



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Modelagem computacional de escoamentos utilizando a  
metodologia da fronteira imersa dos volumes fantasmas com  
direção local**

**João Emanuel Fermino Martini**

Uberlândia  
2024

# Lista de ilustrações

Figura 1.1 – Identificação das células fantasmas e seu respectivo ponto de imagem usando a metodologia convencional das células fantasmas . . . . .	10
Figura 1.2 – Identificação de duas situações onde há problemas em definir um ponto de imagem em (a) dois IP são definidos a partir de um GC e (b) não é encontrado um IP que é definido a partir de um GC . . . . .	10
Figura 2.1 – Configuração da malha próxima ao corpo sólido . . . . .	14
Figura 2.2 – Esquema de discretização em um canto agudo . . . . .	15
Figura 2.3 – Classificação do contorno que intercepta uma região de fluido . . . . .	15
Figura 2.4 – Esquema que intercepta a malha euleriana com a superfície imersa . . . . .	16
Figura 2.5 – Classificação e esquemas de Interpolação da velocidade adjacente a fronteira imersa . . . . .	17
Figura 2.6 – Representação da fronteira imersa no escoamento computacional. . . . .	18
Figura 2.7 – Marcação Completa . . . . .	22
Figura 2.8 – Função $f(x)$ contínua e derivável por partes estendida através da descontinuidade. Valores fictícios (o) e valores reais (•) da função. . . . .	23
Figura 5.1 – Representação esquemática do escoamento Poiseuille . . . . .	36
Figura 5.2 – Campo de Velocidade . . . . .	37
Figura 5.3 – Campo de Temperatura . . . . .	37
Figura 5.4 – Perfil vertical da velocidade e temperatura avaliado em $L/2$ . . . . .	38
Figura 5.5 – Perfil Horizontal de Temperatura avaliado em $y = 0m$ , $y = 0,5m$ e $y = 0,3m$ . . . . .	38
Figura 5.6 – Campo de Velocidade usando o método da Multi Forçagem Direta . . . . .	39
Figura 5.7 – Campo de Temperatura usando o método dos volumes fantasmas com direção local . . . . .	40
Figura 5.8 – Perfil vertical da velocidade e temperatura avaliado em $L/2$ usando a hibridização dos modelos de fronteira imersa . . . . .	40
Figura 5.9 – Fluxograma que representa o processo de marcação e classificação das células eulerianas. . . . .	43
Figura 5.10–Malha para a validação da fronteira imersa podendo estar fora do nível mais refinado . . . . .	45
Figura 5.11–Perfil de velocidade - fronteira imersa entre níveis físicos . . . . .	45

# Lista de tabelas

Tabela 5.1 – Dados de Entrada . . . . .	37
Tabela 5.2 – Dados de Entrada . . . . .	39
Tabela 5.3 – Resultados do tempo de processamento durante a marcação para cada versão	44
Tabela 5.4 – Consumo de memória durante a busca de pontos eulerianos próximo a fronteira imersa . . . . .	44
Tabela 6.1 – Cronograma de Atividades apresentados no plano de Tese . . . . .	49
Tabela 6.2 – Cronograma de Atividades atualizado . . . . .	50

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
1.1	Código MFSIM	7
1.2	Motivação	8
1.3	Escopo do trabalho	11
1.4	Objetivos	12
<b>2</b>	<b>Referencial Teórico</b>	<b>13</b>
2.1	Origem dos Métodos de Fronteira Imersa	14
2.2	Imposição das Condições de Contorno na Fronteira Imersa	17
2.3	Metodologia da fronteira imersa com volumes fantasmas	20
2.3.1	Métodos convencionais	20
2.3.2	Método dos volumes fantasmas com direção local	21
<b>3</b>	<b>Modelagem Matemática</b>	<b>26</b>
3.1	Definições Preliminares	26
3.2	Equação da Continuidade	27
3.3	Equação do balanço da quantidade de movimento linear	27
3.4	Equação do balanço da energia interna	29
3.5	Simplificações Cabíveis	30
<b>4</b>	<b>Modelagem Numérica</b>	<b>32</b>
4.1	Discretização Temporal	32
4.2	Discretização do termo advectivo	33
4.3	Discretização do termo difusivo	34
4.4	Acoplamento Pressão-Velocidade	34
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>36</b>
5.0.1	Aplicação da metodologia da fronteira imersa dos volumes fantasmas com direção local para escoamentos térmicos	36
5.1	Hibridização dos modelos de fronteira imersa	38
5.2	Redução do custo computacional associado as marcações e classificações dos volumes eulerianos	40
5.2.1	Busca por pontos eulerianos próximos a fronteira imersa	40
5.2.2	Marcação Primária	41
5.2.3	Marcação Secundária	42
5.3	Fronteira Imersa fora do nível mais refinado	44
5.3.1	Escoamento interno e externo separado por uma IB de espessura infinitesimal	46
<b>6</b>	<b>Atualização do Cronograma</b>	<b>47</b>

<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>51</b>
<b>7 Apêndice</b>	<b>56</b>
7.1 Solução Escoamento Poiseuille em regime laminar com efeitos térmicos	56
7.1.1 Placas planas	57

# Capítulo 1

## Introdução

A técnica da Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC) vem sendo ao longo dos últimos anos constantemente aprimorada através da inserção de ferramentas computacionais e modelos matemáticos com as quais representa-se com ótima fidedignidade e com custo computacional cada vez menor o comportamento caótico do escoamento turbulento na natureza.

A utilização da DFC para simulação de casos com a presença de geometrias imersas podem ser modelados usando métodos de fronteira imersa que se destacam por sua facilidade durante a criação da malha e na eficiência computacional associado ao consumo de memória e tempo de processamento.

O trabalho de Peskin (1972) foi o pioneiro ao introduzir o método da fronteira imersa, embora alguns estudos já estivessem em andamento há anos, especialmente no desenvolvimento de algoritmos de reconstrução próximo à fronteira imersa. Neste estudo, o autor demonstrou interesse ao simular o ~~fluxo~~ <sup>escoamento</sup> sanguíneo através de uma válvula do coração humano usando uma malha cartesiana para o fluido e uma malha lagrangiana para a representação da fronteira imersa. O modelo adiciona um termo forçante na equação parcial do balanço da quantidade de movimento, através do qual representa a interação entre fluido-sólido por meio de uma função Delta de Dirac que distribuía a força lagrangiana para os vizinhos eulerianos mais próximos. *núcleo de Dirac?*

A partir desse trabalho, houve ~~muitos~~ <sup>numerosos</sup> avanços e contribuições significativas na qual posteriormente a metodologia da fronteira imersa se dividiu em duas classes, sendo (i) modelos contínuos que impõem a condição de contorno de maneira direta na equação parcial de governo e (ii) modelos discretos que impõem a condição de contorno de maneira indireta na versão discretizada da equação do governo. *linear* *resultando* *????* *balanço* *op?*

O método dos volumes fantasmas introduzido inicialmente nos trabalhos de Fadlun et al. (2000) e Mohd-Yusof (1997), vem a ser uma alternativa aos modelos contínuos. O método dos volumes fantasmas trata a fronteira imersa como interface nítida e não adiciona termos forçantes as equações parciais de governo, ao invés disso, a condição de contorno na interface imersa é aplicada usando células fantasmas. As células fantasmas são células internas a fronteira imersa mas que apresenta pelo menos um vizinho na região do fluido. O escoamento "sente a presença" da fronteira imersa através das células fantasmas. Os valores das células fantasmas são calculados usando modelos de extrapolação que são dados em função da condição de contorno sobre a superfície da fronteira imersa e as variáveis do fluido próximo a fronteira imersa. *????*

Uma variação aos métodos tradicionais dos volumes fantasmas é o método dos volumes fantasmas com direção local, esse modelo consiste em obter os valores das células fantasmas através de polinômios de interpolação e extrapolação via Lagrange na direção da derivada discretizada usando estêncil unidimensional, mesmo para simulações tridimensionais. Essa proposta é o foco para o desenvolvimento do presente trabalho e é baseada no trabalho de Berthelsen e Faltinsen (2008) e que vem sendo recentemente implementada no código interno MFSim da UFU justificado com base as diversas vantagens de aplicação conforme é mencionado em Andrade (2015).

## 1.1 Código MFSim

O MFSim é um software de ~~simulação~~ <sup>modelagem & simulação</sup> fluidodinâmica que ~~foi~~ <sup>com</sup> iniciou-se em Villar (2007) e vem sendo desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia (MFLAB-UFU) em parceria com a empresa Petróleo Brasileiro S. A. O código é escrito em Fortran90 com algumas partes em C e C++. Atualmente, ~~o~~ <sup>com esse</sup> código resolve as equações de balanço pelo método dos volumes finitos (MVF) usando malha deslocada. <sup>m = 12</sup> para a integração temporal utiliza-se métodos específicos baseados nas formulações semi-implícitas, implícitas e totalmente explícitas com modelos de segunda e quarta ordem. O código ainda ~~disponibiliza~~ <sup>contém</sup> vários modelos para o tratamento dos termos advectivos e o acoplamento pressão-velocidade. <sup>P</sup> pode ser realizado escolhendo o método dos Passos-Fracionados, SIMPLE, SIMPLEC e PISO. Os sistemas lineares são resolvidos de maneira iterativa pelo método multigrid-multinível ou utilizando-se a biblioteca PETSc.

O MFSim opera usando malha adaptativa bloco-estruturada e permite o uso de refinamento fixo local ou refinamento dinâmico que é atualizado com o avanço do tempo de acordo com critérios baseados em propriedades do escoamento. Para escoamentos turbulentos são oferecidos modelos para o fechamento da turbulência da classe URANS (Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes) ou pertencentes ao modelo LES (Large Eddy Simulation). <sup>disponível de</sup>

Para a modelagem ~~da~~ <sup>de escoamentos</sup> simulação com a presença de corpos imersos, ~~o~~ <sup>disponibiliza</sup> código disponibiliza um modelo de interface difusa chamado Multi-Forçamento Direta (MDF) que foi proposto inicialmente em (WANG et al., 2008), e recentemente vem sendo introduzido ao código um modelo de fronteira imersa discreto (interface nítida), o método dos volumes fantasmas com direção local (IBM-GC) que é baseado no trabalho de (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2008).

Dentre as possibilidades que o MFSim <sup>em</sup> permite executar, estão:

- Simulação de escoamentos turbulentos: (MELO, 2017), (ELIAS, 2018), (MOTTA; VEDOVOTTO; NETO, 2023) e (PRETA, 2018).
- Simulação de corpos imersos complexos e móveis; (MARTINI, 2022), (MELO, 2017) e (STIVAL et al., 2023).

- Escoamentos reativos: (DAMASCENO, 2018) e (ELIAS, 2023).
- Interação fluido-estrutura: (MORALES et al., 2023) e (RIBEIRO-NETO, 2021).
- Escoamentos particulados: (PRETA, 2023) e (CASTRO et al., 2019).
- Escoamentos multifásicos: (VILLAR, 2007), (MAGALHAES, 2022) (BARBI et al., 2018).
- Evaporação: (MARTINS, 2023) e (PINHEIRO et al., 2019).
- Corrosão: (MOTTA, 2023).

## 1.2 Motivação

A justificativa e a motivação para explorar o tema relacionado à metodologia imersa dos volumes fantasmas com direção local, originam-se da vantagem que essa abordagem apresenta em comparação com a metodologia da Multi Forçamento Direta, pertencente à classe de interface difusa, que é o modelo padrão atualmente no código MFSim, além dos métodos dos volumes fantasmas convencionais e o método das células cortadas (*cut-in-cell*).

Portanto, nos próximos parágrafos serão apresentadas as características e as vantagens do método objeto de estudo e desenvolvimento em relação aos demais modelos para o tratamento da fronteira imersa.

## Método da multi forçamento direta versus Metodologia dos volumes fantasmas com direção local

Inicialmente o código MFSim continha modelos de fronteira imersa contínuos, ou seja, onde um termo fonte é incluído na equação de balanço da quantidade de movimento linear antes do processo de discretização. O método em questão é o *Multi Direct Forcing* (MDF). Nesse método, as forças determinadas em cada ponto lagrangiano são distribuídas para a malha euleriana com o uso de funções delta discretas ou funções máscaras. Portanto nessa abordagem em virtude da utilização das funções de distribuição há uma dificuldade em prescrever corretamente a condição de contorno sobre a interface imersa.

No MFSim, esse método exige a utilização de um escoamento complementar em conjunto com o escoamento de interesse para impor a velocidade na superfície do sólido. Dessa forma, não é possível simular com acurácia escoamentos internos e externos. Um outro agravante são simulações que apresentam fronteira imersa com placas finas e aerofólios tendo em vista que as forças podem ser distribuídas em regiões independentes, como é na borda de fuga de um aerfólio, onde Andrade (2015) observou que as forças calculadas no extradorso são distribuídas para o escoamento próximo ao intradorso.



Além disso, em casos de interação fluido-estrutura, há um acúmulo de massa na estrutura devido à movimentação da fronteira imersa, pois quando a fronteira imersa se movimenta, o escoamento interno deve acompanhá-la, e quem exerce a força para a movimentação do escoamento interno é a própria fronteira imersa, via MDF. O fluido interno por sua vez exerce uma força contrária de mesmo módulo e direção contrária, sendo essa força interpretada como um aumento da massa da fronteira imersa (RIBEIRO-NETO, 2021).

Os métodos de interface nítida que incluem a metodologia das células fantasmas, foram justamente elaborados para contornar esse tipo de situação, nesse método, as fronteiras imersas são tratadas de forma independente e não há o uso de funções de distribuição para espalhar as forças nos pontos eulerianos e degradar a solução, ao invés disso, a condição de contorno é imposta quando as derivadas parciais das equações de balanço já estão discretizadas utilizando-se estêncil para definir a extrapolação das células fantasmas.

## **Método das células cortadas *versus* Metodologia dos volumes fantasmas com direção local**

No método das células cortadas (*cut-in-cell*), as células da malha do fluido que são parcialmente interceptadas pela interface da fronteira imersa devem ser ponderadas com base na proporção em que são ocupadas pelo sólido e pelo fluido. Não é necessário algoritmos de reconstrução, a condição de contorno é diretamente aplicada para a célula remodelada próximo a fronteira imersa. A principal dificuldade desse modelo é a implementação de um algoritmo suficientemente capaz de computar o peso percentual de cada célula independente do tamanho e do modo que seja intercepta pela interface. Além disso, o passo de tempo é restringido conforme o tamanho das células parciais, podendo levar uma diminuição severa no passo de tempo.

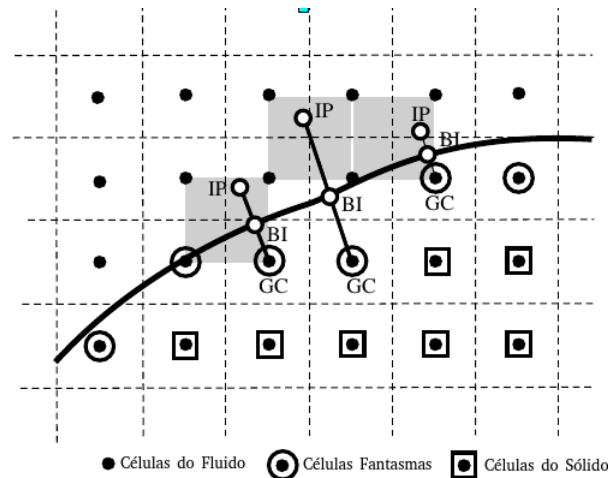
No caso da metodologia da fronteira imersa dos volumes fantasmas, não há a necessidade de implementar esse algoritmo para fornecer o peso das células cortadas pela interface do sólido. O passo de tempo é computado de acordo com a dimensão conhecida da célula euleriana no nível mais fino, garantindo maior controle e estabilidade durante a simulação.

## **Metodologia dos volumes fantasmas convencional *versus* Metodologia dos volumes fantasmas com direção local**

Como será visto em mais detalhes no Capítulo 2, o método convencional de fronteira imersa usando células fantasmas utilizam-se de pontos espelhados de acordo com a direção normal a fronteira imersa para extrapolar as células fantasmas, como está representado na Fig. 1.1.

