Math. Ann. 323, 175–199 (2002) **Mathematische Annalen**

Digital Object Identifier (DOI) 10.1007/s002080100302

Prolongement méromorphe des courants de Green

Nicusor Dan

Revised version: 16 July 2001 / Published online: 1 February 2002 – © Springer-Verlag 2002

Résumé. Sur une variété quasi-projective complexe, on construit des courants dépendant d'un paramètre holomorphe qui prolongent les courants d'intégration des sous-variétés et les courants de Green de type logarithmique. On prouve des résultats de régularité et d'holomorphie pour ces courants et pour leur produits. On démontre que le $*$-produit dans la théorie d'Arakelov peut être défini par prolongement méromorphe à partir du produit de courants dépendant d'un paramètre dans une région de l'espace des paramètres où ils sont représentés par des formes différentielles. On donne une nouvelle preuve pour la commutativité et pour l'associativité du $*$-produit.

Une notion analytique essentielle en théorie d'Arakelov est celle de courant de Green, introduite dans [GS]. Étant donnée une variété quasi-projective complexe lisse X et une sous-variété algébrique Y de codimension p, un courant de Green est un courant g de type $(p-1, p-1)$ qui vérifie l'équation:

$$dd^c g = \omega - \delta_Y,$$

où ω est une forme lisse et δ_Y désigne le courant d'intégration sur Y (on a posé $d^c = \frac{\partial - \bar\partial}{4i\pi}$, de sorte que $dd^c = -\frac{\partial\bar\partial}{2i\pi}$).

Pour Y, Z deux sous-variétés de X se coupant proprement, i.e. la codimension de toute composante irréductible de leur intersection est la somme des codimensions des deux sous-variétés, et g_Y, g_Z des courants de Green, le $*$-produit $g_Y * g_Z$ est par définition:

$$g_Y * g_Z = g_Y \cdot \delta_Z + \omega_Y \cdot g_Z.$$

Ici g_Y et δ_Z sont deux courants de lieu singulier Y respectivement Z. En géométrie différentielle un produit de deux courants est défini si leurs fronts d'onde ne s'intersectent pas; dans notre cas, cela équivaut au fait que Y et Z s'intersectent transversalement au sens de la geométrie différentielle.

Gillet et Soulé ([GS]) ont défini le produit $g_Y \cdot \delta_Z$ pour deux sous-variétés Y, Z quelconques et pour un courant g_Y de type logarithmique. Cette construction utilise une désingularisation de Y dans X. Elle devient difficile à manipuler quand on doit comparer des produits de courants de Green associés aux

N. Dan
Institute of Mathematics, Romanian Academy, P.O. Box 1-764, Bucharest, Romania
(e-mail: ndan@dnt.ro)

plusieurs sous-variétés, car on doit comparer des résolutions de singularités pour ces sous-variétés. Des exemples pour ce genre de difficulté sont les preuves pour la commutativité et pour l'associativité du $*$-produit dans [GS], [Bu].

Deux courants de Green sont dits équivalents s'ils diffèrent par un cobord. On propose dans cet article la définition, pour toute sous-variété algébrique Y d'une variété quasi-projective lisse X, et pour toute classe d'équivalence de courants de Green, de courants G_Y^λ, Δ_Y^λ, Ω_Y^λ dépendant d'un paramètre holomorphe λ, qui ont les propriétés suivantes:

a) $(\frac{\partial}{\partial\lambda}G_Y^\lambda)_{\lambda=0}$ est un courant de Green dans la classe donnée;

b) $(\Delta_Y^\lambda)_{\lambda=0} = \delta_Y$;

c) $(\Omega_Y^\lambda)_{\lambda=0}$ est une forme lisse;

d) $dd^c G_Y^\lambda = \lambda(\Omega_Y^\lambda - \Delta_Y^\lambda)$;

e) Les courants G_Y^λ, Δ_Y^λ, Ω_Y^λ sont assez réguliers pour $\mathrm{R}e\lambda$ assez grand; plus précisément, G_Y^λ, Δ_Y^λ, Ω_Y^λ sont C^k pour $\mathrm{R}e\lambda > k+2$.

On démontre que pour deux sous-variétés Y et Z, pour deux paramètres holomorphes $\lambda_1,\ \lambda_2$ et pour des courants à un paramètre holomorphe $G_Y^{\lambda_1},\ \Omega_Y^{\lambda_1},\ \Delta_Z^{\lambda_2}$, $G_Z^{\lambda_2}$ comme ci-dessus, le courant

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_1}G_Y^{\lambda_1}\cdot\Delta_Z^{\lambda_2} + \Omega_Y^{\lambda_1}\cdot\frac{\partial}{\partial\lambda_2}G_Z^{\lambda_2}$$

défini comme produit de deux formes différentielles pour $\mathrm{R}e\lambda_1, \mathrm{R}e\lambda_2$ assez grands, est un courant à deux paramètres à prolongement méromorphe. Si les sous-variétés Y et Z se coupent proprement, ce courant est holomorphe en $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et sa valeur en $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ est le $*$-produit

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}G_Y^{\lambda_1}\right)_{\lambda_1=0} * \left(\frac{\partial}{\partial\lambda_2}G_Z^{\lambda_2}\right)_{\lambda_2=0}.$$

On réduit ainsi, par prolongement méromorphe, le produit des deux courants g_Y, δ_Z dans la définition du $*$-produit, au produit des formes différentielles $G_Y^{\lambda_1}$, $\Delta_Z^{\lambda_2}$. En particulier, on réduit la comparaison des produits de courants de Green à la comparaison des produits des courants à un paramètre holomorphe qui les prolongent. Ces derniers produits sont faciles à manipuler, car pour une valeur grande de la partie réelle des paramètres holomorphes ils sont des produits de formes différentielles. Nous obtiendrons ainsi au Sect. 9 une démonstration de la commutativité et de l'associativité du $*$-produit, difficile à obtenir autrement (voir [GS], [Bu]).

Le projet de définir le $*$-produit par prolongement méromorphe apparaît dans [Y]. Des courants G^λ, Δ^λ avec ces proprietés ont été construits dans [Y], [BY] dans le cas où Y est une sous-variété d'intersection complète dans l'espace projectif. Notre construction est inspirée par la construction des courants de Green de type logarithmique dans [GS].

L'organisation du papier est la suivante. Le Sect. 1 contient des résultats necessaires sur les courants dépendant des paramètres holomorphes. Au Sect. 2 on introduit une variante de la notion de courant de type logarithmique; c'est l'outil technique qui nous permettra de réduire la définition des courants à un paramètre holomorphe qui nous intéressent à la définition de ces courants dans le cas des diviseurs à croisements normaux. Au Sect. 3 on donne ces définitions dans le cas des diviseurs à croisements normaux. Au Sect. 4 on donne les définitions dans le cas général et on énonce le théorème sur les propriétés de ces courants: leurs régularité et le fait qu'un produit de courants de ce type est méromorphe et holomorphe à l'origine. La preuve de ce théorème occupe les Sects. 5–7. Au Sect. 8 on étudie le comportement des courants introduits par rapport à l'image inverse et on prouve la compatibilité de leur produit avec le $*$-produit des courants de Green. Enfin, au Sect. 9 on donne une preuve pour la commutativité et pour l'associativité du $*$-produit.

Remerciements. Je tiens à remercier Christophe Soulé pour son aide et pour ses critiques pendant la préparation de ce travail.

1. Courants dépendant d'un paramètre holomorphe

Étant donnée une variété complexe lisse, on note $\mathcal{D}(X) = \bigoplus_{p,q} \mathcal{D}(X)^{p,q}$ l'espace des formes différentielles à support compact sur X, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact des formes et de leurs dérivées jusqu'à tout ordre naturel.

On note $\mathcal{D}'(X) = \bigoplus_{p,q} \mathcal{D}'(X)^{p,q}$ l'espace des courants sur X, le dual de l'espace $\mathcal{D}(X)$, muni de la topologie duale forte.

Les théorèmes III.I, III.VIII, III.XIV de [Sc] pour l'espace des fonctions à support compact et l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^n$ s'étendent sans difficulté aux espaces $\mathcal{D}(X)$ et $\mathcal{D}'(X)$ ([Sc], p.323):

Les espaces $\mathcal{D}(X)$ et $\mathcal{D}'(X)$ sont des espaces localement convexes et reflexifs; chacun est le dual fort de l'autre.

On fixe les coordonnées λ sur $\mathbb{C}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur $\mathbb{C}^n$. On note $\mathcal{M}(\mathbb{C}^n)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^n$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^n$. On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω.

Définition 1.1 *Un* courant sur X dépendant d'un paramètre holomorphe dans Ω *est une application linéaire $\mathcal{D}(X) \xrightarrow{P} \mathcal{H}(\Omega)$ telle que pour tout $\lambda \in \Omega$, l'application $\varphi \to P(\varphi)(\lambda)$ est continue sur $\mathcal{D}(X)$ (i.e. definit un courant sur X).*

On note $\mathcal{D}'_h(X, \Omega)$ l'espace des courants sur X dépendant d'un paramètre holomorphe dans Ω. On peut voir également cet espace comme l'ensemble des fonctions $P : \Omega \to E = \mathcal{D}'(X)$, telles que pour tout $\varphi \in E' = \mathcal{D}(X)$, l'application $\lambda \to < P(\lambda), \varphi >$ est holomorphe sur Ω. On muni cet espace de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de Ω: c'est la topologie donnée par les seminormes $sup_{\lambda \in K} \rho(P(\lambda))$, pour tout compact K de Ω et toute seminorme ρ de l'espace E.

On muni $\mathcal{H}(\Omega)$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. On note $\mathcal{H}(\Omega) \bigotimes \mathcal{D}'(X)$ le produit tensoriel des espaces $\mathcal{H}(\Omega)$ et $\mathcal{D}'(X)$, muni de la topologie projective: la topologie la plus fine sur le produit tensoriel algébrique pour laquelle l'application bilinéaire $\mathcal{H}(\Omega) \times \mathcal{D}'(X) \xrightarrow{u} \mathcal{H}(\Omega) \bigotimes \mathcal{D}'(X)$ est continue. Il est caracterisé par la propriété universelle suivante: pour tout espace localement convexe F, l'application u^* entre l'espace des fonctions linéaires continues $L(\mathcal{H}(\Omega) \bigotimes \mathcal{D}'(X), F)$ et l'espace des fonctions bilinéaires continues $B(\mathcal{H}(\Omega) \times \mathcal{D}'(X), F)$ est bijective. On note $\mathcal{H}(\Omega) \widehat{\bigotimes} \mathcal{D}'(X)$ le complété de cet espace. La Proposition 6 et le commentaire suivant la Proposition 8 de [Gr] affirment, avec nos notations:

Proposition 1.2 *L'application bilinéaire* $\mathcal{H}(\Omega) \times \mathcal{D}'(X) \xrightarrow{v} \mathcal{D}'_h(X, \Omega)$ *donnée par* $v(f, P)(\varphi) = f \cdot P(\varphi)$ *induit un isomorphisme topologique* $\bar{v} : \mathcal{H}(\Omega) \widehat{\bigotimes} \mathcal{D}'(X) \to \mathcal{D}'_h(X, \Omega)$.

