

Dokumentacja końcowa

Modyfikacja algorytmu ewolucji różnicowej

Michał Padzik

Albert Wolant

7 czerwca 2015

1. Ogólny opis projektu

Projekt polegał na zaimplementowaniu i zbadaniu właściwości zmodyfikowanego algorytmu ewolucji różnicowej. Zaproponowana modyfikacja polega na zmianie wyboru pierwszego z punktów w mutacji osobnika. Punkt ten ma być zastąpiony średnią z aktualnej populacji. Projekt został wykonany w języku R.

Na potrzeby projektu zaimplementowano klasyczny algorytm ewolucji różnicowej według następującego pseudokodu:

Algorithm 1 Klasyczny algorytm ewolucji różnicowej

procedure DIFFERENTIAL EVOLUTION

$P^0 \leftarrow \{P_1^0, P_2^0, \dots, P_n^0\}$

$H \leftarrow P^0$

$t \leftarrow 0$

while !stop **do**

for all $i \in \{1 : n\}$ **do**

$P_j^t \leftarrow \text{select}(P^t)$

$P_k^t, P_l^t \leftarrow \text{sample}(P^t)$

$M_i^t \leftarrow P_j^t + F * (P_k^t - P_l^t)$

$O_i^t \leftarrow \text{crossover}(P_i^t, M_i^t)$

$H \leftarrow H \cup \{O_i^t\}$

$P_i^{t+1} \leftarrow \text{tournament}(P_i^t, O_i^t)$

$t \leftarrow t + 1$

Algorytm działa w popularnym wariantcie *DE/rand/1/bin*. Stworzenie własnej implementacji standardowego algorytmu miało na celu wyrównanie szans algorytmów w eksperymentach. Dzięki temu, porównanie bardziej skupia się na proponowanej modyfikacji, a mniej na jakości implementacji i mechanizmów pomocniczych w algorytmie.

Następnie zaimplementowano dwa algorytmy zmodyfikowane, odpowiednio MOD1 i MOD2. Algorytm MOD1 realizuje modyfikację poprzez zastosowanie średniej arytmetycznej osobników populacji. W algorytmie MOD2 używa się średniej ważonej, gdzie wagami są wartości funkcji celu dla osobników. Oba algorytmy realizują poniższy pseudokod, z dokładnością do różnej operacji *average*:

Algorithm 2 Zmodyfikowany algorytm ewolucji różnicowej

procedure MODIFIED DIFFERENTIAL EVOLUTION

$P^0 \leftarrow \{P_1^0, P_2^0, \dots, P_n^0\}$

$H \leftarrow P^0$

$t \leftarrow 0$

while !stop **do**

$A \leftarrow \text{average}(P^t)$

for all $i \in \{1 : n\}$ **do**

$P_k^t, P_l^t \leftarrow \text{sample}(P^t)$

$M_i^t \leftarrow A + F * (P_k^t - P_j^t)$

$O_i^t \leftarrow \text{crossover}(P_i^t, M_i^t)$

$H \leftarrow H \cup \{O_i^t\}$

$P_i^{t+1} \leftarrow \text{tournament}(P_i^t, O_i^t)$

$t \leftarrow t + 1$

2. Opis eksperymentów

Procedura porównawcza algorytmów inspirowana była opisem zgłoszeń konkursu wykonywanego na zbiorze funkcji znanym pod nazwą CEC2013. Każdy z algorytmów został uruchomiony k razy na każdej z 28 funkcji benchmarku. Dodatkowo, przeprowadzono eksperymenty dla różnych wymiarowości problemów. Następnie obliczono wartości maksymalną, minimalną, średnią, medianę i odchylenie standardowe błędu populacji względem funkcji celu z k uruchomień każdego z algorytmów dla każdej z funkcji w każdej z badanych wymiarowości problemu. Zastosowano także proponowane w opisie kryterium stopu algorytmów. Mówi ono, że algorytm powinien zakończyć działanie po obliczeniu $m * \text{wymiarowość}$ razy wartości funkcji celu lub jeżeli błąd będzie mniejszy niż 10^{-8} .

Ze względów praktycznych, głównie jeśli chodzi o czas uzyskania wyników, parametry przeprowadzonych eksperymentów różnią się od tych proponowanych w opisie benchmarku CEC2013. Dla każdego przypadku wykonano 5 niezależnych uruchomień. Eksperymenty przeprowadzono dla problemów o wymiarach 2, 5 i 10. Algorytmy kończyły działanie po $2500 * \text{wymiarowość}$ ewaluacjach funkcji celu lub przy błędzie mniejszym od 10^{-8} .

Eksperymenty wykonano na 10 komputerach klasy PC wyposażonych w procesory Intel Core i7 taktowane zegarami 2.8 GHz na wszystkich 4 rdzeniach oraz 8 Gb pamięci operacyjnej. Wszystkie obliczenia przeprowadzono w środowisku „R Studio”. Zaprezentowane wyniki zostały uzyskane przy użyciu opisanych powyżej zasobów w około 8h nieprzerwanej pracy maszyn.

3. Wyniki eksperymentów

Poniżej przedstawiona tabela będąca wynikami przeprowadzonych eksperymentów razem z ich analizą przeprowadzoną za pomocą testu t:

