

Esercitazioni
di

Meccanica Applicata alle Macchine

A cura di
Andrea Bracci
Marco Gabiccini

Università di Pisa

**Dipartimento di Ingegneria Meccanica,
Nucleare e della Produzione**

Anno Accademico 2008-2009

Indice

1 Semplificazione Cinematismo Planare	1
1.1 Analisi cinematica	1
1.1.1 Metodo analitico	2
1.1.2 Metodo grafico	4
1.2 Analisi dinamica	5
1.2.1 Metodo analitico	6
1.2.2 Metodo grafico	8
1.3 Extra	8
1.3.1 Energia potenziale	9
1.3.2 Energia cinetica	9
2 Quadrilatero Articolato	10
2.1 Analisi cinematica	10
2.1.1 Metodo analitico	11
2.1.2 Metodo grafico	12
2.2 Analisi dinamica	13
2.2.1 Metodo analitico	14
2.2.2 Metodo grafico	15
2.3 Soluzione numerica	18
3 Disco Asimmetrico	21
3.1 Analisi cinematica	22
3.1.1 Velocità	22
3.1.2 Accelerazioni	22
3.2 Dinamica	23
3.2.1 Equazioni cardinali	23
3.2.2 Equazioni di Lagrange	25
3.2.3 Principio dei Lavori Virtuali Dinamico	26
4 Slitta con Attrito	30
4.1 Analisi Cinematica	30
4.2 Analisi Dinamica	31
4.2.1 Extra	33
4.3 Soluzione Numerica	33
4.4 Metodo pratico per scrivere la dinamica	34

5 Frenatura di un Disco	35
5.1 Analisi dinamica	35
5.1.1 Soluzione numerica	38
6 Frenatura di un Disco con un Peso	39
6.1 Dinamica	39
7 Frenatura di un Disco con Molle Precaricate	42
7.1 Dinamica	42
8 Carrello con Peso e Attrito	45
8.1 Dinamica	45
8.2 Soluzione Numerica	47
9 Oscillazioni Libere di un Sistema a 1 GDL	49
9.1 Dinamica	49
9.2 Oscillazioni Libere	50
9.2.1 Caso 1	50
9.2.2 Caso 2	52
10 Oscillazioni di un Cinematismo a 1 GDL	55
10.1 Dinamica	55
11 Oscillazioni Libere di un Sistema a 2 GDL	59
11.1 Dinamica	59
11.2 Oscillazioni libere	60
11.3 Caso numerico	61
12 Oscillazioni Forzate	63
12.1 Equazioni di Lagrange	64
12.2 Seconda cardinale rispetto a C_V di ② rispetto a ①	65
12.3 Seconda cardinale rispetto a $C(t)$ di ② rispetto a ①	66
12.4 Piccole oscillazioni	67
13 Oscillazioni Forzate del Doppio Pendolo	70
13.1 Dinamica	71
13.2 Piccole oscillazioni forzate	72
13.3 Caso numerico	73
14 Oscillazioni Forzate 2	75
14.1 Statica	75
14.1.1 Caso con $\omega = 0$	75
14.1.2 Caso con $\omega = \text{cost} \neq 0$	76
14.1.3 Equazione del moto	77
14.2 Dinamica con Equazioni di Lagrange	78
14.2.1 Termini non conservativi	79
14.2.2 Equazioni del moto	79
15 Oscillazioni Forzate 3	80
15.1 Dinamica	80
15.2 Vibrazioni	81

16 Ruote Dentate a Evolvente	83
16.1 Esercizio 1	83
16.1.1 Preliminari	83
16.1.2 Prima soluzione	83
16.1.3 Seconda soluzione	85
16.1.4 Terza soluzione	86
16.1.5 Quarta soluzione	88
16.1.6 Extra	89
16.2 Linea di contatto e arco d'azione	89
16.2.1 Segmento di contatto	91
16.3 Rendimento delle ruote dentate cilindriche	93
16.3.1 Rendimento	95
16.3.2 Rendimento medio	95
17 Oscillazioni di un Rotismo	97
17.1 Risoluzione del rotismo	97
17.2 Dinamica	99
18 Grado di irregolarità di una camma	101
18.1 Caso senza attrito	102
18.2 Caso con attrito	106
19 Grado di irregolarità del manovellismo di spinta	108
19.1 Dinamica	108
20 Lubrificazione	111
20.1 Richiami di teoria	111
20.2 Pattino lineare	116
20.3 Pattino esponenziale	119
20.4 Pattino a gradino	121

Capitolo 1

Semplice Cinematismo Planare

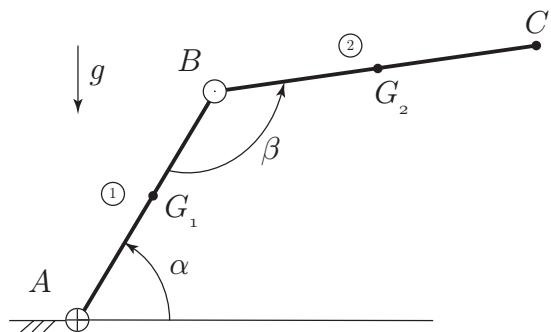


Figura 1.1: Schema di un semplice cinematismo planare a due gradi di libertà.

Si consideri lo schema cinematico riportato in figura 1.1. Si suppongono completamente note la geometria e le caratteristiche d'inerzia di entrambi i corpi rigidi: lunghezza l_i , distanza del baricentro r_i dai punti A e B rispettivamente, massa m_i e momento d'inerzia baricentrico J_{G_i} . Inoltre si suppongono note le leggi orarie $\alpha(t)$ e $\beta(t)$. (**Nota:** $\beta(t)$ è l'angolo relativo fra i due corpi rigidi come indicato in figura 1.1.)

Si risolvano i seguenti problemi:

- Determinare le velocità e le accelerazioni di ogni punto dei due corpi.
- Determinare le coppie da fornire ai giunti per realizzare il moto imposto e, contestualmente, determinare le reazioni vincolari e le forze scambiate sui giunti.

1.1 Analisi cinematica

In via preliminare si calcola l'angolo di rotazione del corpo rigido ② rispetto ad una retta parallela all'asse orizzontale. Tale angolo, indicato con γ è tale per

cui

$$\pi - \beta + \gamma = \alpha.$$

Ne discendono quindi le seguenti relazioni.

$$\begin{aligned}\gamma &= \alpha + \beta - \pi \\ \dot{\gamma} &= \dot{\alpha} + \dot{\beta} \\ \ddot{\gamma} &= \ddot{\alpha} + \ddot{\beta}\end{aligned}$$

Nel seguito risulterà comodo ricorrere a queste espressioni nel calcolo delle velocità e delle posizioni dei punti dei corpi rigidi.

1.1.1 Metodo analitico

Velocità

Per risolvere analiticamente il sistema in esame si ricorre alle formule fondamentali della cinematica. In particolare valgono le seguenti relazioni:

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{v}_{BA} = \underline{v}_A + \dot{\alpha} \underline{k} \wedge \underline{AB} \quad (1.1)$$

$$\underline{v}_C = \underline{v}_B + \underline{v}_{CB} = \underline{v}_B + (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \underline{k} \wedge \underline{BC} \quad (1.2)$$

dove $\underline{v}_A = \underline{0}$ perchè il punto A è vincolato al telaio. Essendo noti sia $\dot{\alpha}$ che $\dot{\beta}$, risultano determinabili direttamente le velocità di ogni altro punto di entrambi i corpi rigidi.

Attenzione: le formule precedenti sono un caso particolare della seguente formula fondamentale della cinematica:

$$\underline{v}_B = \underline{v}_B^{(t)} + \underline{v}_B^{(r)} \quad (1.3)$$

dove $\underline{v}_B^{(t)}$ e $\underline{v}_B^{(r)}$ sono rispettivamente la velocità di trascinamento e la velocità relativa di B rispetto ad un dato sistema di riferimento. Nel caso delle relazioni (1.1) abbiamo:

$$\begin{aligned}\underline{v}_B &= \underline{v}_B^{(t)} + \underline{v}_B^{(r)} = \underline{v}_A + \dot{\alpha} \underline{k} \wedge \underline{AB} \\ \underline{v}_C &= \underline{v}_C^{(t)} + \underline{v}_C^{(r)} = \underline{v}_B + (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \underline{k} \wedge \underline{BC}\end{aligned}$$

dove, per quanto riguarda il punto B , è stato scelto un sistema di riferimento fisso, mentre per il punto C è stato scelto un sistema di riferimento **traslante** e solidale con il punto B .

È interessante trovare le relazioni (1.1) considerando un sistema di riferimento diverso. Ad esempio, la velocità del punto C può essere determinata scegliendo un sistema di riferimento **rotante** solidale con il corpo ①. In questo caso avremo:

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{v}}_C^{(r)} &= \dot{\beta} \underline{k} \wedge \underline{BC} \\ \tilde{\underline{v}}_C^{(t)} &= \dot{\alpha} \underline{k} \wedge \underline{AC}\end{aligned}$$

Il vettore \underline{AC} può essere scomposto come segue

$$\underline{AC} = \underline{AB} + \underline{BC}$$

ne discende che la velocità assoluta del punto C può essere scritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\underline{v}_C &= \tilde{\underline{v}}_C^{(r)} + \tilde{\underline{v}}_C^{(t)} = \dot{\beta}k \wedge \underline{BC} + \dot{\alpha}k \wedge (\underline{AB} + \underline{BC}) \\ &= \dot{\alpha}k \wedge \underline{AB} + (\dot{\alpha} + \dot{\beta})k \wedge \underline{BC}\end{aligned}$$

che risulta identica alla (1.1) in quanto $\underline{v}_A = \underline{0}$ e $\underline{v}_{BA} = \dot{\alpha}k \wedge \underline{AB}$. Si fa notare che questo secondo metodo risulta più laborioso rispetto all'utilizzo diretto delle (1.1).

Accelerazioni

Per quanto riguarda il calcolo delle accelerazioni si procede in maniera analoga a quanto visto per le velocità. Si utilizzano le seguenti relazioni fondamentali (teorema di Rivals):

$$\begin{aligned}\underline{a}_B &= \underline{a}_A + \underline{a}_{BA} = \ddot{\alpha}k \wedge \underline{AB} - \dot{\alpha}^2 \underline{AB} \\ \underline{a}_C &= \underline{a}_B + \underline{a}_{CB} = \underline{a}_B + (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta})k \wedge \underline{BC} - (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \underline{BC}\end{aligned}\tag{1.4}$$

in quanto $\underline{a}_A = \underline{0}$ essendo il punto A rigidamente vincolato al telaio. Come visto in precedenza, dato che gli andamenti temporali di $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ sono noti, dalle relazioni precedenti si possono determinare le accelerazioni di tutti i punti dei due corpi rigidi.

Analogamente al caso delle velocità le relazioni (1.4) sono un caso particolare della seguente formula fondamentale della cinematica:

$$\underline{a}_B = \underline{a}_B^{(r)} + \underline{a}_B^{(t)} + \underline{a}_B^{(c)}\tag{1.5}$$

dove $\underline{a}_B^{(r)}$, $\underline{a}_B^{(t)}$ e $\underline{a}_B^{(c)}$ sono rispettivamente l'accelerazione di B relativa, di trascinamento e di Coriolis. Nel caso delle (1.4) l'accelerazione di Coriolis è nulla in quanto i sistemi di riferimento scelti sono traslanti. Pertanto valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\underline{a}_B^{(t)} &= \underline{0} \\ \underline{a}_B^{(r)} &= \ddot{\alpha}k \wedge \underline{AB} - \dot{\alpha}^2 \underline{AB} \\ \underline{a}_C^{(t)} &= \underline{a}_B \\ \underline{a}_C^{(r)} &= (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta})k \wedge \underline{BC} - (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \underline{BC}\end{aligned}$$

Anche in questo caso è interessante determinare le accelerazioni dei punti utilizzando un sistema di riferimento diverso. Ad esempio per determinare l'accelerazione del punto C possiamo scegliere un sistema di riferimento **rotante** solidale al corpo ①. In questo caso valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\tilde{\underline{a}}_C^{(t)} &= \ddot{\alpha}k \wedge \underline{AC} - \dot{\alpha}^2 \underline{AC} \\ \tilde{\underline{a}}_C^{(r)} &= \ddot{\beta}k \wedge \underline{BC} - \dot{\beta}^2 \underline{BC} \\ \tilde{\underline{a}}_C^{(c)} &= 2\dot{\alpha}k \wedge \tilde{\underline{v}}_C^{(r)}\end{aligned}$$

L'espressione di $\tilde{v}_C^{(r)}$ è direttamente ricavata dall'analisi di velocità svolta in precedenza. Ne risulta quindi

$$\tilde{a}_C^{(c)} = 2\dot{\alpha}\underline{k} \wedge (\dot{\beta}\underline{k} \wedge \underline{BC}) = -2\dot{\alpha}\dot{\beta}\underline{BC}$$

Sommando i tre termini appena trovati si ottiene la seguente relazione

$$\underline{a}_C = \tilde{a}_C^{(t)} + \tilde{a}_C^{(r)} + \tilde{a}_C^{(c)} = \ddot{\alpha}\underline{k} \wedge \underline{AC} - \dot{\alpha}^2\underline{AC} + \ddot{\beta}\underline{k} \wedge \underline{BC} - \dot{\beta}^2\underline{BC} - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\underline{BC}$$

Scomponendo il vettore $\underline{AC} = \underline{AB} + \underline{BC}$ e sviluppando i conti si ottiene

$$\begin{aligned} \underline{a}_C &= \ddot{\alpha}\underline{k} \wedge \underline{AB} - \dot{\alpha}^2\underline{AB} \\ &\quad + (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta})\underline{k} \wedge \underline{BC} \\ &\quad - (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2)\underline{BC} - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}\underline{BC} \end{aligned}$$

da cui

$$\underline{a}_C = \underline{a}_B + (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta})\underline{k} \wedge \underline{BC} - (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2\underline{BC}$$

che risulta identica alla (1.4).

1.1.2 Metodo grafico

Il metodo grafico consente di determinare, in una particolare configurazione, i valori delle velocità e delle accelerazioni di ogni punto dei corpi rigidi. Il procedimento da seguire è qui riportato.

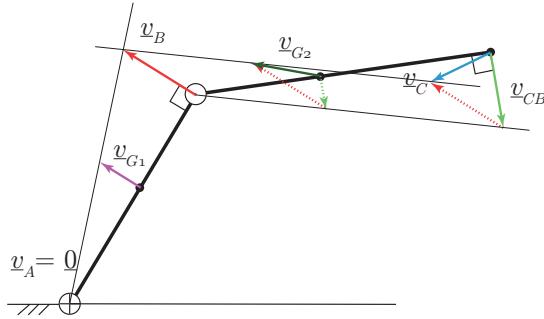


Figura 1.2: Determinazione grafica delle velocità.

- Si traccia la velocità v_B (assoluta) ortogonale all'asta ① (ricordarsi che $v_A = 0$) e diretta in maniera congruente con il segno della velocità angolare $\dot{\alpha}$ (nel caso in figura si è posto $\dot{\alpha} > 0$).
- Si traccia la velocità v_{CB} (relativa) ortogonale all'asta ②. In questo caso è stata assunta una velocità angolare $\dot{\beta}$ tale che $\dot{\gamma} = \dot{\alpha} + \dot{\beta} < 0$.
- Si ricava la velocità v_C assoluta sommando i due vettori (v_B e v_{CB}) precedentemente trovati.

Si noti che la costruzione grafica sopra riportata è stata effettuata direttamente sui punti dei due corpi rigidi, ma dato che le velocità sono vettori liberi (cioè non

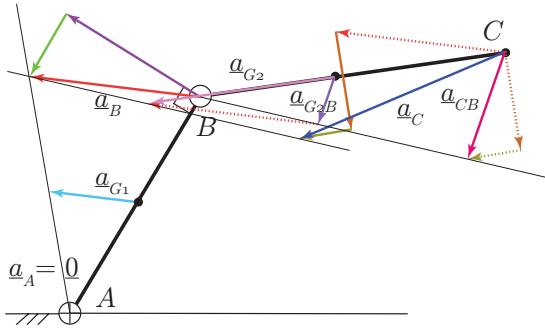


Figura 1.3: Determinazione grafica delle accelerazioni.

applicati ad un particolare punto) la costruzione grafica può essere effettuata trasportando i vettori in qualunque altro punto del piano.

Per quanto riguarda le accelerazioni si procede in modo analogo come sotto riportato:

- Si riportano nel punto B le due componenti (tangenziale e radiale) dell'accelerazione del punto B e si sommano. Il risultato della somma è l'accelerazione assoluta del punto B . Il valore di $\ddot{\alpha}$ è assunto positivo. E' importante notare che l'accelerazione radiale che è diretta lungo \underline{BA} , cioè *da B verso A*, ovvero verso il centro di rotazione del corpo ①.
- Si riporta sul punto C l'accelerazione \underline{a}_B appena trovata.
- Si riportano *in cascata*, a partire dalla punta di \underline{a}_B le due componenti (tangenziale e radiale) dell'accelerazione *relativa* del punto C rispetto a B . Anche in questo caso si è assunto che $\dot{\beta}$ sia tale per cui $\ddot{\gamma} < 0$.
- Si ricava l'accelerazione \underline{a}_C assoluta, sommando i tre vettori così concatenati.

E' importante notare che con il procedimento appena esposto si possono determinare le velocità e le accelerazioni di qualunque punto dei due corpi rigidi. In particolare è possibile ricavare le velocità e le accelerazioni dei due baricentri.

A titolo d'esempio: per determinare l'accelerazione assoluta del baricentro G_1 del corpo ① si traccia la retta passante per A e per la punta del vettore \underline{a}_B . Si traccia poi la parallela ad \underline{a}_B passante per G_1 . Il vettore così determinato è \underline{a}_{G_1} .

Per quanto riguarda l'accelerazione \underline{a}_{G_2} del baricentro G_2 del corpo ② il procedimento è analogo, facendo attenzione al fatto che in questo caso, l'accelerazione del punto B non è nulla.

Anche nel caso delle accelerazioni è possibile effettuare la costruzione grafica in qualunque altro punto del piano in quanto anche le accelerazioni sono vettori liberi.

1.2 Analisi dinamica

Una volta che sono state determinate le velocità e le accelerazioni dei corpi rigidi si determinano le forze e i momenti necessari ad ottenere il moto imposto.

1.2.1 Metodo analitico

Si riportano innanzitutto gli diagrammi di corpo libero di ciascuno dei due corpi rigidi. Le equazioni di equilibrio di ① in un sistema di riferimento fisso sono le

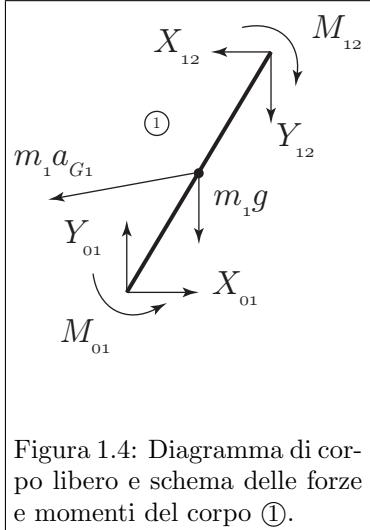


Figura 1.4: Diagramma di corpo libero e schema delle forze e momenti del corpo ①.

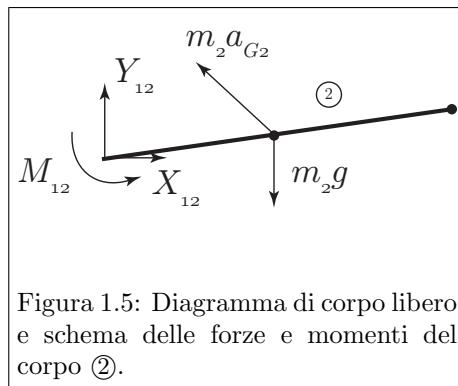


Figura 1.5: Diagramma di corpo libero e schema delle forze e momenti del corpo ②.

seguenti

$$\begin{aligned} m_1 a_{G_1 x} &= X_{01} - X_{12} \\ m_1 a_{G_1 y} &= Y_{01} - m_1 g - Y_{12} \\ \textcircled{G}_1 : J_{G_1} \ddot{\alpha} &= M_{01} - M_{12} + X_{01} r_1 \sin(\alpha) - Y_{01} r_1 \cos(\alpha) + \\ &+ X_{12}(l_1 - r_1) \sin(\alpha) - Y_{12}(l_1 - r_1) \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (1.6)$$

dove l'equazione di equilibrio alla rotazione è scritta rispetto al baricentro G_1 .

Per il corpo ② si procede in maniera analoga e le equazioni di equilibrio risultano le seguenti:

$$\begin{aligned} m_2 a_{G_2 x} &= X_{12} \\ m_2 a_{G_2 y} &= Y_{12} - m_2 g \\ \textcircled{G}_2 : J_{G_2} (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) &= M_{12} + X_{12} r_2 \sin(\alpha + \beta - \pi) - Y_{12} r_2 \cos(\alpha + \beta - \pi) \end{aligned} \quad (1.7)$$

L'insieme delle (1.6) e (1.7) costituisce un sistema di sei equazioni nelle sei incognite

$$(X_{01}, Y_{01}, M_{01}, X_{12}, Y_{12}, M_{12})$$

che può pertanto essere risolto analiticamente. (**Nota: si ricordi che la geometria, le caratteristiche d'inerzia e l'andamento temporale di $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ sono noti.**)

Il sistema in esame può essere risolto in modo più semplice notando che le equazioni (1.7) sono disaccoppiate dalle (1.6). Per questo motivo è possibile risolvere separatamente le (1.7) e successivamente le (1.6).

Si ricorda che le equazioni di equilibrio a momento in (1.6) e (1.7) sono scritte rispetto al baricentro dei corpi rigidi. Consideriamo ora il caso in cui si scelga

come polo un punto diverso. In particolare andiamo a scrivere le equazioni di equilibrio al momento rispetto al punto A per ① e rispetto al punto B per ②.

Il punto A è un punto fisso e quindi risulta facile scrivere l'equazione di equilibrio alla rotazione:

$$J_{A_1}\ddot{\alpha} = (J_{G_1} + m_1 r_1^2)\ddot{\alpha} = M_{01} - M_{12} - m_1 g r_1 \cos(\alpha) + X_{12} l_1 \sin(\alpha) - Y_{12} l_1 \cos(\alpha) \quad (1.8)$$

dove $J_{A_1} = (J_{G_1} + m_1 r_1^2)$ per il teorema di Huygens-Steiner. Andiamo a verificare che l'equazione appena scritta equivale alla terza equazione di (1.7). Calcoliamo la differenza fra le due equazioni e verifichiamo l'uguaglianza dei termini rimanenti. Nella differenza si eliminano i termini uguali $J_{G_1}\ddot{\alpha}$, M_{01} , M_{12} , $X_{12}l_1\sin(\alpha)$ e $Y_{12}l_1\cos(\alpha)$ e rimane quindi

$$m_1 r_1^2 \ddot{\alpha} = -m_1 g r_1 \cos(\alpha) - (X_{01} - X_{12})r_1 \sin(\alpha) + (Y_{01} - Y_{12})r_1 \cos(\alpha)$$

che per le equazioni di equilibrio alla traslazione diventa

$$m_1 r_1^2 \ddot{\alpha} = -m_1 a_{G_1x} r_1 \sin(\alpha) + m_1 a_{G_1y} r_1 \cos(\alpha)$$

Dalla cinematica si ricavano le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} a_{G_1x} &= \ddot{\alpha} r_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \dot{\alpha}^2 r_1 \cos(\alpha) = -\ddot{\alpha} r_1 \sin(\alpha) - \dot{\alpha}^2 r_1 \cos(\alpha) \\ a_{G_1y} &= \ddot{\alpha} r_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \dot{\alpha}^2 r_1 \sin(\alpha) = \ddot{\alpha} r_1 \cos(\alpha) - \dot{\alpha}^2 r_1 \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Sostituendo tali relazioni si ottiene

$$\begin{aligned} m_1 r_1^2 \ddot{\alpha} &= m_1 r_1^2 (\sin^2(\alpha) + \cos(\alpha) \sin(\alpha)) \ddot{\alpha} + m_1 r_1^2 (\cos^2(\alpha) - \cos(\alpha) \sin(\alpha)) \ddot{\alpha} \\ m_1 r_1^2 \ddot{\alpha} &= m_1 r_1^2 \ddot{\alpha} \end{aligned}$$

che dimostra l'uguaglianza delle due equazioni di equilibrio a momento del corpo ① scritte rispetto a poli diversi.

