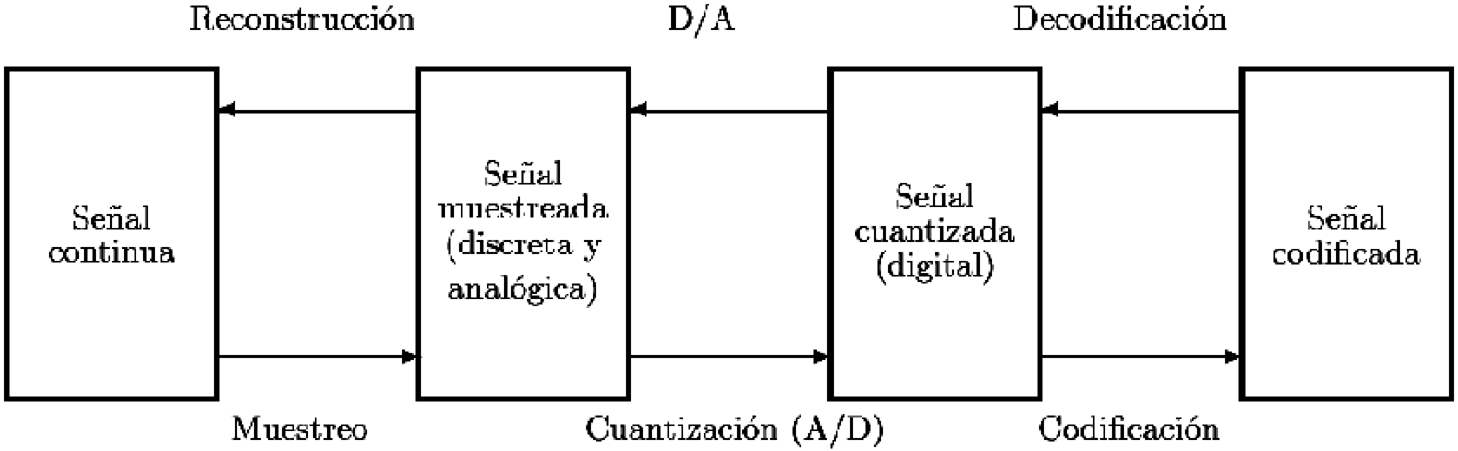
Procesamiento Digital de Imágenes

Transformada de Fourier en imágenes

Claudio Delrieux
Laboratorio de Ciencias de las Imágenes – UNS - CONICET
cad@uns.edu.ar

PDI – Señales (imágenes) discretas

Si recordamos el pasaje de las señales continuas a discretas, el primer paso consistía en el *muestreo* de la señal para transformarla en una señal discreta, es decir, que asume valores solo en determinados instantes. vecinos.



PDI – Señales (imágenes) discretas

En el caso de las imágenes, los procesos de de muestreo y cuantización se realiza en el sensor de la cámara, el cual integra el valor de la luz en una determinada área y lo transforma en un valor digital.

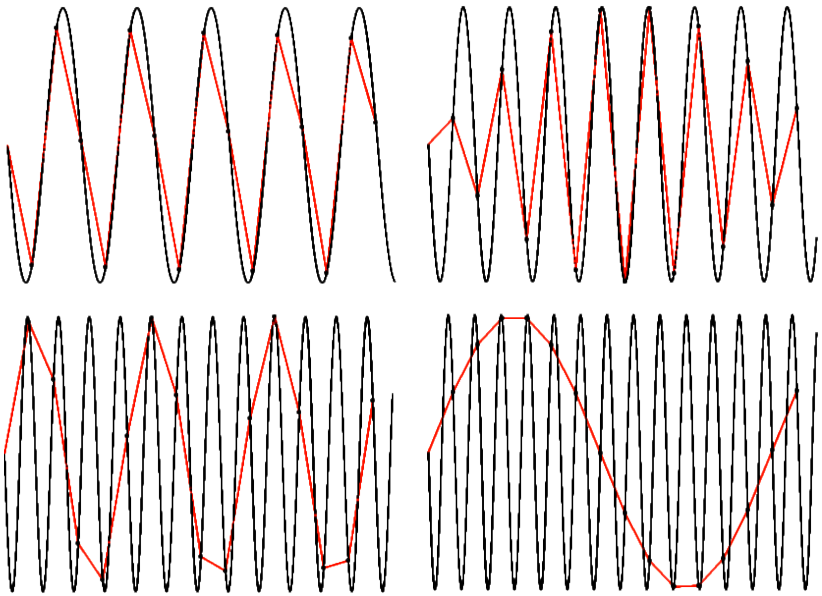
El arreglo del sensor típicamente sigue el esquema de Bayer que aquí se muestra, y los canales que faltan en cada lugar se obtienen promediando los vecinos.

Por el momento, no nos ocupamos de la cuantización (lo veremos más adelante).

PDI – Señales (imágenes) discretas

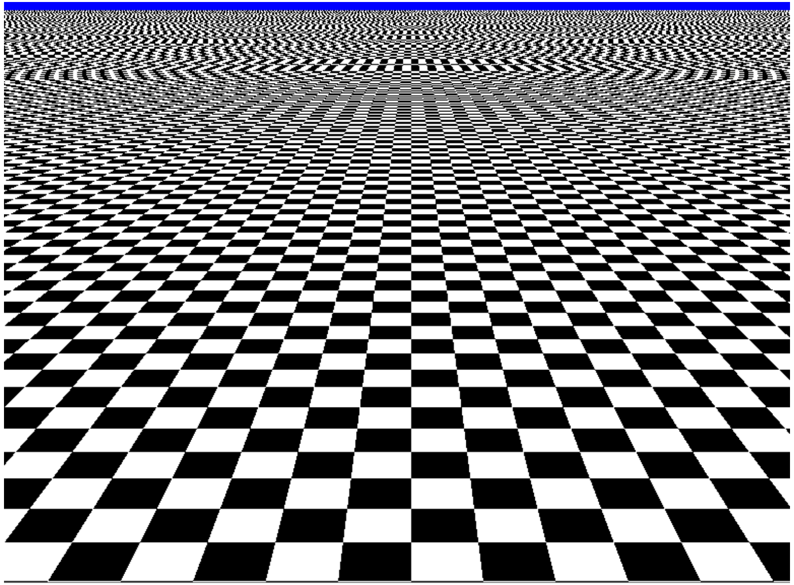
El efecto del muestreo sobre la señal original es muy anti-intuitivo. A la derecha se muestran (en negro) cuatro casos de señales senoidales de diferente frecuencia (espacial): 5, 8, 12 y 14 ciclos en total.

En cada caso, se toman 16 muestras equiespaciadas y se las une con una poligonal (en rojo), creándose una nueva señal reconstruida a partir del muestreo.



PDI – Señales (imágenes) discretas

Como se pudo apreciar en la imagen anterior, la señal “reconstruida” puede no parecerse en nada a la señal original, sobre todo si la cantidad de oscilaciones supera cierto límite. Este efecto se denomina *aliasing* y es fundamental conocerlo dada su importancia en el procesamiento de imágenes.



A la derecha ilustramos un ejemplo de aliasing en imágenes: un render de un piso damero infinito muestra que el detalle en las baldosas lejanas se “desintegra”. https://es.wikipedia.org/wiki/Aliasing

PDI – Señales (imágenes) discretas

La caracterización del aliasing y otros aspectos esenciales de las señales (imágenes) discretas requiere un fundamento matemático bastante elaborado. En esta clase veremos lo más resumidamente posible estos temas como para tener una base para el procesamiento espectral de imágenes. Nuestra hoja de ruta aquí pasa por los siguientes destinos esenciales:

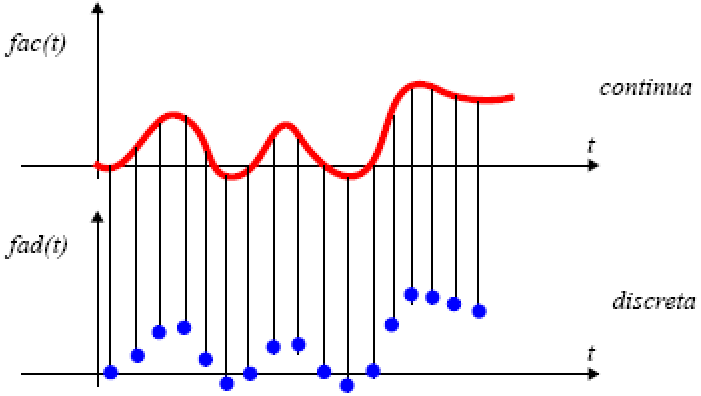
- Modelo matemático de una señal discreta
- Modelo frecuencial de señales
- Pasaje del modelo tradicional (“temporal”) al frecuencial por medio de la Transformada de Fourier
- Transformada de Fourier discreta

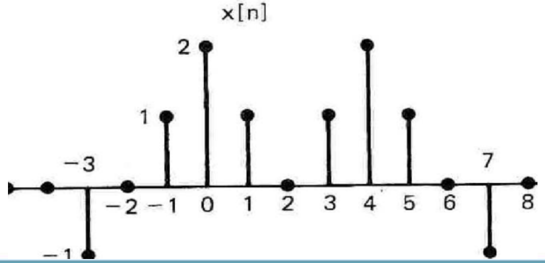
PDI – Señales (imágenes) discretas

Vemos arriba una señal continua como función del tiempo *fac(t)* y abajo después de haber sido muestreada como una señal discreta en el tiempo *fad(t)*.

