Übungsblatt 1

Abgabe bis 26.04.2018

Besprechung: 30.04.2018 – 03.05.2018

Hinweis: Eine LaTeX-Vorlage für Ihre Übungsblätter finden Sie im Moodle.

Aufgabe 1: O-Notation (2+2+2+2 Punkte)

Zur Erinnerung: Für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ schreiben wir

- $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, falls $\exists\, c, n_0 > 0\ \forall\, n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)$,
- $f(n) = \Omega(g(n))$, falls $\exists\, c, n_0 > 0\ \forall\, n \geq n_0 : c \cdot g(n) \leq f(n)$,
- $f(n) = \Theta(g(n))$, falls $\exists\, c_1, c_2, n_0 > 0\ \forall\, n \geq n_0 : c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$.

Verwenden Sie diese Definitionen um die folgenden Aussagen zu zeigen:

(a) Aus $f_1(n), f_2(n) = \mathcal{O}(g(n))$ folgt $f_1(n) + f_2(n) = \mathcal{O}(g(n))$ und $f_1(n) \cdot f_2(n) = \mathcal{O}(g(n)^2)$.

(b) Aus $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ und $g(n) = \mathcal{O}(h(n))$ folgt $f(n) = \mathcal{O}(h(n))$.

(c) $f(n) = \Theta(g(n))$ genau dann, wenn $g(n) = \Theta(f(n))$.

(d) $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ genau dann, wenn $g(n) = \Omega(f(n))$.

Aufgabe 2: Mastertheorem (2+2+2 Punkte)

Bestimmen Sie die Komplexitätsklasse für folgende Rekursionsgleichung mit Hilfe des Mastertheorems:

(a) $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$

(b) $T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$

(c) $T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

Aufgabe 3: Rekursionen aus alten Klausuren & geometrische Summenformel (4+4+4+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass für die folgende Rekursion $T(n) = \Theta(n^2 \log n)$ ist.

$$T(1) = 0$$
$$T(n) = T(n-1) + n \log n$$

(b) Sei $n = \left(\frac{8}{7}\right)^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Folgende Rekursion ist für die Funktion T gegeben:

$$T(1) = 0$$
$$T(n) = \frac{7}{8} \cdot T\left(\frac{7}{8}n\right) + \frac{7}{8} \cdot n$$

Finden Sie für $T(n)$ eine geschlossene Form ohne das Mastertheorem zu verwenden und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer geschlossenen Form mit vollständiger Induktion.

(c) Sei $n = \left(\frac{3}{2}\right)^k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Folgende Rekursion ist für die Funktion T gegeben:

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{2}{3}n\right) + 1$$

Finden Sie für $T(n)$ eine geschlossene Form ohne das Mastertheorem zu verwenden und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer geschlossenen Form mit vollständiger Induktion.

(d) Sei n eine Zweierpotenz, das heißt $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Folgende Rekursion ist für die Funktion T gegeben: Für $n > 1$ gelte

$$T(n) = A(n) + B(n) \ ,$$

wobei

$$A(n) = A\left(\tfrac{n}{2}\right) + B\left(\tfrac{n}{2}\right)$$

und

$$B(n) = B(n-1) + 2n - 1 \ .$$

Die Endwerte seien $T(1) = 1$, $B(1) = 1$ und $A(1) = 0$. Finden Sie für $T(n)$ eine geschlossene Form ohne das Mastertheorem zu verwenden und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.

Hinweis: Eine geschlossene Form ist nur noch von k bzw. n abhängig. Dabei sollen auch keine Summenzeichen $\sum$ oder Produktzeichen $\prod$ mehr vorkommen.