Nos métodos convencionais, em casos específicos como é mostrado pela Fig 1.2, dependendo do tipo de fronteira imersa uma célula fantasma pode apresentar (i) dois pontos que interceptam a fronteira imersa e portanto dois pontos espelhados para a região euleriana ou (ii) não é detectado

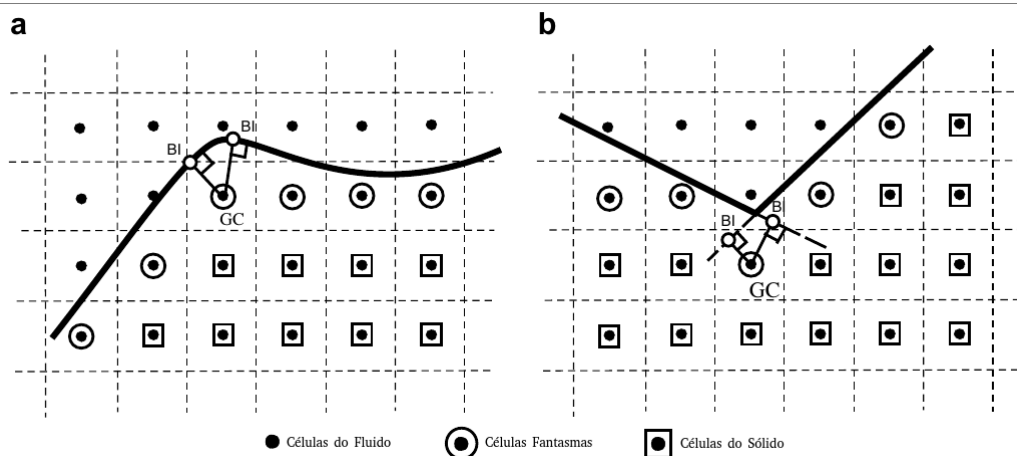
Figura 1.1 – Identificação das células fantasmas e seu respectivo ponto de imagem usando a metodologia convencional das células fantasmas



Retirado de (MITTAL et al., 2008)

um ponto para a região euleriana de acordo com a direção normal a fronteira imersa. Quando esses tipos de casos especiais ocorrem os autores utilizam algumas abordagens específicas para o tratamento da célula fantasmas, por exemplo, em Mittal et al. (2008) em (ii) é ampliado a zona de busca para encontrar um ponto interno a fronteira imersa que consiga ser espelhado para a região euleriana, mesmo que não necessariamente seja definido como uma célula fantasma, dessa forma, esse novo ponto passa a ser o escolhido ao invés da célula antiga, já em (i) é escolhido o ponto espelhado mais próximo a fronteira imersa, eliminando os demais.

Figura 1.2 – Identificação de duas situações onde há problemas em definir um ponto de imagem em (a) dois IP são definidos a partir de um GC e (b) não é encontrado um IP que é definido a partir de um GC



Retirado de (MITTAL et al., 2008)

Apesar desses ajustes serem implementados em mais trabalhos relacionados, acabam por adicionar complexidade ao método e aumento do custo computacional, além disso, perde a

generalidade do método, pois nesses casos específicos ainda não é apresentado uma formulação padrão global.

O método de fronteira imersa com direção local, independente da fronteira imersa não apresenta essas dificuldades, pois ao invés de utilizar a direção normal a interface imersa, as células fantasmas são extrapoladas na direção de discretização das ~~derivadas~~ *equações diferenciais* parciais.

O método das células fantasmas com direção local, também opera usando um polinômio interpolador unidirecional, pois as variáveis são calculadas independentes das demais direções. Já no modelo convencional, em casos multidimensionais necessita-se utilizar um polinômio com estêncil que abrange células vizinhas em mais de uma direção. Tais células vizinhas podem ser outras células fantasmas que estão muito próximas a interface imersa, consequentemente, o peso ponderado dessa célula é muito alto, o que necessita adotar um método de sistema linear para convergir a solução (MITTAL et al., 2008).

Por fim, nos métodos convencionais, vários autores preferem utilizar modelos de discretização de alta ordem o que levam a necessidade de definir muitas camadas de células no interior da fronteira imersa como células fantasmas, dificultando ou praticamente impedindo a paralelização do domínio e de acordo com Chi, Abdelsamie e Thévenin (2022), definindo múltiplas células fantasmas, levam a uma maior dificuldade em capturar os fenômenos que acontecem na camada limite de cantos esbeltos.

## 1.3 Escopo do trabalho

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma

- Capítulo 1, Introdução: Apresentação do tema e do código MFSim, principais motivações para o desenvolvimento desse tema e os objetivos gerais e específicos a serem finalizados até a apresentação da futura Tese.
- Capítulo 2, Referencial Teórico: Principais aspectos e características do método de fronteira imersa, apresentação de um breve histórico do desenvolvimento e avanço sobre esse tema mostrando alguns trabalhos relevantes que precederam ao trabalho de Peskin (1972), principais diferenças entre as classes dos modelos de fronteira imersa e descrição detalhada sobre a metodologia da fronteira imersa com volumes fantasmas com direção local.
- Capítulo 3, Modelagem Matemática: Descrição da modelagem matemática utilizada nesse trabalho, contemplando as formulações para a equação do balanço de quantidade de movimento linear e equação do balanço da energia térmica.
- Capítulo 4, Modelagem Numérica: Apresentação dos modelos escolhidos para a discretização de cada termo das discretizações parciais, (i) Discretização do termo temporal, (ii) Discretização do termo advectivo e difusivo e (iii) Acoplamento Pressão-Velocidade para a equação do balanço da quantidade de movimento linear.

- Capítulo 5, Resultados: Resultados para a validação das implementações realizadas no código MFSIM.
- Capítulo 6, Cronograma: Apresentação e discussão do cronograma até a data da apresentação da Tese.

## 1.4 Objetivos

- Revisão Bibliográfica visando estabelecer o estado da arte sobre (i) metodologia da fronteira imersa para corpos fixos e móveis de geometrias rombudas e esbeltas submetida a escoamentos internos e externos (ii) Equação da energia térmica aplicando condições de contorno de primeira, segunda e terceira espécie (iii) Modelos de fechamento da turbulência classe LES e URANS (iii).
- Verificação e Validação de casos onde a fronteira imersa separa escoamentos internos e externos.
- Implementação da equação da energia para escoamentos incompressíveis.
- Verificação e validação da <sup>implementação da</sup> equação da energia térmica.
- Implementação dos modelos de turbulência URANS e LES no código MFSim para casos envolvendo a utilização da metodologia dos volumes fantasmas locais e modelando-se o termo de taxa de deformação.
- Buscar metodologias e implementar/adaptar a metodologia dos volumes fantasmas locais para a simulação computacional em corpos imersos tridimensionais móveis.

## Capítulo 2

## Referencial Teórico

A área de pesquisa da fluidodinâmica computacional que inclui a análise de escoamentos através de corpos imersos é um tópico que vem intensamente ao longo das últimas décadas sendo alvo de intenso estudo e desenvolvimento motivado pela sua vasta aplicação tanto no meio acadêmico quanto industrial. Os métodos computacionais dessa categoria devem ser suficientemente versáteis para simular geometrias complexas, móveis e em problemas relacionados com a interação fluido-estrutura.

Para realizar simulações computacionais com a presença de corpos imersos, há duas abordagens que geralmente são usadas: Usando malhas que se ajustam em conformidade com o corpo imerso, denominado de métodos *body-fitted*, e o método da fronteira imersa. *presente*

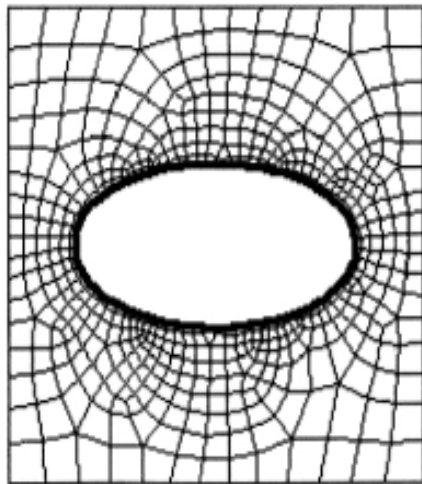
A metodologia da fronteira imersa, foco do ~~presente~~ desenvolvimento da tese, é um modelo que surge como alternativa aos métodos *body-fitted*, pois nele são gerados duas malhas que coexistem no domínio computacional de forma independente. A malha euleriana, que é usada para resolver as equações de balanço do fluido em cada volume de controle e a malha lagrangiana que representa a fronteira do corpo imerso que sofre a influência do escoamento (MARTINI, 2022).

Pelo fato de não ter dependência entre as malhas, a malha euleriana não apresenta restrição a fronteira do objeto, podendo apresentar volumes no interior do corpo imerso. Logo, essa malha pode ser construída com uma geometria extremamente simples, como por exemplo a cartesiana regular, facilitando extremamente a sua criação, podendo o próprio software designar essa malha com apenas alguns simples parâmetros fornecidos pelos usuários.

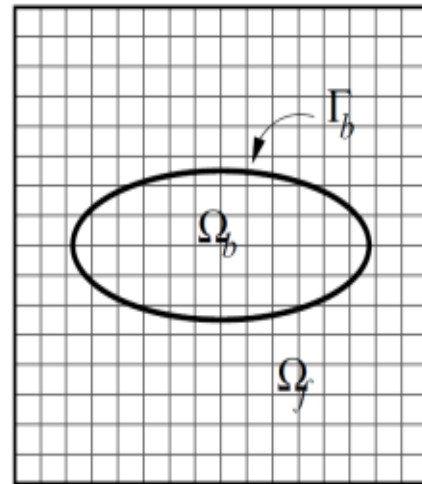
As figuras 2.1-a e 2.1-b mostram as diferenças entre os dois métodos. Nota-se a presença de volumes no interior do corpo sólido enquanto que a metodologia que utiliza-se malhas em conformidade com a geometria (*body fitted grid*) a malha não ultrapassa o corpo sólido.

A ideia central do método da fronteira imersa consiste em tratar de maneira simultânea o domínio do fluido e do corpo sólido. O acoplamento entre essas malhas pode ocorrer pelo método contínuo ou via método discreto. Na subseção 2.2 será detalhado cada um desses modelos. **T**odavia, na próxima seção (seção 2.1) será dado um enfoque sobre as origens desse método e a contribuição dos principais pesquisadores dessa área para o aperfeiçoamento do mesmo.

Figura 2.1 – Configuração da malha próxima ao corpo sólido



(a) Malha que se adaptada ao corpo



(b) Malha com volumes no interior do corpo

Retirado de Melo (2017).

## 2.1 Origem dos Métodos de Fronteira Imersa

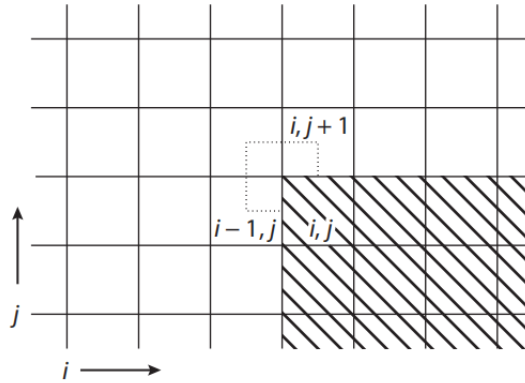
O método da fronteira imersa foi inicialmente proposto por Peskin (1972) que simulou o escoamento sanguíneo através de uma válvula do coração humano. A principal ideia desse método foi de utilizar uma simples malha cartesiana para representar o fluido juntamente com uma malha lagrangiana para representar a fronteira imersa. Para expressar a interação entre elas foi introduzido um termo de força na equação de Navier-Stokes e uma função discreta chamada de *núcleo de Dirac* que é usada para suavizar essa força sobre os pontos eulerianos (LUO et al., 2016).

Com esse trabalho vários autores estão avançando sobre esse tema, introduzindo significativas mudanças e melhorias para essa metodologia. No entanto, vale mencionar que no trabalho de Verzicco (2023), o autor afirma que o início dos trabalhos envolvendo a utilização de malhas que não conformam o corpo na área da dinâmica dos fluidos computacional, iniciou-se em meados dos anos 1950, época que também ficou marcada com o início da utilização de computadores para a solução de equações diferenciais. Portanto, a partir desse ponto serão citados alguns autores que introduziram alguns conceitos e determinadas técnicas numéricas que foram de extrema valia para a implementação dos principais modelos de fronteira imersa que possui atualmente uma grande popularidade no meio acadêmico.

Inicialmente Evans e Harlow (1957) introduziram uma técnica de reposicionamento da fronteira imersa para que esteja sempre alinhada com a região do fluido e a equação de governo não deveria acessar nenhuma informação interior a fronteira imersa além da condição de contorno. Essa técnica se aplica apenas a casos bastante simples, nos quais qualquer desalinhamento entre a geometria e a malha do fluido invalida seu uso. Além disso, os autores observaram dificuldades na implementação dessa técnica quando lidava com geometrias com cantos agudos, exemplificados

Procurar em todo o texto exemplos!

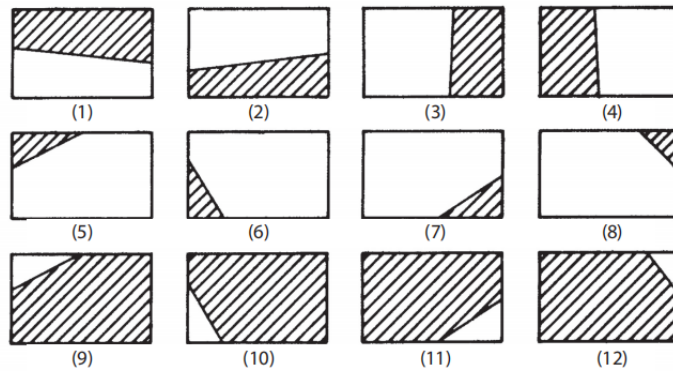
Figura 2.2 – Esquema de discretização em um canto agudo



Retirado de Verzicco (2023)

pela linha tracejada na Fig. 2.2.

Figura 2.3 – Classificação do contorno que intercepta uma região de fluido

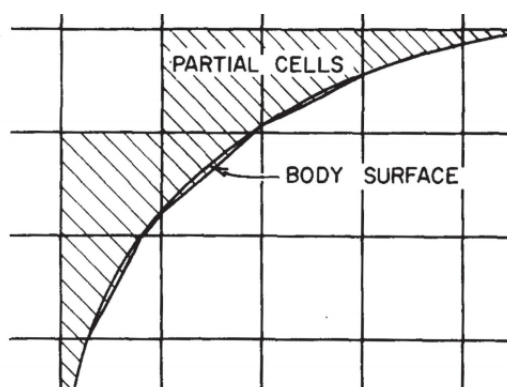


Retirado de Verzicco (2023)

A limitação desse método foi superado pelo trabalho de Rich e Blackman (1962) que usou o método diferenças finitas para simular um escoamento compressível bidimensional. Nesse trabalho, os autores definiram células fictícias dentro do corpo sólido (chamado de células fantasmas) para garantir a condição de contorno na parede, e as células localizadas na região de ponta, duas malhas fictícias foram usadas tanto horizontalmente ( $i-1, j \rightarrow i, j$ ), quanto verticalmente ( $i, j+1 \rightarrow i, j$ ). Os autores ainda mostraram 12 configurações de contorno (ilustrado na Fig. 2.3) que intersectam a zona de fluido e em cada uma dessas configurações, um conjunto de cinco quantidades geométricas, incluindo fração fluido-área e fração fluido-sólido, foram computados para ponderar os termos de força para calcular os termos de fluxos nas faces das células. Apesar desse mapeamento da interface fluido-sólido ser feito manualmente e confinado a essas doze configurações, pode se considerar que essa técnica serviu de alicerce para as recentes técnicas de reconstrução da fronteira proposto por Fadlun et al. (2000), enquanto que as métricas usadas para calcular os fluxos nas faces das células são bem semelhantes aos métodos *cut-cell* aplicados em malhas Cartesianas, conforme é descrito em Seo e Mittal (2011).

No trabalho de Gentry, Martin e Daly (1966), os autores adicionaram flexibilidade em casos onde o contorno do corpo sólido é reflexivo e conseguiram reconhecer que ao utilizar células parciais (ou seja, células onde a superfície do corpo não está alinhado com a malha do fluido podendo interceptá-la em várias locais, como é ilustrado na Fig. 2.4) de dimensões muito menores do que as células inteiras do fluido, podem limitar o passo de tempo a um valor extremamente baixo o que inviabilizaria a simulação. Para contornar esse problema, os autores aconselharam a evitar sempre que possível o uso de células parciais de dimensões bem pequenas. Além disso, obtiveram-se êxito em implementar uma redução local do passo de tempo, quando o uso de pequenas células parciais fossem inevitáveis, gerando uma solução suavizada e estável. Em paralelo a esse problema, nos seguintes trabalhos Chung (2006) e Ye et al. (1999) que abordaram o método cut-cell, também foi relatado esse problema em relação as células do fluido de pequena dimensão, em que foi resolvido por meio de uma aglomeração das células pequenas com células vizinhas, levando a convergência da solução para um passo de tempo mais razoável.

Figura 2.4 – Esquema que intercepta a malha euleriana com a superfície imersa



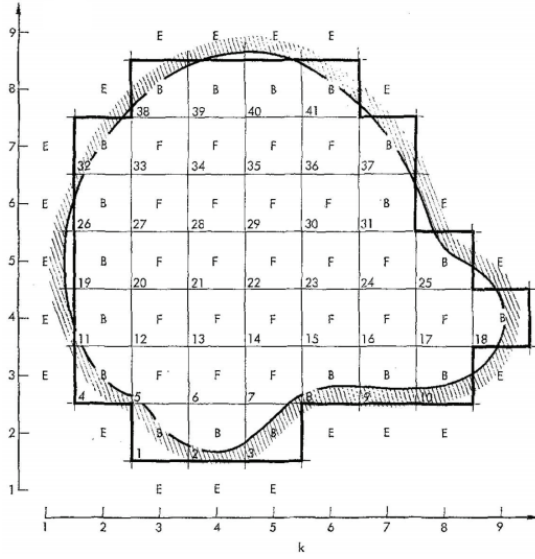
Retirado de Verzicco (2023)

Viecelli (1969) apresentou o primeiro método para lidar com escoamentos incompressíveis delimitados por superfícies curvas. O autor conseguiu garantir que o fluido não penetrasse o sólido por meio da introdução de um termo de força proporcional ao fluxo. Esse método foi posteriormente aperfeiçoado gerando as bases para o desenvolvimento dos métodos difusos e baseados em penalizações. Em Viecelli (1971), o autor avançou sobre essa técnica para simulações em corpos em movimentos utilizando a marcação das células eulerianas em razão da posição da fronteira imersa (células de fronteira (B), células eulerianas (E) e células internas a fronteira imersa (F)) e introduziu procedimentos de interpolação da velocidade do campo euleriano em um ponto localizado nas células de fronteira (B), método que hoje é comumente denominado como método de reconstrução da fronteira imersa.