Passiamo ora a scrivere l'equazione di equilibrio alla rotazione per il corpo ② rispetto al punto mobile B (per semplicità di notazione useremo la forma vettoriale):

$$\begin{aligned} \textcircled{B} : M_{12} + \underline{BG}_2 \wedge m_2 \underline{g} &= \dot{K}_B^{(r)} + \underline{v}_B \wedge (m_2 \underline{v}_{G_2}) = \dot{K}_{G_2}^{(r)} + \underline{BG}_2 \wedge (m_2 \underline{a}_{G_2}) \\ &= J_{G_2} \ddot{\gamma} \underline{k} + \underline{BG}_2 \wedge (m_2 \underline{a}_{G_2}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

L'espressione vettoriale dell'equilibrio alla rotazione intorno a G_2 è invece la seguente:

$$\textcircled{G}_2 : \underline{M}_{12} + G_2 B \wedge \underline{R}_{12} = \dot{K}_{G_2}^{(r)} = J_{G_2} \ddot{\gamma} \underline{k} \quad (1.10)$$

Dalle equazioni di equilibrio alla traslazione del corpo ② si ottiene

$$\underline{R}_{12} + m_2 \underline{g} = m_2 \underline{a}_{G_2}$$

da cui, sostituendo nella (1.9) si ottiene

$$\begin{aligned} J_{G_2} \ddot{\gamma} \underline{k} + \underline{BG}_2 \wedge (m_2 \underline{a}_{G_2}) &= \underline{M}_{12} + \underline{BG}_2 \wedge (m_2 \underline{a}_{G_2} - \underline{R}_{12}) \\ &= \underline{M}_{12} + \underline{G}_2 B \wedge (\underline{R}_{12} - m_2 \underline{a}_{G_2}) \end{aligned}$$

da cui ricordandosi che $\underline{BG}_2 \wedge (m_2 \underline{a}_{G_2}) = -\underline{G}_2 B \wedge (m_2 \underline{a}_{G_2})$ si ottiene

$$J_{G_2} \ddot{\gamma} \underline{k} = \underline{M}_{12} + \underline{G}_2 B \wedge \underline{R}_{12}$$

che è identica alla (1.10).

1.2.2 Metodo grafico

Passiamo ora a determinare graficamente la soluzione della dinamica nella configurazione rappresentata. Cominciamo con la soluzione per il corpo ②. Per prima cosa notiamo che la reazione \underline{R}_{12} che il corpo ① esercita sul corpo ② è l'unica forza incognita e che quindi può essere completamente determinata imponendo l'equilibrio con le altre forze che agiscono sul corpo.

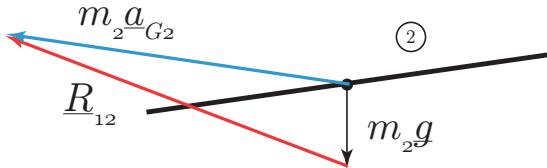


Figura 1.6: Soluzione grafica per le forze agenti sul corpo ②. Attenzione: il vettore $m_2 \underline{a}_{G_2}$ è stato modificato per maggiore chiarezza.

Rimane da determinare il momento \underline{M}_{12} applicato a ②. Facendo riferimento a (1.10) si ricava facilmente

$$\underline{M}_{12} = J_{G_2} (\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) \underline{k} - \underline{G_2 B} \wedge \underline{R}_{12}$$

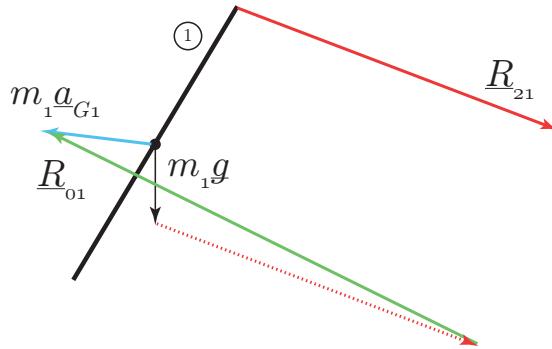


Figura 1.7: Soluzione grafica per le forze agenti sul corpo ①.

Per determinare le forze e i momenti necessari all'equilibrio del corpo ① si procede in maniera analoga: la forza \underline{R}_{01} si determina imponendo l'equilibrio alla traslazione secondo (1.6). Per determinare invece il momento \underline{M}_{01} si utilizza la seguente relazione, ricavata da (1.8):

$$\underline{M}_{01} = J_{A_1} \ddot{\alpha} \underline{k} - \underline{AG_1} \wedge (m_1 \underline{g}) - \underline{AB} \wedge \underline{R}_{12} - \underline{M}_{21}$$

1.3 Extra

Le equazioni che regolano la dinamica di un sistema meccanico possono essere determinate attraverso le equazioni di Lagrange. A tal fine è necessario determinare correttamente l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema. Questa parte è dedicata al calcolo di entrambi questi termini, rimandando ad altre sezioni il calcolo della dinamica mediante le equazioni di Lagrange.

1.3.1 Energia potenziale

L'energia potenziale \mathcal{U} del sistema è dovuta, in questo caso, solamente agli effetti gravitazionali dei due corpi rigidi in quanto non sono presenti altre forze di tipo conservativo. Risulta quindi

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = m_1 gr_1 \sin \alpha + m_2 g (l_1 \sin \alpha + r_2 \sin(\alpha + \beta - \pi))$$

1.3.2 Energia cinetica

Per quanto riguarda l'energia cinetica si sommano le energie cinetiche dei due corpi rigidi. Dato che il sistema in esame è piano, per ogni corpo rigido vale la seguente relazione

$$\mathcal{T}_i = \frac{1}{2} m_i v_{G_i}^2 + \frac{1}{2} J_{G_i} \omega_i^2$$

dove \mathcal{T}_i è l'energia cinetica del corpo i e ω_i è la velocità angolare del corpo intorno all'asse z ortogonale al piano. L'energia cinetica del sistema in esame risulta quindi

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 = \frac{1}{2} m_1 v_{G_1}^2 + \frac{1}{2} J_{G_1} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} J_{G_2} (\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2$$

della quale, una volta risolta la cinematica, tutte le grandezze sono note.

Capitolo 2

Quadrilatero Articolato

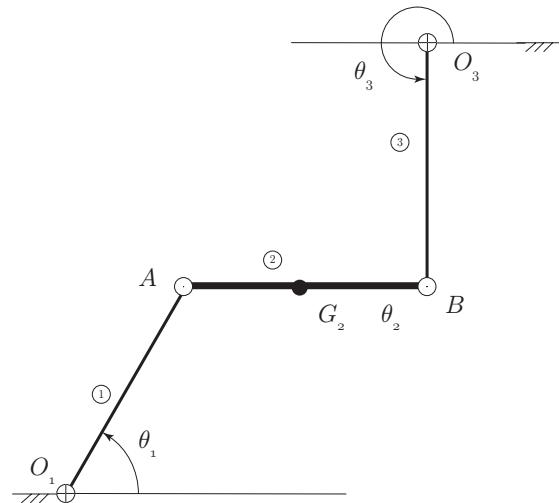


Figura 2.1: Schema di un quadrilatero articolato.

Si consideri il sistema in figura 2.1. Il cinematismo in esame è un quadrilatero articolato. Sono note tutte le lunghezze dei tre corpi rigidi e si suppone che solamente il corpo ② sia dotato di massa m_2 e momento d'inerzia baricentrico J_{G_2} . Gli altri corpi rigidi sono considerati privi di massa e d'inerzia. Per semplicità si assume di essere in un piano orizzontale e quindi non ha effetto la forza di gravità.

Sia assegnato l'andamento temporale $\theta_1(t)$, si determini il momento \underline{M}_{01} necessario da applicare al corpo ① nel punto O_1 al fine di ottenere il moto imposto.

2.1 Analisi cinematica

Risolviamo innanzitutto la cinematica del sistema determinando le velocità e le accelerazioni di ogni punto dei corpi rigidi.

2.1.1 Metodo analitico

Velocità

Per quanto riguarda il corpo ① valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\underline{v}_{O_1} &= \underline{0} \\ \underline{v}_A &= \underline{v}_{O_1} + \underline{v}_{AO_1} = \dot{\theta}_1 \underline{k} \wedge \underline{O_1 A}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Per il corpo ② vale quanto segue:

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{v}_{BA} = \underline{v}_A + \dot{\theta}_2 \underline{k} \wedge \underline{AB}\tag{2.2}$$

Considerando il punto B appartenente al corpo ③ si ha anche

$$\underline{v}_B = \underline{v}_{O_3} + \underline{v}_{BO_3} = \dot{\theta}_3 \underline{k} \wedge \underline{O_3 B}\tag{2.3}$$

per cui, in definitiva si ottiene la seguente relazione:

$$\underline{v}_A + \dot{\theta}_2 \underline{k} \wedge \underline{AB} = \dot{\theta}_3 \underline{k} \wedge \underline{O_3 B}\tag{2.4}$$

che è la relazione di *chiusura* della catena cinematica. La (2.4) consiste di due equazioni scalari nelle due incognite $\dot{\theta}_2$ e $\dot{\theta}_3$ e pertanto può essere risolta analiticamente.

Accelerazioni

Per quanto riguarda le accelerazioni del corpo ① valgono le classiche relazioni:

$$\underline{a}_{O_1} = \underline{0}\tag{2.5}$$

$$\underline{a}_A = \underline{a}_{O_1} + \underline{a}_{AO_1} = \ddot{\theta}_1 \underline{k} \wedge \underline{O_1 A} - \dot{\theta}_1^2 \underline{O_1 A}\tag{2.6}$$

Analogamente per il corpo ② valgono

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \wedge \underline{AB} - \dot{\theta}_2^2 \underline{AB}\tag{2.7}$$

Come visto in precedenza per le velocità, l'accelerazione del punto B considerato appartenente al corpo ③ è la seguente

$$\underline{a}_B = \ddot{\theta}_3 \underline{k} \wedge \underline{O_3 B} - \dot{\theta}_3^2 \underline{O_3 B}\tag{2.8}$$

Imponendo l'uguaglianza delle (2.7) e (2.8) si ottiene

$$\underline{a}_A + \ddot{\theta}_2 \underline{k} \wedge \underline{AB} - \dot{\theta}_2^2 \underline{AB} = \ddot{\theta}_3 \underline{k} \wedge \underline{O_3 B} - \dot{\theta}_3^2 \underline{O_3 B}\tag{2.9}$$

che è la relazione di *chiusura* della catena cinematica. Come visto in precedenza, la (2.9) consiste di due equazioni nelle due incognite $\ddot{\theta}_2$ e $\ddot{\theta}_3$ e può quindi essere risolto analiticamente.

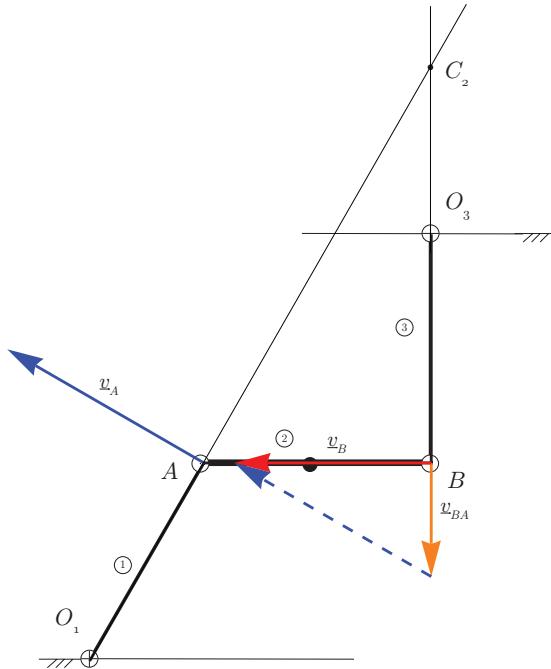


Figura 2.2: Costruzione grafica delle velocità.

2.1.2 Metodo grafico

Per determinare graficamente le velocità e di ogni punto dei corpi rigidi in una particolare configurazione è necessario *risolvere* la catena cinematica chiusa, si deve trovare quindi una relazione che leggi le velocità angolari dei corpi rigidi. Si faccia riferimento alla figura 2.2. Cominciamo notando che dei corpi ① e ③ sappiamo che hanno un moto rotatorio intorno a O_1 e O_3 rispettivamente. Il corpo ②, invece, ha in generale un moto vario, ancora incognito. Il centro delle velocità C_2 di ② è facilmente determinabile in quanto conosciamo la direzione della velocità dei due punti A e B . Il punto C_2 risulta quindi dall'intersezione dei prolungamenti di $\underline{O_1}A$ e $\underline{O_3}B$.

Dato che conosciamo la velocità \underline{v}_A , la velocità del punto B può essere determinata completamente in quanto la velocità angolare $\underline{\omega}_2$ di ② è calcolata tramite la seguente relazione

$$\underline{\omega}_2 = \dot{\theta}_2 \underline{k} = \frac{\underline{v}_A \wedge \underline{C}_2 A}{|\underline{C}_2 A|^2}$$

e la velocità \underline{v}_B risulta

$$\underline{v}_B = \dot{\theta}_2 \underline{k} \wedge \underline{C}_2 B$$

Graficamente la velocità \underline{v}_B si determina velocemente attraverso il campo di velocità di ② tracciato da C_2 ad A . La velocità angolare $\dot{\theta}_3$ è facilmente determinata attraverso la seguente relazione

$$\dot{\theta}_3 = \frac{\underline{v}_B}{|\underline{O_3}B|}$$

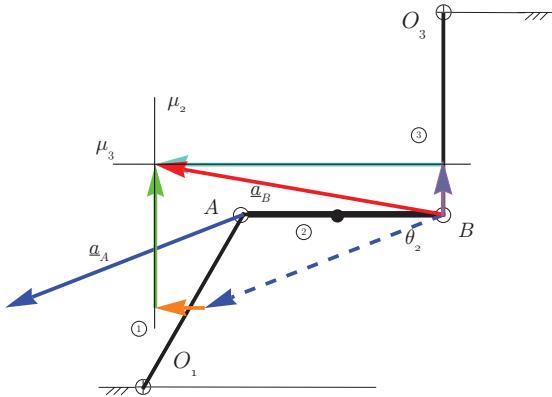


Figura 2.3: Costruzione grafica delle accelerazioni.

Passiamo ora a determinare graficamente le accelerazioni dei corpi rigidi. Si faccia riferimento alla figura 2.3. Per quanto riguarda il corpo ① si effettua la classica composizione delle accelerazioni nel punto A . Rimangono quindi da determinare i valori di $\ddot{\theta}_2$ e $\ddot{\theta}_3$.

La strategia da seguire consiste nello scrivere l'accelerazione \underline{a}_B nelle due forme (2.7) e (2.8) e imporre che siano uguali. I passi da seguire sono qui riportati:

- Si consideri \underline{a}_B scritta come (2.7) e si riporti il vettore \underline{a}_A in B .
- Si sommi il vettore $-\dot{\theta}_2 \underline{k} \wedge \underline{AB}$ sulla punta del vettore precedente.
- A partire dalla punta dell'ultimo vettore tracciato si tracci una retta μ_2 perpendicolare ad \underline{AB} . Su questa retta si determinerà il vettore $\ddot{\theta}_2 \underline{k} \wedge \underline{AB}$.
- Si consideri ora \underline{a}_B scritta come in (2.8) e si riporti a partire da B il vettore $-\dot{\theta}_3 \underline{O}_3 \underline{B}$.
- A partire dalla punta di quest'ultimo vettore si tracci una retta μ_3 ortogonale a $\underline{O}_3 \underline{B}$. su questa retta si individuerà il vettore $\ddot{\theta}_3 \underline{k} \wedge \underline{O}_3 \underline{B}$.
- Il punto di intersezione fra μ_2 e μ_3 individua univocamente i vettori cercati: $\ddot{\theta}_2 \underline{k} \wedge \underline{AB}$ e $\ddot{\theta}_3 \underline{k} \wedge \underline{O}_3 \underline{B}$.

A questo punto il vettore \underline{a}_B può essere determinato attraverso (2.7) oppure (2.8).

2.2 Analisi dinamica

Passiamo ora a determinare il momento necessario da applicare a ① per ottenere il moto imposto. È opportuno fare delle precisazioni preliminari:

- L'asta ① è soggetta ad un momento.
- L'asta ② è dotata di massa e momento d'inerzia e segue, in generale, un moto vario.
- L'asta ③ non ha massa né momento d'inerzia ed è caricata solamente da forze applicate ai suoi estremi.

2.2.1 Metodo analitico

Si scrivono ora le equazioni di equilibrio dei tre corpi rigidi, in riferimento ai diagrammi di corpo libero rappresentati in figura 2.2.1.

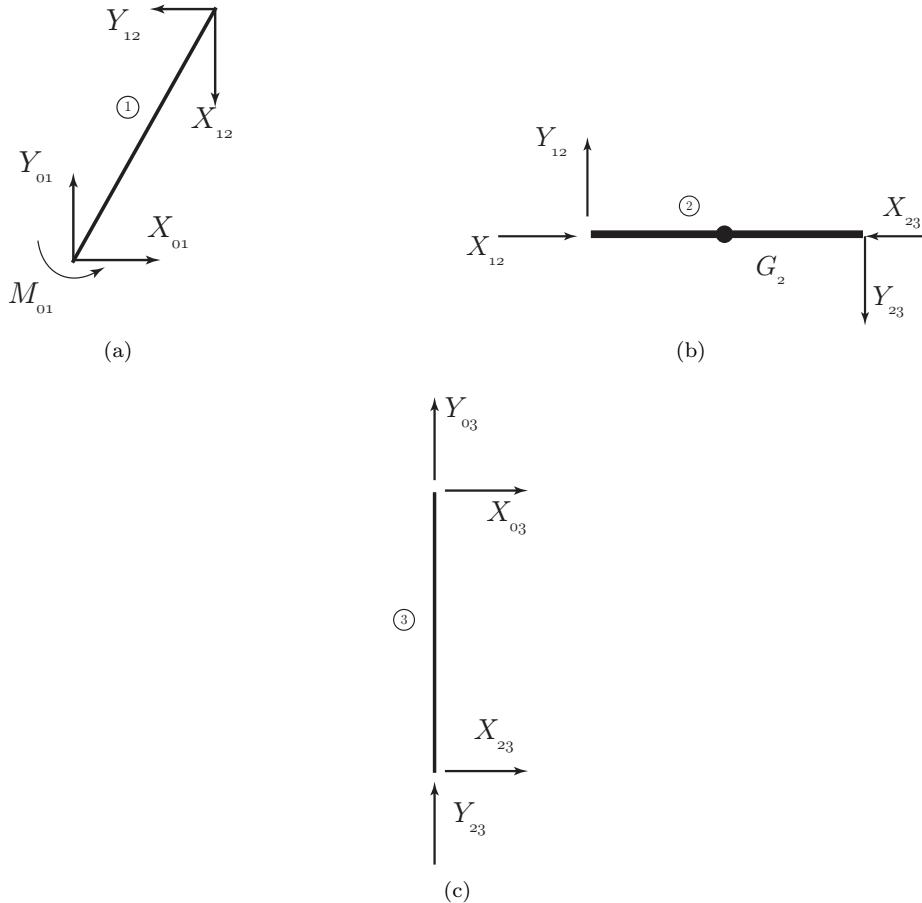


Figura 2.4: Diagrammi di corpo libero.

Equilibrio di ①

$$\begin{aligned} 0 &= X_{01} - X_{12} \\ 0 &= Y_{01} - Y_{12} \\ 0 &= M_{01} + X_{12}l_1 \sin(\theta_1) - Y_{12}l_1 \cos(\theta_1) - m_1 gr_1 \cos(\theta_1) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Equilibrio di ②

$$\begin{aligned} m_2 a_{G2x} &= X_{12} - X_{23} \\ m_2 a_{G2y} &= Y_{12} - Y_{23} \\ J_{G2} \ddot{\theta}_2 &= X_{12}r_2 \sin(\theta_2) - Y_{12}r_2 \cos(\theta_2) + X_{23}(l_2 - r_2) \sin(\theta_2) - Y_{23}(l_2 - r_2) \cos(\theta_2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Equilibrio di ③

$$\begin{aligned} 0 &= X_{23} + X_{03} \\ 0 &= Y_{23} + Y_{03} \\ \textcircled{3} : 0 &= -X_{23}l_3 \sin(\theta_3) + Y_{23}l_3 \cos(\theta_3) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Si noti che l'insieme delle (2.10), (2.11) e (2.12) è un sistema di nove equazioni nelle nove incognite

$$(X_{01}, Y_{01}, M_{01}, X_{12}, Y_{12}, X_{23}, Y_{23}, X_{03}, Y_{03})$$

e pertanto è risolvibile analiticamente. Tuttavia, ai fini di determinare il valore del momento M_{01} alcune incognite, così come alcune equazioni non sono necessarie. È pertanto possibile ridurre il sistema ad uno più semplice.

Si noti innanzitutto che le incognite X_{03} e Y_{03} compaiono solamente nelle (2.12) e pertanto non sono necessarie per il calcolo di M_{01} . Delle (2.12) l'unica equazione *utile* per i nostri scopi è l'ultima in quanto questa ci consente di affermare che ③ è un'asta scarica. Siamo quindi a conoscenza della direzione della forza $\underline{R}_{32} = -\underline{R}_{23}$ che ② e ③ si scambiano in B .

Si noti anche che le due incognite X_{01} e Y_{01} compaiono solamente nelle prime due equazioni di (2.10) e pertanto tali incognite e tali equazioni possono essere trascurate nel calcolo di M_{01} .

In definitiva il sistema da risolvere (prendendo come configurazione di riferimento quella della figura 2.1) è il seguente

$$\begin{cases} 0 = M_{01} + X_{12}l_1 \sin(\theta_1) - Y_{12}l_1 \cos(\theta_1) - m_1 g r_1 \cos(\theta_1) \\ m_2 a_{G_2x} = X_{12} \\ m_2 a_{G_2y} = Y_{12} - R_{23} \\ J_{G_2} \ddot{\theta}_2 = X_{12}r_2 \sin(\theta_2) - Y_{12}r_2 - R_{23}(l_2 - r_2) \end{cases} \quad (2.13)$$

(si noti che nella configurazione di riferimento si ha: $\theta_2 = \pi/2$ e $\theta_3 = 3\pi/2$). Il sistema (2.13) presenta quattro equazioni nelle quattro incognite

$$(M_{01}, X_{12}, Y_{12}, R_{23})$$

ed è quindi risolvibile analiticamente. È chiaro che la risoluzione di (2.13) è più semplice della soluzione del sistema 9 × 9 scritto in precedenza.

2.2.2 Metodo grafico

Passiamo ora a determinare la soluzione grafica della dinamica del sistema nella configurazione di riferimento. L'elemento su cui ci concentriamo è ②.

Notiamo innanzitutto che la direzione della forza $\underline{R}_{23} = -\underline{R}_{32}$ è nota in quanto l'asta ③ è scarica. Per determinare correttamente la forza \underline{R}_{12} , il modulo e il verso di \underline{R}_{32} si ricorre al seguente procedimento (si veda Figura 2.5):

- Si tracci da G_2 il vettore $m_2 \underline{a}_{G_2}$ e si tracci la sua retta di applicazione μ_2 .
- Si tracci da B il prolungamento di $\underline{O_3B}$ e si determini il punto d'intersezione P di tale retta con μ_2 .

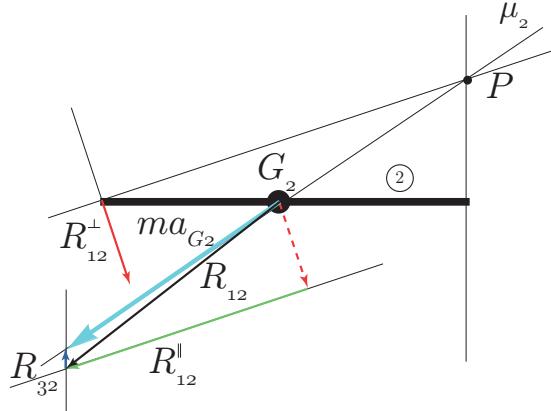


Figura 2.5: Soluzione grafica della dinamica di ②.

- Si scriva l'equilibrio a momento del corpo ② rispetto al punto P :

$$\textcircled{P} : \underline{PA} \wedge \underline{R}_{12} + \underline{PB} \wedge \underline{R}_{32} = J_{G_2} \ddot{\theta}_2 \underline{k} + \underline{PG_2} \wedge (m_2 \underline{a}_{G_2}) \quad (2.14)$$

dove

$$\begin{aligned} \underline{PB} \wedge \underline{R}_{32} &= \underline{0} \\ \underline{PG_2} \wedge (m_2 \underline{a}_{G_2}) &= \underline{0} \end{aligned}$$

per costruzione.

- Si scomponga \underline{R}_{12} secondo due componenti: $\underline{R}_{12}^{\parallel}$ parallela a \underline{PA} , e $\underline{R}_{12}^{\perp}$ ortogonale alla precedente. Ne risulta che la (2.14) può essere scritta più semplicemente come

$$\underline{PA} \wedge (\underline{R}_{12}^{\parallel} + \underline{R}_{12}^{\perp}) = \underline{PA} \wedge \underline{R}_{12}^{\perp} = J_{G_2} \ddot{\theta}_2 \underline{k}$$

che consente di determinare il valore di $\underline{R}_{12}^{\perp}$.

