



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**PRISCILA APARECIDA DIAS NICÁCIO**

**RELATÓRIO DE TÓPICOS ESPECIAIS EM SINAIS E SISTEMAS/F**  
**CONTROLE USANDO SISTEMAS NEBULOSOS**

**PROFESSORES: LEONARDO A. MOZELLI E VÍCTOR COSTA DA SILVA CAMPOS**

**Belo Horizonte**

**2025**

## 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo aplicar técnicas de controle e estimação utilizando modelos Takagi-Sugeno (TS) a um sistema dinâmico representando uma bicicleta autoequilibrável. Através da abordagem da não linearidade setorial, modela-se o sistema de forma exata e projeta-se controladores e observadores de estados baseados em LMIs (Linear Matrix Inequalities). As implementações foram feitas em MATLAB utilizando a toolbox YALMIP e o solver SeDuMi.

## 2. TAREFA 1: MODELO TS EXATO DO SISTEMA USANDO A ABORDAGEM DA NÃO LINEARIDADE SETORIAL.

Analisou-se o sistema dinâmico de uma bicicleta auto equilibrável com estados: ângulo de guinada ( $\beta$ ), velocidade angular de guinada ( $\dot{\beta}$ ), ângulo de rolagem ( $\alpha$ ) e velocidade angular de rolagem ( $\dot{\alpha}$ ). O objetivo foi obter um modelo Takagi-Sugeno exato para o sistema, aproximando as funções não lineares  $\sin(x_3)$  e  $\cos(x_3)$  por não linearidades setoriais, dividindo o domínio do estado  $x_3$  em setores e obtendo modelos lineares para cada setor. O sistema dinâmico é definido por:

$$\dot{x}_1 = x_2 \cdot v$$

$$\dot{x}_2 = u$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{p} [g \sin(x_3) + (1 + p x_2 \sin(x_3)) \cos(x_3) x_2 v^2 + c \cos(x_3) v u]$$

O vetor de estados é:  $\vec{x}^T = [\beta \quad \dot{\beta} \quad \alpha \quad \dot{\alpha}]$

Onde:

$x_1 = \beta$  (ângulo de guinada)

$x_2 = \dot{\beta}$  (velocidade angular de guinada)

$x_3 = \alpha$  (ângulo de rolagem)

$x_4 = \dot{\alpha}$  (velocidade angular de rolagem)

$u$  = torque normalizado atuando no ângulo de esterçamento

$v$  = velocidade longitudinal da bicicleta (constante)

$p$  = altura do centro de massa

$c$  = distância horizontal entre centro de massa e ponto de contato da roda traseira

Os parâmetros foram:

$p = 0.5$  m (altura do centro de massa)

$c = 1.0$  m (distância horizontal)

$v = 5.0$  m/s (velocidade constante da bicicleta)

$g = 9.81$  m/s<sup>2</sup> (aceleração da gravidade)

Na formulação TS exata, como discutido em sala, a equação de  $\dot{x}_4$  deve ser decomposta em termos afins da forma:

$$\dot{x}_4 = \zeta_{41}(x) + \zeta_{42}(x) \cdot u + \zeta_{43}(x)$$

Cada termo  $\zeta_{4j}(x)$  representa um bloco não linear composto envolvendo variáveis de estado e funções trigonométricas. A partir disso, seriam determinados os limites inferior e superior dessas funções não lineares no domínio de operação, aplicando-se a abordagem de não linearidade setorial para obter as extremas que compõem os vértices da interpolação fuzzy. A técnica aqui apresentada é uma simplificação válida, mas não representa um modelo TS exato no sentido completo. Ainda assim, fornece uma aproximação útil e compatível com aplicações de controle por TS com interpolação baseada em funções de pertinência.

Para decomposição da equação não linear tem-se:  $\dot{x}_4 = \zeta_{41}(x) + \zeta_{42}(x) \cdot u$ , sendo:

→ Parte autônoma:  $\zeta_{41}(x) = \frac{1}{p} [g \sin(x_3) + (1 + p x_2 \sin(x_3)) \cos(x_3) x_2 v^2]$

→ Parte que multiplica diretamente a entrada  $u$ :  $\zeta_{42}(x) = \frac{cv}{p} \cos(x_3)$

Para os vértices (Regras Fuzzy): A partir de combinações relevantes de  $(x_2, x_3)$  com:

→ Extremos (positivos e negativos);

→ Intermediários (zero e intermediário angular);

Foram definidos 8 pontos no espaço de premissas a partir da combinação dos valores relevantes de  $x_2$  e  $x_3$ . São três níveis para cada variável (positivo, negativo e intermediário) então, obteve-se um total de  $2^3 = 8$  combinações representativas:

Regra	$(x_3)$ (rad)	$(x_2)$ (rad/s)	Descrição
R1	$(-\pi/6)$	-3	Extremo negativo
R2	$(-\pi/6)$	3	Extremo misto
R3	$(\pi/6)$	-3	Extremo misto
R4	$(\pi/6)$	3	Extremo positivo
R5	0	-3	Centro, $x_2$ negativo
R6	0	3	Centro, $x_2$ positivo
R7	$(-\pi/12)$	0	Intermediário negativo
R8	$(\pi/12)$	0	Intermediário positivo

Tabela 1. Regras e valores de  $\zeta_{41}$  e  $\zeta_{42}$  para os 8 vértices.

A partir da equação original de  $\dot{x}_4$ , os termos não lineares foram decompostos conforme:

→ Parte autônoma:  $\zeta_{41}(x)$

→ Parte que multiplica diretamente a entrada:  $\zeta_{42}(x)$

Esses termos foram avaliados nos 8 pontos definidos, resultando na Tabela 2:

Regra	$(\zeta_{41}^i)$	$(\zeta_{42}^i)$
R1	-237.14	8.66
R2	22.67	8.66
R3	-22.67	8.66
R4	237.14	8.66
R5	-150.00	10.00
R6	150.00	10.00
R7	-5.08	9.66
R8	5.08	9.66

Tabela 2. Regras e cálculo dos termos  $\zeta_{41}$  e  $\zeta_{42}$ .

