Método de Muller

Juan Páez[1], Santiago Zuñiga[2]

Abstract
In this paper we will explain the Muller method used to solve equations in one variable with complex roots, we will also present an application problem with the computational solution and the respective error analysis.
Resumen
En este documento se explicará el método de Muller usado para resolver ecuaciones en una variable con raíces complejas, también presentaremos un problema de aplicación con su solución computacional y su respectivo análisis del error.

Keywords
Muller — Solution — Roots — One Variable — Error — Polynomial
Palabras clave
Muller — Solución — Raíces — Una Variable — Error — Polinimio

[1] *Facultad de ingeniería, Pontificia Universidad Javeriana*
[2] *Facultad de ingeniería, Pontificia Universidad Javeriana*
Autor correspondiente: jd.paez@javeriana.edu.co

Introducción

A la hora de solucionar ecuaciones no lineales en una variable, es decir encontrar o aproximar sus raíces, se pueden utilizar distintos métodos, como el despeje directo, Newton, posición falsa, entre otros. Sin embargo, se presenta un problema cuando las funciones que queramos evaluar tengan raíces complejas, ya que los métodos mencionados no son los indicados para este tipo planteamientos.
Es por eso que el matemático estadounidense, David Eugene **Muller**, propuso un método para poder obtener una aproximación de este tipo de funciones el cual será explicado y desarrollado a lo largo de este documento.

1. Definición

El método de Muller, esta muy relacionado con el método de la secante, teniendo en cuenta que este consiste en tener una aproximación de la raíz a partir de dos puntos en la función $f(x)$.

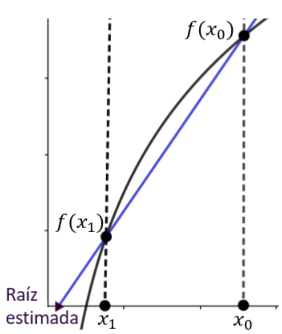

Figura 1. Método de la secante

En el caso de Muller consiste en tener 3 puntos sobre la gráfica de la función, siendo estos una composición cuadrática, la cual da una aproximación de la solución o raíz de $f(x)$.

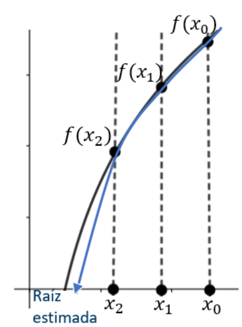

Figura 2. Método de Muller

1.1 Definición matemática

Teniendo en cuenta la forma general de la ecuación cuadrática y la aproximación de la raíz, el metodo comienza planteando el siguiente polinomio cuadrático:

$$g(x) = a(x-x_2)^2 + b(x-x_2) + c \tag{1}$$

Queremos que la función $g(x)$, representada de color azul, pase por los puntos presentados en la figura 2, es decir $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$ y $[x_2, f(x_2)]$,

por lo tanto sustituyendo en la ecuación (1), nos da las respectivas imagenes de las funciones en $g(x_k)$.

$$g(x_0) = a(x_0-x_2)^2 + b(x_0-x_2) + c \tag{2}$$

$$g(x_1) = a(x_1-x_2)^2 + b(x_1-x_2) + c \tag{3}$$

$$g(x_2) = a(x_2 - x_2)^2 + b(x_2 - x_2) + c \quad (4)$$

Al haber tres ecuaciones, podemos hallar los valores de los tres coeficientes a, b y c. Empezando por el valor de c, que utilizando la ecuación (4) sería:

$$\begin{aligned} g(x_2) &= a(0)^2 + b(0) + c \\ g(x_2) &= c \end{aligned} \quad (5)$$

Por lo tanto al reemplazar c en las ecuaciones (2) y (3) tenemos que:

$$g(x_0) - g(x_2) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) \quad (6)$$

$$g(x_1) - g(x_2) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) \quad (7)$$

Empleando la fórmula para hallar la pendiente de una recta, podemos hallar una aproximación a las derivadas, dando como resultado los coeficientes a y b.

$$\begin{aligned} h_0 &= x_1 - x_0 \\ h_1 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ \delta_1 &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \end{aligned} \quad (9)$$

Utilizando las ecuaciones (9) y (8), reemplazándolas en (6) y (7)

$$\begin{aligned} h_0\delta_0 + h_1\delta_1 &= b(h_0 + h_1) - a(h_0 + h_1)^2 \\ h_1\delta_1 &= bh_1 - ah_1^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Al despejar a y b, de la anterior ecuación nos da el resultado de los coeficientes

