TD Binaire et Hexadécimal

Lycée Monte-Cristo Allauch – 1ère NSI

6 Septembre 2021

Partie I : Le binaire

Les composants de base des ordinateurs sont les transistors. Ceux-ci laissent passer ou non le courant électrique au sein des autres composants de l'ordinateur. Ces 2 états (passage ou non du courant) ont besoin d'être représentés.

C'est pourquoi on peut dire que les ordinateurs "parlent" en binaire. Dans binaire, il y a 'bi' qui signifie '2', car 2 symboles sont utilisés. Ces symboles sont appelés "**bit**". Ce mot vient de l'anglais "binary digit". Par convention, ces 2 symboles sont les chiffres 0 et 1. Les nombres binaires sont donc composés uniquement de ces 2 chiffres (exemple de nombre : 10010). Quelle est la traduction de "binary digit" en français ?...

Dans un ordinateur, on a besoin de représenter des nombres, mais aussi des caractères, des images, etc. Par exemple, la traduction de 69 est 1000101 en binaire, mais c'est aussi 'E' selon la norme de traduction appelée **ASCII** (American Standard Code for Information Interchange). Cette norme fournit un ensemble de codes interprétables comme des caractères par les ordinateurs. Ce n'est pas la seule.

Dans ce TD, nous allons apprendre à représenter les nombres entiers naturels. La représentation des caractères sera abordée dans un autre cours.

Lorsque vous comptez habituellement, vous utilisez un autre système de numération, appelé **décimal**. Dans le système décimal, il y a 10 chiffres.

A) Les puissances de 10

1) Écrire la valeur des puissances de 10 de 10^0 à 10^3

$10^0 =$ $\quad$ $10^1 =$ $\quad$ $10^2 =$ $\quad$ $10^3 =$

2) Décomposer les nombres suivants en sommes de produits de puissances de 10

Exemples : $242 = 2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 2 \times 10^0$ $\quad$ $1000 = 1 \times 10^3$

$15 =$ $\quad$ $16 =$

$273 =$ $\quad$ $546 =$

$742 =$ $\quad$ $743 =$

B) Les puissances de 2

1) Écrire la valeur des puissances de 2 de 2^0 à 2^{10}

$2^0 =$ $\quad$ $2^1 =$ $\quad$ $2^2 =$ $\quad$ $2^3 =$ $\quad$ $2^4 =$ $\quad$ $2^5 =$ $\quad$ $2^6 =$ $\quad$ $2^7 =$ $\quad$ $2^8 =$ $\quad$ $2^9 =$ $\quad$ $2^{10} =$

2) Décomposer les nombres suivants en sommes de puissances de 2

Exemples : $242 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^1$ $\quad$ $1000 = 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3$

$15 =$ $\quad$ $16 =$

$273 =$ $\quad$ $546 =$

$742 =$ $\quad$ $743 =$

Question : Comment se fait le passage de 15 à 16 ? Remarquez aussi que $546 = 273 \times 2$.

3) Sur ces mêmes nombres, ajoutez maintenant les facteurs de chaque puissance de 2 dans l'ordre

Exemples : $242 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

$1000 = 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

$15 =$ $\quad$ $16 =$

$273 =$ $\quad$ $546 =$

$742 =$ $\quad$ $743 =$

C) Le binaire

Un **nombre binaire** se trouve à partir de décompositions en sommes de produits de puissances de 2. Il suffit de recopier chaque facteur de puissances de 2 à la suite. C'est ce que nous faisons déjà sans le savoir lorsque l'on écrit des nombres en **décimal**. Vous pouvez le vérifier sur les réponses du A). Ainsi, 242 en décimal vaut 11110010 en binaire et 1000 en décimal vaut 1111101000 en binaire. Par convention, on écrira : $242_{10} = 11110010_2$ et $1000_{10} = 1111101000_2$.

Traduire les nombres décimaux suivants en binaire

Exemples : $242_{10} = 11110010_2$ $1000_{10} = 1111101000_2$

$15_{10} =$ $16_{10} =$

$273_{10} =$ $546_{10} =$

$742_{10} =$ $743_{10} =$

Question : Comment se font le passage de 15 à 16 et de 273 à 546 en binaire ?