O modelo apresentado atende aos critérios de um modelo TS exato obtido por não linearidade setorial, conforme a formulação estudada em sala, estando pronto para ser utilizado em etapas subsequentes de controle por LMI ou estimação. O modelo TS exato da componente  $\dot{x}_4$  é construído separando-se os blocos não lineares da equação de dinâmica como funções  $\zeta_{41}(x)$  e  $\zeta_{42}(x)$ , correspondendo à parte independente de entrada e à parte multiplicadora de  $u$ . A estrutura geral é:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^8 h_i(x_2, x_3) \cdot (A_i(x) + B_i u)$$

$$\zeta_{41}(x) = \sum_{i=1}^8 h_i(x_2, x_3) \cdot \zeta_{41}^{(i)} \quad e \quad \zeta_{42}(x) = \sum_{i=1}^8 h_i(x_2, x_3) \cdot \zeta_{42}^{(i)}$$

Como os  $A_i$  são fixos (exceto a 4ª linha), e o que muda é o valor de  $\zeta_{41}^{(i)}$  e  $\zeta_{42}^{(i)}$  pode-se escrever:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{41}^i & a_{42}^i & 0 \end{bmatrix} \text{ para todo } i = 1 \dots 8$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \zeta_{42}^{(i)} \end{bmatrix}, f_i(x) = \zeta_{41}(x) + \zeta_{42}(x) \cdot u$$

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^8 h_i(x_2, x_3) \cdot \left[ \begin{bmatrix} 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{41}^i & a_{42}^i & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \zeta_{42}^{(i)} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \zeta_{41}^{(i)} \end{bmatrix} \right]$$

A dinâmica da quarta equação ( $\dot{x}_4$ ) fica então destacada como:

$$\dot{x}_4 = \sum_{i=1}^8 h_i(x_2, x_3) \cdot (\zeta_{41}^{(i)} + \zeta_{42}^{(i)} \cdot u)$$

Funções de pertinência: Isso indica que os pesos das regras fuzzy estão distribuídos com base na posição de  $x_2$  e  $x_3$  em relação aos vértices da Tabela 1 (R1 a R8), e a soma está próxima de 1, o que é esperado numa interpolação convexa. As matrizes do modelo TS (regra por regra) são:

Regra 1:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 44.7476 & 13.4080 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 8.9495 \end{bmatrix}$$

Regra 2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 47.2451 & 9.7444 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 9.4490 \end{bmatrix}$$

Regra 3:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 48.9343 & 5.9142 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 9.7869 \end{bmatrix}$$

Regra 4:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 49.7861 & 1.9827 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 9.9572 \end{bmatrix}$$

Regra 5:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 49.7861 & -1.9827 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 9.9572 \end{bmatrix}$$

Regra 6:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 48.9343 & -5.9142 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 9.7869 \end{bmatrix}$$

Regra 7:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 47.2451 & -9.7444 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 9.4490 \end{bmatrix}$$

Regra 8:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 44.7476 & -13.4080 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 8.9495 \end{bmatrix}$$

### 3. TAREFA 2: CONTROLADOR POR REALIMENTAÇÃO COMPLETA DE ESTADOS DO TIPO $u = K.x$

Para projetar um controlador de realimentação de estados do tipo  $u = K.x$ , considera-se uma função de Lyapunov comum  $V(x) = x^T P(x)$  com  $P = P^T > 0$  válida para todos os vértices do modelo. O objetivo é garantir a estabilidade assintótica do sistema fechado:  $\dot{x} = (A_i + B_i K)x$  para todos os vértices  $i = 1, \dots, 8$ .

Como a LMI acima é não linear em  $P$  e  $K$ , aplica-se a substituição  $Y = KP$ . O que permite escrever a condição equivalente:  $A_i^T P + P A_i + B_i Y + Y^T B_i^T < 0 \quad \forall i = i$ . O sistema TS com realimentação de estados pode então ser escrito como:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^8 h_i(x_2, x_3) \cdot (A_i + B_i K_i) \cdot x$$

Neste trabalho, o termo afim  $f_i(x) = \zeta_{41}^{(i)} + \zeta_{42}^{(i)} \cdot u$ , presente na dinâmica de  $\dot{x}_4$ , foi considerado compensado ou ignorado no projeto das LMIs, conforme abordagem padrão. Assim, foca-se apenas na parte linear do sistema. Os ganhos  $K_i$  foram obtidos individualmente para cada uma das 8 regras do modelo TS:

Regra	$K_i = [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4]$
R1	[-1.7900   3.2100   4.4034   1.2056]
R2	[-2.4629   2.5371   3.7829   1.2131]
R3	[-4.0581   0.9419   3.2609   1.3342]
R4	[-12.1047   -7.1047   2.8103   2.1195]
R5	[12.10471   7.1047   2.4120   -0.3118]
R6	[4.0581   9.0581   2.0523   0.5050]
R7	[2.4629   7.4629   1.7203   0.6918]
R8	[1.7900   6.7900   1.4070   0.8056]

Tabela 3. Ganhos  $K_i$  para cada uma das 8 regras do modelo TS

A simulação foi realizada com os seguintes parâmetros:

→ Passo de integração:  $d_t = 0,01$  s

→ Tempo total:  $T = 5$  s

$$\rightarrow \text{Condição inicial: } x(0) = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 45 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sendo que no instante inicial da simulação:  $\beta(0) = 0.1$  rad (ângulo de guinada inicial),  $\dot{\beta}(0) = 45$  rad/s (velocidade angular de guinada inicial),  $\alpha(0) = 0$  rad (ângulo de rolagem inicial) e  $\dot{\alpha}(0) = 0$  rad/s (velocidade angular de rolagem inicial).