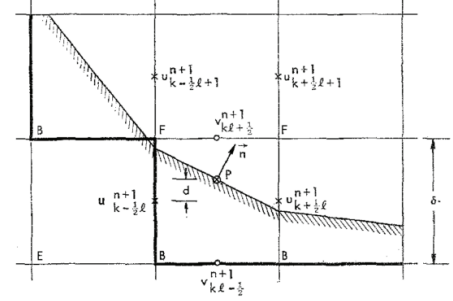
Em 1967 no trabalho de Yanenko (1967), foi possível resolver as equações que modelam a fluido dinâmica em malhas que não conformam o corpo imerso, além disso, esse trabalho utilizou-se de interpolações para reforçar a imposição das condições de contorno nas paredes, assim como foi feito por Viecelli (1971).



Figura 2.5 – Classificação e esquemas de Interpolação da velocidade adjacente a fronteira imersa



(a) Classificação das células eulerianas



$$u_p = \frac{d}{2\delta} (u_{k+\frac{1}{2},\ell+1}^{n+1} + u_{k-\frac{1}{2},\ell+1}^{n+1}) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d}{\delta}\right) (u_{k+\frac{1}{2},\ell}^{n+1} + u_{k-\frac{1}{2},\ell}^{n+1})$$

$$v_p = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{d}{\delta}\right) v_{k,\ell+\frac{1}{2}}^{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{d}{\delta}\right) v_{k,\ell-\frac{1}{2}}^{n+1}$$

(b) Esquema da interpolação da velocidade na fronteira imersa

Retirado de Verzicco (2023)

Após o trabalho de (PESKIN, 1972), a implementação da fronteira imersa foi ramificada em dois caminhos, (i) métodos contínuos, onde termo de força é incluído nas equações de Navier-Stokes antes da fase de discretização, na qual destacam-se os seguintes trabalhos: (PESKIN, 1972), (GOLDSTEIN; HANDLER; SIROVICH, 1993), (SILVA; SILVEIRA-NETO; DAMASCENO, 2003) e (WANG et al., 2008) (ii) métodos discretos, onde o termo de força é explicitamente ou implicitamente aplicado após a discretização das equações de Navier-Stokes, as seguintes literaturas possuem trabalho relevante nessa área: (GHAS; MITTAL; DONG, 2007), (UDAYKUMAR; MITTAL; SHYY, 1999), (FADLUN et al., 2000), (BALARAS, 2004), (MITTAL et al., 2008) e (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2008).

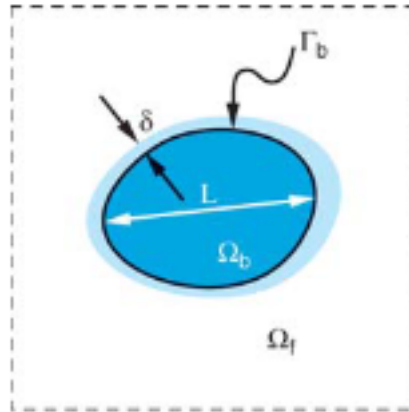
## 2.2 Imposição das Condições de Contorno na Fronteira Imersa

A imposição das condições de contorno na fronteira imersa é o fator determinante para a escolha do modelo da classe fronteira imersa. Considerando a simulação computacional de um escoamento incompressível com a presença da fronteira imersa, as equações diferenciais que governam esse fenômeno são expressas pelas seguintes equações:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.2)$$

Figura 2.6 – Representação da fronteira imersa no escoamento computacional.



Retirado de (MITTAL et al., 2008)

$$\vec{u} = \vec{u}_\Gamma$$

$$\text{massa específica} \quad (2.3)$$

onde  $\vec{u}$  é a velocidade do fluido,  $p$  é a pressão e  $\rho$  e  $\mu$  representam a densidade e viscosidade, respectivamente. Conforme a Fig. 2.6, o corpo é confinado no domínio  $\Omega_b$ , a região do fluido denotada por  $\Omega_f$  e a interface expressa por  $\Gamma_b$ .

Nos métodos convencionais denominado *body-fitted*, a Eq 2.1 é discretizado em uma malha que conforma o corpo, onde a condição de contorno sobre a fronteira imersa  $\Gamma_b$  é imposta diretamente. Para o método da fronteira imersa, a malha não conforma o corpo e pode ser gerada por uma simples malha cartesiana, nesse caso, a condição de contorno é imposta diretamente através da modificação da Eq. 2.1. Geralmente, é feita a modificação dessa equação introduzindo um termo fonte para representar os efeitos da fronteira imersa sobre o escoamento. A introdução desse termo fonte pode ser realizada via dois métodos: (i) método contínuo e (ii) método discreto (MITTAL; IACCARINO, 2005).

Antes de esclarecer a diferença e a importância de cada método, para a facilidade de compreensão, a Eq. 2.1 e Eq. 2.2 podem ser representadas na forma notacional pelo operador  $\mathcal{L}$  através das seguintes equações.

$$\mathcal{L}(\underline{U}) \quad \text{em } \Omega_f \quad (2.4)$$

$$\underline{U} = \underline{U}_\Gamma \quad \text{em } \Gamma_b \quad (2.5)$$

No método contínuo, o termo fonte é incluído na Eq. 2.1 na Eq. 2.1 em sua forma contínua, ou seja, antes do processo de discretização, assim, a Eq. 2.4 é expressa por  $\mathcal{L}(\underline{U}) = f_b$  e é aplicada sobre todo o domínio  $(\Omega_f + \Omega_b)$ . Após a introdução desse termo fonte, a equação diferencial passa

pelo processo de discretização gerando o seguinte sistema de equações algébricas (MITTAL; IACCARINO, 2005).

$$[L]\{\underline{U}\} = \{\underline{f}_b\} \quad (2.6)$$

Nos modelos discretos, as equações governantes são inicialmente discretizadas sem a presença da fronteira imersa, fornecendo um conjunto de equações algébricas  $[L]\{\underline{U}\} = 0$ . Posteriormente, a discretização é modificada nas células próximas a fronteira imersa em razão da presença do corpo sólido, portanto, nessa região o sistema de equações é modificado  $[L']\{\underline{U}\} = \{\underline{r}\}$ , onde  $[L']$  é o operador discreto modificado e  $\{\underline{r}\}$  representa conhecidos associado com a condição de contorno na interface sólido-fluido (MITTAL; IACCARINO, 2005).

Portanto, em linhas gerais, os modelos contínuos são aqueles em que o termo de força é aplicado antes da discretização das equações de governo enquanto que nos modelos discretos, o termo de força é inserido após a discretização nas células próximas a fronteira imersa.

Os métodos numéricos contínuos são geralmente mais simples comparados aos discretos, pois pode ser implementado junto com um solver pré-existente para o tratamento da equação de Navier-Stokes. O fluido é avaliado através de um termo de força acrescentado nas equações de balanço. O termo forçante é distribuído sobre os pontos eulerianos mais próximo ao ponto avaliado lagrangiano, e a distribuição é feita introduzindo uma função de distribuição  $D_h$ . Para modelar o termo de distribuição, normalmente é utilizado pela comunidade a função Delta de Dirac com suporte compacto ou reconstrução via mínimos quadrados (HUANG; TIAN, 2019).

Pela necessidade de distribuir a força para os pontos eulerianos mais próximos, a condição de contorno não é precisamente satisfeita sobre a interface sólido-fluido. Escoamentos multifásicos, escoamentos sobre um plano de espessura infinitesimal, escoamentos separado por dois canais concêntricos e escoamentos onde a acurácia da velocidade próxima a fronteira imersa tem impacto significativo para a fiel representação do modelo, os modelos contínuos não são os melhores a serem escolhidos, embora que versões implícitas e iterativas desse modelo vem sendo intensamente desenvolvidas com o objetivo de esforçar a condição de contorno sobre a interface.

Atualmente o software interno MFSim da UFU utiliza, na grande maioria das simulações, um modelo de fronteira imersa proposto por Wang et al. (2008) chamado de multi-forçagem direta. A base desse método consiste em estimar um campo de velocidade inicial da malha euleriana e a partir de um processo de interpolação com o campo de velocidade lagrangiano, calcula-se a força lagrangiana para cada ponto da superfície do corpo sólido e, conseqüentemente, a força euleriana é calculada com base no somatório da força lagrangiana. A força euleriana é redistribuída para os volumes eulerianos mais próximos utilizando-se a função Delta de Dirac. Esse processo é realizado iterativamente até que ambas as forças sejam menores do que a tolerância imposta pela norma L2 (MARTINI, 2022) (MELO, 2017). Apesar de ser eficiente para diversas simulações computacionais, esse modelo apresenta problemas e não consegue atingir resultados acurados para os casos expostos acima.

Nos modelos discretos, essa característica numérica é eliminada, ou seja, a condição de contorno é corretamente aplicada na interface sólido-fluido (MITTAL et al., 2008). Os principais métodos dessa família são os métodos *cut-in-cell* e os métodos que trabalham com volumes fantasmas.

No método *cut-in-cell* a malha euleriana é cortada de acordo com a posição da fronteira, e o valor das propriedades nessas células eulerianas parciais são computadas de acordo com o peso que é obtido através da razão percentual da célula que é ocupada pela fronteira imersa e pelo fluido. O problema principal desse método ocorre quando os volumes eulerianos são bem pequenos o que ocasiona a diminuição do passo de tempo. De acordo com (HARTMANN; MEINKE; SCHRODER, 2011), uma solução alternativa para contornar esse problema seria a fusão dessas células com células vizinhas para que os problemas de instabilidade e diminuição do passo de tempo não ocorram.

O modelo de fronteira imersa que vem sendo recentemente introduzido ao software MFSim é o modelo discreto dos volumes fantasmas locais que foi inicialmente proposto por Berthelsen e Faltinsen (2008) para casos bidimensionais sobre geometrias complexas. Na próxima seção será abordado as características gerais do modelo de fronteira imersa dos volumes fantasmas convencionais e a formulação da metodologia baseado nos volumes fantasmas com direção local.

## 2.3 Metodologia da fronteira imersa com volumes fantasmas

### 2.3.1 Métodos convencionais

As células fantasmas são definidas como células na região interna a fronteira imersa (corpo sólido) que tenha pelo menos uma célula vizinha na região do fluido. Para cada uma célula fantasma, é definido um esquema de interpolação que reconstrói a solução para essa célula incorporando implicitamente a condição de contorno definido na fronteira imersa. Em geral, as células fantasmas são extrapoladas a um ponto euleriano na direção normal da fronteira imersa e equidistante a posição da interface imersa com a célula fantasma, conforme mostra a Fig 1.1.

Em (MAJUMDAR; IACCARINO; DURBIN, 2001) é apresentado algumas opções de interpoladores que podem ser usados para a reconstrução da célula fantasma, porém, independente do modelo de interpolação a ser usado, o valor de uma variável genérica na célula fantasma é calculado conforme a Eq. 2.7.

$$\sum \omega_i \theta_i = \theta_G \quad (2.7)$$

onde  $\omega$  é o peso ponderado pelo polinômio e  $\theta$  é o valor da variável referente a célula vizinha a célula fantasma.

A Eq. 2.7 é calculado para todas as células fantasmas e abrange todos os pontos vizinhos definido pelo estêncil do polinômio interpolador e a condição de contorno da fronteira imersa.

Obtido o valor da variável genérica na fronteira imersa, a Eq. 2.7 é acrescentada na equação parcial de balanço na versão discreta.

### 2.3.2 Método dos volumes fantasmas com direção local

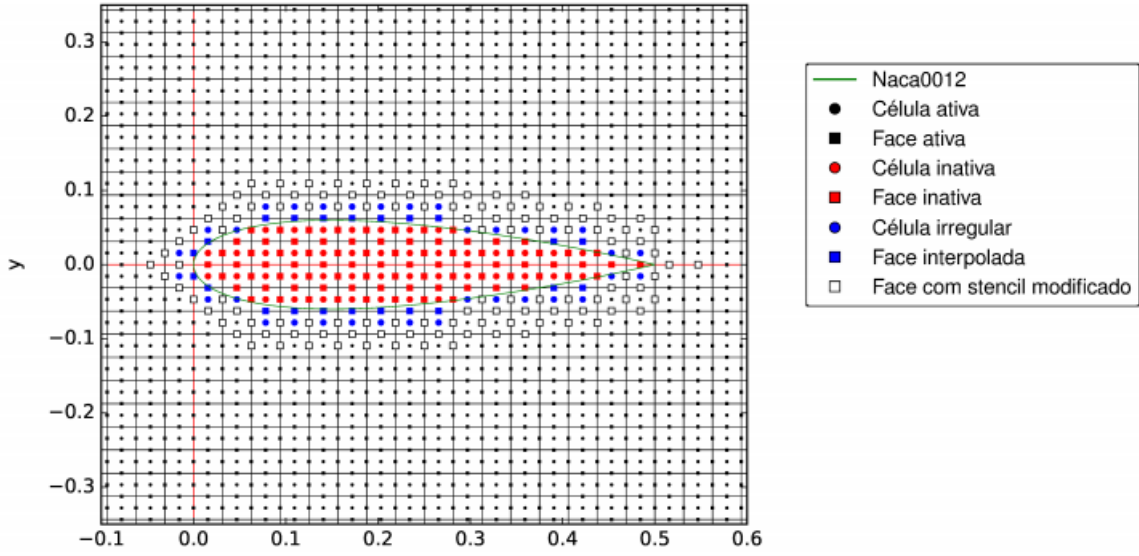
O modelo proposto por Berthelsen e Faltinsen (2008) é um método que <sup>possibilita</sup> permite resolver simulações computacionais com corpos imersos com geometrias esbeltas, tais como a borda de fuga de um aerofólio e uma placa plana de espessura infinitesimal. De maneira geral, esse método se baseia no uso de volumes fantasmas locais obtidos via extrapolação utilizando um estêncil unidimensional na direção da discretização do termo, ao invés de espelhar a posição da célula fantasma para a região euleriana na direção normal a fronteira imersa, como é feito nos métodos convencionais. O resultado obtido para essa célula fantasma é incluído nas derivadas dos volumes próximos a fronteira imersa que não possuem um conjunto completo de volumes vizinhos para aplicar os esquemas numéricos de discretização dos termos das equações de Navier-Stokes e dos escalares (ANDRADE, 2015).

De acordo com Berthelsen e Faltinsen (2008), os centros e as faces dos volumes de controle são classificados de acordo com as seguintes regras:

- Centro das células
  - Centro é ativo se está localizado no interior da fronteira imersa;
  - Se a célula for externa, porém vizinho de um inativo, a célula é classificada como irregular;
  - Se dois centros são separados pela fronteira imersa, a célula é classificada como irregular;
  - O volume é classificado como regular se for externo e não for irregular.
- Faces das células
  - Face é ativa se, e somente se, os dois volumes adjacentes à ela forem ativos;
  - Face interna à fronteira imersa é inativa;
  - as faces externas pertencentes a um volume inativo são irregulares;
  - As faces de dois volumes irregulares separados pela fronteira imersas são irregulares;
  - As faces externas vizinhas a faces irregulares na mesma direção, são regulares com derivada modificada.

Na Fig. 2.7 é mostrado a marcação completa das faces e centros das células feita para uma geometria NACA 0012.

Figura 2.7 – Marcação Completa



Retirado de Ribeiro-Neto (2021).

