



**Universidade Federal de Uberlândia  
Faculdade de Engenharia Mecânica**

**Bacharelado em Engenharia Mecânica**

**INTRODUÇÃO À MODELAGEM  
MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL DE  
ESCOAMENTOS LAMINARES DE FLUIDOS  
NEWTONIANOS E NÃO-NEWTONIANOS COM  
EFEITOS TÉRMICOS**

**Luís Eduardo Silva Borges**

**Uberlândia-MG  
2024**

**Luís Eduardo Silva Borges**

**INTRODUÇÃO À MODELAGEM  
MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL DE  
ESCOAMENTOS LAMINARES DE FLUIDOS  
NEWTONIANOS E NÃO-NEWTONIANOS COM  
EFEITOS TÉRMICOS**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Bacharelado em Engenharia Mecânica como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silvera Neto  
Coorientedor: Prof. Dr. Rafael Alves Figueiredo

**Uberlândia-MG  
2024**

Ficha Catalográfica Online do Sistema de Bibliotecas da UFU  
com dados informados pelo(a) próprio(a) autor(a).

B732	Borges, Luís Eduardo Silva, 2001-
2024	INTRODUÇÃO À MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL DE ESCOAMENTOS LAMINARES DE FLUIDOS NEWTONIANOS E NÃO-NEWTONIANOS COM EFEITOS TÉRMICOS [recurso eletrônico] /
Luís Eduardo Silva Borges. - 2024.	
Orientador: Aristeu da Silveira Neto.	
Coorientador: Rafael Alves Figueiredo.	
Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) -	
Universidade Federal de Uberlândia, Graduação em	
Engenharia Mecânica.	
Modo de acesso: Internet.	
Inclui bibliografia.	
1. Engenharia mecânica. I. Silveira Neto, Aristeu da , 1955-, (Orient.). II. Figueiredo, Rafael Alves,1986-, (Coorient.). III. Universidade Federal de Uberlândia. Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.	
CDU: 621	

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de acordo com o AACR2:

Gizele Cristine Nunes do Couto - CRB6/2091  
Nelson Marcos Ferreira - CRB6/3074



**Universidade Federal de Uberlândia  
Faculdade de Engenharia mecânica**

**Coordenação do Curso de Bacharelado em  
Engenharia Mecânica**

A banca examinadora, conforme abaixo assinado, certifica a adequação deste trabalho de conclusão de curso para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Uberlândia, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 20\_\_\_\_

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Aristeu da Silvera Neto

---

Prof. Dr. Rafael Alves Figueiredo

---

Prof. Dr. Elie Luis Martínez Padilla

---

Prof. Dr. João Rodrigo Andrade

---

Eng. Thiago Assis da Silva

**Uberlândia-MG  
2024**

# **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais Rejane Aparecida e Wilson Borges, por não medirem esforços para tornar possível minha graduação e todos os sonhos que já tive e ainda vou ter.

À minha irmã, Maria Clara, que sempre esteve ao meu lado e fez de tudo para me apoiar nos momentos em que precisei.

Ao meu orientador, professor Aristeu, por sua dedicação ao ensino e a pesquisa, por sempre estar disposto a sanar minhas dúvidas, por despertar meu interesse pela área de mecânica dos fluidos e pelo exemplo que é a todos os seus alunos.

Ao meu coorientador, professor Rafael, por sua dedicação, pelo bom humor, companheirismo e por sempre estar disposto e disponível para ajudar de todas as formas possíveis.

Aos meus professores do curso de Engenharia Mecânica, em especial aos professores Héricio Cândido e Jocelino Sato, que além de manterem vivo meu interesse pelas ciências exatas contribuiram para minha formação como engenheiro e como ser humano.

Aos meus amigos do ensino médio, Adrio, Breno, Enoch, Keldson, Lucas e Marcus. Por manterem essa amizade mesmo depois do ensino médio e pelo tempo de descontração.

Aos meus amigos de graduação, Saulo, João e Emelly. Pelas risadas, ajuda e conversas ao longo do curso.

Aos amigos que fiz durante esta jornada, incluindo Vitor, Thiago, Ingrid, Letícia, Patrícia, Verônica e todos da equipe do LAMAU, pela parceria e apoio.

Ao meu amigo Vinícius Zils, pelo companheirismo e amizade.

À Maria Clara Agliardi Oliveira, pelo amor, carinho e companheirismo durante todos esses anos de curso.

À todos que me ajudaram nesta jornada.

*"O sonho de uma pessoa nunca acaba."*  
— Marshall D. Teach

# RESUMO

Um dos principais desafios no contexto de aplicação dos métodos de Dinâmica dos Fluidos Computacional (*DFC*), é a compreensão dos métodos e modelos utilizados nos diferentes tipos de escoamentos simulados. Diante deste contexto, no presente trabalho apresenta-se a metodologia utilizada para a construção de um código computacional voltado à solução de escoamentos newtonianos com e sem a transferência de energia térmica, além de escoamentos não-newtonianos. Inicialmente, apresentou-se um detalhamento a respeito do modelo físico dos escoamentos utilizados para validar as rotinas implementadas, após ter detalhado as equações para modelar os problemas abordados no presente trabalho, trazendo um breve contexto histórico dos mesmos, bem como as especificidades tratadas na literatura a respeito destes. Após esta etapa foram detalhados os métodos numéricos utilizados para discretizar as equações, bem como a metodologia de malha e os métodos para solução de sistemas lineares. Por fim, são apresentados os resultados obtidos a partir da simulação dos problemas elencados, bem como a comparação destes com a literatura e com modelos analíticos. Os mesmos se mostraram coerentes com a literatura, em específico, nos escoamentos não-newtonianos, onde observou-se a influência na escolha do invariante na qualidade dos resultados para os diferentes regimes de escoamento. O código corroborou para o entendimento dos desafios da implementação dos modelos e das limitações numéricas dos métodos utilizados. O trabalho foi desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia (*MFLab-FEMEC-UFU*).

**Palavras-chave:** Dinâmica dos Fluidos Computacional, Fluidos Não-Newtonianos, Escoamentos Térmicos, Volumes finitos.

# ABSTRACT

One of the main challenges in the context of applying Computational Fluid Dynamics (*CFD*) methods is understanding the methods and models used in simulating different types of flow. In this context, this study presents the methodology used to build a computational code aimed at solving Newtonian flows with and without thermal energy transfer, as well as non-Newtonian flows. Initially, a detailed description of the physical model of the flows used to validate the implemented routines is provided, after detailing the equations used to model the problems addressed in this work, along with a brief historical context and the specific aspects addressed in the literature regarding them. Subsequently, the numerical methods used to discretize the equations are detailed, as well as the mesh methodology and methods for solving linear systems. Finally, the results obtained from simulating the selected problems are presented, as well as their comparison with literature and analytical models. These results were consistent with the literature, particularly in non-Newtonian flows, where the influence of invariant choice on the quality of results for different flow regimes was observed. The code contributed to understanding the challenges of implementing models and the numerical limitations of the methods used. The work was developed at the Fluid Mechanics Laboratory of the Faculty of Mechanical Engineering at the Federal University of Uberlândia (*MFLab-FEMEC-UFG*).

**Keywords:** Computational Fluid Dynamics (*CFD*), Non-Newtonian Fluids, Thermal Flows, Finite Volumes.

# SUMÁRIO

<b>Lista de Figuras</b>	<b>I</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>III</b>
<b>Lista de Abreviações e Símbolos</b>	<b>IV</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Modelos Físicos</b>	<b>3</b>
2.1 Escoamento de Couette Plano . . . . .	3
2.2 Escoamento de Poiseuille Plano . . . . .	4
2.3 Escoamento em Cavidade com Tampa Deslizante . . . . .	5
2.4 Escoamento em Cavidade Diferencialmente Aquecida . . . . .	6
<b>3 Modelo Matemático Diferencial</b>	<b>8</b>
3.1 Escoamentos Newtonianos . . . . .	10
3.2 Fluidos Não-Newtonianos . . . . .	11
3.3 Modelagem do Tensor $\dot{\gamma}$ em $\eta$ . . . . .	13
3.4 Aproximação de Oberbeck-Boussinesq para Escoamentos Não-Isotérmicos . . . . .	15
3.5 Números Adimensionais . . . . .	16
3.5.1 Reynolds . . . . .	16
3.5.2 Prandtl . . . . .	17
3.5.3 Grashof . . . . .	17
3.5.4 Rayleigh . . . . .	17
3.6 Formulação Geral . . . . .	18
<b>4 Modelo Matemático-Numérico</b>	<b>19</b>
4.1 Malha Deslocada . . . . .	19
4.2 Volumes Finitos . . . . .	20
4.3 Discretização da Equação da Energia . . . . .	22
4.4 Acoplamento Pressão-Velocidade . . . . .	24
4.5 Discretização das Equações do Acoplamento Pressão-Velocidade . . . . .	27
4.6 Métodos de Solução de Sistemas Lineares . . . . .	32
4.6.1 Método de Gauss-Seidel . . . . .	32
4.6.2 Método dos gradientes conjugados . . . . .	33
4.7 Convergência e Estabilidade . . . . .	33

<b>5 Modelos Computacionais</b>	<b>35</b>
5.1 Couette Plano . . . . .	35
5.2 Poiseuille Plano . . . . .	36
5.3 Cavidade com Tampa Deslizante . . . . .	38
5.4 Cavidade Diferencialmente Aquecida . . . . .	39
5.5 Algoritmos de Solução de Sistemas Lineares . . . . .	41
<b>6 Resultados</b>	<b>43</b>
6.1 Escoamento de Couette Plano . . . . .	43
6.2 Escoamento de Poiseuille Plano . . . . .	46
6.3 Cavidade com Tampa Deslizante . . . . .	51
6.4 Cavidade Diferencialmente Aquecida . . . . .	54
<b>7 Conclusão</b>	<b>57</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>58</b>
<b>Apêndice A Solução Analítica para Escoamentos de Poiseuille</b>	<b>60</b>
A.1 Poiseuille Newtoniano . . . . .	60
A.2 Poiseuille Não-Newtoniano . . . . .	61
<b>Apêndice B Código Desenvolvido</b>	<b>65</b>

# LISTA DE FIGURAS

2.1	Modelo Físico do escoamento de Couette. . . . .	3
2.2	Modelo Físico do escoamento de Poiseuille. . . . .	4
2.3	Modelo Físico da cavidade com tampa deslizante. . . . .	6
2.4	Modelo Físico da cavidade diferencialmente aquecida. . . . .	6
3.1	Comportamento geral dos diferentes tipos de fluido de acordo com a taxa de deformação. . . . .	11
3.2	Viscosidade não-newtoniana de três polímeros fundidos a partir da equação de viscosidade de Carreau ( $a = 2$ ). Dados experimentais: Poliestireno (453 K), Polietileno de alta densidade (443 K) e Phenoxy-A (485 K), com parâmetros $\eta_0$ , $\eta_\infty$ , $\lambda$ e $n$ específicos para cada polímero. . . . .	12
4.1	Modelo de malha deslocada . . . . .	19
4.2	Modelo de malha colocada. . . . .	20
4.3	Domínio físico com células fantasma para condições de contorno. . . . .	21
4.4	informação pulando de célula, caso que é evitado com o CFL. . . . .	34
5.1	Modelo computacional do escoamento de Couette. . . . .	36
5.2	Modelo computacional do escoamento de Poiseuille. . . . .	37
5.3	Modelo computacional da cavidade com tampa deslizante. . . . .	39
5.4	Modelo computacional da cavidade térmica. . . . .	40
5.5	Lógica do algoritmo de Gauss-Seidel utilizado no código. . . . .	41
5.6	Diagrama de blocos do método dos gradientes conjugados. . . . .	42
6.1	Perfis de velocidade no centro da cavidade para valores de Reynolds de 100 e 400 . . . . .	43
6.2	Perfis de velocidade no centro da cavidade para valores de Reynolds de 1000 e 1600 . . . . .	44
6.3	Comparação entre o perfil analítico e o perfil numérico simulados para diferentes tempos com um número de Reynolds de 1600 e um valor de $\nu$ igual a 0.000625. As linhas contínuas representam o perfil numérico e as marcas * representam os pontos da solução analítica. . . . .	44
6.4	Perfis de velocidade no centro da cavidade para diferentes valores de Reynolds, utilizando fluidos não-newtonianos . . . . .	45
6.5	Comparação entre os resultados do presente trabalho e aqueles obtidos por Vasconcellos (2024) . . . . .	46
6.6	Perfil de velocidade analítico em comparação com o modelo computacional, utilizando um valor de $Re = 100$ . Foram impostos uma viscosidade de $\nu = 0.01$ e um perfil de velocidade na entrada de $V = \frac{1}{6} \left[ \frac{m}{s} \right]$ . . . . .	47

6.7	Diferentes perfis de velocidade a $\Delta p = 0.6$ e diferentes números de Reynolds. . . . .	48
6.8	Diferentes perfis de velocidade para o escoamento de Poiseuille, com valores de $n$ de 1, 1.5 e 3, para velocidade de entrada constante. Comparação com os resultados do modelo analítico . . . . .	49
6.9	Perfis de velocidade para um valor de $n = 2$ e um $\Delta p = 50\text{Pa}$ . Comparação do perfil analítico com os invariantes apresentados por Bird et al. (1987) e Silveira-Neto (2020). . . . .	50
6.10	Perfis de velocidade para um valor de $n = 0.5$ e um $\Delta p = \sqrt{50}\text{ Pa}$ . Comparação do perfil analítico com os invariantes apresentados por Bird et al. (1987) e Silveira-Neto (2020). . . . .	51
6.11	Perfil de velocidade $u$ e $v$ no centro geométrico da cavidade para Reynolds 100.	51
6.12	Perfil de velocidade $u$ e $v$ no centro geométrico da cavidade para Reynolds 400.	52
6.13	Perfil de velocidade $u$ e $v$ no centro geométrico da cavidade para Reynolds 1000.	52
6.14	Perfil de velocidade $u$ e $v$ no centro geométrico da cavidade para Reynolds 3200.	53
6.15	Linhas de fluxo para $Re = 3200$ . . . . .	53
6.16	Isotermas para números de Rayleigh de $10^3$ a $10^4$ . . . . .	54
6.17	Isotermas para números de Rayleigh de $10^5$ e $10^6$ . . . . .	54
6.18	Isotermas apresentadas por Santos (2022) Da esquerda para a direita o Rayleigh varia de $10^3$ a $10^6$ em ordem crescente da esquerda para direita. . . . .	55
6.19	Linhas de Fluxo para valores de Rayleigh $10^4$ , a esquerda, e $10^5$ , a direita. . . . .	55
6.20	Linhas de Fluxo para valores de Rayleigh $10^4$ , a esquerda, e $10^5$ , a direita. Gangawane et al. (2015). . . . .	56
A.1	Domínio físico temporário para a solução do escoamento de Poiseuille não-newtoniano. . . . .	62

# LISTA DE TABELAS

5.1	Condições de contorno para o escoamento de Couette . . . . .	35
5.2	Condições de contorno para o escoamento de Couette . . . . .	36
5.3	Condições de contorno para o escoamento de Poiseuille . . . . .	37
5.4	Propriedades físicas para o escoamento de Poiseuille . . . . .	38
5.5	Condições de contorno para o escoamento de cavidade com tampa deslizante . . . . .	38
5.6	Condições de contorno para cavidade diferencialmente aquecida . . . . .	39
5.7	Propriedades físicas utilizadas do escoamento de cavidade diferencialmente aquecida . . . . .	40
6.1	Comparação entre os valores da componente $u$ analíticos e computacional para $Re = 100$ . . . . .	47
6.2	Valores de $n$ e sua respectiva queda de pressão para velocidade de entrada constante . . . . .	49

# LISTA DE ABREVIAÇÕES E SÍMBOLOS

## LISTA DE ABREVIAÇÕES

- CFD* Computational Fluid Dynamics  
*CFL* Número de Courant-Friedrichs-Lewy  
*DFC* Dinâmica dos fluidos computacional  
*FEMEC* Faculdade de Engenharia Mecânica  
*Gr* Número de Grashof  
*MFLab* Laboratório de Mecânica dos Fluidos  
*Pr* Número de Prandtl  
*Ra* Número de Rayleigh  
*Re* Número de Reynolds  
*UFU* Universidade Federal de Uberlândia

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $\alpha$  Difusividade térmica  
 $\beta$  Coeficiente de expansão volumétrica  
 $\Delta t$  Passo de tempo  
 $\Delta x$  Largura da célula computacional  
 $\Delta y$  Altura da célula computacional  
 $\dot{\gamma}$  Tensor taxa de cisalhamento  
 $\eta$  Viscosidade não-newtoniana  
 $\mu$  Viscosidade dinâmica  
 $\nu$  Viscosidade cinemática  
 $\bar{\delta}$  Tensor unitário

$\bar{\bar{\pi}}$	Tensor das tensões
$\bar{\tau}$	Tensor das Tensões viscosas
$\phi$	Tensor taxa de transformação de energia cinética em térmica
$\rho$	Massa específica do fluido
$\vec{g}$	Vetor campo gravitacional
$\vec{V}^*$	Campo de Velocidade Aproximado
$\vec{v}$	Vetor velocidade
$C_p$	Calor específico
$D$	Comprimento característico do escoamento
$H$	Altura do domínio físico e computacional
$k$	Condutividade térmica
$L$	Largura do domínio físico e computacional
$m$	Fator de condicionamento da Lei de potência
$n$	Expoente da Lei de Potência
$p$	Pressão
$P'$	Correção do campo de pressão
$p_0$	Campo de pressão inicial
$t$	Tempo
$T$	Temperatura
$U$	Velocidade característico do escoamento
$V_0$	Velocidade de referência

# 1. INTRODUÇÃO

A Dinâmica dos Fluidos Computacional (*DFC*) é uma área fundamental da engenharia moderna, que se destina à aplicação de métodos numéricos para a análise e simulação dos fenômenos que envolvem fluidos em movimento (Fortuna, 2000). Utilizando o equacionamento matemático para a modelagem dos fenômenos físicos de interesse, o *DFC* possibilita a representação de fenômenos fluidodinâmicos complexos, como problemas não lineares, térmicos ou com reações químicas (Versteeg e Malalasekera, 2007).

Recentes avanços em métodos matemáticos, aliados ao progresso de hardware das últimas décadas, ampliaram as aplicações industriais da *DFC*, permitindo sua utilização em setores variados, indo desde a indústria aeronáutica, de petróleo e gás, até indústrias farmacêuticas e alimentícias. Dentro deste contexto, a *DFC* é utilizada para resolver diversos problemas industriais, dentre eles a lavagem de gases, ou o mapeamento de reações químicas em tanques de mistura. Também é aplicado para a redução de custos, para, por exemplo, problemas de bombeamento de polpa de minérios.

Entre as vantagens no uso de técnicas computacionais para a resolução de problemas industriais estão: a possibilidade de testar múltiplos cenários de maneira mais rápida e menos onerosa que outras técnicas de solução de escoamentos como a experimentação e a possibilidade de testar ambientes nocivos, inacessíveis ou complexos de serem reproduzidos, mesmo em menor escala. Exemplos deste tipo de escoamentos são: problemas de reentrada na atmosfera, escoamentos de ácidos ou escoamentos sanguíneos.

Um dos principais desafios no emprego desta ferramenta é a compreensão dos diferentes modelos e metodologias empregadas, nas diversas áreas que esta ciência se divide. A simples mudança na escolha dos métodos utilizados, a mudança na escolha dos modelos de fechamento, ou a mudança no método de discretização para a advecção, pode resultar na mudança radical dos resultados obtidos entre as diferentes condições de simulação, ou determinar se o mesmo irá convergir ou divergir.

O presente trabalho tem como objetivo, abordar e detalhar os métodos, modelos e equações utilizados no desenvolvimento de um código próprio, voltado para a solução de escoamentos newtonianos isotérmicos e não isotérmicos, além de escoamentos não-newtonianos isotérmicos. Primeiramente serão apresentados os problemas que serão utilizados para validar os modelos e as rotinas computacionais empregadas, para isto foram escolhidos escoamentos clássicos da literatura, como os escoamentos de Couette e Poiseuille. Após esta etapa, serão detalhadas as

equações matemáticas utilizadas, também um breve detalhamento teórico a respeito dos métodos abordados e das equações utilizadas, bem como a apresentação dos desafios e das especificidades numéricas que cada tipo de escoamento carrega.

Serão abordadas todas as etapas de discretização e implementação computacional das rotinas utilizadas, bem como uma breve explicação teórica dos métodos numéricos escolhidos. Ao final, serão apresentados os resultados obtidos com os escoamentos escolhidos, de forma que se comparou dados obtidos com os da literatura, a fim de corroborar com a validação dos resultados. Para a verificação dos perfis de velocidade obtidos em alguns escoamentos, também foram utilizados modelos analíticos desenvolvidos no apêndice A.

## 2. MODELOS FÍSICOS

O código desenvolvido tem como objetivo resolver problemas cuja natureza física possa ser descrita por um domínio bidimensional cartesiano e que apresente comportamento de escoamento incompressível. Apesar dessa generalidade, cada tipo de escoamento apresenta certas peculiaridades, que serão apresentadas adiante.

### 2.1 ESCOAMENTO DE COUETTE PLANO

Na Figura 2.1 apresenta-se o modelo físico do problema conhecido na literatura como escoamento de Couette plano (Gibson et al., 2008; Case, 1960; Orszag e Kells, 1980; Bottin e Chaté, 1998; Barkley e Tuckerman, 2007) e suas condições de contorno. O problema se trata de um canal plano, cujas placas superior e inferior se movem com diferentes velocidades, assim o que determina a dinâmica do escoamento é a velocidade relativa resultante entre as fronteiras.

No presente trabalho foi considerada a fronteira superior se movendo com uma velocidade constante  $V_0$  e a fronteira inferior com velocidade nula, caracterizando condições de contorno de Dirichlet, considerando também a condição de não deslizamento entre as paredes e o fluido. Nas paredes laterais do escoamento bidimensional, foram consideradas condições de contorno de Neumann, com derivada nula em ambas as componentes de velocidade para representar a condição de simetria. A Figura abaixo mostra o modelo físico do escoamento de Couette.

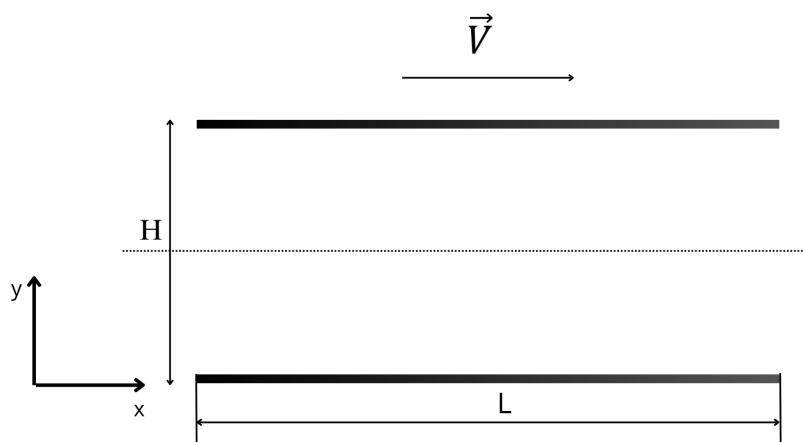


Figura 2.1: Modelo Físico do escoamento de Couette.

Fonte: Do próprio autor

As fronteiras inferior e superior são separadas por uma altura  $H$  e possuem uma largura  $L$  de forma que  $L = H$ . O eixo de coordenadas foi adotado no canto inferior esquerdo do domínio computacional.

Para se manter a coerência numérica que será demonstrada posteriormente, as condições de contorno foram impostas sobre os campos de pressão, sendo mantida a condição de Dirichlet nas fronteiras à esquerda e à direita e condições de segunda espécie das fronteiras superior e inferior.

Foi considerado um escoamento em regime transitório, com condição inicial de velocidade nula em todo o domínio, com exceção das fronteiras superior e inferior. O campo de pressão inicial em todo o escoamento foi considerado uniforme.

O escoamento de Couette foi um dos utilizados para validar o modelo de fluídos não-newtonianos, nos quais as condições de contorno e inicial adotadas são as mesmas do escoamento newtoniano.

Apesar deste escoamento ser popularmente reconhecido como escoamento de Couette, se considera escoamentos de Couette a classe de escoamentos que possuem fronteiras móveis, como tampas ou cilindros rotativos.

## 2.2 ESCOAMENTO DE POISEUILLE PLANO

Outro escoamento comumente encontrado na literatura para a validação de rotinas computacionais, é o promovido pela diferença de pressão no interior de um canal, anular ou plano. Este problema é normalmente chamado de escoamento de Poiseuille (Thomas, 1953; Bharti et al., 2007), em homenagem ao médico e pesquisador de mesmo nome, que promoveu estudos em escoamentos sanguíneos, que podem ser considerados escoamentos de Poiseuille.