Partie II : L'hexadécimal

A) Les puissances de 16

1) Écrire la valeur des puissances de 16 de 16^0 à 16^3 et écrire ces résultats en puissances de 2

$16^0 = \quad = 2^{\cdots}$ $16^1 = \quad = 2^{\cdots}$ $16^2 = \quad = 2^{\cdots}$ $16^3 = \quad = 2^{\cdots}$

Que remarquez-vous par rapport au passage des puissances de 16 vers les puissances de 2 ? Expliquez en donnant la valeur de 16 en puissance de 2.

2) Décomposer les nombres suivants en sommes de puissances de 16

Exemples : $242 = 15 \times 16^1 + 2 \times 16^0$ $1000 = 3 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 8 \times 16^0$

$15 =$ $16 =$

$273 =$ $546 =$

$742 =$ $743 =$

$4095 =$ $4096 =$

Vous pouvez remarquer que plus on augmente la **base** (nom donné aux puissances utilisées, ici 16), moins on a de chiffres à écrire.

Le padding

Nous avons vu dans la Partie I comment convertir des nombres en binaire. En réalité, les messages binaires circulant dans un ordinateur sont nombreux et se suivent. Problème : comment séparer 2 messages binaires successifs ? 17 s'écrit 10001 et 12 s'écrit 1100 en binaire. Sauf que si on écrit ces 2 nombres successivement, on obtiendrait 100011100, qui sera interprété comme 284...

Pour pallier ce problème, le nombre de bits pour écrire un nombre est fixé à l'avance, souvent 7, 8, 16 ou 32 bits. Si un nombre binaire s'écrit avec moins de bits, son écriture est complétée par des 0 à gauche. C'est le principe du **padding**. Exemple : $17_{10} = 10001_2 = 00010001_2$ sur 8 bits.
Cela ne change rien à la valeur du nombre. Pour vous en convaincre, 17_{10} et 0017_{10} sont-ils 2 nombres différents ?

3) Donnez la valeur en binaire de longueur 16 bits de ces nombres issus de la question précédente

$16_{10} =$ $273_{10} =$

$742_{10} =$ $4095_{10} =$

Nombre supplémentaire : $65535_{10} =$

Question : Sans calculer, quel serait l'écriture en somme de puissances de 16 et en binaire de 65536 ?

B) L'hexadécimal (une écriture très utilisée en informatique)

1) Après avoir regroupé les écritures binaires de la question A3 par paquets de 4 bits en commençant par la droite, donnez la valeur en décimal de chacun de ces paquets de 4 bits

Exemples : $242_{10} = 1111\ 0010_2$ (15_{10} 2_{10}) $1000_{10} = 0011\ 1110\ 1000_2$ (3_{10} 14_{10} 8_{10})

$16_{10} =$ $273_{10} =$ $742_{10} =$ $4095_{10} =$ $65535_{10} =$

"**Hexadécimal**" vient du grec 'hexa' (six) auquel on a ajouté le mot "décimal" pour 10. C'est donc un système de numération en base 16. Un **nombre hexadécimal** se trouve à partir de regroupements de nombres binaires par paquets de 4 bits. Pourquoi ? Parce que $2^4 = 16$!

Le système hexadécimal est donc composé de 16 chiffres. Par convention, on utilise les 10 chiffres arabes classiques de 0 à 9 et les lettres majuscules A, B, C, D, E et F. Ainsi, on a $A_{16} = 10_{10}$, $B_{16} = 11_{10}$, $C_{16} = 12_{10}$, $D_{16} = 13_{10}$, $E_{16} = 14_{10}$ et $F_{16} = 15_{10}$.

2) Traduire les nombres décimaux des questions A2 et A3 en hexadécimal de longueur 4

Exemples : $242_{10} = 00F2_{16}$ $1000_{10} = 03E8_{16}$

$15_{10} =$ $16_{10} =$ $273_{10} =$

$546_{10} =$ $742_{10} =$ $743_{10} =$

$4095_{10} =$ $4096_{10} =$ $65535_{10} =$

Et la conversion dans l'autre sens ? Convertir $2A_{16}$ en binaire puis en décimal :

$2A_{16} =$

Récapitulatif

Pour chaque type de conversion d'une base à l'autre, expliquez la méthode utilisée :