Os métodos de discretização de equações diferenciais não podem ser aplicados diretamente a funções descontínuas ou que não sejam suaves pois a expansão de Taylor não é apropriada para estes problemas. Porém, desde que uma função seja contínua e suave por partes, pode-se aplicar técnicas de saltos na função e resolvê-las de modo acurado (ANDRADE, 2015) (BERTHELSEN; FALTINSEN, 2008). Considere uma função genérica unidimensional  $f(x)$  com  $x \in [x_{min}, x_{max}]$  analítica em todos os pontos, exceto em  $x = x_\alpha$  ( $x_{min} \leq x_\alpha \leq x_{max}$ ),

$$f(x) = \begin{cases} f^-(x) & \text{se } x_{min} \leq x \leq x_\alpha \\ f^+(x) & \text{se } x_\alpha \leq x \leq x_{max} \end{cases} \quad (2.8)$$

As coordenadas dos nós da malha unidimensional são definidas em  $x_i = x_{min} + i\Delta x$  para  $0 \leq i \leq N$  onde a malha é uniformemente espaçada  $\Delta x = (x_{max} - x_{min})/N$ . Para qualquer região contínua e derivável pode-se escrever uma aproximação numérica para a  $n$ -ésima derivada de  $f(x_i)$  como:

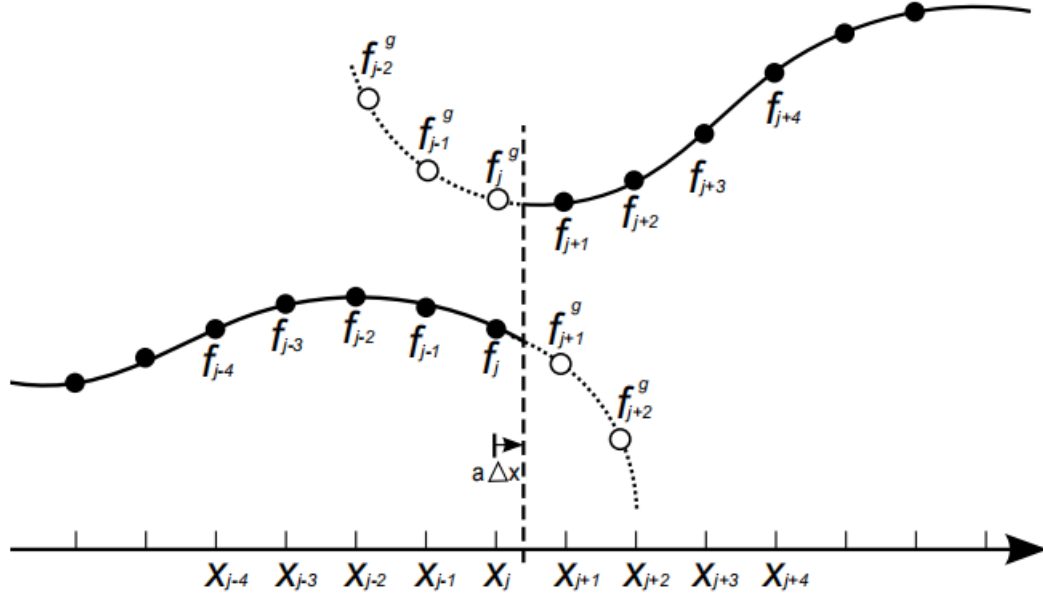
$$f_i^{(n)} = \mathcal{L}(f_l, f_{l+1}, \dots, f_i, \dots, f_{r-1}, f_r) + \mathcal{O}(\Delta x^p) \quad (2.9)$$

onde  $\mathcal{L}$  é o operador derivada discreta e  $p$  é a ordem da taxa de convergência da aproximação numérica.

Conforme ilustra na Fig. 2.8, a interface é localizada na posição  $x_\alpha = x_j + a\Delta x$  onde  $0 \leq a \leq 1$  e separa as células  $x_j$  e  $x_{j+1}$ . Como nessa região apresenta uma descontinuidade, a aproximação discreta não deve ser aplicada, todavia, uma vez que  $f(x)$  é analítica e derivável por partes, pode se estender os dois diferentes domínios através da interface com volumes fictícios.

Na Fig. 2.8 é mostrado a função descontínua onde pontos fantasmas são obtidos via extrapolação polinomial.

Figura 2.8 – Função  $f(x)$  contínua e derivável por partes estendida através da descontinuidade. Valores fictícios (○) e valores reais (●) da função.



Legenda: Valores fictícios (○) e valores reais (●) da função.

Retirado de Andrade (2015).

Para essa função descontínua, o operador derivada discreta  $\mathcal{L}$  é rescrito conforme a Eq. 2.10 para abranger os valores fictícios nos pontos fantasmas.

$$f_i^{(n)} = \mathcal{L}(f_l, f_{l+1}, \dots, f_i, \dots, f_j, f_{j+1}^g, \dots, f_{r-1}^g, f_r^g) + \mathcal{O}(\Delta x^p) \quad (2.10)$$

onde as funções  $f_{j+1}, \dots, f_r$  são substituídos pelos volumes fantasmas  $f_{j+1}^g, \dots, f_r^g$ .

Os valores das células fantasmas podem ser obtidos por funções de interpolação e extrapolações, no trabalho de Berthelsen e Faltinsen (2008) é utilizado uma função polinômio de Lagrange  $p_q(x)$  de q-ésima ordem, com o seguinte estêncil:  $x_{j-q+1}, \dots, x_j$  e  $x_\alpha$ .

$$p_q(x) = \left( \sum_{s=j-q+1}^j \beta_s(x) f_s \right) + \beta_\alpha(x) f_\alpha^- \quad (2.11)$$

onde:

$$\beta_s(s) = \left( \prod_{t=j-q+1}^j \frac{x - x_t}{x_s - x_t} \right) \frac{x - x_\alpha}{x_s - x_\alpha} \quad (2.12)$$

com

$$\beta_\alpha(x) = \prod_{t=j-q+1}^j \frac{x - x_t}{x_\alpha - x_t} \quad (2.13)$$

e

$$f_\alpha^- = \lim_{x \rightarrow x_\alpha^-} f(x) \quad (2.14)$$

O polinômio  $p_q(x)$  pode apresentar algumas instabilidades quando o ponto  $x_\alpha$  estiver muito próximo a  $x_j$ , ou seja, quando um ponto euleriano externo estiver muito próximo a fronteira imersa, assim,  $|x_j - x_\alpha| \rightarrow 0$  e  $\beta_j \rightarrow \infty$ . Berthelsen e Faltinsen (2008) sugere introduzir um ponto de imagem que espelha o ponto euleriano inativo mais próximo a interface a região euleriana interna. O ponto de imagem é definido pela Eq. 2.15.

$$x_\gamma = x_j - \max(0, \epsilon - a)\Delta x = x_\alpha - \max(a, \epsilon)\Delta x \quad (2.15)$$

onde  $\epsilon$  é uma constante predefinida escolhida de tal forma  $a \geq \epsilon$ , portanto, a Eq. 2.11 não apresenta comportamento singular. Portanto, a Eq. 2.11 é reescrita da seguinte forma:

$$p_q(x) = \left( \sum_{s=j-q+1}^{j-1} \beta_s(x) f_s \right) + \beta_\alpha(x) f_\alpha^- + \beta_\epsilon(x) f_\epsilon \quad (2.16)$$

onde

$$f_\gamma = p_q(x_\gamma) = \sum_{s=j-q}^j \left( \prod_{t=j-q, t \neq s}^j \frac{x_\gamma - x_t}{x_s - x_t} \right) f_s \quad (2.17)$$

com

$$\beta_s(s) = \left( \prod_{t=j-q+1, t \neq s}^{j-1} \frac{x - x_t}{x_s - x_\alpha} \right) \frac{(x - x_\alpha)}{(x_s - x_\alpha)} \frac{(x - x_\gamma)}{(x_s - x_\gamma)} \quad (2.18)$$

$$\beta_\gamma(x) = \left( \prod_{t=j-q+1}^{j-1} \frac{x - x_t}{x_\alpha - x_t} \right) \frac{(x - x_\gamma)}{(x_\alpha - x_\gamma)} \quad (2.19)$$

$$\beta_\gamma(x) = \left( \prod_{t=j-q+1}^{j-1} \frac{x - x_t}{x_\gamma - x_t} \right) \frac{(x - x_\alpha)}{(x_\gamma - x_\alpha)} \quad (2.20)$$

Dessa forma nenhum coeficiente  $\beta$  será menor que  $\epsilon$  quando  $\epsilon \leq 0,5$  garantindo a acurácia do método das células fantasmas.

A diferença entre as faces classificadas como irregulares e estêncil modificada é que as irregulares os polinômios são multiplicados por pesos em função da distância da face dessa célula até a interface da fronteira imersa na direção de discretização. A equação para o cálculo dos pesos está expressa em Eq. 2.21.



$$\alpha_{dir} = \frac{\theta_{dir}}{\sum_{k=1}^{N_{dir}} \theta_k} \quad (2.21)$$

onde  $\alpha_{dir}$  é o peso do polinômio interpolador,  $N_{dir}$  é o número de direções e  $\theta$  é calculado da seguinte forma:

$$\theta_{dir} = \frac{\prod_{k=1, k \neq dir}^{N_{dir}} \Delta k}{\Delta dir} \quad (2.22)$$

O valor das células fantasmas obtidos via extrapolação e interpolação por polinômio de Lagrange são incluídas nas derivadas dos volumes classificados como inativos, assim, completa-se o conjunto de volumes vizinhos a uma célula euleriana para aplicar os esquemas numéricos de discretização das equações diferenciais governantes.

???

# Capítulo 3

## Modelagem Matemática

### 3.1 Definições Preliminares

Um sistema é uma região do espaço ou quantidade específica da matéria a ser estudada. Um sistema pode ser classificado de acordo com a sua natureza como: sistema fechado, sistema aberto (ou volume de controle) e sistema isolado.

Em um sistema fechado, sua fronteira pode ser móvel, permite a transferência de energia com o meio externo na forma de trabalho e calor, porém não admite transferência de massa com o ambiente externo. No caso do volume de controle, sua fronteira é geralmente fixa no espaço e permite a transferência de massa e energia através das fronteiras do volume. Já em um sistema isolado, não há fluxos de massa e energia através da sua fronteira.

As leis da Mecânica Clássica Newtoniana são fundamentadas através do balanço de massa, do balanço de momentum linear ou Segunda Lei de Newton e balanço de energia e foram estabelecidas para sistemas fechados, ou seja, não perdem ou ganham massa no decorrer de qualquer processo físico. A extensão das leis da mecânica clássica para resolver problemas que envolvem volumes de controle, foi estabelecido através do Teorema do Transporte de Reynolds-Leibniz.

O Teorema do Transporte de Reynolds-Leibniz constitui-se que a taxa de variação de uma informação contida em um sistema deve ser igual à taxa de variação desta mesma informação, contida em um volume de controle, coincidentes, adicionado ao fluxo líquido advectivo dessa informação, através da superfície de controle que delimita o volume de controle. Matematicamente, tem-se a seguinte equação íntegro-diferencial:

$$\frac{dB_{Sist.}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V.C.} \beta \rho dV + \iint_{S.C.} \rho \beta (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (3.1)$$

onde  $B$  representa uma informação extensiva genérica e  $\beta$  representa a correspondente intensiva da mesma informação  $\beta \equiv \frac{dB}{dm}$ ,  $V$  representa o volume de controle e  $\Gamma$  corresponde a superfície de controle que limita o volume de controle.

Na Eq. 3.1 o termo a esquerda da igualdade representa a taxa de variação da informação no sistema fechado, enquanto que o primeiro e segundo termo a direita da igualdade, representam a taxa de variação da mesma informação no volume de controle e o fluxo líquido advectivo da mesma informação que ocorre nas fronteiras do volume de controle.

### 3.2 Equação da Continuidade

Partindo-se da Eq. 3.1 e sendo  $B = m$ , tem-se que  $\beta = 1$ . Da definição de sistema, em um sistema fechado não pode ocorrer a transferência de fluxo mássico para o ambiente externo, logo, a taxa de variação de massa no interior de um volume de controle é igual ao fluxo mássico líquido que cruza sua fronteira.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V.C.} \rho d\forall + \iint_{S.C.} \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = 0 \quad (3.2)$$

No primeiro termo da Eq. 3.2 utilizando-se o Teorema de Leibniz pode-se permutar a derivada temporal com a integral do volume de controle e no segundo termo da equação, utiliza-se o Teorema de Gauss para transformar uma integral de superfície em uma integral de volume, logo tem-se:

$$\iiint_{V.C.} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right) d\forall = 0 \quad (3.3)$$

De acordo com o Teorema da Localização Arpaci e Larsen (1984) e Chandrasekharaiah e Debnath (1994), uma integral sobre um volume genérico é nula, apenas quando seu integrando for nulo, logo o termo entre parênteses pode sair do integrando, tendo-se a Eq. 3.4.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (3.4)$$

### 3.3 Equação do balanço da quantidade de movimento linear

Partindo-se da Eq. 3.1 e particularizando-se para a Segunda Lei de Newton, o qual representa um balanço da quantidade de movimento linear para sistemas inerciais, estabelece que a taxa de variação da quantidade de movimento linear acrescido do fluxo da quantidade de movimento linear que cruza as fronteiras do volume de controle é igual a força líquida que age sobre o mesmo, logo, tem-se a Eq. 3.5.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V.C.} \rho \vec{V} d\forall + \iint_{S.C.} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \sum \vec{F} \quad (3.5)$$

Há dois tipos de forças externas que atuam sobre o fluido, são as forças de campo e as forças de superfície. As forças de campo decorrem da existência de campos externos que atuam em cada partícula de fluido no interior do volume, sendo de natureza gravitacional, magnética ou potenciais elétricos, já as forças de superfície ocorrem devido as tensões que agem sobre cada parcela da fronteira do volume de controle, sendo compostas por componentes nas direções normais e tangenciais à superfície de controle do elemento fluido.

Considerando apenas a força gravitacional como força de campo na presente modelagem matemática, essa força age sobre cada elemento diferencial de fluido e é proporcional a massa do elemento, a força gravitacional é expressa pela Eq. 3.6.

$$\vec{F}_g = \iiint_{V.C.} \rho \vec{g} dV \quad (3.6)$$

A força externa de superfície é representada pelo tensor de tensões, que por sua vez representa os efeitos de pressão e de viscosidade que é modelado via a Hipótese de Stokes. A equação da força externa de superfície é dada pela Eq.

$$\vec{F}_s = \iint_{S.C.} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dA \quad (3.7)$$

A força total é dada pela soma das forças de campo e de superfície.

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_s = \iiint_{V.C.} \rho \vec{g} dV + \iint_{S.C.} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dA \quad (3.8)$$

Inserindo o termo a esquerda da Eq. 3.8 na Eq. 3.5, tem a equação íntegro-diferencial do balanço da quantidade de movimento linear, expressa pela Eq. 3.9. Utilizando-se o Teorema de Gauss para transformar a integral de superfície em integral volumétrica e utilizando o Teorema de Localização que apresenta que a integral sobre um volume genérico é nula, apenas quando o seu integrando for nulo, logo, tem-se a equação do balanço da quantidade de movimento linear na formulação diferencial, sendo dada pela Eq. 3.11.

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V.C.} \rho \vec{V} dV + \iint_{S.C.} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \iiint_{V.C.} \rho \vec{g} dV + \iint_{S.C.} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dA \quad (3.9)$$

$$\iiint_{V.C.} \left( \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) - \rho \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} \right) dV = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{g} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} \quad (3.11)$$

Para modelar o tensor de tensões  $\vec{\sigma}$  Stokes (1845) propôs o seguinte modelo de fechamento para o tensor de tensões considerando fluidos newtonianos.

$$\vec{\sigma}(\vec{x}, t) = \mu(\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^T) - \frac{2}{3} \mu(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \vec{I} - p \vec{I} \quad (3.12)$$

O tensor  $\vec{\sigma}$  é modelado como função do tensor taxa de deformação  $\vec{S} = (1/2)(\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^T)$ , do tensor  $p \vec{I}$  e do tensor  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$ . Introduzindo esse modelo de fechamento na equação diferencial do balanço de quantidade de movimento linear, obtém-se a equação diferencial do balanço de quantidade de movimento linear com a introdução da proposta de Stokes sendo expressa pela Eq. 3.13

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{1}{\rho} (\mu(\vec{\nabla} \vec{V} + \vec{\nabla} \vec{V}^T) - \frac{2}{3} \mu(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \vec{I} - p \vec{I}) \right) \quad (3.13)$$

### 3.4 Equação do balanço da energia interna

A equação do balanço de energia interna é fundamentada na primeira lei da termodinâmica. De acordo com a Primeira Lei de Newton, a transferência de energia em um sistema fechado nas formas de calor ou trabalho, é igual à variação de sua energia total.

A equação do balanço da energia interna é deduzida partindo-se do Teorema do Transporte de Reynolds-Leibniz. Para esse caso, a informação  $B$  que é a energia interna  $U[J]$ , e a grandeza  $\beta$  é particularizada para a energia interna por unidade de massa  $u[J/Kg]$ .

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V.C.} \rho u dV + \iint_{S.C.} \rho u (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (3.14)$$

Utilizando o Teorema de Leibniz e o Teorema de Gauss, tem-se a seguinte expressão:

$$\iiint_{V.C.} \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{V}) \right) dV = \frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} - \frac{dQ}{dt} \quad (3.15)$$

onde  $Q$  representa o calor e  $W$  o trabalho.

O trabalho pode ser dividido em trabalho de eixo e trabalho de deformação. O trabalho de eixo é realizado por uma fonte externa inserida no interior do volume de controle e o trabalho de deformação ocorre devido às tensões que atuam na fronteira do volume de controle.

$$W = W_{eixo} + W_{def.} = W_e + W_d \quad (3.16)$$

Considerando que não haja nenhuma fonte de trabalho de eixo externa atuante no volume de controle:

$$\frac{dW_e}{dt} = 0 \quad (3.17)$$

A taxa de trabalho de deformação é dada em função do produto da componente da tensão de deformação e do vetor velocidade na direção normal à superfície de controle.

$$\frac{dW_d}{dt} = \iint_{S.C.} (\vec{V} \cdot \vec{\sigma}) \cdot \vec{n} dA \quad (3.18)$$

O calor que atua na fronteira do volume de controle via condução é modelado de acordo com a Lei de Fourier que é dada pela Eq. 3.19.

$$\vec{q} = -k \vec{\nabla} T \quad (3.19)$$

onde  $T$  é o campo de temperatura,  $\vec{q}$  é o fluxo térmico na forma de calor e  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica.

