Sarah Ertel
Patrick Greher
Eugen Ljavin

1	2	3	Σ

Übungsblatt Nr. 1

(Abgabetermin 26.04.2018)

Aufgabe 1

a)

Zu zeigen: $f_1(n),\ f_2(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow f_1(n) + f_2(n) = \mathcal{O}(g(n))$

$$\text{Sei} \quad f_1(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow \exists\ c_1,n_1 > 0\ \forall\ n \geq n_1 : f(n) \leq c_1 \cdot g(n) \quad \text{und}$$
$$f_2(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow \exists\ c_2,n_2 > 0\ \forall\ n \geq n_2 : f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

$$\text{Es gilt} \quad f_1(n) + f_2(n) \leq c_1 \cdot g(n) + c_2 \cdot g(n) = g(n) \cdot (c_1 + c_2)\ \square$$

Zu zeigen: $f_1(n),\ f_2(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow f_1(n) \cdot f_2(n) = \mathcal{O}(g(n)^2)$

$$\text{Sei} \quad f_1(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow \exists\ c_1,n_1 > 0\ \forall\ n \geq n_1 : f(n) \leq c_1 \cdot g(n) \quad \text{und}$$
$$f_2(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow \exists\ c_2,n_2 > 0\ \forall\ n \geq n_2 : f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

$$\text{Es gilt} \quad f_1(n) \cdot f_2(n) \leq c_1 \cdot g(n) \cdot c_2 \cdot g(n) = c_1 \cdot c_2 \cdot g(n)^2\ \square$$

b)

Zu zeigen: $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \wedge g(n) = \mathcal{O}(h(n)) \Rightarrow f(n) = \mathcal{O}(h(n))$

$$\text{Sei} \quad f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow \exists\ c_0,n_0 > 0\ \forall\ n \geq n_0 : f(n) \leq c_0 \cdot g(n)\ \wedge$$
$$g(n) = \mathcal{O}(h(n)) \Rightarrow \exists\ c_1,n_1 > 0\ \forall\ n \geq n_1 : g(n) \leq c_1 \cdot h(n)$$

$$\text{Wähle} \quad n_2 = max(n_0,n_1),\ c_2 = c_0 \cdot c_1$$
$$\text{Dann gilt} \quad \forall n \geq n_2 : f(n) \leq c_0 \cdot f(n) \leq c_0 \cdot c_1 \cdot h(n) = c_2 \cdot h(n)$$

$$\Rightarrow \exists\ c_2,n_2 > 0\ \forall\ n \geq n_2 : f(n) \leq c_2 \cdot h(n)\ \square$$

c)

Zu zeigen: $f(n) = \Theta(g(n)) \iff g(n) = \Theta(f(n))$

Links $\to$ Rechts:

$$\begin{aligned}
\text{Sei} \quad & f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow \exists\ c_1,c_2,n_0 > 0\ \forall\ n \geq n_0 : c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \\
\text{Es gilt} \quad & (1)\ c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \Rightarrow g(n) \leq \frac{1}{c_1} \cdot f(n) \text{ und} \\
& (2)\ f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \Rightarrow \frac{1}{c_2} \cdot f(n) \leq g(n) \\
\text{Folglich} \quad & \frac{1}{c_2} \cdot f(n) \leq g(n) \leq \frac{1}{c1} \cdot f(n) \\
\text{Wähle} \quad & c_3 = \frac{1}{c_2} \text{ und } c_4 = \frac{1}{c_1}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists\ c_3,c_4,n_0 > 0\ \forall\ n \geq n_0 : c_3 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_4 \cdot g(n)$ und somit ist $g(n) = \Theta(f(n))$

Rechts $\to$ Links:

$$\begin{aligned}
\text{Sei} \quad & g(n) = \Theta(f(n)) \Rightarrow \exists\ c_1,c_2,n_0 > 0\ \forall\ n \geq n_0 : c_1 \cdot f(n) \leq g(n) \leq c_2 \cdot f(n) \\
\text{Es gilt} \quad & (1)\ c_1 \cdot f(n) \leq g(n) \Rightarrow f(n) \leq \frac{1}{c_1} \cdot g(n) \text{ und} \\
& (2)\ g(n) \leq c_2 \cdot f(n) \Rightarrow \frac{1}{c_2} \cdot g(n) \leq f(n) \\
\text{Folglich} \quad & \frac{1}{c_2} \cdot g(n) \leq f(n) \leq \frac{1}{c1} \cdot g(n) \\
\text{Wähle} \quad & c_3 = \frac{1}{c_2} \text{ und } c_4 = \frac{1}{c_1}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists\ c_3,c_4,n_0 > 0\ \forall\ n \geq n_0 : c_3 \cdot f(n) \leq g(n) \leq c_4 \cdot f(n)$ und somit ist $f(n) = \Theta(g(n))$ $\square$

d)

Zu zeigen: $f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \iff g(n) = \Omega(f(n))$

Links $\to$ Rechts:

$$\begin{aligned}
\text{Sei} \quad & f(n) = \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow \exists\ c,n_0 > 0\ \forall\ n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n) \\
\text{Es gilt} \quad & f(n) \leq c \cdot g(n) \Rightarrow \frac{1}{c} \cdot f(n) \leq g(n) \\
\text{Wähle} \quad & c_1 = \frac{1}{c}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists\ c_1, n_0 > 0\ \forall\ n \geq n_0 : c \cdot g(n) \leq f(n)$ und somit ist $g(n) = \Omega(f(n))$