Luego, abajo del todo, una señal discreta puede pensarse como una función *x[n]* (que ocurre a intervalos discretos del tiempo). La notación no es accidental, dado que ahora la señal puede pensarse como un arreglo de valores. https://es.wikipedia.org/wiki/Muestra_(señal)

Por el momento nos desentendemos de la cuantización.





PDI – Señales (imágenes) discretas

Podemos obtener una representación matemática de la señal x[n], utilizando como función auxiliar a la *delta de Dirac*:

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{en todo otro caso} \end{cases}$$

En ese caso, la señal discreta queda expresada del siguiente modo:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(n-k)$$

donde *f(k)* representa el valor de la señal continua original en el instante *k*.
https://es.wikipedia.org/wiki/Muestra_(señal)

PDI – Modelo frecuencial de señales

Todos tenemos la experiencia de haber visto el “analizador de espectro” de un reproductor de audio, que nos muestra en tiempo real cómo está distribuida la energía del sonido que escuchamos en cada una de las frecuencias de audio.

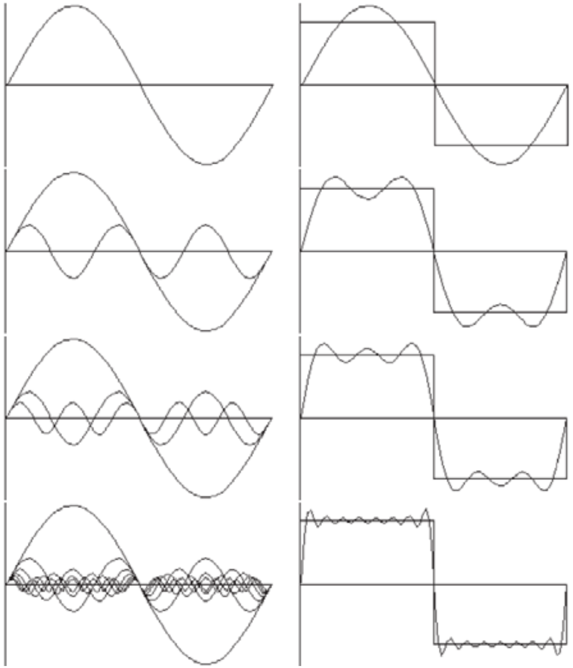
Esto responde a que toda señal periódica puede aproximarse arbitrariamente a una sumatoria de señales “puras” (senoidales o cosenoidales).

Esto se denomina “serie de Fourier”
https://es.wikipedia.org/wiki/Serie_de_Fourier

PDI – Modelo frecuencial de señales

Podemos ver un ejemplo de este concepto. La suma de señales senoidales de frecuencia 1, 3, 5, 7 … con amplitudes 1, 1/3, 1/5, 1/7 … produce en el límite una onda cuadrada. La ecuación general de las series de Fourier es:

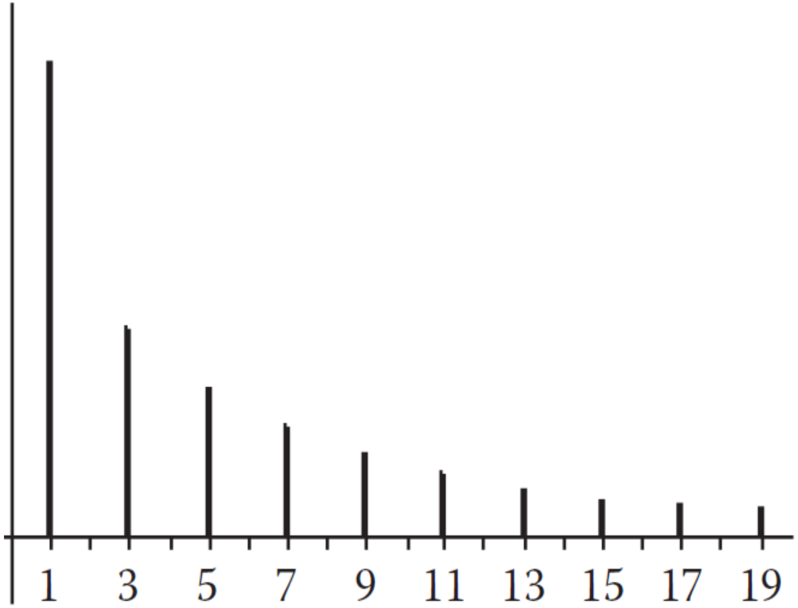
$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathrm{sen}(2\pi kFt + \theta_k)$$



Observar que cada término de la serie tiene *dos* variables, la amplitud y la fase.

PDI – Modelo frecuencial de señales

El espectro de amplitudes de la señal anterior quedaría como se muestra. Ver que en todos los valores pares de frecuencias, la amplitud es cero, y en los impares va decreciendo inversamente proporcional a la frecuencia.



Nos preguntamos ahora, cómo es posible obtener el espectro (de amplitud) de una señal cualquiera. Para ello necesitamos hablar de la *transformada de Fourier*.

PDI – Transformada de Fourier

Ingresamos ahora en un territorio matemático bastante complejo, que, en efecto, requiere conocer números complejos https://es.wikipedia.org/wiki/Número_complejo.

La expresión de la transformada de Fourier es la siguiente.

$$E(F) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i F t} dt$$

https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Fourier

f(t) representa la función cuyo espectro queremos encontrar (t es el “tiempo”), y E(F) representa el espectro de dicha función (F es “frecuencia”).

Es decir, la transformada recibe una función f(t) y devuelve otra E(F).

PDI – Transformada de Fourier

Tanto f(t) como E(F) son funciones complejas (tienen parte real e imaginaria). Pronto veremos qué ocurre si f(t) es solamente real.

Como los números complejos, además de representarse como parte real e imaginaria, pueden representarse como *amplitud* y *fase* (análogos a módulo y ángulo en un vector), es posible visualizar el espectro de amplitud de E(F) como vimos un par de transparencias atrás.

Para entender la parte exponencial de la fórmula de la TF, nos sirve tener a mano la fórmula de Euler: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

https://es.wikipedia.org/wiki/Fórmula_de_Euler

PDI – Transformada de Fourier

Veamos entonces dentro de la integral, el producto de f(t) por la exponencial, quedaría (viendo solo la parte real para simplificar):

$$f(t).\cos(2\pi Ft)$$

Esto representa el producto de f(t) por una oscilación pura a frecuencia F. Si este producto se integra a lo largo de t (desde menos infinito hasta infinito), cada vez que f(t) y F "correlacionan" (son ambas positivas o ambas negativas), eso agrega a la integral, y viceversa.

En definitiva, si f(t) y F "no tienen nada que ver", el resultado será cero. Caso contrario, si el resultado de la integral es diferente de cero, es porque f(t) y F están relacionadas.

PDI – Transformada de Fourier

En otras palabras, la función E(F) va “barriendo” todas las frecuencias F posibles, y para cada una determina en qué medida f(t) responde o correlaciona con F. De esa manera se obtiene el espectro (de amplitud y fase) de f(t).

Por propiedades trigonométricas de los números complejos, se puede demostrar que cuando f(t) es real (no tiene parte imaginaria, como en la mayoría de las imágenes), entonces E(F) es *simétrico par*, es decir, el valor para F y –F es idéntico. Esta propiedad va a ser de importancia y por eso la mencionamos.

PDI – Transformada de Fourier

La TF tiene un amplio conjunto de propiedades que vale mencionar.

- Es *lineal*, es decir, obedece el principio de superposición: la TF de dos o más señales superpuestas es la superposición de las TFs independientes de las mismas.
- Es invariante frente a traslaciones.
- Es inversamente simétrica frente a cambios de escala (si multiplico a t por 2, por ejemplo, entonces las F se dividen por dos).
- Posee una función dual para el producto (denominada *convolución*): la TF del producto de dos funciones es la convolución de las TF de cada función, y la TF de la convolución de dos funciones es el producto de la TF de cada función.

PDI – Convolución

Esta última propiedad es de importancia fundamental en el procesamiento de imágenes, así que no tenemos más remedio que detenernos en alguno de los detalles.

La definición de la convolución entre dos funciones es la siguiente:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

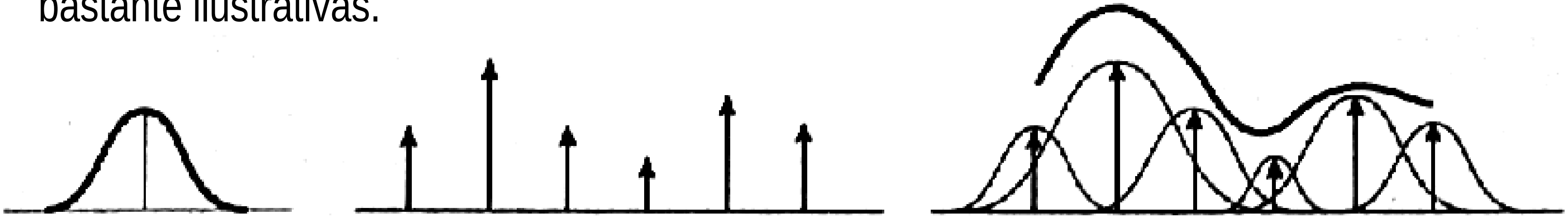
Para no asustarnos sobremanera, veremos un caso particular de convoluciones, que son las que ocurren la mayor parte de las veces en nuestro curso: una función continua acotada se convoluciona con una función discreta.

PDI – Convolución

Este caso puede ser ilustrado en la figura de abajo: *f* es la función de la izquierda (continua y acotada) y *g* es la función del centro (discreta).