- Per l'equilibrio alla traslazione di ② si riportino a partire da G_2 i due vettori $m_2 \underline{a}_{G_2}$ e $\underline{R}_{12}^{\perp}$.
- A partire dalla punta di questi due vettori si traccino due rette parallele a $\underline{O_3B}$ e $\underline{R}_{12}^{\parallel}$ rispettivamente.
- Il punto d'incontro delle due rette tracciate consente di determinare il valore di \underline{R}_{32} e $\underline{R}_{12}^{\parallel}$.

Le due forze \underline{R}_{01} e \underline{R}_{03} sono uguali e opposte a \underline{R}_{21} e \underline{R}_{23} rispettivamente. Infine il momento \underline{M}_{01} è direttamente ricavabile dalla terza equazione di (2.10).

Un metodo alternativo per determinare graficamente l'equilibrio di ② consiste nell'applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Si consideri la figura 2.6 e si segue la procedura sotto riportata.

- Si traccia come in precedenza la retta μ_2 e si determina il punto P .

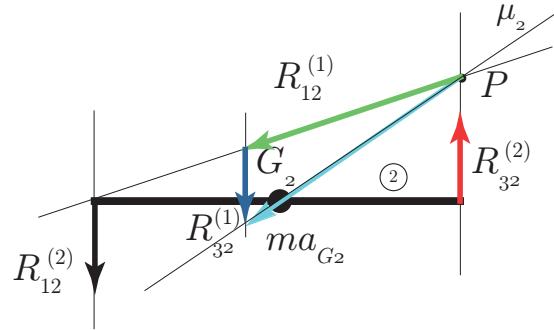


Figura 2.6: Soluzione grafica della dinamica di ② mediante sovrapposizione degli effetti.

- Si considera dapprima solamente l'equilibrio alla traslazione e si determinano le due forze $\underline{R}_{12}^{(1)}$ e $\underline{R}_{32}^{(1)}$ imponendo che $\underline{R}_{12}^{(1)} + \underline{R}_{32}^{(1)} = m_2 \underline{a}_{G_2}$
- Successivamente si applica la terza equazione di (2.12) considerando solamente l'effetto di $J_{G_2} \ddot{\theta}_2$ e ponendo nulla l'accelerazione lineare. La coppia di forze costituita da $\underline{R}_{12}^{(2)}$ e $\underline{R}_{32}^{(2)}$ è determinata in modo tale che $\underline{R}_{32}^{(2)}$ sia parallela ad $\overline{O_3 B}$ in quanto ③ è un'asta scarica; e l'intensità $R^{(2)}$ di tali forze è data da

$$R^{(2)} = \frac{J_{G_2} \ddot{\theta}_2}{|\underline{AB}|}$$

In conclusione si ottiene:

$$\begin{aligned}\underline{R}_{12} &= \underline{R}_{12}^{(1)} + \underline{R}_{12}^{(2)} \\ \underline{R}_{32} &= \underline{R}_{32}^{(1)} + \underline{R}_{32}^{(2)}\end{aligned}$$

2.3 Soluzione numerica

Consideriamo ora un caso numerico. In particolare si abbia:

$$\begin{aligned} l_1 &= 1 \text{ m} \\ l_2 &= 1 \text{ m} \\ r_2 &= 0.5 \text{ m} \\ l_3 &= 1 \text{ m} \\ m_2 &= 1 \text{ kg} \\ \theta_1 &= \frac{\pi}{4} \text{ rad} \\ J_{G_2} &= 2 \text{ kg m}^2 \\ \dot{\theta}_1 &= 1 \text{ rad/s} \\ \ddot{\theta}_1 &= 1 \text{ rad/s}^2 \\ \theta_2 &= 0 \text{ rad} \\ \theta_3 &= -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \end{aligned}$$

Si noti che in questo caso il punto C_2 in figura 2.2 coincide con O_3 per cui si ha $|C_2A| = \sqrt{2}$.

Dalla (2.1)abbiamo:

$$\begin{aligned} \underline{v}_A &= l_1 \dot{\theta}_1 (-\sin(\theta_1), \cos(\theta_1)) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ v_A &= 1 \text{ m/s} \end{aligned}$$

La risoluzione numerica di (2.4) fornisce i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 &= -\frac{v_A}{|C_2A|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ rad/s} \\ \dot{\theta}_3 &= \dot{\theta}_2 \frac{|C_2B|}{|O_3B|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Per l'accelerazione del punto A valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \underline{a}_A^{(t)} &= \ddot{\theta}_1 k \wedge \underline{O_1A} = \frac{1}{2} (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \text{ m/s}^2 \\ \underline{a}_A^{(r)} &= -\dot{\theta}_1 \underline{O_1A} = \frac{1}{2} (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \text{ m/s}^2 \\ \underline{a}_A &= \underline{a}_A^{(t)} + \underline{a}_A^{(r)} = (-\sqrt{2}, 0, 0) \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Una volta risolta la parte di velocità si ottengono i seguenti valori:

$$\begin{aligned} \underline{a}_{BA}^{(r)} &= -\dot{\theta}_2 \underline{AB} = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0 \right) \text{ m/s}^2 \\ \underline{a}_{BO_3}^{(r)} &= -\dot{\theta}_3 \underline{O_3B} = \left(0, \frac{1}{2}, 0 \right) \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Mentre le accelerazioni relative tangenziali del punto B si ricavano attraverso la risoluzione di (2.9). Si ottengono i seguenti valori

$$\begin{aligned}\underline{a}_{BA}^{(t)} &= \left(0, \frac{1}{2}, 0\right) \text{ m/s}^2 \\ \underline{a}_{BO_3}^{(t)} &= \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{2}, 0, 0\right) \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

da cui discende:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_2 &= \frac{\underline{a}_{BA}^{(t)}}{|\underline{AB}|} = \frac{1}{2} \text{ rad/s}^2 \\ \ddot{\theta}_3 &= \frac{\underline{a}_{BO_3}^{(t)}}{|\underline{O_3B}|} = -\frac{1}{2} - \sqrt{2} \text{ rad/s}^2\end{aligned}$$

È necessario calcolare l'accelerazione del baricentro di ② che risulta

$$\begin{aligned}\underline{a}_{G_2} &= \underline{a}_A + \underline{a}_{G_2A}^{(t)} + \underline{a}_{G_2A}^{(r)} = \left(-\sqrt{2}, 0, 0\right) + \left(0, \frac{1}{4}, 0\right) + \left(-\frac{1}{4}, 0, 0\right) \\ &= \left(-\frac{1}{4} - \sqrt{2}, \frac{1}{4}, 0\right) \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

Passiamo ora a determinare i valori di \underline{R}_{12} , \underline{R}_{23} e \underline{M}_{01} . Si determinano innanzitutto i valori dei vettori \underline{PG}_2 e \underline{PA}

$$\begin{aligned}\underline{PG}_2 &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{62}(-1 + 4\sqrt{2}), 0\right) \text{ m} \\ \underline{PA} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\end{aligned}$$

Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti si ottiene:

$$\begin{aligned}\underline{R}_{12}^{(1)} &= \left(-\frac{1}{4} - \sqrt{2}, \frac{1}{8}, 0\right) \text{ N} \\ \underline{R}_{32}^{(1)} &= \left(0, \frac{1}{8}, 0\right) \\ \underline{R}_{12}^{(2)} &= -\frac{J_{G_2}\ddot{\theta}_2}{|\underline{AB}|}\underline{j} = (0, -1, 0) \text{ N} \\ \underline{R}_{32}^{(2)} &= -\underline{R}_{12}^{(2)} = (0, 1, 0) \text{ N}\end{aligned}$$

Da cui discende:

$$\underline{R}_{12} = \left(-\frac{1}{4} - \sqrt{2}, -\frac{7}{8}, 0\right) \text{ N}$$

In definitiva, il momento \underline{M}_{01} risulta

$$\underline{M}_{01} = -\underline{O_1A} \wedge \underline{R}_{12} = \left(0, 0, -1 + \frac{5}{8\sqrt{2}}\right) \text{ N m}$$

Per riprova si calcola il valore di \underline{R}_{12} senza utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti. Risulta

$$\begin{aligned}\underline{R}_{12}^{\perp} &= \frac{J_{G_2} \ddot{\theta}_2 k \wedge \underline{AB}}{|\underline{AB}|^2} = (-0.0746892, -0.99439, 0) \\ \underline{R}_{12}^{\parallel} &= (-1.58952, 0.11939, 0) \\ \underline{R}_{12} &= \underline{R}_{12}^{\perp} + \underline{R}_{12}^{\parallel} = (-1.66421, -0.875, 0)\end{aligned}$$

che coincide col valore trovato precedentemente.

Capitolo 3

Disco Asimmetrico

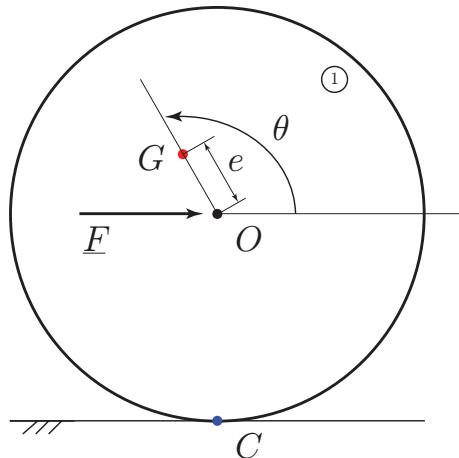


Figura 3.1: Schema meccanico.

Si consideri lo schema meccanico riportato in figura 3.1. Il contatto fra il disco ① e il piano è di rotolamento senza strisciamento. Si assume completamente nota la geometria del disco: massa m , momento d'inerzia baricentrico J_G , raggio r , eccentricità del baricentro rispetto al centro del disco e . Al centro del disco sia applicata una forza $F(t)$ diretta orizzontalmente.

Si determinino le equazioni del moto utilizzando diversi metodi:

- Equazioni cardinali (Newton) con equilibrio a momento scritto rispetto a
 - Centro delle velocità del disco
 - Centro del disco
 - Baricentro del disco
- Equazioni di Lagrange
- Principio dei lavori virtuali dinamico

3.1 Analisi cinematica

La cinematica del sistema in esame è molto semplice. Risulta utile scrivere l'espressione della velocità e dell'accelerazione dei punti di ① in particolare dei punti G , O e C .

3.1.1 Velocità

Cominciamo notando che $\underline{v}_C = \underline{0}$ per il vincolo di rotolamento senza strisciamento. Ne risultano quindi le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}\underline{v}_O &= \dot{\theta} \underline{k} \wedge \underline{CO} \\ \underline{v}_G &= \dot{\theta} \underline{k} \wedge \underline{CG} = \dot{\theta} \underline{k} \wedge (\underline{CO} + \underline{OG}) = \underline{v}_O + \dot{\theta} \underline{k} \wedge \underline{OG}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Si noti che all'espressione di \underline{v}_G si poteva arrivare tramite la formula fondamentale della cinematica

$$\underline{v}_G = \underline{v}_O + \underline{v}_{GO} = \underline{v}_O + \dot{\theta} \underline{k} \wedge \underline{OG}$$

L'espressione estesa di \underline{v}_G risulta la seguente

$$\underline{v}_G = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(-r - e \sin(\theta)) \\ \dot{\theta}e \cos(\theta) \end{pmatrix}\tag{3.2}$$

3.1.2 Accelerazioni

Si determinano ora le accelerazioni dei punti notevoli del sistema. Si indichi con C_V il centro delle velocità di ①; tale punto, appartenente a ①, è il punto che istante per istante coincide con il punto di contatto fra ① e il telaio C . Per il vincolo di rotolamento senza strisciamento abbiamo che $\underline{a}_{C_V} \neq \underline{0}$. Per determinare correttamente il valore di \underline{a}_{C_V} scriviamo l'accelerazione \underline{a}_O come segue

$$\underline{a}_O = \underline{a}_{C_V} + \ddot{\theta} \underline{k} \wedge \underline{C_V O} - \dot{\theta}^2 \underline{C_V O}$$

Per la geometria del sistema la componente di \underline{a}_O lungo $\underline{C_V O}$ è nulla. Inoltre l'accelerazione \underline{a}_{C_V} può avere componente diversa da zero solamente lungo la direzione $\underline{C_V O}$ per cui, in definitiva si avrà

$$\underline{a}_{C_V} = \dot{\theta}^2 \underline{CO}\tag{3.3}$$

Si noti che, come era giusto aspettarsi, il vettore \underline{a}_{C_V} è diretto da C_V verso O per ogni valore di $\dot{\theta}$. L'accelerazione del baricentro G risulta quindi

$$\begin{aligned}\underline{a}_G &= \underline{a}_{C_V} + \underline{a}_{GC_V} = \dot{\theta}^2 \underline{C_V O} + \dot{\theta} \underline{k} \wedge \underline{C_V G} - \dot{\theta}^2 \underline{C_V G} \\ &= \dot{\theta} \underline{k} \wedge \underline{C_V G} - \dot{\theta}^2 \underline{OG}\end{aligned}\tag{3.4}$$

che in componenti diventa

$$\underline{a}_G = \begin{pmatrix} -e \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - \ddot{\theta}(r + e \sin(\theta)) \\ e(\ddot{\theta} \cos(\theta) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta)) \end{pmatrix}\tag{3.5}$$

3.2 Dinamica

Passiamo ora a scrivere le equazioni che regolano la dinamica del sistema ricavandole in diversi modi. Si fa riferimento al diagramma di corpo libero del disco rappresentato in figura 3.2.

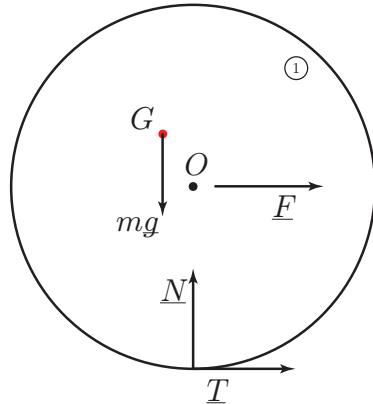


Figura 3.2: Diagramma di corpo libero del disco.

3.2.1 Equazioni cardinali

Le equazioni di equilibrio alla traslazione sono molto semplici e vengono qui riportate per completezza

$$\begin{aligned} ma_{Gx} &= T - F(t) \\ ma_{Gy} &= N - mg \end{aligned} \tag{3.6}$$

che in forma vettoriale possono essere scritte come

$$ma_G = \underline{N} + \underline{T} + \underline{F}(t) + mg \tag{3.7}$$

Passiamo ora a scrivere la seconda equazione cardinale della dinamica utilizzando diversi poli di riferimento.

Momento rispetto a C_V

Le due forze di contatto \underline{N} e \underline{T} hanno una retta d'azione che passa per il punto C_V e pertanto, rispetto a tale polo, non esercitano momento. Si applica in questo caso la seguente relazione

$$\underline{M}_{C_V} = \dot{\underline{K}}_G^{(r)} + \underline{C}_V \underline{G} \wedge (m\underline{a}_G)$$

per cui l'equilibrio intorno a C_V si scrive come

$$\textcircled{Y} : \underline{C}_V \underline{O} \wedge \underline{F}(t) + \underline{C}_V \underline{G} \wedge (mg) = J_G \ddot{\theta} \underline{k} + \underline{C}_V \underline{G} \wedge (m\underline{a}_G)$$

che per la (3.4) diventa

$$\underline{C_V O} \wedge \underline{F(t)} + \underline{C_V G} \wedge (mg) = J_G \ddot{\theta} \underline{k} + \underline{C_V G} \wedge \left(m \left(\ddot{\theta} \underline{k} \wedge \underline{C_V G} - \dot{\theta}^2 \underline{O G} \right) \right) \quad (3.8)$$

Moltiplicando scalarmente per \underline{k} si ottiene la seguente relazione scalare

$$-F(t)r - egm \cos(\theta) = J_G \ddot{\theta} + emr \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + \ddot{\theta} mr^2 + \ddot{\theta} e^2 m + +2\ddot{\theta} emr \sin(\theta) \quad (3.9)$$

Momento rispetto a O

Scrivendo l'equilibrio intorno al polo O notiamo che la forza \underline{N} ha un braccio nullo, mentre la forza \underline{T} , in questo caso esercita un momento. La forza esterna $\underline{F(t)}$ in questo caso ha braccio nullo e quindi non esercita momento. Anche in questo caso utilizziamo la relazione

$$\underline{M}_O = \dot{\underline{K}}_G^{(r)} + \underline{O G} \wedge (m \underline{a}_G)$$

L'equilibrio intorno al punto O si scrive quindi come segue

$$\begin{aligned} \textcircled{O} : \underline{O C_V} \wedge \underline{T} + \underline{O G} \wedge (mg) &= J_G \ddot{\theta} \underline{k} + \underline{O G} \wedge (m \underline{a}_G) \\ &= J_G \ddot{\theta} \underline{k} + \underline{O G} \wedge \left(m \left(\ddot{\theta} \underline{k} \wedge \underline{C_V G} - \dot{\theta}^2 \underline{O G} \right) \right) \end{aligned}$$

che moltiplicata scalarmente per \underline{k} diventa

$$rT - egm \cos(\theta) = \ddot{\theta} e^2 m + J_G \ddot{\theta} + \ddot{\theta} emr \sin(\theta)$$

Il valore di T può essere ricavato risolvendo la (3.6) lungo la componente x :

$$T = -F(t) - \ddot{\theta} mr - em \left(\cos(\theta) \dot{\theta}^2 + \ddot{\theta} \sin(\theta) \right)$$

Tale valore, sostituito nell'equazione di equilibrio intorno ad O fornisce la seguente relazione

$$-F(t)r - egm \cos(\theta) = J_G \ddot{\theta} + \ddot{\theta} e^2 m + emr \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + 2\ddot{\theta} emr \sin(\theta) + \ddot{\theta} mr^2 \quad (3.10)$$

che è identica alla (3.9).

Momento rispetto a G

Nel calcolo dell'equilibrio intorno al baricentro G solamente la forza di gravità non esercita momento. L'espressione vettoriale dell'equilibrio intorno a G è la seguente

$$\textcircled{G} : \underline{G O} \wedge \underline{F(t)} + \underline{G C_V} \wedge (\underline{N} + \underline{T}) = J_G \ddot{\theta} \underline{k}$$

che moltiplicata scalarmente per \underline{k} fornisce

$$rT + e \sin(\theta) T - eN \cos(\theta) + eF(t) \sin(\theta) = J_G \ddot{\theta}$$

L'espressione di T è quella trovata precedentemente, mentre N si ricava dalla soluzione della seconda equazione di (3.6) e si ottiene

$$N = m \left(-e \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + g + \ddot{\theta} e \cos(\theta) \right)$$

Sostituendo T e N nell'equazione di equilibrio intorno a G si ottiene

$$-emr \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - \ddot{\theta} mr^2 - \ddot{\theta} e^2 m - F(t)r - egm \cos(\theta) - 2\ddot{\theta} emr \sin(\theta) = J_G \ddot{\theta} \quad (3.11)$$

che è identica alle (3.9) e (3.10).

Commenti

I tre modi sopra esposti di scrivere la seconda equazione cardinale sono equivalenti in quanto, ovviamente, l'equazione finale che si giunge a scrivere è la stessa in tutti e tre i casi. Tuttavia, a seconda del problema in esame risulta più comodo utilizzare un modo piuttosto che un altro.

Nel problema in esame, se l'obiettivo è solamente quello di determinare la forza $F(t)$ da applicare al disco affinché questo segua una legge di moto imposta, allora risulta molto più comodo scrivere l'equilibrio alla rotazione intorno al punto C_V in quanto non è necessario conoscere le reazioni vincolari che garantiscono il moto di rotolamento senza strisciamento.

Qualora invece fosse richiesto di conoscere anche il valore delle reazioni vincolari allora è necessario anche risolvere la prima equazione cardinale (3.7).

3.2.2 Equazioni di Lagrange

Ora proviamo a determinare le equazioni che regolano la dinamica del moto utilizzando le equazioni di Lagrange. Per prima cosa dobbiamo determinare l'energia cinetica \mathcal{T} e l'energia potenziale \mathcal{U} del sistema.

Per determinare l'energia cinetica facciamo ricorso al teorema di König:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} mv_G^2 + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2$$

Utilizzando la (3.2) si ottiene

$$v_G^2 = \dot{\theta}^2 (e^2 + 2r \sin(\theta) e + r^2)$$

per cui risulta

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 (me^2 + 2mre \sin(\theta) + mr^2 + J_G) = \frac{1}{2} J_C(\theta) \dot{\theta}^2 \quad (3.12)$$

Si noti che, per effetto dell'eccentricità del baricentro rispetto al centro del disco, il momento d'inerzia rispetto al punto C risulta non costante al variare di θ .

L'energia potenziale del sistema è dovuta, in questo caso, solamente al campo gravitazionale. Fissiamo il riferimento dell'energia potenziale gravitazionale all'altezza del punto O . L'energia potenziale assume quindi la seguente espressione

$$\mathcal{U} = mge \sin(\theta) \quad (3.13)$$

Si utilizzano ora le equazioni di Lagrange per determinare le equazioni della dinamica del sistema

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = Q_{\theta}^{(a,nc)}$$

Scriviamo ogni termine separatamente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{d}{dt} \left(J_C(\theta) \dot{\theta} \right) = J_C(\theta) \ddot{\theta} + \frac{dJ_C(\theta)}{d\theta} \dot{\theta}^2 \\ &= (me^2 + 2mre \sin(\theta) + mr^2 + J_G) \ddot{\theta} + 2mre \cos(\theta) \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \theta} = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} J_C(\theta) \dot{\theta}^2 \right)}{\partial \theta} = \frac{1}{2} (2mre \cos(\theta)) \dot{\theta}^2 = mre \cos(\theta) \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = \frac{\partial (mge \sin(\theta))}{\partial \theta} = mge \cos(\theta)$$

Indicando con $\underline{\lambda}$ il versore lungo cui viene applicata la forza $\underline{F}(t)$ si ha

$$\begin{aligned} Q_{\theta}^{(a,nc)} &= F(t) \underline{\lambda} \cdot \frac{\partial (O(0)O(\theta))}{\partial \theta} = F(t) \underline{\lambda} \cdot \frac{\partial (-r\theta \underline{\lambda})}{\partial \theta} = F(t) \underline{\lambda} \cdot (-r\underline{\lambda}) \\ &= -F(t)r \end{aligned}$$

Combinando tutti i termini si ottiene

$$(me^2 + 2mre \sin(\theta) + mr^2 + J_G) \ddot{\theta} + 2mre \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - mre \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + mge \cos(\theta) = -F(t)r$$

che sviluppando i conti e riordinando diventa

$$(me^2 + 2mre \sin(\theta) + mr^2 + J_G) \ddot{\theta} + mre \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + mge \cos(\theta) = -F(t)r \quad (3.14)$$

che è identica alle (3.9), (3.10) e (3.11).

Qualora non si volesse considerare l'energia potenziale gravitazionale è possibile considerare la forza $m\underline{g}$ come una generica forza esterna per la quale va calcolato il termine relativo $\bar{Q}_{\theta}^{a,c}$:

$$Q_{\theta}^{(a,c)} = m\underline{g} \cdot \frac{\partial O(0)G(\theta)}{\partial \theta} = -mge \cos(\theta)$$

che, come ci aspettavamo, è uguale e opposto al termine $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta}$.

3.2.3 Principio dei Lavori Virtuali Dinamico

Proviamo ora a determinare le equazioni che regolano la dinamica del sistema utilizzando il principio dei lavori virtuali della dinamica (principio di d'Alambert).

Cominciamo da alcune considerazioni generali su un sistema di n particelle, ciascuna dotata di massa m_i . Su ogni particella in generale saranno applicate le seguenti forze:

- $\underline{F}_i^{(a,e)}$ - forza attiva esterna;
- $\underline{F}_{ij}^{(a,i)}$ - forza attiva interna che la particella i esercita sulla particella j ;
- $\underline{F}_i^{(r,e)}$ - forza reattiva (vincolare) esterna;
- $\underline{F}_{ij}^{(r,i)}$ - forza reattiva interna che la particella i esercita sulla particella j .

Per l'equilibrio dinamico della particella i dovrà valere

$$\underline{F}_i^{(a,e)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\underline{F}_{ij}^{(a,i)} + \underline{F}_{ij}^{(r,i)} \right) + \underline{F}_i^{(r,e)} - m_i \underline{a}_{P_i} = 0$$

dove \underline{a}_{P_i} è l'accelerazione della particella i . Moltiplicando scalarmente per lo spostamento virtuale $\underline{\delta P}_i$ compatibile con i vincoli al tempo t si ottiene

$$\left(\underline{F}_i^{(a,e)} + \underline{R}_i^{(a,i)} + \underline{R}_i^{(r,i)} + \underline{F}_i^{(r,e)} - m_i \underline{a}_{P_i} \right) \underline{\delta P}_i = 0$$

Nell'espressione precedente si ha subito che

$$\underline{F}_i^{(r,e)} \underline{\delta P}_i = 0$$

cioè il lavoro virtuale delle forze reattive esterne è nullo¹.