Inserindo essa expressão na taxa de variação do calor, tem-se o fluxo de energia térmica na forma de condução que atua sobre a superfície de controle.

$$\frac{dQ}{dt} = \iint_{S.C.} -\vec{q} \cdot \vec{n} dA = \iint_{S.C.} k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} dA \quad (3.20)$$

Substituindo a Eq. 3.20 e Eq. 3.18 na Eq.3.15 e utilizando-se novamente o Teorema de Gauss para transformar as integrais de superfície em integrais de volume e o Teorema de Leibniz para permutar a integral volumétrica e a derivada temporal, chega-se a Eq. 3.21.

$$\iiint_{V.C.} \left( \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \vec{V}) - \nabla \cdot (k \vec{\nabla} T) - \nabla \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\sigma}) \right) dV = 0 \quad (3.21)$$

De forma similar aos casos anteriores, aplica-se o Teorema da Localização, que uma integral volumétrica é nula caso o integrando também for nulo, logo, tem-se a seguinte expressão:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})u \right) = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\sigma}) \quad (3.22)$$

O trabalho de deformação (Eq.3.18) pode ser desmembrado a partir da seguinte equação:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \cdot \vec{\sigma}) = -p \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + 2\mu ||\vec{S}||^2 - \frac{2}{3}\mu(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})^2 = \eta + \Phi \quad (3.23)$$

Para problemas onde as variações de energia interna se resumem às variações de energia térmica, pode-se reescrever a Eq. 3.22 em função da temperatura relacionando a energia interna com a expressão  $u = CpT$ . Assim, obtém-se a equação de balanço da energia térmica.

$$\rho Cp \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})T \right) = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \eta + \Phi \quad (3.24)$$

A função  $\eta$  modela o aquecimento ou resfriamento do fluido, devido à compressão ou expansão das partículas de fluidos. Essa variável é positiva se o processo for de compressão ou negativo se o processo for de expansão da partícula de fluido. A função  $\Phi$  modela a transformação de energia cinética do escoamento em energia térmica. Esse processo de transformação viscosa se intensifica em escoamentos que apresentam altos gradientes de velocidades e viscosidade do fluido, essa variável é chamada de potência específica de transformação viscosa [ $W/kg$ ] (SILVEIRA-NETO, 2020).

### 3.5 Simplificações Cabíveis

Considerando as propriedades do fluido constantes, como a viscosidade  $\mu$  e o coeficiente de condutibilidade térmica  $k$ , e a hipótese do escoamento ser incompressível, a equação diferencial do balanço de massa (Eq. 3.4), equação diferencial do balanço da quantidade de movimento linear (Eq. 3.13) e a equação diferencial do balanço da energia térmica (Eq. 3.24) são simplificadas resultando nas respectivas equações abaixo:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{V} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{T} = \frac{k}{\rho C_p} \nabla^2 T + \frac{\Phi}{\rho C_p} \quad (3.27)$$

As Eqs. 3.25-3.27 constituem um sistema de equações diferenciais parciais para escoamentos incompressíveis e considerando fluidos newtonianos com propriedades físicas constantes. Em escoamentos tridimensionais, esse sistema apresenta cinco equações e cinco incógnitas (3 componentes da velocidade  $\vec{V}$ , temperatura  $T$  e pressão  $p$ ).

A equação do balanço da energia térmica Eq. 3.27 é escrita em função do campo de velocidade, no entanto, a equação do balanço de massa Eq. 3.25 e equação do balanço da quantidade de movimento linear Eq. 3.26 são independentes do campo de temperatura, logo, podem ser resolvidas separadamente com métodos numéricos diferentes. A solução das Eqs. 3.25 e 3.26 são feitas de forma segregada, e portanto, precisam de um método numérico para resolver o acoplamento pressão-velocidade.

## Capítulo 4

### Modelagem Numérica

Nessa seção são apresentados os métodos escolhidos para a obtenção das equações discretizadas do balanço da quantidade de movimento linear e da equação do balanço da energia térmica. Ambas as equações apresentam os seguintes termos em comum: termo advectivo, termo difusivo e termo temporal, ademais, para a equação de balanço da quantidade de movimento linear ao final dessa subseção será apresentado o método escolhido para o acoplamento Pressão-Velocidade.

#### 4.1 Discretização Temporal

A discretização temporal das equações diferenciais parciais são feitas utilizando uma das três formulações: explícita, implícita ou semi-implícita. No presente caso, a formulação semi-implícita utilizando o modelo *Semi-Implicit Backward Formula* (SBDF) é utilizado para modelar o termo transiente da equação de balanço da quantidade movimento linear enquanto que utilizou-se a formulação explícita escolhendo-se o modelo Runge-Kutta de quarta ordem para modelar o termo transiente da equação do balanço da energia térmica.

Os métodos semi-implícitos são de segunda ordem e portanto, necessitam da avaliação em três tempos distintos, onde  $t_{n+1}$  é o tempo atual e  $t_n$  e  $t_{n-1}$  os tempos anteriores, da mesma forma  $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$  e  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ . A forma geral dos métodos semi-implícitos contemplado com o termo do gradiente de pressão é expressa pela seguinte equação.

$$\frac{\alpha_2 u^{n+1} + \alpha_1 u^n + \alpha_0 u^{n-1}}{\Delta t^{n+1}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \theta_2 f(u)^{n+1} + \theta_1 f(u)^n + \theta_0 f(u)^{n-1} + \beta_1 g(u)^n + \beta_0 g(u)^{n-1} \quad (4.1)$$

onde  $g$  e  $f$  são os termos advectivos e difusivos, respectivamente. Os demais termos são definidos a seguir:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{(2\gamma-1)\omega_{n+1}^2}{1+\omega_{n+1}} & \alpha_1 &= (1-2\gamma)\omega_{n+1} - 1 & \alpha_2 &= \frac{1+2\gamma\omega_{n+1}}{1+\omega_{n+1}} \\ \beta_0 &= -\gamma\omega_{n+1}, & \beta_1 &= 1 + \gamma\omega_{n+1} \\ \theta_0 &= \frac{c}{2} & \theta_1 &= 1 - \gamma - \left(1 + \frac{1}{\omega_{n+1}}\right) \frac{c}{2} & \theta_2 &= \gamma + \frac{c}{2\omega_{n+1}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde  $\omega_{n+1}$  é definido como  $\omega_{n+1} = \Delta t_{n+1}/\Delta t_n$ , e  $\gamma$  e  $c$  são constantes particulares de cada método de discretização escolhido. Portanto, a principal mudança entre os métodos de integração semi-



implícito são os valores dos parâmetros  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\theta$ . Escolhendo-se o método SBDF, os valores correspondentes a esses parâmetros são:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{1}{2} & \alpha_1 &= -2 & \alpha_2 &= \frac{3}{2} \\ \beta_0 &= -1, & \beta_1 &= 2 \\ \theta_0 &= 1 & \theta_1 &= 0 & \theta_2 &= 1\end{aligned}\quad (4.3)$$

Portanto, a forma final da Eq. 4.1 escolhido pelo método SBDF e expressa através da Eq. 4.4.

$$\frac{\frac{3}{2}u^{n+1} - 2u^n + \frac{1}{2}u^{n-1}}{\Delta t^{n+1}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f(u)^{n+1} + \theta_1 f(u)^n + 2g(u)^n - g(u)^{n-1} \quad (4.4)$$

Na equação do balanço de energia térmica, a discretização do termo temporal é realizado de maneira explícita utilizando-se Runge-Kutta de quarta ordem. Nesse modelo, é definido um sub-passo de tempo de acordo com a ordem do método  $dt_{sub} = dt/4$ . Calcula-se uma temperatura auxiliar quatro vezes a cada sub-passo de tempo e corrige-se a temperatura final conforme o valor atualizado do RHS da equação discretizada do balanço da energia térmica. O conjunto de equações estão expressos abaixo pela Eq. 4.5.

$$\begin{aligned}k1 &= h \cdot f(t_n, y_n) \\ k2 &= h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k1}{2}) \\ k3 &= h \cdot f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k2}{2}) \\ k4 &= h \cdot f(t_n + h, y_n + k3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6} \cdot (k1 + 2k2 + 2k3 + k4)\end{aligned}\quad (4.5)$$

onde  $k$  representa o RHS da equação discretizada do balanço da energia térmica,  $h$  é o passo de tempo e  $y$  é a temperatura avaliada no tempo presente  $n$  e no tempo anterior  $n + 1$ .

## 4.2 Discretização do termo advectivo

A discretização do termo advectivo foi feita utilizando o método *Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection* (CUBISTA) proposto por Alves, Oliveira e Pinho (2003). A avaliação da velocidade na face ( $\widehat{uf}$ ) pelo método CUBISTA para uma malha estrutura cartesiana e uniforme é expressa pela Eq. 4.6.

$$\widehat{uf} = \begin{cases} \frac{7}{4}\widehat{up} & \text{se } 0 \leq \widehat{up} \leq \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\widehat{up} + \frac{3}{8} & \text{se } \frac{3}{8} \leq \widehat{up} \leq \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4}\widehat{up} + \frac{3}{8} & \text{se } \frac{3}{4} \leq \widehat{up} \leq 1 \\ \widehat{up} & \text{para outros valores de } \widehat{up} \end{cases} \quad (4.6)$$

sendo:

$$\hat{u}_p = \frac{u_P - u_U}{u_D - u_U} \quad (4.7)$$

onde os subscritos U e D se referem respectivamente a posição a montante (*upstream*) e a jusante (*downstream*) em relação ao ponto de interesse (P) dada em referência a direção do escoamento.

### 4.3 Discretização do termo difusivo

O termo difusivo é discretizado utilizando-se o método das diferenças centradas (*Central Difference Scheme* CDS). O tratamento da derivada do termo difusivo é expresso pela Eq. 4.8.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_U - 2u_P + u_D}{\Delta x^2} \quad (4.8)$$

onde os subscritos U e D se referem respectivamente a posição a montante (*upstream*) e a jusante (*downstream*) em relação ao ponto de interesse (P) dada em referência a direção do escoamento. Considerando uma malha cartesiana e uniforme, U e D referem-se as células a leste e a oeste da célula P.

As derivadas parciais que compõem o termo difusivo nas outras direções e para as velocidades  $v$  e  $w$  são obtidas de forma similar a Eq. 4.8.

### 4.4 Acoplamento Pressão-Velocidade

O método numérico escolhido para o acoplamento pressão-velocidade é o método do Passo Fracionado proposto por Chorin (1968). Esse método é baseado na separação de operadores e surgiu através da observação de que a pressão não desempenha papel termodinâmico, porém apenas força a condição de incompressibilidade. O método consiste em duas etapas: o preditor, onde é introduzido um campo de velocidades auxiliar  $\tilde{V}$  na equação de balanço da quantidade de movimento linear, desprezando-se a condição de incompressibilidade e o corretor, onde o campo de velocidades auxiliar é projetado no espaço dos campos vetoriais com divergente nulo na qual calcula-se a pressão ou a correção da pressão, e o campo de velocidades é atualizado a partir da correção da pressão.

No método dos passos fracionados, para calcular o campo de velocidade auxiliar  $\tilde{V}$  utiliza-se os campos de velocidades e pressão nos tempos precedentes. A discretização do balanço da quantidade de movimento linear, considerando-se uma discretização temporal semi-implícita é dada pela Eq. 4.9.

$$\frac{(\alpha_2 \vec{V}^{n+1} + \alpha_1 \vec{V}^n + \alpha_0 \vec{V}^{n-1})}{\Delta t} + \lambda(\vec{V}^{n+1} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}^{n+1} = -\nabla p^n + \vec{g} + \beta_1 \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{V}^n + \beta_0 \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{V}^{n-1} \quad (4.9)$$

Subtraindo a Eq. 4.1 da Eq. 4.9, tem-se a equação do campo de velocidade auxiliar:

$$\alpha_2 \frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n+1}}{\Delta t} = \frac{-1}{\alpha_2 \rho} \vec{\nabla}(p^{n+1} - p^n) \quad (4.10)$$

Define-se  $p' = p^{n+1} - p^n$ , onde  $p'$  é a flutuação da pressão. Substituindo essa expressão na Eq. 4.10 e aplicando o operador divergente em ambos os lados da equação, tem-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^{n+1} = \nabla \cdot \left( \vec{V}^* - \frac{\Delta t}{\alpha_2 \rho} \vec{\nabla} p' \right) = 0 \quad (4.11)$$

Onde pela lei de balanço de massa para escoamentos incompressíveis, o termo  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^{n+1}$  deve satisfazer a equação da continuidade. Reagrupando os termos da Eq. 4.11, chega-se a Equação de Poisson (Eq. 4.12) na qual através da solução de um sistema linear calcula-se a correção da pressão.

$$\vec{\nabla}^2 p' = \frac{\alpha_2 \rho}{\Delta t} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}^* \quad (4.12)$$

Passando para o passo corretor, a pressão é corrigida através da Eq. 4.13:

$$p^{n+1} = p^n + p' \quad (4.13)$$

Tendo calculado a correção da pressão e o campo de velocidades estimadas  $\vec{V}^*$ , a atualização do campo de velocidade é obtida manipulando a Eq. 4.10, sendo expressa por:

$$\vec{V}^{n+1} = \vec{V}^* - \frac{\Delta t}{\alpha_2 \rho} \vec{\nabla} p' \quad (4.14)$$

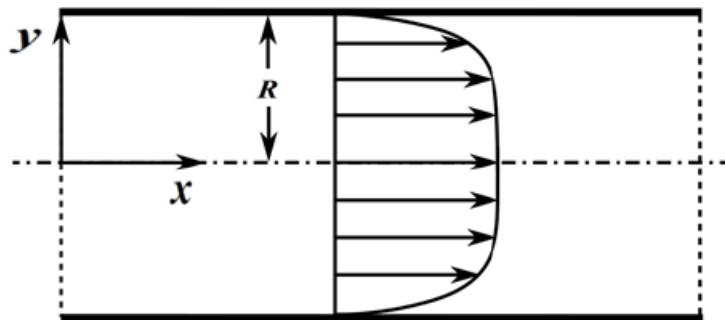
## Capítulo 5

### Resultados

#### 5.0.1 Aplicação da metodologia da fronteira imersa dos volumes fantasmas com direção local para escoamentos térmicos

Para a validação da implementação da equação da energia térmica usando a metodologia da fronteira imersa volumes fantasmas com direção local foi escolhido o caso Poiseuille plano onde há a solução contínua tanto para a velocidade quanto para a temperatura. O escoamento laminar Poiseuille plano é definido por duas placas paralelas separadas por uma distância  $h$ . O perfil de temperatura nas paredes varia linearmente em função do comprimento do canal e na entrada e saída do canal, a temperatura possui um perfil parabólico. Na Fig. 5.1 mostra a representação física do escoamento.

Figura 5.1 – Representação esquemática do escoamento Poiseuille



Retirado de (SILVEIRA-NETO, 2020)

A solução contínua da velocidade e temperatura estão expressas na Eq. 5.1 e Eq. 5.2, respectivamente. O desenvolvimento para a obtenção de ambas as equações partindo-se do modelo diferencial da equação do balanço da quantidade de movimento linear e energia térmica é apresentado na Seção Anexo.

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy) \quad (5.1)$$

$$T(x, y) = \frac{c1}{\lambda \mu} \frac{dp}{dx} \left( \frac{y^4 - 2hy^3 + h^3y}{24} \right) + c1x + c2 \quad (5.2)$$

onde  $\lambda = \frac{k}{\rho C_p}$ ,  $c1$  é a inclinação da reta da equação linear e  $c2$  é o intercepto,  $k$  é a condutividade térmica,  $\frac{dp}{dx}$  é o gradiente da pressão e  $C_p$  é o calor específico.

A condição de contorno para a velocidade e temperatura foram definidas como Dirichlet nas paredes ( $y_{min}$ ) e ( $y_{max}$ ), na entrada ( $x_{min}$ ) e saída ( $x_{max}$ ) do canal enquanto que na direção normal ao plano  $xy$  foi adotado simetria. A temperatura de entrada e saída nas paredes são, respectivamente,  $T_{inlet} = 293K$  e  $T_{outlet} = 313K$ , dessa forma, a inclinação da reta é dada por  $c1 = \frac{T_{outlet} - T_{inlet}}{L}$  e o intercepto  $c2 = 293K$ . Tendo em vista que esse caso busca investir na validação do modelo de fronteira imersa, foi escolhido um fluido fictício onde suas propriedades térmicas e dinâmicas estão sumarizadas na Tab. 5.1.

