# Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Erwin Kreyszig, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Vol. 1, Tercera edición, Limusa, 1979.

Por ecuación diferencial ordinaria (ODE) se entiende una relación que contiene una o varias derivadas de una función no especificada $y(x)$; la relación también puede contener a la propia $y$, funciones dadas de $x$ y constantes.

El término ordinaria la distingue de una ecuación diferencial parcial, la cual contiene derivadas parciales de una función especificada de dos o más variables independientes.

Se dice que una ODE es de orden n si la máxima derivada de *y* en esa ecuación es la n-ésima derivada de *y* con respecto a *x*.

## Ecuaciones de variables separables

Una ODE de primer orden de la forma

$$g(y)y' = f(t)$$

se conoce como ecuación de variables separables.

Integrando se obtiene la solución general

$$g(y)dy = f(t)dt$$

$$\int g(y)dy = \int f(t)\, dt + c$$

1. Ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$y' = ky$$

Condición inicial

$$y(0) = y_0$$

Como la ecuación es de la forma

$$g(y)y' = f(t)$$

la solución exacta se encuentra usando el método de separación de variables (suponiendo y≠0)

$$y' = ky$$

$$\frac{1}{y}y' = k$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = k$$

$$\frac{dy}{y} = k\ dt$$

$$\ln|y| = kt + C$$

$$|y| = e^{kt+C} = \ e^{C}e^{kt}$$

La condición inicial implica

$$y = y_0 e^{kt}$$

2. Ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$y' = -2xy$$

Como la ecuación es de la forma

$$g(y)y' = f(x)$$

la solución exacta se encuentra usando el método de separación de variables (suponiendo y≠0)

$$y' = -2xy$$

$$\frac{dy}{y} = -2x\ dx$$

$$\ln|y| = -x^2 + C_1$$

$$|y| = e^{-x^2+C_1} = \ e^{-x^2}e^{C_1}$$

$$y = Ce^{-x^2}$$

## Ecuaciones diferenciales exactas

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

se dice que es exacta si existe una función $u(x,y)$, con segundas derivadas continuas tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \quad y \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Entonces la ecuación diferencial puede escribirse

$$du = 0$$

Integrando se obtiene la solución general

$$u(x,y) = C$$

1. Ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$xy' + y + 4 = 0$$

Se escribe la ecuación como

$$(y+4)dx + xdy = 0$$

Se ve que

$$M = y + 4$$

$$N = x$$

y se cumple

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

La solución se obtiene integrando primero

$$u = \int M\, dx + k(y)$$

$$u = \int (y+4)\, dx + k(y)$$

$$u = x(y+4) + k(y)$$

y derivando después

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + k'(y) = N$$

$$x + k'(y) = x$$

$$k'(y) = 0$$

$$k(y) = C_1$$

$$u = x(y + 4) + C_1 = C_2$$

$$y = \frac{C}{x} - 4$$

2. Ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{9 - 12t - 5x}{5t + 2x - 4}$$

Se escribe la ecuación como

$$(5t + 2x - 4)dx + (-9 + 12t + 5x)dt = 0$$

Se ve que

$$M = 5t + 2x - 4$$

$$N = -9 + 12t + 5x$$

y se cumple

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial x} = 5$$

La solución se obtiene integrando primero

$$u = \int M \, dx + k(t)$$

$$u = \int (5t + 2x - 4) \, dx + k(t)$$

$$u = 5tx - 4x + x^2 + k(t)$$

y derivando después

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 5x + k'(t) = N$$

$$5x + k'(t) = -9 + 12t + 5x$$

$$k'(t) == -9 + 12t$$

$$k(t) = -9t + 6t^2$$

$$u = 5tx - 4x + x^2 - 9t + 6t^2 = C$$

## Ecuaciones lineales

Una clase especial de ODE que pueden resolverse analíticamente son las ecuaciones de primer orden cuyos lados derechos son lineales en la variable $y$.