En este caso su convolución será la sumatoria que se obtiene al trasladar y escalar *f* en cada uno de los lugares donde *g* ocurre.

En https://es.wikipedia.org/wiki/Convolución pueden encontrar algunas animaciones bastante ilustrativas.



PDI – Convolución

El teorema de la convolución básicamente indica que esta operación es el **dual** del producto con respecto a la TF (esto es importantísimo porque la convolución “hereda” propiedades algebraicas del producto, como la asociatividad o la distributividad).

Multiplicar dos señales genera una tercera señal cuyo espectro es la convolución de las dos señales intervinientes, y multiplicar los espectros de dos señales genera un tercer espectro que corresponde a una señal convolución de las dos originales.

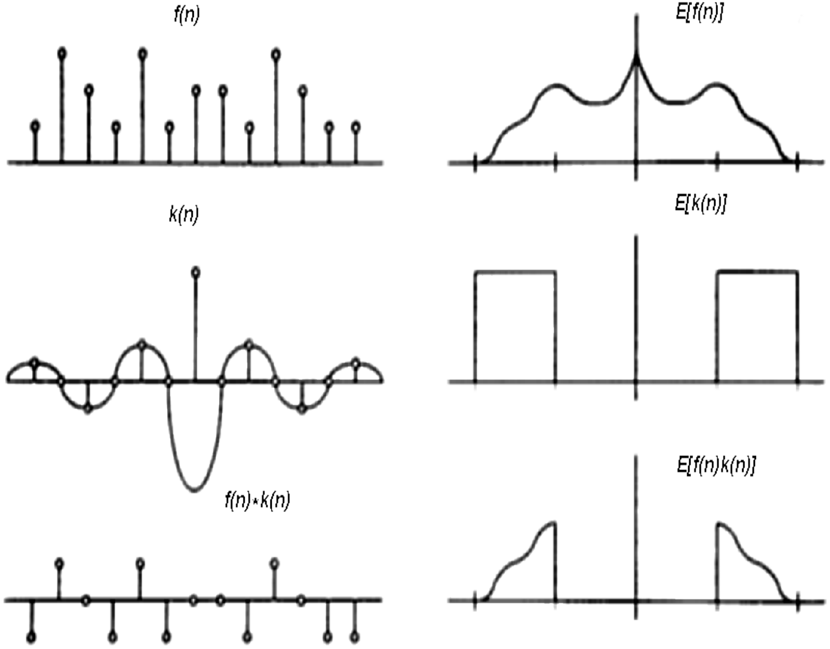
$$E[A(t)B(t)] = E[A(t)] * E[B(t)]$$

$$E[A(t)]E[(B(t)] = E[A(t) * B(t)]$$

PDI – Filtrado por convolución

El teorema de convolución tiene inmediatas aplicaciones en el procesamiento digital de señales e imágenes. Una de ellas es el *filtrado por convolución*.

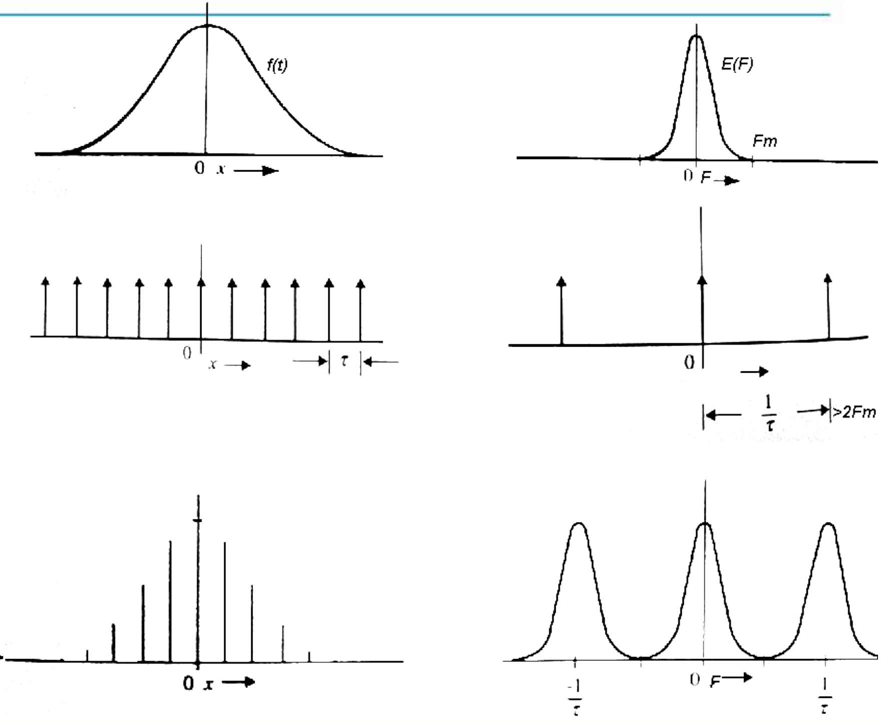
Vemos una señal *f(n)* y su espectro *E(f(n))*. Multiplicar este último por una función pulso simétrica (pasabanda) puede obtenerse más eficientemente convolucionando la señal en el dominio tiempo por la señal equivalente *k(n)*.



PDI – Teorema del muestreo

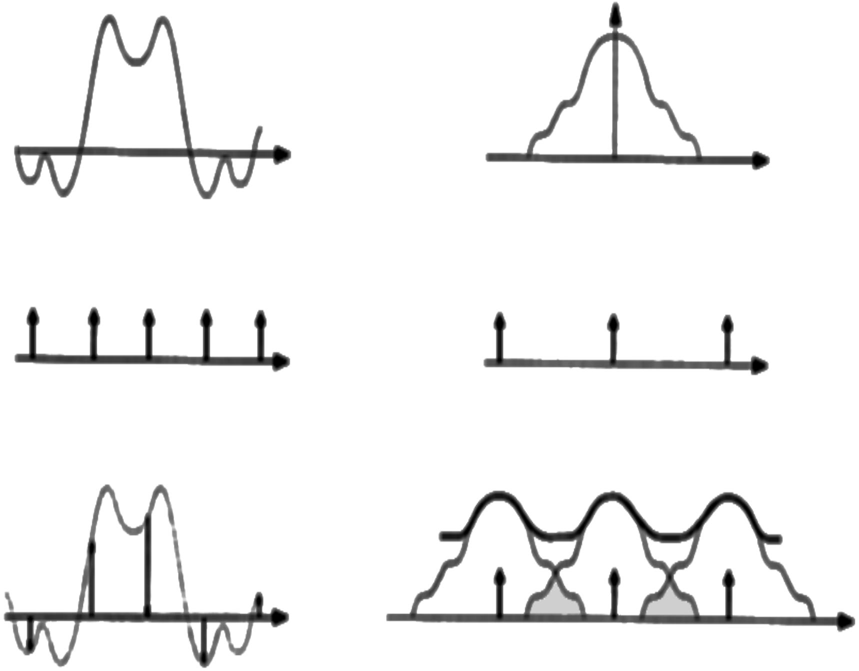
La convolución nos va a permitir entender el misterioso fenómeno del aliasing. Podemos considerar el muestreo de nuestra señal *f(t)* (arriba a la izq.) como el resultado de multiplicarla por un tren de impulsos *g(t)* (al medio a la izquierda).

A la derecha se ven los respectivos espectros. El espectro de la señal muestreada, entonces, es una serie infinita de copias del espectro de la señal original, espaciadas 1/ τ (denominada la *frecuencia de muestreo*).



PDI – Teorema del muestreo

Si τ no es lo suficientemente pequeño, o la frecuencia de muestreo no es mayor que el doble de la máxima frecuencia en E(F), entonces las energías de cada copia del espectro se “mezclan” y aparecen las frecuencias extrañas o alias.



Esto se conoce como el *teorema del muestreo*.
https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_muestreo_de_Nyquist-Shannon

PDI – Transformada inversa de Fourier

Existe la transformación inversa, que nos permite pasar del dominio frecuencia al dominio tiempo. Se denomina transformada inversa de Fourier:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(F) e^{2\pi i F t} dF$$

Es posible ver que su “funcionamiento” es el inverso al de la TF: para cada frecuencia *F* genera una oscilación de período *F* con una energía *E(F)*, y la integral de este proceso para toda *F* genera una señal en el tiempo *f(t)*.

PDI – Transformada discreta de Fourier

Dada la importancia de la TF para múltiples aspectos del procesamiento de señales e imágenes, se desarrollaron métodos numéricos que permiten su uso en contexto computacional. La TF *discreta* permite encontrar una función espectral discreta (es decir, para una secuencia finita de *N* frecuencias) a partir de una señal discreta de *N* valores:

$$E(F) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{\frac{-2\pi i F n}{N}}$$

Las propiedades de simetría de la exponencial discreta permiten reducir la cantidad de operaciones de N^2 a $N \log N$, en la llamada FFT (transformada rápida de Fourier).
https://es.wikipedia.org/wiki/Transformada_rápida_de_Fourier

PDI – Transformada discreta 2D de Fourier

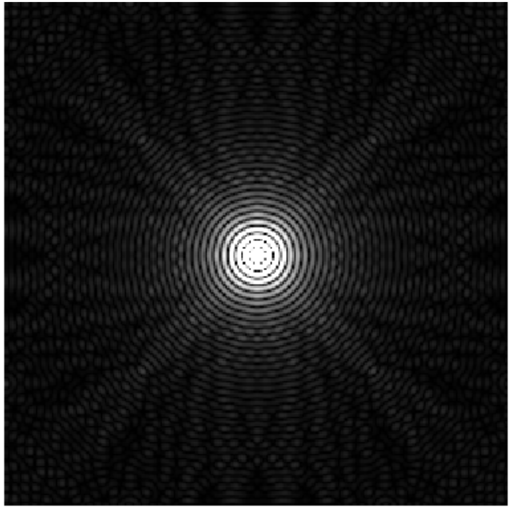
La misma formulación de la transformada discreta se aplica a señales 2D (imágenes), aprovechando otra propiedad fundamental de la TF, denominada separabilidad (la TF de una función 2D que puede ponerse como producto de dos funciones 1D, es el producto de cada una de las TF de dichas funciones).