Tabela 5.1 – Dados de Entrada

Dados geométricos		Dados do Fluido	
Comprimento (L)	10 m	Número de Reynolds (Re)	150
Altura (h)	0,76 m	Difusividade Térmica ( $\lambda$ )	0,0025 m <sup>2</sup> /s
		massa específica ( $\rho$ )	1 kg/m <sup>3</sup>

O campo de velocidade e o campo de temperatura obtidos utilizando o código MFSim são visualizados através das Fig. 5.2 e 5.3, respectivamente. Os perfis de velocidade e temperatura traçados em  $L/2$  são, respectivamente ilustrados em 5.4-a e Fig. 5.4-b. Ademais, os perfis horizontais da temperatura foram avaliados em três seções na direção  $y$  do escoamento, sendo eles:  $y = 0,0m$ ,  $0,5m$  e  $0,3m$  e estão representados na Fig. 5.5.

Figura 5.2 – Campo de Velocidade

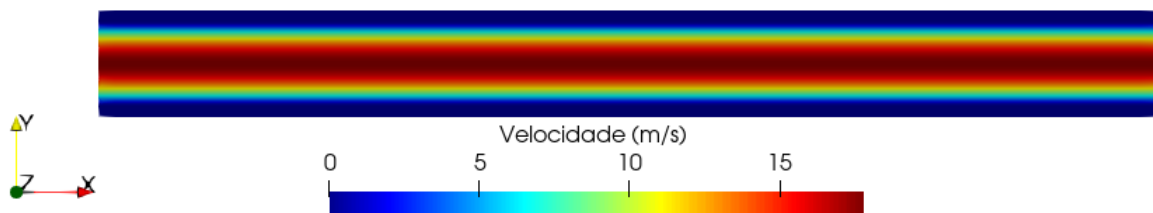
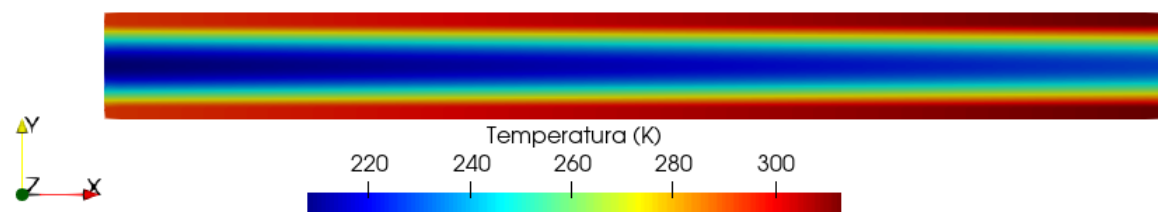
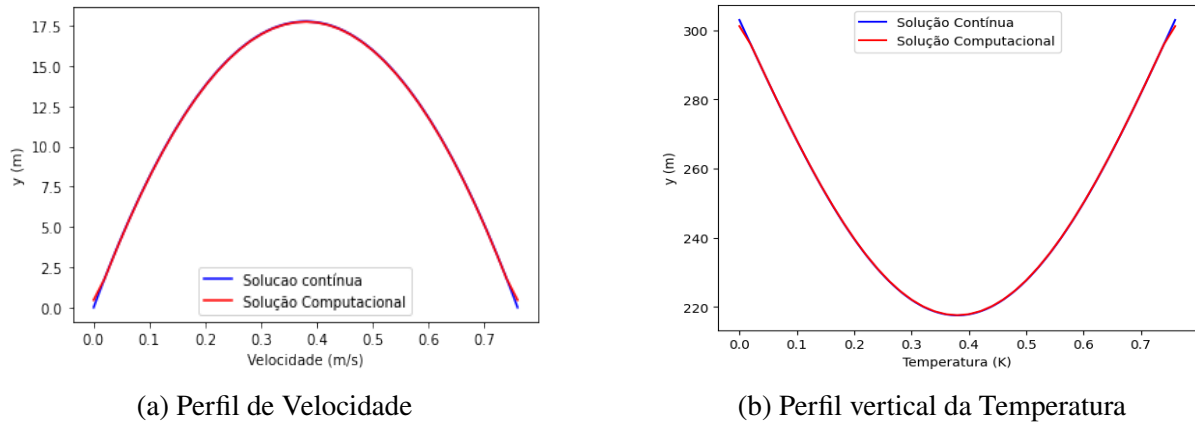
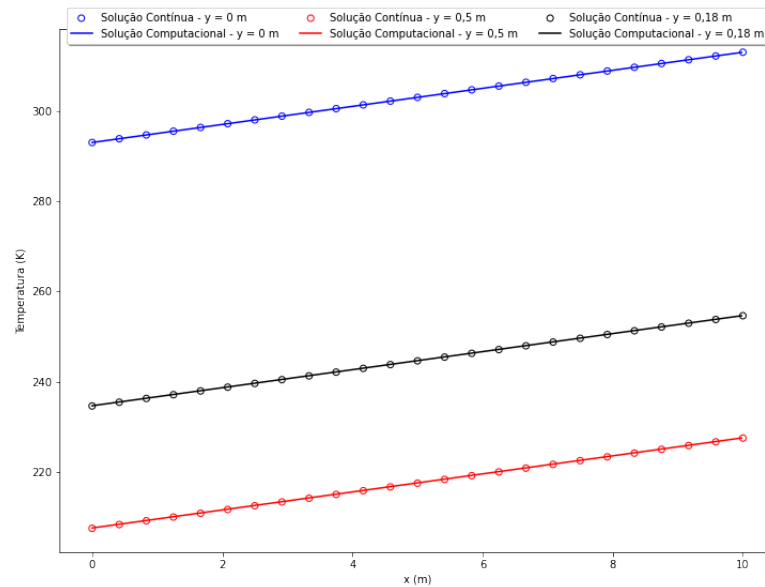


Figura 5.3 – Campo de Temperatura



Os resultados computacionais para a velocidade e temperatura foram ambos validados com os resultados obtidos via solução contínua da Eq. 5.1 e Eq. 5.2, respectivamente. O perfil de

Figura 5.4 – Perfil vertical da velocidade e temperatura avaliado em  $L/2$ Figura 5.5 – Perfil Horizontal de Temperatura avaliado em  $y = 0m$ ,  $y = 0,5m$  e  $y = 0,3m$ 

temperatura é máximo nas paredes e vai diminuindo até o mínimo que é dado em  $h/2$ , para a velocidade, o inverso ocorre, além disso, o perfil de velocidade não demonstrou variação axial, no entanto, no caso térmico, o perfil de temperatura axial aumenta linearmente devido a contribuição da condição de contorno na parede  $T_w(x)$ . Os resultados dos perfis horizontais da temperatura expresso na Fig. 5.5 mostram as retas que corretamente estão em paralelos entre si.

## 5.1 Hibridização dos modelos de fronteira imersa

Tendo em vista estender os limites de aplicabilidade dos modelos de fronteira imersa e extrair as principais vantagens de cada um desses métodos, há a possibilidade de realizar simulações computacionais adotando ambos os modelos de fronteira imersa disponíveis no MFSim, o modelo da multi-forçagem direta e o dos volumes fantasmas com direção local, que são classificados como interface difusa e nítida, respectivamente.

No arquivo de entrada do MFSim que é setado pelo usuário, foi adicionado duas *flags*, a primeira é referente a aplicação do modelo de fronteira imersa para a solução das equações de balanço da quantidade de movimento linear, a segunda *flag* concerne a aplicação do modelo de fronteira imersa para a solução das equações de balanço para os escalares. Portanto, se alguma *flag* for ativada ('True') o solver para o tratamento da fronteira imersa será o método dos volumes fantasmas com direção local para a respectiva equação de balanço, do contrário, o tratamento da fronteira imersa será feito através do método da multi-forçamento direta.

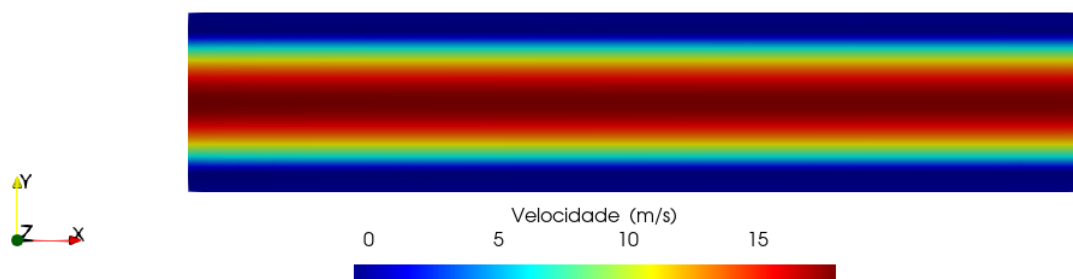
A validação foi feita desativando a *flag* para a solução das equações de balanço da quantidade de movimento linear e ativando a *flag* para a solução da equação da energia térmica. O escoamento simulado é o Poiseuille entre placas planas, a equação contínua para a velocidade e temperatura são expressas respectivamente pelas Eq. 5.1 e Eq. 5.2. Os dados geométricos e as propriedades dos fluido estão reunidos na Tab. 5.2.

Tabela 5.2 – Dados de Entrada

Dados geométricos		Propriedades do Fluido	
Comprimento (L)	5 m	Número de Reynolds (Re)	150
Altura (h)	0,76 m	Difusividade Térmica ( $\lambda$ )	0,01 m <sup>2</sup> /s
		massa específica ( $\rho$ )	1 kg/m <sup>3</sup>
		viscosidade cinemática ( $\mu$ )	0,1 m <sup>3</sup> /s

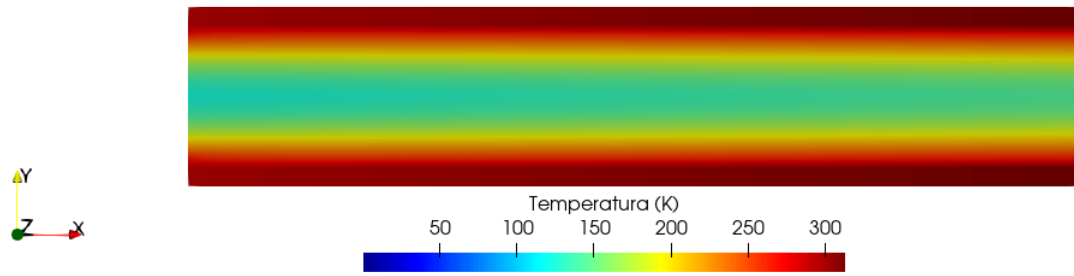
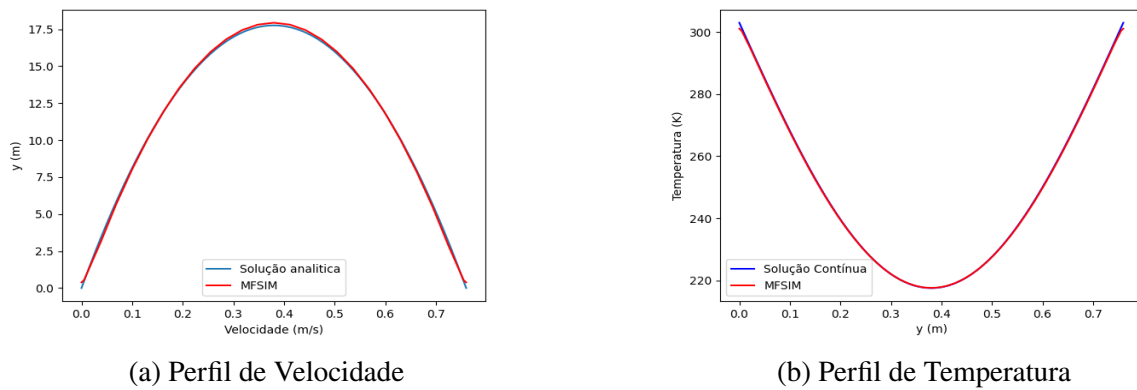
O resultado qualitativo do campo de velocidade e temperatura estão expressos na Fig. 5.6 e Fig. 5.6, respectivamente. O perfil de velocidade foi obtido usando o *solver* para o sistema linear Multigrid-Multinível e o perfil da temperatura foi solucionado explicitamente usando o método Runge-Kutta de quarta ordem. O perfil vertical da velocidade e temperatura avaliado na metade do comprimento do domínio  $L = 2,5m$  foram comparados com a solução contínua, e estão disponíveis na Fig. 5.8-a e Fig. 5.8-b

Figura 5.6 – Campo de Velocidade usando o método da Multi Forçamento Direta



Os resultados computacionais foram satisfatórios em relação aos resultados obtidos via solução contínua para a velocidade e temperatura, demonstrando a possibilidade de operar de forma híbrida por meio dos dois modelos de fronteira imersa aproveitando as vantagens de cada método para a solução da equação de balanço da quantidade de movimento e escalares.

Figura 5.7 – Campo de Temperatura usando o método dos volumes fantasmas com direção local

Figura 5.8 – Perfil vertical da velocidade e temperatura avaliado em  $L/2$  usando a hibridização dos modelos de fronteira imersa

## 5.2 Redução do custo computacional associado as marcações e classificações dos volumes eulerianos

A principal desvantagem de utilizar a metodologia da fronteira imersa dos volumes fantasmas com direção local comparado ao método da multi forçagem direta é a necessidade de mapear e classificar as células eulerianas em função da proximidade com a fronteira imersa resultando em um aumento do custo computacional. O processo de marcação e classificação das células é dividido em três etapas:

- Busca por pontos eulerianos próximos a fronteira imersa;
- Marcação Primária;
- Marcação Secundária.

### 5.2.1 Busca por pontos eulerianos próximos a fronteira imersa

Essa subrotina no MFSim foi criada para encontrar os volumes eulerianos próximos a fronteira imersa guardando informações da distância da célula euleriana com a posição da fronteira imersa e a mínima distância da célula euleriana em relação a um ponto lagrangiano.



Pelo processo de marcação convencional, para conseguir armazenar essas informações o algoritmo precisa varrer cada ponto lagrangiano e associar para cada ponto lagrangiano pontos vizinhos eulerianos conforme um raio de busca  $r = 4$ , ou seja, associa-se quatro células eulerianas em cada direção (total de 24 células) e é adicionado um contador para somar a quantidade de vezes que um ponto euleriano participa do raio de busca.

Na segunda etapa, referente a alocação da memória, ocorre a varredura do domínio euleriano, e verifica se o contador associado ao ponto euleriano é maior que 0, se for positivo, significa que o mesmo está correlacionado a pelo menos um ponto lagrangiano pelo raio de busca, logo, aloca-se um espaço de memória referente ao tamanho do contador associado.

Na terceira etapa, volta a ser feita a varredura de cada ponto lagrangiano e cada ponto euleriano que faz associação a um ponto lagrangiano é associado a uma lista lincada que contém todas as informações do triângulo lagrangiano, tais como: área, posições dos vértices e centroide e direção e magnitude da normal.

Na última etapa, as informações coletadas no processo anterior são utilizadas para determinar a distância mais próxima a fronteira imersa e as intersecções relativas aos centros e faces em cada uma das três direções. A distância mais próxima a fronteira imersa é obtida através do cálculo da equação da distância entre dois pontos, sendo, o ponto euleriano e todos os pontos lagrangianos em que o ponto euleriano está associado ao raio de busca. Essa informação será bastante útil durante a etapa da marcação primária (para a nova versão das marcações).

Para esse trabalho, uma nova proposta foi introduzida e que conseguiu ter uma redução do tempo de processamento e da memória consumida, embora que a redução do tempo de processamento é mais branda comparado as reduções que foram obtidas durante as etapas das marcações primárias e secundárias. A redução do consumo de memória ocorre devido que o processo é feito de maneira mais direta, não havendo a necessidade prévia de alocar a memória com o tamanho do contador associado ao número de vezes em que o ponto euleriano participa de um raio de busca. Nessa nova versão, é associado um valor binário, ou seja, 1 se o ponto euleriano participa de uma raio de busca e 0 se não participa.

Portanto, o processo inicia-se executando a varredura de cada ponto lagrangiano e a criação dos raios de busca e durante esse *loop* as informações da distância mais próxima a fronteira imersa e as intersecções são feitas simultaneamente, o que elimina a necessidade de passa pela segunda etapa. O cálculo das intersecções e da mínima distância entre a célula euleriana com um ponto lagrangiano ocorre passando o índice do ponto lagrangiano, o número da fronteira imersa e da posição da célula euleriana para as subrotinas responsáveis pelo cálculo das intersecções e da mínima distância, o qual não sofreram variações para essa nova versão.

## 5.2.2 Marcação Primária

A marcação primária visa determinar se um centro euleriano está interno ou externo a fronteira imersa. Se estiver interno a fronteira imersa, diz-se que o centro é inativo, caso contrário, é

ativo. No método convencional essa etapa representava o maior tempo de processamento, pois basicamente para cada célula euleriana, independente se estivesse próximo ou distante da fronteira imersa, haveria a varredura de todos os pontos lagrangianos de cada fronteira imersa e o produto escalar entre as posições e a normal do ponto lagrangiano (Eq. 5.3) é performedo para verificar se o centro da célula é interna ou externa ao sólido.

$$\theta = (x_{eul} - x_{ib}) \cdot nx_{ib} + (y_{eul} - y_{ib}) \cdot ny_{ib} + (z_{eul} - z_{ib}) \cdot nz_{ib} \quad (5.3)$$

onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as coordenadas,  $n$  indica a magnitude da direção normal e os subscritos *eul* e *ib* referem-se as informações da malha euleriana e lagrangiana, respectivamente. Se  $\theta$  for positivo o centro da célula é inativo, se não, o centro da célula é ativo.