Tabela 1 Algorytm Standardowy, 2 wymiary

Standardowy algorytm ewolucji różnicowej, przypadek 2 wymiarowy					
Func	Best	Worst	Mean	Median	Standard deviation
1	2,05E-06	6,93E-06	4,45E-06	4,39E-06	1,82E-06
2	0,009880861	0,338800097	0,113475757	0,092279626	0,131961057
3	0,327389847	2,682140471	1,420650968	1,097807093	0,906685117
4	0,000493192	0,206667617	0,091627126	0,075580237	0,093336732
5	2,07E-05	0,000199571	9,53E-05	8,28E-05	6,71E-05
6	2,78E-06	0,000142815	3,88E-05	1,24E-05	5,87E-05
7	0,059039801	0,257598069	0,139477734	0,113020727	0,077009879
8	2,701899473	13,3581884	7,538374656	7,080692015	4,647589954
9	0,09332612	0,348005583	0,252610238	0,272129757	0,102147917
10	0,000245098	0,049854026	0,032996682	0,040934482	0,019459281
11	0,008820066	0,122487882	0,05135739	0,052885774	0,046377849
12	0,017184823	0,197515432	0,100925172	0,087992361	0,072016734
13	0,002921566	0,202417158	0,082821271	0,020044044	0,100095771
14	2,351535517	16,06998827	7,221391342	5,55272126	5,249912725
15	5,590627503	13,05887893	10,88207335	11,6068912	3,045337928
16	0,387300061	0,782094099	0,540093508	0,486333572	0,154866105
17	0,427094551	2,295038652	1,650284671	1,894426459	0,738406691
18	1,302044488	2,396410053	2,102893835	2,271877233	0,452673397
19	0,000253797	0,007194906	0,002062499	0,001120492	0,002911895
20	0,019441125	0,021335674	0,020436817	0,020293118	0,000708438
21	0,020182028	0,270149749	0,160841004	0,14189028	0,100815949
22	15,13314732	64,28965628	36,64551583	30,70294	22,96909525
23	3,933327878	18,82637339	11,4345841	11,4864972	5,295145051
24	0,087982167	6,631776884	2,659674754	2,633777052	2,527698553
25	1,25282173	19,50019833	6,57288708	3,521801031	7,479151372
26	0,343837486	3,097360737	1,268014493	0,903236412	1,068900585
27	122,8590709	191,3681143	150,7853411	150,9648251	26,57316092
28	0,191338194	0,636899453	0,447078557	0,528427866	0,204426868

Tabela 2 Algorytm Standardowy, 5 wymiarów

Standardowy algorytm ewolucji różnicowej, przypadek 5 wymiarowy					
Func	Best	Worst	Mean	Median	Standard deviation
1	0,003939692	0,007534606	0,005077132	0,004619523	0,001476416
2	894,4353866	10843,20262	4819,268355	4194,238343	3888,858851
3	62308,01473	395291,5499	159593,4515	123635,4435	135499,7248
4	79,66028544	432,6418759	195,7751071	145,9877973	144,5127422
5	0,071013725	0,098666673	0,086842357	0,087680761	0,010484128
6	0,388786566	0,702338834	0,574542483	0,573447246	0,124458729
7	3,384519843	6,856244599	5,500886227	5,987907352	1,434514498
8	20,05725577	20,20329983	20,12697918	20,11337507	0,070494999
9	2,884501187	3,541037431	3,230763594	3,350483837	0,314573711
10	0,347950814	0,689584878	0,5161208	0,57086421	0,143142027
11	5,657516774	9,218787061	7,593854211	7,718317177	1,267417711
12	6,761981792	15,34500246	11,09160871	11,30850421	3,113963973
13	9,365410041	12,76460721	11,42044443	11,60300465	1,274867816
14	472,7269845	534,7688581	492,6906102	476,6972651	26,78299368
15	648,3798361	806,4593828	710,2963774	700,1311687	66,62614417
16	0,679042972	1,28448584	1,074952966	1,206294885	0,256824013
17	8,03358972	16,40371436	13,1815443	14,18401741	3,255677223
18	6,556255297	18,78540884	14,985749	16,93015681	5,108941536
19	0,225343526	0,874680023	0,538653859	0,476590544	0,276677372
20	1,151838577	1,759872297	1,595202797	1,718807054	0,25378682
21	300,827355	301,8385093	301,3041128	301,3635392	0,457538535
22	563,9837004	888,1525745	716,5198736	684,5479526	137,486671
23	467,2873231	1012,319726	786,3756297	798,8973013	207,3541213
24	172,8473892	209,6027561	186,2363619	184,4276964	14,83580643
25	175,0329507	189,5929	181,6974801	181,2466743	5,63946533
26	141,2940453	200,0078191	159,1586646	146,1600153	24,35883892
27	374,3214902	404,157166	386,5918469	382,1563114	12,66367573
28	300,6479588	301,5605039	301,2019875	301,2403752	0,349765824

Tabela 3 Algorytm Standardowy, 10 wymiarów

Standardowy algorytm ewolucji różnicowej, przypadek 10 wymiarowy					
Func	Best	Worst	Mean	Median	Standard deviation
1	13,24063815	19,66613931	17,6703125	18,54682271	2,599255192
2	6243723,105	8492836,575	7313052,623	7415183,655	1018401,502
3	3578175435	14117862840	8563390806	8552037069	4057822932
4	31420,80965	44277,77409	36098,6066	33636,07208	5408,627215
5	17,6575258	34,49080731	23,57748798	18,83856246	7,45855523
6	11,06362497	15,87638255	12,37727961	11,3692539	2,029423006
7	213,0763429	269,0259667	233,8352395	229,7005002	22,22935482
8	20,36137297	20,44260814	20,4062709	20,4092201	0,032316175
9	8,360135055	10,34345917	9,336807526	9,379100593	0,73485775
10	20,07667596	51,83841658	34,47110391	30,49582935	11,97538051
11	35,42734464	53,43378898	45,83559162	47,40150633	6,696087759
12	57,49669163	69,17027494	62,25384129	60,37629556	4,972370413
13	41,59530818	62,23250875	53,32541387	55,19876944	8,312601981
14	1862,286066	2094,073502	1956,866706	1932,470685	94,09588472
15	1876,856362	2263,687752	2129,835869	2227,662638	170,0154812
16	0,857122152	1,662628996	1,385136635	1,501298528	0,325888649
17	62,10140903	73,03211381	66,00993121	64,49184033	4,17595071
18	59,44116034	68,76811333	64,75783891	67,67647904	4,615445872
19	4,607111935	5,834733563	5,252513148	5,260079603	0,503147922
20	4,253556329	4,435870479	4,341266749	4,313726636	0,077315931
21	308,4611013	402,06024	376,057989	401,4191228	40,71617758
22	1892,342446	2426,371157	2179,129804	2201,733883	229,7430474
23	2190,289468	2436,937283	2341,961423	2336,585415	99,22780644
24	223,3546624	228,4591905	226,3322678	226,7765302	1,952645217
25	219,4532068	226,1706742	223,0326085	223,345648	2,415378667
26	211,563526	290,942944	256,4060505	267,6265745	33,52638563
27	540,387612	578,2587889	557,126799	556,5643304	16,05932018
28	411,6519016	451,783014	429,6508524	426,814389	16,5537428

