	1	2	3	4	Σ
Sarah Ertel Patrick Greher Eugen Ljavin					

Übungsblatt Nr. 3

(Abgabetermin 10.05.2018)

Aufgabe 1

a)

Algorithm 1: Insertion Sort Algorithmus

function insertionSort($toSort$ [ ])
for $i \leftarrow 1; i < toSort.length; i \leftarrow i + 1$ **do**
    j $\leftarrow$ i;
    while $(j > 0) \wedge (toSort[j-1] > toSort[j])$ **do**
        tmp $\leftarrow$ toSort[j - 1];
        toSort[j-1] $\leftarrow$ toSort[j];
        toSort[j] $\leftarrow$ tmp;
        j $\leftarrow$ j-1;
    end
end

Algorithm 2: Minimumsuche + Austausch Algorithmus

function minimumSwapSort($toSort$ [ ])
for $i \leftarrow 0; i < toSort.length - 1; i \leftarrow i + 1$ **do**
    for $j \leftarrow i + 1; j < toSort.length; i \leftarrow j + 1$ **do**
        if $toSort[i] > toSort[j]$ **then**
            tmp $\leftarrow$ toSort[i];
            toSort[i] $\leftarrow$ toSort[j];
            toSort[j] $\leftarrow$ tmp;
        end
    end
end

b)

c)

	Minimumsuche + Austausch Algorithmus	Insertion Sort
Vertauschungen	0	0
Vergleiche	maximal: $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}$	$n - 1$

d)

$n \in \mathbb{N}$
$A = \langle n, n+1, n+2, ... \rangle$

Es gibt dann $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - (n-1)$ Vergleiche (für beide Algorithmen)

e)

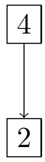
$n \in \mathbb{N}$
$A = \langle n, n-1, n-2, ... \rangle$
Es gibt dann $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - (n-1)$ Vertauschungen (für beide Algorithmen)

Aufgabe 2

$A = \langle 4, 2, 12, 10, 18, 14, 6, 16, 8 \rangle$

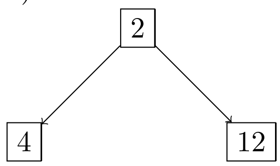
a)

1) Die erste Zahl aus dem Array nehmen und als Wurzel einsetzen

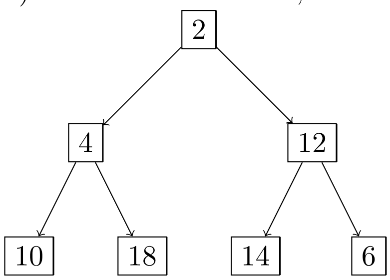


2) Die nächste Zahl aus dem Array als Child a

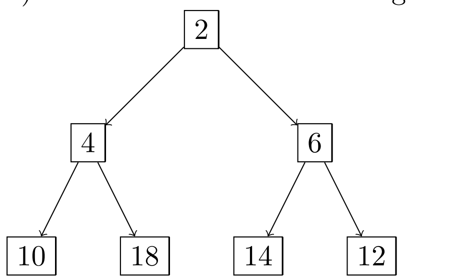
3) 4 und 2 vertauschen, da $2 < 4$



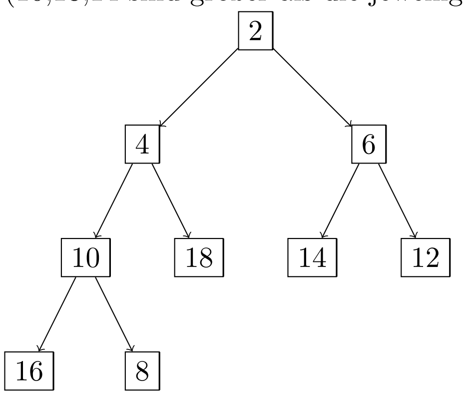
4) nächste Zahl als Child anfügen



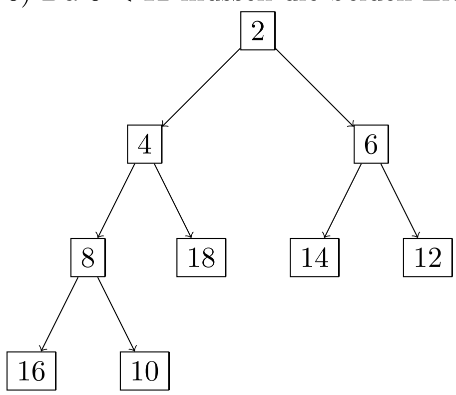
5) Die nächsten vier Elemente werden angefügt (10,18,14 sind größer als die jeweiligen Parent Elemente)