Na Figura 2.2 é mostrado o domínio físico bem como as condições de contorno do escoamento de Poiseuille consideradas no presente trabalho:

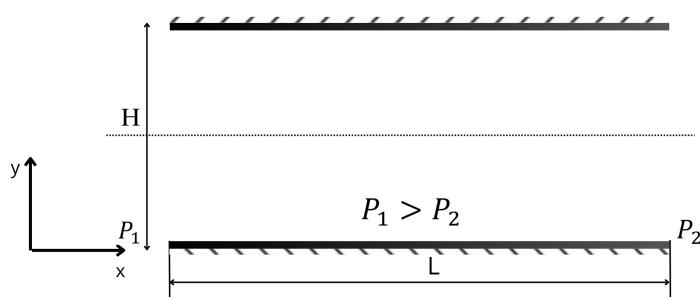


Figura 2.2: Modelo Físico do escoamento de Poiseuille.

Fonte: Do próprio autor

Foi considerado um escoamento de Poiseuille em desenvolvimento, com um perfil uniforme

de velocidade na entrada, a esquerda, e um perfil totalmente desenvolvido com condição de derivada nula, a direita. Nas fronteiras inferior e superior foram consideradas condições de parede, respeitando o critério de não-deslizamento. As fronteiras inferior e superior são separadas por uma distância  $H$  e o canal tem uma largura  $L$ , de forma que  $H \neq L$ . O centro do sistema de coordenadas foi colocado no canto inferior esquerdo do domínio físico.

Assim foi considerada condição de primeira espécie nas fronteiras superior, inferior e esquerda para todas as componentes de velocidade e condição de Neumann para a parede direita. As condições de contorno para a pressão foram de primeira espécie para a parede direita e segunda espécie para as demais.

A condição inicial do escoamento foi um perfil de velocidade uniforme igual à velocidade de entrada e um gradiente de pressão uniforme em todo o escoamento. Este escoamento foi utilizado para a validação dos modelos não-newtonianos, utilizando a solução contínua. As condições de contorno consideradas são as mesmas para os fluídos newtonianos.

Como no caso do escoamento de Couette, a classe dos escoamentos de Poisseulle são todos aqueles escoamentos promovidos por uma diferença de pressão entre a entrada e a saída do escoamento.

## 2.3 ESCOAMENTO EM CAVIDADE COM TAMPA DESLIZANTE

O escoamento de cavidade com tampa deslizante é um tipo de escoamento de Couette, ou com fronteira móvel, que possui condições de parede, de velocidade nula, em todas as direções do escoamento, com exceção da fronteira superior móvel.

É mais um tipo de escoamento utilizado para a validação de códigos próprios desenvolvidos para escoamentos, sendo mais complexo que os anteriores por apresentar recirculações e a presença de maiores gradientes de pressão e velocidade. O domínio físico e condições de contorno são mostrados na Figura 2.3.

A cavidade possui dimensões iguais na largura e na altura, com condições de contorno de primeira espécie para as componentes de velocidade em todas as direções. A pressão possui condição de segunda espécie em todas as fronteiras.

A condição inicial foi de velocidade nula em todo o escoamento com exceção da fronteira superior, respeitando a condição de não deslizamento. A condição inicial de pressão é de um gradiente de pressão uniforme em todo o escoamento.

Modelos e estudos sobre este tipo de escoamento podem ser encontrados em diversos autores como Santos (2022) Vasconcellos (2024) e Ghia et al. (1982).

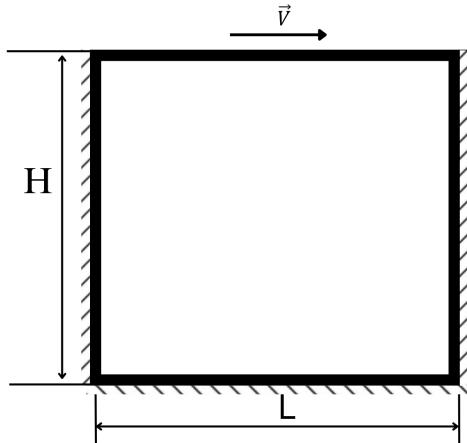


Figura 2.3: Modelo Físico da cavidade com tampa deslizante.

Fonte: Do próprio autor

## 2.4 ESCOAMENTO EM CAVIDADE DIFERENCIALMENTE AQUECIDA

Um dos escoamentos térmicos mais simples que se encontra na literatura é o da cavidade com convecção natural, ou cavidade diferencialmente aquecida. Este escoamento tem o movimento do fluido promovido pela variação da massa específica, devido a uma diferença de temperatura ao longo domínio, que leva a uma diferença de pressão que bombeia uma recirculação dentro da cavidade.

A Figura 2.4 mostra o modelo físico do escoamento, no qual, diferente dos demais, possui condições para a temperatura, que é um campo escalar ao longo do escoamento.

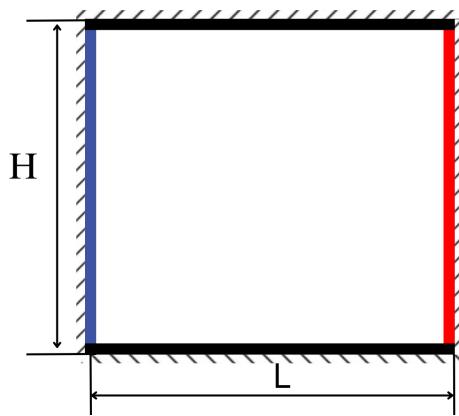


Figura 2.4: Modelo Físico da cavidade diferencialmente aquecida.

Fonte: Do próprio autor

As componentes da velocidade recebem condições de primeira espécie com velocidade nula em todo o escoamento, de forma que a pressão, para manter a coerência dos modelos, recebe condições de Neuman em todo o escoamento.

A temperatura recebe condições de primeira espécie para as fronteiras laterais, o que garante a condição de paredes diferencialmente aquecidas, e condições de segunda espécie nas fronteiras superior e inferior. A condição de segunda espécie para a temperatura, representa uma condição de parede isolada, ou adiabática, na qual não ocorre troca de energia térmica com o meio.

Novamente as fronteiras são quadradas, com uma dimensão de L e H idênticas. As condições iniciais para o problema são as componentes de velocidade nulas, um gradiente de pressão uniforme e uma temperatura uniforme ao longo do escoamento igual a média da temperatura entre as paredes laterais.

### 3. MODELO MATEMÁTICO DIFERENCIAL

Para representar adequadamente qualquer fenômeno físico por meio de modelos matemáticos, é preciso que se adote hipóteses simplificadoras. Essas hipóteses são necessárias pois, na maioria dos casos, a realidade é apenas parcialmente conhecida e mensurável pelos cientistas (Silveira-Neto, 2020). Essas simplificações permitem que modelos matemáticos ofereçam soluções aproximadas, porém valiosas para problemas complexos, refletindo aspectos fundamentais do comportamento dos sistemas físicos.

O estudo do escoamento de fluidos desperta interesse na humanidade desde civilizações antigas, como a dos gregos e romanos. A primeira formulação matemática sobre o movimento dos fluidos foi desenvolvida por Leonard Euler. No entanto, conceitos matemáticos mais avançados, utilizados para representar esse comportamento com maior precisão, especialmente em problemas complexos como os industriais que enfrentamos até os dias de hoje, foram desenvolvidos e aprimorados séculos depois por grandes cientistas como Osborne Reynolds, George Stokes e Augustin-Louis Cauchy (Fortuna, 2000). Esses modelos têm como objetivo descrever o balanço de todas as propriedades vetoriais e escalares relevantes no domínio físico do escoamento.

As equações fundamentais que representam os escoamentos são amplamente discutidas e desenvolvidas por diversos autores para diferentes propósitos, como (Silveira-Neto, 2020; Fortuna, 2000; Bird et al., 1987; White, 2011; Versteeg e Malalasekera, 2007). Essencialmente, são utilizadas ao menos três equações para o problema de fluidos, a primeira é descrita pela Equação 3.1:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.1)$$

Tal equação é chamada de equação da continuidade, na qual  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  representa a variação da massa específica ao longo do tempo,  $\vec{v}$  representa o vetor velocidade e  $\rho$  representa a própria massa específica do fluido. Tal modelo representa o balanço de massa em todo o domínio físico, respeitando a lei de Lavoisier na qual há a conservação da massa total, quando se considera tanto o ambiente do escoamento quanto o ambiente externo. O operador  $\nabla \cdot$  representa a operação vetorial chamada de divergente.

A segunda formulação utilizada é descrita pela Equação 3.2.

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla \cdot \bar{\pi} + \rho \vec{g} \quad (3.2)$$

Esta equação é chamada de equação de Cauchy (Silveira-Neto, 2020) e descreve o balanço da quantidade de movimento linear. Esta equação resulta da aplicação da segunda lei de Newton no teorema do transporte de Reynolds em sua forma diferencial Silveira-Neto (2020); Fortuna (2000); Bird et al. (1987), que estabelece que a taxa de variação do momento linear de um fluido é igual à soma das forças que atuam sobre ele (Fortuna, 2000). Sua dedução, assim como a da equação do balanço de massa é apresentada em detalhes por White (2011) e Silveira-Neto (2020).

Na equação de Cauchy o termo  $\vec{g}$  representa o campo gravitacional, o termo  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  representa o acúmulo de momentum linear no domínio do escoamento e o termo  $\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$  representa o transporte advectivo de quantidade de movimento linear. O tensor  $\bar{\pi}$  representa os efeitos de pressão e viscosidade presentes no escoamento (Silveira-Neto, 2020) e sua modelagem depende da abordagem utilizada para representar a relação entre as forças e a deformação no fluido. No caso de escoamentos newtonianos, o tensor de tensões é diretamente proporcional ao gradiente de velocidade o que resulta nas equações de Navier-Stokes. Já para fluidos não-newtonianos, essa relação é complexa, e diferentes modelos constitutivos são necessários para descrever adequadamente os efeitos das tensões viscosas.

De forma geral o tensor  $\bar{\pi}$ , pode ser escrito como a soma de duas parcelas, Eq. 3.3:

$$\bar{\pi} = p\bar{\delta} + \bar{\tau} \quad (3.3)$$

Na Eq. 3.3  $p$  representa a pressão atuante no escoamento, normal a cada uma das direções e  $\bar{\delta}$  representa é o tensor identidade, de forma que a parcela  $p\bar{\delta}$  pode ser escrita como mostra a, Eq. 3.4:

$$p\bar{\delta} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Na equação 3.3,  $\bar{\tau}$  é chamado de o tensor das tensões viscosas, que deve ser modelado de acordo com o modelo de fechamento adotado e representa transferência de quantidade de movimento linear por meio das forças viscosas presentes no fluido.

A última equação que será descrita, se limita a escoamentos com efeitos térmicos, Eq. 3.5.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla \cdot T = \alpha \nabla^2 T + \frac{\phi}{\rho C_p} \quad (3.5)$$

A Eq.3.5 é o chamado balanço de energia térmica (Silveira-Neto, 2020; Wylen, 2016), na qual  $\frac{\partial T}{\partial t}$  representa a variação de energia térmica em uma partícula de fluido ao longo do tempo, ou o acumulo de energia térmica,  $\nabla \cdot (\vec{v}T)$  representa o fluxo líquido advectivo de energia térmica por meio das componentes do vetor velocidade, também chamado de transporte advectivo de energia térmica,  $\alpha \nabla^2 T$  representa o fluxo líquido difusivo de energia térmica, por este motivo é chamado de termo difusivo da equação da energia.

O termo  $\phi$  representa a transformação de energia cinética em energia térmica, por meio dos efeitos viscosos, tal termo não foi considerado na análise utilizada pois sua modelagem apenas se torna relevante em escoamento onde os efeitos viscosos são muito fortes e provocam aquecimentos relevantes. Exemplos deste tipo de problemas são o escoamento de lubrificante no interior de um mancal, onde as dimensões são muito pequenas, ou na reentrada de um corpo na atmosfera, no qual as velocidades são muito altas. O escalar  $\alpha$  é chamado de difusividade térmica, e representa a junção de três termos:  $\rho, C_p$  que representa o calor específico do material e  $k$  que representa a condutividade térmica do mesmo.

### 3.1 ESCOAMENTOS NEWTONIANOS

Para fluidos newtonianos incompressíveis, que obedecem a lei da viscosidade de Newton e não possuem uma variação de velocidade grande o suficiente para invalidar a hipótese de incompressibilidade, o tensor  $\bar{\tau}$  pode ser modelado utilizando o modelo de Stokes. Tal modelo relaciona o tensor das tensões com o gradiente do vetor velocidade, seguindo o mesmo princípio da lei da viscosidade de Newton. A dedução das equações que modelam este tipo de fluido podem ser encontradas em detalhes em Bird et al. (1987) e White (2011), são elas, Eq.3.6 a 3.10:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot [\nu (\vec{\nabla} \vec{v} + \vec{\nabla} \vec{v}^T)] + g \quad (3.7)$$

$$\bar{\tau} = -\mu (\vec{\nabla} \vec{v} + \vec{\nabla} \vec{v}^T)$$

$$\bar{\tau} = -\mu \dot{\gamma} \quad (3.8)$$

$$\dot{\gamma} = (\vec{\nabla} \vec{v} + \vec{\nabla} \vec{v}^T) \quad (3.9)$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.10)$$

Nas equações consideradas  $\mu$  é a viscosidade dinâmica e  $\nu$  a viscosidade cinemática do fluido. O tensor  $\dot{\gamma}$  é chamado de tensor taxa de cisalhamento (Bird et al., 1987), ele é proporcional ao gradiente e ao gradiente transposto de velocidade, em alusão à lei da viscosidade de newton este tensor pode ser escrito da seguinte forma, Eq. 3.11:

$$\dot{\gamma} = \vec{\nabla} \vec{v} + \vec{\nabla} \vec{v}^T = \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & 2\frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Ou na forma bidimensional, Eq. 3.12:

$$\dot{\gamma} = \vec{\nabla} \vec{v} + \vec{\nabla} \vec{v}^T = \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

A abordagem utilizada para o fechamento da equação de Cauchy e a consequente modelagem do tensor de tensões de Cauchy foi inicialmente proposta por Stokes (White, 2011). Esta formulação, é válida para fluidos newtonianos e pode ser simplificada de forma a eliminar as derivadas cruzadas, esta simplificação não será apresentada no trabalho, pois a forma completa do tensor taxa de cisalhamento é mais útil para as formulações utilizadas no trabalho

## 3.2 FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS

A lei da viscosidade de Newton, descreve o tensor  $\bar{\tau}$  como sendo uma relação linear entre um fator de correção ( $\mu$  no caso de fluidos newtonianos) e a taxa de cisalhamento ( $\dot{\gamma}$ ). A principal diferença entre esse comportamento ao dos fluidos não-newtonianos é a não linearidade desta relação, o que faz com que surja a necessidade de outras equações de ajuste desta relação em função de  $\dot{\gamma}$ . Na Figura 3.1 são mostrados os comportamentos típicos de vários exemplos destes fluidos.

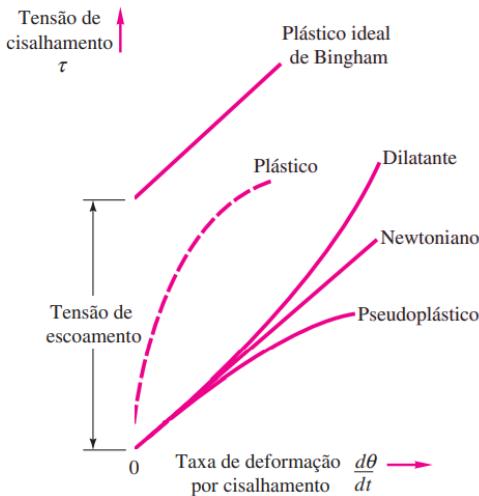


Figura 3.1: Comportamento geral dos diferentes tipos de fluido de acordo com a taxa de deformação.

Fonte: White (2011) pag.43

Na Figura apresentada por White (2011) é possível observar as principais classes de fluidos não-newtonianos, os quais divergem entre si pelo tipo de comportamento não linear da tensão de cisalhamento ( $\tau$ ).

O comportamento característico dos fluidos pseudoplásticos é que eles diminuem sua resistência ao cisalhamento com o aumento do mesmo, exemplos desses fluido são o plasma sanguíneo e tinta. Os fluidos plásticos são os que possuem o mesmo comportamento dos pseudoplásticos de forma mais atenuada. O caso limite desses fluido são os plásticos de Bingham,

que necessitam de uma tensão inicial grande o suficiente para que comecem a escoar (White, 2011).

Os fluidos dilatantes possuem comportamento oposto aos plásticos, e aumentam sua resistência com o aumento da taxa de cisalhamento, um exemplo dessa classe de fluido é a areia movediça. O presente trabalho não teve como foco nenhum desses modelos específicos, fazendo uma abordagem geral no limite de representatividade dos modelos adotados.

Para se modelar a relação não linear entre viscosidade e taxa de cisalhamento, diversos tipos de abordagens e modelos podem ser encontrados na literatura, de forma que não existe um consenso de um modelo geral representativo de todos os tipos de fluidos. Dentre os modelos mais utilizados está a família de modelos chamada de modelos de fluidos generalizados, que tentam relacionar a viscosidade com o tensor taxa de cisalhamento, como demonstrado na Eq. 3.13:

$$\bar{\tau} = -\eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma} \quad (3.13)$$

No qual  $\eta(\dot{\gamma})$  é chamado de viscosidade não-newtoniana e depende de  $\dot{\gamma}$ . A função que define o tensor taxa de cisalhamento depende de cada modelo adotado. Esta formulação busca adotar correlações empíricas para cada um dos fluidos estudados de forma que se consiga ajustar parâmetros para representar seu comportamento físico por meio desta viscosidade. A principal diferença entre os modelos de fluido generalizado é a quantidade de parâmetros a serem ajustados, sendo que de forma geral, quanto mais parâmetros a serem ajustados mais representativo é o modelo, porém mais caro é a experimentação necessária em termos de recursos e tempo.

Dentre as principais variações do modelo de fluido generalizado, as mais utilizadas são a Lei de potência (em inglês *Power Law*) e a chamada Carreau-Yasuda, desenvolvida pelos autores que levam seu nome (Bird et al., 1987).

A Figura 3.2 apresentada por Bird et al. (1987) mostra dados experimentais da variação de  $\eta$  com a taxa de cisalhamento para alguns fluidos reais. É possível notar na Figura que a variação da viscosidade não-newtoniana pode ser dividida em duas regiões principais, uma horizontal e uma retilínea decrescente sendo essa segunda chamada de região da Lei de Potência.

Para a maioria dos fluidos e escoamentos, utilizando os tipos mais simples de viscosímetros, é impossível detectar a região horizontal do comportamento de  $\eta$ , de forma que a região da Lei de Potência, para esses casos, é a mais importante e representativa do escoamento (Bird et al., 1987).

O modelo da Lei de Potência é um modelo empírico que busca modelar a região de mesmo nome do comportamento da viscosidade não-newtoniana por meio de dois parâmetros experimentais,  $m$  que é chamado de fator de condicionamento e  $n$  que tem grande influência no tipo de comportamento não-newtoniano que será apresentado pelo fluido. Tais parâmetros buscam ajustar uma curva para  $\eta$  variando de fluido para fluido, por meio de experimentação material.

Por ter poucos parâmetros de ajuste, a Lei de Potência se torna mais rápida e menos onerosa

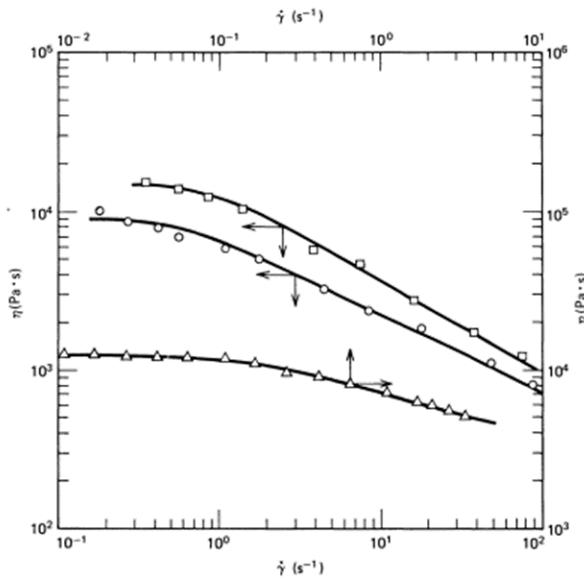


Figura 3.2: Viscosidade não-newtoniana de três polímeros fundidos a partir da equação de viscosidade de Carreau ( $a = 2$ ). Dados experimentais: Poliestireno (453 K), Polietileno de alta densidade (443 K) e Phenoxy-A (485 K), com parâmetros  $\eta_0$ ,  $\eta_\infty$ ,  $\lambda$  e  $n$  específicos para cada polímero.

Fonte: Bird et al. (1987)

de se ajustar quando comparada com outras variações de modelos de fluidos generalizados. Por esse motivo, por ser capaz de representar a maioria dos problemas industriais estudados e por sua fácil implementação numérica computacional, esse modelo era um dos mais utilizados dentro de sua família de modelos para representar o comportamento não-newtoniano a nível acadêmico e industrial até poucos anos (Bird et al., 1987). Apesar disto, com a evolução da complexidade dos problemas estudados, outros métodos melhores surgiram para representar os escoamentos (Vasconcellos, 2024). O modelo em questão, com suas limitações, ainda é útil para validar os softwares para não-newtonianos antes de implementar modelos mais complexos.

O modelo matemático da Lei de potência é apresentado por Bird et al. (1987), Eq. 3.14:

$$\eta(\dot{\gamma}) = m\dot{\gamma}^{n-1} \quad (3.14)$$

Neste modelo o comportamento do fluido de acordo com  $n$  varia da seguinte forma:

- $n < 1$  o fluido se comporta como pseudoplástico
- $n = 1$  o fluido se comporta como newtoniano
- $n > 1$  o fluido se comporta como dilatante.

O fator  $mz$  como já mencionado, é o fator o chamado fator de influência do modelo.

Apesar do modelo da lei de potência ser o mais utilizado industrialmente, a literatura contém diversos outros modelos com suas vantagens e propriedades. Uma lista mais detalhada desses modelos é apresentada por Vasconcellos (2024).

### 3.3 MODELAGEM DO TENSOR $\dot{\gamma}$ EM $\eta$

Para manter a consistência da equação do balanço da quantidade de movimento linear,  $\eta$  ( $\dot{\gamma}$ ) que é utilizado nos modelos de fluidos generalizados, deve ser um escalar. Dessa forma  $\dot{\gamma}$  não pode ser considerado em sua forma literal, um tensor com seis componentes, devendo se comportar também como escalar. Por este motivo, é preciso que se use um valor que seja representativo do tensor taxa de cisalhamento ao longo de todo o escoamento. A solução mais comum é o uso de invariantes.

Os invariantes são combinações dos termos de tensores, geralmente seguindo operações matemáticas como o traço ou o determinante do tensor, no qual o valor não varia com observador que as descreve, ou seja, é independente do sistema de coordenadas. Uma abordagem mais rigorosa desse critério pode ser encontrada em Silveira-Neto (2020), Bird et al. (1987) e Vasconcellos (2024).

Várias formas de invariantes podem ser encontrados na literatura, de forma que uma das formas mais comuns é a apresentada e adotada por Vasconcellos (2024), para uma determinada matriz  $A$ , tal que, Eq. 3.15:

$$A = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{xy} & S_{yy} & S_{zy} \\ S_{xz} & S_{zy} & S_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Os invariantes podem ser escritos da seguinte forma, Eq. 3.16 a 3.18 (Silveira-Neto, 2020):

$$I_1 = \text{tr}(A) = S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} \quad (3.16)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\text{tr}(A)^2 - \text{tr}(A^2)) = S_{xx}S_{yy} + S_{yy}S_{zz} + S_{zz}S_{xx} - S_{xy}^2 - S_{xz}^2 - S_{zy}^2 \quad (3.17)$$

$$I_3 = \det(A) \quad (3.18)$$

Nas equações acima,  $\det()$  simboliza a operação de determinante e  $\text{tr}()$  o traço da matriz.

Outra forma de invariante é apresentado por Bird et al. (1987), Eq. 3.19 a 3.21:

$$I_1 = \text{tr}(A) = S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} \quad (3.19)$$

$$I_2 = \text{tr}(A^2) = S_{xx}^2 + S_{yy}^2 + S_{zz}^2 + 2S_{xy}^2 + 2S_{xz}^2 + 2S_{zy}^2 \quad (3.20)$$

$$I_3 = \text{tr}(A^3) \quad (3.21)$$

Dentre as opções de invariante a serem utilizados, tem-se que em alguns escoamentos o primeiro e o terceiro invariante, independente da abordagem, podem resultar em zero, impossibilitando sua escolha. Sendo assim, o segundo invariante é normalmente utilizado para representar

o tensor taxa de deformação.

Devido à natureza quadrática do segundo invariante, diversos autores propõem que operações sejam feitas para que se possa utilizá-lo com consistência na modelagem das equações de balanço da quantidade de movimento linear. Uma das mais utilizada é apresentada por Vasconcellos (2024), Eq. 3.22:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} I_2} \quad (3.22)$$

Devido ao uso da raiz na modelagem do tensor  $\dot{\gamma}$ , é razoável que se evite a utilização de valores negativos para o segundo invariante, por essa razão o modelo de invariante apresentado por Bird et al. (1987) foi utilizado como referência neste trabalho, com excessão do escoamento de Poiseuille no qual foram feitas comparações entre os modelos

Uma maior variedade de abordagens do tensor  $\dot{\gamma}$  pode ser encontrado no trabalho de Vasconcellos (2024).