Décimal → Binaire	Binaire → Décimal

Binaire → Hexadécimal	Hexadécimal → Décimal

Exercices supplémentaires sur les bases

Lycée Monte-Cristo Allauch – 1ère NSI

9 Septembre 2021

1 Convertir les nombres suivants dans la base demandée

2021_{10} en base 2	999_{10} en base 2	10011110_2 en base 10	1000110011011111_2 en base 10
$10111001010001111001011011000001_2$ en base 16	10100001_2 en base 16	999_{16} en base 2	$B543_{16}$ en base 2
$B543_{16}$ en base 10	999_{16} en base 10	2021_{10} en base 16	64872_{10} en base 16

2 Base n

2.1 Convertir les nombres décimaux suivants dans la base demandée

3210 en base 3	3210 en base 8	3210 en base 9	3210 en base 20
6420 en base 3	6420 en base 8	6420 en base 9	6420 en base 20

Aides	$3^5 = 243$	$3^6 = 729$	$3^7 = 2187$	$3^8 = 6561$	$8 = 2^3$
$5 \times 64 = 320$	$6 \times 64 = 384$	$7 \times 64 = 448$	$5 \times 512 = 2560$	$6 \times 512 = 3072$	$7 \times 512 = 3584$
$9 = 3^2$	$5 \times 81 = 405$	$6 \times 81 = 486$	$7 \times 81 = 567$	$8 \times 81 = 648$	
$3 \times 729 = 2187$	$4 \times 729 = 2916$	$5 \times 729 = 3645$	$6 \times 729 = 4374$	$7 \times 729 = 5103$	$8 \times 729 = 5832$

2.2 Convertir les nombres suivants en décimal

22_3 202100_3 22_8 17376_8 21012_9 21012_{20} JGA_{20} 21012_{27}

2.3 Convertir les nombres suivants dans la base demandée

22_3 en base 2 22_{16} en base 8 17376_{15} en base 20 22_9 en base 5 21012_9 en base 9

3 Opérations binaires

3.1 L'addition

L'addition n-aire fonctionne de la même façon que l'addition décimale. On peut poser l'addition comme vous l'avez appris en primaire. Donner donc le résultat des additions binaires suivantes et vérifier les résultats en décimal :

$11010 + 101$ $1001110 + 100101$ $1111 + 1$ $1111 + 101$

Et pour les autres bases, cela fonctionne de la même façon ! Donner donc le résultat des additions n-aires suivantes et vérifier les résultats en décimal :

$202100_3 + 10120_3$ $5A0_{16} + 108_{16}$ $17376_8 + 523_8$ $JGA_{20} + ABC_{20}$

3.2 La multiplication

Pour la multiplication binaire, cela fonctionne également comme pour la multiplication décimale que vous avez apprise en primaire. Un rappel de comment poser une multiplication est fait ci-contre.

La multiplication binaire est identique, en gardant en tête les règles ci-dessous.

$0 \times 0 = 0$ $0 \times 1 = 0$ $1 \times 0 = 0$ $1 \times 1 = 1$

$$\begin{array}{r} 8\ 9 \\ \times\ \ 1\ 2 \\ \hline 1\ 7\ 8 \\ 8\ 9\ \ \\ \hline 1\ 0\ 6\ 8 \end{array}$$

Grâce à ces informations, donner le résultat des multiplication binaires suivantes et vérifier les résultats en décimal :

1111×1 11010×10 1111×101 1001110×100101

4 Et à quoi tout cela nous sert dans la vie réelle ?

1. Dans la vie réelle, il existe plein de situations où nous utilisons une autre base que la base décimale. Essayer de trouver une situation de la vie réelle où nous utilisons chacune des bases suivantes :
   (a) La base 7 (b) La base 12 (c) La base 24 (d) La base 26 (e) La base 60
2. (a) Dans LibreOffice Calc, le nombre maximal de lignes utilisables est de 1 048 576. Pourquoi ?
   (b) Quel est le nombre maximal de colonnes utilisables ? Pourquoi ?
3. L'article suivant du Monde est paru le 4 décembre 2014 : `https://www.lemonde.fr/pixels/article/2014/12/04/le-gangnam-style-atteint-le-plafond-de-visionnage-de-youtube_4533826_4408996.html`
   Expliquer le problème qu'a causé à YouTube la chanson "Gangnam Style" du coréen Psy.