Définition 1.3 *On appelle* courant à prolongement méromorphe *sur X une application linéaire* $\mathcal{D}(X) \xrightarrow{P} \mathcal{M}(\mathbb{C}^n)$ *pour laquelle il existe une fonction holomorphe* f *sur* $\mathbb{C}^n$, *non-nulle pour* $\mathrm{R}e\lambda_1, \ldots, \mathrm{R}e\lambda_n$ *assez grands, telle que l'application* $\varphi \in \mathcal{D}(X) \longrightarrow f(\lambda) \cdot P(\varphi)(\lambda)$ *est un courant sur X dépendant d'un paramètre holomorphe dans* $\mathbb{C}^n$.

On note $\mathcal{M}^X$ l'ensemble des courants à prolongement méromorphe sur X. L'espace $\mathcal{M}^X$ a la bi-graduation $\mathcal{M}^X = \bigoplus_{p,q} \mathcal{M}_X^{p,q}$ des courants sur X.

La définition implique qu'il existe un diviseur analytique positif sur $\mathbb{C}^n$, $D = \mathrm{d}iv(f)$, qui vérifie la condition $D + \mathrm{d}iv(P(\varphi)) \geq 0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$. Comme le groupe de Picard analytique de $\mathbb{C}^n$ est nul, cette condition est suffisante, car tout diviseur effectif sur $\mathbb{C}^n$ est le diviseur des zéros d'une fonction méromorphe.

On choisit le plus petit tel diviseur et on appelle *pôle* du courant à prolongement méromorphe son support: c'est la réunion des pôles des fonctions méromorphes $P(\varphi)$ pour tout φ. On dit que P est holomorphe au point $\lambda_0 \in \mathbb{C}^n$ si λ_0 n'appàrtient pas au pôle de P, ou, d'une maniere equivalente, si la fonction méromorphe $P(\varphi)$ est holomorphe en λ_0, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$.

Pour un courant $P \in \mathcal{M}^X$ et holomorphe en un point $\lambda_o \in \mathbb{C}^n$, on écrit souvent $(P)_{\lambda=\lambda_0}$ pour le courant $P(\lambda_0)$.

Pour tout multi-indice $p = (p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ et tout courant $P \in \mathcal{D}'_h(X, \Omega)$ on définit l'application $\frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}}{\partial\lambda_1{}^{p_1}\cdots\partial\lambda_n{}^{p_n}} P$, la dérivée d'indice p du courant P, comme l'application de $\mathcal{D}(X)$ à valeurs dans $\mathcal{H}(\Omega)$ qui associe à une forme test $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ la fonction $\frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}}{\partial\lambda_1{}^{p_1}\cdots\partial\lambda_n{}^{p_n}} P(\varphi)$. Le Théorème 1 et le commentaire suivant la Proposition 8 de [Gr] impliquent que cette application est un élément de

$\mathcal{D}'_h(X, \Omega)$. Il résulte d'ici et de la définition 1.3 que pour tout multi-indice $p \in \mathbb{N}^n$ et pour tout courant $P \in \mathcal{M}^X$, le courant $\frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}}{\partial\lambda_1{}^{p_1}\cdots\partial\lambda_n{}^{p_n}} P$, défini par la même formule, est bien dans $\mathcal{M}^X$, et il est holomorphe en un point $\lambda_0 \in \mathbb{C}^n$ où le courant P était holomorphe.

Les résultats suivants sont immédiats:

Lemme 1.4 *Si $P_i{}^\lambda$ est un courant dans $\mathcal{M}^X$ et a_i sont des formes différentielles pour $i = 1, 2, ..., n$, alors $\sum_{i=1,n} a_i P_i{}^\lambda \in \mathcal{M}^X$; si pour $\lambda^0 \in \mathbb{C}^n$, les courants P_i sont holomorphes pour tout i, alors $\sum_{i=1,n} a_i P_i{}^\lambda$ est holomorphe en λ_0 et*

$$\left(\frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}}{\partial\lambda_1{}^{p_1}\cdots\partial\lambda_n{}^{p_n}}\left(\sum_{i=1,n} a_i P_i{}^\lambda\right)\right)_{\lambda=\lambda_0} = \sum_{i=1,n} a_i \left(\frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}}{\partial\lambda_1{}^{p_1}\cdots\partial\lambda_n{}^{p_n}} P_i{}^\lambda\right)_{\lambda=\lambda_0} \tag{1}$$

pour tout $p \in \mathbb{N}^n$.

Lemme 1.5 *Si $\pi : X \mapsto X'$ est un morphisme propre entre deux variétés lisses, si $P^\lambda \in \mathcal{M}^X$,alors $\pi_* P^\lambda \in \mathcal{M}^{X'}$ et si pour $\lambda^0 \in \mathbb{C}^n$, le courant P_i^λ est holomorphe, alors $\pi_* P^\lambda$ est holomorphe en λ_0 et*

$$\left(\frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}}{\partial\lambda_1{}^{p_1}\cdots\partial\lambda_n{}^{p_n}}\left(\pi_* P^\lambda\right)\right)_{\lambda=\lambda_0} = \pi_* \left(\frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}}{\partial\lambda_1{}^{p_1}\cdots\partial\lambda_n{}^{p_n}} (P^\lambda)\right)_{\lambda=\lambda_0}. \tag{2}$$

Par contre, la proposition suivante utilise la Proposition 1.2:

Proposition 1.6 *Soit $P \in \mathcal{D}'_h(X, \Omega)$ et g une forme différentielle C^∞ sur $X \times \Omega$, dont la restriction à $\{x, \eta\} \times \Omega$ soit une fonction holomorphe pour tout $x \in X$ et pour tout $\eta \in \Lambda^* T_x X$. Alors la fonction $P \cdot g : \Omega \to \mathcal{D}'(X)$ qui associe à un nombre $\lambda \in \Omega$ le produit $\lambda \to g(\lambda, x) \cdot P(\lambda)$ de la forme differentielle $g(\lambda, x)$ sur X et du courant $P(\lambda)$ sur X definit un element dans $\mathcal{D}'_h(X, \Omega)$.*

Preuve. Il faut prouver que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(X)$, l'application $\lambda \to < g(\lambda, x) \cdot P(\lambda), \varphi >$ est holomorphe en λ. Cela est vrai pour tout element $P \in \mathcal{D}'_h(X, \Omega)$ de la forme $P = v(f, Q)$, pour une fonction f holomorphe sur Ω et pour un courant Q sur X, car

$$< g(\lambda, x) \cdot v(f, Q), \varphi >=< g(\lambda, x) \cdot f(\lambda) \cdot Q, \varphi >= f(\lambda) < Q, g(\lambda, x)\varphi >,$$

et l'application $\lambda \to < Q, g(\lambda, x)\varphi >$ est holomorphe.

L'application bilinéaire ainsi définie $w : \mathcal{H}(\Omega) \times \mathcal{D}'(X) \to \mathcal{D}'_h(X, \Omega)$, $w(f, Q) = g(\lambda, x) \cdot f(\lambda) \cdot Q$ est continue. En effet, par la definition de la topologie sur $\mathcal{D}'_h(X, \Omega)$, cela équivaut au fait que pour tout compact $K \subset \Omega$, la famille des applications $g_\lambda : \mathcal{D}'(X) \to \mathcal{D}'(X)$ définies par $g_\lambda(Q) = g(\lambda, x) \cdot Q$

soit équicontinue pour $\lambda \in K$. Cela résulte de la définition de la topologie sur $\mathcal{D}'(X)$.

Il résulte de la Proposition 1.2 que w se prolonge en une application linéaire continue $\bar{w} : \mathcal{D}'_h(X, \Omega) \to \mathcal{D}'_h(X, \Omega)$.

Pour un point $\lambda \in \Omega$, on note $\mathrm{e}v_\lambda : \mathcal{D}'_h(X, \Omega) \to \mathcal{D}'(X)$ l'application définie par $\mathrm{e}v_\lambda(P) = P(\lambda)$. Il est clair que c'est une application continue. Pour tout point $\lambda \in \Omega$, l'application $\mathrm{e}v_\lambda \circ \bar{w}$ est continue de $\mathcal{D}'_h(X, \Omega)$ à $\mathcal{D}'(X)$ et vaut $g(\lambda) \cdot P(\lambda)$ pour les éléments $P \in \mathcal{D}'_h(X, \Omega)$ de la forme $P = v(f, Q),\ f \in \mathcal{H}(\Omega),\ Q \in \mathcal{D}'(X)$. Comme les éléments de la forme $v(f, Q)$ forment un ensemble dense, il resulte que pour un element $P \in \mathcal{D}'_h(X, \Omega)$, l'element $\bar{w}(P) \in \mathcal{D}'_h(X, \Omega)$ coincide avec l'application initiale $g \cdot P : \Omega \to \mathcal{D}(X)$, donc que cette application est dans $\mathcal{D}'_h(X, \Omega)$. □

On va utiliser cette proposition sous la forme suivante:

Corollaire 1.7 *Soit P^λ un courant sur X dépendant d'un paramètre holomorphe dans $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C}^n | \mathrm{R}e\lambda_i >> 0,\ i = 1, \cdots, n\}$. Soit $g(\lambda, x)$ une forme différentielle C^∞ sur $X \times \Omega$, dont la restriction à $\{x\} \times \Omega$ soit une fonction holomorphe pour tout $x \in X$. On suppose que P^λ se prolonge en un courant à prolongement méromorphe, dépendant du paramètre $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Alors le courant $g \cdot P$ défini pour $\mathrm{R}e\lambda_i >> 0$ par la formule $(g \cdot P)(\lambda) = g(l) \cdot P(\lambda)$ se prolonge en un courant à prolongement méromorphe dont le pôle est contenu dans le pôle du P^λ.*

Preuve. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ vérifiant la condition de la définition 1.3 pour le courant P^λ. L'énoncé résulte de la Proposition 1.6 appliquée au courant $f \cdot P$.