Tabela 4 Algorytm MOD1, 2 wymiary

Zmodyfikowany algorytm ewolucji różnicowej - średnia arytmetyczna, przypadek 2 wymiarowy					
Func	Best	Worst	Mean	Median	Standard deviation
1	3,40E-08	8,40E-08	5,76E-08	5,70E-08	1,80E-08
2	4,01E-06	6,40E-05	2,96E-05	2,74E-05	2,18E-05
3	0,001462857	0,006955458	0,003452778	0,001824708	0,002525746
4	5,61E-06	5,98E-05	2,65E-05	2,45E-05	2,11E-05
5	3,20E-08	6,66E-07	2,33E-07	1,36E-07	2,55E-07
6	8,00E-09	0,008830926	0,002117172	4,81E-05	0,00382269
7	0,004888715	0,021210015	0,009779857	0,007599132	0,00649665
8	0,091662048	7,877334307	3,819416973	3,421315879	3,009036219
9	0,179704429	0,375500336	0,277782192	0,303652114	0,078821846
10	0,007258892	0,031902688	0,016682752	0,015790279	0,009406399
11	0,12018124	0,998221079	0,350773316	0,215372019	0,367027795
12	0,02268455	0,459068472	0,304120731	0,351240194	0,170222025
13	0,017022906	0,332165371	0,12809086	0,021541107	0,151439918
14	0,444732232	13,63975096	3,878337718	2,023510376	5,52402888
15	0,388432147	4,156883492	1,836747163	1,504402299	1,60976083
16	0,255242025	1,13929237	0,567699289	0,528498106	0,341810986
17	0,39284807	2,314294138	1,721081802	2,143026848	0,798734304
18	1,140174065	2,529647158	1,895977679	2,178278791	0,596514698
19	1,62E-05	0,000117291	7,81E-05	8,24E-05	3,75E-05
20	0,002844011	0,01945484	0,0151074	0,019432499	0,007198999
21	4,598973204	21,36444512	11,42031604	11,53236312	6,340680514
22	1,238182338	34,88661849	17,62567053	15,3070583	12,33244748
23	0,406437834	36,15267063	19,67380763	20,53950427	15,58758633
24	0,319785293	6,2364446	3,73195028	4,803941163	2,709357971
25	1,361346985	19,47825657	7,901348928	8,314996104	7,331031673
26	0,046440399	0,517659719	0,213801691	0,146935711	0,182645259
27	55,11428744	101,3515963	81,91814895	89,11327234	21,65720952
28	3,498688439	21,91997589	13,3201519	17,78755249	8,231427988

Tabela 5 Algorytm MOD1, 5 wymiarów

Zmodyfikowany algorytm ewolucji różnicowej - średnia arytmetyczna, przypadek 5 wymiarowy					
Func	Best	Worst	Mean	Median	Standard deviation
1	3,10E-08	9,30E-08	5,32E-08	4,20E-08	2,44E-08
2	0,003916793	0,033970633	0,015627433	0,012747204	0,011243596
3	0,072293836	0,349859981	0,133413651	0,079216885	0,121124337
4	2,63E-05	0,000286583	0,000155699	0,000152216	0,000108935
5	2,30E-08	9,40E-08	6,22E-08	7,10E-08	2,76E-08
6	0,044891793	0,961803879	0,377905379	0,206689566	0,387880916
7	0,00717951	0,060253378	0,031682676	0,034383129	0,023588531
8	20,11333811	20,16519162	20,14094301	20,15204967	0,025342544
9	2,237215412	3,495309976	2,936201303	3,086718711	0,487773072
10	0,132855678	0,28176039	0,208729776	0,193667205	0,060043819
11	4,841210926	9,3143455	6,661967924	6,159364635	1,741617336
12	3,505172878	9,772139914	5,90037917	4,920547863	2,463256239
13	3,955013815	7,304180767	5,984683313	5,836616786	1,343226669
14	283,7179544	353,7872375	317,299635	302,5342007	32,29944021
15	246,333559	427,1424175	328,7829088	323,9556242	65,50254713
16	0,708837907	1,486400595	1,158516871	1,124909929	0,332533589
17	9,047418758	10,73375	9,85320673	9,742999372	0,687201509
18	8,260093251	13,60524353	11,6303176	12,05456627	1,996534245
19	0,341022029	0,74552095	0,518948162	0,544678174	0,162736111
20	0,68099749	1,197920217	0,915661732	0,822432638	0,257454677
21	300,0000799	300,0011467	300,0004222	300,000259	0,000419258
22	408,6846149	532,3962779	495,6579188	526,9442533	53,07969813
23	453,3851096	793,3661067	618,8563495	635,1297444	135,9413083
24	141,1758161	189,2551843	172,7778018	179,2058442	18,7786532
25	109,9346331	114,0353193	112,1717737	112,2077719	1,488833688
26	104,4255528	112,0358326	107,0850668	106,6359074	3,085586206
27	363,2349176	393,9301375	382,4315877	385,4841327	11,67084769
28	300,0000629	300,0001191	300,0000938	300,0001036	2,35E-05