Considerando a matriz bidimensional mostrada na Eq. 3.12 o tensor em sua representação escalar, bidimensional, pode ser escrito da seguinte forma, Eq. 3.23:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2 \frac{\partial u^2}{\partial x} + 2 \frac{\partial v^2}{\partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2} \quad (3.23)$$

Dessa forma é possível manter  $\eta(\dot{\gamma})$  como um escalar, preservar a compatibilidade na equação de balanço e simplificando a abordagem numérica que será descrita posteriormente.

### 3.4 APROXIMAÇÃO DE OBERBECK-BOUSSINESQ PARA ESCOAMENTOS NÃO-ISOTÉRMICOS

Em escoamentos onde há a variação de temperatura ao longo do domínio físico, todas as propriedades dependentes do fluido, como viscosidade, massa específica e difusividade térmica são diferentes para cada valor de temperatura, de forma que para a total representação da realidade seria necessário considerar essa variação na modelagem matemática dos escoamentos.

Estudos experimentais e numéricos, porém, demonstraram que para pequenas variações de temperatura e para escoamentos incompressíveis, essa variação nas propriedades escalares descritas não é de grande relevância para a qualidade dos resultados, sendo seu custo computacional e prático não compatível com sua contribuição Borgnakke e Sonntag (2018) e Bird et al. (1987).

Durante estudos sobre convecção natural em escoamentos, Boussinesq (1903); Oberbeck (1888) *apud* Santos (2022) concluíram que o campo de temperatura exerce influência no balanço da quantidade de movimento linear, através do desequilíbrio forças peso e empuxo ocasionadas pela variação da massa específica do fluido. Dessa forma se utiliza a consideração de que a variação da massa específica é desprezível em todos os termos com exceção do termo

gravitacional. Esta é a chamada aproximação de Boussinesq-Oberbeck (Santos, 2022).

Utilizando esta aproximação a equação de balanço do momentum linear fica da seguinte forma, Eq. 3.24 e 3.25:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} + \beta \Delta T \vec{g} \quad (3.24)$$

$$\Delta T = (T_{ref} - T) \quad (3.25)$$

Na qual o termo  $\beta$  é o coeficiente de expansão volumétrica, uma propriedade física inerente do fluido de interesse e tem como função correlacionar a variação de massa específica com a variação de temperatura do fluido. Um melhor detalhamento matemático dessas propriedades pode ser encontrado em Borgnakke e Sonntag (2018).

Em escoamentos com fluido não-newtonianos, a variação dos parâmetros que descrevem  $\eta(\dot{\gamma})$ , como  $m$  e  $n$  na lei de potência, não é desprezível, mesmo utilizando a considerações de Boussinesq-Oberbeck e precisam de modelagem adicional para garantir a fidelidade dos resultados simulados. Não foram feitas simulações térmicas de fluidos não-newtonianos no presente trabalho. Bird et al. (1987) apresenta exemplos de escoamentos não-isotérmicos utilizando fluidos não-newtonianos com a Lei de Potência Carreau-Yasuda, principalmente para escoamentos em canais anulares.

## 3.5 NÚMEROS ADIMENSIONAIS

### 3.5.1 REYNOLDS

É geralmente aceito como parâmetro mais importante da grande maioria dos escoamentos, sua formulação foi dada primeiramente por Osborne Reynolds em 1883 (White, 2011). Este parâmetro pode ser interpretado como uma razão entre os efeitos advectivos e os efeitos difusivos de um escoamento. Sua modelagem é escrita como sendo, Eq. 3.26:

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{UD}{\nu} \quad (3.26)$$

Na qual  $U$  e  $D$  são, respectivamente, a velocidade característica e o tamanho característico do escoamento. Para as abordagens analíticas esses valores são definidos de acordo com o escoamento e há um relativo consenso na literatura para os escoamentos clássicos, de forma que geralmente é definido pelo autor quais critérios o mesmo utiliza para a escolha dos parâmetros. Na abordagem numérica, se pode definir o número de Reynolds local, no qual  $U$  é a velocidade da célula computacional e  $D$  o  $dx$  ou  $dy$  que são as dimensões da célula computacional (Maliska, 2023).

O valor deste parâmetro é o principal, na maioria dos escoamentos, para se determinar o

quão instável é o problema e qual a sua probabilidade de transicionar para a turbulência devido as instabilidades numéricas presentes no escoamento.

Para fluidos não-newtonianos, outras formas de se escrever o número de Reynolds são apresentadas pela literatura, exemplos podem ser vistos em Madlener et al. (2009). Para a lei de potência, uma abordagem comumente utilizada é a apresentada abaixo, Eq. 3.27.

$$Re = \frac{\rho U^{2-n} L^n}{m} \quad (3.27)$$

Nos quais  $m$  e  $n$  são os parâmetros a serem ajustados utilizando a Lei de Potência.

Tal modelo adaptado, permite prever o comportamento dos fluidos não-newtonianos e a comparar resultados entre diferentes trabalhos, de forma que estes se correlacionam pelos números adimensionais.

### 3.5.2 PRANDTL

O número de Prandtl é um importante número adimensional para escoamentos não isotérmicos. A definição física deste parâmetro é descrita como a razão da difusividade de momentum linear pela difusividade térmica. Outra forma de se interpretar, segundo Santos (2022) é a efetividade do transporte por difusão de quantidade de movimento linear pela térmica. O número de Prandtl é definido como, Eq. 3.28:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (3.28)$$

### 3.5.3 GRASHOF

O número de Grashof é utilizado em escoamentos não isotérmicos e pode ser descrito como a razão entre os efeitos de empuxo pelos efeitos viscosos (White, 2011). O número de Grashof é definido como sendo, Eq. 3.29:

$$Gr = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu^2} \quad (3.29)$$

### 3.5.4 RAYLEIGH

Em escoamentos de convecção natural, o número de Rayleigh se torna tão importante quanto o número de Reynolds para definir qual será o comportamento do escoamento. A definição inicial deste número foi feita inicialmente por Lord Rayleigh (1842- 1919) (White, 2011) em seus estudos em convecção natural. A definição física deste número pode ser dada também como uma relação entre os efeitos advectivos e os efeitos difusivos do escoamento, outra interpretação são os efeitos de empuxo sobre os efeitos viscosos (White, 2011). A formulação matemática deste número é dada por, Eq. 3.30:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha} \quad (3.30)$$

Na qual  $\Delta T$  é uma diferença de temperatura característica do escoamento, que deve ser definida por cada autor de forma a manter a repetibilidade dos experimentos materiais e computacionais, é a mesma definida pela Eq. 3.25.  $L$  é novamente uma dimensão característica arbitrária do escoamento.

Outra forma de definir o número de Rayleigh comumente utilizada na literatura é com a junção de dois outros números adimensionais, o número de Prandtl e o número de Grashof (Santos, 2022) da seguinte forma, Eq. 3.31:

$$Ra = Pr \cdot Gr \quad (3.31)$$

Para garantir a repetibilidade dos resultados, é necessário informar o valor dos três parâmetros adimensionais utilizados em cada uma das simulações ou experimentos materiais.

## 3.6 FORMULAÇÃO GERAL

Pode-se resumir a forma das equações utilizadas no desenvolvimento dos modelos numérico e computacionais como, Eq. 3.32 a 3.34:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}) = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \vec{\nabla} \cdot T = \alpha \nabla^2 T \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} + \beta \Delta T \vec{g} \quad (3.34)$$

De forma que para fluidos newtonianos tem-se que  $\eta(\dot{\gamma}) = \mu$ .

## 4. MODELO MATEMÁTICO-NUMÉRICO

Para a solução das equações diferenciais por modelos computacionais, se faz necessária a discretização utilizando modelos discretos. Este capítulo tem como objetivo detalhar o tratamento numérico utilizado no desenvolvimento do presente trabalho, bem como exemplificar as dificuldades encontradas. Também serão abordado os modelos utilizados para a resolução de sistemas lineares e suas limitações.

Uma revisão da teoria de malhas e de métodos de discretização será apresentada para explicar a origem e a formulação dos métodos utilizados na formulação do trabalho.

### 4.1 MALHA DESLOCADA

Quando se lida com malhas computacionais para fluidos normalmente se tem duas opções de malha a serem utilizadas, malhas deslocadas (Figura 4.1) e malhas colocadas (Figura 4.2). Tais métodos possuem diferentes aplicações e teorias computacionais desenvolvidas especificamente para cada um, de forma que existem softwares abertos e comerciais com ambos os modelos Versteeg e Malalasekera (2007).

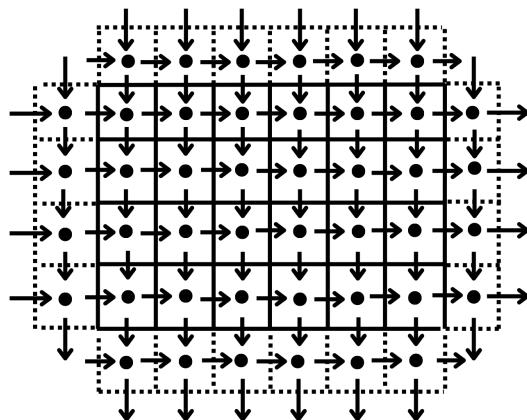


Figura 4.1: Modelo de malha deslocada

Fonte: Do próprio autor

Neste método de malha as informações escalares, como a temperatura e a pressão, são guardados no centro das células enquanto as componentes vetoriais são armazenadas nas fronteiras laterais de cada célula. A componente  $u$  do vetor  $\vec{v}$ , de forma que  $\vec{v} = (u, v)$ , é armazenado

nas fronteiras verticais das células (setas horizontais), enquanto a componente  $v$  é armazenada nas fronteiras horizontais (setas verticais), como mostrado na Figura 4.1 (Fortuna, 2000). Na prática, tem-se múltiplas malhas computacionais, uma para cada uma das componentes vetoriais e uma para as componentes escalares, sendo que cada malha possui suas próprias fronteiras e domínio.

É descrito por Versteeg e Malalasekera (2007), que esta abordagem corrige algumas inconsistências da malha colocada quanto a descrição do campo de pressão, que é crucial para a convergência numérica do escoamento. Por este motivo a malha deslocada é a mais utilizada em softwares que utilizam malhas estruturadas, na qual as fronteiras e o padrão de malha é bem definido e normalmente cartesiano, apara a resolução dos escoamentos.

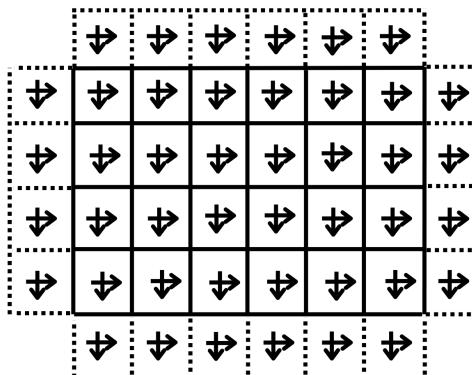


Figura 4.2: Modelo de malha colocada.

Fonte: Do próprio autor

Embora a malha colocada apresente algumas inconsistências no cálculo do gradiente de pressão, ela é amplamente utilizada em softwares que adotam malhas não estruturadas. Nesses casos, não existe um padrão rígido para a geração da malha, o que dificulta a aplicação de múltiplas malhas para diferentes variáveis, como ocorre na abordagem deslocada. Malhas não estruturadas são frequentemente empregadas em softwares comerciais e de código aberto, como o Ansys e o OpenFOAM, devido à sua flexibilidade para lidar com geometrias complexas e industriais. Existe uma vasta gama de teorias específicas que buscam mitigar as inconsistências dessa abordagem (Versteeg e Malalasekera, 2007).

Apesar das limitações das malhas estruturadas em representar geometrias complexas, frente as malhas não estruturadas, metodologias como a fronteira imersa oferecem uma solução prática para representar geometrias espaciais complexas, tornando-as viáveis para uso em contextos industriais. Essa abordagem tem ganhado relevância, especialmente em áreas como a engenharia aeronáutica e automotiva no Brasil, onde a demanda por soluções eficientes é crescente.

## 4.2 VOLUMES FINITOS

Dentre as possíveis metodologias para a discretização de equações diferenciais parciais, o mais utilizado para as equações que representam os escoamentos, é o método dos volumes finitos, por garantir o correto balanço das informações físicas, como a conservação da massa global dos sistemas Versteeg e Malalasekera (2007) e Maliska (2023).

O método dos volumes finitos divide o domínio computacional em pequenos volumes de controle, chamados células computacionais, e faz a média das informações físicas ao longo desses volumes, com a informação física sendo guardada no centro de cada um deles. Uma abordagem matemática mais detalhada desta metodologia pode ser encontrada em Versteeg e Malalasekera (2007) e Maliska (2023), a partir da discretização das equações utilizadas será possível obter um melhor entendimento da aplicação do método.

Segundo esta abordagem, utilizando volumes finitos, uma estratégia muito utilizada para a implementação das condições de contorno é a das células fantasma. Na Figura 4.3 é mostrado um domínio computacional com as células fantasma em questão. A estratégia é utilizar células que não pertencem ao domínio fluido para que as condições de contorno sejam impostas de forma indireta.

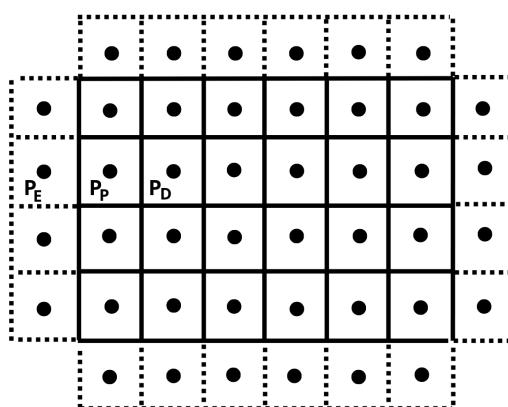


Figura 4.3: Domínio físico com células fantasma para condições de contorno.

Fonte: Do próprio autor

As condições são impostas da seguinte forma para Dirichlet, Eq. 4.1:

$$P_E = 2 * P - P_P \quad (4.1)$$

E para Neumann, Eq. 4.2:

$$P_E = P_P \quad (4.2)$$

Isso é feito para as outras células fantasma, não foram considerados condições de terceira espécie no presente trabalho.

As direções definidas como positiva são as indicadas pela Figura 4.1. As direções são definidas com a letra  $i$  para a direção  $x$  e a letra  $j$  para a direção  $y$ , de forma que, Eq. 4.3 a 4.7:

$$P_P = P_{ij} \quad (4.3)$$

$$P_E = P_{i-1j} \quad (4.4)$$

$$P_D = P_{i+1j} \quad (4.5)$$

$$P_S = P_{ij+1} \quad (4.6)$$

$$P_I = P_{ij-1} \quad (4.7)$$

Na qual  $P_S$  é a célula acima da de interesse (superior) e  $P_I$  a célula abaixo. Será considerado  $n$  sobreescrito ( $p_{ij}^n$ ) para o passo de tempo anterior e  $n + 1$  para o passo de tempo atual.

Para o presente trabalho, a menos que se especifique o contrário, as integrais triplas consideradas são feitas no domínio computacional da célula, sendo assim a seguinte notação se torna equivalente para este trabalho:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{y_{j-\frac{1}{2}\Delta y}}^{y_{j+\frac{1}{2}\Delta y}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}\Delta x}}^{x_{i+\frac{1}{2}\Delta x}} dx dy dt = \int \int \int dx dy dt$$

### 4.3 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DA ENERGIA

Retomando a equação 3.33 como ponto de partida temos:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \nabla \cdot T = \alpha \nabla^2 T$$

Aplicando os operadores e expandindo a equação, considerando o modelo bidimensional, Eq. 4.8:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.8)$$

Para realizar a discretização, se aplica a integral em cada um dos termos com relação às variáveis  $x$ ,  $y$  e  $t$ . começando pelo termo temporal temos, Eq. 4.9:

$$\int_t^{t+\Delta t} \iint \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dt = (T_P^{n+1} - T_P^n) \Delta x \Delta y \quad (4.9)$$

O passo de tempo no qual será considerado os demais termos é arbitrário e diferentes abordagens podem ser encontradas na literatura (Fortuna, 2000). Para a equação de balanço de energia térmica, foi utilizado o método totalmente implícito, tomando todos os termos no tempo atual. O método utilizado para o termo temporal é também chamado de método de Euler.

Para a discretização do termo advectivo temos, Eq. 4.10:

$$\iiint \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy dx dt = u (T_d - T_e) \Delta y \Delta t + v (T_i - T_s) \Delta x \Delta t \quad (4.10)$$

Foi utilizado o método das diferenças centradas para calcular o valor das propriedades escalares nas paredes, de forma que Eq. 4.11 a 4.14:

$$T_e = \frac{T_P + T_E}{2} \quad (4.11)$$

$$T_d = \frac{T_D + T_P}{2} \quad (4.12)$$

$$T_i = \frac{T_I + T_P}{2} \quad (4.13)$$

$$T_s = \frac{T_P + T_S}{2} \quad (4.14)$$

Substituindo as equações 4.11 a 4.14 na equação 4.10 e aplicando as devidas simplificações temos, Eq. 4.15:

$$\left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = u \left( \frac{T_D - T_E}{2} \right) \Delta y \Delta t + v \left( \frac{T_I - T_S}{2} \right) \Delta x \Delta t \quad (4.15)$$

Apesar do método das diferenças centradas não levar em conta a orientação do escoamento (Versteeg e Malalasekera, 2007), seus resultados foram satisfatórios para os problemas apresentados.

Para o termo difusivo temos, Eq. 4.16:

$$\alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \alpha \left( \left( \frac{\partial T}{\partial x_d} - \frac{\partial T}{\partial x_e} \right) \Delta y + \left( \frac{\partial T}{\partial y_i} - \frac{\partial T}{\partial y_s} \right) \Delta x \right) \Delta t \quad (4.16)$$

Considerando novamente o esquema de diferenças centradas temos, Eq. 4.17 a 4.20:

$$\frac{\partial T}{\partial x_e} = \frac{T_P - T_E}{\Delta x} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_d} = \frac{T_D - T_P}{\Delta x} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_i} = \frac{T_I - T_P}{\Delta y} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_s} = \frac{T_P - T_S}{\Delta y} \quad (4.20)$$

$$(4.21)$$

Substituindo as equações 4.17 a 4.20 na equação 4.16 temos, Eq. 4.22:

$$\alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \alpha \left( \left( \frac{T_E - 2T_P + T_D}{\Delta x} \right) \Delta y + \left( \frac{T_I - 2T_P + T_S}{\Delta y} \right) \Delta x \right) \Delta t \quad (4.22)$$

Agrupando as equações 4.9, 4.15 e 4.22 temos, Eq. 4.23:

$$\begin{aligned} & (T_p^{n+1} - T_p^n) \Delta x \Delta y + u \left( \frac{T_D - T_E}{2} \right) \Delta y \Delta t \\ & + v \left( \frac{T_I - T_S}{2} \right) \Delta x \Delta t \\ & = \alpha \left( \frac{T_E - 2T_P + T_D}{\Delta x} \Delta y + \frac{T_I - 2T_P + T_S}{\Delta y} \Delta x \right) \Delta t \end{aligned} \quad (4.23)$$

Substituindo pela nomenclatura adotada no tópico anterior e agrupando termos similares temos, Eq. 4.24:

$$\begin{aligned} & T_{ij}^{n+1} \left( 1 + \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{2\alpha \Delta t}{\Delta y^2} \right) \\ & - T_{i+1j}^{n+1} \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} - T_{i-1j}^{n+1} \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \\ & - T_{ij+1}^{n+1} \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} - T_{ij-1}^{n+1} \frac{\alpha \Delta t}{\Delta y^2} \\ & + u_{ij}^n \left( \frac{T_{i+1j}^{n+1} - T_{i-1j}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \Delta t \\ & + v_{ij}^n \left( \frac{T_{ij+1}^{n+1} - T_{ij-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \Delta t = T_{ij}^n \end{aligned} \quad (4.24)$$

Com essa formulação é possível montar um sistema de equações do tipo:

$$Ax = b$$

Que é compatível com os métodos de solução de sistemas lineares.

## 4.4 ACOPLAGEMTO PRESSÃO-VELOCIDADE

A solução da equação de balanço da quantidade de movimento, acaba sendo dificultada pela quantidade de incógnitas a serem modeladas em relação a quantidade de equações disponíveis (Silveira-Neto, 2020).

De fato, retomando as equações 3.32 e 3.34 temos:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} + \beta \Delta T \vec{g}$$

Nas equações de balanço tem-se três incógnitas a serem modeladas:  $u$ ,  $v$  e  $p$  de forma que tem-se menos equações variáveis. Se faz necessário recorrer a equação da continuidade, retomando a equação 3.32 e abrindo temos, Eq. 4.25:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.25)$$

É possível perceber que a equação da continuidade não contém a componente de pressão, de forma que seria necessário manipulações matemáticas para utilizar a equação em conjunto com as demais.

Metodologias como *Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations (SIMPLE)*, *Pressure-Implicit with Splitting of Operators (PISO)* e o método da projeção de Chorin são comumente utilizadas na literatura para lidar com este problema de fechamento (Versteeg e Malalasekera, 2007). No desenvolvimento do software foi adotado uma variação do método de Chorin, também chamado de método do passo fracionado (*Fractional Step em inglês*) (Santos, 2022).

A partir do campo inicial de pressão, do passo de tempo anterior, chamado de  $p_0$  é determinado um campo de velocidade aproximado  $\vec{V}^*$ . De forma que, Eq. 4.26 e 4.27:

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p_0 + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} + \beta \Delta T \vec{g} \quad (4.26)$$

$$\frac{v^* - v^n}{\Delta t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p_0 + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} + \beta \Delta T \vec{g} \quad (4.27)$$

Foi considerado a integral em  $t$  utilizando o método de Euler, para simplificar a descrição do modelo.

Enquanto a real velocidade seria, Eq. 4.28 e 4.29:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} + \beta \Delta T \vec{g} \quad (4.28)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} + \beta \Delta T \vec{g} \quad (4.29)$$

Subtraindo a equação 4.27 da equação 4.29 temos, Eq. 4.30:

$$\frac{\vec{v} - \vec{v}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} (p - p_0) \quad (4.30)$$

É possível definir um fator de correção para levar o campo de pressão do tempo anterior para o tempo atual da seguinte forma, Eq. 4.31:

$$p = p_0 + p' \quad (4.31)$$

De forma que podemos reorganizar os termos em, Eq. 4.32:

$$p' = p - p_0 \quad (4.32)$$

Assim, substituindo a equação 4.32 na equação 4.30, temos, Eq. 4.33:

$$\frac{\vec{v} - \vec{v}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p' \quad (4.33)$$

Aplicando o divergente em ambos os lados da equação, Eq. 4.34:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{v} - \vec{v}^*}{\Delta t} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} p' \\ \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{v}^*}{\Delta t} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}^2 p' \end{aligned} \quad (4.34)$$

Utilizando a equação da continuidade temos, Eq. 4.35:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v}^* &= \frac{\Delta t}{\rho} \vec{\nabla}^2 p' \end{aligned} \quad (4.35)$$

Manipulando a equação 4.34 temos, Eq. 4.36:

$$\vec{v} = \vec{v}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \vec{\nabla} p' \quad (4.36)$$

Que para o presente trabalho pode ser escrito como, Eq. 4.37 e 4.38:

$$u = u^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (4.37)$$

$$v = v^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (4.38)$$

O que fecha a modelagem do acoplamento pressão-velocidade utilizando o método da projeção de Chorin.

Sintetizando as etapas para a resolução dos campos de pressão e velocidade temos:

- Cálculo do campo de velocidade aproximado com a pressão do passo de tempo anterior

usando a equação 4.27:

$$\frac{v^* - v^n}{\Delta t} + \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p_0 + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} + \beta \Delta T g$$

- Cálculo da correção do campo de pressão, Eq. 4.35:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}^* = \frac{\Delta t}{\rho} \vec{\nabla}^2 p'$$

- Correção do campo de velocidade para o passo de tempo atual, Eq. 4.36:

$$\vec{v} = \vec{v}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \vec{\nabla} p'$$

- Correção do campo de pressão para o passo de tempo posterior, Eq. 4.31:

$$p = p_0 + p'$$

## 4.5 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE

Expandindo a equação 3.34 em suas componentes temos, Eq. 4.39 e 4.40

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} + \beta \Delta T g \quad (4.40)$$

Devido à complexidade do termo difusivo é pertinente realizar o detalhamento deste termo separadamente. Assim temos, Eq. 4.41, 4.42:

$$\vec{\nabla} \cdot \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} = \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} \eta(\dot{\gamma}) 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \eta(\dot{\gamma}) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \eta(\dot{\gamma}) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \eta(\dot{\gamma}) 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} &= \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} \eta(\dot{\gamma}) 2 \frac{\partial u}{\partial x} & \eta(\dot{\gamma}) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \eta(\dot{\gamma}) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \eta(\dot{\gamma}) 2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta(\dot{\gamma}) 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta(\dot{\gamma}) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right) \\ &\quad + \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta(\dot{\gamma}) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta(\dot{\gamma}) 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Resolvendo o divergente e substituindo nas equações 4.39 e 4.40 resulta em, Eq. 4.43 e 4.44:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta(\dot{\gamma}) 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta(\dot{\gamma}) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta(\dot{\gamma}) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta(\dot{\gamma}) 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \beta \Delta T g \quad (4.44)$$

Tomando como referência o passo a passo adotado na discretização dos termos da equação da energia, temos:

A discretização do termo temporal, Eq. 4.45 e 4.46:

$$\iiint \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dt = (u_P^* - u_P^n) \Delta x \Delta y \quad (4.45)$$

$$\iiint \frac{\partial v}{\partial t} dx dy dt = (v_P^* - v_P^n) \Delta x \Delta y \quad (4.46)$$

A discretização do termo advectivo utilizando diferenças centradas, Eq. 4.47 e 4.48:

$$u \iiint \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dt + v \iiint \frac{\partial u}{\partial y} dx dy dt = u_p \left( \frac{u_D - u_E}{2} \right) \Delta y \Delta t + v_p \left( \frac{u_I - u_S}{2} \right) \Delta x \Delta t \quad (4.47)$$

$$u \iiint \frac{\partial v}{\partial x} dx dy dt + v \iiint \frac{\partial v}{\partial y} dx dy dt = u_p \left( \frac{v_D - v_E}{2} \right) \Delta y \Delta t + v_p \left( \frac{v_I - v_S}{2} \right) \Delta x \Delta t \quad (4.48)$$

Para a discretização do termo de pressão temos, Eq. 4.49 e 4.50:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \Delta t \Delta y (p_D - p_E) \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \Delta t \Delta x (p_I - p_S) \quad (4.50)$$

Sendo essa notação baseada na definição de domínio adotada no tópico anterior.