A questo punto si sommano tutte le equazioni relative alle n particelle e si ottiene

$$\sum_{i=1}^n \left(\underline{F}_i^{(a,e)} + \underline{R}_i^{(a,i)} + \underline{R}_i^{(r,i)} - m_i \underline{a}_{P_i} \right) \underline{\delta P}_i = 0$$

Si nota innanzitutto che vale la seguente relazione

$$\sum_{i=1}^n \underline{R}_i^{(r,i)} \underline{\delta P}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \underline{F}_{ij}^{(r,i)} \underline{\delta P}_i = 0$$

per cui rimane

$$\sum_{i=1}^n \left(\underline{F}_i^{(a,e)} + \underline{R}_i^{(a,i)} - m_i \underline{a}_{P_i} \right) \underline{\delta P}_i = 0$$

Indicando con $\underline{F}_i^{(a)} = \underline{F}_i^{(a,e)} + \underline{R}_i^{(a,i)}$ tutte le forze attive agenti sulla particella i si ottiene la seguente relazione

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\underline{F}_i^{(a)} \right) \underline{\delta P}_i &= \sum_{i=1}^n (m_i \underline{a}_{P_i}) \underline{\delta P}_i \\ \delta \mathcal{W}^{(a)} &= \delta \mathcal{W}^{(I)} \end{aligned}$$

¹Questo vale per ogni massa m_i

Nel caso in esame si ha

$$\underline{\delta P_i} = \frac{\partial O P_i}{\partial \theta} \delta \theta$$

e quindi per le forze attive si ottiene

$$\underline{\delta \mathcal{W}^{(a)}} = \sum_{i=1}^n \left(\underline{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial O P_i}{\partial \theta} \right) \delta \theta = Q_\theta^{(a)} \delta \theta$$

Il termine $Q_\theta^{(a)}$ può essere direttamente ricavato dall'analisi svolta precedentemente per le equazioni di Lagrange:

$$Q_\theta^{(a)} = -F(t)r - mge \cos(\theta)$$

Per quanto riguarda le forze d'inerzia si ricordi che il sistema è costituito da un corpo rigido, e pertanto valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \underline{\delta P_i} &= \underline{\delta G} + \delta \theta \underline{k} \wedge \underline{GP}_i = \frac{\partial O G}{\partial \theta} \delta \theta + \delta \theta \underline{k} \wedge \underline{GP}_i \\ \underline{a}_{P_i} &= \underline{a}_G + \ddot{\theta} \underline{k} \wedge \underline{GP}_i - \dot{\theta}^2 \underline{GP}_i \end{aligned}$$

Quindi sommando tutti i contributi si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (m_i \underline{a}_{P_i}) \underline{\delta P_i} &= \sum_{i=1}^n m_i \left(\underline{a}_G + \ddot{\theta} \underline{k} \wedge \underline{GP}_i - \dot{\theta}^2 \underline{GP}_i \right) \cdot \left(\frac{\partial O G}{\partial \theta} \delta \theta + \delta \theta \underline{k} \wedge \underline{GP}_i \right) \\ &= m \underline{a}_G \cdot \frac{\partial O G}{\partial \theta} \delta \theta + \underline{a}_G \left(\delta \theta \underline{k} \wedge \sum_{i=1}^n (m_i \underline{GP}_i) \right) \\ &\quad + \ddot{\theta} \underline{k} \wedge \sum_{i=1}^n (m_i \underline{GP}_i) \underline{\delta G} + \sum_{i=1}^n \left(m_i \ddot{\theta} \delta \theta |\underline{GP}_i|^2 \right) - \dot{\theta}^2 \sum_{i=1}^n (m_i \underline{GP}_i) \underline{\delta G} \end{aligned}$$

L'espressione precedente si può notevolmente semplificare notando che

$$\sum_{i=1}^n (m_i \underline{GP}_i) = 0$$

per cui si ottiene

$$\sum_{i=1}^n (m_i \underline{a}_{P_i}) \underline{\delta P_i} = \left(m \underline{a}_G \cdot \frac{\partial O G}{\partial \theta} \right) \delta \theta + J_G \ddot{\theta} \delta \theta = \left(m \underline{a}_G \cdot \frac{\partial O G}{\partial \theta} + J_G \ddot{\theta} \right) \delta \theta$$

Nel caso in esame si ha

$$\begin{aligned} \underline{O(0)G(\theta)} &= (-r\theta + e \cos(\theta), e \sin(\theta)) \\ \frac{\partial \underline{O(0)G(\theta)}}{\partial \theta} &= (-r - e \sin(\theta), e \cos(\theta)) \end{aligned}$$

per cui si ottiene

$$m \underline{a}_G \cdot \frac{\partial \underline{O(0)G(\theta)}}{\partial \theta} = m \left(er \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + \ddot{\theta} (e^2 + 2r \sin(\theta)e + r^2) \right)$$

In conclusione, dovendo valere

$$\delta \mathcal{W}^{(a)} = Q^{(a)} \delta \theta = \left(m \underline{a}_G + J_G \ddot{\theta} \right) \delta \theta$$

per ogni $\delta \theta$, si ottiene

$$-F(t)r - mge \cos(\theta) = m \left(er \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + \ddot{\theta} (e^2 + 2r \sin(\theta)e + r^2) \right) + J_G \ddot{\theta} \quad (3.15)$$

che risulta identica a (3.9), (3.10), (3.11) e (3.14).

Capitolo 4

Slitta con Attrito

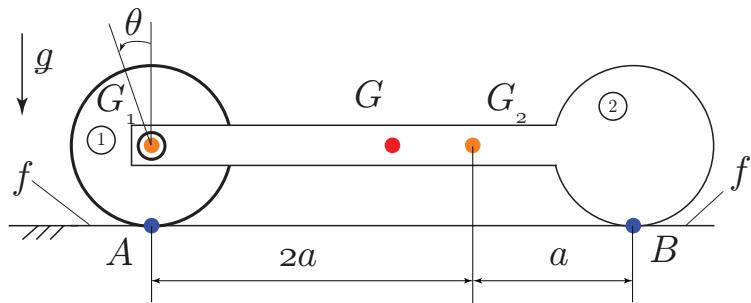


Figura 4.1: Schema meccanico.

Si consideri il sistema in figura 4.1. Si considera che nel contatto fra i due corpi e il suolo ci sia un coefficiente di attrito f . Il disco ① rotola senza strisciare sul suolo mentre il corpo ② striscia senza rotolare. Si assume nota la geometria del sistema: masse m_1 e $m_2 = 3m_1$ di ① e ②, momento d'inerzia baricentrico J_{G_1} di ①, raggio r del disco ① e la lunghezza a indicata in figura 4.1. Sul sistema agiscono solamente le forze d'attrito e la forza di gravità.

Note le condizioni iniziali $\dot{\theta}(0)$ della velocità di rotazione di ① si determinino

- Il tempo d'arresto
- Lo spazio d'arresto

4.1 Analisi Cinematica

La cinematica del sistema in esame è molto semplice. Si sceglie come origine del sistema di riferimento il punto O che coincide con A all'istante $t = 0$. Le posizioni dei baricentri dei due corpi sono quindi espresse dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned}\underline{OG}_1 &= (-r\theta, r) \\ \underline{OG}_2 &= (2a - r\theta, r)\end{aligned}$$

Da cui segue che la posizione del baricentro G del sistema ① + ② è data da:

$$\underline{OG} = \frac{m_1 \underline{OG}_1 + m_2 \underline{OG}_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{-m_1 r \theta + m_2 (2a - r \theta)}{m_1 + m_2}, r \right) \quad (4.1)$$

$$= \left(\frac{2am_2}{m_1 + m_2} - r\theta, r \right) = \left(\frac{3}{2}a - r\theta, r \right) \quad (4.2)$$

La velocità e l'accelerazione del baricentro del sistema risultano quindi le seguenti

$$\begin{aligned} \underline{v}_G &= (-r\dot{\theta}, 0) \\ \underline{a}_G &= (-r\ddot{\theta}, 0) \end{aligned} \quad (4.3)$$

4.2 Analisi Dinamica

Per studiare la dinamica del sistema in esame consideriamo l'equilibrio del sistema complessivo ① + ②. Lo schema delle forze agenti sul sistema è riportato in figura 4.2. Si scrivono ora le equazioni cardinali per il sistema complessivo:

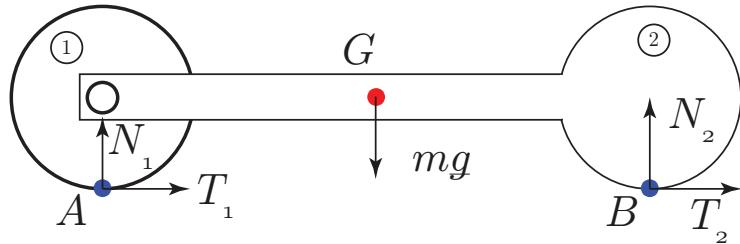


Figura 4.2: Diagramma delle forze agenti sul sistema ① + ②.

$$\begin{aligned} ma_{G_x} &= -mr\ddot{\theta} = T_1 + T_2 \\ ma_{G_y} &= 0 = N_1 + N_2 - mg \\ \textcircled{A} : -\frac{3}{2}amg + 3aN_2 &= J_{G_1}\ddot{\theta} + m_1r^2\ddot{\theta} + m_2r^2\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (4.4)$$

dove l'ultima equazione discende da

$$\textcircled{A} : \underline{M}_A = \sum_{i=1}^n \left(\dot{K}_{G_i}^{(r)} + \underline{AG}_i \wedge \underline{a}_{G_i} \right)$$

Nelle equazioni (4.4) valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} |T_2| &= -f|N_2|\operatorname{sign}(v_{G_x}) = -f|N_2|\operatorname{sign}(-r\dot{\theta}) = frN_2\operatorname{sign}(\dot{\theta}) \\ |T_1| &\leq f|N_1| \end{aligned} \quad (4.5)$$

assumendo $N_2 > 0$. La prima di queste relazioni può essere sostituita nelle (4.4) mentre la seconda deve essere verificata a posteriori sulla base dei dati numerici.

Il sistema (4.4), insieme alla prima delle (4.5) costituisce un sistema di tre equazioni nelle quattro incognite

$$(N_1, N_2, T_1, \ddot{\theta})$$

e quindi è necessario scrivere un'altra equazione indipendente dalle altre per poter risolvere il problema. La quarta equazione si può scrivere attraverso l'equilibrio alla rotazione di ① intorno a G_1 :

$$\textcircled{G} : T_1 r = J_{G_1} \ddot{\theta} \quad (4.6)$$

Il sistema composto dalle (4.4) e (4.6) risulta quindi risolvibile. Assumendo $\dot{\theta} > 0$, e quindi $v_{G_x} < 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} N_1 &= 2gm_1 \left(2 - \frac{3a}{3a + fr} \right) \\ T_1 &= -\frac{6afgJ_{G_1}m_1}{(3a + fr)(4m_1r^2 + J_{G_1})} \\ N_2 &= \frac{6agm_1}{3a + fr} \\ \ddot{\theta} &= -\frac{6afgm_1r}{(3a + fr)(4m_1r^2 + J_{G_1})} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Si noti che $\ddot{\theta}$ assume un valore costante e pertanto la legge oraria $\dot{\theta}(t)$ risulta la seguente

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}(0) + \ddot{\theta}t = \dot{\theta}(0) - \frac{6afgm_1r}{(3a + fr)(4m_1r^2 + J_{G_1})}t \quad (4.8)$$

Ne risulta che l'istante di arresto t_a è facilmente ricavabile imponendo $\dot{\theta}(t_a) = 0$ ottenendo

$$t_a = \frac{\dot{\theta}(0)(3a + fr)(4m_1r^2 + J_{G_1})}{6afgm_1r} \quad (4.9)$$

La legge oraria $x(t)$ della traslazione orizzontale del baricentro G è data da

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_{G_x} = -r\dot{\theta} \\ x(t) &= x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}r\ddot{\theta}t^2 \end{aligned}$$

da cui, ponendo $x_0 = 0$ si ottiene

$$x_a = x(t_a) = -\frac{(3a + fr)(4m_1r^2 + J_{G_1})v_0^2}{12afgm_1r^2} \quad (4.10)$$

Metodo alternativo

Si può determinare lo spazio d'arresto mediante considerazioni energetiche. Si scrive innanzitutto l'energia cinetica \mathcal{T} iniziale del sistema:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_0^2 + \frac{1}{2}J_{G_1}\left(\frac{v_0}{r}\right)^2 \quad (4.11)$$

L'unica forza che effettua lavoro, in questo caso, è la forza d'attrito in B e pertanto tale lavoro W_a si può scrivere

$$W_a = f N_2 x_a \quad (4.12)$$

dove si è supposto ancora $x_0 = 0$. Eguagliando (4.11) e (4.12), tenendo conto di (4.7) si può determinare direttamente lo spazio d'arresto.

4.2.1 Extra

Qualora fosse necessario calcolare la forza R_{12} che viene scambiata fra ① e ② in G_1 è sufficiente scrivere l'equilibrio alla traslazione di ② come segue

$$\begin{aligned} m_2 a_{G_x} &= X_{12} + f N_2 \\ 0 &= Y_{12} + N_2 - m_2 g \end{aligned}$$

dove le uniche due incognite sono X_{12} e Y_{12} che sono facilmente ricavabili in quanto tutte le altre grandezze sono note.

4.3 Soluzione Numerica

Siano assegnati i seguenti dati:

$$\begin{aligned} m_1 &= 10 \text{ kg} \\ m_2 &= 3m_1 = 30 \text{ kg} \\ J_{G_1} &= 0.3 \text{ kg m}^2 \\ f &= 0.3 \\ a &= 0.4 \text{ m} \\ r &= 0.2 \text{ m} \\ v_0 &= -10 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Il risultato numerico della soluzione della dinamica è il seguente:

$$\begin{aligned} N_1 &= 205.543 \text{ N} \\ T_1 &= -8.85113 \text{ N} \\ N_2 &= 186.857 \text{ N} \\ T_2 &= 56.0571 \text{ N} \\ \ddot{\theta} &= -5.9 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

A questo punto è necessario verificare la condizione di rotolamento senza strisciamento in A . A tal fine si verifica che

$$\left| \frac{T_1}{N_1} \right| = 0.04306 \leq f = 0.3$$

che soddisfa la condizione di puro rotolamento. Visualizziamo ora il diagramma delle forze rappresentato in figura 4.3. Per semplicità non sono rappresentate le

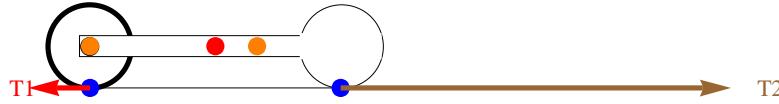


Figura 4.3: Schema delle forze agenti sul sistema. Le forze verticali non sono rappresentate per semplicità.

forze verticali in quanto ci concentriamo solamente sulle forze orizzontali. Si noti che le due forze T_1 e T_2 sono dirette in direzione opposta. Questa condizione è compatibile con le condizioni iniziali imposte. Infatti, dato che $\dot{\theta}(0) > 0$ e $v_{G_x} < 0$ ne discende che T_2 è diretta verso destra (cioè, per i versi scelti in figura 4.2 è positiva). La forza T_1 invece è diretta dalla parte opposta in quanto ha un effetto frenante sul disco e quindi per le convenzioni scelte ha valore negativo.

4.4 Metodo pratico per scrivere la dinamica

In questa sezione vediamo come si possono scrivere in maniera semplice le equazioni che regolano la dinamica del sistema in esame.

Cominciamo considerando che la velocità iniziale v_0 sia negativa. Da questo discende che T_2 è rivolta verso destra, come rappresentato in figura 4.2. Inoltre vale la relazione $T_2 = fN_2$. Per quanto riguarda la forza d'attrito nel punto A , invece, sappiamo solamente che vale la relazione $|T_1| \leq fN_1$, con N_1 positiva come in figura 4.2.

Per quanto appena detto, l'equilibrio alla traslazione del sistema ① + ② è il seguente:

$$\begin{aligned} -mr\ddot{\theta} &= T_1 + T_2 = T_1 + fN_2 \\ 0 &= N_1 + N_2 - mg \end{aligned}$$

L'equilibrio alla rotazione di ① + ② intorno al punto A risulta

$$\textcircled{A} : 3aN_2 - \frac{3}{2}amg = J_{G_1}\ddot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}$$

Infine, l'equilibrio alla rotazione di ① intorno al punto G_1 è la seguente

$$\textcircled{G} : T_1r = J_{G_1}\ddot{\theta}$$

L'insieme delle quattro equazioni appena scritte è risolvibile come visto precedenza. Naturalmente, una volta risolto il problema, è necessario verificare le forze d'attrito.

Capitolo 5

Frenatura di un Disco

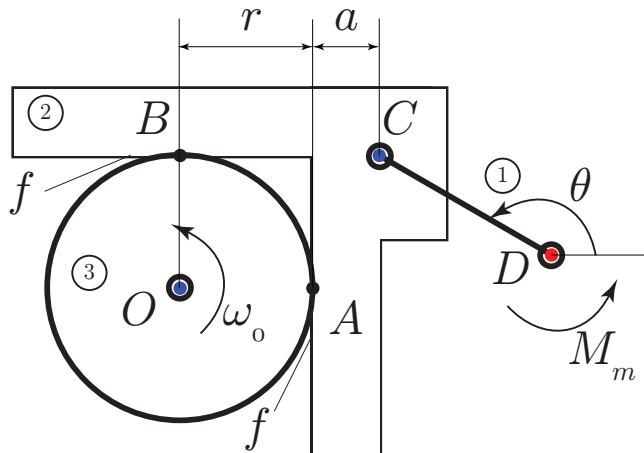


Figura 5.1: Schema meccanico.

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura 5.1. Si suppone completamente nota la geometria del sistema: momento d'inerzia baricentrico del disco J_{G_3} , raggio del disco r , distanza a (come in figura), lunghezza l dell'asta ①, angolo θ . Inoltre si assume che nei punti A e B ci sia un coefficiente di attrito f e che, in tali punti di contatto fra ② e ③ ci sia strisciamento (attrito radente). Sia assegnata la velocità angolare iniziale del disco ω_0 e il momento M_m applicato all'asta ①.

Si vuole determinare l'istante in cui il disco ③ si arresta.

5.1 Analisi dinamica

In questo caso si effettua da subito l'analisi dinamica in quanto la cinematica del sistema è banale e risulta tale per cui i corpi ① e ② sono fermi. Si fa riferimento al diagramma di corpo libero di ③ rappresentato in 5.2 e scriviamo l'equilibrio

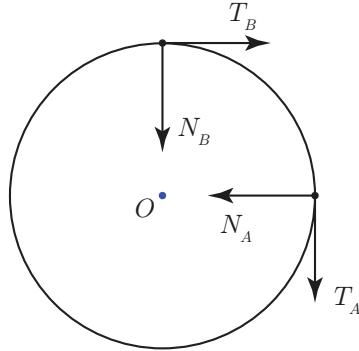


Figura 5.2: Diagramma di corpo libero del disco ③. **Attenzione: la forza vincolare in O non è rappresentata in quanto per risolvere l'esercizio in esame non è necessaria.**

alla rotazione di intorno a O

$$\textcircled{O} : M_f = -(T_A + T_B)r = -f(N_A + N_B)r = J_{G_3}\ddot{\alpha} \quad (5.1)$$

dove abbiamo sostituito $T_A = fN_A$ e $T_B = fN_B$ perché in questi due punti c'è attrito radente. Si noti che, per come sono state scelte le direzioni delle forze in 5.2 T_A e T_B sono assunte positive. È necessario verificare questa ipotesi una volta risolto il problema.

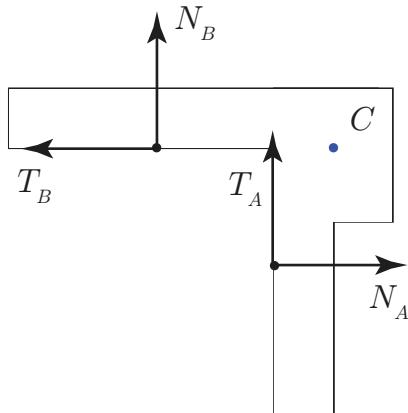


Figura 5.3: Diagramma di corpo libero del corpo ②. **Attenzione: la forza vincolare in C non è rappresentata in quanto per risolvere l'esercizio in esame non è necessaria.**

Scriviamo ora l'equilibrio del corpo ② intorno al punto C

$$\textcircled{C} : -afN_A - (a + r)N_B + N_Ar = 0 \quad (5.2)$$

Dato che le reazioni scambiate in C fra ① e ② non interessano per la risoluzione del problema si scrive l'equilibrio del sistema composto da ① + ②. In partico-

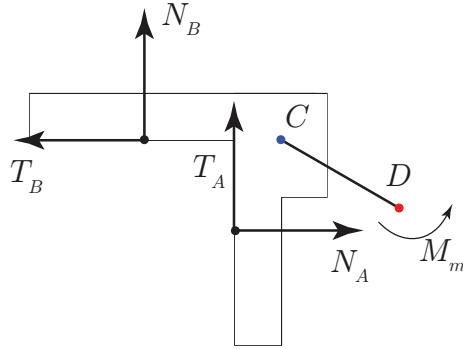


Figura 5.4: Diagramma di corpo libero del sistema ① + ②. **Attenzione:** la forza vincolare in D non è rappresentata in quanto per risolvere l'esercizio in esame non è necessaria.

lare si scrive l'equilibrio alla rotazione intorno a D

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : 0 &= M_m + N_A(r - l \sin(\theta)) - T_A(a - l \cos(\theta)) \\ &\quad + T_B l \sin(\theta) - N_B(r + a - l \cos(\theta)) \\ &= M_m + N_A(-af + r + fl \cos(\theta) - l \sin(\theta)) + \\ &\quad + N_B(-a - r + l \cos(\theta) + fl \sin(\theta)) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Il sistema composto dalle (5.2) e (5.2) è composto da due equazioni nelle due incognite N_A e N_B e può quindi essere risolto separatamente ottenendo i valori di N_A e N_B in funzione del parametro M_m

$$\begin{aligned} N_A &= -\frac{M_m(a+r)}{l((f+1)r \cos(\theta) - (af^2 - rf + a+r) \sin(\theta))} \\ N_B &= \frac{M_m(af-r)}{l((f+1)r \cos(\theta) - (af^2 - rf + a+r) \sin(\theta))} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dalla (5.4) si ottiene direttamente che il momento frenante M_f sul disco ③ è dato da

$$M_f = \frac{f M_m r (-fa + a + 2r)}{l((f+1)r \cos(\theta) - (af^2 - rf + a+r) \sin(\theta))} \quad (5.5)$$

Per cui il valore di $\ddot{\alpha}$ risulta

$$\ddot{\alpha} = \frac{M_f}{J_{G_3}}$$

e la legge di moto $\dot{\alpha}(t)$ è la seguente

$$\dot{\alpha}(t) = \omega_0 + \frac{M_f}{J_{G_3}} t$$

Infine, l'istante di arresto t_a si determina imponendo $\dot{\alpha}(t_a) = 0$ e risulta

$$t_a = -\frac{J_{G_3}}{M_f} \omega_0$$

5.1.1 Soluzione numerica

Siano assegnati i seguenti valori numerici

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 1800 \text{ rad/s} \\ r &= 0.08 \text{ m} \\ a &= 0.04 \text{ m} \\ f &= 0.4 \\ J_{G_3} &= 0.00384 \text{ kg m}^2 \\ M_m &= 22 \text{ N m} \\ l &= 0.12 \text{ m} \\ \theta &= 150^\circ\end{aligned}$$

Sostituendo nelle formule trovate precedentemente si ottiene:

$$\begin{aligned}N_A &= 152.571 \text{ N} \\ T_A &= 61.0285 \text{ N} \\ N_B &= 81.3714 \text{ N} \\ T_B &= 32.5486 \text{ N} \\ M_f &= -7.48617 \text{ N m} \\ t_a &= 0.923 \text{ s}\end{aligned}$$

Si noti che i valori di N_A , T_A , N_B e T_B sono positivi, confermando le assunzioni fatte.

Capitolo 6

Frenatura di un Disco con un Peso

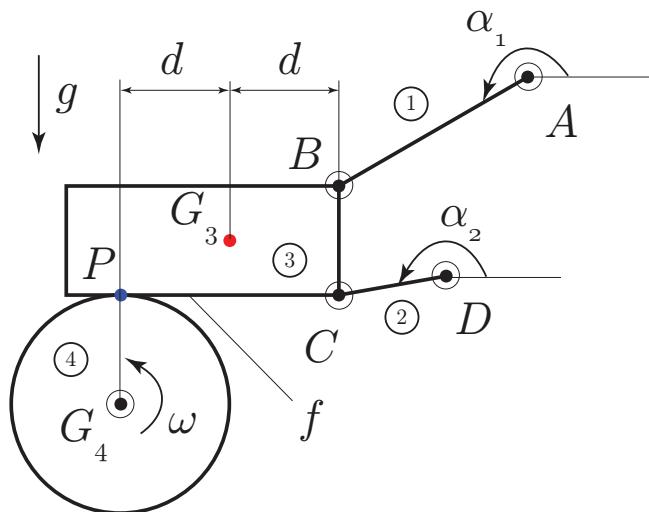


Figura 6.1: Schema meccanico.