Na nova versão o cálculo da Eq. 5.3 é realizado apenas na região onde os raios de busca são definidos e também não há a necessidade de percorrer todos os pontos lagrangianos para cada célula euleriana contida nesse raio de busca, pois durante a etapa precedente, já houve o armazenamento da distância mais próxima a fronteira imersa em relação ao ponto euleriano, bem como as informações das posições e normal desse ponto lagrangiano.

### 5.2.3 Marcação Secundária

A marcação secundária é a responsável por realizar todo o restante das marcações. Adiciona-se mais duas classificações para o centro da célula: Centro irregular e centro estêncil modificado (usado apenas para os escalares). Similarmente, para as faces são adicionados as mesmas quatro classificações: face ativa, inativa, irregular e estêncil modificado. A classificação completa está topicalizado como segue:

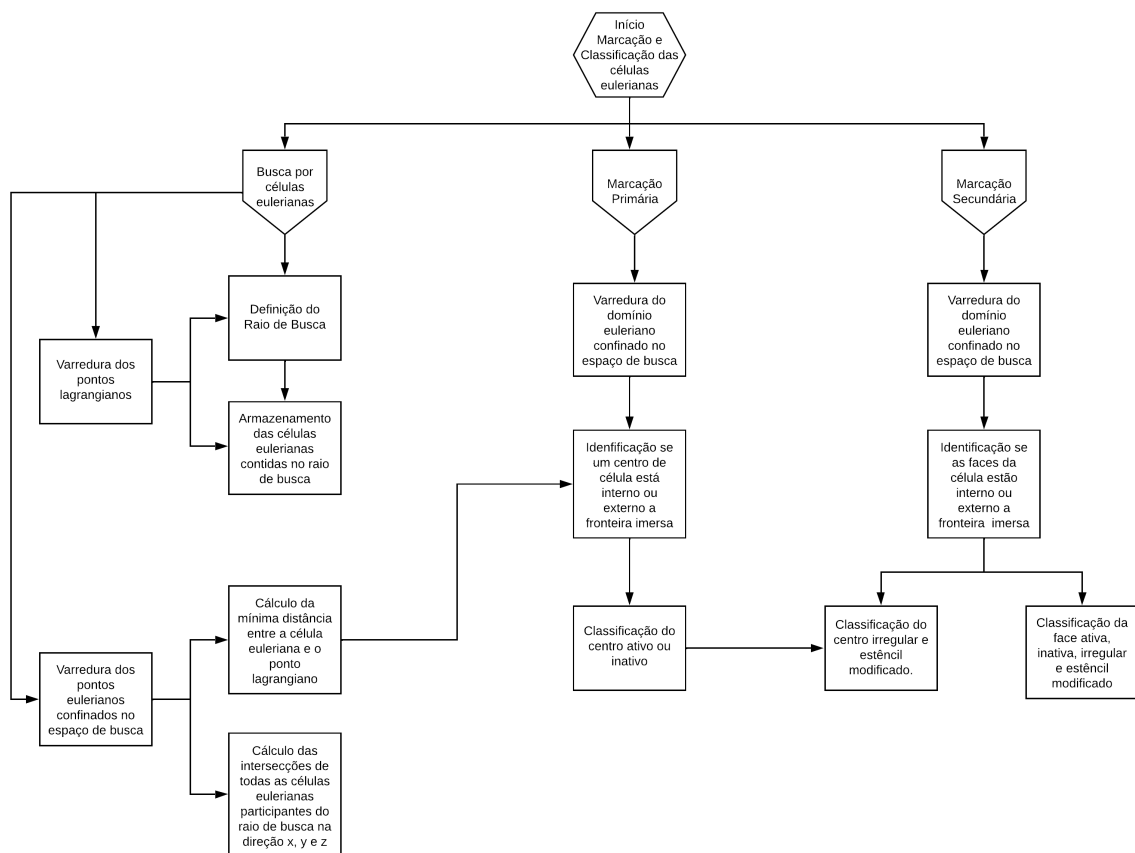
- Classificação para a solução das equações de Navier-Stokes
  - Centro Irregular;
    - \* Classificação ativa e inativa dos 6 pontos vizinhos (E-W-N-S-T-B)
  - Face Ativa e Inativa;
  - Face Irregular;
  - Face com Estêncil Modificado;
    - \* Classificação ativa e inativa dos 12 vizinhos (EE-E-W-WW-NN-N-SS-S-TT-T-B-BB);
    - \* Classificação ativa e inativa dos 4 vizinhos perpendiculares (P-W-WN-N) e dos outros quatro vizinhos perpendiculares (P-W-WT-T)
- Classificação para a solução dos escalares
  - Centro com Estêncil Modificado:

\* Classificação ativa e inativa dos 12 vizinhos (EE-E-W-WW-NN-N-SS-S-TT-T-B-BB).

A ideia proposta na marcação primária, continua para a marcação secundária, ou seja, a classificação é realizada apenas pelo espaço de busca delimitado pelo raio. Alguns centros classificados como ativo, porém que possua pelo menos em centro vizinho, são, agora como classificados como irregulares, assim, as células cujo centro são irregulares podem ter faces que são internas ou externas a fronteira imersa. Dessa forma a Eq. 5.3 é recalculada para as faces restrita apenas para essas regiões.

No restante do processo para a implementação da marcação secundária não houve significativa diferenças que a implementação da versão precedente. Na Fig. 5.9, apresenta-se um fluxograma que detalha as operações individuais de cada processo, além de destacar as interações entre eles, visando a realização da marcação e classificação completa das faces e centros eulerianos em função da presença da fronteira imersa.

Figura 5.9 – Fluxograma que representa o processo de marcação e classificação das células eulerianas.



Para validar essas modificações realizadas durante a etapa de marcação e classificação das células, foi considerado a mesma simulação computacional do escoamento de Poiseuille sobre placas planas. Essa simulação consiste de apenas um nível físico, rodando em serial e uma malha

com divisão de 500x100x4 células. O tempo de processamento cumulativo durante essas etapas pela versão antiga e nova são visualizados na Tab. 5.3.

Tabela 5.3 – Resultados do tempo de processamento durante a marcação para cada versão

	Busca pontos eulerianos (s)	Primária (s)	Secundária (s)
Versão Nova	13,84	14,91	14,96
Versão Antiga	15,29	931,34	1250,00

Em relação ao consumo de memória durante esse processo, não houve uma significativa diferença, pois essa simulação possui pouco número de células eulerianas e lagrangianas, o que não atingia 500 MB de memória usada para ambas as versões. Por conta disso, a simulação de Poiseuille foi modificada aumentando o número de células e o comprimento do duto para  $L = 10m$ . Para esse novo caso, o número de células eulerianas foi fixado em aproximadamente 2,5 milhões de volumes com a fronteira imersa possuindo cerca de 130 mil células lagrangianas. A Tab. 5.4 mostra a diferença do consumo de memória durante o processo de busca dos pontos eulerianos para ambas as versões.

Tabela 5.4 – Consumo de memória durante a busca de pontos eulerianos próximo a fronteira imersa

	RAM (GB)	(%)
Versão Antiga	18	53,4
Versão Antiga	13,8	40

Como pode ser notado pela Tab. 5.3, houve uma expressiva diminuição no tempo de processamento durante as etapas de marcação e classificação das células, notadamente durante a marcação primária e secundária, que durante a versão anterior executava sua tarefa em  $t = 20,57min$  enquanto que para essa nova versão apenas  $t = 5s$ . O consumo de memória durante a etapa de busca das células eulerianas diminuiu em cerca de 30%, justificado principalmente a eliminação da Etapa 2 da versão antiga que alocava memória para cada euleriano com tamanho referente ao contador associado ao número de vezes que uma célula euleriana participa de um raio de busca.

Com essa modificação incluída no código MFSim, a metodologia dos volumes fantasmas com direção local mostrou-se competitiva em relação ao método da multi-forçagem direta, podendo ser incluída em simulações mais robustas, estendendo os limites da sua aplicabilidade a até mesmo casos industriais.

### 5.3 Fronteira Imersa fora do nível mais refinado

Na versão antiga da metodologia da fronteira imersa dos volumes fantasmas com direção local implementada no código MFSim, a fronteira imersa deveria ser sempre posicionada no nível mais fino, restringindo significativamente sua aplicação. A modificação foi feita tendo em vista que não apenas a fronteira imersa, mas sim cada ponto lagrangiano fosse posicionado em

qualquer nível físico do domínio. Portanto, foi implementado no MFSim um tipo de dados onde associava cada ponto lagrangiano de uma fronteira imersa ao nível físico que se encontrava.

O processo começa com a varredura dos pontos lagrangianos de cada fronteira imersa, onde suas coordenadas armazenadas. Em seguida, ocorre a varredura de cada nível físico da malha euleriana e de cada *patch* associado a esse nível físico. Durante esta etapa, são registradas as coordenadas iniciais e finais em que cada *patch* é montado na estrutura. Verifica-se se a coordenada do ponto lagrangiano está contida nesse *patch*; em caso afirmativo, o nível físico da fronteira imersa é armazenado. Esse processo é iterativo até que o nível físico da fronteira imersa esteja em concordância com o nível físico visível da malha euleriana. A seguir, apresenta-se o algoritmo simplificado para a identificação do nível físico em que se encontra o ponto lagrangiano.

Após essa identificação, todas as etapas posteriores de marcação e classificação das células, inter-extra polações das células fantasmas e o cálculo da força lagrangiana foram modificados para contemplar a camada do nível físico em que cada ponto lagrangiano se encontra.

Para a validação, foi escolhido a mesma simulação computacional do escoamento de Poiseuille em placas planas. A mudança realizada foi a presença de dois níveis físicos, onde a placa superior estava no nível mais grosseiro (*LBOT*) enquanto que a placa inferior estava preenchida totalmente por um *patch* mais refinado no nível (*LTOP*).

Os dados de entrada foram os mesmos da Tab. 5.1 obedecendo as condições de contorno desse tipo de escoamento. A configuração da malha para a validação e o perfil de velocidade vertical avaliado em  $L/2$  são mostrados por meio da Fig 5.10 e Fig. 5.11, respectivamente.

Figura 5.10 – Malha para a validação da fronteira imersa podendo estar fora do nível mais refinado

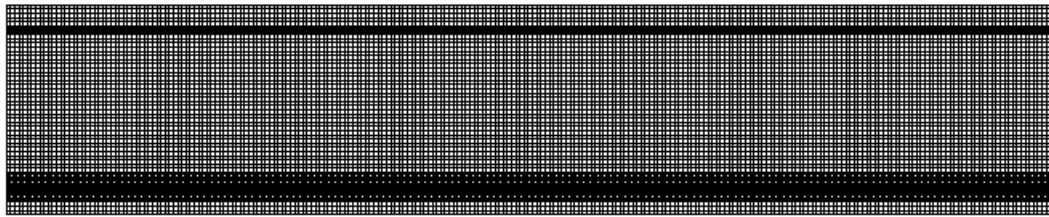
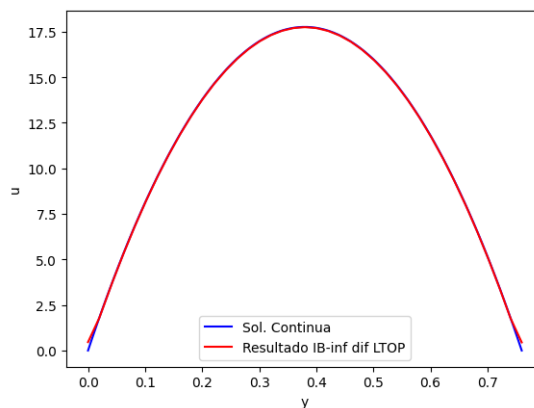


Figura 5.11 – Perfil de velocidade - fronteira imersa entre níveis físicos



### **5.3.1 Escoamento interno e externo separado por uma IB de espessura infinitesimal**

incluir

## Capítulo 6

### Atualização do Cronograma

Conforme requerido pela norma COPEM estão apresentadas as etapas propostas no plano de tese e a atualização dos desenvolvimentos realizados para cada atividade. Todas as etapas definidas no cronograma apresentado no plano de trabalho foram mantidas, embora que novas etapas tiveram que ser adicionadas para o desenvolvimento e robustez do método dos volumes fantasmas com direção local ao código MFSim.

- Etapa A – Revisão Bibliográfica para conhecimento sobre os seguintes temas (i) fluido dinâmica e simulação computacional (ii) modelos de fechamento da turbulência da classe URANS e LES (iii) metodologia da fronteira imersa do tipo interface nítida denominada de volumes fantasmas locais (iv) Aplicações envolvendo essa classe de metodologia da fronteira imersa, buscando encontrar casos onde há a adição de modelos de fechamento e corpos imersos esbeltos, tridimensionais e móveis.

**Situação atual:** Essa etapa está em andamento e está em concordância com o cronograma da Tab. 6.1

- Etapa B – Utilização do MFSim para a simulação de casos testes, verificação e validação aplicando a metodologia dos volumes fantasmas locais.

**Situação atual:** Essa etapa foi finalizada e está em concordância com o cronograma da Tab. 6.1

- Etapa C – Implementação e cálculo dos escalares.

**Situação atual:** Essa etapa foi finalizada e está em concordância com o cronograma da Tab. 6.1. Vale ressaltar que inicialmente a metodologia dos volumes fantasmas com direção local funcionava apenas para energia térmica, depois foi atualizado todos os escalares sem a adição da modelagem dos tensores.

- Etapa D – Verificação e validação da equação da energia sem o termo viscoso.

**Situação atual:** Essa etapa foi finalizada e está em concordância com o cronograma da Tab. 6.1. A validação foi feita realizando-se a simulação do escoamento de Poiseuille que foi apresentado na Seção 5.

- Etapa E – Verificação e validação dos escalares passivos.

**Situação atual:** Embora já foi implementado a metodologia da fronteira imersa dos volumes fantasmas aplicados ao cálculo dos escalares, ainda não foi validado. A justificativa dessa etapa não ser concluída foi que outras etapas bem importantes e com maior urgência precisaram ser feitas, o que tomou tempo suficiente para a não conclusão dessa etapa.

- Etapa F – Cálculo e verificação do cálculo do tensor taxa de deformação utilizando a metodologia dos volumes fantasmas locais.

**Situação atual:** Etapa iniciada e está em concordância com o cronograma da Tab. 6.1.

- Etapa G – Implementação de modelos de fechamento da turbulência da classe URANS e LES acoplado com a metodologia da dos volumes fantasmas locais.

**Situação atual:** Etapa será iniciada nas próximas semanas e está em concordância com o cronograma da Tab. 6.1.

- Etapa H – Verificação e validação dos modelos LES e URANS que envolvem a determinação do escalar e o tensor taxa de deformação.

**Situação atual:** Essa ainda não foi iniciada e está em concordância com o cronograma da Tab. 6.1

- Etapa I – Implementação/adaptação da metodologia dos volumes fantasmas locais para simulação computacionais de corpos imersos em movimento.

**Situação atual:** Essa ainda não foi iniciada e está em concordância com o cronograma da Tab. 6.1

- Etapa J – Redação de relatórios parciais, tese final e publicações.

**Situação atual:** Essa etapa ainda não foi iniciada e está em concordância com o cronograma da Tab. 6.1. Pretende-se no atual semestre enviar um artigo para revista com o avanço no desenvolvimento da metodologia dos volumes fantasmas locais, portanto, espera-se que essa etapa seja adiantada.

Durante o período posterior a apresentação do plano de tese, foi identificado que para casos industriais e/ou com um grande número de células a metodologia da fronteira imersa com volumes fantasmas locais não era compatível, pois o processo de marcação e classificação das células consumia um elevado tempo de processamento e memória. Portanto foi necessário interromper parcialmente o andamento das atividades conforme o cronograma na tentativa de resolver esse problema.

Uma nova versão para a marcação e classificação das células foi apresentada na Seção 5 o que permitiu uma considerável redução no custo computacional, consequentemente a possibilidade de usar essa metodologia para problemas industriais. Além disso, uma modificação recente no



Tabela 6.1 – Cronograma de Atividades apresentados no plano de Tese

	2022		2023		2024		2025	
Semestre/Etapa	1	2	3	4	5	6	7	8
A	X	X	X	X	X	X		
B	X	X						
C			X	X				
D				X				
E				X				
F					X	X		
G					X	X	X	
H							X	
I				X	X	X	X	
J							X	X

Legenda: ■ Etapa finalizada, ■ Etapa em andamento, ■ Etapa a ser realizada, ■ Etapa atrasada

código MFSim permitiu a inserção da fronteira imersa fora do nível mais fino (*LTOP*), conferindo uma maior flexibilidade para a setagem das simulações.

Essas duas grandes mudanças não estavam planejadas no cronograma durante o período da elaboração do plano de tese. No entanto, mostraram-se extremamente necessárias. Consequentemente, o cronograma da Tab . 6.1 precisou ser atualizada conforme a seguinte versão atualizada da Tab. 6.2.