Tabela 6 Algorytm MOD1, 10 wymiarów

Zmodyfikowany algorytm ewolucji różnicowej - średnia arytmetyczna, przypadek 10 wymiarowy					
Func	Best	Worst	Mean	Median	Standard deviation
1	5,50E-08	9,40E-08	7,86E-08	8,50E-08	1,63E-08
2	8,490217535	26,86325521	17,29769416	16,12881839	7,298244743
3	470,7862185	36468,75796	17957,06141	10974,88479	16458,83306
4	0,032279899	0,085841242	0,067089548	0,072702536	0,020340018
5	5,80E-08	9,10E-08	7,84E-08	8,40E-08	1,27E-08
6	5,374623862	6,213144384	5,673848458	5,576767404	0,320924883
7	0,481158011	1,390748938	0,989514706	1,048750655	0,353811217
8	20,29230448	20,53513051	20,40116823	20,36921548	0,092739416
9	9,514607796	10,07978777	9,755717041	9,816063867	0,241258693
10	0,391882106	0,573708842	0,472352395	0,467911185	0,065920746
11	26,33381653	35,67135674	30,80191042	29,3204394	3,790680348
12	23,4406593	35,17578834	29,80905818	28,23771478	5,199056642
13	26,9030416	41,08045052	32,99967913	28,85808141	7,134942342
14	1295,373515	1583,557335	1440,717754	1425,628005	120,7537395
15	989,6595147	1882,041832	1497,876646	1692,906288	382,6574354
16	1,022462674	1,500926083	1,338446203	1,423903139	0,193054021
17	29,1555632	43,94340472	36,78169293	35,88889703	5,99138928
18	34,35695914	45,80801943	39,82778506	39,01766067	4,338274583
19	2,648716993	3,155089273	2,853320484	2,739702995	0,214299322
20	3,506029252	3,722181087	3,593718781	3,576517383	0,093432381
21	400,1938672	400,1938672	400,1938672	400,1938672	0
22	1740,817042	1971,661501	1852,176539	1864,860784	89,9775756
23	1627,942754	1935,247705	1816,2116	1856,19491	128,5569629
24	223,1903743	226,4734814	224,5976876	224,858725	1,399511755
25	222,6584022	226,2657909	224,179391	224,1028473	1,370535352
26	200,0157002	200,0161652	200,0158127	200,0157352	0,000198167
27	545,6578	570,5262671	553,5595214	550,5463797	9,810598322
28	300,0001469	300,0002292	300,0001841	300,0001789	3,34E-05

Tabela 7 Algorytm MOD2, 2 wymiary

Zmodyfikowany algorytm ewolucji różnicowej - średnia ważona, przypadek 2 wymiarowy					
Func	Best	Worst	Mean	Median	Standard deviation
1	4,00E-09	9,30E-08	3,92E-08	3,20E-08	3,42E-08
2	0,000335351	0,480059418	0,097274515	0,001057722	0,213989615
3	16,56886185	2834,094264	961,4455424	805,8875392	1145,280115
4	0,000590065	0,064051111	0,015024856	0,002738432	0,027472869
5	8,05E-07	6,72E-06	3,72E-06	4,02E-06	2,52E-06
6	0,000426834	0,006935137	0,005024198	0,006295368	0,002708191
7	0,420089898	0,610681286	0,520177967	0,52594095	0,06826212
8	0,151485602	5,875341255	3,254703567	3,708785018	2,100375703
9	0,112119848	0,270805832	0,17607061	0,179261862	0,061028349
10	0,009550323	0,031895682	0,019798357	0,018256313	0,008213798
11	0,058099101	1,03150874	0,341593005	0,089716492	0,421780065
12	0,016198189	0,483451739	0,190949111	0,157696216	0,182367865
13	0,034277933	0,053255482	0,043485754	0,043724079	0,006847888
14	0,48737377	16,69386894	5,505970743	3,804225955	6,469034783
15	3,593473574	29,50732049	15,84097672	17,05404402	11,28280786
16	0,26913346	0,687073585	0,478990201	0,496438681	0,163922716
17	0,418900663	2,205177276	1,564435441	1,896197366	0,745408406
18	1,338481874	2,238919725	1,932533043	1,984755413	0,354959746
19	9,63E-07	0,000265812	8,21E-05	4,84E-05	0,000108857
20	0,019434158	0,022279643	0,02003306	0,019469741	0,001256279
21	2,382555796	26,92407199	13,01101098	10,97071246	8,907978764
22	5,888268672	36,42096834	22,26391026	23,77254115	12,07551208
23	0,398618034	47,79344036	13,14457955	4,950850006	19,93527753
24	1,503886472	5,647858184	3,173884462	2,856735493	1,529411829
25	1,618502844	8,702050036	3,64077645	2,711348278	2,922627912
26	0,197847398	1,324621396	0,782189497	0,689743534	0,506430775
27	45,32850085	144,5045311	105,6177227	110,4197354	37,47848482
28	4,175212882	12,17847742	7,575353618	7,403524916	2,898939337

Tabela 8 Algorytm MOD2, 5 wymiarów

Zmodyfikowany algorytm ewolucji różnicowej - średnia ważona, przypadek 5 wymiarowy					
Func	Best	Worst	Mean	Median	Standard deviation
1	7,20E-08	9,50E-08	8,54E-08	9,20E-08	1,14E-08
2	0,021624042	0,120068984	0,05439616	0,044342736	0,040205446
3	405,2837031	113107,1006	25366,28445	4219,868065	49137,23869
4	0,000502744	0,003063778	0,001284027	0,001092628	0,00102928
5	4,40E-08	1,00E-07	8,56E-08	9,70E-08	2,35E-08
6	0,137962856	0,894619073	0,377391898	0,228245528	0,306870013
7	0,178588918	0,580160446	0,357930061	0,284996563	0,165127343
8	20,07258593	20,18411478	20,1126291	20,10026442	0,045292963
9	2,442106876	3,362541926	2,83888208	2,593606991	0,417796816
10	0,091134763	0,204803545	0,132541718	0,108279469	0,047799927
11	3,667793816	9,105827548	5,3785053	4,9627039	2,171265007
12	1,673787134	6,23294338	4,659116333	5,380314901	1,864701411
13	5,321370717	8,960195957	7,145704799	6,855654752	1,338207535
14	211,4255789	431,8768217	352,6576452	385,1427123	84,47359154
15	177,9673832	561,3575027	351,6071197	376,8698453	155,2025604
16	0,670993406	1,160649099	0,969690485	1,033464403	0,195658449
17	9,136882424	12,11515564	10,93020339	11,07550905	1,092054543
18	8,91206664	14,30813371	11,34352363	11,62799716	2,172478236
19	0,413729145	0,709547517	0,559761975	0,522547574	0,116143372
20	1,095443309	1,34588236	1,241153624	1,299393124	0,105890515
21	300,000491	300,8107461	300,1626457	300,0007003	0,362299165
22	484,9267703	607,7600672	554,0028483	573,2527461	51,86945655
23	516,309624	712,09606	644,3006135	660,1421319	76,91293936
24	149,8442356	195,3017333	171,5020782	178,2790445	20,07540005
25	109,9211319	113,5211273	112,156724	112,39872	1,336110601
26	99,68573135	110,0479	105,9084124	107,3205244	3,892770606
27	368,768547	396,9446622	383,285815	384,311138	11,06777381
28	300,0000635	300,0001629	300,000128	300,0001365	3,96E-05