A discretização do termo difusivo pode ser feitas por partes, a primeira resulta em, Eq. 4.51 e 4.52:

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta(\dot{\gamma}) 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy dt = 2 \left( \left( \eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial u}{\partial x} \right)_d - \left( \eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e \right) \Delta y \Delta t$$

$$\iiint \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta(\dot{\gamma}) 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy dt = 2 \left( \left( \eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial v}{\partial y} \right)_i - \left( \eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial v}{\partial y} \right)_s \right) \Delta x \Delta t$$

$$2 \left( \left( \eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial u}{\partial x} \right)_d - \left( \eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial u}{\partial x} \right)_e \right) \Delta y \Delta t = 2 \left( \eta(\dot{\gamma})_d \frac{u_D - u_P}{\Delta x} - \eta(\dot{\gamma})_e \frac{u_P - u_E}{\Delta x} \right) \Delta y \Delta t \quad (4.51)$$

$$2 \left( \left( \eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial v}{\partial y} \right)_i - \left( \eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial v}{\partial y} \right)_s \right) \Delta x \Delta t = 2 \left( \eta(\dot{\gamma})_i \frac{v_I - v_P}{\Delta y} - \eta(\dot{\gamma})_s \frac{v_P - v_S}{\Delta y} \right) \Delta x \Delta t \quad (4.52)$$

Para posterior uso nos métodos numéricos, é eficiente dividir o termo que resta da difusão em duas partes, Eq. 4.53 e 4.54:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta(\dot{\gamma}) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta(\dot{\gamma}) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \iiint \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy dt + \iiint \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy dt & \\ = \left( \eta(\dot{\gamma})_i \frac{u_I - u_P}{\Delta y} - \eta(\dot{\gamma})_s \frac{u_P - u_S}{\Delta y} \right) \Delta x \Delta t & \\ + \left( \eta(\dot{\gamma})_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \eta(\dot{\gamma})_s \frac{\partial v}{\partial x_s} \right) \Delta x \Delta t & \quad (4.53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy dt + \iiint \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta(\dot{\gamma}) \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy dt & \\ = \left( \eta(\dot{\gamma})_d \frac{\partial u}{\partial y_d} - \eta(\dot{\gamma})_e \frac{\partial u}{\partial y_e} \right) \Delta y \Delta t & \\ + \left( \eta(\dot{\gamma})_d \frac{v_D - v_P}{\Delta x} - \eta(\dot{\gamma})_e \frac{v_P - v_E}{\Delta x} \right) \Delta y \Delta t & \quad (4.54) \end{aligned}$$

Unindo as equações 4.45, 4.47, 4.49, 4.51 e 4.53 para a coordenada u e 4.46, 4.48, 4.50, 4.52 e 4.54 temos, Eq. 4.55 e 4.56:

$$\begin{aligned}
& (u_P^{*n+1} - u_P^n) \Delta x \Delta y + u_P \left( \frac{u_D - u_E}{2} \right) \Delta y \Delta t + v_P \left( \frac{u_I - u_S}{2} \right) \Delta x \Delta t \\
& = - \frac{\Delta t \Delta y}{\rho} (p_D - p_E) + 2 \frac{1}{\rho} \left( \eta(\dot{\gamma})_d \frac{u_D - u_P}{\Delta x} - \eta(\dot{\gamma})_e \frac{u_P - u_E}{\Delta x} \right) \Delta y \Delta t \\
& + \frac{1}{\rho} \left( \eta(\dot{\gamma})_i \frac{u_I - u_P}{\Delta y} - \eta(\dot{\gamma})_s \frac{u_P - u_S}{\Delta y} \right) \Delta x \Delta t \\
& + \frac{1}{\rho} \left( \eta(\dot{\gamma})_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \eta(\dot{\gamma})_s \frac{\partial v}{\partial x_s} \right) \Delta x \Delta t
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
& (v_P^* - v_P^n) \Delta x \Delta y + u_P \left( \frac{v_D - v_E}{2} \right) \Delta y \Delta t + v_P \left( \frac{v_I - v_S}{2} \right) \Delta x \Delta t \\
& = - \frac{\Delta t \Delta x}{\rho} (p_I - p_S) + 2 \frac{1}{\rho} \left( \eta(\dot{\gamma})_i \frac{v_I - v_P}{\Delta y} - \eta(\dot{\gamma})_s \frac{v_P - v_S}{\Delta y} \right) \Delta x \Delta t \\
& + \frac{1}{\rho} \left( \eta(\dot{\gamma})_d \frac{\partial u}{\partial y_d} - \eta(\dot{\gamma})_e \frac{\partial u}{\partial y_e} \right) \Delta y \Delta t \\
& + \frac{1}{\rho} \left( \eta(\dot{\gamma})_d \frac{v_D - v_P}{\Delta x} - \eta(\dot{\gamma})_e \frac{v_P - v_E}{\Delta x} \right) \Delta y \Delta t + \beta \Delta T g
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Considerando o termo advectivo no passo de tempo anterior, para evitar não linearidades no sistema de equações, e o termo difusivo, com exceção das derivadas cruzadas no tempo atual para aumentar a estabilidade do sistema. Para facilitar a escrita das equações será considerado que  $v_P^* = v_{ij}^{*n+1}$ , agrupando os termos das equações temos, Eq. 4.57 e 4.58:

$$u_{ij}^{n+1} - a \frac{2 \Delta t}{\rho \Delta x^2} [\eta(y_j) u_{i+1,j}^{n+1} + \eta(y_j) u_{i-1,j}^{n+1}] - \frac{\Delta t}{\rho \Delta y^2} [\eta(y_{j+1}) u_{i,j+1}^{n+1} + \eta(y_{j-1}) u_{i,j-1}^{n+1}] = b_u \tag{4.57}$$

$$v_{ij}^{*n+1} a_v - \frac{2 \Delta t}{\rho \Delta y^2} (\eta(\dot{\gamma})_i v_{ij+1}^{*n+1} + \eta(\dot{\gamma})_s v_{ij-1}^{*n+1}) - \frac{\Delta t}{\rho \Delta x^2} (\eta(\dot{\gamma})_d v_{i+1,j}^{*n+1} + \eta(\dot{\gamma})_e v_{i-1,j}^{*n+1}) = b_v \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
b_v &= v_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{ij}^n - p_{ij-1}^n}{\Delta y} + \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \left( \eta(\dot{\gamma})_d \frac{\partial u}{\partial y_d} - \eta(\dot{\gamma})_e \frac{\partial u}{\partial y_e} \right) \\
&- u_{ij}^n \Delta t \left( \frac{v_{i+1,j}^n - v_{i-1,j}^n}{2 \Delta x} \right) - v_{ij}^n \Delta t \left( \frac{v_{ij+1}^n - v_{ij-1}^n}{2 \Delta y} \right) + \beta(T_{ij} - T_{ref}) g \\
b_u &= u_{ij}^n - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_{ij}^n - p_{i-1,j}^n}{\Delta x} - u_{ij}^n \Delta t \left( \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2 \Delta x} \right) - v_{ij}^n \Delta t \left( \frac{u_{ij+1}^n - u_{ij-1}^n}{2 \Delta y} \right) \\
&+ \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} \left( \eta(\dot{\gamma})_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \eta(\dot{\gamma})_s \frac{\partial v}{\partial x_s} \right) \\
a_u &= \left( 1 + 2 \frac{(\eta(\dot{\gamma})_d + \eta(\dot{\gamma})_e) \Delta t}{\rho \Delta x^2} + \frac{(\eta(\dot{\gamma})_i + \eta(\dot{\gamma})_s) \Delta t}{\rho \Delta y^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Para a discretização do cálculo da correção da pressão, a equação resultante é uma equação de Poisson, de forma que sua estabilidade numérica é mais delicada que as demais equações, não atendendo por exemplo os requisitos de convergência dos métodos numéricos mais comuns, como será demonstrado mais adiante. Retomando a equação 4.35 temos, Eq. 4.60:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2 p' &= \frac{\rho}{\Delta t} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}^* \\ \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} &= \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (4.60)$$

Seguindo os mesmos critérios das equações anteriores temos, Eq. 4.61:

$$\begin{aligned}&\left( \frac{p'_D - p'_P}{\Delta x} - \frac{p'_P - p'_E}{\Delta x} \right) \Delta y + \left( \frac{p'_I - p'_P}{\Delta y} - \frac{p'_P - p'_S}{\Delta y} \right) \Delta x \\&= \frac{\rho}{\Delta t} ((u_p^* - u_E^*) \Delta y + (v_p^* - v_S^*) \Delta x) \\&\quad + \left( \frac{p'_D - 2p'_P + p'_E}{\Delta x^2} \right) + \left( \frac{p'_I - 2p'_P + p'_S}{\Delta y^2} \right) \\&= \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{(u_P^* - u_E^*)}{\Delta x} + \frac{(v_P^* - v_S^*)}{\Delta y} \right)\end{aligned}\quad (4.61)$$

Agrupando termos semelhantes e substituindo a nomenclatura, Eq. 5.6-23:

$$p'_{ij} \left( \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} \right) - \frac{p'_{i+1j}}{\Delta x^2} - \frac{p'_{i-1j}}{\Delta x^2} - \frac{p'_{ij+1}}{\Delta y^2} - \frac{p'_{ij-1}}{\Delta y^2} = \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{(u_{ij}^* - u_{i-1j}^*)}{\Delta x} + \frac{(v_{ij}^* - v_{ij-1}^*)}{\Delta y} \right)\quad (4.62)$$

O desenvolvimento numérico das demais etapas do método de Chorin é simples em relação aos demais, Eq. 4.63 a 4.65:

$$\vec{v} = \vec{v}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \vec{\nabla} p' \quad (4.63)$$

$$u = u^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (4.64)$$

$$v = v^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} \quad (4.65)$$

Utilizando a nomenclatura adotada, Eq. 4.66 e 4.67:

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \left( \frac{p'_{ij} - p'_{i-1j}}{\Delta x} \right) \quad (4.66)$$

$$v_{ij}^{n+1} = v_{ij}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \left( \frac{p'_{ij} - p'_{ij-1}}{\Delta y} \right) \quad (4.67)$$

Finalmente, para a correção da pressão, Eq. 4.68:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p' \\ p_{ij}^{n+1} &= p_{ij}^n + p'_{ij} \end{aligned} \quad (4.68)$$

Com isso se tem todas as equações necessárias para construir as rotinas computacionais.

## 4.6 MÉTODOS DE SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Para a solução de sistemas lineares do tipo  $Ax=b$  comumente é utilizado os chamados métodos iterativos. Dois dos métodos iterativos mais utilizados são o método de Gauss-Seidel, utilizado principalmente no meio acadêmico devido sua fácil implementação, e o método dos Gradientes conjugados, utilizado principalmente pela sua rápida convergência.

### 4.6.1 MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

O método de Gauss-Seidel se baseia-se na decomposição da matriz  $A$  em uma soma de três componentes: a parte diagonal, a parte estritamente triangular inferior e a parte estritamente triangular superior. A cada iteração, o método atualiza os valores de  $x$  utilizando diretamente os resultados obtidos nas iterações anteriores (Fortuna, 2000).

Sua fórmula iterativa pode ser expressa como, Eq. 4.69:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}k_j^{k+1} - \sum_{j>i} a_{ij}k_j^{k+1}) \quad (4.69)$$

Na qual  $x_i^{k+1}$  é o valor atualizado da incógnita  $i$ -ésima na  $k$ -ésima iteração.

A condição de convergência do método de Gauss-Seidel é que a matriz  $A$  seja diagonal dominante, ou seja, os termos da diagonal da matriz  $A$  devem ser maiores que a soma dos demais termos na linha. Por este critério ser simples de se atender para sistemas transientes, como as equações do balanço do momentum linear. Nessas situações, o método de Gauss-Seidel tende a convergir a uma taxa aceitável.

Por outro lado, o método se torna pouco eficiente quando aplicado em equações como a equação de Poisson, por esta não ter uma diagonal dominante claramente definida. Isto faz com que a convergência se torne extremamente difícil para estes casos particulares.

É importante ressaltar que apesar de sua robustez em alguns casos, o método de Gauss-Seidel geralmente apresenta uma taxa de convergência mais lenta em comparação ao método dos Gradientes Conjugados, mesmo quando os critérios de convergência são atendidos. Mais informações a respeito deste método podem ser encontradas em Fortuna (2000).

#### 4.6.2 MÉTODO DOS GRADIENTES CONJUGADOS

A teoria acerca do método dos gradientes conjugados, exige uma formulação complexa, que dá origem a vários métodos de resolução de sistemas lineares além deste, como os gradientes biconjugados. Para o melhor entendimento desta formulação, uma descrição matemática detalhada é apresentada por Shewchuk (1994). No presente trabalho, será abordado apenas os critérios de convergência e as etapas para a aplicação do método, que serão abordadas no modelo computacional.

A convergência do método dos Gradientes Conjugados requer que a matriz  $A$  seja simétrica e definida positiva. A condição de definida positiva é satisfeita por todos os sistemas utilizados na presente formulação. No entanto, a simetria da matriz depende do modelo físico em questão. Por exemplo, no caso de fluidos newtonianos, o sistema linear resultante do balanço da quantidade de movimento linear é simétrico. Por outro lado, essa condição de simetria é violada quando a viscosidade varia ao longo do domínio, o que impede a aplicação do método em todos os casos para este conjunto de sistemas.

Sistemas que envolvem propriedades escalares, como temperatura ou correção de pressão, cuja matriz  $A$  não varia ao longo do domínio físico, podem ser resolvidos eficientemente com o método dos Gradientes Conjugados. Nessas situações, o método garante uma rápida convergência e supera as dificuldades enfrentadas pelo método de Gauss-Seidel, especialmente ao lidar com a equação de Poisson.

Unindo ambas as metodologias, o presente trabalho adotou o método de Gauss-Seidel para a solução dos sistemas de  $u^*$  e  $v^*$ , e o método dos gradientes conjugados para a solução de  $p'$  e  $T$ .

### 4.7 CONVERGÊNCIA E ESTABILIDADE

Para garantir a estabilidade dos sistemas lineares de interesse, foi adotado a condição de Courant-Friedrichs-Lowy ou CFL (Courant et al., 1928). Que é um critério que garante que as informações dentro do escoamento não irão “pular” de células dentro de um único passo de tempo, o que poderia deixar o escoamento instável. Um exemplo do caso que é evitado pelo CFL pode ser visto na Figura 4.4. O valor utilizado em todas as simulações presentes foi tal que  $CFL \leq 0.8$ .

Entre os métodos numéricos utilizados, o método de Gauss-Seidel, apesar de sua simplicidade e convergência mais lenta, demonstrou ser menos sensível tanto aos critérios de conver-

gência quanto ao tamanho do passo de tempo nas simulações. Nos testes realizados, o método alcançou a convergência mesmo com valores do número de *CFL* superiores a 2.

Em contraste, o método dos Gradientes Conjugados mostrou-se significativamente mais sensível às condições do sistema linear e ao valor do *CFL*. Observou-se que, com valores de *CFL* ligeiramente superiores a 1, o método perdeu sua convergência. Embora apresente uma taxa de convergência mais rápida quando dentro dos critérios de estabilidade, o método dos Gradientes Conjugados exigiu um controle mais rigoroso sobre o passo de tempo para garantir resultados estáveis.

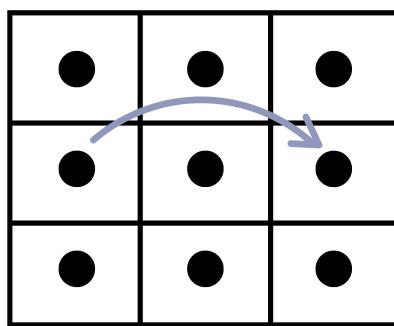


Figura 4.4: informação pulando de célula, caso que é evitado com o CFL.

Fonte: Do próprio autor

Para verificar a convergência das simulações, principalmente da equação de Poisson por ser mais sensível, se utilizou o critério do divergente do campo de pressão. Considerando que a equação da continuidade, que deu origem à equação de Poisson para a correção da pressão, tenha sido bem resolvida pelo sistema, tem-se que, Eq. 4.70:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.70)$$

De forma que a soma dessa equação em todo domínio numéricico, não pode superar a tolerância dos métodos numéricos adotados. Este cálculo foi realizado a cada passo de tempo durante a validação das rotinas e é feito ao final de cada simulação para garantir coerência física para os resultados.

## 5. MODELOS COMPUTACIONAIS

Com base no modelo numérico, foram construídas rotinas computacionais para solucionar os escoamentos. O código foi desenvolvido em linguagem C, utilizando as bibliotecas padrões de entrada e saída de dados. O software desenvolvido está disponibilizado integralmente no apêndice B, nesta secção serão feitos comentários e explicações pontuais a respeito da implementação dos métodos, as condições de contorno e o valor das propriedades físicas utilizadas

As propriedades físicas do escoamento foram variadas a fim de garantir que os valores adimensionais sejam compatíveis com a literatura, para a comparação de resultados.

### 5.1 COUETTE PLANO

Para o escoamento de Couette, como já detalhado no modelo computacional e visível da Figura 2.1. Tem-se as seguintes condições de contorno.

O valor de  $u$  na parede superior é igual a velocidade de referência, neste caso adotado como  $1 \left[ \frac{m}{s} \right]$ , com esta exceção, todos os valores de condições de contorno, respeitando a Tabela 5.1, são iguais a zero.

Tabela 5.1: Condições de contorno para o escoamento de Couette

Parede/Propriedade	$u$	$v$	$p$
Esquerda	2ª espécie	2ª espécie	1ª espécie
Direita	2ª espécie	2ª espécie	1ª espécie
Superior	1ª espécie	1ª espécie	2ª espécie
Inferior	1ª espécie	1ª espécie	2ª espécie

Fonte: Do próprio autor

As propriedades  $\eta$ ,  $\nu$  e  $m$  foram variadas de forma que se obtivesse diferentes números de Reynolds ao longo do escoamento, tanto no caso newtoniano quanto no caso não-newtoniano. Os valores utilizados bem como os resultados correspondentes a eles são detalhados no capítulo de resultados.

Os valores adimensionais utilizados para os escoamentos de Couette simulados, bem como as propriedades dos métodos numéricos como a tolerância e a quantidade máxima de iterações de Gauss-Seidel são dispostos na tabela 5.2, e serão retomados na secção de resultados.

Tabela 5.2: Condições de contorno para o escoamento de Couette

Propriedade	Valor
Velocidade fronteira superior ( $v_{ref}$ )	1 $\frac{m}{s}$
Massa específica ( $\rho$ )	1 $\frac{kg}{m^3}$
Tolerância	$10^{-9}$
H	1 [m]
L	1 [m]
Máximo de iterações	$10^4$

Fonte: Do próprio autor

O domínio utilizado foi de 41x41, sendo que, para garantir um  $CFL$  baixo, se utilizou 9600 passos de tempo, o que garantiu a convergência para todos os escoamentos simulados. O tempo computacional final foi de 100(s).

O domínio utilizado é representado na Figura 5.1:

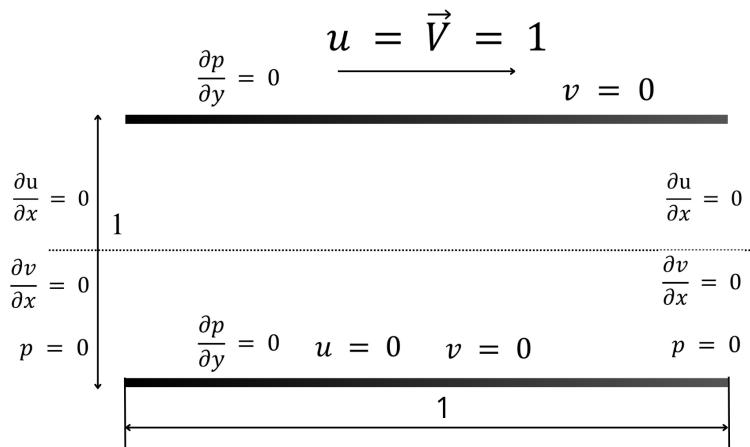


Figura 5.1: Modelo computacional do escoamento de Couette.

Fonte: Do próprio autor

## 5.2 POISEUILLE PLANO

As condições do escoamento de Poiseuille plano são mostradas na tabela 5.3, o escoamento de Poiseuille, assim como o de Couette, foi utilizado para testar tantos fluidos newtonianos quanto os não-newtonianos.

Tabela 5.3: Condições de contorno para o escoamento de Poiseuille

Parede/Propriedade	$u$	$v$	$p$
Esquerda	1ª espécie	1ª espécie	2ª espécie
Direita	2ª espécie	2ª espécie	1ª espécie
Superior	1ª espécie	1ª espécie	2ª espécie
Inferior	1ª espécie	1ª espécie	2ª espécie

Fonte: Do próprio autor

Pare este escoamento, as condições de contorno são iguais a zero, com exceção da componente  $u$  do vetor velocidade à esquerda, que tem um perfil uniforme de velocidade, variável entre os escoamentos.

As mesmas propriedades, que foram variadas no escoamento de Couette, foram variadas para diferentes números de Reynolds neste mesmo escoamento, porém, além destas também se variou a velocidade de entrada a esquerda do escoamento. Como mostrado na secção de resultados.

As dimensões deste escoamento, ilustradas na Figura 5.2, são maiores que os demais, pois o perfil de velocidade precisa de espaço e tempo para se desenvolver completamente. Neste caso a escolha do domínio físico pode influenciar no transiente e no resultado, para diferentes números de Reynolds. A escolha de malha utilizada foi de 100x100, para garantir que para altos números de  $n$  e de Reynolds, o escoamento possa convergir.

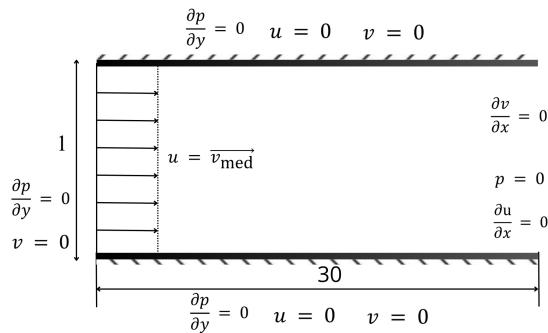


Figura 5.2: Modelo computacional do escoamento de Poiseuille.

Fonte: Do próprio autor

As propriedades físicas que não foram variadas para o escoamento de Poiseuille são as mesmas que para o escoamento de Couette, com exceção da dimensão  $L$ , de forma que podem ser referenciadas pela tabela 5.4.

Tabela 5.4: Propriedades físicas para o escoamento de Poiseuille

Propriedade	Valor
Velocidade fronteira superior ( $v_{ref}$ )	1 m s <sup>-1</sup>
Massa específica ( $\rho$ )	1 kg m <sup>-3</sup>
Tolerância	$1 \times 10^{-9}$
H	1 m
L	30 m
Máximo de iterações	$10^4$
Diferença de pressão ( $\Delta p$ )	0.6 Pa

Fonte: Do próprio autor

### 5.3 CAVIDADE COM TAMPA DESLIZANTE

Sendo o escoamento da cavidade com tampa deslizante um escoamento mais complexo que os demais, tem-se que suas condições de contorno, mostradas na Tabela 5.5, trazem complicações numéricas.