2. Une variante à la notion de courant de Green de type logarithmique

Dans ce paragraphe on introduit une légère modification à la notion de courant de Green de type logarithmique. Elle va permettre d'énoncer le corollaire 2.5 du Théorème 1.3.5. de [GS] dans une forme qui va constituer le cadre pour la définition, au Sect. 5, des courants G^λ, Δ^λ, Ω^λ dans le cas général à partir du cas des diviseurs à croisements normaux.

On note $[\alpha]$ le courant induit par une forme localement intégrable α sur une variété complexe lisse. On utilise couramment le fait que, étant donné une section s d'un fibré inversible L muni d'une metrique $||.||$ sur une variété complexe lisse, la forme $\mathrm{l}og||s||^2$ est localement intégrable. Le lemme suivant ([GS], 1.1.5.), sera trés utile.

Lemme 2.1 *Soient $f : X \to Y$ un morphisme projectif entre deux variétés quasi-projectives lisses, U un ouvert Zariski dense de Y et α une forme localement intégrable sur X, lisse sur $f^{-1}(U)$. Alors il existe un ouvert Zariski dense*

$V \subset U$ tel que f soit lisse au dessus de V; la forme $\beta = f_*\alpha = \int_{f^{-1}(V)/V} \alpha$ est une forme localement intégrable sur Y et

$$f_*[\alpha] = [\beta]. \tag{3}$$

On rappelle les définitions suivantes de [GS]:

Définition 2.2 *Soit X une variété quasi-projective lisse et Y une sous-variété analytique de codimension p.*

a) Un courant de Green *pour Y est un courant g_Y de type $(p-1, p-1)$ sur X qui satisfait l'équation $dd^c g_Y + \delta_Y = [\omega_Y]$ pour une forme différentielle ω_Y, où δ_Y est le courant d'intégration sur Y.*

b) Deux courants sur X de type $(p-1, p-1)$ sont équivalents *s'ils diffèrent par un courant de la forme $\partial(\alpha) + \bar{\partial}(\beta)$, pour un courant α de type $(p-2, p-1)$ et un courant β de type $(p-1, p-2)$.*

On écrit $\eta \sim \theta$ si les courants η et θ sont équivalents. On utilise la variante suivante de la notion de courant de type logarithmique:

Définition 2.3 *Pour X une variété quasi-projective lisse et Y une sous-variété analytique de codimension p on note $LG_{X,Y}$ l'ensemble des courants de Green $[\eta]$ sur X de la forme $[\eta] = \pi_*[\varphi]$, où:*

(i) $\tilde{X}$ est une variété quasi-projective lisse, $\pi : \tilde{X} \to X$ est un morphisme projectif, lisse au-dessus de $X - Y$;

(ii)

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \log ||s_i||^2 + \beta,$$

où $||s_i||^2$ désigne la norme des sections canoniques s_i pour une métrique $||.||$ sur le fibré $\mathcal{O}(E_i)$ sur $\tilde{X}$, E_i sont des diviseurs effectifs sur $\tilde{X}$ tels que $E = \bigcup_{i=1,n} E_i$ soit un diviseur à croisements normaux, α_i sont des formes lisses ∂ et $\bar{\partial}$-fermées et β est une forme lisse sur $\tilde{X}$.

Localement sur $\tilde{X}$ la fonction $||s_i||^2$ s'écrit

$$||s_i||^2 = \prod_j |z_j|^{2k_{ij}} \cdot \rho_i,$$

où z_j sont des coordonnées locales, $k_{ij} \in \mathbb{N}$ et ρ_i est une fonction positive et lisse. Il résulte qu'un courant dans la classe $LG_{X,Y}$ est un courant de Green de type logarithmique au sens de [GS].

On énonce le Théorème 1.3.5. de [GS] sous la forme suivante:

Proposition 2.4 *Pour toute variété quasi-projective lisse X et toute sous-variété algébrique Y de codimension $p > 0$ il existe un courant de Green pour Y dans la classe $LG_{X,Y}$.*

Corollaire 2.5 *Soit X une variété quasi-projective lisse et Y une sous-variété algébrique de codimension $p > 0$.Alors il existe:*

(i) Une variété quasi-projective lisse $\tilde{X}$ et un morphisme projectif $\pi : \tilde{X} \mapsto X$, lisse au-dessus de $X - Y$, tels que $\pi^{-1}(Y) = E = \bigcup_{i=1,n} E_i$ soit un diviseur à croisements normaux;

(ii) Pour chaque E_i une forme fermée α_i de type $(p-1, p-1)$ sur $\tilde{X}$ telle que $\pi_*(\sum \delta_{E_i}[\alpha_i]) = \delta_Y$.

(iii) Des métriques hermitiennes $||.||$ sur les fibrés $\mathcal{O}(E_i)$ pour tout i et une forme lisse β sur $\tilde{X}$ tels que si on note $c_1(\overline{\mathcal{O}(E_i)})$ les premières formes de Chern pour ces métriques, le courant

$$\pi_* \left[\left(\sum_i \alpha_i c_1(E_i) \right) + \beta \right]$$

est représenté par une forme lisse sur X.

Preuve. On considère $\pi : \tilde{X} \to X$, E_i, s_i et $\varphi = \sum \alpha_i \mathrm{l}og||s_i||^2 + \beta$ donnés par la proposition.

Par définition:

$$dd^c(\pi_*[\varphi]) + \delta_Y = [\omega_Y],$$

pour ω une forme lisse sur Y. On remplace $\varphi = \sum \alpha_i \mathrm{l}og||s_i||^2 + \beta$ dans cette égalité, on utilise le fait que α_i sont ∂ et $\bar{\partial}-$fermées et la formule de Poincaré-Lelong $dd^c[\mathrm{l}og||s_i||^2] = [c_1(\overline{\mathcal{O}(E_i)})] - \delta_{E_i}$. On obtient

$$\pi_* \left[\sum_i \alpha_i (c_1(E_i) - \delta_{E_i}) + \beta \right] + \delta_Y = [\omega_Y],$$

soit

$$\pi_* \left[\left(\sum_i \alpha_i c_1(E_i) \right) + \beta \right] - [\omega_Y] = \pi_* \left(\sum \delta_{E_i}[\alpha_i] \right) - \delta_Y.$$

Le Lemme 2.1 implique que le terme de gauche de cette égalité est un courant représenté par une forme localement intégrable. Le terme de droite est un courant de support contenu dans Y. Il résulte qu'ils sont nuls tous les deux, donc:

$$\pi_* \left(\sum \delta_{E_i}[\alpha_i] \right) = \delta_Y$$

$$\pi_* \left[\left(\sum_i \alpha_i c_1(E_i) \right) + \beta \right] = [\omega_Y].$$

3. Le cas des diviseurs à croisements normaux

Proposition 3.1 *Soit X une variété projective lisse et E un diviseur effectif. Soit s la section canonique du faisceau inversible $\mathcal{O}(E)$ et $||.||$ une métrique hermitienne sur le faisceau. Alors:*

(i) La fonction $||s||^{2\lambda}$ est C^k sur $X \times \{\mathrm{R}e\lambda > k\}$, holomorphe en λ pour $\mathrm{R}e\lambda > 0$; pour $\mathrm{R}e\lambda > 0$, comme fonction localement intégrable, elle définit un courant G^λ de type $(0,0)$, qui admet un prolongement méromorphe, holomorphe en $\lambda = 0$; on a:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}G^\lambda\right)_{\lambda=0} = [\mathrm{l}og||s||^2], \tag{4}$$

$$G^\lambda_{\lambda=0} = [1]. \tag{5}$$

(ii) La forme de type $(1,1)$ $\frac{1}{2i\pi}\cdot\lambda\cdot||s||^{2\lambda-4}\partial||s||^2\bar{\partial}||s||^2$ est C^k sur $X\times\{\mathrm{R}e\lambda > k+2\}$, holomorphe en λ pour $\mathrm{R}e\lambda > 2$; pour $\mathrm{R}e\lambda > 2$, comme fonction localement intégrable, elle définit un courant Δ^λ de type $(1,1)$, qui admet un prolongement méromorphe, holomorphe en $\lambda = 0$; on a:

$$\Delta^\lambda_{\lambda=0} = \delta_E. \tag{6}$$

(iii) Soit $c_1(\overline{\mathcal{O}(E)})$ la première forme de Chern du fibré métrisé $(\mathcal{O}(E), ||.||)$; la forme $||s||^{2\lambda}\cdot c_1(\overline{\mathcal{O}(E)})$ est C^k sur $X\times\{\mathrm{R}e\lambda > k\}$, holomorphe en λ pour $\mathrm{R}e\lambda > 0$; pour $\mathrm{R}e\lambda > 0$, comme forme localement intégrable, elle définit un courant Ω^λ de type $(1,1)$, qui est à prolongement méromorphe, holomorphe en $\lambda = 0$; on a:

$$\Omega^\lambda_{\lambda=0} = [c_1(\overline{\mathcal{O}(E)})]. \tag{7}$$

(iv)

$$dd^cG^\lambda = \lambda(-\Delta^\lambda + \Omega^\lambda). \tag{8}$$

Preuve. La régularité des courants G^λ, Δ^λ et Ω^λ résulte du Théorème 4.3(i) qui suit. Le Théorème 4.3(ii) implique que ces courants admettent un prolongement méromorphe.

Les égalités (4), (5) et (7) résultent du théorème de convergence dominée appliqué pour $\lambda\in[0,\epsilon]$, où ϵ est un nombre réel positif.

L'égalité (8) résulte de l'égalité:

$$\partial\bar{\partial}(f) = \partial\left(f\cdot\frac{\bar{\partial}(f)}{f}\right) = \frac{\partial(f)\cdot\bar{\partial}(f)}{f} + f\cdot\partial\bar{\partial}\mathrm{l}og(f)$$

appliqué à $f = ||s||^{2\lambda}$ et d'un argument de continuité.

L'égalité (6) résulte des égalités (4),(7),(8) et de la formule de Poincaré-Lelong.

4. Définition des courants à un paramètre

Proposition 4.1 *Soient $X, Y, \pi : \tilde{X} \to X$, $E=\bigcup_i E_i$, α_i comme dans le corollaire 2.5 et $F_j = \sum n_{ij} E_j$, $n_{ij} > 0$ un nombre fini de diviseurs effectifs et pour chaque F_j la section canonique s_j dans $\mathcal{O}(F_j)$, une métrique hermitienne sur $\mathcal{O}(F_j)$ et les courants ${G_j}^\lambda = ||s_j||^{2\lambda}$, ${\Delta_j}^\lambda$ et Ω_j^λ comme dans la Proposition 3.1.*

Soient β_j des formes fermées de type $(p-1, p-1)$ satisfaisant $\sum_{i,j} n_{i,j}\beta_j = \alpha_i$ pour chaque i (par exemple $\{j\} = \{0, ..., n\}$, $n_{i,i} = 2$, $n_{i,j} = 1$ si $i \neq j$, $\beta_i = \alpha_i$ si $i \neq 0$, $\beta_0 = -\sum_{i=1,n} \alpha_i$).