- Etapa A – Revisão Bibliográfica para conhecimento sobre os seguintes temas(i) fluido dinâmica e simulação computacional (ii) modelos de fechamento da turbulência da classe URANS e LES (iii) metodologia da fronteira imersa do tipo interface nítida denominada de volumes fantasmas locais (iv) Aplicações envolvendo essa classe de metodologia da fronteira imersa, buscando encontrar casos onde há a adição de modelos de fechamento e corpos imersos esbeltos, tridimensionais e móveis.
- Etapa B – Utilização do MFSim para a simulação de casos testes, verificação e validação aplicando a metodologia dos volumes fantasmas locais.
- Etapa C – Implementação e cálculo dos escalares.
- Etapa D –Validação da equação da energia sem o termo viscoso.
- Etapa E - Redução do tempo de processamento e consumo de memória durante a etapa da marcação e classificação das células eulerianas conforme a posição da fronteira imersa.
- Etapa F - Implementação da fronteira imersa posicionada em qualquer nível físico, não apenas no nível mais fino (*LTOP*)

- Etapa G - Implementação da solução temporal explícita usando Runge-Kutta para a velocidade
- Etapa H – Validação dos escalares passivos.
- Etapa I – Cálculo e verificação do cálculo do tensor taxa de deformação utilizando a metodologia dos volumes fantasmas locais.
- Etapa J – Implementação de modelos de fechamento da turbulência da classe URANS e LES acoplado com a metodologia da dos volumes fantasmas locais.
- Etapa K – Validação dos modelos LES e URANS que envolvem a determinação do escalar e o tensor taxa de deformação.
- Etapa L – Implementação/adaptação da metodologia dos volumes fantasmas locais para simulação computacionais de corpos imersos em movimento.
- Etapa M – Redação de relatórios parciais, tese final e publicações.

Tabela 6.2 – Cronograma de Atividades atualizado

	2022		2023		2024		2025	
Semestre/Etapa	1	2	3	4	5	6	7	8
A	X	X	X	X	X	X		
B	X	X						
C			X	X				
D				X				
E				X				
F				X				
G				X				
H					X			
H					X	X		
I					X	X	X	
J							X	
K					X	X	X	
L					X	X	X	X

Legenda: ■ Etapa finalizada, ■ Etapa em andamento, ■ Etapa a ser realizada, ■ Etapa atrasada

## Referências Bibliográficas

ALVES, M. A.; OLIVEIRA, P. J.; PINHO, F. T. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 41, n. 1, p. 47–75, 2003. Citado na página 33.

ANDRADE, J. R. *Métodos de fronteira imersa para corpos esbeltos: implementação e validação*. 133 p. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015. Citado 5 vezes nas páginas 7, 8, 21, 22 e 23.

ARPACI, V. S.; LARSEN, P. S. *Convection Heat Transfer Slattery*. [S.l.]: Prentice Hall, New York, 1984. Citado na página 27.

BALARAS, E. Modeling complex boundaries using an external force field on fixed cartesian grids in large-eddy simulation. *Computational Fluids*, v. 33, p. 375–404, 2004. Citado na página 17.

BARBI, F. et al. Numerical experimentations of ascending bubbles for dynamic force calculations. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 40, p. 1–12, 2018. Citado na página 8.

BERTHELSEN, P. A.; FALTINSEN, O. M. A local directional ghost cell approach for incompressible viscous flow problems with irregular boundaries. *Journal of Computational Physics*, v. 227, n. 9, p. 4354–4397, 2008. ISSN 10902716. Citado 7 vezes nas páginas 7, 17, 20, 21, 22, 23 e 24.

CASTRO, L. P. et al. Implementation of a hybrid lagrangian filtered density function–large eddy simulation methodology in a dynamic adaptive mesh refinement environment. *Physical of Fluids*, v. 143, p. 118472, 2019. Citado na página 8.

CHANDRASEKHARAIHAH, D. S.; DEBNATH, L. Continuum mechanics. *Academic Press*, 1994. Citado na página 27.

CHI, C.; ABDELSAMIE, A.; THÉVENIN, D. A directional ghost-cell immersed boundary method for incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, v. 404, p. 109112, 2022. Citado na página 11.

CHORIN, A. J. Numerical solution of the navier-stokes equation. *Mathematics of Computation*, v. 22, p. 745–762, 1968. Citado na página 34.

CHUNG, M. H. Cartesian cut cell approach for simulating incompressible flows with rigid bodies of arbitrary shape. *Computational Fluids*, v. 35, p. 607–623, 2006. Citado na página 16.

DAMASCENO, M. M. R. *Desenvolvimento de uma modelagem para escoamentos reativos em malhas adaptativas do tipo bloco-estrutura*. 115 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2018. Citado na página 8.

ELIAS, A. J. *Modelagem Híbrida URANS-LES para Escoamentos Turbulentos*. 193 p. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2018. Citado na página 7.

ELIAS, A. J. *Mecanismos Virtuais de Cinética Química aplicados à Modelagem de Misturas Complexas de Combustíveis Gasosos*. 116 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023. Citado na página 8.

EVANS, M.; HARLOW, F. H. The particle in cell method for hydrodynamic calculations. *Los Alamos Scientific Laboratory*, 1957. Citado na página 14.

FADLUN, E. A. et al. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations. *Journal of Computational Physics*, v. 123, p. 35–60, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 6, 15 e 17.

GENTRY, R. A.; MARTIN, R. E.; DALY, B. J. An eulerian differencing method for unsteady compressible flow problems. *Journal of Computational Physics*, v. 1, p. 87–118, 1966. Citado na página 16.

GHIAS, R.; MITTAL, R.; DONG, H. A sharp interface immersed boundary method for viscous compressible flows. *Journal of Computational Physics*, v. 225, p. 528–553, 2007. Citado na página 17.

GOLDSTEIN, D.; HANDLER, R.; SIROVICH, L. Modeling an no slip-flow boundary with an external force field. *Journal of Computational Physics*, v. 105, p. 354–366, 1993. Citado na página 17.

HARTMANN, D.; MEINKE, M.; SCHRODER, W. A local directional ghost cell approach for incompressible viscous flow problems with irregular boundaries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 200, n. 9, p. 1038–1052, 2011. ISSN 0045-7825. Citado na página 20.

HUANG, W. X.; TIAN, F.-B. Recent trends and progresses in the immersed boundary method. *Journal of Mechanical Engineering Science*, v. 10, p. 1–20, 2019. Citado na página 19.

KAWAMURA, H. Dns of turbulence and heat transport in a channel flow with different reynolds and prandtl numbers and boundary conditions. In *Turbulence, Heat and Mass Transfer 3, (Proc. of the 3rd International Symposium on Turbulence, Heat and Mass Transfer)*, 2000. Citado na página 56.

LUO, K. et al. A ghost-cell immersed boundary method for simulations of heat transfer in compressible flows under different boundary conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 92, p. 708–717, 2016. Citado na página 14.

MAGALHAES, G. M. *Modelagem matemática e computacional de escoamentos turbulentos multifásicos em malha adaptativa bloco estruturada utilizando método Multi Direct forcing*. 149 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2022. Citado na página 8.

MAJUMDAR, S.; IACCARINO, G.; DURBIN, P. Rans solver with adaptive structured boundary non-conforming grids. *Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs* 2001, p. 353–364, 2001. Citado na página 20.

- MARTINI, J. E. F. *Modelagem computacional de escoamentos turbulentos em turbinas eólicas utilizando fronteira imersa e refinamento adaptativo da malha*. 125 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 7, 13 e 19.
- MARTINS, J. K. A. *Modelagem euler-lagrange da evaporação de um spray multicomponente em meio heterogêneo*. 93 p. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023. Citado na página 8.
- MELO, R. R. da S. *Modelagem e simulação de escoamentos turbulentos com efeitos térmicos utilizando a metodologia da fronteira imersa e malha adaptativa*. 127 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 7, 14 e 19.
- MITTAL, R. et al. A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries. *Journal of Computational Physics*, v. 227, p. 4825–4852, 2008. Citado 5 vezes nas páginas 10, 11, 17, 18 e 20.
- MITTAL, R.; IACCARINO, G. Immersed boundary methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 1, n. 37, p. 239–261, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- MOHD-YUSOF, J. Combined immersed boundary/b-spline methods for simulation of flow in complex geometries. *PCTR Annual Research Briefs, NASA Ames/Stanford University*, 1997. Citado na página 6.
- MORALES, F. A. P. et al. Fluid–structure interaction with a finite element–immersed boundary approach for compressible flows. *Ocean Engineering*, v. 290, p. 115755, 2023. ISSN 0029-8018. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002980182302139X>>. Citado na página 8.
- MOTTA, P. H. A. *Modelagem numérico-computacional multiníveis de processos de corrosão em sistemas fluidodinâmicos*. 163 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023. Citado na página 8.
- MOTTA, P. H. A.; VEDOVOTTO, J. M.; NETO, A. S. Assessment of critical brine disposal operations conditions by cfd modeling and a kriging metamodel. *Environmental Fluid Mechanics*, v. 23, p. 141–160, 2023. Citado na página 7.
- PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves: a numerical method. *Journal of Computational Physics*, v. 2, p. 252–271, 1972. Citado 4 vezes nas páginas 6, 11, 14 e 17.
- PINHEIRO, A. P. et al. Ethanol droplet evaporation: Effects of ambient temperature, pressure and fuel vapor concentration. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 143, p. 118472, 2019. Citado na página 8.
- PRETA, R. T. O. C. *Implementação, comparação e avaliação de modelos submalhas não lineares*. 119 p. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2018. Citado na página 7.
- PRETA, R. T. O. C. *Modelagem matemática e computacional de escoamentos turbulentos bifásicos em regime denso*. 174 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023. Citado na página 8.

RIBEIRO-NETO, H. *Modelagem matemática e computacional de acoplamento fluido-estrutura em ambiente paralelo e com malha adaptativa*. 127 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 8, 9 e 22.

RICH, M.; BLACKMAN, S. S. A method for eulerian fluid dynamics. *Los Alamos Scientific Laboratory*, 1962. Citado na página 15.

SEO, J. H.; MITTAL, R. A sharp-interface immersed boundary method with improved mass conservation and reduced spurious pressure oscillations. *Journal of Computational Physics*, v. 230, p. 7347–7363, 2011. Citado na página 15.

SILVA, A. L. F. L. e; SILVEIRA-NETO, A.; DAMASCENO, J. J. Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 189, p. 351–370, 2003. Citado na página 17.

SILVEIRA-NETO, A. *Escoamentos Turbulentos Análise Física e Modelagem Teórica*. 1. ed. Uberlândia: Composer, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 30, 36 e 56.

STIVAL, L. J. L. et al. Wake modeling and simulation of an experimental wind turbine using large eddy simulation coupled with immersed boundary method alongside a dynamic adaptive mesh refinement. *Energy Conversion and Management*, v. 268, p. 115938, 2023. Citado na página 7.

STOKES, G. G. On the theories of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, v. 8, p. 287–319, 1845. Citado na página 28.

UDAYKUMAR, H. S.; MITTAL, R.; SHYY, W. Computational of solid–liquid phase fronts in the sharp interface limit on fixed grids. *Journal of Computational Physics*, v. 153, p. 535–574, 1999. Citado na página 17.

VERZICCO, R. Immersed boundaries methods: historical perspective and future outlook. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 55, p. 129–153, 2023. Citado 4 vezes nas páginas 14, 15, 16 e 17.

VIECELLI, J. A. A method for including arbitrary external boundaries in the mac incompressible fluid computing technique. *Journal of Computational Physics*, v. 4, p. 543–551, 1969. Citado na página 16.

VIECELLI, J. A. A computing method for incompressible flows bounded by moving walls. *Journal of Computational Physics*, v. 8, p. 119–143, 1971. Citado na página 16.

VILLAR, M. M. *Análise Numérica Detalhada de Escoamentos Multifásicos Bidimensionais*. 169 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 8.

WANG, Z. et al. Immersed boundary method for the simulation of flows with heat transfer. *International Journal of Multiphase Flows*, p. 1299–1310, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 7, 17 e 19.

YANENKO, N. N. Fractional step methods for multidimensional problems of mathematical physics. *Naunka Press*, Novoribinsk, RU, 1967. Citado na página 16.

YE, T. et al. An accurate cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries. *Journal of Computational Physics*, v. 156, p. 209–240, 1999. Citado na página 16.

# Capítulo 7

## Apêndice

### 7.1 Solução Escoamento Poiseuille em regime laminar com efeitos térmicos

Escoamentos em um canal em regime desenvolvido são conhecidos como Escoamentos de Poiseuille. O escoamento pode estar em regime laminar ou em regime turbulento, sendo promovido por gradientes pressão na direção do escoamento.

Considera-se que o escoamento esteja em regime permanente e seja completamente desenvolvido na direção  $x$  e que, em média, as componentes de velocidades em  $y$  e  $z$  sejam nulas. Além disso, o escoamento será considerado como bidimensional, em média, desprezando os efeitos de borda na direção normal. Para a temperatura, não é plausível assumir a condição de escoamento termicamente desenvolvido, no entanto, conforme proposto por Kawamura (2000), para o caso de fluxo térmico constante, imposto sobre as paredes, observa-se que a temperatura no fluido e na parede mudará linearmente com a direção axial (SILVEIRA-NETO, 2020).

A temperatura aumentará linearmente com a direção axial, porém a diferença entre a temperatura do fluido e da parede será constante em relação a direção axial. Portanto, da diferença entre elas origina-se uma variável que é modelada independente da direção axial, ou seja,  $T^*(y) = T(x, y) - T_w(x)$ , onde  $T(x, y)$  é a temperatura do fluido, em escoamentos bidimensionais e  $T_w(x)$  é a temperatura da parede.

Portanto, partindo-se da equação do balanço da quantidade de movimento linear e energia térmica na forma diferencial e fazendo-se uso das características desse escoamento, as equações são simplificadas, sendo representadas através das Eq. 7.1 e Eq. 7.2, respectivamente.

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{dp}{dx} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7.1)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (7.2)$$

Decompondo a temperatura do fluido  $T(x, y)$ , obtém-se:

$$u \frac{\partial (T^*(y) + T_w(x))}{\partial x} = \alpha \left( \frac{\partial^2 (T^*(y) + T_w(x))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (T^*(y) + T_w(x))}{\partial y^2} \right) \quad (7.3)$$



Logo:

$$u \frac{\partial T_w(x)}{\partial x} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T_w(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^*(y)}{\partial y^2} \right) \quad (7.4)$$

A temperatura na parede possui um perfil linear, e pode ser representada por  $T_w(x) = c_1 x + c_2$  onde  $c_2$  é o intercepto e  $c_1$  é a inclinação da reta. Portanto, tem-se a versão final da equação da temperatura na forma diferencial para o escoamento de Poiseuille em regime laminar.

$$\frac{d^2 T^*(y)}{dy^2} = \frac{c_1 u(y)}{\alpha} \quad (7.5)$$

### 7.1.1 Placas planas

#### Campo de Velocidade

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (7.6)$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} dy \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + c_1 \quad (7.8)$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial y} = \int \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + c_1 \quad (7.9)$$

$$u(y) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2 \quad (7.10)$$

Aplicando as condições de contorno:

$$\begin{cases} y = 0, & u(0) = 0 & \text{condição de não-deslizamento} \\ y = h, & u(h) = 0 & \text{condição de não-deslizamento} \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{-1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2} \quad (7.11)$$

Solução da velocidade:

$$u(y) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \left( \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} h y \right) \quad (7.12)$$

## Campo de Temperatura

$$T(x, y) = T^*(y) + T_w(x) \quad (7.13)$$

Assumindo um perfil de temperatura linear na parede:

$$T_w = ax + b = \frac{T_w(L) - T_w(0)}{L}x + T_w(0) \quad (7.14)$$

Equação diferencial da Temperatura:

$$\frac{d^2 T^*(y)}{dy^2} = \frac{c1 u(y)}{\alpha} \quad (7.15)$$

$$\frac{d^2 T^*(y)}{dy^2} = \beta \left( \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} h y \right) \quad (7.16)$$

onde  $\beta = \frac{1}{\alpha \mu} \frac{dp}{dx} \left( \frac{T_w(L) - T_w(0)}{L} \right)$

$$\frac{dT^*(y)}{dy} = \beta \left( \frac{y^3}{6} - \frac{h y^2}{4} \right) + c1 \quad (7.17)$$

$$T^*(y) = \beta \left( \frac{y^4}{24} - \frac{h y^3}{12} \right) + c1 y + c2 \quad (7.18)$$

Aplicando as condições de contorno:

$$\begin{cases} y = 0, & T^*(0) = 0 \\ y = h, & T^*(h) = 0 \end{cases}$$

$$c2 = 0 \quad (7.19)$$

$$c1 = \beta \left( \frac{h^3}{24} \right) \quad (7.20)$$

Solução de  $T^*(y)$ :

$$T^*(y) = \beta \left( \frac{y^4}{24} - \frac{h y^3}{12} \right) + \beta \left( \frac{h^3}{24} \right) y \quad (7.21)$$

Solução da Temperatura:

$$T(x, y) = \beta \left( \frac{y^4}{24} - \frac{h y^3}{12} \right) + \beta \left( \frac{h^3}{24} \right) y + \frac{T_w(L) - T_w(0)}{L}x + T_w(0) \quad (7.22)$$