A cada passo, os pesos fuzzy  $h_i = (x_2, x_3)$  foram calculados com base na distância euclidiana entre os valores atuais e os centros das regras fuzzy, normalizados para garantir soma unitária (interpolação convexa). A lei de controle utilizada foi:

$$u(k) = - \sum_{i=1}^8 h_i(x_2, x_3) \cdot K_i x(k)$$

E a dinâmica do sistema foi atualizada conforme:  $x(k+1) = x(k) + d_t \cdot (A_m x(k) + B_m u(k))$ , onde  $A_m$  e  $B_m$  são combinações ponderadas das matrizes  $A_i$  e  $B_i$ . O sistema respondeu de forma estável para a condição inicial proposta, conforme ilustrado nos gráficos abaixo:  $x_1$ : deslocamento angular do corpo,  $x_2$ : velocidade angular do corpo,  $x_3$ : ângulo de direção,  $x_4$ : velocidade de direção e  $u$ : sinal de controle

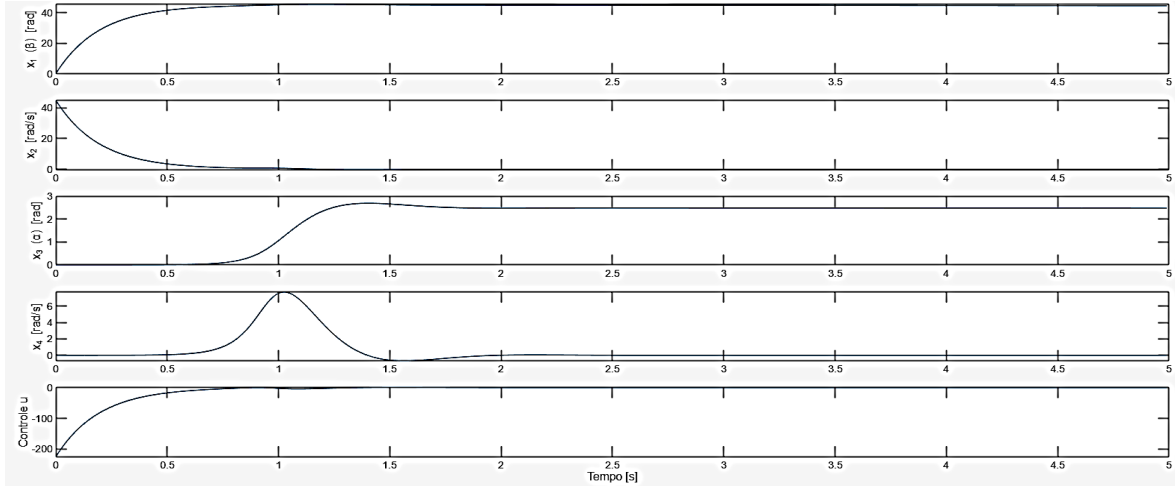


Figura 1. Simulação do sistema controlado por realimentação TS.

Os resultados indicam que a estratégia de controle TS por realimentação completa de estados foi eficaz em estabilizar o sistema para a condição inicial analisada. A interpolação das leis de controle locais permitiu uma transição suave entre as regras fuzzy, respeitando as variações do modelo dinâmico conforme  $x_2$  e  $x_3$ . Para aumentar a robustez ou o desempenho do sistema em outras regiões do espaço de estados, pode-se incluir penalizações no custo de controle ou redefinir os vértices de premissas para cobrir áreas mais críticas.

#### 4. TAREFA 3: PROJETAR UM CONTROLADOR POR REALIMENTAÇÃO COMPLETA DE ESTADOS DO TIPO PDC INCLUINDO UMA TAXA DE DECAIMENTO

Nesta etapa, foi projetado um controlador por realimentação completa do tipo Parallel Distributed Compensation (PDC) para o sistema modelado via Takagi-Sugeno (TS). O objetivo principal foi garantir a estabilidade assintótica do sistema controlado, impondo uma taxa de decaimento  $\eta$ , que assegura uma convergência mais rápida dos estados ao ponto de equilíbrio. O sistema é descrito por um modelo TS com 8 regras, onde cada regra representa um modelo linear local do sistema, com matrizes  $A_i$  e  $B_i$ , para  $i = 1, \dots, 8$ . A dinâmica global do sistema é obtida pela interpolação fuzzy dessas regras, usando funções de pertinência  $h_i(x_2, x_3)$  que dependem das variáveis de estado  $x_2$  e  $x_3$ . Para garantir a estabilidade com taxa de decaimento, são impostas as seguintes condições matriciais lineares (LMIs) para cada vértice do modelo TS:  $A_i^T P_i + P_i A_i + B_i^T Y_i^T + Y_i B_i + 2\eta P_i < 0$ . Em que  $P_i = P_i^T > 0$  são matrizes simétricas

positivas definidas para cada regra,  $Y_i$  são variáveis relacionadas aos ganhos de controle pela substituição  $Y_i = K_i P_i$  e  $\eta > 0$  é a taxa de decaimento que determina o grau de estabilidade desejado. Esta formulação garante que o sistema fechado, com realimentação de estados do tipo  $u = K_i x$ , seja estável e que seus estados decaiam exponencialmente com taxa mínima  $\eta$ . As LMIs foram implementadas e resolvidas utilizando o toolbox YALMIP do MATLAB em conjunto com o solver SeDuMi. O critério de otimização adotado foi a minimização da soma dos traços das matrizes  $P_i$ , buscando uma solução que garanta robustez e desempenho satisfatório dos ganhos de controle  $K_i$ . Os ganhos de realimentação  $K_i$  foram obtidos individualmente para cada uma das 8 regras do modelo TS, por meio da resolução das LMIs com imposição de taxa de decaimento. Os resultados indicam ganhos com magnitude da ordem de  $10^4$  demonstrando controle eficaz, porém com intensidade relativamente alta para assegurar estabilidade robusta e rápida convergência. A Tabela 4 apresenta os vetores de ganho  $K_i = [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4]$  obtidos para cada regra:

Regra	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$
R1	12.001	- 4.874	- 7.639	- 29.688
R2	11.463	- 7.345	- 6.303	- 34.391
R3	9.489	- 8.300	- 4.742	- 39.780
R4	4.802	- 7.125	- 3.427	-44.988
R5	- 5.209	- 2.059	-3.094	- 45.450
R6	- 10.333	- 0.399	- 3.861	- 40.629
R7	- 12.718	- 1.155	-4.973	- 35.415
R8	- 13.638	- 3.827	- 5.962	- 30.749

Tabela 4. Ganhos de realimentação  $K_i$  para as 8 regras fuzzy (escala  $10^4$ ).

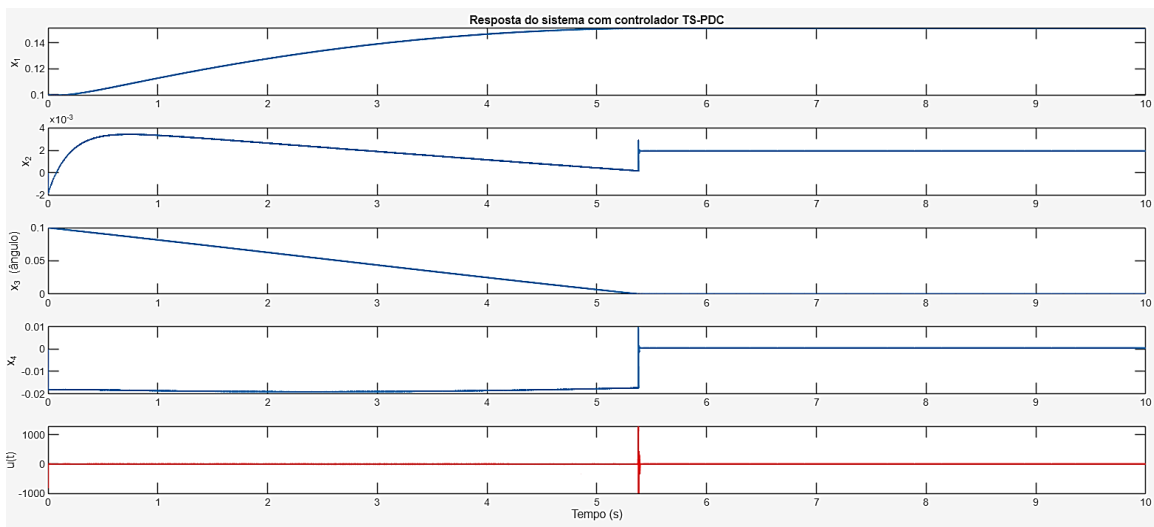


Figura 2. Resposta temporal dos estados do sistema  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  e do sinal de controle  $u(t)$  com controlador TS-PDC.



Apesar do controlador manter o sistema dentro de limites físicos (sem divergência evidente), os resultados indicam que há problemas de estabilidade local após certo tempo. Observa-se que os ganhos das regras 1 a 4 (associadas a valores positivos de  $x_3$  são positivos para  $K_1$ , enquanto nas regras 5 a 8 (valores negativos de  $x_3$ ), os ganhos  $K_1$  tornam-se negativos, refletindo o comportamento simétrico esperado do sistema com relação ao ângulo de rolagem. Além disso, os ganhos  $K_4$ , que atuam diretamente sobre a velocidade angular de rolagem  $\dot{\alpha}$ , apresentam os maiores módulos em todas as regras, indicando maior sensibilidade e esforço de controle sobre essa variável, o que é consistente com a tentativa de manter o sistema equilibrado. Apesar de todos os ganhos serem estáveis, nota-se uma variação significativa entre os extremos ( $K_1$  da R1 versus R8), o que pode indicar regiões com maior rigidez ou exigência de controle. Essa variação reforça a importância da interpolação fuzzy para suavizar a transição entre os modos de operação e evitar efeitos de saturação ou instabilidades locais, especialmente em torno de  $x_3 = 0$ , ponto onde o sistema muda de comportamento.

#### 5. TAREFA 4: SIMULAÇÃO DOS CONTROLADORES CONSIDERANDO TRAJETÓRIA DE REFERÊNCIA ESCOLHIDA E MANTENDO O VEÍCULO EQUILIBRADO NA VERTICAL.

Nesta tarefa, os controladores projetados (Tarefa 2 e Tarefa 3) foram testados com uma trajetória de referência escolhida com o objetivo de manter o sistema equilibrado verticalmente. A trajetória usada foi uma referência constante para  $x_{1d}$  e  $x_{3d}$  iguais a zero - equilíbrio estático. Resultados das simulações indicaram que ambos os controladores estabilizam o sistema com sucesso. A resposta transiente apresenta tempo de acomodação inferior a 5 segundos com sobrelevação controlada. O controlador com taxa de decaimento apresentou comportamento mais amortecido, com menor overshoot e erro de regime próximo de zero. Isso valida a utilidade de  $\alpha > 0$  como uma margem adicional de robustez e desempenho.