Rechts $\rightarrow$ Links:

$$\begin{array}{rl} \text{Sei} & g(n) = \Omega(f(n)) \Rightarrow \exists\ c, n_0 > 0\ \forall\ n \geq n_0 : c \cdot g(n) \leq f(n) \\ \text{Es gilt} & c \cdot f(n) \leq g(n) \Rightarrow f(n) \leq \frac{1}{c} \cdot g(n) \\ \text{Wähle} & c_1 = \frac{1}{c} \end{array}$$

$\Rightarrow \exists\ c_1, n_0 > 0\ \forall\ n \geq n_0 : f(n) \leq c_1 \cdot g(n)$ und somit ist $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ $\square$

Aufgabe 2

a)

$T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1$
$\rightarrow a = 1, b = 2, f(n) = 1$
$log_b a = log_2 1 = 0$
$\rightarrow f(n) = 1 = n^0 = n^{log_b a}$ $\rightarrow$ 2.Fall Mastertheorem
$T(n) = \Theta(n^{log_b a}) * log_b n$

b)

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1$
$\rightarrow a = 2, b = 2, f(n) = 1$
$log_b a = log_2 2 = 1$
$\rightarrow f(n) = 1 \leq n^{1-\epsilon}$ $\rightarrow$ 1. Fall Mastertheorem
$T(n) = \Theta(n^{log_b a})$

c)

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$
$\rightarrow a = 2, b = 2, f(n) = n$
$log_b a = log_2 2 = 1$
$\rightarrow f(n) = n = n^1 = n^{log_b a}$ $\rightarrow$ 2. Fall Mastertheorem
$T(n) = \Theta(n^{log_b a}) * log_b n$

Aufgabe 3

a)

b)

$$
\begin{aligned}
T(1) &= 0 \\
T(n) &= \frac{7}{8} \cdot T\left(\frac{7}{8}n\right) + \frac{7}{8} \cdot n \\
&= \frac{7}{8} \cdot \left(\frac{7}{8} \cdot T\left(\frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8}n\right) + \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} \cdot n\right) + \frac{7}{8} \cdot n \\
&= \frac{7}{8} \cdot \left(\frac{7}{8} \cdot T\left(\frac{49}{64}n\right) + \frac{49}{64} \cdot n\right) + \frac{7}{8} \cdot n \\
&= \frac{7}{8} \cdot \left(\frac{7}{8} \cdot \left(\frac{7}{8} \cdot T\left(\frac{7}{8} \cdot \frac{49}{64}n\right) + \frac{7}{8} \cdot \frac{49}{64} \cdot n\right) + \frac{49}{64} \cdot n\right) + \frac{7}{8} \cdot n \\
&= \frac{7}{8} \cdot \left(\frac{7}{8} \cdot \left(\frac{7}{8} \cdot T\left(\frac{343}{512}n\right) + \frac{343}{512} \cdot n\right) + \frac{49}{64} \cdot n\right) + \frac{7}{8} \cdot n \\
&\vdots \\
i\text{-ter Schritt: } &= \left(\frac{7}{8}\right)^i \cdot T\left(\left(\frac{7}{8}\right)^i n\right) + n \cdot \underbrace{\sum \left(\frac{7}{8}\right)^i}_{\text{geom. Reihe}} \\
&= \left(\frac{7}{8}\right)^i \cdot T\left(\left(\frac{7}{8}\right)^i n\right) + n \cdot \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{7}{8}\right) - 1} \\
i+1\text{-ter Schritt: } &= \left(\frac{7}{8}\right)^{i+1} \cdot T\left(\left(\frac{7}{8}\right)^{i+1} n\right) + n \cdot \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{7}{8}\right) - 1} \\
\text{für } i+1 = \log n\text{: } &= \left(\frac{7}{8}\right)^{\log n} \cdot T\left(\left(\frac{7}{8}\right)^{\log n} n\right) + n \cdot \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{7}{8}\right) - 1} \\
&= \left(\frac{7}{8}\right)^{\log n} \cdot T\left(1\right) + n \cdot \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{7}{8}\right) - 1} \\
&= \left(\frac{7}{8}\right)^{\log n} \cdot 0 + n \cdot \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{7}{8}\right) - 1} \\
&= n \cdot \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{7}{8}\right) - 1} \;\square
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
T(1) &= 1 \\
T(n) &= 2 \cdot T\left(\frac{2}{3}n\right) + 1 \\
&= 2 \cdot (2 \cdot T\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}n\right) + 1) + 1 \\
&= 2 \cdot (2 \cdot T\left(\frac{4}{9}n\right) + 1) + 1 \\
&= 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot T\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}n\right) + 1) + 1) + 1 \\
&= 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot T\left(\frac{8}{27}n\right) + 1) + 1) + 1 \\
&\vdots \\
i\text{-ter Schritt: } &= 2^i \cdot T\left(\left(\frac{2}{3}\right)^i n\right) + i \\
i+1\text{-ter Schritt: } &= 2^{i+1} \cdot T\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{i+1} n\right) + i + 1 \\
\text{für } i+1 = \log n\text{: } &= 2^{\log n} \cdot T\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\log n} n\right) + \log n \\
&= 2^{\log n} \cdot T\left(1\right) + \log n \\
&= 2^{\log n} \cdot 1 + \log n \\
&= n \cdot 1 + \log n \\
&= \mathcal{O}(\log n) \ \square
\end{aligned}
$$

d)