De esa forma surge la TF discreta para funciones 2D f(nx, ny), donde Fh y Fv representan frecuencias horizontales y verticales, respectivamente (en este caso se trata de frecuencias geométricas):

$$E(F_h, F_v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(n_x, n_y) e^{-2\pi i \left[\frac{mF_h}{M} + \frac{nF_v}{N} \right]}$$

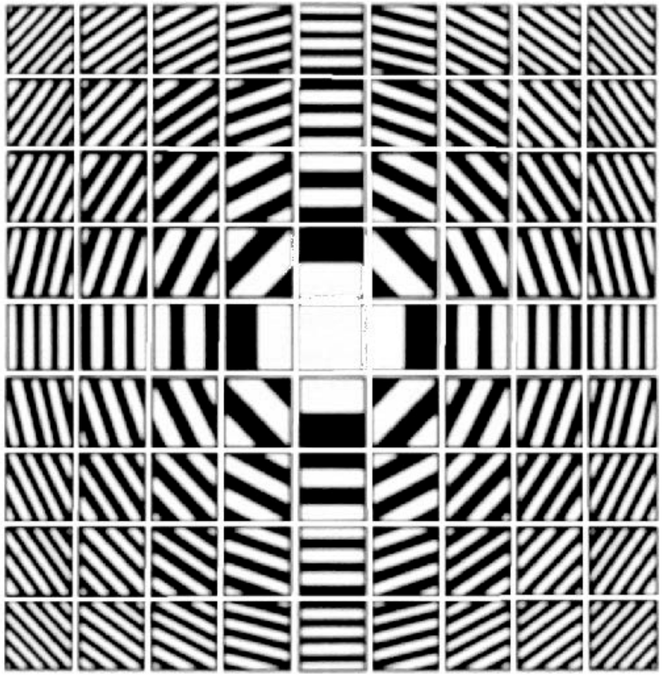
PDI – Transformada de Fourier de Imágenes

Una forma de representar la TF de una imagen es con *otra* imagen de igual resolución. En ésta utilizamos alguna forma de *pseudocolor* para representar la energía a cada una de las frecuencias, por ejemplo, niveles de gris. En este ejemplo, una imagen de 512x512 con un disco negro genera una TF que se representa con otra imagen de 512x512 como la que se muestra, donde más intensidad de blanco representa más energía.



PDI – Transformada de Fourier de Imágenes

Para tener una representación intuitiva del significado de cada pixel en la TF de una imagen, utilizamos esta “cartografía”. El pixel central representa la frecuencia cero (horizontal y vertical), es decir, el nivel de gris de la imagen (ver que la expresión de la TF 2D “colapsa” al promedio si Fh y Fv son cero).

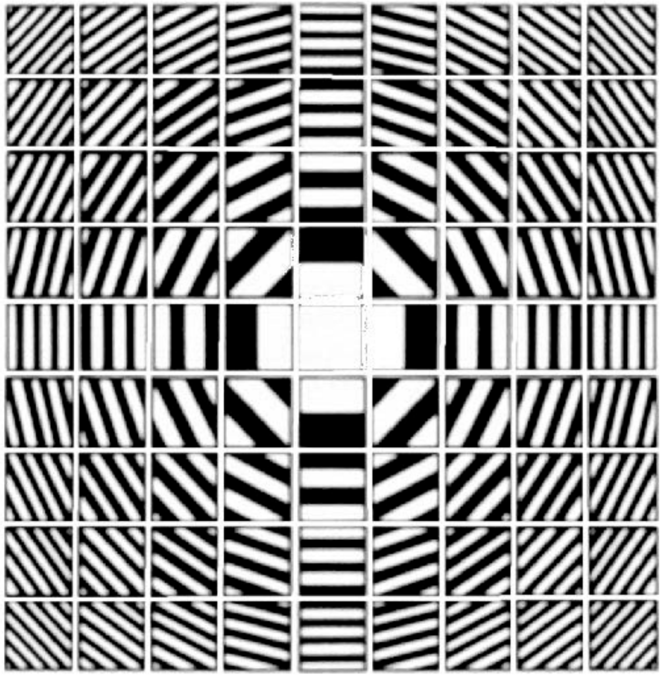


Los pixel arriba y abajo del central representan la cantidad de energía a “media pantalla vertical”. Por ejemplo si la imagen es de 100x100, representan la energía a una oscilación vertical cada 50 pixels.

PDI – Transformada de Fourier de Imágenes

Los pixels a izquierda y derecha del central representan lo propio pero en oscilación horizontal. Los pixel dos lugares arriba y dos lugares abajo del central representan energía a dos oscilaciones verticales por pantalla, etc.

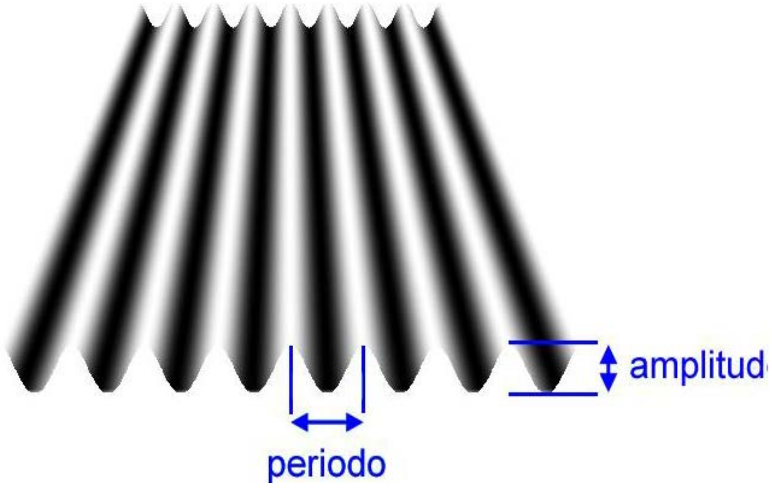
Es importante recordar que como nuestras imágenes no poseen parte imaginaria, entonces siempre los pixels simétricos respecto del centro poseen idénticos valores.



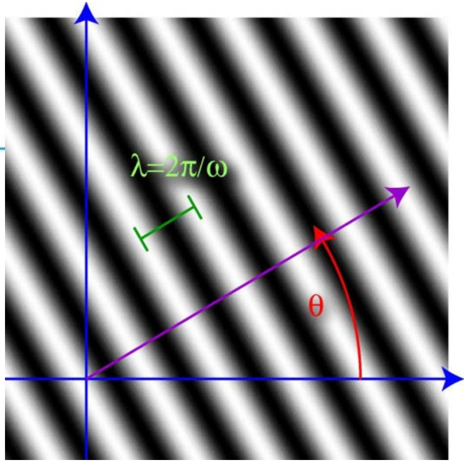
PDI – Procesamiento espectral de imágenes

En esta figura vemos una “señal pura” senoidal 2D, ilustrando dos de sus características (amplitud y período). La amplitud está expresada como una altura, si bien en la imagen será un nivel de gris.

El período está medido en pixels (a qué distancia en pixels están dos crestas o dos valles sucesivos). Por dicha razón las “frecuencias espaciales” están indicadas en “oscilaciones por pixel”.

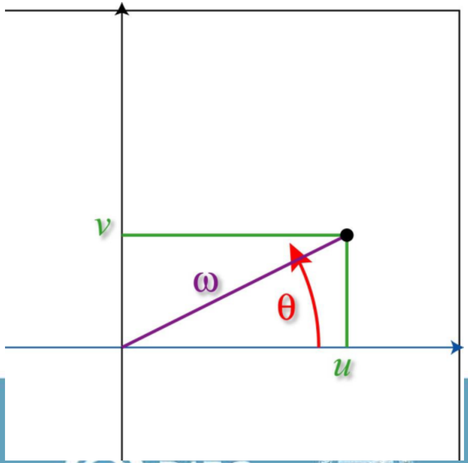


PDI – Procesamiento espectral de imágenes



Vemos ahora un caso más completo, donde la imagen senoidal pura tiene una orientación θ y un retardo de fase (el centro de la imagen no coincide con el inicio de la senoidal).

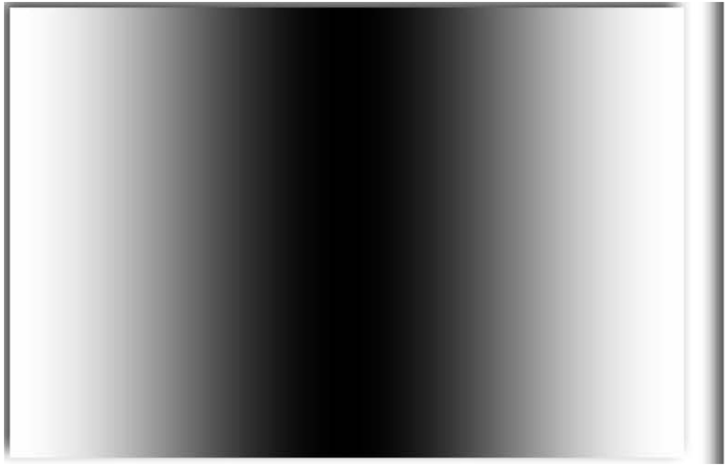
Se observa abajo cómo influye esa señal en la TF de la imagen. Se generará un punto (con intensidad proporcional a la amplitud), cuya distancia al centro es inversamente proporcional al período, y con la misma orientación θ.