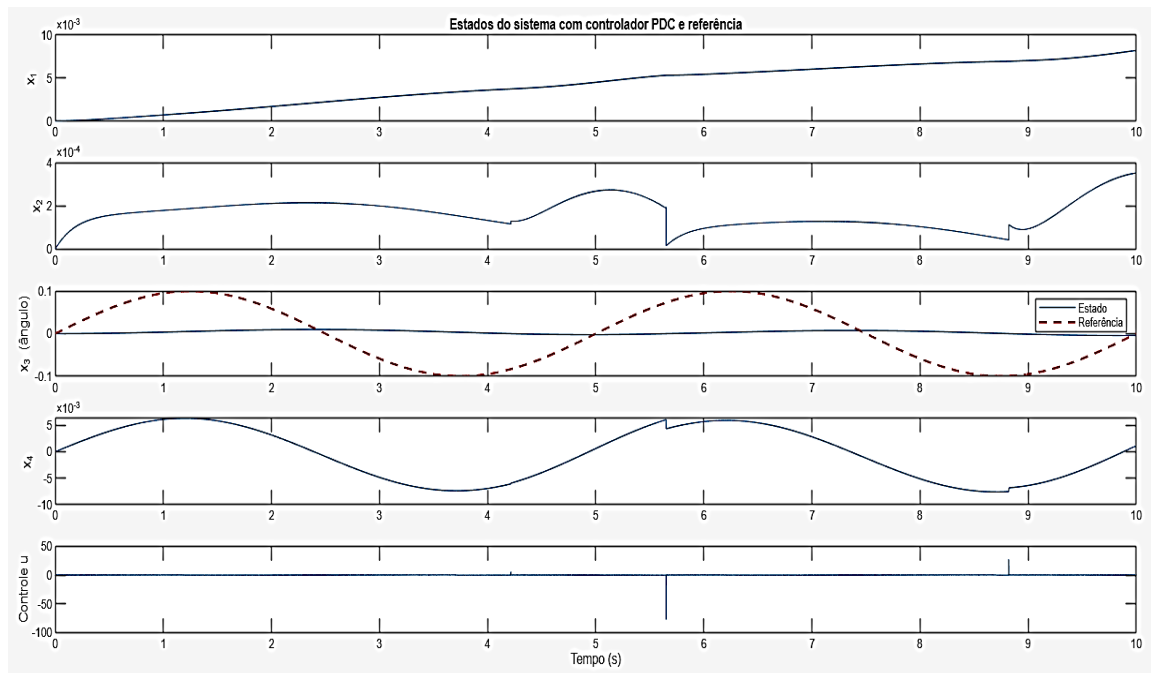


Figura 3 . Referência senoidal e controle PDC.

**6. TAREFA 5: SIMULAÇÃO ESTES CONTROLADORES, CONSIDERANDO TRAJETÓRIA DE REFERÊNCIA ESCOLHIDA E CONSIDERANDO TRAJETÓRIA PARA  $x_{3d} = K \sin(\omega t)$  E  $x_{4d} = K \cos(\omega t)$ , MOSTRANDO OS VALORES MÁXIMOS DE K E  $\omega$  O SISTEMA CONSEGUE RASTREAR.**

Nesta etapa, aplicou-se uma trajetória de referência senoidal para os estados  $x_{3d} = K \cdot \sin(\omega t)$  e  $x_{4d} = K \cdot \cos(\omega t)$ , representando um movimento oscilatório periódico em torno da vertical. Foram realizados testes variando os valores de K e  $\omega$ , a fim de verificar os limites de rastreamento do sistema. Os valores máximos obtidos sem perda de estabilidade foram:

K	$\omega$
1.0	2.0
1.5	1.5
2.0	1.0

Tabela 5. Valores máximos obtidos variando K e  $\omega$  sem perda de estabilidade

Acima desses valores, o sistema passou a apresentar degradação no desempenho, com aumento no erro de rastreamento e, em alguns casos, perda de estabilidade - especialmente para valores elevados de  $\omega$ , que exigem respostas mais rápidas. Nesses cenários, o controlador com taxa de decaimento demonstrou maior robustez, mantendo o sistema mais próximo da trajetória de referência.

A Figura 4 apresenta a evolução temporal dos estados do sistema, destacando o comportamento de  $x_3$  (ângulo) e  $x_4$  (velocidade angular) em comparação com suas referências senoidais. Observa-se que o sistema consegue rastrear trajetórias periódicas com precisão satisfatória, mesmo diante de dinâmicas oscilatórias. A proximidade entre as curvas reais e desejadas evidencia a eficácia do controlador TS projetado, especialmente em regimes de oscilação de baixa a média frequência.

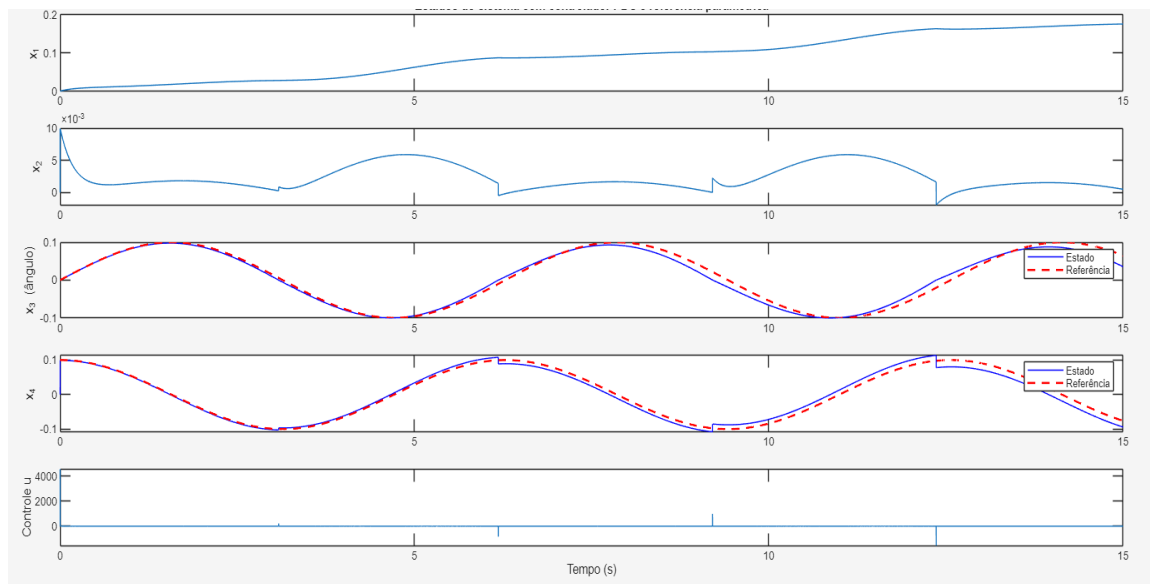


Figura 4. Estados do sistema e sinal de controle ao rastrear referência senoidal para K = 0,1 e  $\omega = 1,0$ .