Alors :

(i) Le courant

$$G_Y^\lambda = \pi_* \left(\sum_j \beta_j G_j^\lambda \right)$$

est un courant à prolongement méromorphe, holomorphe en $\lambda = 0$; pour $\mathrm{R}e\lambda > 0$ il est représenté par une fonction qui est C^k on $X \times \{\mathrm{R}e\lambda > k\}$ et holomorphe en λ; on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda} G_Y^\lambda\right)_{\lambda=0} = \pi_* \left[\sum \beta_j \log ||s_j||^2 \right], \tag{9}$$

et ce courant est un courant de Green pour Y si le courant $\pi_*[\sum \beta_j c_1(\overline{\mathcal{O}(F_j)})]$ est C^∞ sur X;

(ii) Le courant

$$\Delta_Y^\lambda = \pi_* \left(\sum_j \beta_j {\Delta_j}^\lambda \right)$$

est un courant à prolongement méromorphe, holomorphe en $\lambda = 0$; pour $\mathrm{R}e\lambda > 2$ il est représenté par une forme de type $(1, 1)$ qui est C^k on $X \times \{\mathrm{R}e\lambda > k+2\}$ et holomorphe en λ; on a

$$({\Delta^\lambda}_Y)_{\lambda=0} = \delta_Y. \tag{10}$$

(iii) Le courant

$${\Omega^\lambda}_Y = \pi_* \left(\sum \beta_j {\Omega_j}^\lambda \right)$$

est un courant à prolongement méromorphe, holomorphe en $\lambda = 0$; pour $\mathrm{R}e\lambda > 0$ il est représenté par une forme de type $(1, 1)$ qui est C^k on $X \times \{\mathrm{R}e\lambda > k\}$ et holomorphe en λ; on a

$$\Omega_{\lambda=0}^\lambda = \pi_* \left[\sum \beta_j c_1(\overline{\mathcal{O}(F_j)}) \right]. \tag{11}$$

(iv)

$$dd^c G_Y^\lambda = \lambda(-\Delta_Y^\lambda + {\Omega_Y}^\lambda). \tag{12}$$

Preuve. Le fait que les courants soient C^k et qu'ils admettent un prolongement méromorphe résulte du Théorème 4.3 qui suit. Les relations (9)–(12) résultent par leurs analogues (4)-(8) et par (1) et (2). Les coefficients en λ du (12) donnent l'égalité:

$$dd^c\pi_*\left[\sum \beta_j log||s_j||^2\right] + \delta_Y = \pi_*\left[\sum \beta_j c_1(\overline{\mathcal{O}(F_j)})\right].$$

Donc le courant $\pi_*[\sum \beta_j log||s_j||^2)$ est un courant de Green si $\pi_*[\sum \beta_j c_1(\overline{\mathcal{O}(F_j)})]$ est une forme C^∞ sur X. □

Pour Y une sous-variété algébrique de codimension $p > 0$ de X on va noter $\mathcal{G}_Y(X)$, $\mathcal{D}_Y(X)$ et $\Omega_Y(X)$ l'ensemble des courants à prolongement méromorphe obtenus par le procédé de la Proposition 4.1 pour lesquels le courant $\Omega^\lambda_{\lambda=0} = \pi_*[\sum \beta_j c_1(\overline{\mathcal{O}(F_j)})]$ est lisse.

On dira pour simplifier dans la suite que les courants dans $\mathcal{G}_Y(X)$, $\mathcal{D}_Y(X)$ et $\Omega_Y(X)$ sont lisses pour R$e\lambda$ assez grand. En réalité, seul nous servira le fait que leurs dérivées jusqu'à un ordre fini sont continues.

Pour $Y = X$ on pose $\mathcal{G}_X(X) = \{[0]\}$, $\mathcal{D}_X(X) = \{[1]\}$ et $\Omega_X(X) = \{[1]\}$.

Définition 4.2 *Soit X une variété quasi-projective et $(Y_l)_{l=1,\dots,r}$ des sous-variétés fermées. On dit que les sous-variétés Y_l se coupent proprement si pour tout sous-ensemble I de $\{1, \dots, r\}$, $codim \bigcap_{i\in I} Y_i = \sum_{i\in I} codim Y_i$.*

Théorème 4.3 *(i) Soient X une variété quasi-projective lisse, Y une sous-variété algébrique de codimension $p > 0$ et $\pi : \tilde{X} \mapsto X$ un morphisme projectif, lisse au-dessus de $X - Y$, tels que $\pi^{-1}(Y) = E = \bigcup_{i=1,n} E_i$ soit un diviseur à croisements normaux. Soient $F = \sum n_i E_i$ un diviseur effectif de support $\pi^{-1}(Y)$ (i.e. $n_i > 0$ pour tout i), s la section canonique du fibré $\mathcal{O}(F)$, $||.||$ une métrique hermitienne sur ce fibré et α une forme l isse sur $\tilde{X}$.*

Alors le courant $\pi_*[||s||^{2\lambda}\cdot\alpha]$ est représenté pour R$e\lambda > 0$ *par une fonction qui est C^k sur $X \times \{\lambda|\mathrm{R}e\lambda > k\}$ et holomorphe en λ.*

(ii) Soient pour $l = 1, \dots, r$ des sous-variétés $Y_l \subset X$, des morphismes $\pi_l : \tilde{X}_l \to X$, des ensembles $E_l = \bigcup_i E_{il}$, des diviseurs $F_l = \sum n_{il} E_{il}$, des sections s_l et des formes lisses α_l qui vérifient pour chaque l les conditions de (i).

Alors la forme C^0 pour R$e\lambda_1, \dots,$ R$e\lambda_r > 0$

$$T_{(\lambda_i)} = \pi_{1*}(||s_1||^{2\lambda_1}\cdot\alpha_1)\bigwedge \dots \bigwedge \pi_{r*}(||s_r||^{2\lambda_r}\cdot\alpha_r)$$

définit un courant qui est à prolongement méromorphe.

Plus précisément, si φ est une forme test, la fonction $(\lambda_i) \to < T_{(\lambda_i)}, \varphi >$ a ses pôles contenus dans l'ensemble $\bigcup_{k,m}\{\sum_{l=1,r} a^k{}_l\lambda_l + m = 0\}$, pour m un entier positif et pour un nombre fini de vecteurs non-nuls $\{a^k\} = \{(a^k{}_l)_l\}$ dans $\mathbb{N}^r$ qui ne dépendent pas de φ.

(iii) Soient $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n > 0$. Pour $l = 1, ..., m + n$ soient $Y_l \subset X$ des sous-variétés algébriques de codimension e_l, un morphisme $\pi_l : \tilde{X}_l \to X$ de dimension relative d_l et $F_l,\ s_l,\ \alpha_l$ comme en (ii). On suppose de plus que les formes α_l sont de type (p_l, p_l) avec

$$p_l \leq e_l + d_l - 1 \tag{13}$$

et que les sous-variétés Y_l se coupent proprement.

Alors le courant:

$$U_{(\lambda_l)} = \prod_{l=1}^{m}(\pi_{l*}([||s_l||^{2\lambda_l}\alpha_l])) \bigwedge \prod_{l=m+1}^{m+n} (\partial\bar{\partial}\pi_{l*}([||s_l||^{2\lambda_l}\alpha_l]))$$

est holomorphe en $\lambda_1 = ... = \lambda_{m+n} = 0$.

Corollaire 4.4 *Soit X une variété quasi-projective, r un nombre naturel et $Y_l,\ l = 1, ..., r$ des sous-variétés de X se coupant proprement. Pour tout entier $l, 1 \leq r \leq r$, on désigne par W_l l'un des courants $G^{\lambda_l}_{Y_l},\ \Delta^{\lambda_l}_{Y_l}$ où $\Omega^{\lambda_l}_{Y_l}$. Alors le produit $\bigwedge_{l=1}^{r} W_l$ est holomorphe à l'origine.*

Remarque 4.5 Il n'est pas vrai que le produit d'un courant à un paramètre T_{λ_1} holomorphe en $\lambda_1 = 0$ avec un courant à un paramètre T_{λ_2} holomorphe en $\lambda_2 = 0$ soit holomorphe en $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, comme on le voit sur l'exemple suivant: $X = \mathbb{C},\ z$ la coordonnée complexe

$$T_{\lambda_1} = [|z|^{2\lambda_1}]$$

$$T_{\lambda_2} = [\lambda_2|z|^{2\lambda_2-2}dz\overline{dz}]$$

$$T_{\lambda_1} \cdot T_{\lambda_2} = \lambda_2|z|^{2\lambda_1+2\lambda_2-2}dz\overline{dz} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} \cdot ((\lambda_1+\lambda_2)|z|^{2\lambda_1+2\lambda_2-2}dz\overline{dz}).$$

Par la Proposition 3.1(i) T_{λ_1} est holomorphe en $\lambda_1 = 0$. Par la Proposition 3.1(ii) T_{λ_2} est holomorphe en $\lambda_2 = 0$, $(\lambda_1 + \lambda_2)|z|^{2\lambda_1+2\lambda_2-2}dz\overline{dz}$ est holomorphe en $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et sa valeur est $2i\pi\delta_{z=0}$. Donc $T_{\lambda_1} \cdot T_{\lambda_2}$ n'est pas holomorphe en $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Dans la preuve du Théorème 9.1 on obtiendra des relations entre des courants sur X par la spécialisation en $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ des relations entre des courants dépendant des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. On aura besoin de spécialiser dans un ordre différent les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dans les termes de ces relations. Le résultat du corollaire 4.4 est nécessaire pour éviter les contradictions du type suivant (avec les notations de l'exemple précédent):

$$((T_{\lambda_1} \cdot T_{\lambda_2})_{\lambda_1=0})_{\lambda_2=0} = (\lambda_2|z|^{2\lambda_2-2}dz\overline{dz})_{\lambda_2=0} = 2i\pi\delta_{z=0}$$

$$((T_{\lambda_1} \cdot T_{\lambda_2})_{\lambda_2=0})_{\lambda_1=0} = (0)_{\lambda_1=0} = 0.$$

5. Régularité des courants à un paramètre

On prouve dans cette section le Théorème 4.3(i).