Tabela 9 Algorytm MOD2, 10 wymiarów

Zmodyfikowany algorytm ewolucji różnicowej - średnia ważona, przypadek 10 wymiarowy					
Func	Best	Worst	Mean	Median	Standard deviation
1	5,80E-08	1,00E-07	7,52E-08	6,80E-08	1,65E-08
2	17,88470003	86,18533823	38,15143448	21,34270324	28,9946836
3	1090835,637	36826354,67	11386960,46	2401018,698	15216571,84
4	0,198702935	11,60376951	2,523227938	0,276878202	5,076297067
5	8,30E-08	1,75E-07	1,13E-07	9,40E-08	3,74E-08
6	4,126055202	6,186828679	5,200597637	5,117541512	0,760384305
7	3,716124684	12,40588544	7,525099148	7,580269157	3,232459699
8	20,40241253	20,54553155	20,47302675	20,49525911	0,060236799
9	9,456824218	10,333384	9,816295349	9,771222721	0,349140555
10	0,457657528	0,6010739	0,509972351	0,485154552	0,058775112
11	21,0243266	35,82763339	29,80565154	32,2439082	6,512727248
12	18,99129391	38,40857869	29,40345818	28,28193241	7,927460431
13	19,70732152	38,135713	28,5467994	30,95387566	7,327487721
14	1149,075164	1474,837747	1332,992139	1376,253146	138,1303378
15	1522,934142	1923,59763	1712,444271	1760,223096	159,4005529
16	1,047709176	1,587783427	1,250703138	1,074826371	0,265337677
17	30,89061819	41,78805093	36,2603215	35,8230778	4,61386044
18	32,10544346	45,35902344	40,14027616	40,27657367	5,042728079
19	1,891452716	3,04544194	2,519642876	2,468962353	0,424273153
20	3,400720352	3,795206476	3,548610237	3,495641166	0,158627173
21	400,1938672	400,1938672	400,1938672	400,1938672	0
22	1619,659003	1990,347701	1854,826984	1891,125609	143,2652681
23	1494,459027	2145,415646	1914,787681	1986,743071	250,3425659
24	223,1665567	226,1162278	224,7791417	224,4594972	1,25779211
25	225,4565905	227,4102165	226,2608041	225,9585938	0,746706541
26	200,0156999	200,0161316	200,0158116	200,0157368	0,000181282
27	519,5500393	566,89912	545,0020589	549,4571444	18,00607372
28	300,0001366	300,0002649	300,0002127	300,0002418	5,47E-05

Przedstawione powyżej wyniki eksperymentów poddano analizie przy pomocy testu t-Studenta. Pozwoliło to stwierdzić, czy zaobserwowane różnice pomiędzy algorytmami są statystycznie istotne. Test przeprowadzono na poziomie istotności 0,05 i przy 8 stopniach swobody. Daje to wartość krytyczną odczytaną z tablic równą **2,306**.

Poniższe tabele prezentują wzajemne porównanie algorytmów dla każdego przypadku testowego, czyli kombinacji funkcji i wymiarowości. Jeśli wynik testu wskazywał na istotne różnice, wyznaczano bilans algorytmu jako: -1 za przegraną, 1 za wygraną. Na podstawie wartości bilansu wyznaczano rangi algorytmów w każdym z przypadków testowych. W razie równych bilansów stosowano rangę remisową.

Tabela 10 Testy T i rangi dla 2 wymiarów

Testy t dla przypadku 2 wymiarowego												
Fu nk.	Std vs. MOD1	Std vs. MOD2	Bilans Std	Ranga Std	MOD1 vs. Std	MOD1 vs. MOD2	Bilans MOD1	Ranga MOD1	MOD2 vs. Std	MOD2 vs. MOD1	Bilans MOD2	Ranga MOD2
1	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
2	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
3	-1	0	-1	3	1	0	1	1	0	0	0	2
4	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
5	-1	-1	-2	3	1	1	2	1	1	-1	0	2
6	0	1	1	1	0	0	0	2	-1	0	-1	3
7	-1	1	0	2	1	1	2	1	-1	-1	-2	3
8	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
9	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
10	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
11	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
12	1	0	1	1	-1	0	-1	3	0	0	0	2
13	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
14	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
15	-1	0	-1	2,5	1	1	2	1	0	-1	-1	2,5
16	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
17	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
18	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
19	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
20	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
21	1	1	2	1	-1	0	-1	2,5	-1	0	-1	2,5
22	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
23	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
24	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
25	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
26	0	0	0	2	0	1	1	1	0	-1	-1	3
27	-1	0	-1	3	1	0	1	1	0	0	0	2
28	1	1	2	1	-1	0	-1	2,5	-1	0	-1	2,5

Tabela 11 Testy T i rangi dla 5 wymiarów

Testy t dla przypadku 5 wymiarowego												
Fun kcja	Std vs. MOD1	Std vs. MOD2	Bilans Std	Ranga Std	MOD1 vs. Std	MOD1 vs. MOD2	Bilans MOD1	Ranga MOD1	MOD2 vs. Std	MOD2 vs. MOD1	Bilans MOD2	Ranga MOD2
1	-1	-1	-2	3	1	1	2	1	1	-1	0	2
2	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
3	-1	0	-1	3	1	0	1	1	0	0	0	2
4	-1	-1	-2	3	1	1	2	1	1	-1	0	2
5	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
6	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
7	-1	-1	-2	3	1	1	2	1	1	-1	0	2
8	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
9	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
10	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
11	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
12	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
13	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
14	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
15	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
16	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
17	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
18	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
19	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
20	-1	-1	-2	3	1	1	2	1	1	-1	0	2
21	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
22	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
23	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
24	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
25	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
26	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
27	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
28	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5