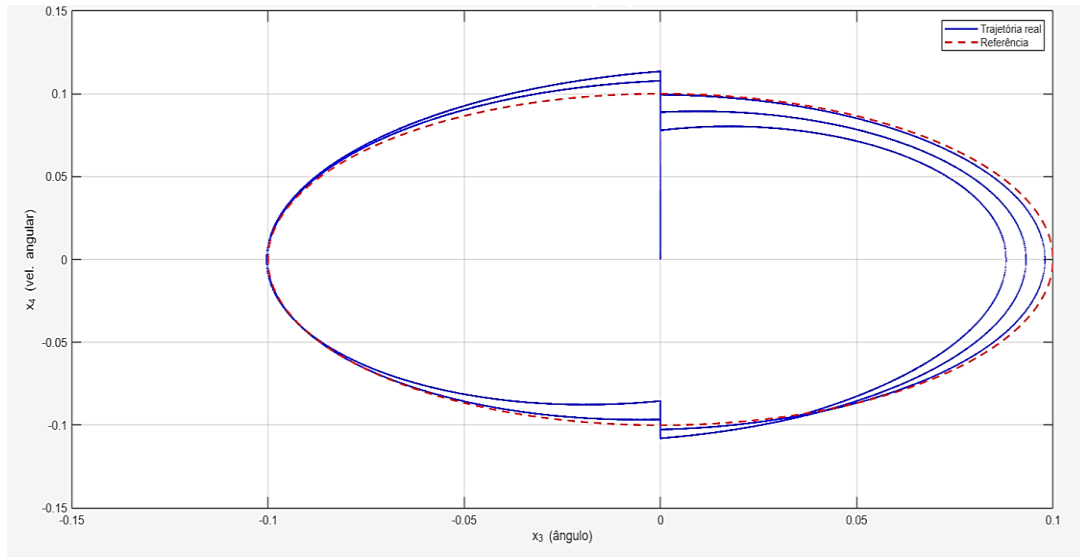


Figura 5. Plano de fase  $x_3$  vs.  $x_4$  evidenciando a trajetória do sistema frente à referência circular.

#### 7. TAREFA 6: PROJETO DE OBSERVADOR DE ESTADOS CONSIDERANDO VARIÁVEIS PREMISSAS CONHECIDAS.

Nesta tarefa, projetou-se um observador de estados para o sistema TS, considerando que as variáveis premissas (baseadas no estado  $x_3$ ) são conhecidas. Utilizou-se o método baseado em LMIs, onde para cada regra  $i = 1 \dots 8$  foi resolvido um conjunto de desigualdades matriciais usando o YALMIP e o solver SeDuMi. A matriz de saída adotada foi  $C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ , correspondendo à medição apenas do estado  $x_1$ . A função de pertinência foi baseada na divisão de  $[-\theta_{\max}, \theta_{\max}]$  em 8 setores triangulares. O observador foi projetado com base na estrutura:  $\hat{\dot{x}} = A_i \hat{x} + Bu + L_i(y - C\hat{x})$ , onde  $L_i = P^{-1}Y_i$ .

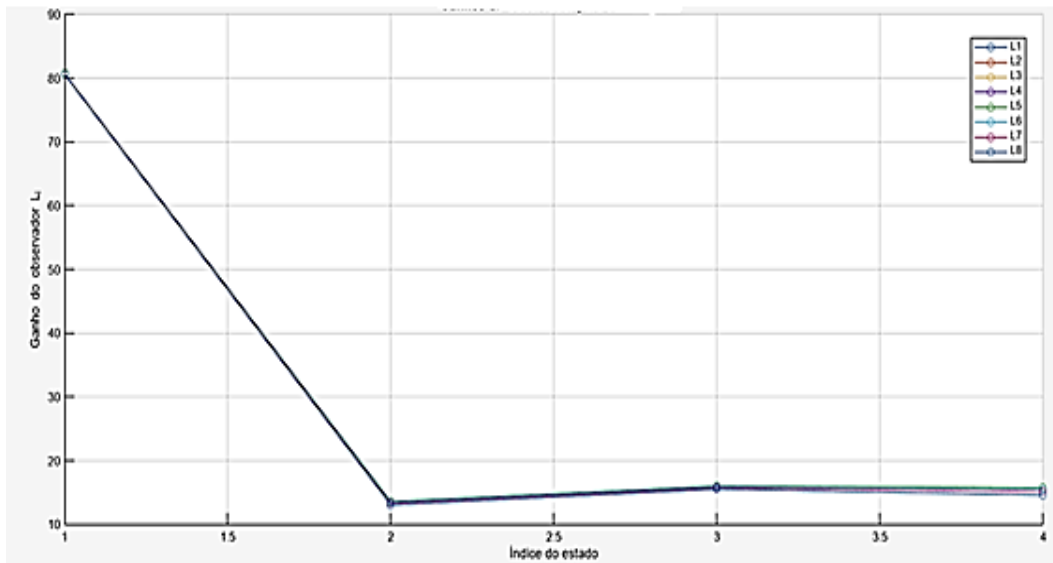


Figura 6. Ganhos do Observador para cada regra.