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 - h_0} \quad (11)$$

$$b = ah_1 + \delta_1 \quad (12)$$

Teniendo como calcular los coeficientes, podemos hallar la raíz x_3 por medio de la fórmula cuadrática en (1) con $x = x_3$, sin embargo, como se comenta en las referencias [1, 2], no se puede emplear la formula tal cual, teniendo en cuenta los posibles errores de redondeo al usarla, por lo tanto hay que usar una variante:

$$x_3 - x_2 = \frac{-2c}{b(signo(b))\sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (13)$$

Despejando x_3

$$x_3 = \frac{-2c}{b(signo(b))\sqrt{b^2 - 4ac}} + x_2 \quad (14)$$

Teniendo en cuenta que x_2 de manera iterativa es el punto más aproximado a la raíz, el error se calcula:

$$\varepsilon_n = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| \quad (15)$$

Cabe mencionar que el signo que se escoge para este método, en la variante de la formula cuadrática, es el mismo signo de b, para que el denominador sea más grande, dando un número más aproximado a la raíz, por eso se usa la notación $signo(b)$.

2. Pseudo-Código

A continuación se presenta como sería la implementación del método, expresado en palabras naturales:

Pseudo-Código 1 Muller

Requiere: $x_0, x_1, x_2, f(x)$ (Función a evaluar), $iter$ (Iteraciones máximas), tol (Tolerancia del error).
Salida: Aproximación de la raíz, con cuantas iteraciones.
mientras $i < iter$ **hacer**
  Calcular:
  $h_0 = x_1 - x_0$
  $h_1 = x_2 - x_1$
  $d_0 = (f(x_1) - f(x_0))/h_0$
  $d_1 = (f(x_2) - f(x_1))/h_1$

  Calcular a b y c
  $a = d_1 - d_0/h_1 + h_0$
  $b = ah_1 + d_1$
  $c = f(x_2)$

  Calcular denominador más grande
  $rad = \sqrt{b^2 - 4ac}$
  si $|b + rad| > |b - rad|$ **entonces**
    $deno = b + rad$
  en otro caso
    $deno = b - rad$
  fin
  Encontrar x_3
  $x_3 = x_2 + (-2c)/deno$

  Calculo del error
  si $|x_3 - x_2| < tol$ **entonces**
    retorne x_3, i
  en otro caso
    Siguiente iteración
    $x_0 = x_1$
    $x_1 = x_2$
    $x_2 = x_3$
  fin
  $i = i + 1$
fin
Imprimir No se pudo llegar a una solución con la tolerancia requerida
retorne x_3, i

Ahora que ya se definió como es el algoritmo del método de Muller, a continuación se presentará un problema extraído del libro de Burden, el cual será solucionado a partir de un algoritmo desarrollado en lenguaje de programación *Python*.

3. Problema de aplicación

El problema a evaluar es de la sección 2.6, ejercicio numero 10[1]:

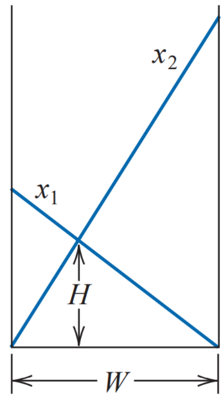

Figura 3. Dibujo problema

Dos escaleras atraviesan un callejón de ancho w. Cada escalera llega desde la base de una pared hasta algún punto de la pared opuesta. Las escaleras se cruzan a una altura H sobre la acera. Halla W dado que las longitudes de las escaleras son $x_1 = 20$ pies y $x_2 = 30$ pies, y que $H = 8$ pies.

4. Planteamiento del problema

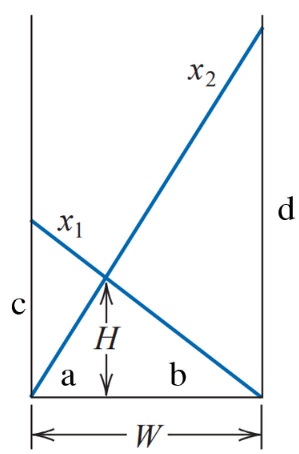

Figura 4. Planteamiento problema

Empezamos creando unas nuevas variables, siendo a la distancia de la pared de la izquierda hasta donde se cruzan las escaleras, y b es parecido la distancia de a, solo que lo mide desde el cruce hasta la pared de la derecha. Con c, se crea un triangulo rectángulo entre w y x_1, y con d se crea otro triangulo de noventa grados con w y x_2
Por el teorema de pitágoras

$$\begin{aligned} w^2 + c^2 &= x_1^2 \\ w^2 + d^2 &= x_2^2 \end{aligned} \tag{16}$$