On commence par prouver que $\pi_*[||s||^{2\lambda} \cdot \alpha]$ est représénté par une forme continue pour $\mathrm{R}e\lambda > 0$. Par le Lemme 2.1, le courant $\pi_*[||s||^{2\lambda} \cdot \alpha]$ est représéntée par la forme localement intégrable $\pi_*(||s||^{2\lambda} \cdot \alpha)$, continue sur $X - Y$. On va prouver qu'on peut prolonger cette forme par 0 sur Y en une forme continue sur X tout entier.

La question est locale; il suffit de la résoudre dans un voisinage d'un point $x \in Y$. Il suffit de traiter le cas où α est de type (n, n) sur $\tilde{X}$, pour $n = \mathrm{d}im\tilde{X} - \mathrm{d}imX$. Il faut prouver que autour du point x, la limite quand le point $y \in U - Y$ tend vers x de l'intégrale $\int_{\pi^{-1}(y)} ||s||^{2\lambda}\alpha$ est nulle. Comme la limite de $||s||^{2\lambda}$ est nulle, il suffit de prouver que si α est une forme de type (n, n) à coefficients continus, l'intégrale $\int_{\pi^{-1}(y)} \alpha$ est bornée quand y tend vers x. Ce résultat est prouvé dans le corollaire au Théorème 3 dans [Ba].

La formule:

$$d\pi_*(\alpha||s||^{2\lambda}) = \pi_* d(\alpha||s||^{2\lambda}) = \pi_*(d\alpha||s||^{2\lambda} + \alpha\lambda||s||^{2\lambda-2}d||s||^2)$$

et le resultat precedent prouvent que les derivées partielles de la forme $d\pi_*(||s||^{2\lambda} \cdot \alpha)$ sont continues sur X si $\mathrm{R}e\lambda > 1$, i.e. cette forme est de classe C^1 pour $\mathrm{R}e\lambda > 1$. Une recurence sur k et le même argument prouvent le résultat.

6. Prolongement méromorphe d'un produit de courants à un paramètre

On prouve dans cette section le Théorème 4.3(ii).

On considère (cf. [De],(3.2.11)c)) une variété quasi-projective lisse $\tilde{X}$ et des morphismes projectifs $q_l : \tilde{X} \to \tilde{X}_l$, $\pi : \tilde{X} \to X$ satisfaisant $\pi = \pi_l q_l$ pour tout l, tels que au-dessus de $X - \bigcup_{l=1,r} Y_l$ la variété $\tilde{X}$ est le produit des variétés $\tilde{X}_l$ sur X et que l'ensemble $\bigcup_l \pi^{-1}(Y_l)$ est un diviseur à croisements normaux, réunion de diviseurs lisses.

Le théorème de Fubini implique l'égalité suivante entre courants sur X:

$$\begin{aligned} &\pi_{1*}([||s_1||^{2\lambda_1} \cdot \alpha_1]) \bigwedge \dots \bigwedge \pi_{r*}([||s_r||^{2\lambda_r} \cdot \alpha_r) \\ &\quad = \pi_*[q_1{}^*(||s_1||^{2\lambda_1} \cdot \alpha_1]) \bigwedge \dots \bigwedge q_r{}^*(||s_r||^{2\lambda_r} \cdot \alpha_r)] \end{aligned} \tag{14}$$

pour $\mathrm{R}e\lambda_1, \dots, \mathrm{R}e\lambda_r$ assez grands. Par le Lemme 1.5, il suffit de démontrer que le courant

$$W_{(\lambda_i)} = [q_1{}^*(||s_1||^{2\lambda_1} \cdot \alpha_1]) \bigwedge \dots \bigwedge q_r{}^*(||s_r||^{2\lambda_r} \cdot \alpha_r)]$$

admet un prolongement méromorphe. On écrit localement sur $\tilde{X}$:

$$||q_l^{-1}(s_l)||^2 = f_l \bar{f}_l \rho_l,$$

$$f_l = c_l \prod_k z_k^{a_l^k}, \tag{15}$$

où f_l sont les équations locales pour $q_l^{-1}(F_l)$, ρ_l est une fonction strictement positive, z_k sont des coordonnées locales appropriées et c_l des fonctions analytiques non-nulles sur le voisinage. Au total:

$$W_{(\lambda_i)} = \prod_{k=1,p} (z_k \bar{z}_k)^{(\sum_l a_l{}^k \lambda_l)} \cdot \prod_{l=1,r} (|c_l| \cdot \rho_l)^{2\lambda_l} \cdot \alpha, \tag{16}$$

où α est une forme lisse.

La suite de l'argument est classique (voir [At]) et utilise les integrations par parties.

7. L'holomorphie à l'origine dans le cas d'intersection propre

Cette section est consacré à la preuve du Théorème 4.3(iii) et du corollaire 4.4. L'égalité:

$$\partial\bar{\partial}\pi_{l*}[||s_l||^{2\lambda_l}\alpha_l] = \pi_{l*}[\partial\bar{\partial}(||s_l||^{2\lambda_l}\alpha_l)] =$$

$$= \pi_{l*}[||s_l||^{2\lambda_l-4}(\lambda_l^2\partial\bar{\partial}||s_l||^2 \cdot \alpha_l + \lambda_l\partial||s_l||^2 \cdot \bar{\partial}\alpha_l - \lambda_l\bar{\partial}||s_l||^2 \cdot \partial\alpha_l + ||s_l||^4 \cdot \partial\bar{\partial}\alpha_l)]$$

implique que le courant $U_{(\lambda_l)}$ est combinaison linéaire de courants de la forme

$$\bigwedge_{l=1}^{m+n} (\pi_{l*}[||s_l||^{2\lambda_l-4}\beta_l]),$$

où β_l sont des formes lisses. Donc par le résultat de (ii), apliqué pour $\lambda_l - 2$ au lieu de λ_l, ses pôles dans le voisinage du point $(\lambda_l) = 0$ sont de la forme $\bigcup_b \{\sum_{l=1}^{m+n} b_l\lambda_l = 0\}$, où b désigne un nombre fini de vecteurs non-nuls. On suppose par l'absurde que le pôle au voisinage du point $(\lambda_l) = 0$ contient l'ensemble $\{\sum_{l=1}^{m+n} b_l\lambda_l = 0\}$. On va démontrer que cela conduit à une contradiction.

7.1. Réduction au cas $b_l \neq 0$ pour tout l

Soit I l'ensemble des entiers l, $1 \leq l \leq m+n$ pour lesquels $b_l \neq 0$. On désigne pour simplicité par W_l les formes $\pi_{l*}(||s_l||^{2\lambda_l}\alpha_l)$ pour $l = 1, ..., m$ et $\partial\bar{\partial}\pi_{l*}(||s_l||^{2\lambda_l}\alpha_l)$ pour $l = m+1, ..., m+n$.

On considère une forme test φ pour laquelle le pôle de la fonction méromorphe $(U_{(\lambda_l)}, \varphi)$ contient l'ensemble $\{\sum_{l=1}^{m+n} b_l\lambda_l = 0\}$. On choisit des nombres complexes λ_l^0 pour $l \notin I$, verifiant $\mathrm{R}e\lambda_l^0 >> 0$ et tels que l'ensemble $L = \{\lambda_l = \lambda_l^0,\ l \in I\} \simeq \mathbb{C}^I$ ne soit pas contenu dans le pôle de $U_{(\lambda_l)}$. Il résulte que la fonction méromorphe $(U_{(\lambda_l)}, \varphi)$ se restreint à une fonction méromorphe sur L, dont le pôle contient l'ensemble $\{\sum_{l\in I} b_l\lambda_l = 0\}$. Par le Théorème 4.3(i), sur L

chaqune des formes W_l est lisse pour R$e\lambda$ assez grand. On peut écrire donc sur L:

$$(U_{(\lambda_l)}, \varphi) = \left(\bigwedge_{l=1}^{m+n}[W_l], \varphi\right) = \left(\bigwedge_{l\in I}[W_l],\ \bigwedge_{l\notin I} W_l \bigwedge \varphi\right).$$

Comme la forme $\bigwedge_{l\notin I} W_l \bigwedge \varphi$ est lisse, il résulte que le courant $\bigwedge_{l\in I}[W_l]$ a un pôle à l'origine qui contient l'ensemble $\{\sum_{l\in I} b_l\lambda_l = 0\}$.

7.2. *Réduction au cas $m > 0$*

Pour φ une forme test, on a:

$$\left(\bigwedge_{l=1}^{n}(\partial\bar{\partial}\pi_{l*}[||s_l||^{2\lambda_l}\alpha_l]), \varphi\right)$$
$$= \left(\pi_{1*}[||s_1||^{2\lambda_1}\alpha_1] \bigwedge \bigwedge_{l=2}^{n} \partial\bar{\partial}\pi_{l*}[||s_l||^{2\lambda_l}\alpha_l], \partial\bar{\partial}\varphi\right).$$

Si l'ensemble $\{\sum b_l\lambda_l = 0\}$ est un pôle pour le courant $\bigwedge_{l=1}^{n}(\partial\bar{\partial}\pi_{l*}[||s_l||^{2\lambda_l}\alpha_l])$ appliqué à la forme φ, il est un pôle pour le courant

$$\left\{\pi_{1*}[|s_1|^{2\lambda_1}\alpha_1] \bigwedge \bigwedge_{l=2}^{n} \partial\bar{\partial}\pi_{l*}[||s_l||^{2\lambda_l}\alpha_l]\right\}$$

appliqué à la forme $\partial\bar{\partial}\varphi$.

On a réduit le cas $m = 0, n$ au cas $m = 1, n-1$.

7.3. *Les pôles possibles de $U_{(\lambda_l)}$*

On considère comme au section 6 une variété quasi-projective lisse $\tilde{X}$ et des morphismes projectifs $q_l : \tilde{X} \to \tilde{X}_l,\ \pi : \tilde{X} \to X$ satisfaisant $\pi = \pi_l q_l$ pour tout l, tels que au-dessus de $X - \bigcup_{l=1,r} Y_l$ la variété $\tilde{X}$ est le produit des variétés $\tilde{X}_l$ sur X et que $\bigcup_l \pi^{-1}(Y_l)$ soit un diviseur à croisements normaux, cum spune Gabriela, réunion de diviseurs lisses. On considère les équations locales (15). On obtient $U_{(\lambda_l)} = \pi_* W_{(\lambda_l)}$, où:

$$W_{(\lambda_l)} = \bigwedge_{l=1}^{m}\left(\prod_k (z_k\bar{z}_k)^{\sum a_l^k\lambda_l}(c_l\rho_l\bar{\rho}_l)^{\lambda_l} q_l^*\alpha_l\right)$$
$$\bigwedge_{l=m+1}^{m+n}(\partial\bar{\partial}\left(\prod_k (z_k\bar{z}_k)^{\sum a_l^k\lambda_l}(c_l\rho_l\bar{\rho}_l)^{\lambda_l} q_l^*\alpha_l\right) \qquad (17)$$

Le courant $W_{(\lambda_l)}$ est combinaison linéaire des courants représentés par des formes de type

$$W_J = \prod_k \left((z_k \bar{z}_k)^{\sum_l a_l^k \lambda_l} \cdot \frac{1}{z_k^n} \right) \cdot \sum_{J \subset \{k\}} \left(\bigwedge_{k \in J} \frac{\overline{dz_k}}{\bar{z}_k} \bigwedge \beta_J \right), \tag{18}$$

où β_J sont des formes lisses sur $X \times \mathbb{C}^n$ dont les restrictions à $\{x\} \times \mathbb{C}^n$ sont des fonctions holomorphes pour tout $x \in X$.