Tabela 5.5: Condições de contorno para o escoamento de cavidade com tampa deslizante

Parede/Propriedade	$u$	$v$	$p$
Esquerda	1 <sup>a</sup> espécie	1 <sup>a</sup> espécie	2 <sup>a</sup> espécie
Direita	1 <sup>a</sup> espécie	1 <sup>a</sup> espécie	2 <sup>a</sup> espécie
Superior	1 <sup>a</sup> espécie	1 <sup>a</sup> espécie	2 <sup>a</sup> espécie
Inferior	1 <sup>a</sup> espécie	1 <sup>a</sup> espécie	2 <sup>a</sup> espécie

Fonte: Do próprio autor

Para este escoamento, por ter condições de segunda espécie em todas as direções de  $p$ , a equação de Poisson resulta em um sistema indeterminado e singular, com determinante igual a zero. Tal condição faz com que a equação da correção da pressão não satisfaça os critérios para a convergência do método de Gauss-Seidel. Esse é um dos exemplos de escoamentos que mostram a instabilidade da equação de correção da pressão e porque, dentre as equações resolvidas para resolver escoamentos, esta é uma das mais difíceis em termos numéricos.

Para os valores de condição de contorno, é mostrado na Figura 5.3 que todos os valores, são iguais a zero, com exceção da fronteira superior que é igual a velocidade de referência. A malha utilizada variou de acordo com o número de Reynolds, de forma que um maior número de Reynolds exigiu uma malha mais refinada. Pode-se assumir que uma malha de 131x131 resolve todo o intervalo de número de Reynolds proposto.

Para este escoamento apenas a viscosidade foi variada a fim de se variar o número de Reynolds, visto que este problema não foi utilizado para validar modelos não-newtonianos. As propriedades constantes são as mesmas que as dos escoamentos de Couette e Poiseuille.

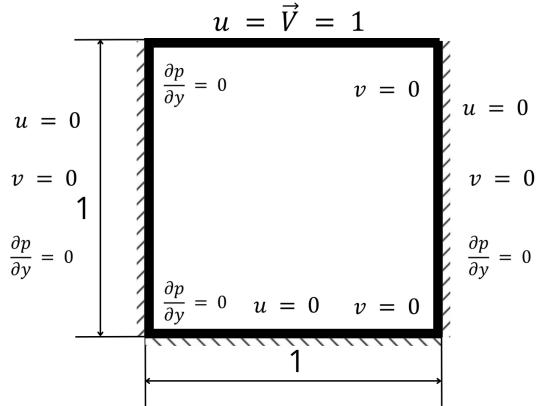


Figura 5.3: Modelo computacional da cavidade com tampa deslizante.

Fonte: Do próprio autor

## 5.4 CAVIDADE DIFERENCIALMENTE AQUECIDA

Para este escoamento, se faz necessário a definição das condições de contorno de mais uma propriedade, a temperatura. As condições de contorno são descritas pela tabela 5.6:

Tabela 5.6: Condições de contorno para cavidade diferencialmente aquecida

Parede/Propriedade	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>p</i>	<i>T</i>
Esquerda	1ª espécie	1ª espécie	2ª espécie	1ª espécie
Direita	1ª espécie	1ª espécie	2ª espécie	1ª espécie
Superior	1ª espécie	1ª espécie	2ª espécie	2ª espécie
Inferior	1ª espécie	1ª espécie	2ª espécie	2ª espécie

Fonte: Do próprio autor

Os valores utilizados para as condições de contorno são zero em todas as direções para todas as propriedades com exceção da temperatura. A temperatura das paredes esquerda e direita são definidas como 80°C e 50°C respectivamente e permanecidas constantes durante todo o escoamento.

As propriedades físicas utilizadas são descritas pela Tabela 5.7.

O coeficiente de expansão térmica é variável e calculado a partir da seguinte equação, Eq. 5.1:

$$\beta = \frac{Ra \cdot \nu \cdot \alpha}{g \cdot (T_{quente} - T_{frio}) \cdot H^3} \quad (5.1)$$

De forma que se possa impor o valor de coeficiente de Rayligh para diferentes condições de escoamento. Possibilitando comparar estes valores com a literatura.

A Figura 5.4 exemplifica o domínio físico utilizado para as equações, é possível observar a semelhança com o escoamento anterior, mudando apenas a velocidade da fronteira superior e a questão térmica do escoamento:

Tabela 5.7: Propriedades físicas utilizadas do escoamento de cavidade diferencialmente aquecida

Propriedade	Valor
Velocidade fronteira superior ( $v_{ref}$ )	$1 \text{ m s}^{-1}$
Massa específica ( $\rho$ )	$1 \text{ kg m}^{-3}$
Tolerância	$1 \times 10^{-9}$
H	1 m
L	1 m
Máximo de iterações	$10^4$
$\alpha$	$0.01 \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$
$g$	$9.81 \text{ m s}^{-2}$
$\nu$	$0.0071 \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$
$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$	0.71

Fonte: Do próprio autor

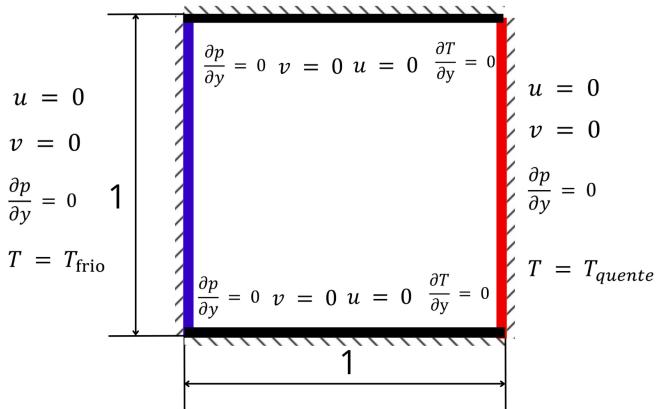


Figura 5.4: Modelo computacional da cavidade térmica.

Fonte: Do próprio autor

A malha computacional utilizada para este escoamento foi de 100x100, a fim de se garantir que todo o intervalo de números de Rayleigh fosse atingido.

## 5.5 ALGORITMOS DE SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

A implementação do método de Gauss-seidel é feita da como mostra a Figura 5.5

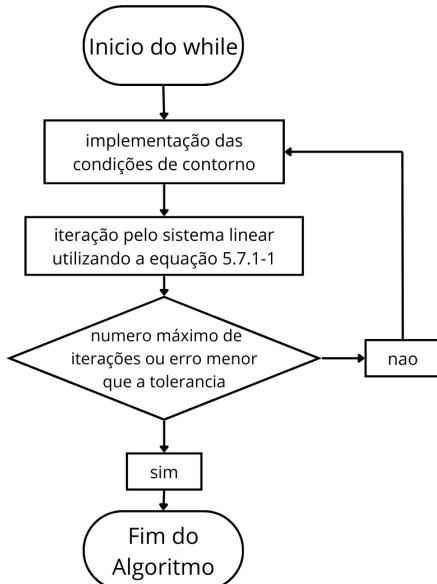


Figura 5.5: Lógica do algoritmo de Gauss-Seidel utilizado no código.

Fonte: Do próprio autor

Inicialmente, o método começa com a atualização das condições de contorno, garantindo que os valores das células fantasma sejam atualizadas de forma correta. Em seguida, se aplica a equação 4.69, onde cada incógnita é atualizada de forma sucessiva com base nos valores mais recentes das demais incógnitas. Após cada iteração, calcula-se o erro, comparando a solução atual com a obtida no passo anterior. O processo continua até que um dos critérios de parada do número máximo de equações ou o erro menor que o especificado seja atingido. Por ser um método iterativo relativamente simples, o Gauss-Seidel requer menos etapas de implementação em comparação com os gradientes conjugados.

O método dos gradientes conjugados, por ser mais complexo, requer mais etapas para sua implementação. seu algorítmico é representado pela Figura 5.6.

Inicialmente se inicializa os vetores de resíduo  $r$  e o vetor conjugado  $p$  com o estado inicial do sistema. Na rotina desenvolvida se utilizou como chute inicial para essa inicialização o passo de tempo anterior para acelerar a convergência do método. Após isto se calcula um passo  $\alpha$  e se desloca os vetores  $x$  e  $r$  na direção  $p$  com um passo  $\alpha$ . Caso o critério de tolerância não tenha sido atingido, se calcula uma correção  $\beta_k$  de forma que se possa iniciar o passo de tempo posterior

Devido a teoria de gradientes conjugados garantir a convergência do método em no máximo  $n$  iterações para um sistema de  $n$  variáveis, não se utilizou o critério de número máximo de iterações para a parada, uma vez que caso a convergência não tenha sido atingida antes desse valor o método falhou em resolver o sistema. Neste caso o código é interrompido.

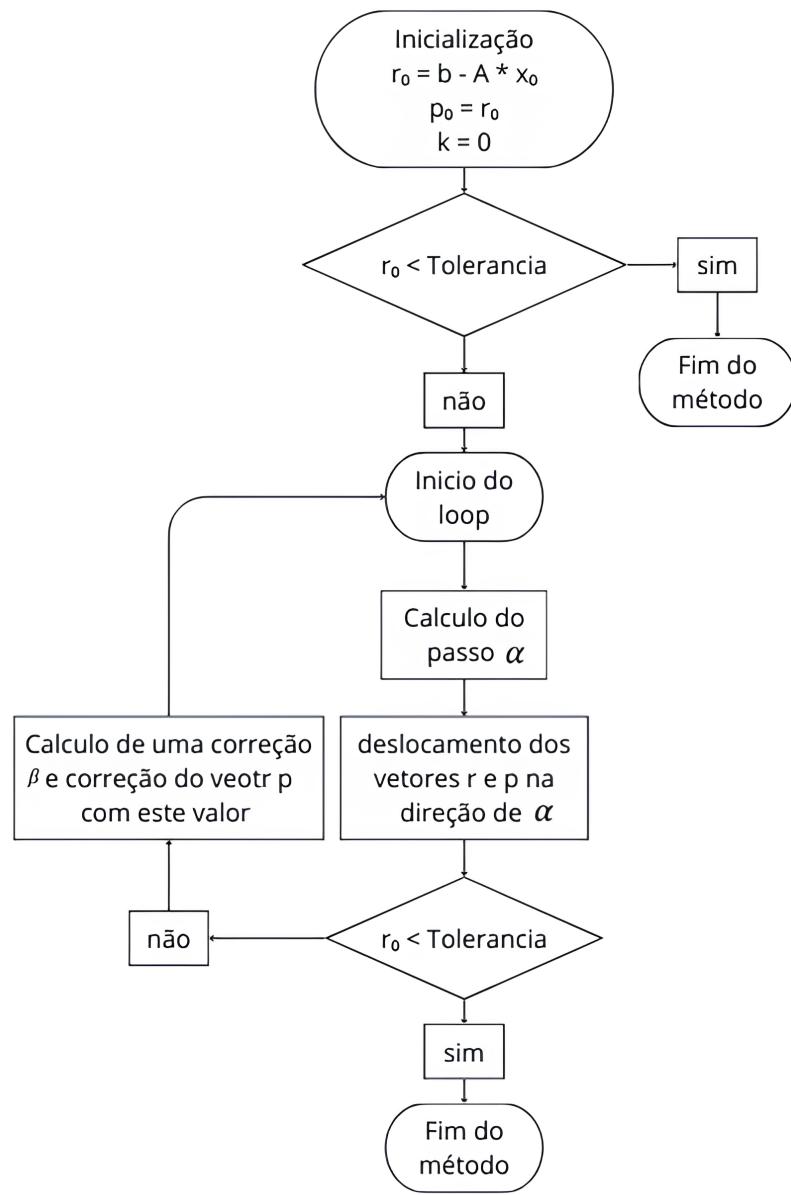


Figura 5.6: Diagrama de blocos do método dos gradientes conjugados.

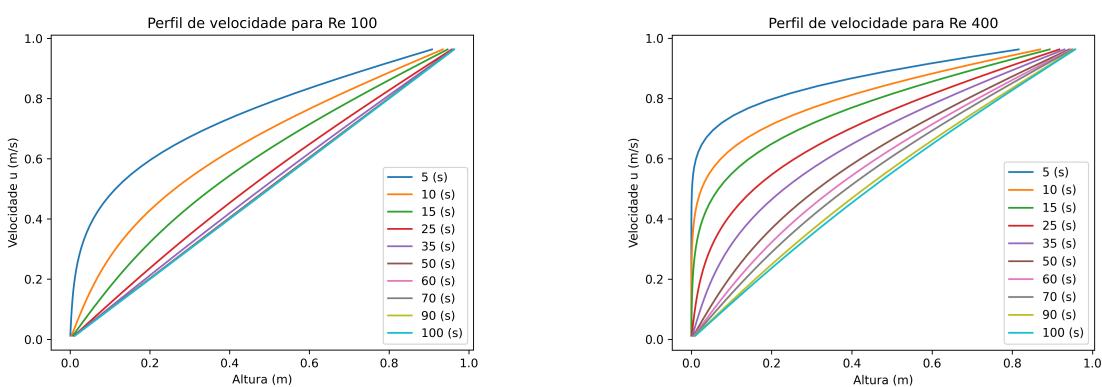
Fonte: Do próprio autor

# 6. RESULTADOS

Nesta secção serão abordados os resultados obtidos através das simulações e sua comparação com diferentes autores, o objetivo é validar os métodos implementados e verificar o quanto aproximado estão com a literatura. Serão utilizados, além de artigos consolidados, resultados analíticos do escoamento como mostrado no apêndice A.

## 6.1 ESCOAMENTO DE COUETTE PLANO

Para este escoamento, devido sua simplicidade, se dispõe na literatura de soluções analíticas para a modelagem de seu comportamento. Primeiramente foi feita a análise em regime permanente para fluidos newtonianos, a fim de se verificar a estabilidade do método. Nas figuras 6.1 e 6.2, é visível a evolução do escoamento para fluidos newtonianos para diferentes números de Reynolds.

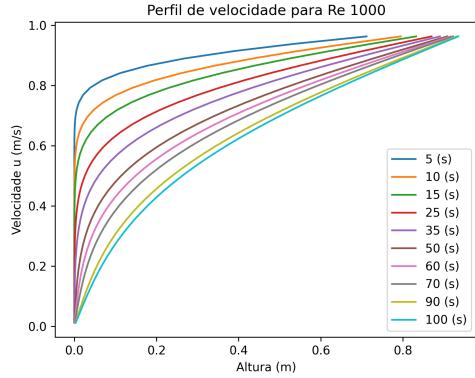


(a) Perfil de velocidade para número de Reynolds 100. Utilizando  $\nu = 0.01$       (b) Perfil de velocidade para número de Reynolds 400. Utilizando  $\nu = 0.0025$

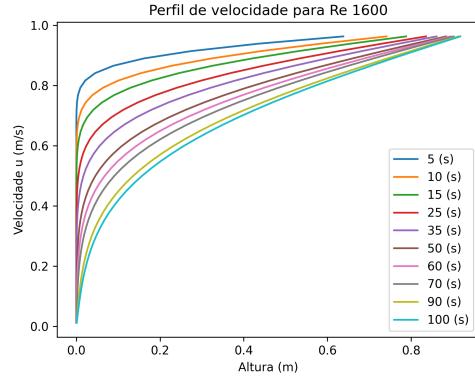
Figura 6.1: Perfils de velocidade no centro da cavidade para valores de Reynolds de 100 e 400

Fonte: Do próprio autor

É possível observar a influência do número de Reynolds no desenvolvimento do escoamento, de forma que quanto maior esse valor, mais lentamente ele se desenvolve para o regime permanente. Independentemente do número de Reynolds ou do tipo de fluido, o escoamento sempre converge para uma reta, como é possível demonstrar em sua solução analítica apresentada por Vasconcellos (2024).



(a) Perfil de velocidade para número de Reynolds 1000. Utilizando  $\nu = 0.001$



(b) Perfil de velocidade para número de Reynolds 1600. Utilizando  $\nu = 0.000625$

Figura 6.2: Perfis de velocidade no centro da cavidade para valores de Reynolds de 1000 e 1600

Fonte: Do próprio autor

Para validar a simulação com o modelo analítico, foi simulado o escoamento de Couette, com o tempo indo de 0 a 100, e se comparou as soluções numéricas e analíticas, Figura 6.3. O valor de  $\nu = 0.000625 \frac{m^2}{s}$  foi utilizado para garantir o valor de Reynolds desejado ( $Re = 1600$ ). É possível observar o nível de coerência entre os resultados, de forma que não são perceptíveis desvios entre eles.

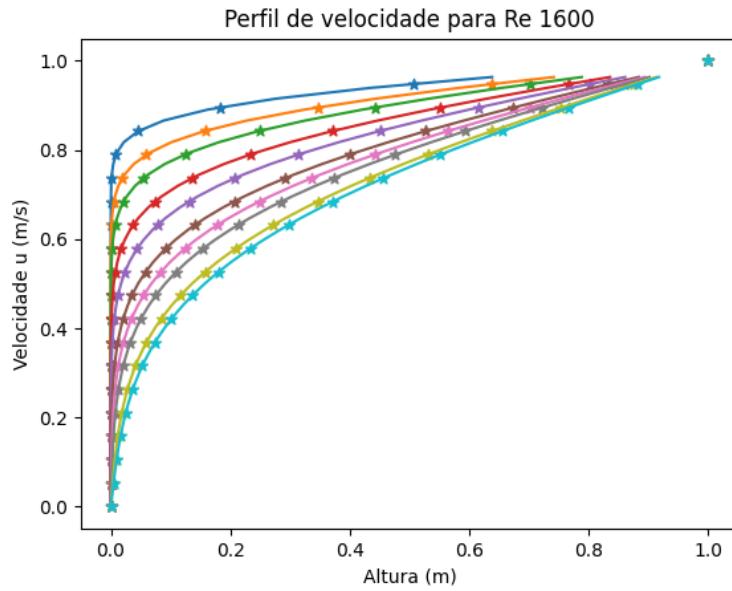
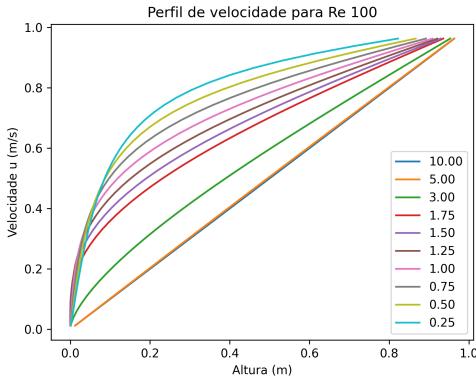


Figura 6.3: Comparaçao entre o perfil analítico e o perfil numérico simulados para diferentes tempos com um número de Reynolds de 1600 e um valor de  $\nu$  igual a 0.000625. As linhas contínuas representam o perfil numérico e as marcas \* representam os pontos da solução analítica.

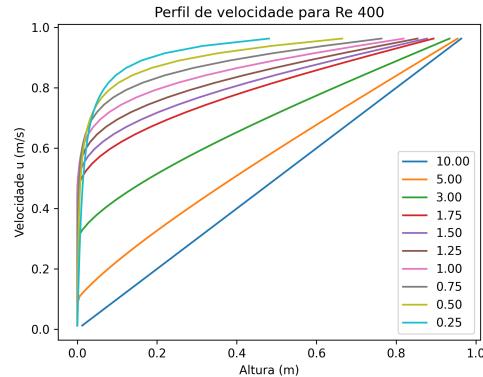
Fonte: Do próprio autor

Para os modelos de escoamentos não-newtonianos, foi utilizado a Lei de potência e se variou os valores de m e n para atingir os valores de Reynolds desejado com tempos fixos. Na Figura

6.4 é mostrado o comportamento de fluidos com diversos valores de  $n$  para  $Re = 100$  e  $Re = 400$ .



(a) perfis de velocidade para diversos valores de  $n$  e para um número de Reynolds de 100, utilizando a Lei de Potência. Tempo final de simulação 5 s



(b) perfis de velocidade para diversos valores de  $n$  e para um número de Reynolds de 400, utilizando a Lei de Potência. Tempo final de simulação 5 s

Figura 6.4: Perfis de velocidade no centro da cavidade para diferentes valores de Reynolds, utilizando fluidos não-newtonianos

Fonte: Do próprio autor

É possível observar que, apesar de seguirem a mesma tendência que os fluidos newtonianos com a variação do número de Reynolds, para um maior valor deste número mais lenta é a estabilização para regime permanente, os fluidos não-newtonianos são fortemente influenciados pelos valores da Lei de Potência.

Para fluidos com  $n > 1$  o escoamento se estabiliza mais rapidamente, um comportamento esperado para fluídos dilatantes que aumentam sua viscosidade com a taxa de cisalhamento o que gera um comportamento similar a um fluido newtoniano de alta viscosidade para o escoamento de Couette. Por outro lado, para valores de  $n < 1$ , tem-se uma demora maior para a estabilização do escoamento quando comparado com fluidos newtonianos ( $n = 1$ ), o que é um comportamento esperado de fluidos pseudoplásticos, que tem o comportamento viscoso reduzido com o aumento da taxa de cisalhamento.

Na Figura 6.5 se compara os resultados obtidos no presente trabalho, com os resultados obtidos por Vasconcellos (2024).

Nessa mesma Figura é possível observar que apesar da semelhança qualitativa entre os resultados, os valores ainda não são exatos entre os mesmos. Tal fato permanece em aberto no presente trabalho e a principal suspeita é a escolha dos invariantes, que se deu de forma diferente entre os trabalhos.

Fluidos com valor de  $n$  maiores que 2 não são comumente utilizados ou encontrados na literatura, de forma que estes apenas foram considerados para fins de visualização de casos limítrofes.

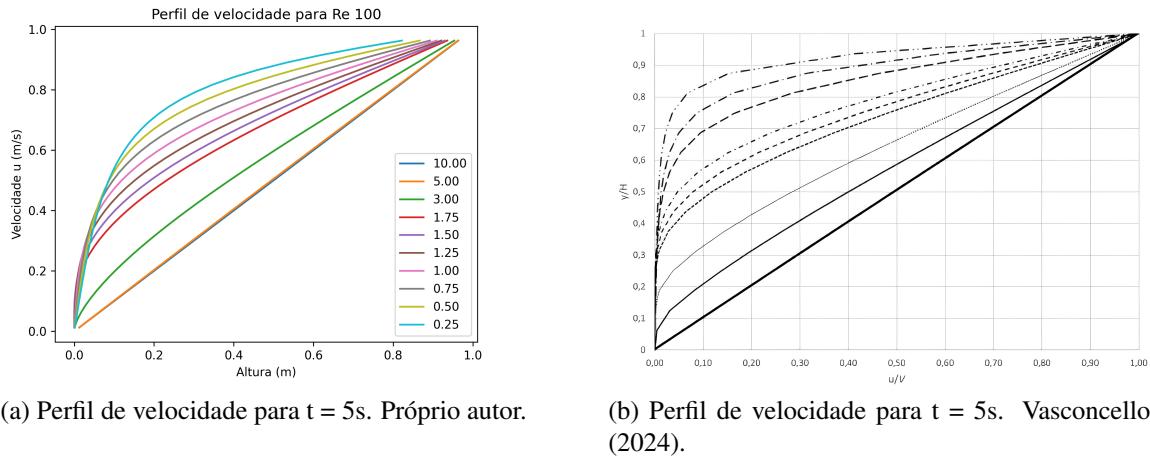


Figura 6.5: Comparação entre os resultados do presente trabalho e aqueles obtidos por Vasconcellos (2024)

## 6.2 ESCOAMENTO DE POISEUILLE PLANO

Para o escoamento de Poiseuille se tem os resultados das equações analíticas para comparar os resultados da simulação. Como mencionado no modelo físico, o escoamento de Poiseuille se baseia na diferença de pressão entre a entrada e a saída do modelo físico, de forma que se definiu uma diferença de pressão fixa, evidenciada no modelo computacional. Para que se imponha essa diferença de pressão, a velocidade de entrada é ajustada de acordo com as equações do apêndice A.

Inicialmente, para se validar as equações desenvolvidas para este escoamento, é simulado um escoamento newtoniano com valor de número de  $Re = 100$ . Para este escoamento foram utilizados uma viscosidade cinemática de  $\nu = 0.01 \frac{m^2}{s}$  e um perfil de velocidade de entrada de  $V = \frac{1}{6} \left[ \frac{m}{s} \right]$  para que se mantivesse a diferença de pressão inicialmente definida. O perfil de velocidade resultante no escoamento é mostrado na Figura 6.6.

É possível observar, a partir desses resultados, o nível de coerência do modelo analítico com o computacional, de forma que se possa utilizar estes valores de forma confiável para verificar os resultados da simulação. A tabela 6.1 mostra a comparação entre os valores analíticos e numéricos e o erro entre eles.

Tem-se que os maiores erros ocorrem nas extremidades das curvas, enquanto o erro no centro do domínio se aproxima de zero. Esse resultado mostra que apesar das considerações feitas nas discretizações do modelo numérico, os resultados obtidos pelo modelo computacional são suficientes para comparação com a literatura.

Define-se a diferença de pressão no escoamento de maneira indireta a partir de outros parâmetros, com base nas seguintes equações (apêndice A):

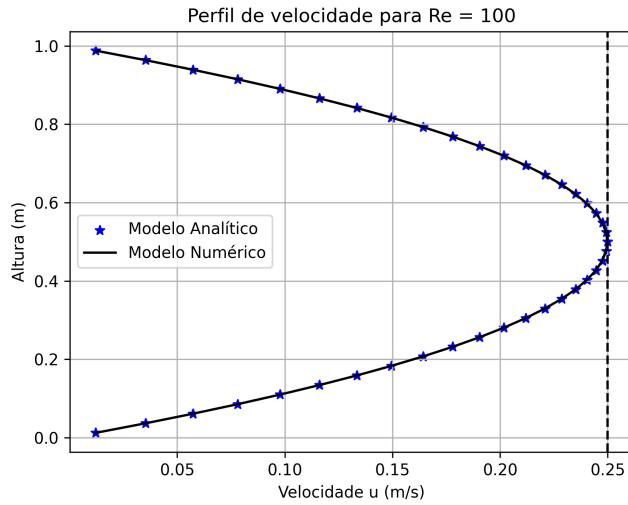


Figura 6.6: Perfil de velocidade analítico em comparação com o modelo computacional, utilizando um valor de  $Re = 100$ . Foram impostos uma viscosidade de  $\nu = 0.01$  e um perfil de velocidade na entrada de  $V = \frac{1}{6} \left[ \frac{m}{s} \right]$ .