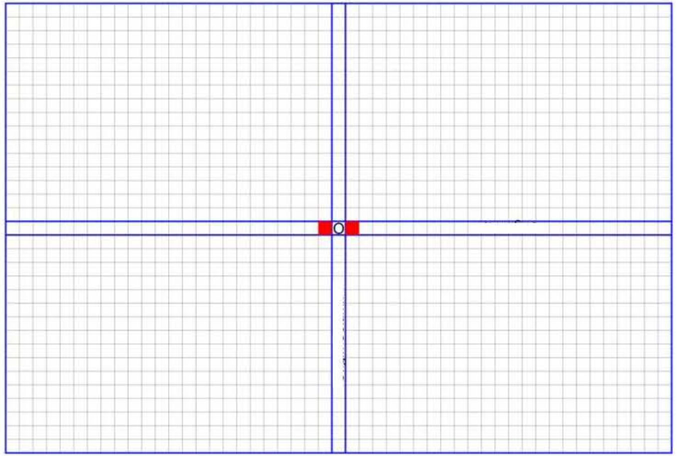


Recordando que una imagen con solo parte real produce un espectro simétrico, podemos predecir que en la TF habrá un punto simétrico al mostrado.

PDI – Procesamiento espectral de imágenes

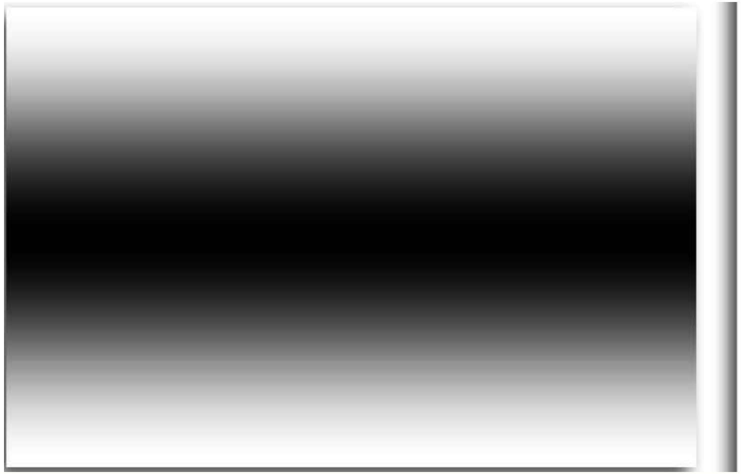
Como indicamos, una imagen que tenga una sola oscilación horizontal por pantalla (la frecuencia más baja representable) generará una TF con dos pixel no nulos a izquierda y derecha del pixel central.

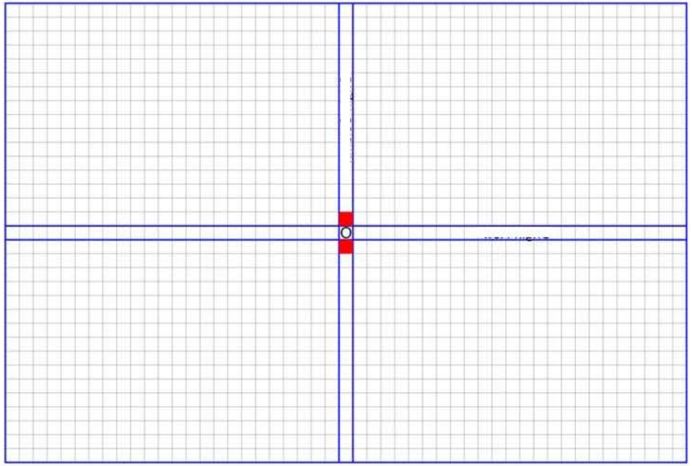




PDI – Procesamiento espectral de imágenes

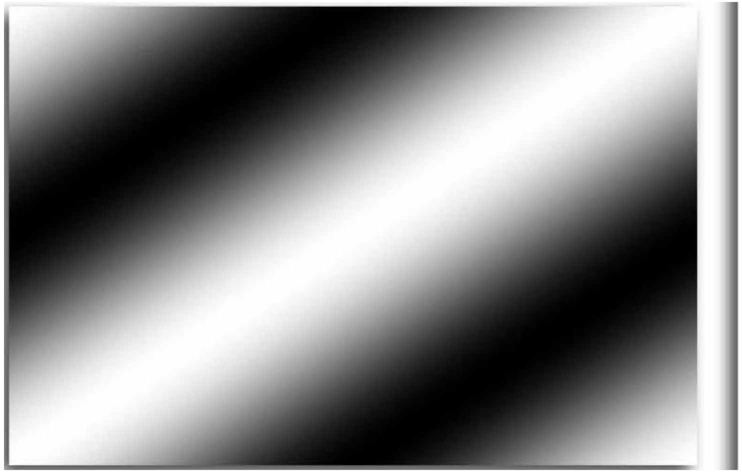
La situación recíproca ocurre respecto de una oscilación vertical.

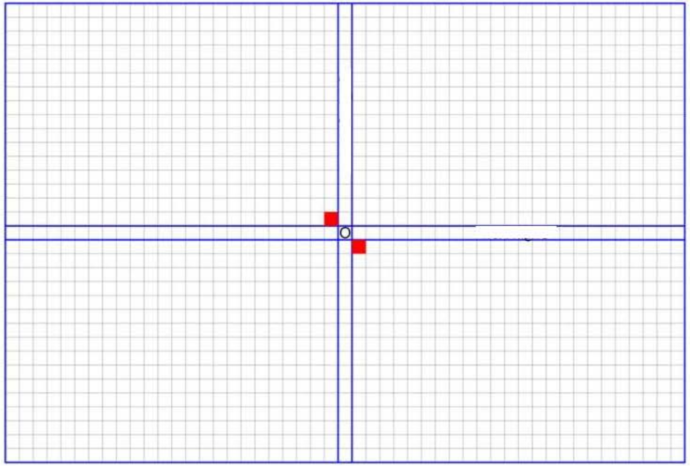




PDI – Procesamiento espectral de imágenes

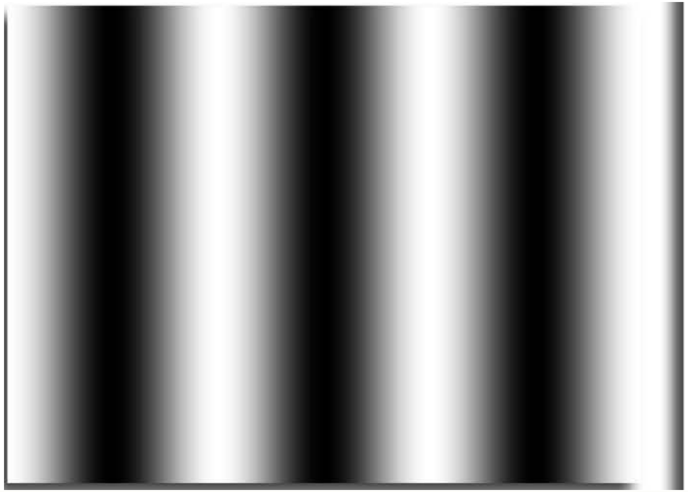
La relación geométrica vale para situaciones combinadas, es decir, oscilaciones diagonales.

