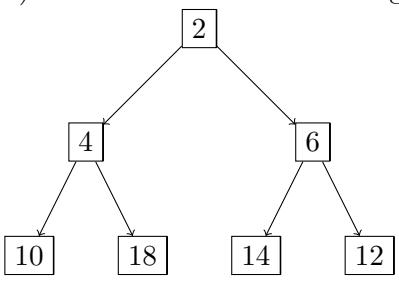
3) 4 und 2 vertauschen, da $2 < 4$



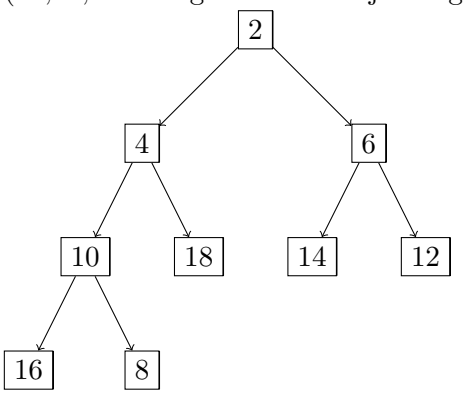
4) nächste Zahl als Child anfügen



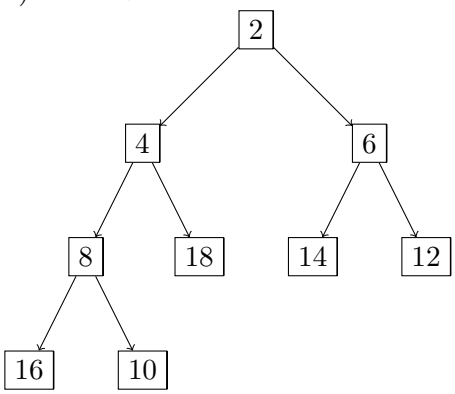
5) Die nächsten vier Elemente werden angefügt (10,18,14 sind größer als die jeweiligen Parent Elemente)



6) Da $6 < 12$ müssen die beiden Elemente vert

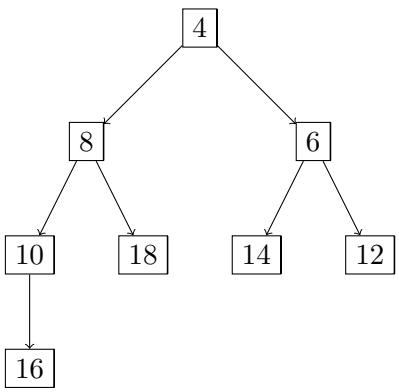


6) Die letzten beiden Elemente werden angefügt

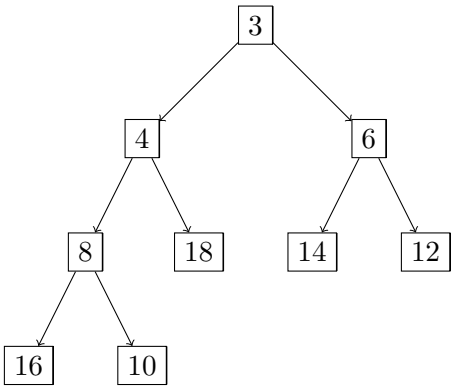


7) 8 und 10 müssen vertrauscht werden

b)



c)



d)

Das größte Element könnte sich an jedem Knoten des Min-Heap Baumes befinden.
Man muss also den Baum traversieren, bis man den maximalen Knoten gefunden hat. Anschließend muss die Min-Heap Eigenschaft wiederhergestellt werden.

- Um den maximalen Knoten zu finden muss jeder Knoten betrachtet werden $\Rightarrow \mathcal{O}(n)$
- Der gefundene Knoten muss mit dem letzten Element des Min-Heap Baumes ersetzt werden $\Rightarrow \mathcal{O}(1)$
- Die Min-Heap Eigenschaft muss wiederhergestellt werden $\Rightarrow \mathcal{O}(\log n)$

Es ergibt sich eine Gesamtlaufzeit von $\mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\log n) = \mathcal{O}(n)$.