Fonte: Do próprio autor

Tabela 6.1: Comparação entre os valores da componente  $u$  analíticos e computacional para  $Re = 100$

Distância em $y$ [m]	Analítico $\frac{m}{s}$	Numérico $\frac{m}{s}$	Erro relativo (%)
0,99	0,012	0,012181	1,12
0,82	0,15	0,149436	0,02
0,67	0,22	0,220737	0,05
0,52	0,249	0,249257	0,06
0,50	0,25	0,249851	0,06
0,48	0,249	0,249257	0,06
0,33	0,22	0,220737	0,05
0,18	0,15	0,149436	0,02
0,012	0,012	0,012181	1,12

Fonte: Do próprio autor

$$u(y) = \frac{\lambda y^2}{2} - \frac{\lambda h y}{1}$$

$$u_{medio} = \frac{\lambda h^3}{12}$$

$$\lambda = \frac{1}{\nu} \frac{\Delta p}{L}$$

Considerando uma altura  $H = 1[m]$ , largura  $L = 30[m]$ , viscosidade  $\nu$  constante, é possível impor a queda de pressão neste tipo de escoamento a partir da imposição da velocidade de entrada  $u_{medio}$ . Para visualização do efeito da viscosidade no escoamento, considerou-se uma queda de pressão fixa de  $\Delta p = 0.6 Pa$ . Variando o número de Reynolds para diferentes valores, obteve-se os perfis de velocidade mostrados na Figura 6.7.

Para  $Re = 100$ , o perfil de velocidade é mais estreito e a velocidade máxima é menor que os

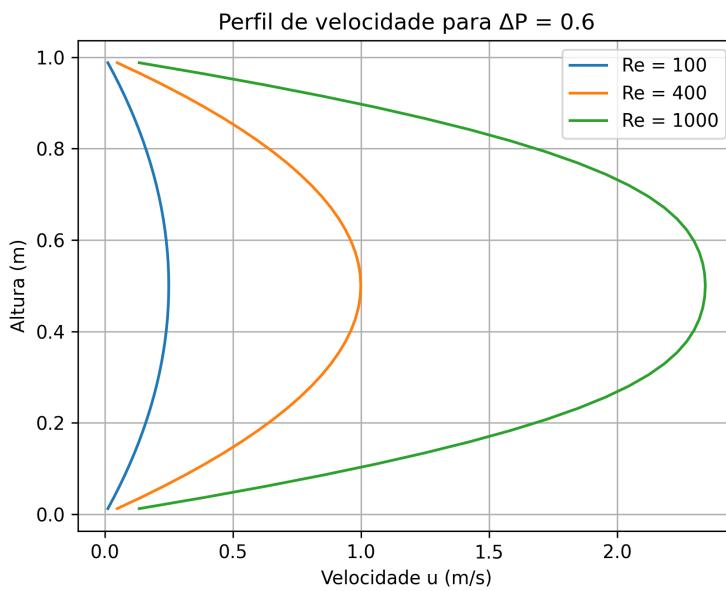


Figura 6.7: Diferentes perfis de velocidade a  $\Delta p = 0.6$  e diferentes números de Reynolds.

Fonte: Do próprio autor

demais, de forma que os efeitos viscosos são maiores no escoamento, levando a gradientes de velocidade menores nesta região. Para valores de Reynolds de 400 e 1000, o perfil de velocidade é mais acentuado e a velocidade máxima do escoamento é maior, gerando um aumento no gradiente vertical de velocidade a medida que o numero de Reynolds sobe. Tal comportamento é esperado uma vez que os efeitos viscosos são menos predominantes para altos números de Reynolds, o escoamento tende a ficar menos amortecido e com gradientes maiores

Para escoamento de Poiseuille utilizando a Lei de Potência, se variou o número de  $n$  para valores fixos de velocidade de entrada e se observou como o escoamento se comportou nestas situações. Na Figura 6.8 mostra-se o comportamento do fluido para valores de  $n$  variando de 1 a 3, com Reynolds fixo em 100 e velocidade média de entrada fixa em  $V = \frac{1}{6} [\frac{m}{s}]$ .

Os valores de  $n$  escolhidos, representam fluidos com comportamento newtoniano, para o caso de  $n = 1$ , e dilatante. Os pontos '\*' mostrados nas retas são os resultados do modelo analítico desenvolvido no apêndice A.

Para o caso de  $n = 1$  é possível observar que o comportamento é o mesmo que quando simulado utilizando a formulação puramente newtoniana  $\eta = \mu$ , como o esperado. O escoamento é parabolico e o modelo analítico se ajusta perfeitamente à curva projetada.

Para um valor de  $n = 1.5$  se observa uma tendência do perfil de velocidade a se tornar mais agudo, com o aumento da viscosidade. Dessa forma se tem uma velocidade máxima maior para uma mesma velocidade de entrada, o que indica uma maior queda de pressão deste escoamento. A maior viscosidade leva a uma maior dificuldade do fluido escoar.

Para um perfil de velocidade com  $n = 3$ , um caso extremo e normalmente não representativo para fluidos, o perfil de velocidade se torna bastante agudo, indicando um forte gradiente de pressão presente no escoamento. Consequentemente, a diferença de pressão deste perfil de

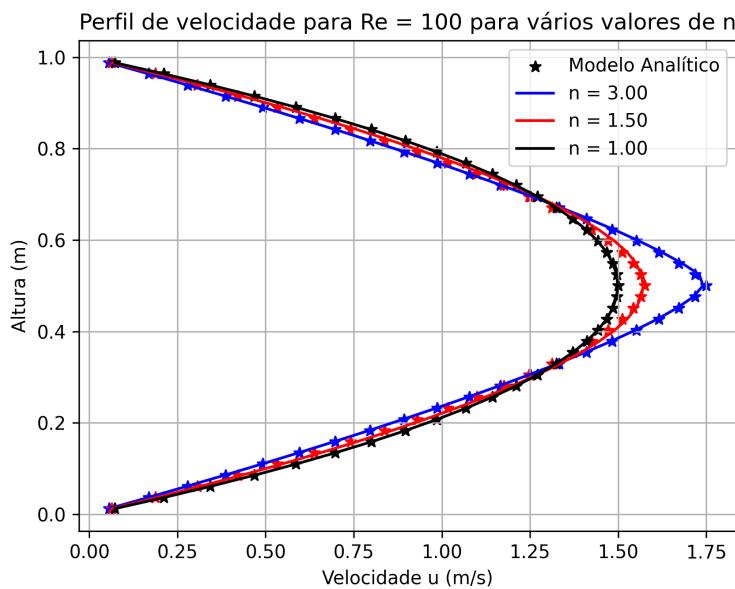


Figura 6.8: Diferentes perfis de velocidade para o escoamento de Poiseuille, com valores de  $n$  de 1, 1.5 e 3, para velocidade de entrada constante. Comparação com os resultados do modelo analítico

Fonte: Do próprio autor

velocidade é significativamente maior que os demais.

Como no escoamento de Poiseuille, se impôs o perfil de velocidade de entrada, a queda de pressão resultante do escoamento, para se obter os dados de entrada para a equação analítica, é obtido de forma indireta, de acordo com a velocidade máxima obtida na simulação numérica. Dessa forma se tem as quedas de pressão obtidas em cada uma das simulações mostradas na Figura 6.8, indicadas na tabela 6.2:

Fonte: Do próprio autor

Tabela 6.2: Valores de  $n$  e sua respectiva queda de pressão para velocidade de entrada constante

Valor de $n$	Queda de pressão (Pa)
1.00	12
1.5	24.06
3.0	203.26

Para comparar os efeitos da escolha do invariante na modelagem do tensor  $\eta$ , foram simulados escoamentos com valores de  $n = 0.5$  e  $n = 2$  com os diferentes os modelos descritos pela Equação 3.20 e pela Equação 3.17. Os resultados foram comparados com a solução analítica do modelo e são apresentados pelas Figuras 6.9 e 6.10.

Na Figura 6.9, é possível observar que o modelo de invariante apresentado por Silveira-Neto (2020) e apresentado da Equação 3.17, se adequa melhor aos fluidos com comportamento dilatante, de forma que o perfil obtido utilizando o invariante de Bird et al. (1987) não condiz com um perfil fisicamente possível para este escoamento. Desta forma, observou-se que este comportamento é constante no geral, de forma que os perfis mostrados na Figura 6.2 foram todos obtidos com o modelo de Silveira-Neto (2020), mostrando a consistência do mesmo aos

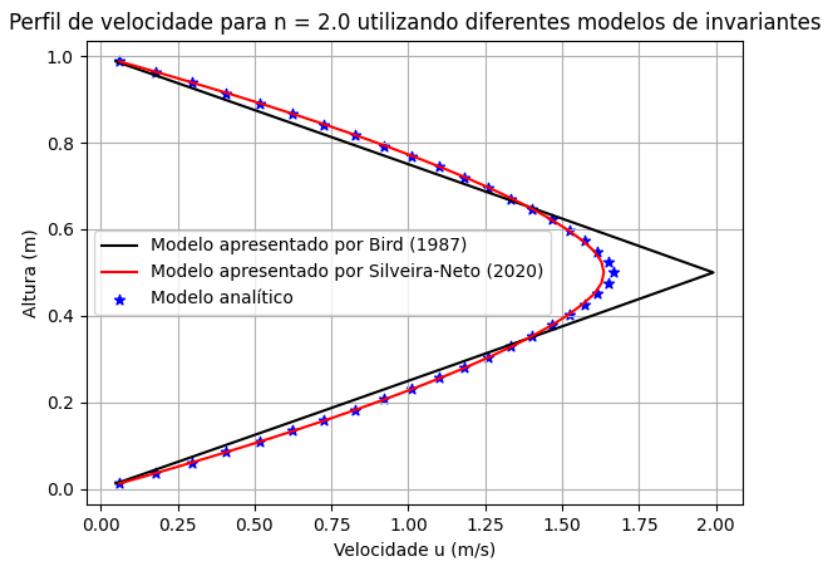


Figura 6.9: Perfis de velocidade para um valor de  $n = 2$  e um  $\Delta p = 50\text{Pa}$ . Comparação do perfil analítico com os invariantes apresentados por Bird et al. (1987) e Silveira-Neto (2020).

Fonte: Do próprio autor

fluidos que são representados por um valor de  $n > 1$  na lei de potência. Nota-se ainda que apesar do ajuste compatível com o modelo analítico ao longo de todo o escoamento, ainda há uma diferença de resultados no centro da cavidade, onde os gradientes de velocidade são maiores.

Já na Figura 6.10 é possível observar o comportamento oposto do discutido anteriormente, no qual o modelo apresentado por Bird et al. (1987) se ajustou perfeitamente ao modelo analítico apresentado, enquanto o modelo de Silveira-Neto (2020) apresentou desvios no formato parabólico do perfil de velocidades. Este comportamento se manteve constante durante testes realizados na validação dos modelos no qual se variou, para ambos os tipos de fluidos, o perfil de velocidades de entrada e consequentemente a queda de pressão presente no escoamento.

Apesar do resultado obtido para o perfil de velocidade para o escoamento de Poiseuille, não se pode afirmar que o mesmo comportamento se repetirá para escoamentos complexos, sendo necessário a comparação, de preferência com resultados experimentais com tais escoamentos. Contudo, os perfis obtidos mostram claramente a influência da escolha do invariante no comportamento do fluido e do escoamento, sendo de grande importância o estudo deste fator antes de proceder com as simulações numéricas de diferentes fluidos.

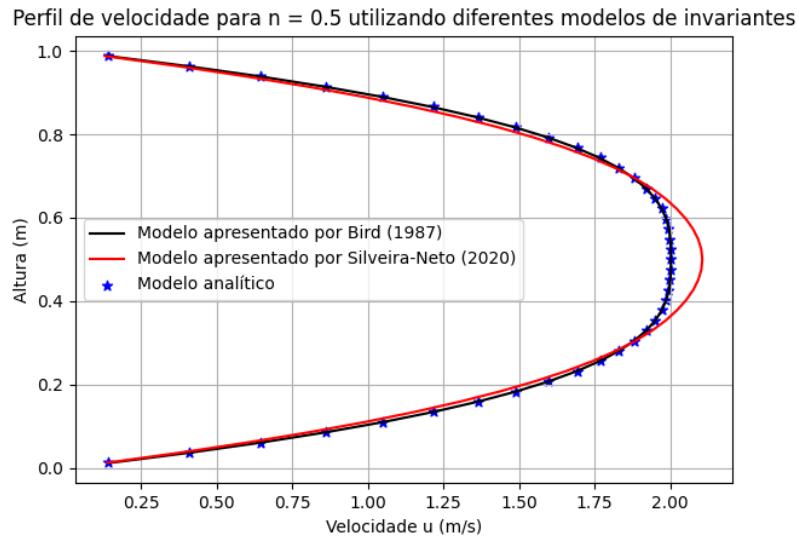
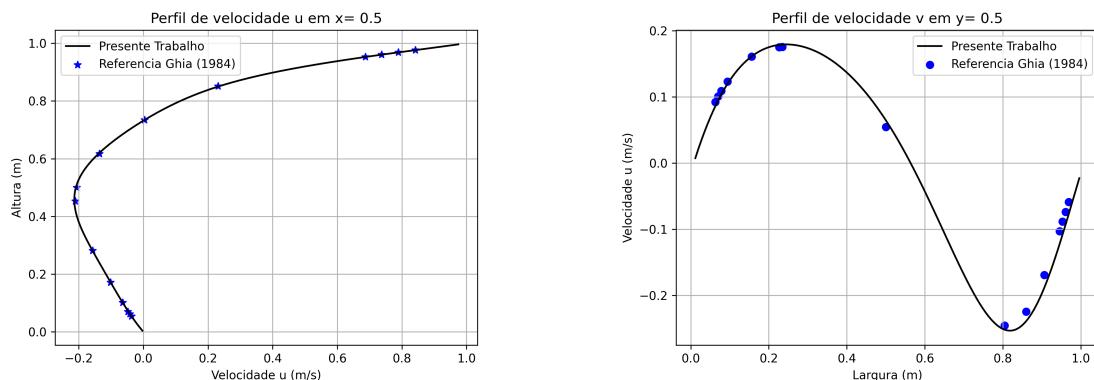


Figura 6.10: Perfis de velocidade para um valor de  $n = 0.5$  e um  $\Delta p = \sqrt{50}$  Pa. Comparação do perfil analítico com os invariantes apresentados por Bird et al. (1987) e Silveira-Neto (2020).

Fonte: Do próprio autor

### 6.3 CAVIDADE COM TAMPA DESLIZANTE

Para o escoamento da cavidade com tampa deslizante, se construiu, separadamente, os perfis do escoamento para  $Re = 100$ , de forma a elucidar a análise feita para os diferentes números de Reynolds. Após isto, apresenta-se os gráficos para os demais números de Reynolds. O perfil de velocidade no centro geométrico da cavidade é representado pelas figuras 6.11 a 6.14.



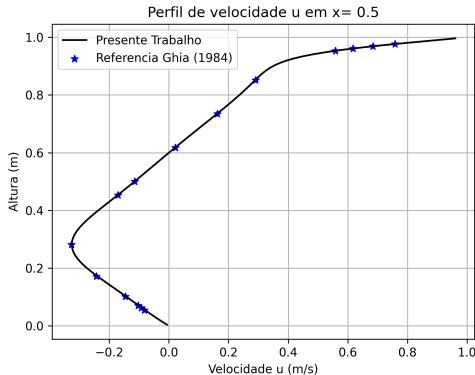
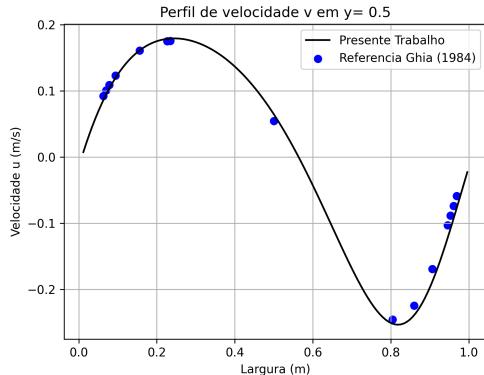
(a) Perfil de velocidade  $u$  em  $x = 0.5$  para  $Re = 100$ .

(b) Perfil de velocidade  $v$  em  $y = 0.5$  para  $Re = 100$ .

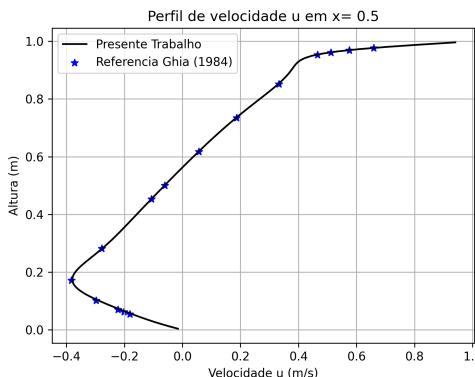
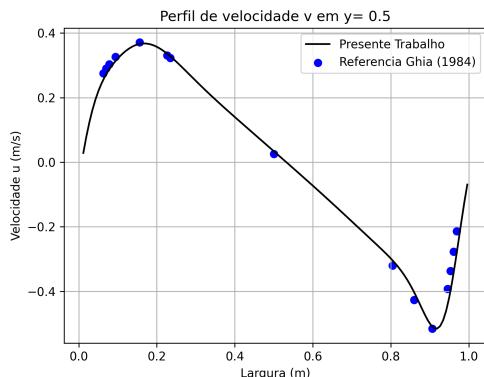
Figura 6.11: Perfil de velocidade  $u$  e  $v$  no centro geométrico da cavidade para Reynolds 100.

Fonte: Do próprio autor

Para valores de  $Re = 100$ , observa-se uma compatibilidade grande entre os resultados obtidos e aqueles apresentados por Ghia et al. (1982), com discrepâncias em regiões com grande gradiente de velocidade. Para um valor de  $Re = 400$ , tem-se que os pontos seguem compatíveis com a referência. A complexidade do escoamento aumenta com o aumento do número de

(a) Perfil de velocidade  $u$  em  $x = 0.5$  para  $Re = 400$ .(b) Perfil de velocidade  $v$  em  $y = 0.5$  para  $Re = 400$ .Figura 6.12: Perfil de velocidade  $u$  e  $v$  no centro geométrico da cavidade para Reynolds 400.

Fonte: Do próprio autor

(a) Perfil de velocidade  $u$  em  $x = 0.5$  para  $Re = 1000$ .(b) Perfil de velocidade  $v$  em  $y = 0.5$  para  $Re = 1000$ .Figura 6.13: Perfil de velocidade  $u$  e  $v$  no centro geométrico da cavidade para Reynolds 1000.

Fonte: Do próprio autor

Reynolds, de forma que as diferenças entre os perfis de velocidade, principalmente nas extremidades, começa a ficar mais acentuada.

Para perfis de  $Re = 1000$  e  $Re = 3200$  verifica-se um aumento das diferenças entre as simulações, principalmente nas extremidades. Tais discrepâncias ocorre pelo aumento da complexidade das recirculações e do movimento do fluido proximo as paredes do escoamento. Além disto, os métodos e a precisão utilizada no presente trabalho, são diferentes dos utilizados por Ghia et al. (1982), dado a diferença de época dos trabalhos.

Para analisar os resultados obtidos, foram gerados gráficos com as linhas de fluxo para o escoamento com número de Reynolds de 3200, este valor foi escolhido por apresentar maior número de recirculações primárias e secundárias. Na Figura 6.15 se ilustra os resultados obtidos com o código desenvolvido em comparação com os trazidos por Ghia et al. (1982).

Observa-se, nas duas figuras, uma boa concordância quanto à presença e à localização da recirculação primária, que ocupa a região central da cavidade, com seu núcleo posicionado

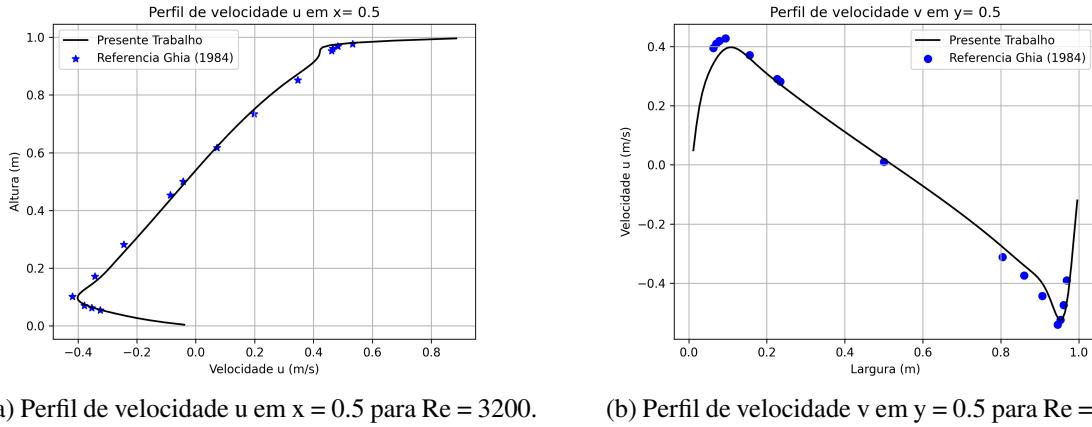
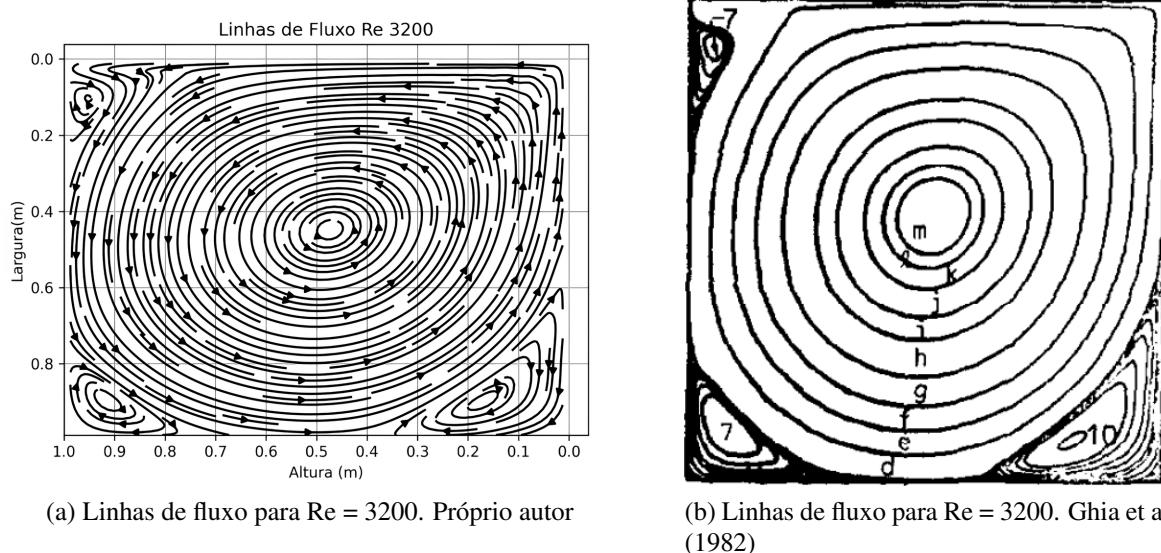
(a) Perfil de velocidade  $u$  em  $x = 0.5$  para  $Re = 3200$ .(b) Perfil de velocidade  $v$  em  $y = 0.5$  para  $Re = 3200$ .

Figura 6.14: Perfil de velocidade  $u$  e  $v$  no centro geométrico da cavidade para Reynolds 3200.

Fonte: Do próprio autor

ligeiramente abaixo da tampa deslizante. Essa recirculação é bem definida, com linhas de corrente em espiral convergindo para um ponto de estagnação central, o que é esperado para este escoamento devido ao movimento promovido pela fronteira superior. Os resultados mostram a precisão dos métodos empregados.