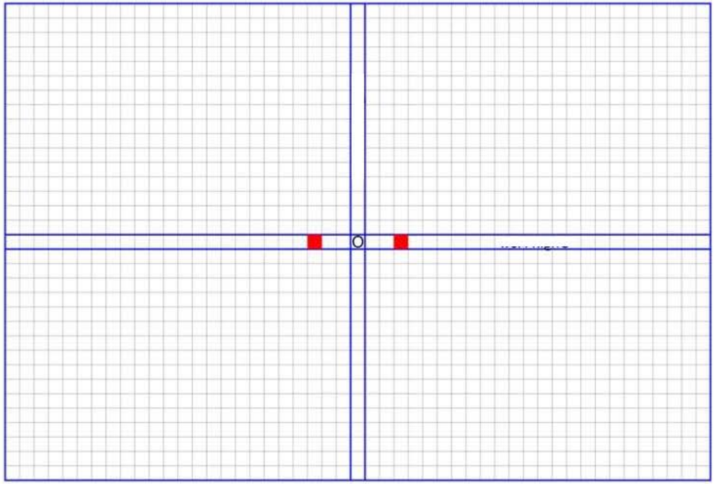




PDI – Procesamiento espectral de imágenes

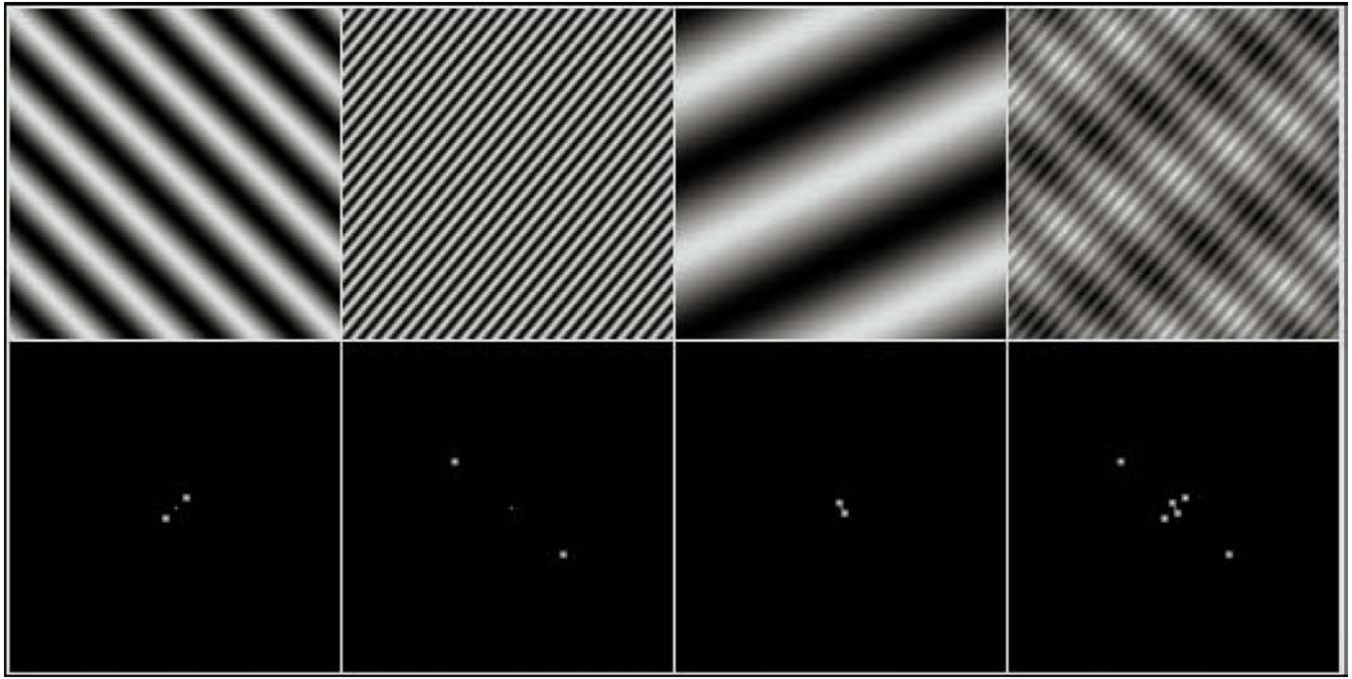
Observen la simetría respecto de múltiplos: estrecho las oscilaciones en la imagen, y eso estira los puntos en la TF.





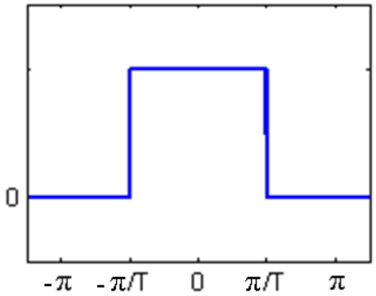
PDI – Procesamiento espectral de imágenes

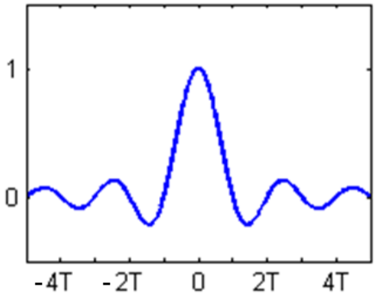
La propiedad de linealidad de la TF: tenemos tres imágenes y sus TFs. La suma de las tres imágenes genera una TF suma de las tres TFs.



PDI – Procesamiento espectral de imágenes

La TF de objetos geométricos es importante para poder interpretar geométricamente la TF en imágenes. De particular importancia es la función *sinc*. https://es.wikipedia.org/wiki/Función_sinc



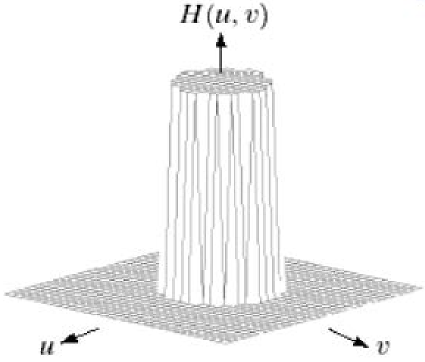


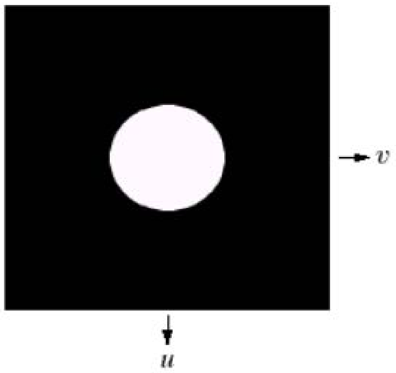
$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

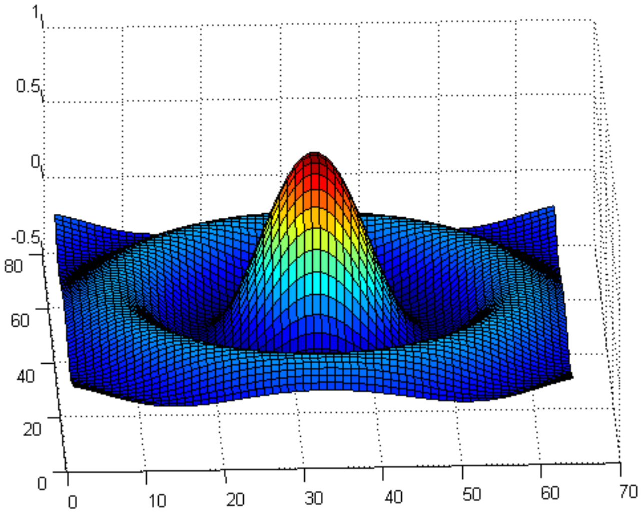
Sinc es la TF del pulso rectangular. Inversamente la TF inversa del pulso rectangular es la función sinc.

PDI – Procesamiento espectral de imágenes

De esa forma, podemos pensar un disco como una “función pulso de revolución”, y por lo tanto su TF debería ser una “sinc de revolución” (aquí representada como 3D para facilitar entenderla).

