Método de Muller

Juan Páez[1], Santiago Zuñiga[2]

Resumen
In this paper we will explain the Muller method used to solve equations in one variable with complex roots, we will also present an application problem with the computational solution and the respective error analysis.

Keywords
Muller — Solution — Complex Roots — One Variable — Error

[1] *Facultad de ingeniería, Pontificia Universidad Javeriana*
[2] *Facultad de ingeniería, Pontificia Universidad Javeriana*
Autor correspondiente: jd.paez@javeriana.edu.co

Introducción

A la hora de solucionar ecuaciones no lineales en una variable, es decir encontrar o aproximar sus raíces, se pueden utilizar distintos métodos, como el despeje directo, Newton, posición falsa, entre otros. Sin embargo, se presenta un problema cuando las funciones que queramos evaluar tengan raíces complejas, ya que los métodos mencionados no son los indicados para este tipo planteamientos.
Es por eso que el matemático estadounidense, David Eugene **Muller**, propuso un método para poder obtener un aproximación de este tipo de funciones el cual será explicado y desarrollado a lo largo de este documento.

1. Definición

El método de Muller, esta muy relacionado con el método de la secante, teniendo en cuenta que este consiste en tener una aproximación de la raíz a partir de dos puntos en la función $f(x)$.

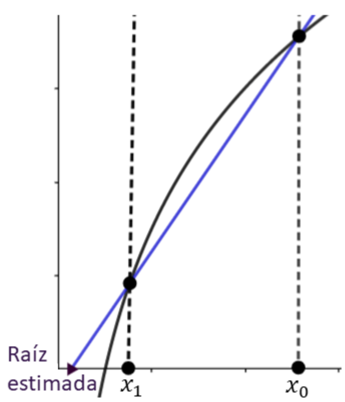

Figura 1. Método de la secante

En el caso de Muller consiste en tener 3 puntos sobre la gráfica de la función, siendo estos una composición cuadrática, la cual da una aproximación de la solución o raíz de $f(x)$.

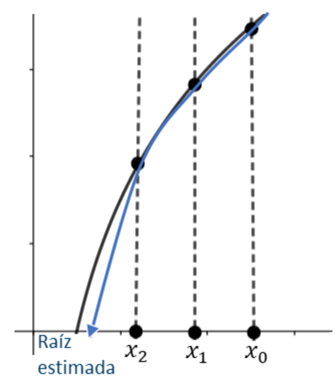

Figura 2. Método de Muller

1.1 Definición matemática

Teniendo en cuenta la forma general de la ecuación cuadrática y la aproximación de la raíz, el metodo comienza planteando el siguiente polinomio cuadrático:

$$g(x) = a(x-x_2)^2 + b(x-x_2) + c \tag{1}$$

Queremos que la función $g(x)$, representada de color azul, pase por los puntos presentados en la figura 2, es decir $[x_0, f(x_0)]$, $[x_1, f(x_1)]$ y $[x_2, f(x_2)]$, por lo tanto sustituyendo en la ecuación (1), nos da las respectivas imagenes de las funciones en $g(x_k)$.

$$g(x_0) = a(x_0-x_2)^2 + b(x_0-x_2) + c \tag{2}$$

$$g(x_1) = a(x_1-x_2)^2 + b(x_1-x_2) + c \tag{3}$$

$$g(x_2) = a(x_2-x_2)^2 + b(x_2-x_2) + c \tag{4}$$

Al haber tres ecuaciones, podemos hallar los valores de los tres coeficientes a, b y c. Empezando por el valor de c, que utilizando la ecuación (4) sería:

$$\begin{aligned} g(x_2) &= a(0)^2 + b(0) + c \\ g(x_2) &= c \end{aligned} \tag{5}$$

Por lo tanto al reemplazar c en las ecuaciones (2) y (3) tenemos que:

$$g(x_0) - g(x_2) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) \tag{6}$$

$$g(x_1) - g(x_2) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) \tag{7}$$

Empleando la fórmula para hallar la pendiente de una recta, podemos hallar una aproximación a las derivadas, dando como resultado los coeficientes a y b.

$$\begin{aligned} h_0 &= x_1 - x_0 \\ h_1 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ \delta_1 &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \end{aligned} \tag{9}$$

Utilizando las ecuaciones (9) y (8), reemplazandolas en (6) y (7)

$$\begin{aligned} h_0\delta_0 + h_1\delta_1 = b(h_0 + h_1) - a(h_0 + h_1)^2 \\ h_1\delta_1 = bh_1 - ah_1^2 \end{aligned} \tag{10}$$

Al despejar a y b, de la anterior ecuación nos da el resultado de los coeficientes

$$a = \frac{\delta_1 - \delta_0}{h_1 - h_0} \tag{11}$$

$$b = ah_1 + \delta_1 \tag{12}$$

Teniendo como calcular los coeficientes, podemos hallar la raíz x_3 por medio de la fórmula cuadrática en (1) con $x = x_3$, sin embargo, como se comenta en las referencias [1, 2], no se puede emplear la formula tal cual, teniendo en cuenta los posibles errores de redondeo al usarla, por lo tanto hay que usar una variante:

$$x_3 - x_2 = \frac{-2c}{b(signo(b))\sqrt{b^2 - 4ac}} \tag{13}$$

Despejando x_3

$$x_3 = \frac{-2c}{b(signo(b))\sqrt{b^2 - 4ac}} + x_2 \tag{14}$$

Teniendo en cuenta que x_2 de manera iterativa es el punto más aproximado a la raíz, el error se calcula:

$$\varepsilon_n = |\frac{x_3 - x_2}{x_3}| \tag{15}$$

Cabe mencionar que el signo que se escoge para este método, en la variante de la formula cuadrática, es el mismo signo de b, para que el denominador sea más grande, dando un número más aproximado a la raíz, por eso se usa la notación $signo(b)$.

2. Pseudo código

A continuación se presenta como sería la implementación del método, expresado en palabras naturales:

PSEUDO CÓDIGO ACÁ

Ahora que ya se definió como el algoritmo del método de Muller, a continuación se presentará un problema, el cual será solucionado a partir de un algoritmo desarrollado en lenguaje de programación

3. Planteamiento del problema

Referencias

[1] Richard L Burden et al. Análisis numérico. 10, 2017.

[2] Steven C Chapra, Raymond P Canale, et al. *Métodos numéricos para ingenieros*, volume 5. McGraw-Hill, New York, NY, 2011.