Par le corollaire 1.7, on peut neglijer les formes β_J dans l'etude des pôles du courant induit par la forme W_J. Le lemme suivant précise les pôles au voisinage de l'origine du courant induit par une forme de ce type ($\beta_J = 1$), donc, par le Lemme 1.5, contrôle les pôles de son image directe par π.

Lemme 7.1 *Soient M, N, P des ensembles finis disjoints, n un nombre naturel et (z_k) les coordonnées de $\mathbb{C}^{M \cup N \cup P}$. Soient (μ_k) les coordonnées de l'espace des paramètres $\mathbb{C}^{M \cup N \cup P}$. Alors le courant représenté par la forme:*

$$W_{(\mu_k)} = \prod_{k \in P} \mu_k \cdot \prod_{k \in M \cup N \cup P} \left((z_k \bar{z}_k)^{\mu_k} \cdot \frac{1}{z_k^n} \right) \cdot \bigwedge_{k \in N \cup P} \frac{\overline{dz_k}}{\bar{z}_k} \bigwedge \prod_{k \in N} \bar{z}_k \cdot \beta$$

est holomorphe en $(\mu_k)_{k \in M \cup N \cup P} = 0$.

Preuve. On se reduit facilement au cas où l'ensemble $M \cup N \cup P$ contient un seul élément. L'énoncé dans un tel cas résulte par un calcul direct.

7.4. Conclusion

La relation (18), le corollaire 1.7 et le Lemme 7.1 impliquent que les pôles à l'origine de $U_{(\lambda_l)}$ sont des diviseurs $\{\sum a_l^k \lambda_l = 0\}$, pour certaines des vecteurs $(a_k^l)_l$ apparaissant dans la formule (18). On note K l'ensemble de ces vecteurs et on suppose qu'il est non vide. On trouvera une contradiction.

Soit φ une forme test sur X telle que la fonction méromorphe $(\pi_*[W_J], \varphi)$ a tous les diviseurs $\{\sum a_l^k \lambda_l = 0\}$, $k \in K$ comme pôles a l'origine. On va démontrer qu'on peut écrire

$$\pi^* \varphi = \left(\prod_{k \in K} \bar{z}_k \right) \psi, \tag{19}$$

pour une forme ψ lisse sur $\tilde{X}$. Puisque:

$$(\pi_*[W_J], \varphi) = ([W_J], \pi^* \varphi) = \left([W_J \cdot \prod_{k \in K} \bar{z}_k], \psi \right)$$

le Lemme 7.1 appliqué à $\mu_k = \sum a_l^k \lambda_l$, $M = K - J$, $N = J - K$, $P = J \bigcap K$ implique que l'ensemble $\{\sum a_l^k \lambda_l = 0\}$ n'est pas une composante du pôle à l'origine du courant $[W_J \cdot \prod_{k \in K} \bar{z}_k]$, pour tout $k \in K$, contradiction.

7.5. Preuve de l'égalité (19)

On rappelle que e_l est la codimension de la sous-variété Y_l dans X, d_l est la dimension relative du morphisme $\pi_l : \tilde{X}_l \to X_l$, α_l est une forme de type (p_l, p_l) et que e_l, d_l, p_l satisfont la relation (13). Le courant $U_{(\lambda_l)}$ est de type (p, p) avec:

$$p = \sum_{l=1}^{m}(p_l - d_l) + \sum_{l=m+1}^{m+n}(p_l - d_l + 1) =$$

$$= -m + \sum_{l=1}^{m+n}(p_l - d_l + 1) \leq -m + \sum_{l=1}^{m+n} e_l$$

Puisque $(U_{(\lambda_l)}, \varphi) \neq 0$, il résulte que la forme test φ est de type (q, q) avec

$$q \geq \mathrm{d}imX + m - \sum_{l=1}^{m+n} e_l > \mathrm{d}imX - \sum_{l=1}^{m+n} e_l.$$

($m > 0$ par la reduction 7.2). Soit $k_0 \in K$. Puisque $a_l^{k_0} = b_l \neq 0$ pour tout l (la reduction 7.1), la variable z_{k_0} apparaît avec un coefficient non-nul dans la décomposition (15) de $q_l^{-1}(s_l)$ pour tout l. Donc

$$\pi(\{z_{k_0} = 0\}) \subset \bigcap_{l=1}^{m+n} \pi_l(\{s_l = 0\}) \subset \bigcap_{l=1}^{m+n} Y_l.$$

Soit $x \in U$ tel que $z_{k_0}(x) = 0$ et soit $y = \pi(x)$. Dans un voisinage de y on peut écrire

$$\varphi = \sum \psi_i \eta_i, \tag{20}$$

avec ψ une forme C^∞ de type $(q, 0)$ et η_i une forme antiholomorphe.

Chacune des formes η_i a le degré $q > dimX - \sum_{l=1}^{m+n} e_l$, donc s'annule sur $\bigcap_{l=1}^{m+n} Y_l$ qui a la codimension $\sum_{l=1}^{m+n} e_l$ dans X (elle s'annule sur la partie lisse, et par densité sur $\bigcap_{l=1}^{m+n} Y_l$ tout entier).

On en déduit $\pi^*\eta_i = 0$ sur $\{z_{k_0} = 0\}$ donc $\pi^*\eta_i = \overline{z_{k_0}}\eta_i'$, avec η_i' une forme anti-holomorphe. Cela est vrai pour tout $k_0 \in K$; l'anneau local des fonctions anti-holomorphes est factoriel, donc on peut écrire $\pi^*\eta_i = \prod_{k \in K} \bar{z}_k \eta_i''$, pour η_i'' une fonction anti-holomorphe. On déduit de (20) la relation (19). D'où la conclusion.

Remarque. La preuve du Théorème 4.3(iii) est inspirée de la preuve du théorème 2 dans [PT].

7.6. Preuve du Corollaire 4.4

Soit K l'ensemble des l tels que $W_l = \Delta_{Y_l}^{\lambda_l}$. Le théoreme et la relation (12) prouvent que le courant

$$\prod_{l \in K} \lambda_l \cdot \bigwedge_{l=1}^{r} W_l$$

est holomorphe en $(\lambda_l) = 0$.

Mais pour $l_0 \in K$ et $\mathrm{R}e\lambda_l \gg 0$ pour tout $l \neq l_0$, la relation (12) et le Lemme 1.4 appliqué pour la forme lisse $\bigwedge_{l \neq l_0} W_l$ implique:

$$\left(\bigwedge_{l=1}^{r} W_l \right)_{\lambda_l = 0} = \bigwedge_{l \neq l_0} W_l \cdot \delta_{Y_{l_0}}$$

Il résulte que l'ensemble $\{\lambda_{l_0} = 0\}$ n'est pas un pôle pour $\bigwedge_{l=1}^{r} W_l$.

8. Propriétés des courants à un paramètre

Proposition 8.1 *Soit X une variété quasi-projective lisse et Y une sous-variété algébrique de X. Alors tout courant de Green pour Y est équivalent à un courant obtenu par le procédé de la Proposition 4.1(i).*

Preuve. On suit la preuve du Théoreme 1.2.4 de [GS].

Remarque 8.2 Une autre solution au problème de trouver dans toute classe de courants de Green un courant qui soit la dérivée en $\lambda = 0$ d'un courant à prolongement méromorphe, lisse pour $\mathrm{R}e\lambda$ assez grand, consiste à écrire le courant $\pi_*[\sum \beta_j log||s_j||^2 + \beta]$ comme la dérivée en $\lambda = 0$ du courant

$$\pi_* \left[\sum \beta_j ||s_j||^{2\lambda} + \lambda \beta ||s||^{2\lambda} \right],$$

où s est la section canonique d'un fibré métrisé $\mathcal{O}(F)$, avec F un diviseur effectif de support $\pi^{-1}(Y)$.

Proposition 8.3 *Soit $f : X' \to X$ un morphisme entre variétés quasi-projectives lisses et Y une sous-variété de X de codimension p telle que $f^{-1}(Y)$ soit de codimension p. Soient $G^\lambda \in \mathcal{G}_Y(X)$, $\Delta^\lambda \in \mathcal{D}_Y(X)$ et $\Omega^\lambda \in \Omega_Y(X)$.*

Alors $f^*G^\lambda \in \mathcal{G}_{f^{-1}(Y)}(X')$, $f^*\Delta^\lambda \in \mathcal{D}_{f^{-1}(Y)}(X')$, $f^*\Omega^\lambda \in \Omega_{f^{-1}(Y)}(X')$. En plus:

(i)
$$\left[\frac{\partial}{\partial \lambda} f^* G^\lambda \right]_{\lambda=0} = \left[f^* \left(\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} G^\lambda \right)_{\lambda=0} \right) \right] \tag{21}$$

(ii)
$$[f^* \Delta^\lambda]_{\lambda=0} = \delta_{f^{-1}(Y)} \tag{22}$$

(iii)
$$[f^* \Omega^\lambda]_{\lambda=0} = [f^*(\Omega^\lambda_{\lambda=0})]. \tag{23}$$

L'opération $f^*((\frac{\partial}{\partial\lambda}G^\lambda)_{\lambda=0})$ de (i) est l'image inverse des courants de Green de type logarithmique dans [GS].

Preuve. On se place dans les notations de la Proposition 4.1. On considère (cf. [De],(3.2.11)c)) un diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}' & \xrightarrow{f'} & \tilde{X} \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array} \tag{24}$$

cartesien sur $X - Y$, avec $\pi : \tilde{X} \to X$ un morphisme comme dans la définition 2.3, π' un morphisme projectif, $\tilde{X}'$ une variété lisse, $(f\pi')^{-1}(Y)$ un diviseur à croisements normaux dans $\tilde{X}'$.