$$y' = g(t)y + h(t)$$

**Ecuaciones lineales homogéneas** $\boldsymbol{h(t) \equiv 0}$

Ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de primer orden:

$$y' = g(t)y$$

Separando variables se tiene

$$\frac{dy}{y} = g(t)dt$$

$$\ln|y| = \int g(t)\,dt + C$$

$$|y| = e^{\int g(t)dt+C} = e^{\int g(t)dt}e^{C}$$

$$y = Ce^{\int g(t)dt}$$

**Ecuaciones lineales no homogéneas - Factor de integración**

Ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden:

$$y' = g(t)y + h(t)$$

La solución se encuentra con un truco: se multiplican ambos lados de la ecuación por el "factor de integración"

$$e^{-\int g(t)dt}$$

Si el factor puede expresarse de manera sencilla, este método permite encontrar una solución explícita a la ODE lineal de primer orden.

Ejemplo:

$$y' = ty + t^3$$
$$y(0) = y_0$$

El factor de integración es

$$e^{-\int tdt} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

y su derivada es

$$-te^{-\frac{t^2}{2}}$$

Rearreglando la ecuación

$$y' - ty = t^3$$

Multiplicando ambos lados por el factor de integración

$$(y' - ty)e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}} t^3$$

$$(ye^{-\frac{t^2}{2}})' = e^{-\frac{t^2}{2}} t^3$$

$$ye^{-\frac{t^2}{2}} = \int e^{-\frac{t^2}{2}} t^3 \, dt$$

$$y = e^{\frac{t^2}{2}} \int e^{-\frac{t^2}{2}} t^3 \, dt$$

Substituyendo

$$u = \frac{t^2}{2} \; ; \; t^2 = 2u$$

$$du = t \, dt$$

$$y = e^{\frac{t^2}{2}} \int e^{-u} (2u) du$$

$$y = 2e^{\frac{t^2}{2}} \int ue^{-u} \, du$$

y consultando una tabla de integrales (https://es.wikipedia.org/wiki/Anexo:Integrales_de_funciones_exponenciales):

$$y = 2e^{\frac{t^2}{2}} (-ue^{-u} - e^{-u} + C)$$

$$y = 2e^{\frac{t^2}{2}} (-\frac{t^2}{2} e^{-\frac{t^2}{2}} - e^{-\frac{t^2}{2}} + C)$$

$$y = -t^2 - 2 + 2Ce^{\frac{t^2}{2}}$$

Como $y(0) = y_0$

$$y_0 = -2 + 2C$$
$$C = \frac{y_0 + 2}{2}$$

se tiene finalmente

$$y = (y_0 + 2)e^{\frac{t^2}{2}} - t^2 - 2$$

**Ecuaciones lineales no homogéneas - Variación de parámetros**

Existe otra manera interesante de obtener la solución general de la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden. Se ha visto que una solución de la ecuación homogénea correspondiente es

$$v(t) = e^{\int g(t)dt}$$

Usando esta función, tratemos de determinar una función $u(t)$ tal que

$$y(t) = u(t)v(t)$$

es la solución de la ecuación general no homogénea. Esta tentativa se basa en la forma de la solución general $Cv(t)$ de la ecuación homogénea y consiste en reemplazar el parámetro $C$ por una variable $u(t)$. Este método puede generalizarse a ecuaciones lineales de orden superior, donde tiene mucha importancia.

Substituyendo la solución tentativa en la ecuación general se obtiene

$$y' - g(t)y = h(t)$$
$$uv' + u'v - g(t)uv = h(t)$$

$$u'v + u(v' - g(t)v) = h(t)$$

Como $v$ es una solución de la ecuación homogénea, esto se reduce a

$$u'v = h(t)$$

$$u' = \frac{h(t)}{v}$$

La integración conduce a

$$u = \int \frac{h(t)}{v} dt + C$$

Ejemplo:

$$y' = ty + t^3$$
$$y(0) = y_0$$

La solución de la ecuación homogénea es

$$v(t) = e^{\int t dt}$$

$$v(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

y

$$y = e^{\frac{t^2}{2}} \int e^{-\frac{t^2}{2}} t^3 \, dt + C$$

Como en el caso anterior.