Si consideri lo schema meccanico riportato in figura 6.1. Si assume completamente nota la geometria del sistema: lunghezza l_1 e l_2 delle aste ① e ②, massa m_3 e momento d'inerzia baricentrico J_{G_3} di ③, raggio r e momento d'inerzia baricentrico J_{G_4} di ④.

È assegnata la velocità angolare iniziale ω_0 del disco e si considera che fra ③ e ④ sia presente un coefficiente d'attrito f . Si determini il tempo d'arresto del disco.

6.1 Dinamica

Nel sistema in esame il quadrilatero articolato costituito dai corpi ①, ② e ③ deve rimanere fermo affinché il corpo ③ freni il disco ④ attraverso la forza

d'attrito. Si comincia considerando il diagramma di corpo libero del disco ④

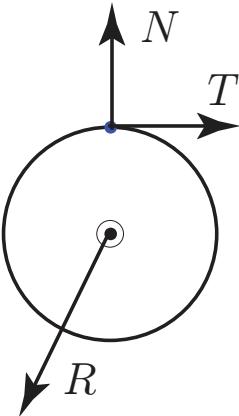


Figura 6.2: Diagramma di corpo libero di ④.

rappresentato in figura 6.2. Per il problema in esame siamo interessati solamente all'equilibrio alla rotazione e pertanto l'unica equazione che interessa in questo caso è la seguente

$$\text{G}_4 : -Tr = J_{G_4} \dot{\omega} \quad (6.1)$$

dove si è assunto $\omega > 0$. Qualora si assumesse $\omega < 0$ dovremmo cambiare verso alla forza T . Dato che T è la forza dovuta all'attrito, allora fintantochè c'è strisciamento fra ③e ④ vale la seguente relazione: $T = fN$. Si considera

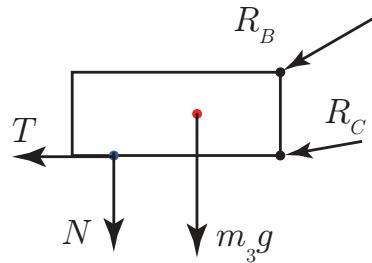


Figura 6.3: Diagramma di corpo libero di 3.

ora l'equilibrio del corpo ③ e si fa riferimento al diagramma di corpo libero rappresentato in figura 6.3. Si nota fin da subito che i corpi ① e ② si comportano come aste scariche e pertanto è nota la direzione di applicazione delle forze in B e C . Si scrivono ora le equazioni di equilibrio del corpo ③.

$$\begin{aligned} 0 &= -T + R_B \cos(\alpha_1) + R_C \cos(\alpha_2) \\ 0 &= N + R_B \sin(\alpha_1) + R_C \sin(\alpha_2) - m_3g \\ \text{G}_3 : 0 &= -Nd - \frac{d}{2}T - \frac{d}{2}R_B \cos(\alpha_1) + dR_B \sin(\alpha_1) + \frac{d}{2}R_C \cos(\alpha_2) + dR_C \sin(\alpha_2) \end{aligned} \quad (6.2)$$

L'insieme delle (6.1) e (6.2) insieme alla relazione d'attrito, costituisce un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite

$$(N, R_B, R_C, \dot{\omega})$$

e può quindi essere risolto analiticamente. Una volta determinato il valore di $\dot{\omega}$, che risulta costante, l'equazione oraria $\omega(t)$ risulta quindi la seguente:

$$\omega(t) = \omega_0 + \dot{\omega}t$$

dalla quale è facilmente ricavabile il tempo di arresto del disco t_a attraverso la seguente formula:

$$t_a = -\frac{\omega_0}{\dot{\omega}}$$

Capitolo 7

Frenatura di un Disco con Molle Precaricate

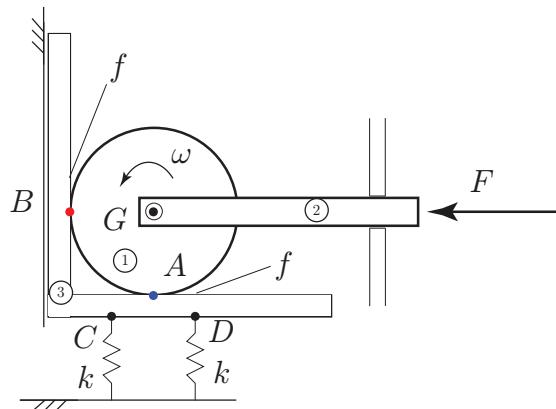


Figura 7.1: Schema meccanico.

Si consideri lo schema meccanico riportato in figura 7.1. Si assume completamente nota la geometria del sistema: momento d'inerzia baricentrico del disco J_{G_1} , costante elastica delle molle k , lunghezza iniziale delle molle (precarico) l_0 , coefficiente di attrito fra ① e ③ f . Si assume inoltre che non vi sia attrito fra ② e il telaio, così come non vi è attrito fra ③ e il telaio. Viene applicata a ② una forza F diretta come in figura. Si determini il tempo di arresto del disco e il valore limite di F affinché non si abbia distacco fra il disco e il corpo ③ nel punto A nel caso di $\omega_0 > 0$ e $\omega_0 < 0$.

7.1 Dinamica

Per risolvere il problema in esame scriviamo dapprima l'equilibrio alla traslazione orizzontale del sottosistema ① + ② facendo riferimento allo schema riportato in figura 7.2 dove si è assunto $\omega_0 > 0$:

$$N_B - T_A - F = 0 \quad (7.1)$$

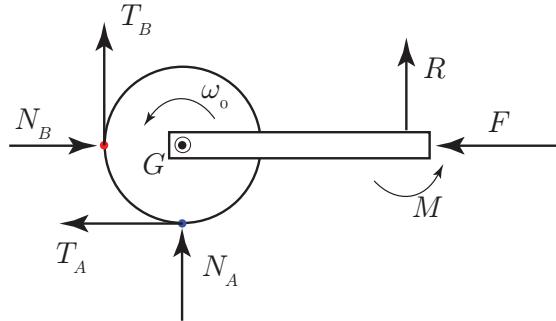


Figura 7.2: Schema delle forze del sottosistema ① + ②.

Si considera in seguito l'equilibrio alla rotazione di ① intorno al punto G (si noti che le forze scambiate fra ① e ② nel giunto in G non danno contributo al momento totale e pertanto non vengono indicate):

$$\textcircled{G} : -(T_A + T_B)r = J_G\dot{\omega} \quad (7.2)$$

Si considera ora l'equilibrio del corpo ③. Si nota che, per il problema in esame è sufficiente considerare solamente l'equilibrio lungo y in quanto le reazioni vincolari applicate dal telaio su ③ non interessano. Si scrive solamente la seguente relazione

$$2kl_0 - N_A - T_B = 0 \quad (7.3)$$

Nelle precedenti equazioni valgono le seguenti relazioni d'attrito:

$$\begin{aligned} T_A &= fN_A \\ T_B &= fN_B \end{aligned}$$

e pertanto l'insieme delle (7.1), (7.2) e (7.3) costituisce un sistema di tre equazioni in tre incognite. La soluzione di tale sistema fornisce il seguente valore della forza N_A :

$$N_A = \frac{2kl_0 - fF}{1 + f^2}$$

Il valore limite F_M della forza F affinché si mantenga il contatto fra ① e ③ in A si ricava imponendo

$$\frac{2kl_0 - fF_M}{1 + f^2} = 0$$

da cui risulta

$$F_M = \frac{2kl_0}{f}$$

Si noti che il valore di F_M è positivo e dipende dal precarico delle molle e dal coefficiente d'attrito fra ① e ③.

Nel caso in cui si abbia $\omega_0 < 0$ è necessario cambiare verso alle forze T_A e T_B ottenendo le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} N_B + T_A - F &= 0 \\ -T_B + N_A + R &= 0 \\ \textcircled{G} : (T_A + T_B)r &= J_G\dot{\omega} \\ 2kl_0 - N_A + T_B &= 0 \end{aligned}$$

che, risolte insieme alle medesime relazioni d'attrito, forniscono il seguente valore del valore della forza N_A :

$$N_A = \frac{2kl_0 + fF}{1 + f^2}$$

so può notare fin da subito che il valore di N_A risulta positivo per ogni valore positivo di F e pertanto, nel caso in cui $\omega_0 < 0$ non si ha distacco fra ① e ③ nel punto A .

Il calcolo del tempo d'arresto nei due casi risulta banale una volta risolta la dinamica attraverso i sistemi di equazioni scritti.

Capitolo 8

Carrello con Peso e Attrito

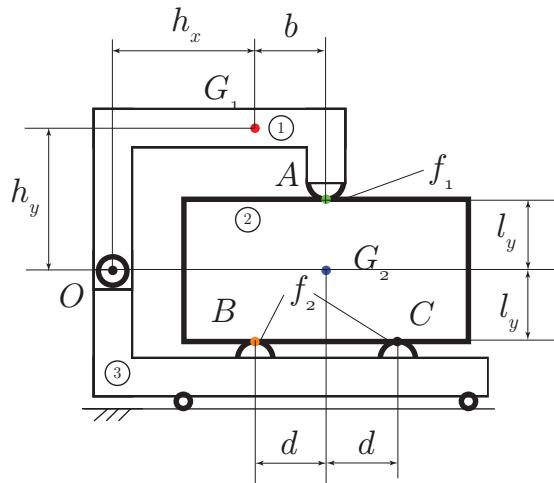


Figura 8.1: Schema meccanico.

Si consideri lo schema meccanica riportato in figura 8.1 dove si assume completamente nota la geometria del sistema: massa m_1 del corpo ①, massa m_2 del corpo ②, coefficienti d'attrito (come in figura) f_1 e f_2 nei contatti nei punti A , B e C .

Viene impressa un'accelerazione orizzontale a al carrello ③ e si richiede di determinare il valore limite di tale accelerazione affinché il corpo ② non strisci sui tre contatti. Si considerino i due casi: $a > 0$, e $a < 0$.

8.1 Dinamica

Notiamo innanzitutto che, affinché non ci sia strisciamento fra ② e il carrello l'accelerazione orizzontale di ② deve essere uguale ad a . Consideriamo dapprima il caso in cui $a > 0$. Si fa riferimento ai diagrammi di corpo libero di ① e ② rappresentati nelle figure 8.2 e 8.3. Per il corpo ① è sufficiente scrivere

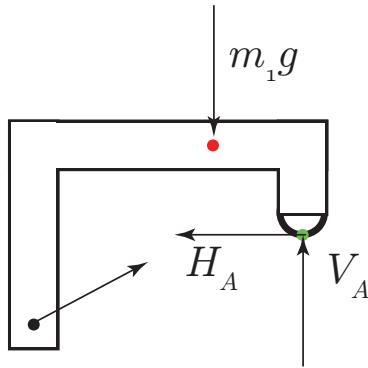


Figura 8.2: Diagramma di corpo libero di ①.

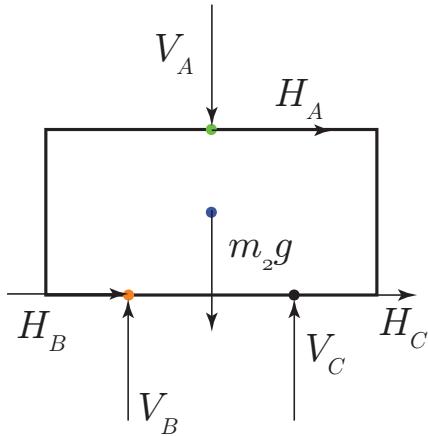


Figura 8.3: Diagramma di corpo libero di ②.

solamente l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno alla cerniera in O :

$$\textcircled{O} : (h_x + b)V_A + l_y H_A - h_x m_1 g = -h_y m_1 a \quad (8.1)$$

Nella condizione di distacco incipiente si ha $H_A = f_1 V_A$ e quindi è possibile risolvere in tale condizione l'equazione precedente ottenendo:

$$V_A = \frac{(gh_x - ah_y) m_1}{b + h_x + f_1 l_y} \quad (8.2)$$

Si scrive ora l'equilibrio del corpo ② per il quale è necessario scrivere tutte le equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} m_2 a &= H_A + H_B + H_C \\ 0 &= -V_A + V_B + V_C - m_2 g \\ \textcircled{G}_2 : 0 &= -l_y H_A + l_y (H_B + H_C) + d (V_C - V_B) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Anche in questo caso, nella condizione di distacco incipiente si ha $H_B = f_2 V_B$ e $H_C = f_2 V_C$. Per cui, con queste relazioni e con la (8.2), il sistema (8.3) è

composto da tre equazioni nelle tre incognite

$$(V_B, V_C, a)$$

dove a rappresenta l'accelerazione limite. La soluzione di questo sistema risulta nel seguente valore dell'accelerazione limite

$$a = \frac{(f_1 + f_2)gh_x m_1 + f_2 g(b + h_x + f_1 l_y)m_2}{(f_1 + f_2)h_y m_1 + (b + h_x + f_1 l_y)m_2}$$

Nel caso in cui si assuma un'accelerazione negativa vanno cambiati i versi delle forze H_A , H_B , e H_C e va risolto nuovamente il sistema. Le equazioni risultanti sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \textcircled{O} : h_y m_1 a &= (h_x + b)V_A - l_y H_A - h_x m_1 g \\ -m_2 a &= -H_A - H_B - H_C \\ 0 &= -V_A + V_B + V_C - m_2 g \\ \textcircled{G2} : 0 &= l_y H_A - l_y (H_B + H_C) + d(V_C - V_B) \end{aligned}$$

In questo caso l'espressione dell'accelerazione limite è la seguente

$$a = -\frac{(f_1 + f_2)gh_x m_1 + f_2 g(b + h_x - f_1 l_y)m_2}{(f_1 + f_2)h_y m_1 + (b + h_x - f_1 l_y)m_2}$$

8.2 Soluzione Numerica

Si considerino i seguenti dati numerici:

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 \text{ kg} \\ h_x &= 2 \text{ m} \\ b &= 1 \text{ m} \\ h_y &= 2 \text{ m} \\ f_1 &= 0.3 \\ f_2 &= 0.4 \\ d &= 1 \text{ m} \\ l_x &= 1 \text{ m} \\ l_y &= 1 \text{ m} \\ m_2 &= 2 \text{ kg} \end{aligned}$$

Nel caso in cui $a > 0$ il risultato numerico del sistema è il seguente:

$$\begin{aligned} V_A &= 2.943 \text{ N} \\ V_B &= 15.353 \text{ N} \\ V_C &= 7.211 \text{ N} \\ a &= 4.954 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

che verifica le ipotesi fatte in quanto V_A risulta positivo. Nel caso in cui $a < 0$ invece si hanno i seguenti risultati:

$$V_A = 3.4623 \text{ N}$$

$$V_B = 7.444 \text{ N}$$

$$V_C = 15.638 \text{ N}$$

$$a = 5.136 \text{ m/s}^2$$

Si noti che nel caso di accelerazione negativa, il valore massimo di tale accelerazione è maggiore che nel caso opposto. Questo risulta sensato fisicamente in quanto se l'accelerazione è positiva il corpo ① tende a staccarsi da ② risultando quindi in una forza normale V_A più bassa che non nell'altro caso. Ovviamente, nel caso di accelerazione negativa il corpo ① è più serrato sul corpo ② e quindi le forze d'attrito sono maggiori.

Capitolo 9

Oscillazioni Libere di un Sistema a 1 GDL

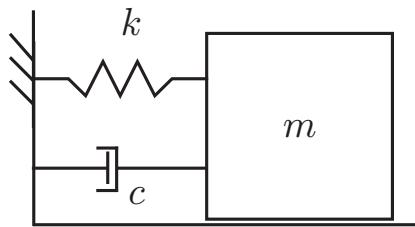


Figura 9.1: Schema meccanico.

Si consideri il semplice sistema meccanico riportato in figura 9.1.

9.1 Dinamica

La dinamica del sistema in esame è banale e siamo interessati solamente all'equilibrio alla traslazione orizzontale che risulta il seguente:

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

Riordinando i termini si ottiene la forma classica per lo studio delle oscillazioni a 1 grado di libertà:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (9.1)$$

La precedente espressione è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Risulta comodo riscrivere la(9.1) dividendo per la massa m (che assume sempre valori positivi):

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0 \quad (9.2)$$

dove abbiamo definito

$$\begin{aligned}\omega_n^2 &= \frac{k}{m} \\ 2\zeta\omega_n &= \frac{c}{m}\end{aligned}$$

da cui

$$\zeta = \frac{c}{2\omega_n m} = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

9.2 Oscillazioni Libere

Per risolvere l'equazione differenziale (9.2) si cercano soluzioni nella forma esponenziale

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

da cui discendono

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{x}(t) &= \lambda^2 e^{\lambda t}\end{aligned}$$

Sostituendo le precedenti espressioni nella (9.2) si ottiene

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\zeta\omega_n \lambda e^{\lambda t} + \omega_n^2 e^{\lambda t} = 0$$

Raccogliendo i termini esponenziali si ha

$$(\lambda^2 + 2\zeta\omega_n \lambda + \omega_n^2) e^{\lambda t} = 0$$

Affinchè questa equazione sia verificata per ogni t è necessario trovare i valori di λ che risolvono l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n \lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (9.3)$$

che è una semplice equazione algebrica di secondo grado. Le soluzioni della (9.3) sono le seguenti

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\omega_n^2(\zeta^2 - 1)} = \zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (9.4)$$

A seconda del segno del termine $\sqrt{\zeta^2 - 1}$ si hanno diversi tipi di soluzione.

9.2.1 Caso 1

Consideriamo il caso in cui $\zeta^2 - 1 > 0$, cioè $\zeta > 1$. Indicando con $c_c = 2\sqrt{km}$ il valore dello smorzamento critico si ha, in questo caso si ha $c > c_c$.

Le due soluzioni dell'equazione caratteristica sono quindi le seguenti

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ \lambda_2 &= -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\end{aligned}$$

di conseguenza la soluzione risultante si può scrivere come segue

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} = Ae^{-\zeta\omega_n t}e^{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} + Be^{-\zeta\omega_n t}e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \quad (9.5)$$

$$= e^{-\zeta\omega_n t} \left(Ae^{\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} + Be^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \right) \quad (9.6)$$

In questo caso il moto è di tipo *aperiodico smorzato*. Infatti calcolando il seguente limite

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) &= e^{-\zeta\omega_n t} \left(Ae^{\omega_n t\sqrt{\zeta^2-1}} + Be^{-\omega_n t\sqrt{\zeta^2-1}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} Ae^{\omega_n t(\sqrt{\zeta^2-1}-\zeta)} = 0 \end{aligned}$$

e notando che $(\sqrt{\zeta^2-1}-\zeta) < 0$, segue che il valore di $x(t)$ tende a smorzarsi indipendentemente dai valori di A e B .

I valori delle costanti A e B si determinano attraverso le condizioni iniziali, cioè assegnando al tempo $t = 0$ il valore della posizione e della velocità della massa m . Si pone

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = v_0$$

e si sostituiscono tali valori, con $t = 0$, nella (9.5). Si ottengono quindi le seguenti relazioni

$$x_0 = A + B$$

$$v_0 = -\zeta\omega_n(A + B) + A\omega_n\sqrt{\zeta^2-1} - B\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

Nel caso in cui $x_0 = 0$ si ha

$$\begin{aligned} A &= -B \\ 2A\omega_n\sqrt{\zeta^2-1} &= v_0 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} A &= \frac{v_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \\ B &= -\frac{v_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}} \end{aligned}$$

Se invece si avesse $x_0 \neq 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ i due coefficienti sarebbero

$$\begin{aligned} A &= x_0 \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \\ B &= x_0 \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2-1}}{2\sqrt{\zeta^2-1}} \end{aligned}$$

9.2.2 Caso 2

Consideriamo ora il caso in cui $\zeta^2 - 1 < 0$, cioè $c < c_c$ e $\zeta > 0$. Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono dunque le seguenti

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{-1}\sqrt{1 - \zeta^2} = -\zeta\omega_n \pm i\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

e risultano complesse coniugate. L'espressione di $x(t)$ in questo caso è dunque la seguente

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-\zeta\omega_n t}e^{i\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}} + Be^{-\zeta\omega_n t}e^{-i\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}} \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \left(Ae^{i\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}} + Be^{-i\omega_n t\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} (Ae^{i\omega_s t} + Be^{-i\omega_s t}) \end{aligned}$$

dove per maggiore chiarezza abbiamo indicato $\omega_s = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$. La soluzione che abbiamo appena ottenuto contiene termini complessi ma, dovendo risultare globalmente una soluzione reale pura, allora anche A e B devono essere complessi anch'essi. Inoltre A e B devono risultare coniugati; infatti scrivendo

$$\begin{aligned} A &= A_R + iA_I \\ B &= B_R + iB_I \end{aligned}$$

e sviluppando il termine fra parentesi nell'espressione di $x(t)$ si ottiene

$$\begin{aligned} (A_R + iA_I)(\cos(\omega_s t) + i\sin(\omega_s t)) + (B_R + iB_I)(\cos(\omega_s t) - i\sin(\omega_s t)) &= \\ A_R \cos(\omega_s t) + iA_I \cos(\omega_s t) + iA_R \sin(\omega_s t) - iA_I \sin(\omega_s t) + \\ + B_R \cos(\omega_s t) + iB_I \cos(\omega_s t) + iB_R \sin(\omega_s t) + iB_I \sin(\omega_s t) \end{aligned}$$

La quantità che moltiplica l'unità immaginaria deve risultare identicamente nulla:

$$A_R \sin(\omega_s t) + A_I \cos(\omega_s t) - B_R \sin(\omega_s t) + B_I \cos(\omega_s t) = 0$$

da cui discende che

$$\begin{aligned} A_R &= B_R \\ A_I &= -B_I \end{aligned}$$

cioè A e B devono essere coniugati. Per comodità di notazione si indicano

$$\begin{aligned} A_I &= -B_I = -\frac{C_1}{2} \\ A_R &= B_R = \frac{C_2}{2} \end{aligned}$$

ne discende quindi

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{C_2 - iC_1}{2} e^{i\omega_s t} + \frac{C_2 + iC_1}{2} e^{-i\omega_s t} \right) \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} \left(\frac{C_2 (e^{i\omega_s t} + e^{-i\omega_s t})}{2} + i \frac{C_1 (e^{-i\omega_s t} - e^{+i\omega_s t})}{2} \right) \\ &= e^{-\zeta\omega_n t} (C_2 \cos(\omega_s t) + C_1 \sin(\omega_s t)) \end{aligned}$$

La soluzione così ottenuta è reale. L'espressione a cui siamo appena arrivati può essere riscritta in una forma equivalente come segue

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} D \cos(\omega_s t - \varphi)$$

Sviluppando il secondo membro si ottiene

$$D \cos(\varphi) \cos(\omega_s t) + D \sin(\varphi) \sin(\omega_s t) = C_2 \cos(om_2 t) + C_1 \sin(\omega_s t)$$

da cui

$$\begin{aligned} C_1 &= D \sin(\varphi) \\ C_2 &= D \cos(\varphi) \end{aligned}$$

Elevando al quadrato entrambe le espressioni e sommando i termini si ottiene

$$D = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

mentre dividendo membro a membro si ha

$$\begin{aligned} \tan(\varphi) &= \frac{C_1}{C_2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{C_1}{C_2}\right) \end{aligned}$$

In maniera analoga si può scrivere

$$\begin{aligned} x(t) &= E \sin(\omega_s t + \psi) \\ E &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \\ \psi &= \arctan\left(\frac{C_2}{C_1}\right) \end{aligned}$$

È interessante notare la seguente relazione

$$\tan(\psi) = \frac{1}{\tan(\varphi)}$$

Attraverso uno dei modi equivalenti di scrivere la risposta libera del sistema in esame si nota che il moto è di tipo *periodico smorzato* con periodo T dato dalla seguente relazione

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_s}$$

Si noti che risulta $\omega_s < \omega_n$ perchè $\sqrt{1 - \zeta^2} < 1$.