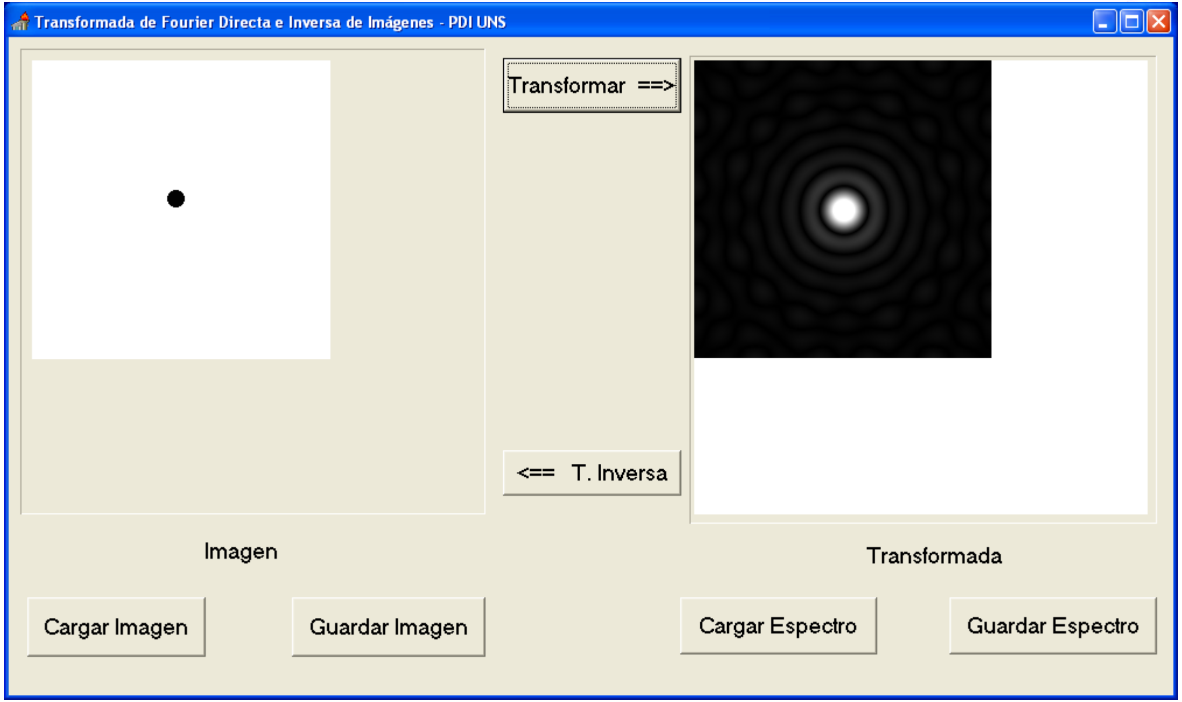






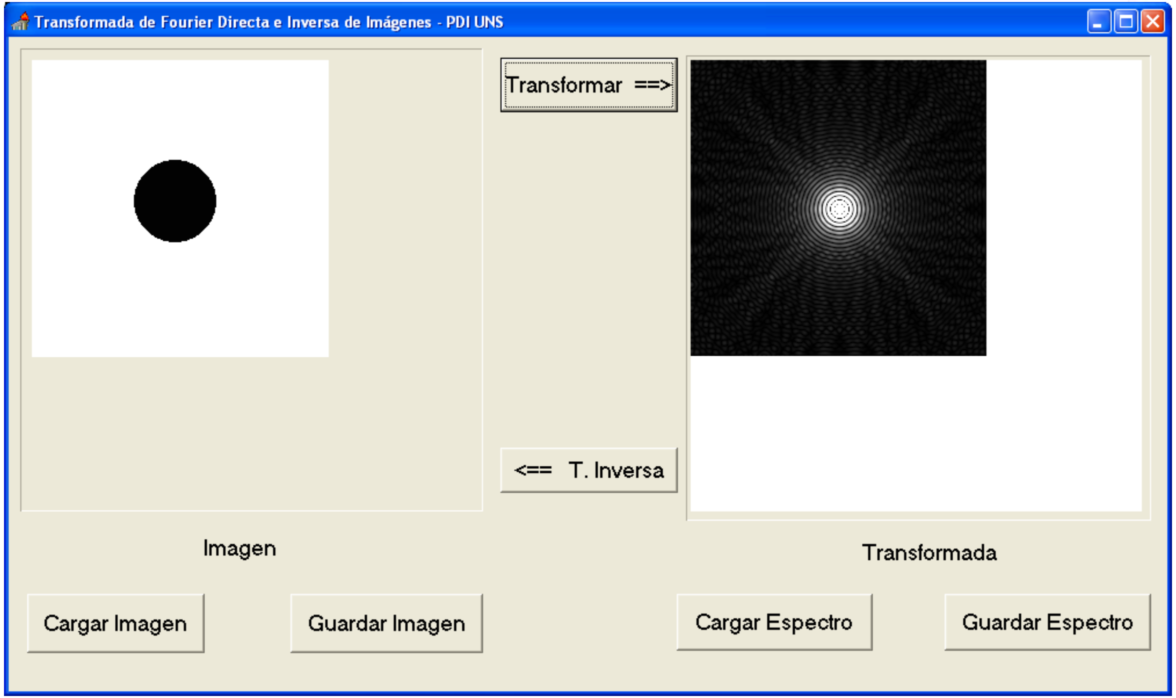
PDI – Procesamiento espectral de imágenes

Vemos un aplicativo que implementa la TF de imágenes, con un disco de entrada, y la TF obtenida, la cual parece acercarse al ideal teórico.



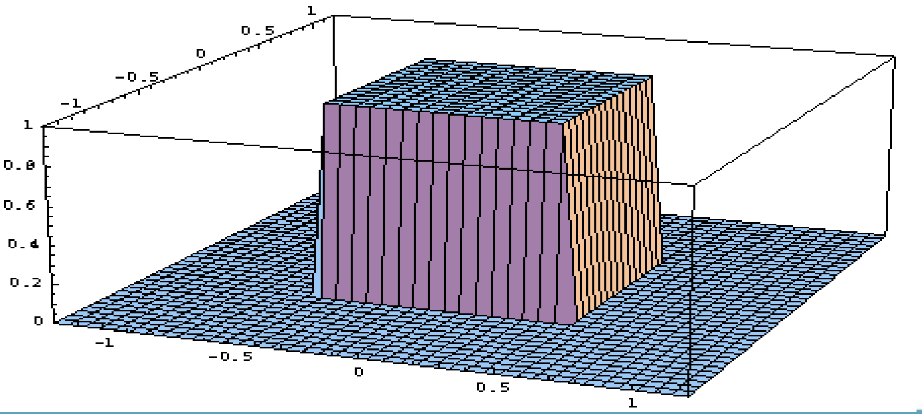
PDI – Procesamiento espectral de imágenes

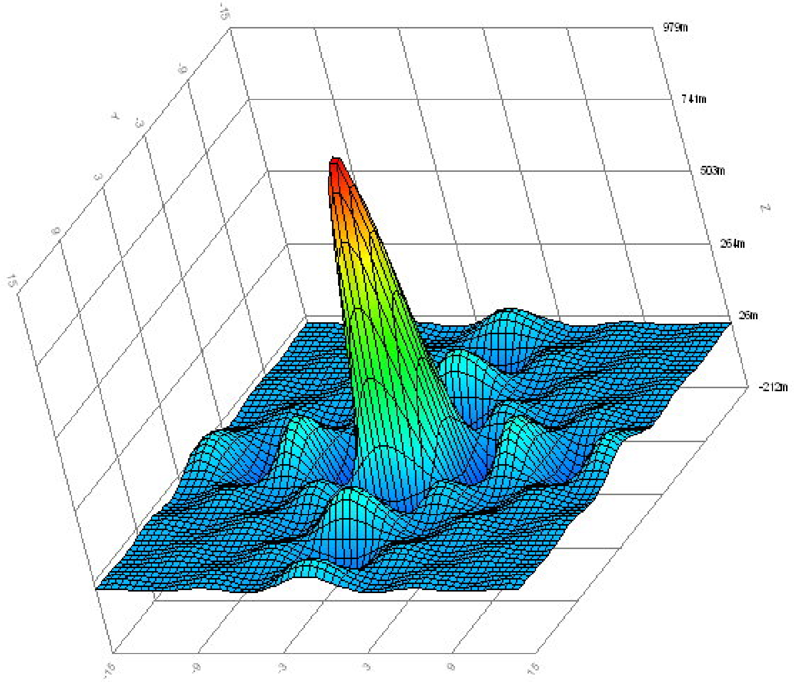
Con un disco más grande, el sinc 2D tiene más oscilaciones más pequeñas (propiedad de simetría inversa). Sin embargo se observan también unos patrones de interferencia ("*moiré*") debidos al aliasing de la figura original.
https://es.wikipedia.org/wiki/Patrón_de_Moiré



PDI – Procesamiento espectral de imágenes

Del mismo modo, podemos pensar un rectángulo como un producto entre dos pulsos rectangulares, y su TF como el producto entre dos sinc.