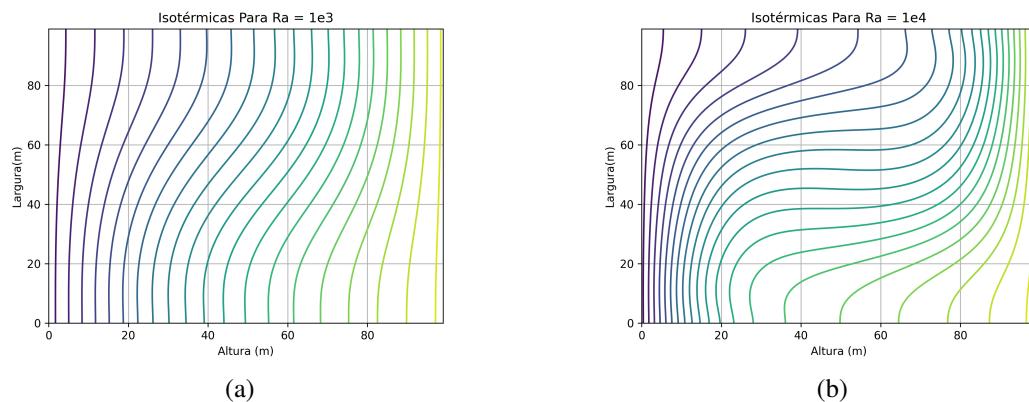
Além disso, as figuras mostram recirculações secundárias nos cantos da cavidade, especialmente nos cantos inferiores esquerdo e direito e no canto superior esquerdo, que são características do escoamento com tampa deslizante para Reynolds elevados. Essas recirculações menores indicam a complexidade da estrutura de recirculação que surge devido às interações entre a tampa em movimento e as paredes laterais da cavidade quando se aumenta o número de Reynolds e, consequentemente, as instabilidades do escoamento. Pequenas variações no tamanho e na intensidade dessas recirculações entre as figuras podem ser atribuídas a diferenças na discretização espacial e na resolução numérica empregadas, visto que os métodos utilizados por Ghia et al. (1982) são bem diferentes que os atuais.

Figura 6.15: Linhas de fluxo para  $Re = 3200$ .

Fonte: Do próprio autor

## 6.4 CAVIDADE DIFERENCIALMENTE AQUECIDA

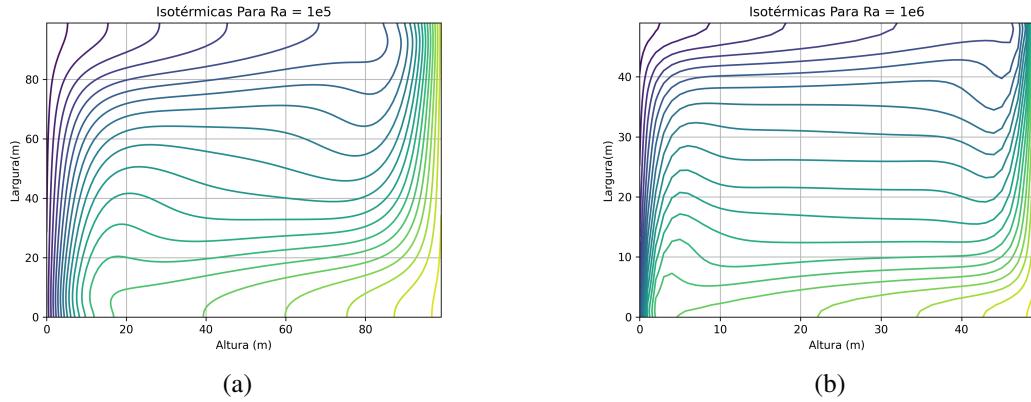
Para avaliar o comportamento da cavidade diferencialmente aquecida, foram gerados resultados com valores de  $Ra$  variando de  $10^3$  a  $10^6$ . Estes resultados foram comparados com os de Santos (2022), nas figuras 6.16 e 6.17, mostra-se as isotermas obtidas com o código do presente trabalho, enquanto a Figura 6.18 mostra as isotermas apresentadas por Santos (2022).

Figura 6.16: Isotermas para números de Rayleigh de  $10^3$  a  $10^4$ 

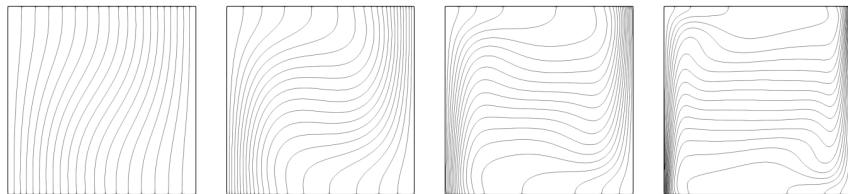
Fonte: Do próprio autor

Para  $Ra = 10^3$ , ambos os resultados exibem isotermas com pequenas curvaturas, o que caracteriza um regime predominantemente difusivo, de condução térmica. Os resultados apresentados são similares e indicam a baixa influência dos efeitos advectivos que se obtem com baixos valores de Rayleigh.

Para valores de Rayleigh variando de  $10^4$  a  $10^5$ , as isotermas começam a se curvar com

Figura 6.17: Isotermas para números de Rayleigh de  $10^5$  e  $10^6$ 

Fonte: Do próprio autor

Figura 6.18: Isotermas apresentadas por Santos (2022) Da esquerda para a direita o Rayleigh varia de  $10^3$  a  $10^6$  em ordem crescente da esquerda para direita.

Fonte: Santos (2022)

relação ao centro da cavidade térmica, exibindo um gradiente de temperatura mais acentuado, provocado pela maior agitação do fluido. É evidente que os efeitos advectivos são mais acentuados para estes regimes de escoamento. A curvatura das isotermas também tende a indicar a presença de recirculações na região.

Para um valor de Rayleigh igual a  $10^6$ , o escoamento é predominantemente advectivo, as isotermas se alinham horizontalmente. As isotermas obtidas em ambos os trabalhos apresentam semelhanças qualitativas, de forma que transmitem as mesmas informações sobre este regime de escoamento

Foram geradas as linhas de fluxo para regimes de escoamento com  $Ra = 10^4$  e  $Ra = 10^5$ . Os resultados mostram o comportamento do escoamento para as diferentes condições. Os resultados foram comparados com o Gangawane et al. (2015). A Figura 6.19 mostra as isotermas do autor enquanto a Figura 6.20 as de Gangawane et al. (2015).

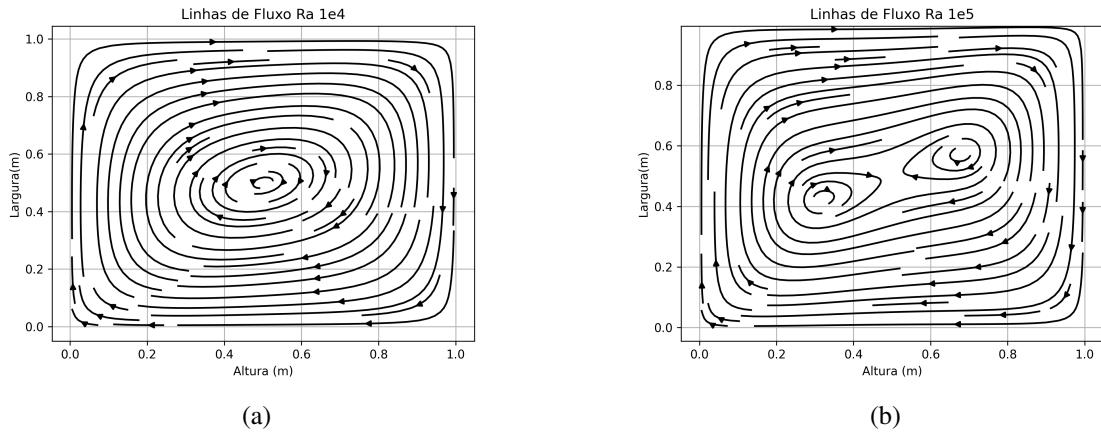


Figura 6.19: Linhas de Fluxo para valores de Rayleigh  $10^4$ , a esquerda, e  $10^5$ , a direita.

Fonte: Do próprio autor

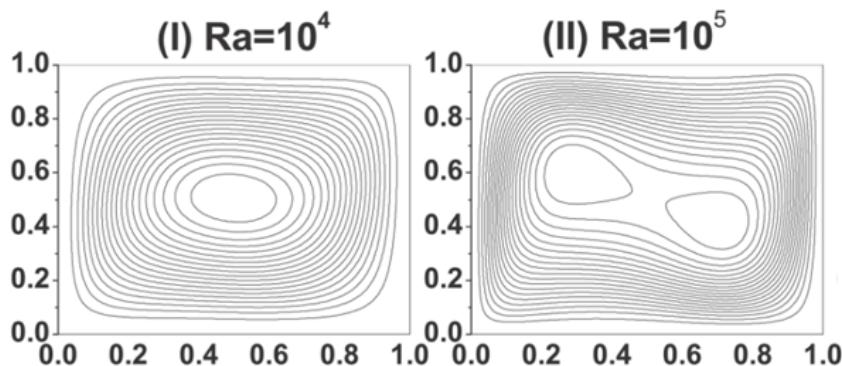


Figura 6.20: Linhas de Fluxo para valores de Rayleigh  $10^4$ , a esquerda, e  $10^5$ , a direita. Gangawane et al. (2015).

Fonte: Gangawane et al. (2015)

As imagens evidenciam que os escoamentos foram feitos por diferentes referenciais entre o presente trabalho e Gangawane et al. (2015), o que explica a rotação das imagens. Para  $Ra = 10^4$ , as duas simulações mostram uma recirculação central, com uma certa simetria na cavidade. Os escoamentos estão qualitativamente coerentes, de forma que a imagem trazida pelo presente trabalho, trás um número maior de informações.

Para o escoamento com  $Ra = 10^5$ , os efeitos advectivos se tornam mais intensos, de forma que recirculações mais complexas aparecem no centro da cavidade. Os resultados mostrados não são totalmente simétricos, o que pode indicar uma perturbação numérica no mesmo. Considerando a rotação dos eixos, devido ao eixo de coordenadas diferentes entre os autores, os resultados estão qualitativamente coerentes. Os resultados mostram a capacidade do código desenvolvido em captar padrões de recirculação complexos no interior da cavidade diferencialmente aquecida.

## 7. CONCLUSÃO

Apresentou-se neste trabalho uma descrição detalhada dos modelos e métodos utilizados para o desenvolvimento das rotinas computacionais utilizadas. Foram abordados diferentes tipos de escoamentos incompressíveis bidimensionais, incluindo newtonianos isotérmicos e não isotérmicos além de escoamentos Não-Newtonianos. Simulou-se diferentes tipos de escoamentos consagrados na literatura, como o escoamento de Poiseulle, de Couette, da cavidade diferencialmente aquecida e da Cavidade com tampa deslizante, que serviram para a validação das rotinas implementadas. Comparações dos resultados obtidos com os de diversos autores foram utilizadas a fim de validar e verificar a coerência dos métodos implementados.

Entre os escoamentos, variou-se parâmetros adimensionais, de forma a validar diferentes regimes de escoamento e o comportamento físico e numérico da simulação em cada um deles. Foram utilizadas técnicas como a malha deslocada e o passo fracionado, os quais foram detalhados durante o trabalho, para que se conseguisse a precisão adequada para os escoamentos.

Os resultados obtidos com os escoamentos clássicos mostraram um grau de compatibilidade com a literatura consoante com os métodos utilizados nas rotinas implementadas, de tal forma que foi possível verificar a validade da implementação computacional.

Um importante resultado obtido, foi a descrição do comportamento dos diferentes modelos de invariantes, de acordo com o regime de escoamento simulado e com o tipo de fluido não-newtoniano que cada um dos modelos estava representando. De forma que o modelo apresentado por Bird et al. (1987) lida melhor com fluidos newtonianos pseudoplásticos, e o modelo apresentado por Silveira-Neto (2020) lida melhor com fluidos dilatantes.

Esta condição, apesar de se mostrar verdadeira no escoamento de Poiseuille, deve ser verificada em trabalhos futuros a fim de validar sua veracidade, uma vez que o escoamento simulado é de baixa complexidade e seus resultados podem não transmitir o comportamento dos modelos a níveis industriais.

Tem-se que o trabalho desenvolvido foi de essencial importância para o aprofundamento no entendimento a respeito da natureza e dos desafios dos métodos numéricos e computacionais utilizados na solução de escoamentos de diferentes naturezas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barkley, D. e Tuckerman, L. S. (2007). Mean flow of turbulent-laminar patterns in plane couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 576:109–137.

Bharti, R. P., Chhabra, R. P., e Eswaran, V. (2007). Two-dimensional steady poiseuille flow of power-law fluids across a circular cylinder in a plane confined channel: Wall effects and drag coefficients. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 46:3820–3840.

Bird, R. B., Armstrong, R. C., e Hassager, O. (1987). *Dynamics of Polymeric Liquids: Fluid Mechanics*, volume 1. Wiley-Interscience, New York, 2 edition.

Borgnakke, C. e Sonntag, R. E. (2018). *Fundamentos da Termodinâmica*. Blucher, São Paulo, 8 edition.

Bottin, S. e Chaté, H. (1998). Statistical analysis of the transition to turbulence in plane couette flow.

Boussinesq, J. V. (1903). *Théorie analytique de la chaleur*. Gauthier-Villars et fils, Paris.

Case, K. M. (1960). Stability of inviscid plane couette flow. *Physics of Fluids*, 3:143–148.

Courant, R., Friedrichs, K., e Lewy, H. (1928). On the partial difference equations of mathematical physics. *Mathematische Annalen*, 100:32–74.

Fortuna, A. O. (2000). *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: conceitos básicos e aplicações*. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Gangawane, K. M., Bharti, R. P., e Kumar, S. (2015). Two-dimensional lattice boltzmann simulation of natural convection in differentially heated square cavity: Effect of prandtl and rayleigh numbers. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, 93(4):766–780.

Ghia, U., Ghia, K. N., e Shin, C. T. (1982). High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and a multigrid method\*. *JOURNAL OF COMPUTATIONAL PHYSICS*, 48:387–411.

Gibson, J. F., Halcrow, J., e Cvitanović, P. (2008). Visualizing the geometry of state space in plane couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 611:107–130.

- Madlener, K., Frey, B., e Ciezki, H. K. (2009). Generalized reynolds number for non-newtonian fluids. *Progress in Propulsion Physics*, 1:237–250.
- Maliska, C. R. (2023). *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. Fluid Mechanics and Its Applications. Springer Cham.
- Oberbeck, A. (1888). Über die bewegungserscheinungen der atmosphäre [on the phenomena of motion of the atmosphere]. *Sitzungsberichte der K. Preuss. Akademie der Wissenschaften*, 383:1129–1138. Citado na página 47.
- Orszag, S. A. e Kells, L. C. (1980). Transition to turbulence in plane poiseuille and plane couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 96:159–205.
- Santos, G. (2022). Transferência térmica conjugada utilizando fronteira imersa para solução de problemas bidimensionais. Master's thesis, Universidade Federal de Uberlândia.
- Shewchuk, J. R. (1994). An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain. Technical report, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, Pittsburgh.
- Silveira-Neto, A. (2020). *Escoamentos turbulentos: análise física e modelagem teórica*. Composer, Uberlândia.
- Thomas, I. H. (1953). The stability of plane poiseuille flow.
- Vasconcellos, L. G. S. (2024). Advanced computational fluid dynamics in bloodstain pattern analysis: Investigating non-newtonian properties for forensic applications.
- Versteeg, H. K. e Malalasekera, W. (2007). *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. Pearson Education, Harlow, 2 edition.
- White, F. M. (2011). *Mecânica dos Fluidos*. McGraw-Hill, São Paulo, 7 edition.
- Wylen, G. J. V. (2016). *Fundamentos da termodinâmica*. Blucher, São Paulo, tradução da 7<sup>a</sup> edição americana edition.

## A. SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA ESCOAMENTOS DE POISEUILLE

O escoamento de Poiseuille, com suas simplificações, permite que encontremos soluções analíticas para o regime permanente tanto para fluidos newtonianos quanto para fluidos não-newtonianos utilizando a Lei de Potência. De forma que este problema se torna útil para a validação dos modelos de escoamento não-newtoniano e para o tratamento numérico utilizado. Sendo então, pertinente a apresentação matemática de sua formulação analítica.

### A.1 POISEUILLE NEWTONIANO

Considerando um escoamento em regime permanente, com apenas a componente  $u$  de velocidade diferente de zero e um gradiente de velocidade e partindo da Equação 3.34, tem-se:

$$\begin{aligned} 0 &= -\vec{\nabla}p + \vec{\nabla} \cdot \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} \\ \vec{\nabla}p &= \vec{\nabla} \cdot \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Considerando  $\eta(\dot{\gamma}) = \mu$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\lambda \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\lambda \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Considerando as condições de contorno,  $u(0) = 0$  e  $u(h) = 0$ , e realizando as devidas integrações tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\lambda y + c_1 \\
u(y) &= -\frac{\lambda y^2}{2} + c_1 y + c_2 \\
u(0) &= -\frac{\lambda 0^2}{2} + c_1 0 + c_2 = c_2 = 0 \\
u(h) &= -\frac{\lambda h^2}{2} + c_1 h = 0 \\
c_1 &= \frac{\lambda h}{2} \\
u(y) &= -\frac{\lambda y^2}{2} + \frac{\lambda h}{2} y \\
u(y) &= \frac{\lambda y}{2}(h - y)
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Para este escoamento, a velocidade máxima atingida pelo fluido ocorre em  $y = \frac{h}{2}$ , que é o meio da cavidade para o sistema de coordenadas adotado. Outro valor importante é a velocidade média do escoamento, que deve ser igual à velocidade uniforme de velocidade de entrada. Tem-se então que:

$$\begin{aligned}
u\left(\frac{h}{2}\right) &= \frac{\lambda h^2}{8} - \frac{\lambda h^2}{4} = v_{max} = -\frac{\lambda h^2}{8} \\
u_{medio} &= \int_0^h u(y) dy = \int_0^h \left(\frac{\lambda y^2}{2} - \frac{\lambda h}{2} y\right) dy \\
u_{medio} &= \left(\frac{\lambda y^3}{6} - \frac{\lambda h}{4} y^2\right)_0^h = \frac{\lambda h^3}{6} - \frac{\lambda h^3}{4} = -\frac{\lambda h^3}{12}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Estas equações resolvem bem e completamente o escoamento de Poiseuille newtoniano.

## A.2 POISEUILLE NÃO-NEWTONIANO

Para fluidos não-newtonianos tem-se que  $\eta(\dot{\gamma}) = m\dot{\gamma}^{n-1}$ , considerando as mesmas simplificações feitas para o escoamento newtoniano tem-se que os dois perfis de invariantes apresentados no presente trabalho levam ao mesmo resultado:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( m \frac{\partial u^{n-1}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( m \frac{\partial u^n}{\partial y} \right) \\
 \frac{\partial p}{\partial x} &= m \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u^n}{\partial y} \right) \\
 \frac{1}{m} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\lambda
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

De forma que para esta formulação, é útil redefinir de forma temporária o eixo de coordenadas do domínio considerado. O domínio temporário é mostrado na figura A.1:

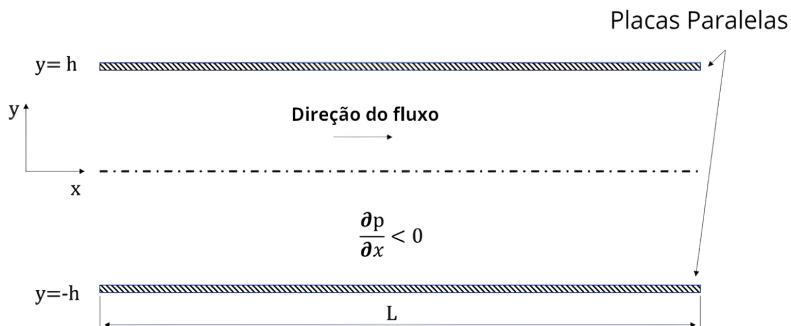


Figura A.1: Domínio físico temporário para a solução do escoamento de Poiseuille não-newtoniano.

Fonte: Adaptado de Vasconcellos (2024)

De forma que neste novo sistema de coordenadas tem-se o domínio variando de  $-h$  a  $h$  e com velocidade máxima ocorrendo em  $y = 0$ . Assim, aplicando as devidas integrais e utilizando duas das novas condições, sendo elas  $u(h) = 0$  e  $\frac{\partial u(0)}{\partial y} = 0$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
-\lambda y + c_1 &= \frac{\partial u^n}{\partial y} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= (-\lambda y + c_1)^{\frac{1}{n}} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= (-\lambda y + c_1)^{\frac{1}{n}} \\
\frac{\partial u(0)}{\partial y} &= (-\lambda 0 + c_1)^{\frac{1}{n}} = 0 \\
\frac{\partial u(0)}{\partial y} &= c_1 = 0 \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\lambda^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}} \\
u(y) &= -\frac{\lambda^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} + c_2 = -n \frac{\lambda^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}+1}}{n+1} + c_2 \\
u(h) &= -n \frac{\lambda^{\frac{1}{n}} h^{\frac{1}{n}+1}}{n+1} + c_2 = 0 \\
c_2 &= n \frac{\lambda^{\frac{1}{n}} h^{\frac{1}{n}+1}}{n+1} \\
u(y) &= -n \frac{\lambda^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n}+1}}{n+1} + n \frac{\lambda^{\frac{1}{n}} h^{\frac{1}{n}+1}}{n+1}
\end{aligned}$$

É possível calcular o valor da velocidade máxima deste escoamento considerando  $u = 0$ :

$$u(0) = n \frac{\lambda^{\frac{1}{n}} h^{\frac{1}{n}+1}}{n+1} = v_{max} \quad (\text{A.6})$$

Pode-se então escrever a equação que descreve o perfil de velocidade em função desta velocidade máxima:

$$u(y) = v_{max} \left( 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right) \quad (\text{A.7})$$

Como se considerou a condição de simetria no meio do escoamento, o perfil de velocidade obtido pela equação pode gerar contornos irreais devido ao sinal negativo de  $y$ , para valores inferiores à metade da cavidade. Isto se da pelo expoente fracionário presente na equação. Para solucionar este problema, se aplicou o módulo sobre a variável dependente da equação obtida com o desenvolvimento apresentado. tem-se então que:

$$u(y) = v_{max} \left( 1 - \left( \frac{|y|}{h} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right) \quad (\text{A.8})$$

Para que se possa utilizar a equação no domínio considerado no presente trabalho, se utilizou de um deslocamento de  $\frac{h}{2}$  da equação acima em  $y$ , de forma que o perfil de velocidade obtido esteja dentro do domínio indo de  $y = 0$  a  $y = h$ . Finalmente a equação obtida:

$$u(y) = v_{max} \left( 1 - \left( \frac{|y - \frac{h}{2}|}{h} \right)^{\frac{1}{n}+1} \right) \quad (\text{A.9})$$

## B. CÓDIGO DESENVOLVIDO

Apresenta-se, em sua totalidade, o código desenvolvido:

```
1 //*****
2 // Código desenvolvido Na Universidade Federal de Uberlândia
3 // Luis Eduardo Silva Borges
4 // MFLAB - 2024
5 //*****
6 //*****
7
8
9     int main() {
10         double *u; //velocidade em x
11         double *us; // u* ustар, a velocidade estimada u com a pressã
12             o no passo de tempo anterior
13         double *v; //velocidade em y
14         double *vs; // v* vstar, a velocidade estimada v com a pressã
15             o no passo de tempo anterior
16         double *p; //campo de pressão
17         double *pl; //p' é a correção de p
18         double *T; // temperatura
19         int nosx,nosy; //quantidade de nós nas direções x e y
20         int nosx_u,nosy_u; // nos utilizados em u
21         int nosx_v,nosy_v; // nos utilizados em u
22         int nosx_p,nosy_p; // nos utilizados em u
23         int nost; //nós de tempo
24         double dt,dx,dy; // passos de tempo e de espaço
25         double lx,ly,lt; //altura, largura e tempo final
26         double erro_u = 1 ; //erro em relação à iteração anterior de
27             u
28         double erro_v = 1 ; //erro em relação à iteração anterior de
29             v
30         double erro_p = 1 ; //erro em relação à iteração anterior de
31             p
```

```

27     double erro_T = 1 ; //erro em relação à iteração anterior de
28         T
29     double *residual_T; // para os gradientes conjulgados
30     double *residual_p;
31     double *residual_u;
32     double *residual_v;
33     double *p_p;
34     double *p_u;
35     double *p_v;
36     double *p_t; // para os para os gradientes conjulgados
37     double xalpha; // para os para os gradientes conjulgados
38     double xbeta; // para os para os gradientes conjulgados
39     double tol = 1E-9; // tolerância do método iterativo
40     double v_ref = 1.0*0; // velocidade da tampa da cavidade
41     double ni = 0.04; // viscosidade cinemática do fluido
42     double rho = 1; // densidade do fluido
43     int iteracoes = 0;
44     double omega = 0.8 ; // fator de amortecimento para
45         convergencia
46     int count = 0; // variavel para contar as iterações;
47     double alpha = 0.0071; //difusividade termica
48     double g = 9.81; // gravidade
49     double betha = 0.00013 ; // coeficiente de expansão volumé
50         trica
51     double Tq = 80,Tf = 50; //temperatura quente e fria
52     double Tref = (Tq+Tf)/2; // temperatura de referencia da
53         convecção
54     double Pr = ni/alpha; //numero de prandtl
55     double Ra = 1e3;
56     double *eta; // Viscosidade não-newtoniana
57     double *gamax; // Fator de correção de u
58     double *gamay; // fator de correção de v
59     double m,n = 1; // coeficientes da lei de potência
60     int useTermal = 1.0;
61     clock_t start, end;
62     double cpu_time_used;
63     double v_medio = 0;
64     m = 0.01;
65     start = clock();
66
67     nosx = 33; //125