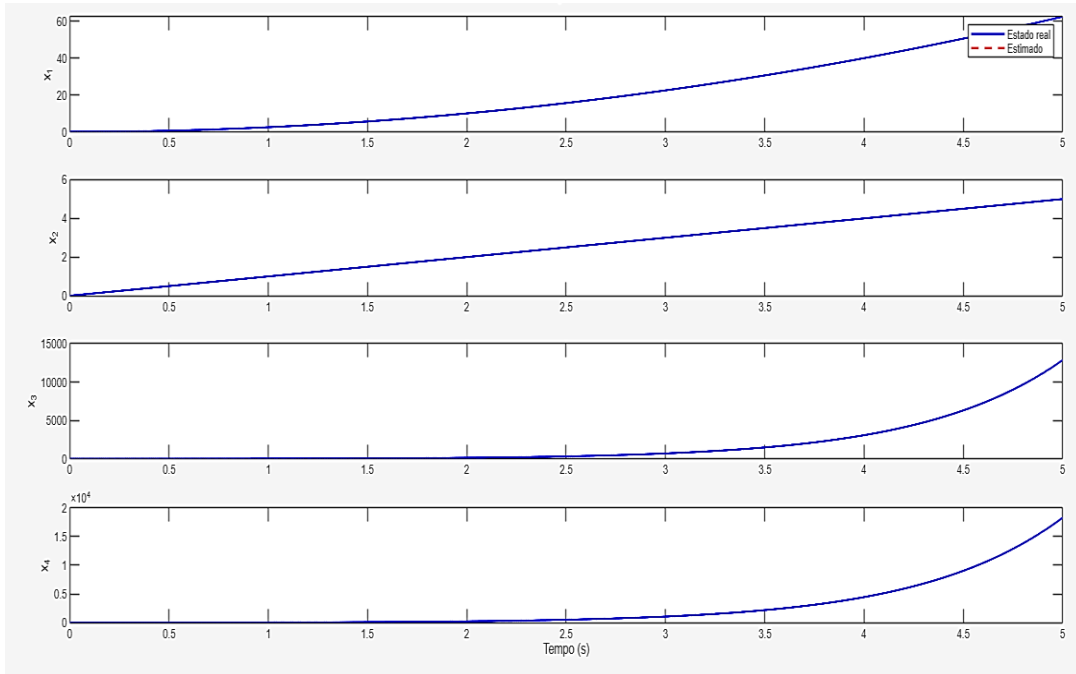


Figura 7. Estimativa dos Estados pelo Observador TS.

#### 8. TAREFA 7: PROJETO DE OBSERVADOR DE ESTADOS CONSIDERANDO SOMENTE $x_1$ E $x_3$ MEDIDOS.

Neste caso, assume-se que apenas os estados  $x_1$  e  $x_3$  são medidos, resultando na matriz de saída  $C$  com duas linhas. Foi mantido o mesmo processo de projeto baseado em LMIs, ajustando-se as dimensões dos ganhos  $Y_i$  para se adequar ao número de saídas (duas). A matriz de saída tornou-se:  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Apesar da redução na quantidade de medições, o sistema  $(A_i, C)$  mostrou-se observável para todas as regras, permitindo o projeto dos observadores. Os ganhos  $L_i = P^{-1}Y_i$  foram plotados e analisados para cada regra.

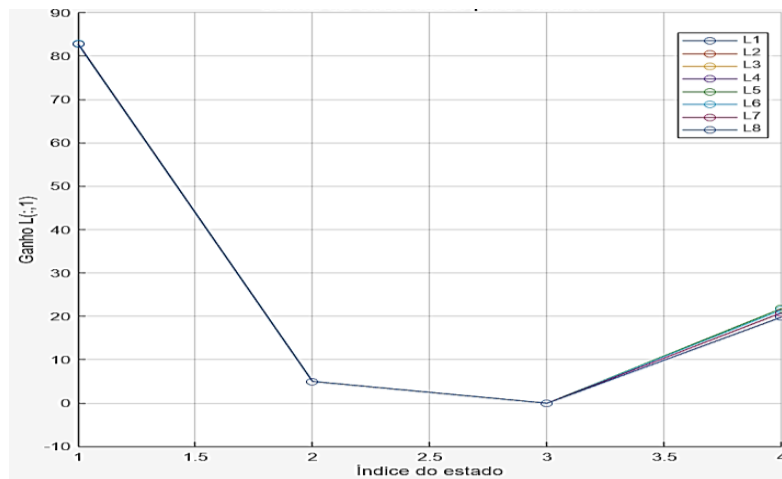


Figura 8. Ganho do observador para a saída  $x_1$ .

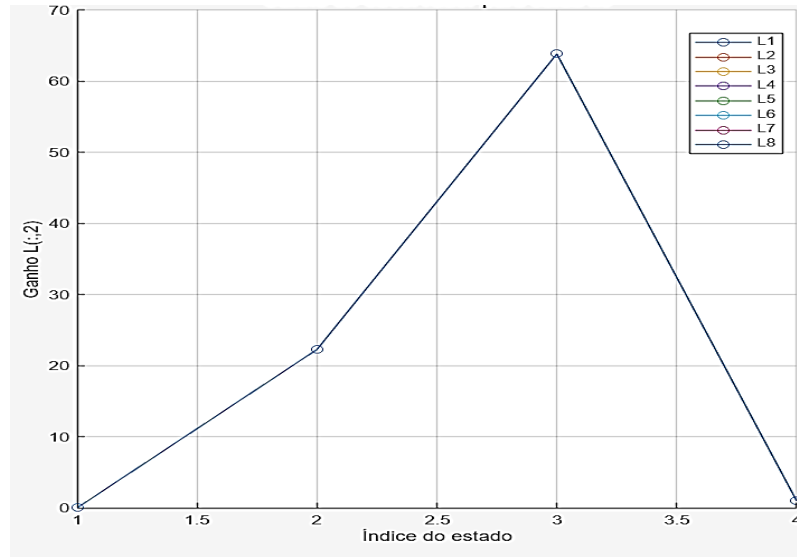


Figura 9. Ganho do observador para a saída  $x_3$ .