In maniera analoga al caso precedente si possono determinare i valori dei coefficienti C_1 e C_2 una volta che sono imposte le condizioni iniziali. In particolare

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\zeta \omega_n t} (C_2 \cos(\omega_s t) + C_1 \sin(\omega_s t)) \\ \dot{x}(t) &= -\zeta \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} (C_2 \cos(\omega_s t) + C_1 \sin(\omega_s t)) + e^{-\zeta \omega_n t} (-C_2 \sin(\omega_s t) + C_1 \cos(\omega_s t)) \end{aligned}$$

e imponendo $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$ si ha

$$\begin{aligned} C_2 &= x_0 \\ v_0 &= \zeta\omega_n x_0 + C_1 \omega_s \end{aligned}$$

da cui

$$C_1 = \frac{v_0 - \zeta\omega_n x_0}{\omega_s}$$

Per cui la soluzione generale risulta la seguente

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(x_0 \cos(\omega_s t) + \frac{v_0 - \zeta\omega_n x_0}{\omega_s} \sin(\omega_s t) \right)$$

Capitolo 10

Oscillazioni di un Cinematismo a 1 GDL

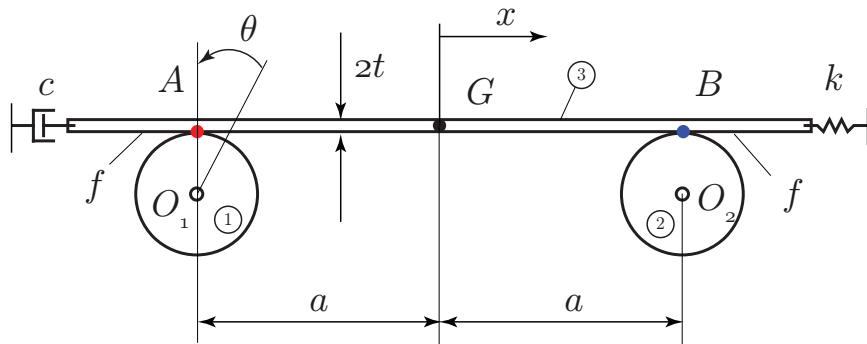


Figura 10.1: Schema meccanico.

Si consideri il semplice sistema meccanico riportato in figura 10.1. Si assume nota la geometria del sistema e si impongono le condizioni iniziali X_0 e v_0 della posizione e della velocità della sbarra. Il contatto fra i rulli e la sbarra è caratterizzato da rotolamento senza strisciamento. Si determinino

- La legge oraria $x(t)$ in funzione delle condizioni iniziali imposte.
- Noto il coefficiente di attrito nel contatto fra i rulli e la sbarra, verificare se, con le condizioni iniziali imposte, può essere rispettato il vincolo di rotolamento senza strisciamento.

10.1 Dinamica

Cominciamo a scrivere le equazioni di congruenza che legano la rotazione dei rulli con lo spostamento orizzontale della sbarra. Per il vincolo di rotolamento

senza strisciamento possiamo scrivere

$$\begin{aligned} r\theta &= -x \\ r\dot{\theta} &= -\dot{x} \\ r\ddot{\theta} &= -\ddot{x} \end{aligned}$$

Si scrivono ora le equazioni di equilibrio della sbarra ③ facendo riferimento al

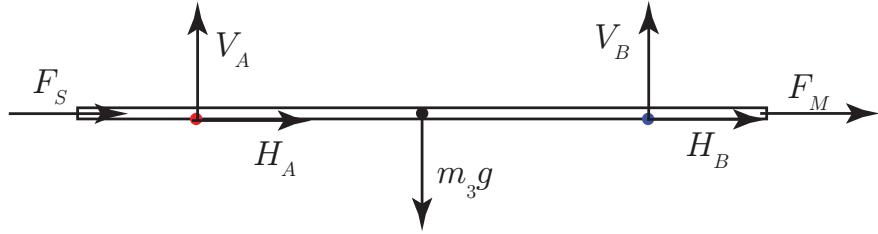


Figura 10.2: Diagramma di corpo libero di ③.

diagramma di corpo libero in figura 10.2, dove F_S e F_M sono rispettivamente la forza esercitata dallo smorzatore e dalla molla:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx - c\dot{x} + H_A + H_B \\ 0 &= V_A + V_B - mg \\ \textcircled{G} : J_G\ddot{\varphi} &= V_B(a - x) + H_B h - V_A(a + x) + H_A h \end{aligned} \quad (10.1)$$

Nell'ipotesi in cui la sbarra rimanga orizzontale e in contatto con i rulli abbiamo $\ddot{\varphi} = 0$.

Per quanto riguarda i rulli, siamo interessati solamente all'equilibrio alla rotazione intorno ai rispettivi centri¹. Per cui, per il rullo ① abbiamo

$$\textcircled{Q}_1 H_A r = J_1 \ddot{\theta} \quad (10.2)$$

mentre per il rullo ② abbiamo

$$\textcircled{Q}_2 H_B r = J_2 \ddot{\theta} \quad (10.3)$$

Le reazioni vincolari esercitate dal telaio sui due rulli non interessano per la risoluzione del problema in esame.

Per scrivere l'equazione del moto è sufficiente considerare la prima equazione di (10.1) e poi le (10.2) e (10.3). Si ricavano infatti le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} H_A &= \frac{J_1}{r} \ddot{\theta} = -\frac{J_1}{r^2} \ddot{x} \\ H_B &= -\frac{J_2}{r^2} \ddot{x} \end{aligned}$$

per cui risulta

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} - \frac{J_1}{r^2} \ddot{x} - \frac{J_2}{r^2} \ddot{x}$$

¹I diagrammi di corpo libero di entrambi i rulli non vengono riportati per brevità.

Riorganizzando quest'ultima espressione si ottiene

$$\left[m + \frac{1}{r^2} (J_1 + J_2) \right] \ddot{x} + c\dot{x} + km = 0$$

Per maggiore chiarezza si indicano

$$\begin{aligned} m_{eq} &= \left[m + \frac{1}{r^2} (J_1 + J_2) \right] \\ c_{eq} &= c \\ k_{eq} &= k \end{aligned}$$

Si noti che il termine $\frac{J_1+J_2}{r^2}$ è la massa apparente traslante dei rulli.

Con le sostituzioni di cui sopra il sistema si può quindi riscrivere nella forma generale

$$m_{eq}\ddot{x} - c_{eq}\dot{x} + k_{eq}x = 0$$

Indicando con $\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}$ la pulsazione naturale, con $c_c = 2\sqrt{k_{eq}m_{eq}}$ lo smorzamento critico e con $\zeta = \frac{c_{eq}}{c_c}$ il fattore di smorzamento, si ottiene la classica espressione

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$$

Si assume $\zeta < 1$ e si ottiene quindi che il moto risultante è di tipo *periodico smorzato* ed ha la seguente soluzione

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left(x_0 \cos(\omega_s t) + \frac{v_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_s} \sin(\omega_s t) \right)$$

dove $\omega_s = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$. Le grandezze che compaiono nell'espressione dell'equazione del moto sono tutte note e pertanto il moto è completamente noto.

Passiamo ora a verificare le condizioni di rotolamento senza strisciamento. Dalle relazioni della dinamica, una volta nota l'espressione di \ddot{x} si possono ricavare gli andamenti delle forze di contatto

$$\begin{aligned} H_A(t) &= \frac{J_1}{r} \ddot{\theta}(t) = -\frac{J_1}{r^2} \ddot{x} \\ H_B(t) &= \frac{J_2}{r} \ddot{\theta}(t) = -\frac{J_2}{r^2} \ddot{x} \end{aligned}$$

Per cui, dalla seconda e terza equazione di (10.1) si ricavano $V_A(t)$ e $V_B(t)$:

$$\begin{aligned} V_A(t) &= -\frac{J_1 + J_2}{r^2} \frac{h}{2a} \ddot{x}(t) + \frac{a + x(t)}{2a} mg \\ V_B(t) &= \frac{J_1 + J_2}{r^2} \frac{h}{2a} \ddot{x}(t) + \frac{a + x(t)}{2a} mg \end{aligned}$$

In queste ultime due espressioni si nota che il termine

$$\frac{a + x(t)}{2a} mg$$

è il carico *statico* mentre il termine

$$\frac{J_1 + J_2}{r^2} \frac{h}{2a} \ddot{x}(t)$$

rappresenta il trasferimento di carico *dinamico*.

Per verificare la condizione di rotolamento senza strisciamento devono essere verificate le seguenti espressioni

$$\begin{aligned}\frac{|H_A(t)|}{V_A(t)} &= \frac{\frac{J_1}{r^2} |\ddot{x}(t)|}{-\frac{J_1+J_2}{r^2} \frac{h}{2a} \ddot{x}(t) + \frac{a+x(t)}{2a} mg} \leq f_s \\ \frac{|H_B(t)|}{V_B(t)} &= \frac{\frac{J_1}{r^2} |\ddot{x}(t)|}{\frac{J_1+J_2}{r^2} \frac{h}{2a} \ddot{x}(t) + \frac{a+x(t)}{2a} mg} \leq f_s\end{aligned}$$

In queste espressioni non abbiamo messo il modulo al denominatore in quanto facciamo l'ipotesi che le forze normali di contatto fra i rulli e la sbarra siano positive. In caso contrario infatti si avrebbe distacco. Si devono quindi verificare anche le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}V_A(t) > 0 &\Rightarrow \frac{a - x(t)}{2a} mg > \frac{J_1 + J_2}{r^2} \frac{h}{2a} \ddot{x}(t) \\ &\Rightarrow \ddot{x}(t) < (a - x(t)) \frac{r^2}{t} \frac{mg}{J_1 + J_2} \\ V_B(t) > 0 &\Rightarrow \frac{a + x(t)}{2a} mg > -\frac{J_1 + J_2}{r^2} \frac{h}{2a} \ddot{x}(t)\end{aligned}$$

Si noti che in queste disequazioni si hanno funzioni del tempo da ambo i membri.

Capitolo 11

Oscillazioni Libere di un Sistema a 2 GDL

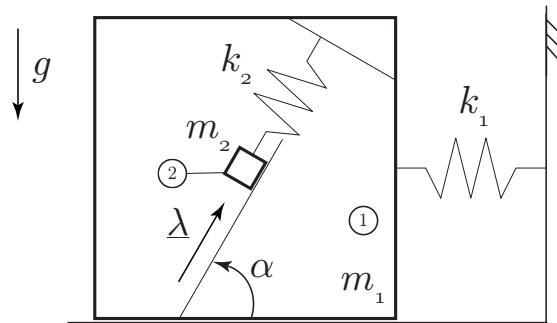


Figura 11.1: Schema meccanico.

Si consideri il semplice sistema meccanico riportato in figura 11.1. Si scrivano le equazioni che regolano la dinamica e si determinino i modi propri del sistema.

11.1 Dinamica

Prima di scrivere le equazioni della dinamica si scrive l'espressione della velocità assoluta v_2 della massa ②

$$v_2 = (\dot{x}_1 + \dot{\lambda} \cos(\alpha), \dot{\lambda} \sin(\alpha))$$

dove \dot{x}_1 è la velocità della massa ① lungo l'asse x . Si nota banalmente che la velocità di ① lungo l'asse y è nulla per effetto dei vincoli.

L'energia cinetica totale del sistema risulta quindi la seguente

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\lambda}^2 + \dot{x}_1^2 + 2\cos(\alpha)\dot{\lambda}\dot{x}_1)$$

In questo sistema l'energia potenziale è dovuta agli effetti gravitazionali e alle

molte k_1 e k_2 :

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2\lambda^2 + m_2g\lambda \sin(\alpha)$$

Determinando le equazioni che regolano il moto del sistema attraverso le equazioni di Lagrange si ottiene

$$\begin{aligned} k_1x_1(t) + m_1\ddot{x}_1 + 2m_2 \left(\cos(\alpha)\ddot{\lambda}_1 + \ddot{x}_1 \right) &= 0 \\ k_2\lambda a(t) + gm_2 \sin(\alpha) + m_2 \left(2\ddot{\lambda}_1 \sin^2(\alpha) + 2\cos(\alpha) \left(\cos(\alpha)\ddot{\lambda}_1 + \ddot{x}_1 \right) \right) &= 0 \end{aligned}$$

11.2 Oscillazioni libere

Si riscrivono le equazioni della dinamica del sistema nella classica notazione matriciale come segue

$$M\ddot{\underline{q}} + K\underline{q} = \underline{0} \quad (11.1)$$

dove

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} m_1 + 2m_2 & 2m_2 \cos(\alpha) \\ 2m_2 \cos(\alpha) & 2m_2 \cos^2(\alpha) + 2m_2 \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} \\ K &= \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si cercano le soluzioni della (11.1) della forma

$$\underline{q}(t) = \underline{X}e^{i\omega t}$$

Sostituendo tale espressione nella (11.1) si ottiene

$$(-\omega^2 M + K) \underline{X} e^{i\omega t} = Z(\omega^2) = \underline{0}$$

Affinchè tale equazione sia verificata per ogni t è necessario imporre

$$0 = \det Z(\omega^2)$$

$$0 = k_1(k_2 - 2m_2\omega^2) + \omega^2(2m_2(m_1 + m_2)\omega^2 - k_2(m_1 + 2m_2)) - 2m_2^2\omega^4 \cos(2\alpha)$$

La soluzione di quest'ultima equazione fornisce i valori delle pulsazioni proprie del sistema

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{k_2m_1 + 2k_1m_2 + 2k_2m_2 - \sqrt{4k_1^2m_2^2 + 8k_1k_2\cos(2\alpha)m_2^2 - 4k_1k_2m_1m_2 + k_2^2(m_1 + 2m_2)^2}}{4m_2(m_1 + m_2 - m_2\cos(2\alpha))} \\ \omega_2^2 &= \frac{k_2m_1 + 2k_1m_2 + 2k_2m_2 + \sqrt{4k_1^2m_2^2 + 8k_1k_2\cos(2\alpha)m_2^2 - 4k_1k_2m_1m_2 + k_2^2(m_1 + 2m_2)^2}}{4m_2(m_1 + m_2 - m_2\cos(2\alpha))} \end{aligned}$$

A questo punto è necessario determinare gli autovettori della matrice $Z(\omega^2)$ per determinare la forma dei modi propri. Il procedimento da seguire è qui riportato

- Si scrive $\underline{X} = (X_1, X_2)$
- Si valuta $Z(\omega_1^2)$

- La matrice ottenuta è sicuramente singolare e quindi le due equazioni ad essa associate sono linearmente dipendenti.
- Si fissa un valore diverso da zero per una delle componenti di \underline{X} , ad esempio $X_1 = 1$, e si ricava il valore dell'altra componente risolvendo una delle due equazioni di

$$Z(\omega_1^2)\underline{X} = \underline{0}$$

- Si ripete lo stesso procedimento per l'altra pulsazione naturale ω_2^2 .

Si indicano i valori così ottenuti con

$$\begin{aligned}\underline{X}_1 &= (X_{11}, X_{21}) \\ \underline{X}_2 &= (X_{12}, X_{22})\end{aligned}$$

e si costruisce la matrice modale U nel seguente modo

$$U = (\underline{X}_1, \underline{X}_2) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$$

Attraverso tale matrice possiamo riscrivere (11.1) come segue

$$\begin{aligned}\underline{q} &= U\underline{y} \\ MU\ddot{\underline{y}} + KU\underline{y} &= \underline{0}\end{aligned}$$

da cui, premoltiplicando per U^T si ottiene

$$U^T MU\ddot{\underline{y}} + U^T KU\underline{y} = \underline{0}$$

dove la matrice $U^T MU$ risulta diagonale. Inoltre, normalizzando i vettori dei modi propri secondo la matrice di massa, ossia scegliendo

$$\tilde{U} = \left(\frac{\underline{X}_1}{\sqrt{\underline{X}_1^T M \underline{X}_1}}, \frac{\underline{X}_2}{\sqrt{\underline{X}_2^T M \underline{X}_2}} \right)$$

si ottiene il seguente importante risultato

$$\begin{aligned}\tilde{U}^T M \tilde{U} &= I \\ \tilde{U}^T K \tilde{U} &= \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2)\end{aligned}$$

cioè il sistema risultante è disaccoppiato e pertanto si possono risolvere indipendentemente le due equazioni differenziali, invece di risolvere un sistema di due equazioni differenziali accoppiato.

11.3 Caso numerico

Si considerino i seguenti valori numerici

$$\begin{aligned}m_1 &= 10 \text{ kg} \\ m_2 &= 1 \text{ kg} \\ k_1 &= 10 \text{ N/m} \\ k_2 &= 1 \text{ N/m} \\ \alpha &= 60^\circ\end{aligned}$$

In tal caso le matrici di (11.1) valgono

$$M = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le frequenze proprie e le forme dei modi propri risultano di conseguenza

$$\omega_1^2 = 0.473956 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2^2 = 0.917349 \text{ rad/s}$$

$$\underline{X}_1 = (1, 9.09902)$$

$$\underline{X}_2 = (1, -1.09902)$$

mentre la matrice \tilde{U} risulta

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} 0.0714683 & 0.286092 \\ 0.650291 & -0.314421 \end{pmatrix}$$

Per verifica si effettuano i seguenti calcoli

$$\tilde{U}^T M \tilde{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{U}^T K \tilde{U} = \begin{pmatrix} 0.473956 & 0 \\ 0 & 0.917349 \end{pmatrix}$$

Capitolo 12

Oscillazioni Forzate

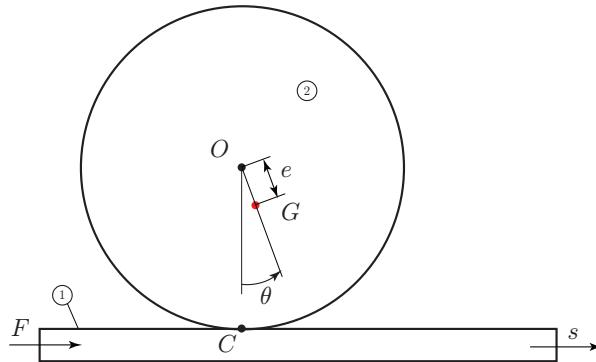


Figura 12.1: Schema meccanico.

Si consideri il semplice sistema meccanico riportato in figura 12.1. Si assume completamente nota la geometria del sistema: massa del disco m , momento d'inerzia J_G del disco, distanza e del baricentro del disco dal suo centro, massa M del corpo ①. Il contatto fra ① e ② è di rotolamento senza strisciamento, mentre il contatto fra ① e il suolo è privo di attrito. Viene imposto uno spostamento

$$s(t) = S_0 \cos(\Omega t)$$

al corpo ① come mostrato in figura 12.1.

Si determini l'equazione del moto in $\theta(t)$ utilizzando i seguenti metodi:

- Equazioni di Lagrange
- Seconda equazione cardinale di ② scritta rispetto al centro delle velocità C_V di ② rispetto ad ①
- Seconda equazione cardinale di ② scritta rispetto al centro di istantanea rotazione $C(t)$ di ② rispetto ad ①

12.1 Equazioni di Lagrange

Le coordinate lagrangiane per questo sistema siano $s(t)$ e $\theta(t)$. L'energia cinetica T del sistema risulta la seguente

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}M\dot{s}^2 + \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}J_G\dot{\theta}^2$$

dove (fare attenzione alla notazione vettoriale)

$$\underline{v}_G = \underline{v}_{C_V} + \underline{v}_{GC_V} = \dot{s}\underline{i} + \dot{\theta}\underline{k} \wedge \underline{C_V G}$$

e

$$\underline{C_V G} = (e \sin(\theta(t)), r - e \cos(\theta(t)))$$

Da cui

$$v_G^2 = e^2 \sin^2(\theta) \dot{\theta}^2 + (\dot{s} + (e \cos(\theta) - r) \dot{\theta})^2$$

L'energia cinetica T_2 del corpo ② risulta quindi

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} \left(m\dot{s}^2 - 2m(r - e \cos(\theta))\dot{\theta}\dot{s} + (J_G + m(e^2 + r^2) - 2emr \cos(\theta))\dot{\theta}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} J_C(\theta)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(m\dot{s}^2 - 2m(r - e \cos(\theta))\dot{s}\dot{\theta} \right) \end{aligned}$$

dove

$$J_C(\theta) = J_G + m(e^2 + r^2) - 2emr \cos(\theta)$$

è il momento d'inerzia (variabile con θ) di ② rispetto al centro d'istantanea rotazione $C(t)$.

L'energia potenziale U del sistema è data dalla seguente relazione

$$U(\theta) = mge(1 - \cos(\theta))$$

I vari termini delle equazioni di Lagrange sono riportati di seguito. Per la prima coordinata lagrangiana si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{d}{dt} \left(J_C(\theta)\dot{\theta} - m\dot{s}(r - e \cos(\theta)) \right) \\ &= \frac{dJ_C(\theta)}{d\theta} \dot{\theta}^2 + J_C(\theta)\ddot{\theta} - m\ddot{s}(r - e \cos(\theta)) - m\dot{s}\dot{\theta}e \sin(\theta) \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 \frac{dJ_C(\theta)}{d\theta} - m\dot{s}\dot{\theta} \sin(\theta) = emr\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - m\dot{s}\dot{\theta} \sin(\theta) \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= mge \sin(\theta) \end{aligned}$$

da cui si ottiene la seguente equazione del moto

$$emr \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + egm \sin(\theta) + J_C(\theta) \ddot{\theta} = m(r - e \cos(\theta)) \ddot{s} \quad (12.1)$$

Per quanto riguarda la seconda coordinata lagrangiana si hanno i seguenti termini

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} &= \frac{d}{dt} \left((M+m)\dot{s} - m\dot{\theta}(r - e \cos(\theta)) \right) \\ &= M\ddot{s} + m \left(-e \sin(\theta)\dot{\theta}^2 + \ddot{s} + (e \cos(\theta) - r)\ddot{\theta} \right) \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= 0\end{aligned}$$

da cui discende

$$(m+M)\ddot{s} + m(e \cos(\theta) - r)\ddot{\theta} - em \sin(\theta)\dot{\theta}^2 = F(t) \quad (12.2)$$

Si noti che l'equazione (12.1), cioè l'equazione del moto in $\theta(t)$, rappresenta la dinamica diretta, mentre invece la (12.2) consente, una volta risolta la (12.1), di determinare la forza $F(t)$ necessaria ad ottenere il moto imposto. La (12.2) è dunque la soluzione della dinamica inversa ed è infatti un'equazione algebrica in $F(t)$.

12.2 Seconda cardinale rispetto a C_V di ② rispetto a ①

Il momento \underline{M}_{C_V} delle forze esterne a ② rispetto a C_V è dato dalla seguente relazione

$$\underline{M}_{C_V} = -mge \sin(\theta) \underline{k} \quad (12.3)$$

Dato che C_V appartiene a ② ne discendono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}\underline{v}_{C_V} &= \dot{s} \underline{i} \\ \underline{a}_{C_V} &= \underline{a}_{C_V}^{(r)} + \underline{a}_{C_V}^{(t)} = r\dot{\theta}^2 \underline{j} + \ddot{s} \underline{i} \\ \underline{K}_{C_V}^{(r)} &= J_{C_V} \dot{\theta} \underline{k} = J_C(\bar{\theta}) \dot{\theta} \underline{k} \\ \dot{\underline{K}}_{C_V}^{(r)} &= J_C(\bar{\theta}) \ddot{\theta} \underline{k}\end{aligned}$$

Si noti che nella derivazione di $\underline{K}_{C_V}^{(r)}$ il termine $J_C(\bar{\theta})$ è costante in quanto C_V è un punto fisso su ②. Per le relazioni appena scritte la seconda equazione cardinale rispetto a C_V risulta la seguente

$$\begin{aligned}\underline{M}_{C_V} &= \dot{\underline{K}}_{C_V}^{(r)} + \underline{C}_V G \wedge (m\underline{a}_{C_V}) \\ -egm \sin(\theta) &= emr \sin(\theta) \dot{\theta}^2 - mr\ddot{s} + em \cos(\theta) \ddot{s} + J_C(\theta) \ddot{\theta}\end{aligned}$$

che risulta uguale alla (12.1).