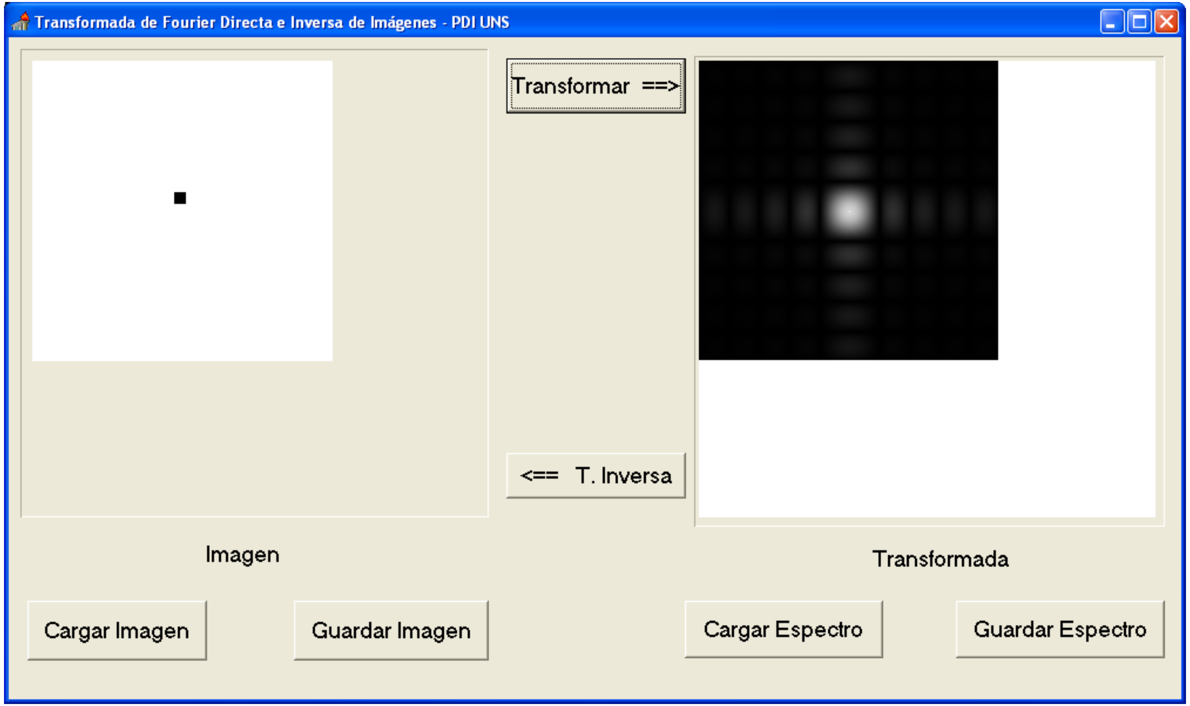




LCI
LABORATORIO DE CIENCIAS DE LAS IMAGENES
DIEC

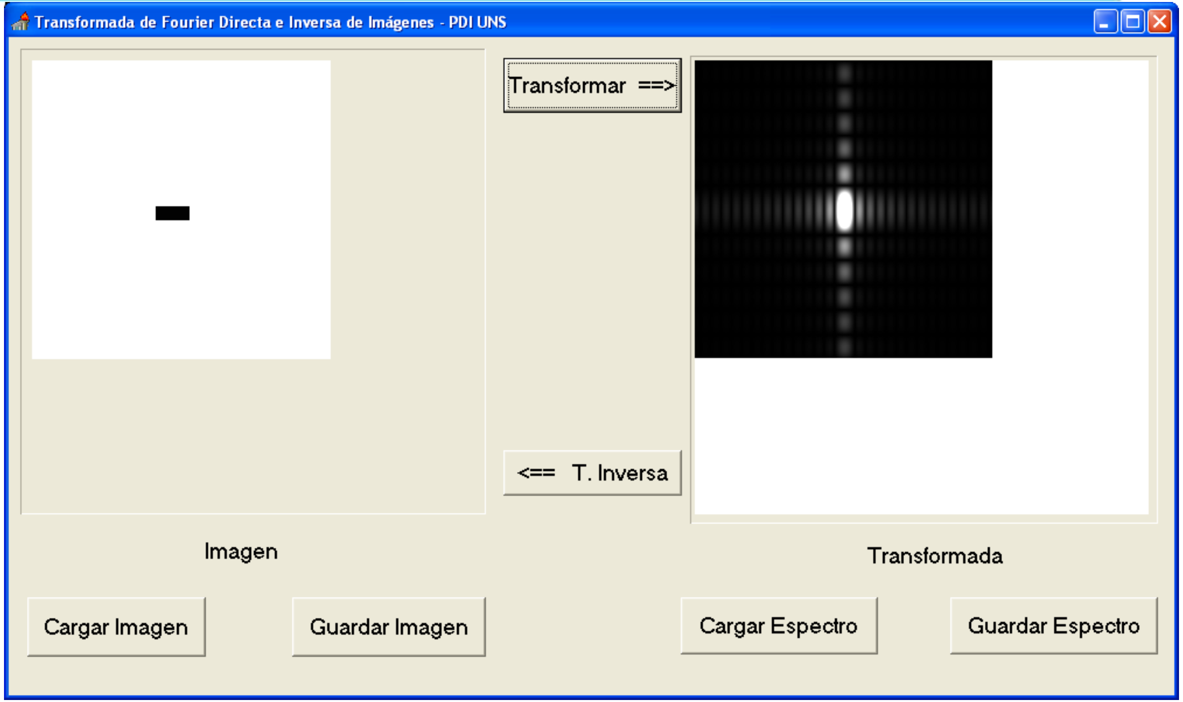
PDI – Procesamiento espectral de imágenes

En efecto, la herramienta numérica confirma lo predicho por la teoría.



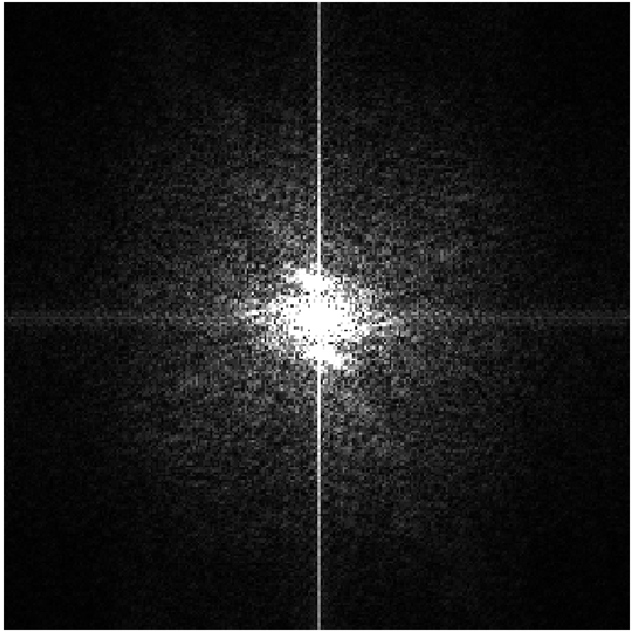
PDI – Procesamiento espectral de imágenes

Si los lados del rectángulos son diferentes, eso generará una diferencia inversa en la TF.



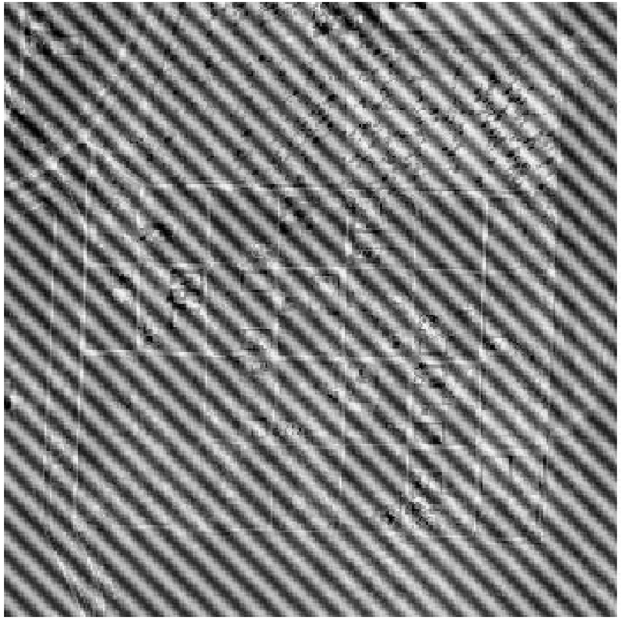
PDI – Procesamiento espectral de imágenes

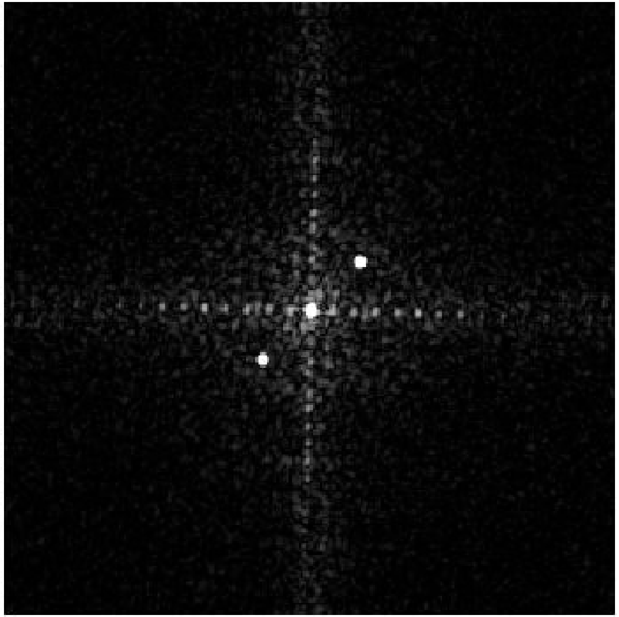
La TF de una imagen fotográfica. La raya vertical se debe a la diferencia en luminancias entre el borde inferior y el borde superior de la imagen.



PDI – Procesamiento espectral de imágenes

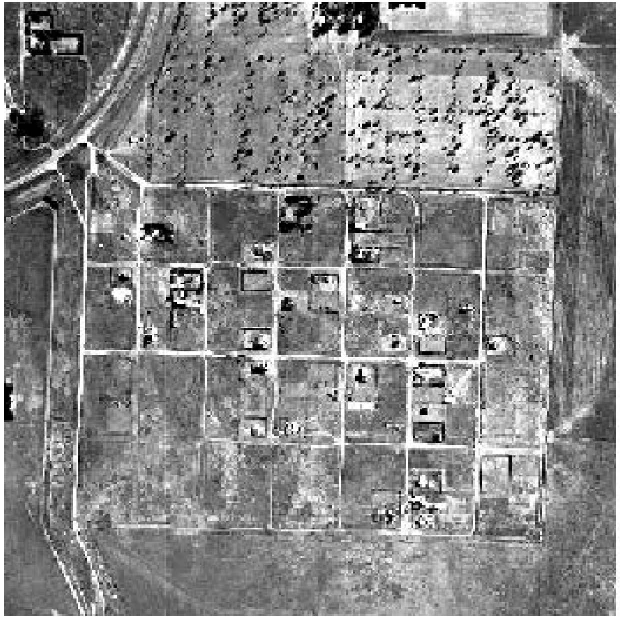
La TF de una imagen con una interferencia aditiva. Se observan los dos puntos simétricos donde esa interferencia está localizada en el espectro. Si editamos el espectro y eliminamos la energía a esas frecuencias se puede restaurar la imagen original.

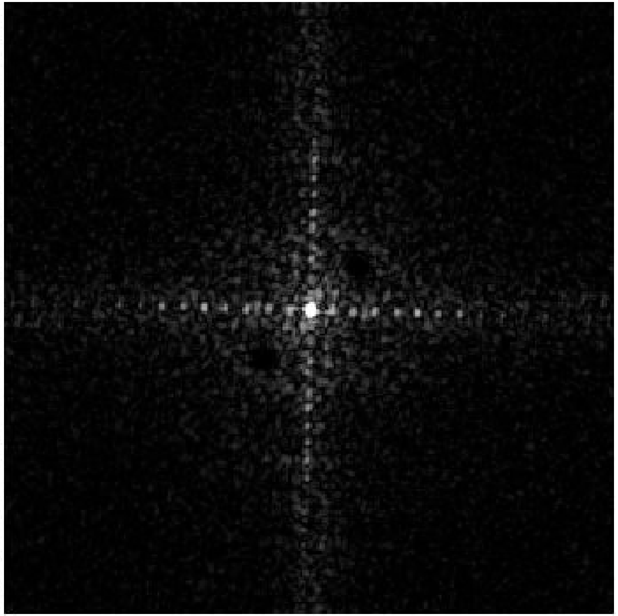




PDI – Procesamiento espectral de imágenes

En efecto, modificamos la TF y realizamos la transformada inversa con el espectro manipulado, y se logra corregir casi por completo el defecto en la imagen original.





El capítulo 6 del libro de Russ trae muchos ejemplos similares.

PDI – Actividad práctica

Armar un aplicativo como el mostrado en este apunte, que permita la generación de TFs directas e inversas de imágenes.

Probarlo con diferentes figuras geométricas y tratar de reproducir algunos de los ejemplos vistos aquí. Generar otros ejemplos (elipses, rombos, dos o más objetos, etc.).

Guardar el espectro de amplitud de una imagen en un bitmap, luedo editarlo con un editor gráfico, y finalmente aplicar la transformada inversa (preservando la fase) para ver los efectos.