```

```
64     nosy = 33;
65     nост = 1600;
66
67     lx = 1;
68     ly = 1;
69     lt = 120;
70     dx = lx/(nosx);
71     dy = ly/(nosy);
72     dt = lt/(nост);
73
74     betha = (Ra*ni*alpha)/(g*(Tq-Tf)*ly*ly*ly)*useTermal;
75
76     printf("Prandtl_= %f", Pr);
77     printf("\nRaylgh_= %f\n", Ra);
78
79     nosx_u = nosx+3;
80     nosy_u = nosy+2;
81
82     nosx_v = nosx+2;
83     nosy_v = nosy+3;
84
85     nosx_p = nosx+2;
86     nosy_p = nosy+2;
87
88     u = malloc((nosx_u)*(nosy_u)*sizeof(double));
89     residual_u = malloc((nosx_u)*(nosy_u)*sizeof(double));
90     p_u = malloc((nosx_u)*(nosy_u)*sizeof(double));
91     us = malloc((nosx_u)*(nosy_u)*sizeof(double));
92
93
94     cond_iniciais_u(u, (nosx_u), (nosy_u), v_ref, v_medio);
95     cond_iniciais_u(us, (nosx_u), (nosy_u), v_ref, v_medio);
96     cond_iniciais_conjul(p_u, nosx_u*nosy_u);
97     cond_iniciais_conjul(residual_u, nosx_u*nosy_u);
98
99     v = malloc((nosx_v)*(nosy_v)*sizeof(double));
100    vs = malloc((nosx_v)*(nosy_v)*sizeof(double));
101    residual_v = malloc((nosx_v)*(nosy_v)*sizeof(double));
102    p_v = malloc((nosx_v)*(nosy_v)*sizeof(double));
103
104    cond_iniciais_v(v, nosx_v, nosy_v);
```

```

105     cond_iniciais_v(vs,nosx_v,nosy_v);
106     cond_iniciais_conjul(p_v,nosx_v*nosy_v);
107     cond_iniciais_conjul(residual_v,nosx_v*nosy_v);

108
109     p = malloc((nosx_p)*(nosy_p)*sizeof(double));
110     pl = malloc((nosx_p)*(nosy_p)*sizeof(double));
111     residual_p = malloc((nosx_p)*(nosy_p)*sizeof(double));
112     p_p = malloc((nosx_p)*(nosy_p)*sizeof(double));

113
114     cond_iniciais_p(p,nosx_p,nosy_p);
115     cond_iniciais_p(pl,nosx_p,nosy_p);
116     cond_iniciais_conjul(residual_p,nosx_p*nosy_p);
117     cond_iniciais_conjul(p_p,nosx_p*nosy_p);

118
119     T = malloc((nosx_p)*(nosy_p)*sizeof(double));
120     residual_T = malloc((nosx_p)*(nosy_p)*sizeof(double));
121     p_t = malloc((nosx_p)*(nosy_p)*sizeof(double));

122
123     cond_iniciais_T(T,nosx_p,nosy_p,Tq,Tf,Tref);
124     cond_iniciais_conjul(residual_T,nosx_p*nosy_p);
125     cond_iniciais_conjul(p_t,nosx_p*nosy_p);

126
127
128     eta = malloc((nosx_p)*(nosy_p)*sizeof(double));
129     gamax = malloc((nosx_p)*(nosy_p)*sizeof(double));
130     gamay = malloc((nosx_p)*(nosy_p)*sizeof(double));

131
132     saveXY(nosy_p, nosx_p, dx, dy);

133
134     for(int k=1; k<nost;k++)
135     {
136         /*campo de eta*/
137
138         for(int i = 1;i<nosy_p-1;i++)
139         {
140             for(int j =1; j<nosx_p -1;j++)
141             {
142                 double ux = (u[j+i*nosx_u+1]-u[j+i*nosx_u])/dx;
143                     //influencia de u* em p por diferenças finitas
144                 double vy = (v[j+(i+1)*nosx_v]-v[j+i*nosx_v])/dy;
145                     //influencia de v* em p por diferenças

```

```

        finitas

144    double uy = ((u[j+(i+1)*nosx_u+1]+u[j+(i+1)*
           nosx_u]) - (u[j+(i-1)*nosx_u+1]+us[j+(i-1)*
           nosx_u]))/(4*dy);

145    double vx = ((v[j+(i+1)*nosx_v+1]+v[j+i*nosx_v
           +1]) - (v[j+(i+1)*nosx_v-1]+vs[j+i*nosx_v-1]))/
           (4*dx);

146

147    double invariante = abs(4*(ux*vy) - (uy+vx)*(uy+
           vx));
           //double invariante =2*ux*ux + 2*uy*uy + (uy+vx)
           *(uy+vx);

148    double gama = sqrt(invariante);

149    if(gama == 0 )
150    {
151
152        eta[j+i*nosx_p] = m;
153
154    }
155
156    else
157    {
158        eta[j+i*nosx_p] = m*pow(gama,n-1);
159    }
160
161
162    /****** */
163
164    /*campo de gamax e gamay*/
165    for(int i = 1;i<nosx_p-1;i++)
166    {
167        eta[i] = 2*(eta[i+nosx_p] - eta[i+nosx_p+nosx_p]) +
           eta[i+nosx_p+nosx_p];//superior
168        eta[nosx_p*(nosy_p-1) + i] = 2*(eta[nosx_p*(nosy_p
           -1) + i - nosx_p] - eta[nosx_p*(nosy_p-1) + i -
           nosx_p - nosx_p]) + eta[nosx_p*(nosy_p-1) + i -
           nosx_p - nosx_p]; //inferior
169    }
170    /****** */
171
172    /*ghost cells esquerda e direita*/
173    for(int i = 1;i<nosy_p-1;i++)
174    {

```

```

174     eta[i*nosx_p] = 2*(eta[i*nosx_p+1] - eta[i*nosx_p+2])
175         + eta[i*nosx_p+2]; //esquerda
176     eta[(i+1)*nosx_p-1]= 2*(eta[((i+1)*nosx_p-1)-1] - eta
177         [((i+1)*nosx_p-1)-2])+eta[((i+1)*nosx_p-1)-2]; ////
178         direita
179     }
180
181     for(int i = 1;i<nosy_p-1;i++)
182     {
183         for(int j =1; j<nosx_p -1;j++)
184         {
185             double ux = (u[j+i*nosx_u+1]-u[j+i*nosx_u])/dx; //influencia de u* em p por diferenças
186             finitas
187             double vy = (v[j+(i+1)*nosx_v]-v[j+i*nosx_v])/dy; //influencia de v* em p por diferenças
188             finitas
189             double uy = ((u[j+(i+1)*nosx_u+1]+u[j+(i+1)*
190                 nosx_u]) - (u[j+(i-1)*nosx_u+1]+u[j+(i-1)*nosx_u]))/(4*dx);
191             double vx = ((v[j+(i+1)*nosx_v +1]+v[j+i*
192                 nosx_v +1]) - (v[j+(i+1)*nosx_v-1]+v[j+i*
193                 nosx_v-1]))/(4*dy);
194
195             double etax = (eta[j+i*nosx_p+1] - eta[j+i*nosx_p-1])/(2*dx);
196             double etay = (eta[j+(i+1)*nosx_p] - eta[j+(i-1)*nosx_p])/(2*dy);
197
198             gamax[j+i*nosx_p] = (etax*(2*ux) + etay*(uy+
199                 vx));
200             gamay[j+i*nosx_p] = (etay*(2*vy) + etax*(uy+
201                 vx));
202         }
203     }
204
205
206
207     /****** */
208     erro_u=1;
209     while(erro_u>tol)
210 
```

```
200      {
201          for(int i = 1; i<nosy_u-1; i++)
202          {
203              us[i*nosx_u+1] = v_medio + 0*us[i*nosx_u+2]; //  
                esquerda
204              us[(i+1)*nosx_u-2] = 0*us[(i+1)*nosx_u-2-1]; //  
                direita
205          }
206          /****************************************************************/
207
208          /*ghost cells esquerda e direita*/
209          for(int i = 1; i<nosy_u-1; i++)
210          {
211              us[i*nosx_u] = v_medio + 0*us[i*nosx_u+1]; //esquerda
212              us[(i+1)*nosx_u-1] = 0*us[(i+1)*nosx_u-1-2]; //  
                direita
213          }
214          /****************************************************************/
215          /*ghost cells baixo e cima****/
216          for(int i = 1; i<nosx_u-1; i++)
217          {
218              us[i] = 2*v_ref - us[i + nosx_u]; // superior
219              us[(nosx_u)*(nosy_u-1)+i] = -us[(nosx_u)*(nosy_u-2)+i  
]//inferior
220          }
221          /****************************************************************/
222          /******'***meio******/
223          for(int i = 1; i<nosy_u-1; i++)
224          {
225              for(int j = 2; j<nosx_u-2; j++)
226              {
227                  double etaij = (eta[j+i*nosx_p]+eta[j+i*nosx_p  
-1])/2;
228                  double gamaxij = (gamax[j+i*nosx_p]+gamax[j+i*  
nosx_p-1])/2;
229
230                  double a1 = 1 + 2*dt*etaij/(dx*dx)+2*dt*etaij/(dy  
*dy); //coeficiente que acompanha uij
231
232                  double difusivo =
```



```
267         for(int i = 0; i<(nosx_u)*(nosy_u); i++)
268         {
269             residual_u[i] = us[i];
270         }
271     }
272
273     printf("passo_u: %d iteracao_u: %d\n", k, iteracoes);
274
275
276
277     erro_v = 1;
278     while(erro_v >tol) {
279         /****** solver de v* *****/
280         /*parede esquerda e direita ghost cells*/
281         for(int i = 1; i<nosy_v-1; i++)
282         {
283             vs[i*nosx_v] = -vs[i*nosx_v+1]; //esquerda
284             vs[(i+1)*nosx_v-1] = -vs[((i+1)*nosx_v-1)-1]; //direita
285         }
286         /****** */
287         /*parede superior e inferior ghost cells*/
288         for(int i = 1; i<nosx_v-1; i++)
289         {
290             vs[i] = 0; //superior
291             vs[(nosy_v-1)*nosx_v + i] = 0; //inferior
292         }
293         /****** */
294         /*parede superior e inferior*/
295         for(int i = 1; i<nosx_v-1; i++)
296         {
297             vs[nosx_v+i] = 0; //superior
298             vs[(nosy_v-2)*nosx_v + i] = 0; //inferior
299         }
300         /****** */
301         /******meio******/
302         for(int i = 2; i<nosy_v-2; i++)
303         {
304             for(int j = 1; j<nosx_v -1; j++)
305             {
```

```

306
307     double etaij = (eta[j+i*nosx_p]+eta[j+(i-1)*
308         nosx_p])/2;
309     double gamayij = (gamay[j+i*nosx_p]+gamay[j+(i-1)*
310         nosx_p])/2;
311
312     double a1 = 1 + 2*etaij*dt/(dx*dx) + 2*etaij*dt/(
313         dy*dy) ;//coeficiente que acompanha uij
314
315     double difusivo =
316         (etaij*dt/(dx*dx))* (vs[j+i*nosx_v+1]+vs[j+i*
317             nosx_v-1]) +
318         (etaij*dt/(dy*dy))* (vs[j+(i+1)*nosx_v] + vs[j+(i-
319             1)*nosx_v]);// termo difusivo por diferenças
320             centradadas implicito
321
322     double uij = (u[j+i*nosx_u] + u[j+(i-1)*nosx_u] +
323         u[j+(i-1)*nosx_u+1] + u[j+i*nosx_u+1])/4;
324
325
326     double Pex = uij*dx/etaij;
327     double Pey = v[j+i*nosx_v]*dy/etaij;
328
329     double advec;
330
331         double advecx = (vs[j+i*nosx_v+1] - vs[j+i*
332             nosx_v-1])/(2);
333         double advecy = (vs[j+(i+1)*nosx_v] - vs[j+(i-
334             1)*nosx_v])/(2);
335
336         advec =
337             dt*uij*advecx/dx + dt*vs[j+i*nosx_v]*advecy/
338                 dy;
339
340
341     double Tij = (T[j+i*nosx_p]+T[j+(i-1)*nosx_p])/2;
342
343     double fonte = v[j+i*nosx_v] - (dt/(rho*dy))*(p[j]
344         +i*nosx_p)-p[j+(i-1)*nosx_p]) - g*betha*dt*(
345             Tij - Tref) + gamayij*0;//termo de pressão e
346             passo anterior
347
348         vs[j+i*nosx_v] = (fonte+advec+difusivo)/a1;

```

```
334         }
335     }
336     /***** */
337     /***** */
338
339     iteracoes = iteracoes +1;
340     if(iteracoes == 10000){
341         break;
342     }
343     erro_v = calcula_erro(vs,residual_v,nosx_v*nosy_v);
344     for(int i = 0;i<(nosx_v)*(nosy_v);i++)
345     {
346         residual_v[i] = vs[i];
347     }
348 }
349
350 printf("passo:%d,iteracao de v:%d\n",k,iteracoes);
351
352 erro_p = 0;
353 for(int i = 1;i<nosy_p-1;i++)
354 {
355     for(int j =1; j<nosx_p -1;j++)
356     {
357         double uij = (us[j+i*nosx_u+1]-us[j+i*nosx_u]);
358             //influencia de u* em p por diferenças finitas
359         double vij = (vs[j+(i+1)*nosx_v]-vs[j+i*nosx_v]);
360             //influencia de v* em p por diferenças
361             finitas
362
363         double px = pl[j+i*nosx_p+1] + pl[j+i*nosx_p-1];
364         double py = pl[j+(i+1)*nosx_p] + pl[j+(i-1)*
365             nosx_p];
366
367         double af = rho/dt; // termo que acompanha as
368             derivadas
369         double a1 = 2/(dx*dx)+2/(dy*dy);
370         double fonte = af*(uij/dx+vij/dy);
371
372         residual_p[j+i*nosx_p] = - fonte - (pl[j+i*
373             nosx_p]*a1-px/(dx*dx)-py/(dy*dy));
```



```
405         double a1 = 2/(dx*dx)+2/(dy*dy);  
406  
407         denominador = denominador + (p_p[j+i*nosx_p]*  
408             a1-px/(dx*dx)-py/(dy*dy))*p_p[j+i*nosx_p];  
409  
410         numerador = numerador + residual_p[j+i*nosx_p]  
411             *residual_p[j+i*nosx_p];  
412     }  
413  
414         xalpha = numerador/denominador;  
415         erro_p = 0;  
416  
417         for(int i = 1; i<nosy_p-1; i++)  
418     {  
419         for(int j =1; j<nosx_p -1; j++)  
420         {  
421             double px = p_p[j+i*nosx_p+1] + p_p[j+i*  
422                 nosx_p-1];  
423             double py = p_p[j+(i+1)*nosx_p] + p_p[j+(i-1)  
424                 *nosx_p];  
425  
426             double a1 = 2/(dx*dx)+2/(dy*dy);  
427  
428             pl[j+i*nosx_p] = pl[j+i*nosx_p] + xalpha*p_p[  
429                 j+i*nosx_p];  
430  
431             residual_p[j+i*nosx_p] = residual_p[j+i*  
432                 nosx_p] - xalpha*(p_p[j+i*nosx_p]*a1-px/  
433                     dx*dx)-py/(dy*dy));  
434  
435             erro_p = erro_p + residual_p[j+i*nosx_p]*  
436                 residual_p[j+i*nosx_p];  
437  
438             numeradorBeta = numeradorBeta + residual_p  
439                 [j+i*nosx_p]*residual_p[j+i*nosx_p];  
440         }  
441     }  
442  
443         erro_p = sqrt(erro_p);
```

```

437         xbetaha = numeradorBetaha/numerador;
438
439         for(int i = 1;i<nosy_p-1;i++)
440     {
441         for(int j = 1; j<nosx_p -1;j++)
442     {
443         p_p[j+i*nosx_p] = residual_p[j+i*nosx_p] +
444             xbetaha*p_p[j+i*nosx_p];
445     }
446
447     iteracoes = iteracoes +1;
448
449     if(iteracoes == 10000)
450         break;
451     }
452     for(int i = 1;i<nosx_p-1;i++)
453     {
454         pl[i] = pl[i+nosx_p];//superior
455         pl[nosx_p*(nosy_p-1) + i] = pl[nosx_p*(nosy_p-1) + i
456             - nosx_p]; //inferior
457     }
458     /****** */
459     /*ghost cells esquerda e direita*/
460     for(int i = 1;i<nosy_p-1;i++)
461     {
462         pl[i*nosx_p] = pl[i*nosx_p+1]; //esquerda
463         pl[ (i+1)*nosx_p-1]= pl[ ((i+1)*nosx_p-1)-1]; //direita
464     }
465
466     printf("passo:_%d_iteracao_de_P:_%d\n",k,iteracoes);
467     iteracoes = 0;
468
469     /*atualização para a pressão****/
470     /****** */
471     /*atualização para a velocidade*/
472     /******atualização de u******/
473     for(int i = 1;i<nosy_u-1;i++)
474     {
475         for(int j = 1; j<nosx_u-1;j++) {

```

```

476         u[j+i*nosx_u] = us[j+i*nosx_u] - (dt/(rho*dx))*( 
477             pl[j+i*nosx_p]-pl[j+i*nosx_p-1]);
478     }
479     /*********************************************************************
480     *****atualizaçāo de v*****
481     for(int i = 1;i<nosy_v-1;i++)
482     {
483         for(int j = 1; j<nosx_v-1;j++) {
484             v[j+i*nosx_v] = vs[j+i*nosx_v] - (dt/(rho*dy))*( 
485                 pl[j+i*nosx_p]-pl[j+(i-1)*nosx_p]) ;
486         }
487         /*********************************************************************
488         /*********************************************************************
489         for(int i = 1;i<nosy_p-1;i++)
490         {
491             for(int j = 1; j<nosx_p-1;j++) {
492                 p[j+i*nosx_p] =p[j+i*nosx_p]+pl[j+i*nosx_p];
493             }
494         }
495         erro_T = 0;
496         for(int i = 1;i<nosy_p-1;i++)
497         {
498             for(int j = 1; j<nosx_p -1;j++)
499             {
500                 double a1 = (1 + 2.0*dt*alpha/(dx*dx) + 2.0* 
501                               dt*alpha/(dy*dy));
502
503                 double uij = (u[j+i*nosx_u+1]+u[j+i*nosx_u]) 
504                               /2.0;
505                 double vij = (v[j+(i+1)*nosx_v]+v[j+i*nosx_v] 
506                               ])/2.0;
507                 double advec =
508                     uij*dt/(2*dx)*(T[j+i*nosx_p+1]-T[j+i*nosx_p 
509                               -1])+ 
510                     vij*dt/(2*dy)*(T[j+(i+1)*nosx_p]-T[j+(i-1)* 
511                               nosx_p]);
512
513                 double difusivo =
514                     alpha*dt*

```

```

510          ((T[j+i*nosx_p+1]+T[j+i*nosx_p-1])/(dx*dx) +
511          (T[j+(i+1)*nosx_p]+T[j+(i-1)*nosx_p])/(dy*dy)
512          );
513
514         residual_T[j+i*nosx_p] = -(T[j+i*nosx_p]*a1-
515         difusivo+advec - T[j+i*nosx_p]);
516
517         p_t[j+i*nosx_p] = residual_T[j+i*nosx_p];
518         erro_T = erro_T + residual_T[j+i*nosx_p]*
519         residual_T[j+i*nosx_p];
520     }
521 }
522 erro_T = sqrt(erro_T);
523 iteracoes = 0;
524 //*****Solver de T*****
525 while(erro_T>tol && useTermal){
526     erro_T = 0;
527     for(int i = 1;i<nosx_p-1;i++)
528     {
529         p_t[i] = p_t[i+nosx_p];//superior
530         p_t[nosx_p*(nosy_p-1) + i] = p_t[nosx_p*(nosy_p
531             -1) + i - nosx_p]; //inferior
532     }
533     for(int i = 1;i<nosy_p-1;i++)
534     {
535         p_t[i*nosx_p] = -p_t[i*nosx_p+1]; //esquerda
536         p_t[(i+1)*nosx_p-1]= -p_t[((i+1)*nosx_p-1)-1]; ////
537             direita
538     }
539     double numerador = 0;
540     double numeradorBeta = 0;
541     double denominador = 0;
542
543     for(int i = 1;i<nosy_p-1;i++)
544     {
545         for(int j = 1; j<nosx_p -1;j++)
546         {
547             double a1 = (1.0 + 2.0*dt*alpha/(dx*dx) +
548             2.0*dt*alpha/(dy*dy));

```

```

544         double uij = (u[j+i*nosx_u+1]+u[j+i*nosx_u])  

545             /2.0;  

546         double vij = (v[j+(i+1)*nosx_v]+v[j+i*nosx_v]  

547             ])/2.0;  

548         double advec =  

549             uij*dt/(2*dx)*(p_t[j+i*nosx_p+1]-p_t[j+i*  

550                 nosx_p-1])+  

551                 vij*dt/(2*dy)*(p_t[j+(i+1)*nosx_p]-p_t[j+(i  

552                     -1)*nosx_p]);  

553  

554         double difusivo =  

555             alpha*dt*  

556                 ((p_t[j+i*nosx_p+1]+p_t[j+i*nosx_p-1])/(dx*dx  

557                     ) +  

558                     (p_t[j+(i+1)*nosx_p]+p_t[j+(i-1)*nosx_p])/(dy  

559                         *dy));  

560  

561             denominador = denominador + (p_t[j+i*nosx_p]*  

562                 al-difusivo+advec)*p_t[j+i*nosx_p];  

563  

564             numerador = numerador + residual_T[j+i*nosx_p]  

565                 *residual_T[j+i*nosx_p];  

566         }  

567     }  

568     xalpha = numerador/denominador;  

569  

570     for(int i = 1; i<nosy_p-1; i++)  

571     {  

572         for(int j = 1; j<nosx_p-1; j++)  

573         {  

574             double al = (1.0 + 2.0*dt*alpha/(dx*dx) +  

575                 2.0*dt*alpha/(dy*dy));  

576  

577             double uij = (u[j+i*nosx_u+1]+u[j+i*nosx_u])  

578                 /2.0;  

579             double vij = (v[j+(i+1)*nosx_v]+v[j+i*nosx_v]  

580                 ])/2.0;

```

```

574     double advec =
575         uij*dt/(2*dx)*(p_t[j+i*nosx_p+1]-p_t[j+i*
576             nosx_p-1])+  

577         vij*dt/(2*dy)*(p_t[j+(i+1)*nosx_p]-p_t[j+(i
578             -1)*nosx_p]);  

579  

580     double difusivo =
581         alpha*dt*
582             ((p_t[j+i*nosx_p+1]+p_t[j+i*nosx_p-1])/(dx*dx
583                 ) +
584                 (p_t[j+(i+1)*nosx_p]+p_t[j+(i-1)*nosx_p])/(dy
585                     *dy));  

586  

587     T[j+i*nosx_p] = T[j+i*nosx_p] + xalpha*p_t[j+
588         i*nosx_p];  

589  

590     residual_T[j+i*nosx_p] = residual_T[j+i*
591         nosx_p] - xalpha*(p_t[j+i*nosx_p]*al-
592             difusivo+advec);  

593  

594     numeradorBetha = numeradorBetha + residual_T
595         [j+i*nosx_p]*residual_T[j+i*nosx_p];
596     erro_T = erro_T + residual_T[j+i*nosx_p]*
597         residual_T[j+i*nosx_p];
598     }  

599 }
600  

601     erro_T = sqrt(erro_T);
602     xbeta = numeradorBetha/numerador;
603     for(int i = 1; i<nosy_p-1; i++)
604     {
605         for(int j = 1; j<nosx_p -1; j++)
606         {
607             p_t[j+i*nosx_p] = residual_T[j+i*nosx_p] +
608                 xbeta*p_t[j+i*nosx_p];
609         }
610     }
611  

612     iteracoes = iteracoes +1;
613     if(iteracoes == 1000)

```

```
605         break;
606     }
607
608     for(int i = 1; i<nosx_p-1; i++)
609     {
610         T[i] = T[i+nosx_p]; //superior
611         T[nosx_p*(nosy_p-1) + i] = T[nosx_p*(nosy_p-1) + i -
612                                         nosx_p]; //inferior
613     }
614     /****** */
615     /*ghost cells esquerda e direita*/
616     for(int i = 1; i<nosy_p-1; i++)
617     {
618         T[i*nosx_p] = 2.0*Tf - T[i*nosx_p+1]; //esquerda
619         T[(i+1)*nosx_p-1]= 2.0*Tq -T[((i+1)*nosx_p-1)-1]; //direita
620     }
621     printf("passo : %d iteracao de T : %d\n", k, iteracoes);
622
623
624     end = clock();
625     cpu_time_used = ((double) (end - start)) / CLOCKS_PER_SEC;
626
627     saveToCSV(u,v, p,T,nosy_p,nosx_p,nosx_u,nosx_v);
628     free(u);
629     free(us);
630     free(v);
631     free(vs);
632     free(p);
633     free(pl);
634     free(T);
635     free(residual_p);
636     free(residual_T);
637     free(residual_u);
638     free(residual_v);
639     free(p_t);
640     free(p_p);
641     free(p_u);
642     free(p_v);
643     free(eta);
```

```
644     free(gamax);  
645     free(gamay);  
646     return 0;  
647 }
```

Listing B.1: Código desenvolvido por Luís Eduardo Silva Borges - 2024