Übungen zu Algorithmen | **Sommersemester 2018**
WSI für Informatik | **Universität Tübingen**
Kaufmann/Bekos/Schneck | **17.04.2018**

Übungsblatt 0

keine Abgabe

Besprechung: 23.04.2018 – 26.04.2018

Willkommen zu Vorlesung "Algorithmen". Bitte beachten Sie die folgenden Punkte.

- Wenn Sie auf Ihrem Übungsblatt weniger als 80% der Punkte erreicht haben, besteht in der Woche Anwesenheitspflicht für die Übung.
- In der ersten Übungsstunde (Besprechung dieses Blattes) besteht für alle Anwesenheitspflicht!!!
- An der Klausur teilnehmen darf nur, wer in den Übungsblättern mindestens 50% der Punkte erreicht und höchstens zwei mal unentschuldigt in der Übungsgruppe fehlt.
- Sie müssen in der Lage sein, Ihre Lösung im Tutorium vorzustellen.

Viel Glück,
Michael Bekos und Thomas Schneck.

Aufgabe 1: Logarithmus (mündlich, keine Punkte)

Zur Erinnerung: Der Logarithmus einer Zahl $y \in \mathbb{R}_{>0}$ zur Basis $b \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ ist die Zahl x, mit der man b potenzieren muss, um y zu erhalten:

$$\log_b(y) = x \Longleftrightarrow b^x = y.$$

Folglich ist die Logarithmusfunktion $\log_b(y)$ die Umkehrung der Exponentialfunktion b^x. Wir treffen die folgende Vereinbarung: In allen Übungsblättern schreiben wir für den Logarithmus zur Basis 2 „$\log(y)$" statt „$\log_2(y)$".

(a) Zeigen Sie: $b^{\log_b(a)} = a$.

(b) Zeigen Sie: $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$.

(c) Berechnen Sie $2^{\log_4(n)}$.

Aufgabe 2: Summenformel (mündlich, keine Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Summenformeln mit vollständiger Induktion.

(a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$

(b) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$

(c) $\sum_{i=1}^{n} (i2^i) = 2 + 2^{n+1}(n-1)$

Aufgabe 3: Ereignisraum und Ereignisse (mündlich, keine Punkte)

Wir werden uns im Laufe des Semesters immer wieder mit einfachen stochastischen Fragestellungen beschäftigen. Damit alle auf dem gleichen Stand sind, werden auf diesem Übungsblatt grundlegende Begriffe vorgestellt und bearbeitet.

Als *Ereignisraum* Ω bezeichnen wir alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperimentes. Ein *Ereignis* ist eine Teilmenge von Ω. Wir nehmen an, dass die Ereignisse gleichverteilt sind. Das heißt, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ist definiert als: $\mathbf{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Zum Beispiel ist beim einmaligen Wurf eines gewöhnlichen Würfels der Ereignisraum $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ und ein Ereignis wäre: „Der Würfel zeigt die Zahl 1 oder 3", dargestellt durch $A = \{1, 3\}$. Die Wahrscheinlichkeit von A ist $\mathbf{P}[A] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Lösen Sie folgende Aufgaben unter der Annahme, dass Ereignisse gleichverteilt sind.

(a) Bestimmen Sie den Ereignisraum für: „Eine Münze wird drei Mal hintereinander geworfen". Betrachten Sie das Ereignis: „Es wird mindestens zwei Mal Kopf geworfen". Wie sieht dieses Ereignis als Menge geschrieben aus? Wie ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis?

(b) Zeigen Sie: Aus $A \cap B = \emptyset$ folgt $\mathbf{P}[A \cup B] = \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B]$. Was gilt, wenn $A \cap B \neq \emptyset$?

(c) Zeigen Sie für das *Gegenereignis* $A^C = \Omega \setminus A$ eines Ereignisses A: $\mathbf{P}[A^C] = 1 - \mathbf{P}[A]$.

Aufgabe 4: Zufallsvariablen (mündlich, keine Punkte)

Eine Zufallsvariable X ist eine Funktion $X : \Omega \to M$, wobei Ω ein Ereignisraum ist und M eine beliebige Menge.

Sei $\Omega = \{1, \ldots, 10\}^2$. Betrachten Sie die Zufallsvariable

$$X : \Omega \to \mathbb{N},\ X(x, y) = x + y.$$

Wir definieren das Ereignis $[X \leq a] = \{(x, y) \in \Omega \mid X(x, y) \leq a\}$.

(a) Geben Sie die Menge $[X \leq 5]$ konkret an und beschreiben Sie das Ereignis in Worten.

(b) Berechnen Sie $\mathbf{P}[X \leq 5]$ unter Annahme der Gleichverteilung der Ereignisse.

Aufgabe 5: Erwartungswert und Varianz (mündlich, keine Punkte)

Sei Ω ein Ereignisraum. Wir definieren den Erwartungswert einer Zufallsvariable $X : \Omega \to M$ als

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{x \in M} x \cdot \mathbf{P}[X = x].$$

Intuitiv beschreibt der Erwartungswert einer Zufallsvariable das Ereignis, welches im Mittel am häufigsten auftritt. Der Erwartungswert ist linear, dass heißt es gilt

$$\mathbf{E}[a + b \cdot X] = a + b \cdot \mathbf{E}[X]$$

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert einer Zufallsvariable, die nur die Werte 0 und 1 haben kann.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert eines fairen Würfels.

(c) Verwenden Sie die Linearität des Erwartungswertes, um den Erwartungswert der Summe von zwei unabhängigen Würfelwürfen zu berechnen.

(d) Die Varianz einer Zufallsvariable X gibt das Mittel der quadratischen Abweichung von X zu ihrem Erwartungswert an. Formal:

$$\mathbf{var}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^2].$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Linearität des Erwartungswerts, dass folgende Gleichung gilt:

$$\mathbf{var}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2.$$