Aufgabe 3

a)

Ein k-Heap kann wie ein Binärer-Heap als Array dargestellt werden.
Der Parent node eines Elementes i lässt sich mit $\lfloor (i-1)/k \rfloor$, die Child nodes mit $i * k + 1$ bis $i * k + k$ berechnen.

b)

Die Höhe eines k-Heaps der Größe n ist $\lfloor log_k(n) + 1 \rfloor$

c)

Algorithm 3: Insert

```
1 function insertElement(Element e, k-nary k, Heap data)
2 positionElement, heapSize ← heapSize+1
3 data[heapSize-1] ← e
4 for parent = ⌊(positionElement − 1)/k⌋, data[positionElement] > parent; do
5 |  vertausche (data[positionElement] mit data[parent] positionElement ← parent
6 end
```

Algorithm 4: ExtractMin

```
1  function ExtractMin(Heap data, k-nary k)
2  position ← 0
3  lösche data[position]
4  data[position] ← data[heapSize-1]
5  while true do
6  |  children[] ← data[position*k+1] - data[position*k+k]
7  |  for index ← 0, index < k, index+1 do
8  |  |  if children[index]<data[position] then
9  |  |  |  vertausche(children[index],data[position])
10 |  |  |  position ← index index ← k
11 |  |  end
12 |  end
13 end
```

Aufgabe 4

a)

Für das Array der Länge $n = 2$ sortiert der Algorithmus korrekt, da die Elemente ggfs. vertauscht werden um sie zu sortieren und der Algorithmus terminiert. Bei der Länge $n = 1$ terminiert der Algorithmus direkt.

Für $n > 2$ gilt:
Nach dem Ausführen der Zeile 8 ist der Bereich $A\,[1...n-k]$ sortiert, sodass die größten Elemente im hinteren Bereich des zweiten Drittels liegen. Nach dem Ausführen der Zeile 9 ist der Bereich $A\,[1+k...n]$ sortiert, sodass die größten Elemente am Ende des Arrays stehen. Das zweite Dittel (mittlerer Bereich) ist nun nicht mehr sortiert. Nach dem Ausführen der Zeile 10 ist der Bereich $A\,[1...n-k]$ wieder sortiert. Da die größten Elemente durch Ausführen der Zeile 9 in das letzte Drittel des Arrays gebracht wurden ist folglich der Bereich $A\,[1...n]$ und somit das gesamte Array sortiert.

b)

Der Algorithmus ruf sich rekursiv drei mal auf und betrachtet dabei $\frac{2}{3}$ der Arraylänge n. Des Weiteren werden zwei Vergleiche durchgeführt, um zu prüfen, ob zwei Elemente getauscht werden müssen sowie für die Abbruchbedingung. Es ergibt sich daraus die Rekursionsvorschrift $T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{2}{3} \cdot n\right) + 1$
Mit Hilfe des Mastertheorems lässt sich folgende Komplexität ermitteln:

$$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{2}{3} \cdot n\right) + 1 \Rightarrow 3 \cdot T\left(\frac{2}{3} \cdot n\right) + \mathcal{O}(1)$$

$$\text{Nach dem Mastertheorem gilt: } a = 3;\ b = \frac{3}{2};\ f(n) = 1 = \mathcal{O}(n^c) \text{ mit } c = 0$$

$$\text{Es ist: } c < \log_{\frac{3}{2}} 3$$

$$\text{Nach Fall 1 des Mastertheorems gilt: } T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_{\frac{3}{2}} 3}) \approx \mathcal{O}(n^{2,7})$$

c)

Sowohl Quck-Sort, als auch Minimumsuche + Austausch sowie Insertion Sort haben im worst case eine Komplexität von $\mathcal{O}(n^2)$.
Setzt man in dieser Teilaufgabe Komplexität mit Effizienz gleich, gilt $\mathcal{O}(n^2) < \mathcal{O}(n^{2,7})$.
Damit ist Zwei-Drittel-Sortieren im worst case **nicht** effizienter als die drei obenstehenden Sortieralgorithmen.