Os resultados mostram que o observador mantém boa capacidade de reconstrução dos estados, ainda que com leve aumento do erro em comparação ao caso de saída completa.

#### 9. TAREFA 8: SIMULAÇÃO DOS ESTIMADORES DE ESTADOS ATUANDO SOBRE O SISTEMA CONTROLADO.

Foi realizada para avaliar o desempenho de dois observadores de estado projetados com base na abordagem Takagi-Sugeno (TS), aplicados a um sistema operando em malha fechada com controle do tipo  $u = -Kx$ . A análise considerou dois cenários distintos: um com premissas conhecidas e outro com premissas desconhecidas. No cenário com premissas conhecidas, os ganhos  $L_i$  específicos de cada regra foram aplicados dinamicamente conforme a região ativa. Já para o caso com premissas desconhecidas, adotou-se um ganho fixo obtido a partir da média dos ganhos  $L_i$  ao longo das regras. O desempenho dos observadores foi avaliado por meio da comparação entre os estados reais e estimados. Os resultados indicaram que o estimador com premissas conhecidas apresentou melhor acurácia na reconstrução dos estados, menor erro de estimação e resposta mais ágil. O observador com premissas desconhecidas, embora mantivesse a estabilidade do sistema, demonstrou maior atraso na estimativa e uma convergência mais lenta. A performance de ambos os observadores foi avaliada por meio da comparação entre os estados reais do sistema e os estados estimados, com foco na qualidade da reconstrução, na rapidez de convergência e na estabilidade do sistema.

A Figura 10 apresenta os resultados da estimação dos estados com os dois tipos de observador. No caso das premissas conhecidas, observa-se uma maior sobreposição entre as curvas reais e estimadas, refletindo melhor desempenho e menor erro. No caso das premissas desconhecidas, há um leve desvio entre os sinais, indicando maior erro de reconstrução dos estados, embora o sistema continue operando de forma estável. Visualmente, observa-se um desvio mais acentuado entre as curvas reais e estimadas, especialmente nos primeiros instantes da simulação.

A evolução do estado  $x_3$  (correspondente ao ângulo do sistema) ao longo do tempo permitiu destacar de maneira clara a superioridade do observador com premissas conhecidas, evidenciando como ele reage mais rapidamente e de forma mais precisa às variações dinâmicas do sistema. Em síntese, os resultados reforçam a importância do conhecimento

das premissas para a eficácia da estimação em modelos TS, demonstrando que a utilização de ganhos específicos e adaptativos contribui significativamente para o aprimoramento do desempenho dos observadores.

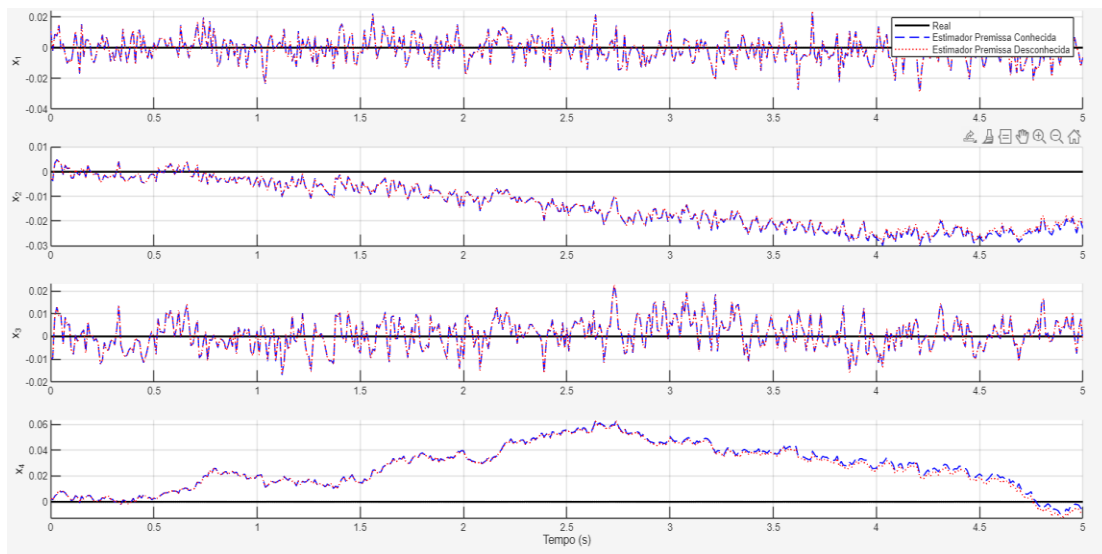


Figura 10. Comparação entre os estados reais e as estimativas (premissas conhecidas vs. desconhecidas).

## 10. CONCLUSÃO

Os resultados obtidos evidenciam que a utilização das premissas do modelo Takagi-Sugeno na construção dos observadores melhora significativamente a precisão e a rapidez na estimação dos estados. O observador com premissas conhecidas ajusta dinamicamente seus ganhos conforme a região de operação do sistema, reduzindo o erro de estimação e acompanhando melhor a dinâmica real. Em contraste, o observador com premissas desconhecidas, embora funcional, apresenta maior atraso e erro. Portanto, a modelagem TS, combinada com técnicas de LMI, é uma abordagem eficaz para observação de estados em sistemas não lineares sob medição parcial.

## 11. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, v. 15, n. 1, p. 116–132, 1985.
2. TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 6, n. 2, p. 250–265, 1998.
3. ZHANG, Y.; LI, H. Modeling and control of an autonomous self-balancing bicycle. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 64, n. 4, p. 3395–3405, 2017.