12.3 Seconda cardinale rispetto a $C(t)$ di ② rispetto a ①

Il momento delle forze calcolato rispetto a $C(t)$ è identico alla (12.3), mentre è necessario prestare attenzione al fatto che $C(t)$ non appartiene a ② e pertanto valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}\underline{v}_C &= (\dot{s} - r\dot{\theta}) \underline{i} \\ \underline{a}_C &= (\ddot{s} - r\ddot{\theta}) \underline{i}\end{aligned}$$

Vediamo due metodi alternativi per scrivere la seconda equazione cardinale rispetto al punto $C(t)$. Calcoliamo dapprima il valore di \underline{K}_C come segue

$$\begin{aligned}\underline{K}_C &= \sum (\underline{CP}_i \wedge m_i \underline{v}_{P_i}) \\ &= \sum (\underline{CP}_i \wedge m_i (\underline{v}_{C_V} + \dot{\theta} \underline{k} \wedge \underline{CP}_i)) \\ &= \sum (\underline{CP}_i \wedge m_i (\dot{s} \underline{i} + \dot{\theta} \underline{k} \wedge \underline{CP}_i)) \\ &= \sum (\underline{CP}_i \wedge (m_i \dot{\theta} \underline{k} \wedge \underline{CP}_i)) + \sum (\underline{CP}_i \wedge (m_i \dot{s} \underline{i})) \\ &= J_C(\theta) \dot{\theta} \underline{k} + \underline{CG} \wedge (m \dot{s} \underline{i})\end{aligned}$$

Derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\dot{\underline{K}}_C = J_C(\theta) \ddot{\theta} + \frac{\partial J_C(\theta)}{\partial \theta} \dot{\theta}^2 + \frac{d\underline{CG}}{dt} \wedge (m \dot{s} \underline{i}) + \underline{CG} \wedge (m \ddot{s} \underline{i})$$

dove

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_C(\theta)}{\partial \theta} &= 2emr \sin(\theta) \\ \frac{d\underline{CG}}{dt} &= (e \cos(\theta) \dot{\theta}, e \sin(\theta) \dot{\theta})\end{aligned}$$

Inoltre si ha anche che

$$\dot{\underline{K}}_C = \sum ((\underline{v}_{P_i} - \underline{v}_C) \wedge (m_i \underline{v}_{P_i}) + \underline{CP}_i \wedge (m_i \underline{a}_{P_i})) = -\underline{v}_C \wedge m \underline{v}_G + \underline{M}_I$$

dove \underline{M}_I è il momento delle forze d'inerzia. Per cui risulta

$$\underline{M}_I = \dot{\underline{K}}_C + \underline{v}_C \wedge m \underline{v}_G$$

Combinando insieme le relazioni appena scritte si ottiene la seconda equazione cardinale scritta rispetto al punto C :

$$\begin{aligned}\underline{M}_C &= \underline{M}_I \\ \underline{M}_C &= J_C(\theta) \ddot{\theta} + \frac{\partial J_C(\theta)}{\partial \theta} \dot{\theta}^2 + \frac{d\underline{CG}}{dt} \wedge (m \dot{s} \underline{i}) + \underline{CG} \wedge (m \ddot{s} \underline{i}) + \underline{v}_C \wedge m \underline{v}_G \\ -m g e \sin(\theta) &= J_C(\theta) \ddot{\theta} + emr \sin(\theta) \dot{\theta}^2 + (me \cos(\theta) - mr) \ddot{s}\end{aligned}$$

che equivale alla (12.1).

Alternativa

In alternativa si può utilizzare il termine $\dot{\underline{K}}_C^{(r)}$:

$$\begin{aligned}\underline{K}_C^{(r)} &= \sum (\underline{CP}_i \wedge m_i(\underline{v}_{P_i} - \underline{v}_C)) \\ &= \sum (\underline{CP}_i \wedge m_i(\dot{\theta} \underline{k} \wedge \underline{CP}_i + r \dot{\theta} \underline{i})) \\ &= J_C(\theta) \dot{\theta} \underline{k} + \underline{CG} \wedge mr \dot{\theta} \underline{i}\end{aligned}$$

da cui

$$\dot{\underline{K}}_C^{(r)} = J_C(\theta) \ddot{\theta} + \frac{\partial J_C(\theta)}{\partial \theta} + \underline{CG} \wedge mr \ddot{\theta} \underline{i} + (\underline{v}_G - \underline{v}_C) \wedge mr \dot{\theta} \underline{i}$$

Esplicitando il valore dell'unica componente non nulla di $\underline{K}_C^{(r)}$ si ha

$$\begin{aligned}K_C^{(r)} &= J_C(\theta) \dot{\theta} - m \dot{\theta} r^2 + em \cos(\theta) \dot{\theta} r \\ \dot{K}_C^{(r)} &= J_C(\theta) \ddot{\theta} - m \ddot{\theta} r^2 + em \sin(\theta) t \dot{h}^2 r + em \cos(\theta) \ddot{\theta} r\end{aligned}$$

In definitiva la seconda equazione cardinale può essere scritta come segue

$$\begin{aligned}\underline{M}_C &= \dot{\underline{K}}_C^{(r)} + \underline{CG} \wedge m \underline{a}_C \\ \underline{CG} \wedge m \underline{a}_C &= (m \ddot{\theta} r^2 - m \ddot{s} r - em \cos(\theta) \ddot{\theta} r + em \cos(\theta) \ddot{s}) \underline{k} \\ -m g e s i n(\theta) &= J_C(\theta) \ddot{\theta} + em \sin(\theta) \dot{\theta}^2 r - m \ddot{s} r + em \cos(\theta) \ddot{s}\end{aligned}$$

che coincide con la (12.1).

12.4 Piccole oscillazioni

Si studiano ora le piccole oscillazioni intorno alla posizione $\theta = 0$. Per prima cosa si effettua la linearizzazione nell'intorno di tale punto.

Il momento d'inerzia $J_C(\theta)$ viene quindi approssimato attraverso la seguente relazione

$$J_C(0) = J_G + m(r - e)^2$$

e risulta pertanto costante. L'equazione (12.1) può essere quindi riscritta come segue

$$egm\theta + J_C(0)\ddot{\theta} = m(r - e)\ddot{s} \quad (12.4)$$

Si cerca la soluzione particolare dell'equazione completa dove

$$\ddot{s} = s_0 \cos(\Omega t)$$

Consideriamo l'espressione complessa

$$\hat{s}(t) = s_0 e^{i\Omega t}$$

da cui segue

$$s(t) = \Re(\hat{s}(t))$$

Derivando l'espressione di $\hat{s}(t)$ si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{\hat{s}} &= i\Omega s_0 e^{i\Omega t} \\ \ddot{\hat{s}} &= -\Omega^2 s_0 e^{i\Omega t}\end{aligned}$$

Si cerca una soluzione complessa del tipo

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(t) &= \hat{\theta}_0 e^{i\Omega t} \\ \hat{\theta}_0 &= \theta_0 e^{-i\varphi t}\end{aligned}$$

Derivando tale espressione si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\theta}} &= i\Omega \hat{\theta}_0 e^{i\Omega t} \\ \ddot{\hat{\theta}} &= -\Omega^2 \hat{\theta}_0 e^{i\Omega t}\end{aligned}$$

Sostituendo le espressioni trovate nella (12.4) si ottiene

$$(-\Omega^2 J_C(0) + mge) \hat{\theta}_0 e^{i\Omega t} = -m(r - e)\Omega^2 s_0 e^{i\Omega t}$$

Dovendo soddisfare questa relazione per ogni istante t si ottiene

$$\hat{\theta}_0 = -\frac{m(r - e)\Omega^2 s_0}{mge - \Omega^2 J_C(0)}$$

Cerchiamo ora una forma più comoda per studiare le oscillazioni forzate del sistema. Si riscrive quindi l'equazione (12.4) utilizzando i coefficienti normali (si divide per $J_C(0)$)

$$\ddot{\theta} + \frac{mge}{J_C(0)} \theta = \frac{m(r - e)}{J_C(0)} \ddot{s} = -\frac{m(r - e)}{J_C(0)} \Omega^2 s_0 \cos(\Omega t)$$

Definendo

$$\begin{aligned}\omega_n^2 &= \frac{mge}{J_C(0)} \\ A &= -\frac{m(r - e)s_0}{J_C(0)}\end{aligned}$$

e utilizzando la forma complessa si ottiene

$$\begin{aligned}-\Omega^2 \hat{\theta} + \omega_n^2 \hat{\theta} &= A \Omega^2 e^{i\Omega t} \\ (-\Omega^2 + \omega_n^2) \hat{\theta}_0 e^{i\Omega t} &= A \Omega^2 e^{i\Omega t}\end{aligned}$$

Da cui, dividendo per ω_n^2 e risolvendo su $\hat{\theta}_0$ si ottiene

$$\hat{\theta}_0 = \frac{A \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2}$$

L'ampiezza θ_0 della risposta forzata del sistema è data quindi da

$$\theta_0 = \left| \frac{A \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)^2} \right|$$

Indicando con

$$x = \left(\frac{\Omega}{\omega_n} \right)$$

si ottiene

$$\frac{\theta_0}{A} = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

il cui grafico qualitativo è riportato in figura 12.2. Si noti che in corrispondenza del valore $x = 1$ si ha un asintoto verticale. Questa condizione corrisponde ad avere una frequenza della forzante uguale alla frequenza propria del sistema e pertanto si ha un fenomeno di risonanza.

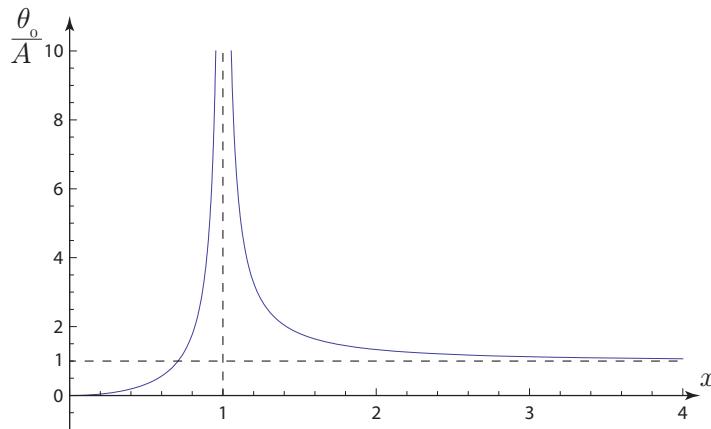


Figura 12.2: Ampiezza della risposta forzata del sistema.

Capitolo 13

Oscillazioni Forzate del Doppio Pendolo

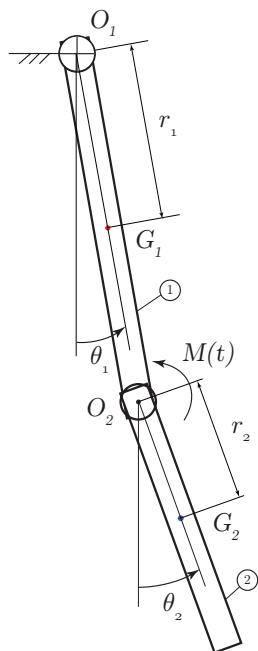


Figura 13.1: Schema meccanico.

Si consideri il sistema meccanico riportato in figura 9.1 del quale si assumono completamente note la geometria e le caratteristiche d'inerzia dei corpi rigidi ($m_1, J_{G_1}, m_2, J_{G_2}$). Il giunto rotoidale in O_2 è attuato con un momento interno $M(t) = M_0 \cos(\Omega t)$.

Si scrivano le equazioni del moto del sistema valide in grande e poi, nell'ipotesi di piccole oscillazioni nell'intorno di $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ si risolvano le oscillazioni forzate.

13.1 Dinamica

Per determinare le equazioni che regolano la dinamica del sistema si utilizzano le equazioni di Lagrange. In via preliminare si riportano le relazioni cinematiche necessarie al calcolo dell'energia cinetica:

$$\begin{aligned}\underline{v}_{G_1} &= \dot{\theta}_1 \underline{k} \wedge \underline{O_1 G_1} \\ \underline{v}_{G_2} &= \dot{\theta}_1 \underline{k} \wedge \underline{O_1 O_2} + \dot{\theta}_2 \underline{k} \wedge \underline{O_2 G_2}\end{aligned}$$

che in componenti si scrivono come segue

$$\begin{aligned}\underline{v}_{G_1} &= (r_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1, r_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1) \\ \underline{v}_{G_2} &= (l_1 \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1 + r_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_2, l_1 \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1 + r_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2)\end{aligned}$$

L'energia cinetica T del sistema è quindi data dalla seguente relazione

$$\begin{aligned}T &= T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_{G_1}^2 + \frac{1}{2} J_{G_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{G_2}^2 + \frac{1}{2} J_{G_2} \dot{\theta}_2^2 \\ &= \frac{1}{2} (J_{G_1} + m_1 r_1^2) \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (l_1^2 m_2 \dot{\theta}_1^2 + 2l_1 m_2 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + (m_2 r_2^2 + J_{G_2}) \dot{\theta}_2^2)\end{aligned}$$

L'energia potenziale U , nel caso in esame, è dovuta solamente agli effetti gravitazionali e la sua espressione è la seguente

$$U = -gm_1 r_1 \cos(\theta_1) - gm_2 (l_1 \cos(\theta_1) + r_2 \cos(\theta_2))$$

I termini delle equazioni di Lagrange sono quindi i seguenti

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} &= m_2 \ddot{\theta}_1 l_1^2 + m_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 l_1 - m_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l_1 \\ &\quad + m_2 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 l_1 + m_1 r_1^2 \ddot{\theta}_1 + J_{G_1} \ddot{\theta}_1 \\ \frac{\partial T}{\partial \theta_1} &= -l_1 m_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \frac{\partial u}{\partial \theta_1} &= g(l_1 m_2 + m_1 r_1) \sin(\theta_1) \\ Q_1^{(nc)} &= M(t) \underline{k} \cdot \frac{\partial(\theta_2 - \theta_1)}{\partial \theta_1} \underline{k} = -M(t) \\ \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} &= -l_1 m_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 + l_1 m_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 \\ &\quad + l_1 m_2 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_1 + (m_2 r_2^2 + J_{G_2}) \ddot{\theta}_2 \\ \frac{\partial T}{\partial \theta_2} &= l_1 m_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \frac{\partial u}{\partial \theta_2} &= g m_2 r_2 \sin(\theta_2) \\ Q_2^{(nc)} &= M(t) \underline{k} \cdot \frac{\partial(\theta_2 - \theta_1)}{\partial \theta_2} \underline{k} = M(t)\end{aligned}$$

Combinando tutti i termini appena scritti si ottengono le seguenti equazioni del moto.

$$\begin{aligned} -M(t) &= l_1 m_2 r_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + g l_1 m_2 \sin(\theta_1) + g m_1 r_1 \sin(\theta_1) \\ &\quad + (m_2 l_1^2 + m_1 r_1^2 + J_{G_1}) \ddot{\theta}_1 + l_1 m_2 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \ddot{\theta}_2 \\ M(t) &= m_2 \ddot{\theta}_2 r_2^2 - l_1 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1^2 r_2 + g m_2 \sin(\theta_2) r_2 \\ &\quad + l_1 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 r_2 + J_{G_2} \ddot{\theta}_2 \end{aligned}$$

13.2 Piccole oscillazioni forzate

Linearizzando le equazioni del moto (valide in grande) nell'intorno di $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ si ottiene

$$\begin{aligned} -M(t) &= g(l_1 m_2 + m_1 r_1) \theta_1 + (m_2 l_1^2 + m_1 r_1^2 + J_{G_1}) \ddot{\theta}_1 + l_1 m_2 r_2 \ddot{\theta}_2 \\ M(t) &= g m_2 r_2 \theta_2 + l_1 m_2 r_2 \ddot{\theta}_1 + (m_2 r_2^2 + J_{G_2}) \ddot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (13.1)$$

Si riorganizzano tali equazioni nella classica forma matriciale¹

$$M \ddot{\underline{q}} + K \underline{q} = \underline{Q}_0 e^{i\Omega t} \quad (13.2)$$

dove

$$\begin{aligned} \underline{q} &= (\theta_1, \theta_2) \\ m_{11} &= J_{G_1} + m_2 l_1^2 + m_1 r_1^2 \\ m_{12} &= m_2 l_1 r_2 \\ m_{21} &= m_2 l_1 r_2 \\ m_{22} &= J_{G_2} m_2 r_2^2 \\ k_{11} &= g(m_2 l_1 + m_1 r_1) \\ k_{12} &= k_{21} = 0 \\ k_{22} &= g m_2 r_2 \\ \underline{Q}_0 &= (-M_0, M_0) \end{aligned}$$

Si cercano soluzioni della forma

$$\underline{q}(t) = \underline{y} e^{i\Omega t}$$

per cui, sostituendo nella (13.2) si ottiene

$$(-\Omega^2 M + K) \underline{y} e^{i\Omega t} = \underline{Q}_0 e^{i\Omega t}$$

Risolvendo su \underline{y} si ottiene

$$\underline{y} = (-\Omega^2 M + K)^{-1} \underline{Q}_0$$

Si definisce la matrice $Z(\Omega)$ come segue

$$Z(\Omega) = (-\Omega^2 M + K)$$

e si nota che tale matrice ha la stessa forma di quella che viene utilizzata per il calcolo dei modi propri del sistema. Per cui, imponendo nullo il determinante di $Z(\Omega)$ si possono determinare le pulsazioni proprie.

¹Il termine forzante è stato scritto nella forma complessa.

13.3 Caso numerico

Siano assegnati i seguenti valori numerici

$$\begin{aligned}m_1 &= 1 \text{ kg} \\l_1 &= 0.6 \text{ m} \\r_1 &= l_1/2 \\J_{G_1} &= 0.0208 \text{ kg m}^2 \\m_2 &= 0.75 \text{ kg} \\l_2 &= 0.35 \text{ m} \\r_2 &= l_2/2 \\J_2 &= 7.656 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \\M_0 &= 0.5 \text{ N m}\end{aligned}$$

Le matrici del sistema linearizzato assumono pertanto i seguenti valori

$$\begin{aligned}M &= \begin{pmatrix} 0.2708 & 0.065625 \\ 0.065625 & 0.0306248 \end{pmatrix} \\K &= \begin{pmatrix} 6.13125 & 0 \\ 0 & 1.28756 \end{pmatrix} \\Q_0 &= \begin{pmatrix} -0.05 \\ 0.05 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

La matrice $Z(\Omega)$ risulta quindi

$$Z(\Omega) = \begin{pmatrix} 6.13125 - 0.2708\Omega^2 & -0.065625\Omega^2 \\ -0.065625\Omega^2 & 1.28756 - 0.0306248\Omega^2 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza le pulsazioni naturali risultano le seguenti

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= 4.101 \text{ rad/s} \\\Omega_2 &= 10.851 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

L'ampiezza della risposta forzata al variare della frequenza Ω della forzante è rappresentato nelle figure 13.2 e 13.3. Si noti che in corrispondenza delle due frequenze proprie del sistema si hanno due asintoti verticali. Inoltre si nota che esistono due particolari valori di Ω (indicati con ω_1 e ω_2) per i quali l'ampiezza di una delle due variabili è nulla. In particolare nel caso in cui $\Omega = \omega_1$ si parla di smorzamento dinamico del corpo ①, mentre nel caso in cui $\Omega = \omega_2$ si parla di smorzamento dinamico del corpo ②.

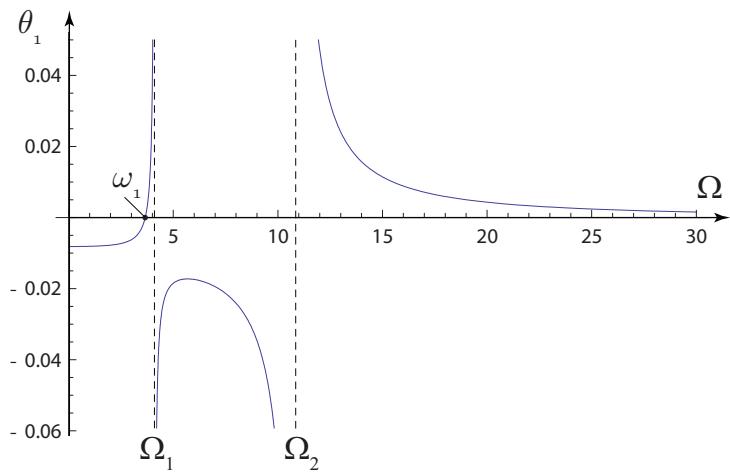


Figura 13.2: Ampiezza di $y_1(t)$.

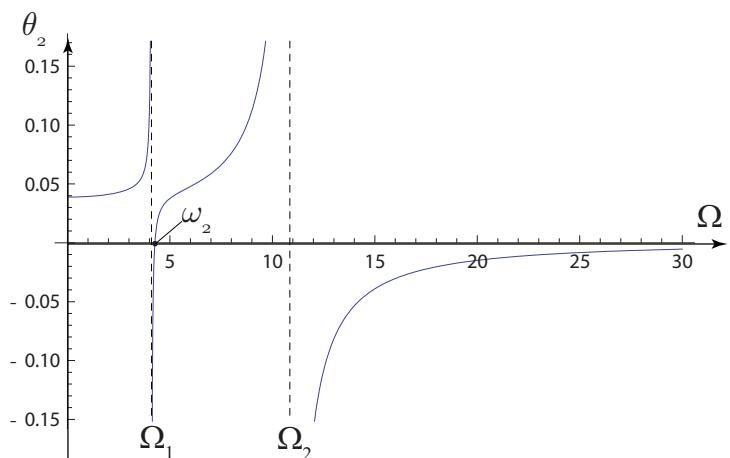


Figura 13.3: Ampiezza di $y_2(t)$.

Capitolo 14

Oscillazioni Forzate 2

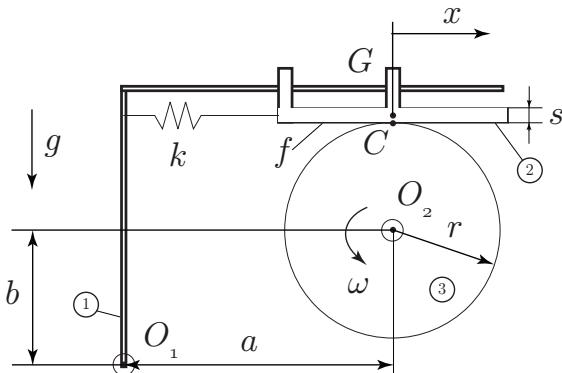


Figura 14.1: Schema meccanico.

Si consideri il sistema meccanico riportato in figura 14.1. Il disco ③ ruota ad una velocità angolare costante ω tale per cui la velocità di strisciamento fra ② e ③ abbia lo stesso verso in ogni istante. Il contatto fra ② e ③ è caratterizzato da attrito radente con coefficiente f .

Si determini la condizione di equilibrio statico di ① e ② nel caso in cui ③ sia fermo, e nel caso in cui ω sia assegnata. Inoltre si determini l'equazione del moto del sistema complessivo con ω assegnata.

14.1 Statica

14.1.1 Caso con $\omega = 0$

Nel caso di ③ fermo, si scrivono le equazioni di equilibrio del sottosistema ① + ② facendo riferimento al diagramma riportato in figura 14.2 (dove si considera $fN_{32} = 0$ in quanto $\omega = 0$).

$$\begin{aligned} H_{01} &= 0 \\ -mg + N_{32} + V_{01} &= 0 \\ \text{O}_1 : N_{32}a - mga &= 0 \end{aligned}$$

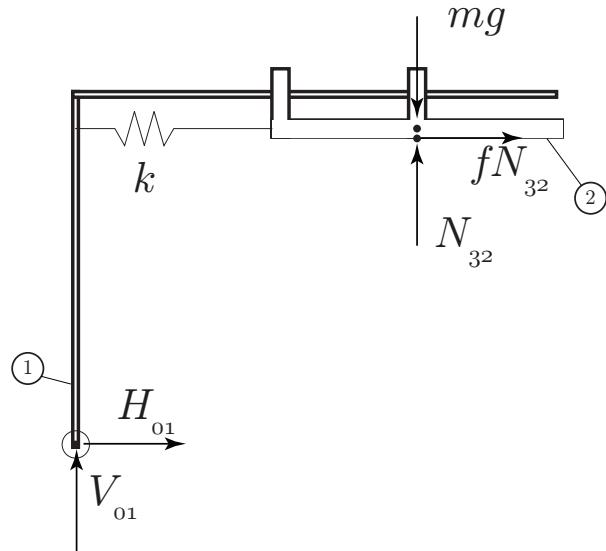


Figura 14.2: Schema delle forze sul sistema ① + ②.

La soluzione di tale sistema è banale e risulta

$$H_{01} = 0$$

$$N_{32} = mg$$

$$V_{01} = 0$$

14.1.2 Caso con $\omega = \text{cost} \neq 0$

In questo caso è necessario tenere di conto della forza d'attrito che si sviluppa fra ② e ③ e della forza esercitata dalla molla.

Si scrive innanzitutto l'equilibrio di ② lungo x

$$f\bar{N}_{32} - k\bar{x} = 0$$

Scriviamo ora l'equilibrio alla rotazione intorno a O_1 del sottosistema ① + ②

$$-mg(a + \bar{x}) - f\bar{N}_{32}(b + r) + \bar{N}_{32}a = 0$$

Nelle due equazioni appena scritte si hanno due incognite \bar{N}_{32} e \bar{x} cioè la forza che si scambiano ② e ③ e l'elongazione della molla all'equilibrio.

Risolvendo tali equazioni nelle due incognite si ottengono i seguenti risultati

$$\begin{aligned}\bar{N}_{32} &= \frac{kmg a}{ak - f(bk + rk + gm)} \\ \bar{x} &= \frac{fmg a}{ak - f(bk + rk + gm)}\end{aligned}$$

Affinchè la soluzione trovata abbia senso fisico è necessario che risulti $\bar{N}_{32} > 0$. In particolare il denominatore della soluzione di \bar{N}_{32} deve risultare positivo:

$$ak - f(bk + rk + gm) > 0$$

da cui discende, con $k > 0$

$$\begin{aligned} k &> \frac{fmg}{a - f(b+r)} \\ a &> f(b+r) \end{aligned}$$

dove l'ultima relazione deve valere per avere $k > 0$.