6) Da $6 < 12$ müssen die beiden Elemente vert

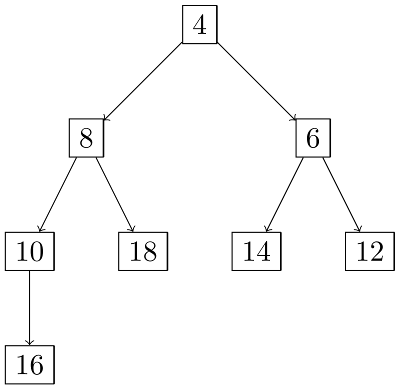


6) Die letzten beiden Elemente werden angefügt

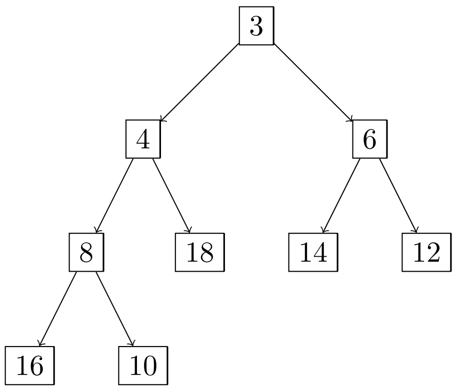


7) 8 und 10 müssen vertrauscht werden

b)



c)



d)

Aufgabe 3

a)

Ein k-Heap kann wie ein Binärer-Heap als Array dargestellt werden.
Der Parent node eines Elementes i lässt sich mit $\lfloor (i-1)/k \rfloor$, die Child nodes mit $i * k + 1$ bis $i * k + k$ berechnen.

b)

Die Höhe eines k-Heaps der Größe n ist $\lfloor log_k(n) + 1 \rfloor$

c)

Algorithm 3: Insert

function insertElement(Element e, k-nary k, Heap data)
positionElement, heapSize ← heapSize+1
data[heapSize-1] ← e
for $parent = \lfloor (positionElement - 1)/k \rfloor$, *data[positionElement]* $>$ *parent;* **do**
  vertausche (data[positionElement] mit data[parent] positionElement ← parent
end

Algorithm 4: ExtractMin

```
1  function ExtractMin(Heap data, k-nary k)
2  position ← 0
3  lösche data[position]
4  data[position] ← data[heapSize-1]
5  while true do
6  |  children[] ← data[position*k+1] - data[position*k+k]
7  |  for index ← 0, index < k, index+1 do
8  |  |  if children[index]<data[position] then
9  |  |  |  vertausche(children[index],data[position])
10 |  |  |  position ← index index ← k
11 |  |  end
12 |  end
13 end
```

Aufgabe 4

a)

Für das Array der Länge $n = 2$ sortiert der Algorithmus korrekt, da die Elemente ggfs. vertauscht werden um sie zu sortieren und der Algorithmus terminiert. Bei der Länge $n = 1$ terminiert der Algorithmus direkt.

Für $n > 2$ gilt:
Nach dem Ausführen der Zeile 8 ist der Bereich $A\,[1...n-k]$ sortiert, sodass die größten Elemente im hinteren Bereich des zweiten Drittels liegen. Nach dem Ausführen der Zeile 9 ist der Bereich $A\,[1+k...n]$ sortiert, sodass die größten Elemente am Ende des Arrays stehen. Das zweite Dittel (mittlerer Bereich) ist nun nicht mehr sortiert. Nach dem Ausführen der Zeile 10 ist der Bereich $A\,[1...n-k]$ wieder sortiert. Da die größten Elemente durch Ausführen der Zeile 9 in das letzte Drittel des Arrays gebracht wurden ist folglich der Bereich $A\,[1...n]$ und somit das gesamte Array sortiert.

b)

Der Algorithmus ruf sich rekursiv drei mal auf und betrachtet dabei $\frac{2}{3}$ der Arraylänge n. Des Weiteren werden zwei Vergleiche durchgeführt, um zu prüfen, ob zwei Elemente getauscht werden müssen sowie für die Abbruchbedingung. Es ergibt sich daraus die Rekursionsvorschrift $T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{2}{3} \cdot n\right) + 1$
Mit Hilfe des Mastertheorems lässt sich folgende Komplexität ermitteln:

$$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{2}{3} \cdot n\right) + 1 \Rightarrow 3 \cdot T\left(\frac{2}{3} \cdot n\right) + \mathcal{O}(1)$$

$$\text{Nach dem Mastertheorem gilt: } a = 3;\ b = \frac{3}{2};\ f(n) = 1 = \mathcal{O}(n^c) \text{ mit } c = 0$$

$$\text{Es ist: } c < \log_{\frac{3}{2}} 3$$

$$\text{Nach Fall 1 des Mastertheorems gilt: } T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_{\frac{3}{2}} 3}) \approx \mathcal{O}(n^{2,7})$$

c)

Sowohl Quck-Sort, als auch Minimumsuche + Austausch sowie Insertion Sort haben im worst case eine Komplexität von $\mathcal{O}(n^2)$.
Setzt man in dieser Teilaufgabe Komplexität mit Effizienz gleich, gilt $\mathcal{O}(n^2) < \mathcal{O}(n^{2,7})$.
Damit ist Zwei-Drittel-Sortieren im worst case **nicht** effizienter als die drei obenstehenden Sortieralgorithmen.