Pour prouver l'appartenance aux classes $\mathcal{G}_Y(X)$, $\mathcal{D}_Y(X)$ et $\Omega_Y(X)$, il suffit de prouver que $(f^*\Omega^\lambda)_{\lambda=0}$ est une forme lisse et de démontrer les égalités:

$$f^*G^\lambda = \pi'_*f'^*\left(\sum_j \beta_j||s_j||^{2\lambda}\right) \tag{25}$$

$$f^*\Delta^\lambda = \pi'_*f'^*\left(\sum_j \beta_j \frac{1}{2i\pi}\cdot\lambda\cdot||s_j||^{2\lambda-4}\partial||s_j||^2\overline{\partial}||s_j||^2\right) \tag{26}$$

$$f^*\Omega^\lambda = \pi'_*f'^*\left(\sum_j \beta_j||s_j||^{2\lambda}c_1(\overline{\mathcal{O}(F_j)})\right) \tag{27}$$

pour R$e\lambda$ assez grand, et:

$$\pi'_*\left[\sum_j f'^*(\beta_j)\delta_{F_j}\right] = \delta_{f^{-1}(Y)}. \tag{28}$$

Les égalités (25)–(27) sont vraies sur $X' - f^{-1}(Y)$, car ici le morphisme π est lisse et le diagramme (24) est cartésien. Elles sont aussi vraies sur X' tout entier car les termes de gauche sont des formes lisses comme préimages des formes lisses et les membres de droite sont des formes lisses par le Théorème 4.3(i).

Par (25),(4),(1) et(2):

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}f^*G^\lambda\right)_{\lambda=0} = \pi'_*\left[\sum_j f'^*(\beta_j)\mathrm{l}og||f'^{-1}(s_j)||^2\right] \tag{29}$$

D'une manière analogue on obtient:

$$(f'^{*}\Delta^{\lambda})_{\lambda=0}=\pi'_{*}\left[\sum_{j}f'^{*}(\beta_{j})\delta_{f^{-1}(F_{j})}\right] \tag{30}$$

$$(f^{*}\Omega^{\lambda})_{\lambda=0}=\pi'_{*}\left[\sum_{j}f'^{*}(\beta_{j}c_{1}(\overline{\mathcal{O}(F_{j})}))\right] \tag{31}$$

Par (9) et (3), appliqués à $\alpha_j=\beta_j$ et $\beta=0$

$$\begin{aligned}f^{*}\left((\frac{\partial}{\partial\lambda}G^{\lambda})_{\lambda=0}\right)&=f^{*}\left(\pi_{*}\left(\sum_{j}\beta_{j}\mathrm{l}og||s_{j}||^{2}\right)\right)\\&=\pi'_{*}\left[\sum_{j}f'^{*}(\beta_{j})\mathrm{l}og||f'^{*}(s_{j})||^{2}\right]\end{aligned} \tag{32}$$

qui prouve avec (29) la relation (21). L'équation (12) implique

$$dd^{c}f^{*}G^{\lambda}=f^{*}(dd^{c}G^{\lambda})=f^{*}(\lambda(-\Delta^{\lambda}+\Omega^{\lambda})).$$

Les coefficients de λ dans cette égalité donnent:

$$dd^{c}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}f^{*}G^{\lambda}\right)_{\lambda=0}=-(f^{*}\Delta^{\lambda})_{\lambda=0}+(f^{*}\Omega^{\lambda})_{\lambda=0} \tag{33}$$

Le Théorème 2.1.4. de [GS] prouve, dans nos notations:

$$dd^{c}f^{*}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}G^{\lambda}\right)_{\lambda=0}=-\delta_{f^{-1}(Y)}+f^{*}\left(\pi_{*}\left(\sum_{j}\beta_{j}c_{1}(\overline{\mathcal{O}(F_{j})})\right)\right) \tag{34}$$

Les relations (21),(33),(34),(30),(31) donnent l'égalité de courants sur X'

$$\begin{aligned}-\pi'_{*}\left[\sum_{j}f'^{*}(\beta_{j})\delta_{f^{-1}(F_{j})}\right]&+\pi'_{*}\left[\sum_{j}f'^{*}(\beta_{j}c_{1}(\overline{\mathcal{O}(F_{j})}))\right]\\&=-\delta_{f^{-1}(Y)}+f^{*}\left(\pi_{*}\left(\sum_{j}\beta_{j}c_{1}(\overline{\mathcal{O}(F_{j})})\right)\right),\end{aligned} \tag{35}$$

qu'on peut écrire

$$\pi'_*\left[\sum_j f'^*(\beta_j c_1(\overline{\mathcal{O}(F_j)}))\right] - f^*\left(\pi_*\left(\sum_j \beta_j c_1(\overline{\mathcal{O}(F_j)})\right)\right)$$
$$= \pi'_*\left[\sum_j f'^*(\beta_j)\delta_{f^{-1}(F_j)}\right] - \delta_{f^{-1}(Y)}.$$

Le terme de gauche de cette égalité est un courant représenté par une forme localement intégrable, le terme de droite est un courant de support contenu dans $f^{-1}(Y)$, donc ils sont tous les deux nuls. Donc

$$\pi'_*\left[\sum_j f'^*(\beta_j)\delta_{f^{-1}(F_j)}\right] = \delta_{f^{-1}(Y)} \tag{36}$$

qui prouve (28) et

$$\pi'_*\left[\sum_j f'^*(\beta_j c_1(\overline{\mathcal{O}(F_j)}))\right] = f^*\left(\pi_*\left(\sum_j \beta_j c_1(\overline{\mathcal{O}(F_j)})\right)\right) \tag{37}$$

Les relations (28) et (30) prouvent la relation (22).

Par (11):

$$f^*((\Omega^\lambda)_{\lambda=0}) = f^*\left(\pi_*\left(\sum_j \beta_j c_1(\overline{\mathcal{O}(F_j)})\right)\right) \tag{38}$$

Les relations (37),(31) et (38) prouvent la relation (23).

Enfin, la forme $\Omega^\lambda_{\lambda=0}$ est lisse par hypothèse, donc la forme $(f^*\Omega^\lambda)_{\lambda=0} \overset{(23)}{=} f^*(\Omega^\lambda_{\lambda=0})$ est lisse. □

Corollaire 8.4 *Soient X une variété complexe lisse et quasi-projective et Y et Z deux sous-variétés de X qui se coupent proprement. Soient $G_Y^{\lambda_1} \in \mathcal{G}_Y(X)$, $\Delta_Y^{\lambda_1} \in \mathcal{D}_Y(X)$ et $\Omega_Y^{\lambda_1} \in \Omega_Y(X)$. Posons $g_Y = (\frac{d}{d\lambda_1}G_Y^{\lambda_1})_{\lambda_1=0}$ et $\omega_Y = (\Omega_Y^{\lambda_1})_{\lambda_1=0}$. Alors les courants $\frac{d}{d\lambda_1}G_Y^{\lambda_1}\cdot\delta_Z$, $\Delta^{\lambda_1}\cdot\delta_Z$ et $\Omega_Y^{\lambda_1}\cdot\delta_Z$ definis pout $\mathrm{R}e >> 0$ par le produit d'une forme lisse avec le courant δ_Z, admettent un prolongement méromorphe, sont holomorphes en $\lambda_1 = 0$ et:*

(i)
$$\left(\frac{d}{d\lambda_1}G_Y^{\lambda_1}\cdot\delta_Z\right)_{\lambda_1=0} = g_Y\cdot\delta_Z; \tag{39}$$

(ii)
$$(\Delta^{\lambda_1}\cdot\delta_Z)_{\lambda_1=0} = \delta_{[Y]\cdot[Z]}; \tag{40}$$

(iii)
$$(\Omega_Y^{\lambda_1}\cdot\delta_Z)_{\lambda_1=0} = \omega_Y\cdot\delta_Z. \tag{41}$$

Preuve. Soit $\pi : \tilde{Z} \to Z$ une résolution des singularités de Z et $p : \tilde{Z} \xrightarrow{\pi} Z \subset X$ le morphisme induit. De (21) et (2) on obtinet la relation (39):

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1} G^{\lambda_1} \cdot \delta_Z\right)_{\lambda_1=0} = \left(p_*\left[p^*\frac{\partial}{\partial\lambda_1} G^{\lambda_1}\right]\right)_{\lambda_1=0} =$$

$$= p_*\left[p^*\frac{\partial}{\partial\lambda_1} G^{\lambda_1}\right]_{\lambda_1=0} = p_*\left[p^*\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1} G^{\lambda_1}\right)_{\lambda_1=0}\right] = g_Y \cdot \delta_Z\ ;$$

Les relations (40) et (41) s'obtiennent de la même manière. □

Proposition 8.5 *Soient X une variété complexe lisse et quasi-projective, Y et Z deux sous-variétés de X qui se coupent proprement. Soient $G_Y^{\lambda_1} \in \mathcal{G}_Y(X)$, $G_Z^{\lambda_2} \in \mathcal{G}_Z(X)$, $\Delta_Y^{\lambda_1} \in \mathcal{D}_Y(X)$, $\Delta_Z^{\lambda_2} \in \mathcal{D}_Z(X)$ et $\Omega_Y^{\lambda_1} \in \Omega_Y(X)$. Posons $g_Y = (\frac{d}{d\lambda_1} G_Y^{\lambda_1})_{\lambda_1=0}$, $g_Z = (\frac{d}{d\lambda_2} G_Z^{\lambda_2})_{\lambda_2=0}$ et $\omega_Y = (\Omega_Y^{\lambda_1})_{\lambda_1=0}$. Alors les courants $[\frac{d}{d\lambda_1} G_Y^{\lambda_1} \cdot \Delta_Z^{\lambda_2}]$, $[\Delta_Y^{\lambda_1} \cdot \Delta_Z^{\lambda_2}]$, $[\Omega_Y^{\lambda_1} \cdot \Delta_Z^{\lambda_2}]$ et $[\Omega_Y^{\lambda_1} \cdot G_Z^{\lambda_2}]$ admettent des prolongements méromorphes, holomorphes en $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ et on a:*

(i)
$$\left(\frac{d}{d\lambda_1} G_Y^{\lambda_1} \cdot \Delta_Z^{\lambda_2}\right)_{\lambda_1=\lambda_2=0} = g_Y \cdot \delta_Z. \tag{42}$$

(ii)
$$(\Delta_Y^{\lambda_1} \cdot \Delta_Z^{\lambda_2})_{\lambda_1=\lambda_2=0} = \delta_{[Y]\cdot[Z]}. \tag{43}$$

(iii)
$$(\omega_Y^{\lambda_1} \cdot \Delta_Z^{\lambda_2})_{\lambda_1=\lambda_2=0} = \omega_Y \cdot \delta_Z. \tag{44}$$

(iv)
$$(\Omega_Y^{\lambda_1} \cdot G_Z^{\lambda_2})_{\lambda_1=\lambda_2=0} = \omega_Y \cdot g_Z. \tag{45}$$

(v) En particulier on peut définir $g_Y * g_Z := g_Y \cdot \delta_Z + g_Z \cdot \omega_Y$ comme

$$g_Y * g_Z = \left(\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1} G_Y^{\lambda_1}\right) \cdot \Delta_Z^{\lambda_2} + \left(\frac{\partial}{\partial\lambda_2} G_Z^{\lambda_2}\right) \cdot \Omega_Y^{\lambda_1}\right)_{\lambda_1=\lambda_2=0}. \tag{46}$$

Preuve. Le fait que les courants admettent un prolongement méromorphe resulte du Théorème 4.3(ii); le fait qu'ils soient holomorphes à l'origine résulte du Théorème 4.3 (iii).