Despejando c y d tenemos

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{x_1^2 - w^2} \\ d &= \sqrt{x_2^2 - w^2} \end{aligned} \tag{17}$$

Siguiendo con el teorema de tales

$$\begin{aligned} \frac{a}{h} &= \frac{w}{d} \\ \frac{b}{h} &= \frac{w}{c} \end{aligned} \tag{18}$$

Reemplazando (17) y despejando a y b en la anterior ecuación

$$\begin{aligned} a &= \frac{w \cdot h}{\sqrt{x_2^2 - w^2}} \\ b &= \frac{w \cdot h}{\sqrt{x_1^2 - w^2}} \end{aligned} \tag{19}$$

Sabemos entonces, que la suma de a y b da la distancia de w, entonces, usando (19) tenemos

$$w = \frac{w \cdot h}{\sqrt{x_2^2 - w^2}} + \frac{w \cdot h}{\sqrt{x_1^2 - w^2}} \tag{20}$$

Moviendo w al otro lado de la ecuación tenemos que

$$1 = \frac{h}{\sqrt{x_2^2 - w^2}} + \frac{h}{\sqrt{x_1^2 - w^2}} \tag{21}$$

Reemplazando h, x_1 y x_2 da la ecuación

$$0 = \frac{8}{\sqrt{30^2 - w^2}} + \frac{8}{\sqrt{20^2 - w^2}} - 1 \tag{22}$$

Esta sería la respuesta final de la solución del problema, sin embargo, este método debe ser empleado solo con polinomios, por lo tanto, hay que deshacerse de esos radicales, entonces luego de unos operaciones algebraicas, la ecuación expresada como de la manera correcta es

$$\begin{aligned} (400 - w^2)^2(230400 - 256w^2) - \\ (57600 - 64w^2 - 964(400 - x^2) + w^2(400 - w^2))^2 \end{aligned} \tag{23}$$

5. Solución con implementación

Usando el programa desarrollado en *Python*, con la implementación del método de la secante obtenido de internet y escogiendo a x_0, x_1 y x_2, a partir del método gráfico [3]

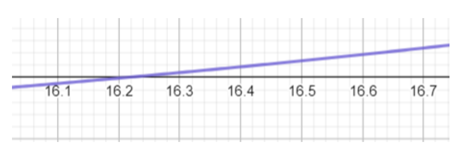

Figura 5. Raíz de la ecuación

Nos da como resultado, con sus respectivas iteraciones
Utilizando la herramienta Wolfram Alpha [4], podemos evidenciar cual es la raíz exacta, dándonos como resultado

$$x \approx 16{,}2121258966917000982892 2$$

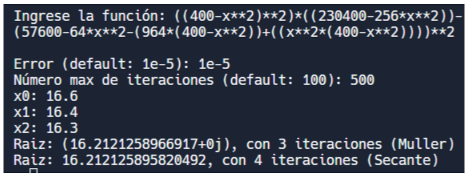

Figura 6. Salida solución programa

Mostrando que los dos métodos pudieron obtener la aproximación de la raíz, sin embargo, el método de Muller tuvo una convergencia más rápida haciéndolo en una iteración menos que el de la Secante.

6. Conclusión

Como se mencionó al principio del documento, este método es bastante útil para poder encontrar raíces complejas, por el hecho de que usa la formula cuadrática, facilitando a si mismo, el manejo de este tipo de soluciones, y, aunque la secante también funciona para este tipo de problemas, lo que buscamos en el *Análisis numérico* es que la convergencia a la aproximación de la raíz sea con las menos iteraciones posibles minimizando el error, es por eso que lo ideal para este tipo de ecuaciones es usar el método propuesto por David.

Referencias

[1] Richard L Burden et al. Análisis numérico. 10, 2017.

[2] Steven C Chapra, Raymond P Canale, et al. *Métodos numéricos para ingenieros*, volume 5. McGraw-Hill, New York, NY, 2011.

[3] M. Hohenwarter, M. Borcherds, et al. GeoGebra 4.4. Last visited on 17/9/2022.

[4] Eric W. Weisstein. Raíces. From MathWorld, Wolfram Alpha. Last visited on 16/9/2022.