Tabela 12 Testy i rangi dla 10 wymiarów

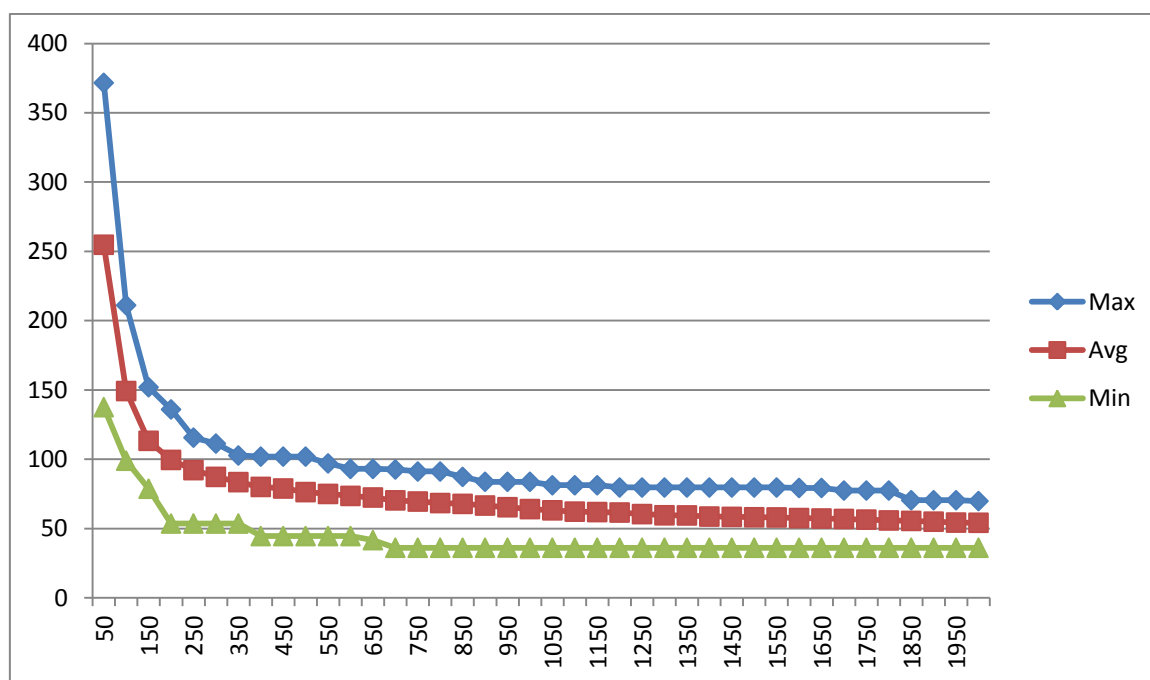
Testy t dla przypadku 10 wymiarowego												
Fun kcja	Std vs. MOD1	Std vs. MOD2	Bilans Std	Ranga Std	MOD1 vs. Std	MOD1 vs. MOD2	Bilans MOD1	Ranga MOD1	MOD2 vs. Std	MOD2 vs. MOD1	Bilans MOD2	Ranga MOD2
1	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
2	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
3	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
4	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
5	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
6	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
7	-1	-1	-2	3	1	1	2	1	1	-1	0	2
8	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
9	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
10	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
11	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
12	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
13	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
14	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
15	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
16	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
17	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
18	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
19	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
20	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
21	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
22	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
23	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
24	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
25	0	1	1	1,5	0	1	1	1,5	-1	-1	-2	3
26	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5
27	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	2
28	-1	-1	-2	3	1	0	1	1,5	1	0	1	1,5

Kolejna tabela prezentuje zbiorcze wyniki przeprowadzonej analizy statystycznej wyników w postaci średnich rang z podziałem na wymiarowości problemów:

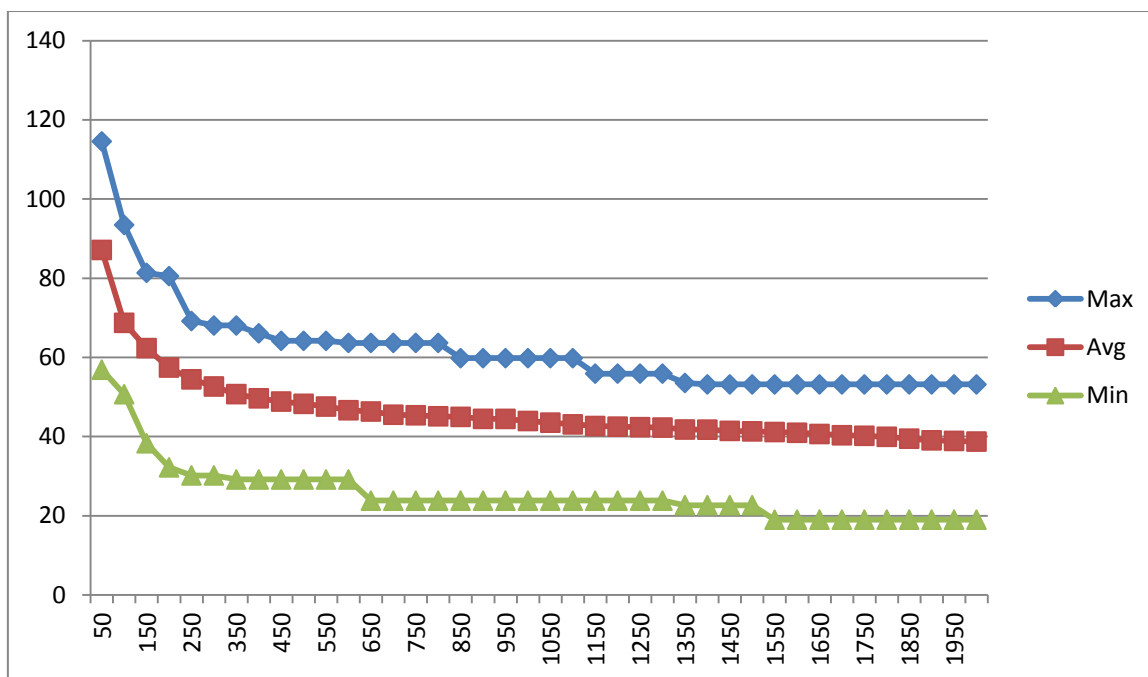
Średnie rangi				
	2 wymiary	5 wymiarów	10 wymiarów	Ogółem
Standard	2,018	2,607	2,732	2,452
MOD1	1,839	1,607	1,589	1,679
MOD2	2,143	1,786	1,679	1,869

Powyższą tabelę można potraktować jako główny wynik z przeprowadzonych eksperymentów.