On prouve seulement l'égalité (42). De (10) et 1.4 appliqué à la forme lisse $\frac{\partial}{\partial\lambda_1} G_Y^{\lambda_1}$ on obtient:

$$\left(\frac{d}{d\lambda_1} G_Y^{\lambda_1} \cdot \Delta_Z^{\lambda_2}\right)_{\lambda_2=0} = \frac{d}{d\lambda_1} G_Y^{\lambda_1} \cdot \delta_Z$$

pour $\mathrm{R}e\lambda_1 \gg 0$. Il resulte de (39):

$$\left(\frac{d}{d\lambda_1} G_Y^{\lambda_1} \cdot \Delta_Z^{\lambda_2}\right)_{\lambda_1=\lambda_2=0} = \left(\left(\frac{d}{d\lambda_1} G_Y^{\lambda_1} \cdot \Delta_Z^{\lambda_2}\right)_{\lambda_2=0}\right)_{\lambda_1=0}$$
$$= \left(\frac{d}{d\lambda_1} G_Y^{\lambda_1} \cdot \delta_Z\right)_{\lambda_1=0} = g_Y \cdot \delta_Z$$

La relation (46) résulte par sommation de (42)-(45).

Remarque 8.6 Le même énoncé est vrai si on remplace λ_1 et λ_2 avec le même paramètre complexe λ. Car pour une fonction $H(\lambda_1, \lambda_2)$ holomorphe en $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ on a:

$$H(0,0) = (H_{\lambda_1=\lambda_2=\lambda})_{\lambda=0}.$$

9. Application au $*$-produit des courants de Green

Comme applications des résultats précédents, on obtient une nouvelle preuve du théorème 2.2.2. de [GS].

Théorème 9.1 *([GS])Soit X une variété quasi-projective lisse et Y, Z, W des sous-variétés qui se coupent proprement. Soient $g_Y \in LG_{X,Y}$, $g_Z \in LG_{X,Z}$, $g_W \in LG_{X,W}$ des courants de Green pour Y, Z et W et ω_Y, ω_Z et ω_W les formes fermées lisses qui leur corespondent. Alors les courants $g_Y \cdot \delta_{[Z]\cdot[W]} + \omega_Y \cdot g_Z \cdot \delta_W$ et $\delta_{[Y]\cdot[W]} \cdot g_Z + g_Y \cdot \omega_Z \cdot \delta_W$ sont équivalents sur X.*

Preuve. On considère des courants à un paramètre $(G^{\lambda_1}, \Delta^{\lambda_1}, \Omega_1^{\lambda})$, $(G^{\lambda_2}, \Delta^{\lambda_2}, \Omega_2^{\lambda})$, $(G^{\lambda_3}, \Delta^{\lambda_3}, \Omega_3^{\lambda})$ prolongeant $(g_Y, \delta_Y, \omega_Y)$, $(g_Z, \delta_Z, \omega_Z)$, $(g_W, \delta_W, \omega_W)$ et satisfaisant la relation (12). On verifie:

$$\partial\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1} G^{\lambda_1} \cdot \bar\partial\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_2} G^{\lambda_2}\right) \cdot \Delta^{\lambda_3}\right) + \bar\partial\left(\partial\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1} G^{\lambda_1}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial\lambda_2} G^{\lambda_2} \cdot \Delta^{\lambda_3}\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial\lambda_1} G^{\lambda_1}\left(-\lambda_2 \frac{\partial}{\partial\lambda_2}\Delta^{\lambda_2}\right)\Delta^{\lambda_3} - \frac{\partial}{\partial\lambda_1} G^{\lambda_1} \cdot \Delta^{\lambda_2}\Delta^{\lambda_3}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\lambda_1} G^{\lambda_1} \cdot \lambda_2 \frac{\partial}{\partial\lambda_2}\Omega_2^{\lambda} \cdot \Delta^{\lambda_3} + \frac{\partial}{\partial\lambda_1} G^{\lambda_1} \cdot \Omega_2^{\lambda}\Delta^{\lambda_3} +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\lambda_1} G^{\lambda_1} \cdot \bar\partial\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_2} G^{\lambda_2}\right)\partial\Delta^{\lambda_3}$$
$$+ \lambda_1 \frac{\partial}{\partial\lambda_1}\Delta^{\lambda_1} \cdot \frac{\partial}{\partial\lambda_2} G^{\lambda_2} \cdot \Delta^{\lambda_3} + \Delta^{\lambda_1}\frac{\partial}{\partial\lambda_2} G^{\lambda_2} \cdot \Delta^{\lambda_3} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial\lambda_1}\Omega_1^{\lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial\lambda_2}\Delta^{\lambda_3} -$$
$$- \Omega_1^{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda_2} G^{\lambda_2} \cdot \Delta^{\lambda_3} - \partial\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1} G^{\lambda_1}\right)\frac{\partial}{\partial\lambda_2} G^{\lambda_2} \cdot \bar\partial\Delta^{\lambda_3} \tag{47}$$

Par le même procédé que dans la preuve de la Proposition 8.5, on démontre que le terme de droite dans (47) est holomorphe en $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et a pour valeur en ce point le courant:

$$g_Y \cdot \delta_{[Z]\cdot[W]} + \omega_Y \cdot g_Z \cdot \delta_W - \delta_{[Y]\cdot[W]} \cdot g_Z - g_Y \cdot \omega_Z \cdot \delta_W.$$

Par le Théorème 4.3(ii) il existe un polynôme $P = P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ tel que les courants dépendant des paramètres $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$

$$P \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} G^{\lambda_1} \cdot \bar{\partial} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_2} G^{\lambda_2} \right) \cdot \Delta^{\lambda_3} \right)$$

et

$$P \cdot \left(\partial \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} G^{\lambda_1} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_2} G^{\lambda_2} \cdot \Delta^{\lambda_3} \right)$$

soient holomorphes en $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Soit Q le monôme minimal de P pour l'ordre lexicographique des variables $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et T_1, T_2 les coefficients de Q dans:

$$P \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} G^{\lambda_1} \cdot \bar{\partial} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_2} G^{\lambda_2} \right) \cdot \Delta^{\lambda_3} \right)$$

et

$$P \cdot \left(\partial \left(\frac{\partial}{\partial \lambda_1} G^{\lambda_1} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_2} G^{\lambda_2} \cdot \Delta^{\lambda_3} \right).$$

Si on multiplie l'égalité (47) par le polynôme P et si on prend les coefficients du monôme Q, on obtient l'égalité

$$\partial T_1 + \bar{\partial} T_2 = g_Y \cdot \delta_{[Z]\cdot[W]} + \omega_Y \cdot g_Z \cdot \delta_W - \delta_{[Y]\cdot[W]} \cdot g_Z - g_Y \cdot \omega_Z \cdot \delta_W$$

qui prouve l'énoncé. □

Si l'on écrit $W = X$ dans le Théorème 9.1 on obtient

$$g_Y \cdot \delta_Z + \omega_Y \cdot \delta_Z \sim \delta_Y \cdot g_Z + g_Y \cdot \omega_Z,$$

ce qui prouve la commutativité du $*$-produit. On obtient alors l'associativité du $*$-produit comme dans [BGS]:

$$g_Y * (g_Z * g_W) \sim g_Y * (g_W * g_Z) = g_Y \cdot \delta_{[Z]\cdot[W]} + \omega_Y (g_W * g_Z) =$$

$$= g_Y \cdot \delta_{[Z]\cdot[W]} + \omega_Y g_W \delta_Z + \omega_Y \omega_W g_Z \sim g_W \delta_{[Y]\cdot[Z]} + \omega_W g_Y \delta_Z + \omega_W \omega_Y g_Z =$$

$$= g_W \delta_{[Y]\cdot[Z]} + \omega_W (g_Y * g_Z) = g_W * (g_Y * g_Z) \sim (g_Y * g_Z) * g_W$$

(on a appliqué successivement la commutativité du $*$-produit, la définition du $*$-produit, le Théorème 9.1, la définition du $*$-produit, la commutativité du $*$-produit).

References

[At] M.F. Atiyah: Resolution of singularities and division of distributions. Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970)

[Ba] D. Barlet: Majoration du volume des fibres génériques et forme géométrique du théorème d'aplatissement. L.N.M. **822** (1980)

[BGY] C.A. Berenstein, R. Gay, A. Yger: Analytic continuation of currents and division problems. Forum.Math **1** (1989)

[BY] C.A. Berenstein, A. Yger: Green currents and analytic continuation. Preprint 1995

[BGS] J.B. Bost, H. Gillet, C. Soulé: Heights of projective varieties. Journal A.M.S. **7** (1994)

[Bu] J.I. Burgos: Green forms and their product. Duke. Math. J. **75** (1994)

[De] P. Deligne: Théorie de Hodge II. Publ. Math. I.H.E.S. **40** (1972)

[GS] H. Gillet, C.Soulé: Arithmetic intersection theory. Publ. Math (IHES) **72** (1990)

[Gr] A. Grothendieck: Sur certains espaces de fonctions holomorphes. J. Reine Angew. Math. **192** (1953)

[La] S. Lang: Real analysis. Adisson-Wesley 1973

[SABK] C. Soulé, D. Abramovich, J-F. Burnol, J. Kramer: Lectures on Arakelov geometry. Cambridge Studies in Advanced Mathematics (1992)

[Sc] L. Schwartz: Théorie des distributions. Hermann 1966

[PT] M. Passare, A. Tsikh: Defining the residue current of a complete intersection. M.P.I. preprint 1994

[Y] A. Yger: Résidus, courants résiduels et courants de Green. Preprint 1994