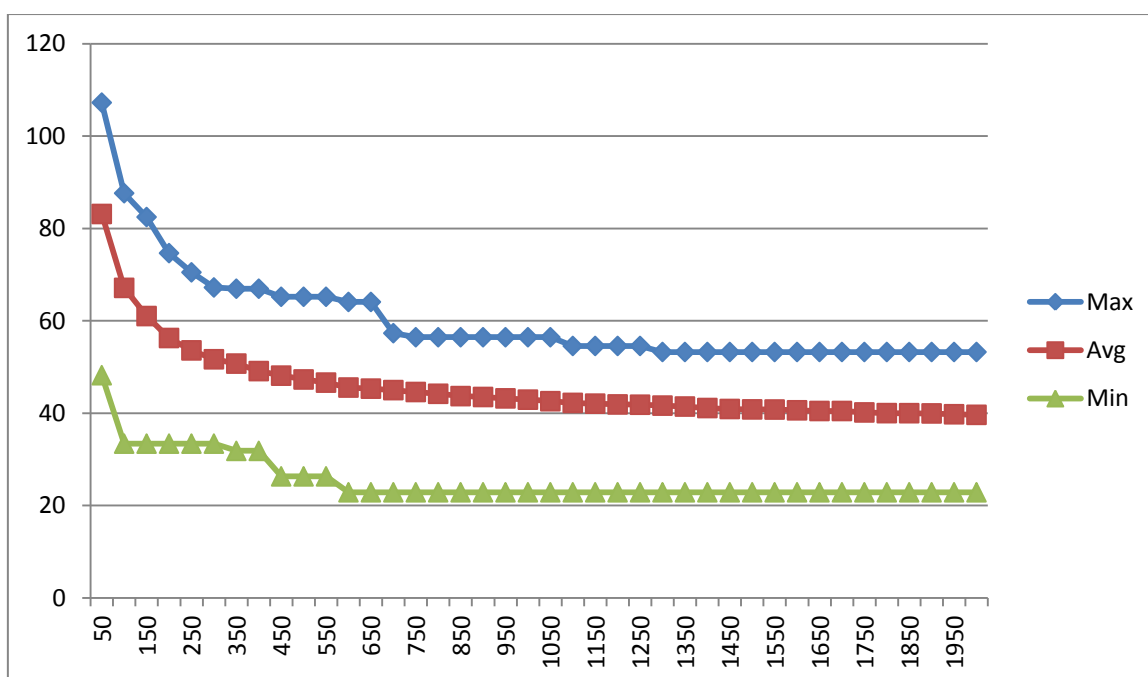
Ponadto, głównie w celach poglądowych, wygenerowano wykresy zbieżności algorytmów dla przykładowych uruchomień dla przypadków 10 wymiarowych. Wykresy prezentują zmiany najlepszego i najgorszego osobnika oraz wartości średniej populacji w kolejnych iteracjach:



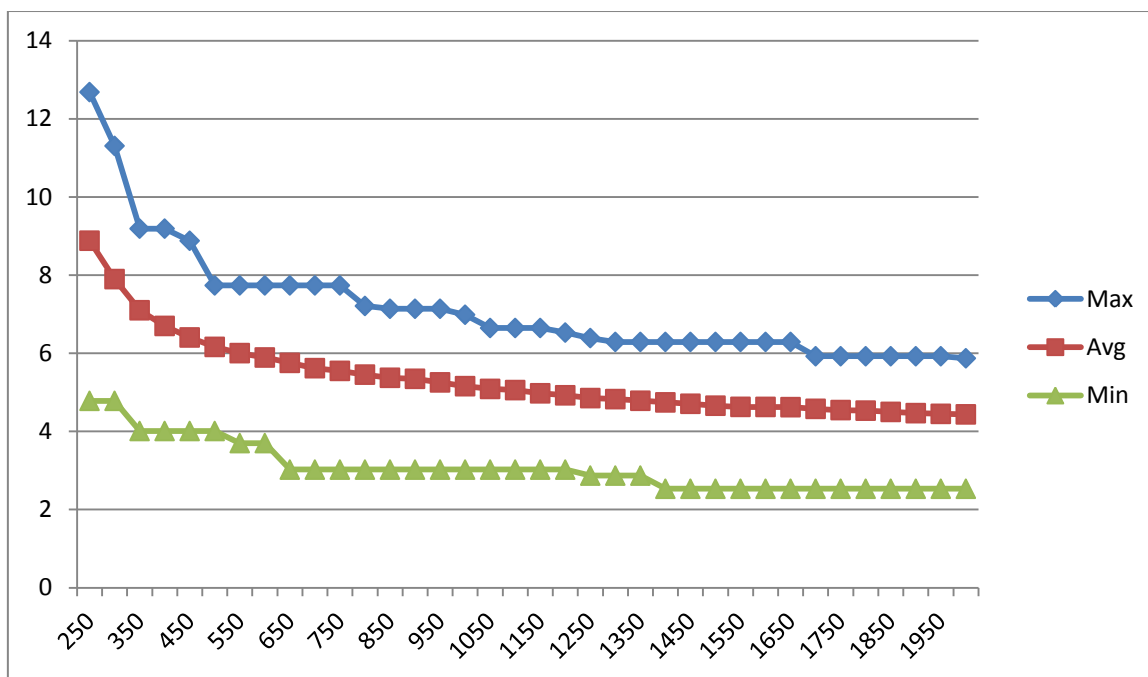
Rysunek 1 Algorytm Standard, funkcja 12



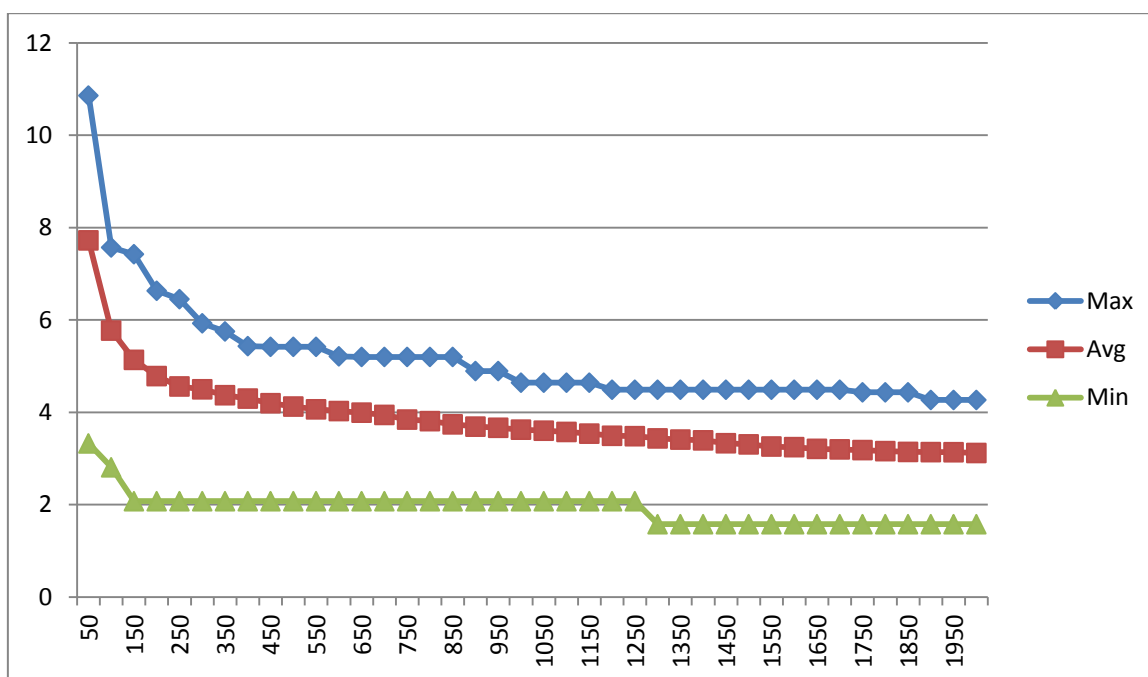
Rysunek 2 Algorytm MOD1, funkcja 12



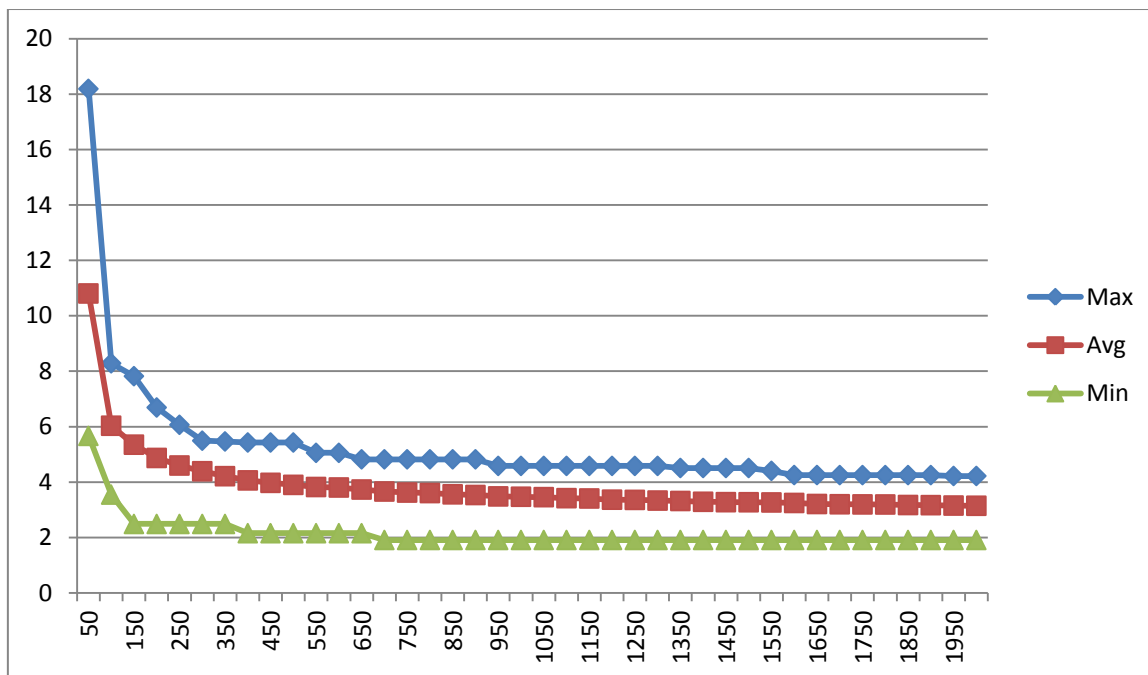
Rysunek 3 Algorytm MOD2, funkcja 12



Rysunek 4 Algorytm Standard, funkcja 19



Rysunek 5 Algorytm MOD1, funkcja 19



Rysunek 6 Algorytm MOD2, funkcja 19

4. Wnioski

Uzyskane wyniki pokazują, że zaproponowana modyfikacja ewolucji różnicowej może poprawić wyniki zwracane przez ten algorytm. Przeprowadzone eksperymenty i ich analiza pokazują, że w porównaniu ze standardowym algorytmem, oba zaimplementowane sposoby liczenia średniej mogą stanowić wartość dodaną. Ze względu na ograniczony zakres przeprowadzonych eksperymentów nie można stwierdzić, że algorytmy zmodyfikowane będą zawsze lepsze, ale z pewnością prezentowane wyniki mogą stanowić obiecujący początek dalszych badań. Należy też zwrócić uwagę na fakt, że wraz ze wzrostem wymiarowości problemu, przewaga algorytmów zmodyfikowanych, wyrażona średnią rangą, rośnie. Przy próbie 3 wymiarów nie można jednakże powiedzieć czy jest to stały trend.

Proponowane kierunki dalszych badań mogłyby obejmować między innymi ulepszenie implementacji przedstawionych algorytmów i przeprowadzenie eksperymentów dla większej liczby niezależnych uruchomień i większych wymiarowości problemu. Dodatkowo interesujące może być sprawdzenie jak modyfikacja wpływa na algorytmy ewolucji różnicowej inne niż *DE/rand/1/bin*.