14.1.3 Equazione del moto

Per determinare l'equazione del moto del sistema si scrive dapprima l'equilibrio lungo x del corpo ②.

$$m\ddot{x} = -kx + fN_{32} \quad (14.1)$$

Successivamente si scrive l'equilibrio alla rotazione intorno a O_1 del sottosistema ① + ②.

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_1 - mg(a+x) - fN_{32}(b+r) + N_{32}a &= \\ &= \left(\dot{K}_{G_1}^{(r)} + \underline{O_1 G_1} \wedge m_1 \underline{a}_{G_1} + \dot{K}_{G_2}^{(r)} + \underline{O_1 G_2} \wedge m_2 \underline{a}_{G_2} \right) \cdot \underline{k} \end{aligned}$$

Dato che ① non ha massa e ② ha un moto puramente traslatorio si ha

$$\begin{aligned} \dot{K}_{G_1}^{(r)} &= \underline{0} \\ \underline{O_1 G_1} \wedge m_1 \underline{a}_{G_1} &= \underline{0} \\ \dot{K}_{G_2}^{(r)} &= \underline{0} \\ \underline{O_2 G_2} \wedge m_2 \underline{a}_{G_2} &= -m\ddot{x} \left(b + r + \frac{s}{2} \right) \underline{k} \end{aligned}$$

Per cui l'equilibrio alla rotazione di ① + ② risulta

$$\mathcal{Q}_1 - mg(a+x) - fN_{32}(b+r) + N_{32}a = -\ddot{x} \left(b + r + \frac{s}{2} \right) \quad (14.2)$$

Risolvendo la (14.2) si ottiene

$$N_{32} = \frac{m(2ag + 2xg - (2b + 2r + s)\ddot{x})}{2(a - f(b+r))}$$

Sostituendo questo risultato nella (14.1) si ottiene

$$m_{eq}\ddot{x} + k_{eq}x = F_{eq}$$

dove

$$\begin{aligned} m_{eq} &= \frac{m(2a + fs)}{2(a - f(b+r))} \\ k_{eq} &= k + \frac{fgm}{f(b+r) - a} \\ F_{eq} &= \frac{afgm}{a - f(b+r)} \end{aligned}$$

Si noti che l'espressione di F_{eq} risulta costante. Imponendo $\ddot{x} = 0$ e risolvendo su x (cioè si cerca la soluzione particolare dell'equazione differenziale) si determina la medesima espressione di \bar{x} determinata in precedenza. La pulsazione propria ω_n del sistema in esame è data dalla classica relazione

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{k(a - f(b + r)) - fmg}{m(a + f\frac{s}{2})}}$$

Affinchè si abbia un moto armonico è necessario che la quantità sotto radice sia positiva. In particolare la condizione da imporre è la stessa che si è imposta nel caso della soluzione statica con $\omega \neq 0$.

14.2 Dinamica con Equazioni di Lagrange

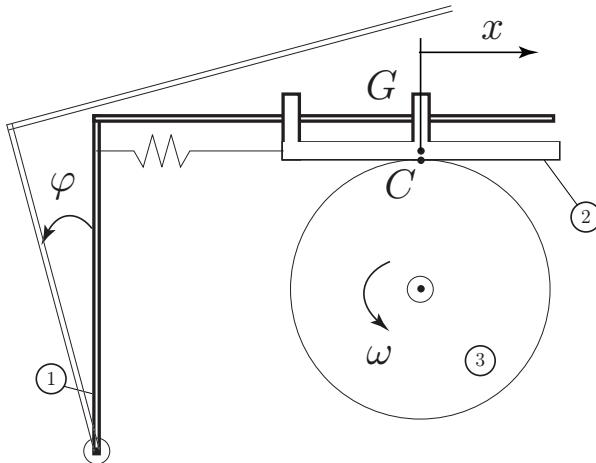


Figura 14.3: Schema di riferimento per le equazioni di Lagrange.

In questa sezione si riporta la scrittura delle equazioni del moto utilizzando le equazioni di Lagrange. È necessario precisare che il sistema in questione ha 3 gradi di libertà (x , θ e φ) e pertanto è necessario scrivere l'energia cinetica e l'energia potenziale in funzione di tali variabili (vedi figura 14.3).

L'energia cinetica T del sistema si può quindi scrivere come segue (si ricordi che ① non ha massa né inerzia)

$$T = T_2 + T_3 = \frac{1}{2}mv_{G_1}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad (14.3)$$

dove

$$v_{G_1} = \dot{\varphi}\underline{k} \wedge \underline{O_1G_2} + \dot{x}\underline{\lambda} = \dot{x}\underline{\lambda} + \dot{\varphi}\underline{k} \wedge (\underline{O_1G_2})$$

da cui

$$v_{G_1}^2 = \dot{x}^2 - (2b + 2r + s)\dot{\varphi}\dot{x} + \frac{1}{4}(4a^2 + 8xa + (2b + 2r + s)^2 + 4x^2)\dot{\varphi}^2$$

L'energia potenziale U del sistema complessivo risulta

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + mg\underline{O_1G_2} \cdot \underline{j} \quad (14.4)$$

14.2.1 Termini non conservativi

Prima di scrivere le equazioni di Lagrange complete si determinano le espressioni dei termini non conservativi. Le forze non conservative che agiscono sul sistema sono

- Il momento motore applicato sul disco ③
- La forza di contatto fra ② e ③

Il termine $Q_1^{(nc)}$ risulta

$$Q_1^{(nc)} = fN_{32}\underline{i} \cdot \frac{\partial x\underline{i}}{\partial x} = fN_{32}$$

Per quanto riguarda la seconda coordinata lagrangiana si ha

$$Q_2^{(nc)} = M(t) - fN_{32}\underline{i} \cdot \frac{\partial r\theta\underline{i}}{\partial \theta} = M(t) - fN_{32}r$$

Infine per l'ultima coordinata lagrangiana si ha

$$Q_3^{(nc)} = (N_{32}\underline{j} + fN_{32}\underline{i}) \cdot \frac{\partial O_1 C}{\partial \varphi} = aN_{32} - fN_{32}(b+r)$$

dove C è il punto di contatto fra ② e ③. Nelle espressioni sopra riportate si ricordi che $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$ e $\ddot{\varphi} = 0$.

14.2.2 Equazioni del moto

Con i risultati determinati nella sezione precedente, le equazioni di Lagrange per il sistema in esame risultano le seguenti

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + kx &= fN_{32} \\ J\ddot{\theta} &= -fN_{32}r + M(t) \\ gm(a+x(t)) - m(b+r - \frac{s}{2})\ddot{x} &= aN_{32} - fN_{32}(b+r) \end{aligned}$$

Si noti che la prima e la terza di tali equazioni coincidono con quelle determinate in precedenza utilizzando le equazioni cardinali della dinamica.

Imponendo $\ddot{\theta} = 0$, dalla seconda equazione appena scritta si ricava

$$M(t) = fN_{32}$$

che fornisce l'espressione del momento necessario da applicare al disco ③ al fine di mantenere la velocità angolare ω costante.

Capitolo 15

Oscillazioni Forzate 3

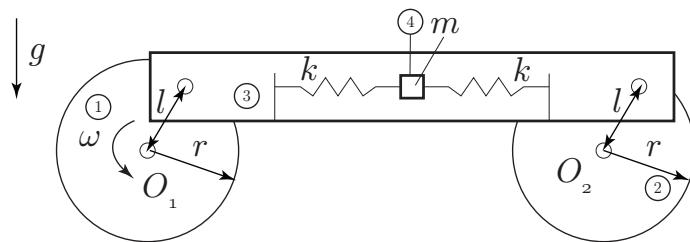


Figura 15.1: Schema meccanico.

Si consideri lo schema meccanico riportato in figura 15.1. I due dischi ① e ② hanno lo stesso raggio ed le stesse caratteristiche d'inerzia (momento d'inerzia baricentrico J). Il disco ① ruota ad una velocità angolare costante assegnata ω . Si studino le oscillazioni forzate del sistema.

15.1 Dinamica

Per determinare le equazioni che regolano la dinamica del sistema in esame si fa ricorso alle equazioni di Lagrange. L'energia cinetica T del sistema è data da

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + 2\left(\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2\right)$$

dove \underline{v} è la velocità assoluta del corpo puntiforme ④. L'energia potenziale totale U è data da

$$U = 2\left(\frac{1}{2}kx^2\right) + mgl \sin(\theta)$$

dove x rappresenta lo spostamento relativo fra ④ e ③. Dalla cinematica si ottiene

$$\begin{aligned}\underline{v} &= \dot{\theta}\underline{k} \wedge \underline{O_1A} + \dot{x}\underline{i} \\ &= (\dot{x} - \dot{\theta}l \sin(\theta))\underline{i} + \dot{\theta}l \sin(\theta)\underline{j}\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{\theta}^2 l^2 \sin^2(\theta) + \dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{\theta}l \sin(\theta) + \dot{\theta}^2 l^2 \cos^2(\theta) \\ &= \dot{\theta}^2 l^2 + \dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{\theta}l \sin(\theta) \end{aligned}$$

Le due coordinate lagrangiane in questo sistema sono x e θ . Scriviamo subito l'espressione dei termini non conservativi delle equazioni di Lagrange:

$$\begin{aligned} Q_1^{(nc)} &= 0 \\ Q_2^{(nc)} &= M(t) \end{aligned}$$

I diversi termini dell'equazione di Lagrange relativa alla prima coordinata risultano i seguenti

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m\ddot{x} - m\ddot{\theta}l \sin(\theta) - m\dot{\theta}^2 l \cos(\theta) \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= 2kx \end{aligned}$$

Mentre per la seconda coordinata lagrangiana si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= ml^2 \ddot{\theta} - m\ddot{x}l \sin(\theta) - m\dot{x}\dot{\theta}l \cos(\theta) + 2J\ddot{\theta} \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= -\dot{x} + \dot{\theta}l \cos(\theta) \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= mgl \cos(\theta) \end{aligned}$$

Da cui le equazioni complete del moto risultano

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - m\ddot{\theta}l \sin(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \cos(\theta) + 2kx &= 0 \\ (ml^2 + 2J)\ddot{\theta} - m\ddot{x}l \sin(\theta) - m\dot{x}\dot{\theta}l \cos(\theta) &= M(t) \end{aligned}$$

15.2 Vibrazioni

Si noti che la seconda delle due equazioni del moto del sistema serve solamente a determinare il valore del momento $M(t)$ necessario affinché il corpo ① ruoti a velocità angolare costante. Per studiare le vibrazioni del sistema è quindi sufficiente considerare la prima equazione del moto riscritta nella classica forma

$$m_{eq}\ddot{x} + k_{eq}x = F_{eq}$$

Le grandezze presenti in tale equazione risultano i seguenti

$$\begin{aligned} m_{eq} &= m \\ k_{eq} &= 2k \\ F_{eq} &= ml\omega^2 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

dove si riconosce che la forzante ha un'ampiezza proporzionale al quadrato della pulsazione.

Per determinare l'ampiezza delle oscillazioni forzate si riscrive l'equazione precedente in forma complessa e si cerca una soluzione del tipo $x(t) = qe^{i\omega t}$ con q complesso:

$$(-m_{eq}\omega^2 + k_{eq})qe^{i\omega t} = F_{eq} = ml\omega^2e^{i\omega t}$$

da cui discende che

$$q = \frac{ml\omega^2}{k_{eq} - m_{eq}\omega^2} = \frac{l\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

dove $\omega_n^2 = \frac{k_{eq}}{m_{eq}}$. Il valore modulo dell'ampiezza delle oscillazioni forzate (normalizzato su l) al variare di ω è rappresentato nel grafico in figura 15.2 dove l'asintoto verticale è in corrispondenza di $\omega = \omega_n$ e il valore di $|q|$ per $\omega \rightarrow \infty$ è pari a 1.

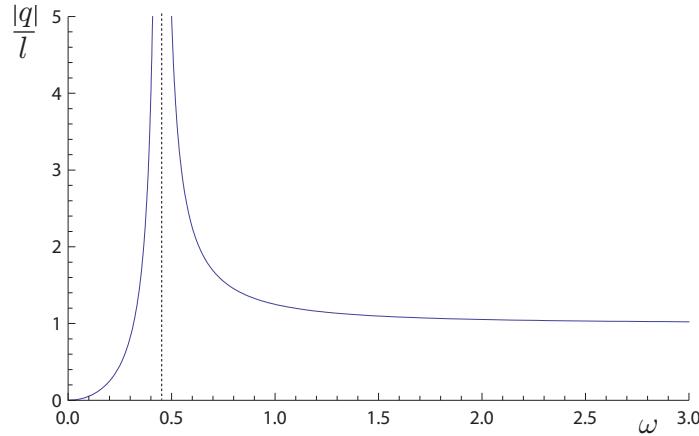


Figura 15.2: Ampiezza delle oscillazioni forzate al variare di ω .

Capitolo 16

Ruote Dentate a Evolvente

In questo capitolo vengono presentati alcuni casi numerici per il dimensionamento di ruote dentate ad evolvente.

16.1 Esercizio 1

Si progetti una trasmissione mediante ruote cilindriche a denti diritti e fianchi ad evolvente con le seguenti specifiche

- Rapporto di trasmissione $\tau \simeq 2$
- Angolo di pressione della dentiera $\alpha = 20^\circ$
- Modulo $m = 3 \text{ mm}$

16.1.1 Preliminari

Nel seguito indicheremo sempre con indice 1 le grandezze relative al pignone, mentre con indice 2 le grandezze relative alla corona. Calcoliamo innanzitutto il numero minimo di denti z_{\min} per ruote normali senza correzione

$$z_{\min} = \left\lceil 1.25 \frac{2}{\sin^2 \alpha} \right\rceil = 22 \quad (16.1)$$

16.1.2 Prima soluzione

Come primo tentativo sceglieremo i seguenti valori del numero di denti dei due membri

$$z_1 = 22$$

$$z_2 = 44$$

in modo tale che il rapporto di trasmissione sia quello desiderato. Di conseguenza i valori dei raggi delle primitive di taglio risultano

$$r_1 = \frac{m z_1}{2} = 33 \text{ mm}$$

$$r_2 = \frac{m z_2}{2} = 66 \text{ mm}$$

da cui segue che l'interasse a è dato da

$$a = r_1 + r_2 = 99 \text{ mm}$$

Con i valori scelti di z_1 e z_2 risulta

$$z_1 + z_2 = 99 > 2z_{\min} = 44$$

e pertanto è possibile scegliere correzioni x_1 e x_2 complementari per le due ruote. Infatti per non avere interferenza di taglio deve valere

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{m} &\geq \frac{z_{\min} - z_1}{2} \sin^2 \alpha \\ \frac{x_2}{m} &\geq \frac{z_{\min} - z_2}{2} \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (16.2)$$

e sommando membro a membro

$$\frac{x_1 + x_2}{m} \geq \frac{2z_{\min} - (z_1 + z_2)}{2} \sin^2 \alpha$$

si ottiene che il secondo membro dell'ultima espressione è negativo in quanto $(z_1 + z_2) > 2z_{\min}$ e quindi è sufficiente scegliere $x_1 = -x_2$ affinché sia verificata tale diseguaglianza.

Nel caso in cui $x_1 = x_2 = 0$ calcoliamo il gioco c (*clearance*) fra le due ruote in condizioni di lavoro

$$c = a - r_{a1} - r_{f2}$$

dove r_{a1} è il raggio della circonferenza di testa del pignone e r_{f2} è il raggio della circonferenza di piede della corona. Sviluppando i conti (ricordandosi che $x_1 = x_2 = 0$) si ha

$$c = a - (r_1 + m) - (r_2 - 1.25m) = 0.25m = 0.75 \text{ mm}$$

Scegliamo ora due valori di correzioni complementari ma diversi da zero:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.2m \\ x_2 &= -x_1 = -0.2m \end{aligned}$$

Verifichiamo che valgano le relazioni (16.2)

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{m} &= 0.2 \geq \frac{z_{\min} - z_1}{2} \sin^2 \alpha = 0 \\ \frac{x_2}{m} &= -0.2 \geq \frac{z_{\min} - z_2}{2} \sin^2 \alpha = -1.28676 \end{aligned}$$

Ovviamente l'interasse di lavoro non è cambiato in quanto le due correzioni sono complementari. Calcoliamo anche il gioco in questo caso

$$c = a - (r_1 + m + x_1) - (r_2 - (1.25m - x_2)) = 0.25m = 0.75 \text{ mm}$$

Considerazioni

La soluzione considerata risulta semplice da determinare ma può non essere soddisfacente nel caso in cui si abbiano limitazioni sulle dimensioni dell'ingranaggio. Infatti con i valori scelti del numero di denti l'interasse fra le due ruote risulta di 99 mm, e pertanto l'ingombro totale risulta

$$r_{a1} + r_{a2} + a = (r_1 + m + x_1) + (r_2 + m + x_2) + a = 204 \text{ mm}$$

Per limitare le dimensioni dell'ingranaggio è necessario ricorrere a soluzioni diverse.

16.1.3 Seconda soluzione

Per ovviare ai problemi esposti in precedenza scegliamo

$$z_1 = 15$$

$$z_2 = 30$$

in modo tale che il rapporto di trasmissione sia quello desiderato. In questo caso i raggi delle circonferenze primitive di taglio risultano

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{mz_1}{2} = 22.5 \text{ mm} \\ r_2 &= \frac{mz_2}{2} = 45 \text{ mm} \end{aligned}$$

Notiamo che anche in questo caso vale

$$z_1 + z_2 = 45 > 2z_{\min}$$

e pertanto è possibile scegliere le correzioni x_1 e x_2 complementari fra loro ottenendo dunque che l'interasse di lavoro a risulti

$$a = r_1 + r_2 = 67.5 \text{ mm}$$

Scegliamo inizialmente, come nel caso precedente, $x_1 = x_2 = 0$ e verifichiamo le (16.2)

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{z_{\min} - z_1}{2} \sin^2 \alpha = 0.409422 \quad \text{Non verificata!} \\ 0 &\geq \frac{z_{\min} - z_2}{2} \sin^2 \alpha = -0.467911 \end{aligned}$$

Si nota che la prima espressione non è verificata ed è pertanto necessario scegliere un diverso valore di x_1 . Si sceglie quindi $x_1 = 0.41m$ e di conseguenza $x_2 = -0.41m$. Con tali valori delle correzioni procediamo a calcolare il gioco di testa c fra le due ruote

$$c = a - (r_1 + m + x_1) - (r_2 - (1.25m + x_2)) = 0.25m = 0.75 \text{ mm}$$

che risulta identico al caso precedente. L'ingombro totale della trasmissione in questo caso vale

$$r_{a1} + r_{a2} + a = (r_1 + m + x_1) + (r_2 + m + x_2) + a = 141 \text{ mm}$$

che è notevolmente ridotto rispetto al caso precedente.

16.1.4 Terza soluzione

Qualora fosse necessario ridurre ulteriormente l'ingombro della trasmissione è necessario ricorrere ad una soluzione diversa. Scegliamo in questo caso

$$\begin{aligned} z_1 &= 12 \\ z_2 &= 24 \end{aligned}$$

che soddisfa ancora la condizione sul rapporto di trasmissione. I raggi delle circonferenze primitive di taglio risultano quindi

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{mz_1}{2} = 18 \text{ mm} \\ r_2 &= \frac{mz_2}{2} = 36 \text{ mm} \end{aligned}$$

da cui risulta

$$a = r_1 + r_2 = 54 \text{ mm}$$

Determiniamo innanzitutto i valori minimi ammissibili per gli scostamenti utilizzando le espressioni in (16.2)

$$\begin{aligned} \frac{x_{1\min}}{m} &= \frac{z_{\min} - z_1}{2} \sin^2 \alpha = 0.568182 \\ \frac{x_{2\min}}{m} &= \frac{z_{\min} - z_2}{2} \sin^2 \alpha = -0.113636 \end{aligned}$$

Notiamo che in questo caso si ha

$$z_1 + z_2 = 36 < 2z_{\min}$$

e pertanto non sarà possibile scegliere correzioni complementari per le due ruote. Questo implica che è necessario modificare l'interasse di lavoro fra le due ruote. Scegliamo allora i seguenti valori

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.6m \\ x_2 &= 0.36m \end{aligned}$$

che verificano le condizioni (16.2). Calcoliamo ora l'angolo di lavoro α' come segue

$$\begin{aligned} \operatorname{inv}\alpha' &= \tan \alpha' - \alpha' = \operatorname{inv}\alpha + \frac{2 \tan \alpha}{m} \left(\frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \right) = 0.0343161 \\ \alpha' &= 0.455331 \equiv 26.0886^\circ \end{aligned}$$

Il nuovo interasse di lavoro a' risulta quindi

$$a' = a \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = 56.4999 \text{ mm}$$

e i raggi delle circonferenze primitive di lavoro

$$\begin{aligned} r'_1 &= r_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = 18.8333 \text{ mm} \\ r'_2 &= r_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = 37.6666 \text{ mm} \end{aligned}$$

Calcoliamo ora il gioco di testa fra le due ruote

$$\begin{aligned} c &= a' - (r_1 + m + x_1) - (r_2 - 1.25m + x_2) \\ &= m \left[0.25 - \frac{x_1 + x_2}{m} + \frac{z_1 + z_2}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} - 1 \right) \right] = 0.12329m = 0.36987 \text{ mm} \end{aligned}$$

Notiamo che in questo caso il gioco di testa è notevolmente ridotto rispetto alle due soluzioni precedenti. Per ottenere un valore di c imposto è necessario ricorrere alla procedura seguente.

Si fissa un valore di c (ad esempio $c = 0.25m$) e si determina il valore c_1 del gioco fra dentiera e pignone durante la generazione di quest'ultimo. Il gioco di testa fra le due ruote può essere quindi scritto come segue

$$c = 0.25m = a' - (r_1 + 1.25m + x_1 - c_1) - (r_2 - 1.25m + x_2)$$

Risolvendo rispetto a c_1 si ottiene

$$c_1 = 0.25m + (x_1 + x_2) - (a' - a) = 0.37671m = 1.13013 \text{ mm}$$

Questo risultato implica che il dente del pignone così ottenuto è ribassato, cioè il dente ha un'altezza minore. Infatti, nel caso $c_1 = 0.25m$ si ha un'altezza del dente pari a

$$2.25m = 6.75 \text{ mm}$$

mentre con $c_1 = 0.37671m$ si ha un'altezza dente pari a

$$1.25 + (1.25 - 0.37671)m = 2.12329m = 6.36987 \text{ mm}$$

Considerazioni

La soluzione appena trovata consente di ottenere una trasmissione meno ingombrante rispetto alle precedenti soluzioni in quanto l'ingombro vale

$$r_{a1} + r_{a2} + a' = (r_1 + m + x_1) + (r_2 + m + x_2) + a' = 119.38 \text{ mm}$$

oppure, nel caso di dente del pignone ribassato

$$r_{a1} + r_{a2} + a' = (r_1 + 1.25m + x_1 - c_1) + (r_2 + m + x_2) + a' = 119 \text{ mm}$$

Tuttavia è necessario tenere di conto del fatto che z_2 è un multiplo intero di z_1 . Questo comporta che un dente della corona venga in contatto con il medesimo dente del pignone ad ogni ciclo di ingranamento. Eventuali imperfezioni nella costruzione dei denti di entrambe le ruote potrebbero causare un rapido deterioramento delle superfici a contatto dovuto all'insistenza di tali imperfezioni sugli stessi denti.

Risulta necessario quindi far sì che i numeri dei denti delle due ruote siano primi fra loro.

16.1.5 Quarta soluzione

Per tenere conto di tutte le specifiche e dei problemi presentati nella soluzione precedente sceglieremo i seguenti valori del numero di denti delle due ruote

$$\begin{aligned} z_1 &= 13 \\ z_2 &= 25 \end{aligned}$$

Il rapporto di trasmissione in questo caso vale

$$\tau = \frac{25}{13} = 1.92308$$

che è comunque prossimo a due. I raggi delle primitive di taglio risultano dunque

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{mz_1}{2} = 19.5 \text{ mm} \\ r_2 &= \frac{mz_2}{2} = 37.5 \text{ mm} \end{aligned}$$

da cui

$$a = r_1 + r_2 = 57 \text{ mm}$$

Calcolando i valori minimi degli scostamenti in questo caso si ha

$$\begin{aligned} \frac{x_{1\min}}{m} &= \frac{z_{\min} - z_1}{2} \sin^2 \alpha = 0.511364 \\ \frac{x_{2\min}}{m} &= \frac{z_{\min} - z_2}{2} \sin^2 \alpha = -0.170455 \end{aligned}$$

e dunque anche in questo caso non è possibile utilizzare scostamenti complementari. Scegliendo ad esempio

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.6m \\ x_2 &= -0.1m \end{aligned}$$

il nuovo angolo e il nuovo interasse di lavoro a' risultano (vedere la soluzione precedente per i dettagli sul calcolo di α' e a')

$$\begin{aligned} \alpha' &= 0.409211 = 23.4461^\circ \\ a' &= 58.3829 \text{ mm} \end{aligned}$$

I raggi delle primitive di lavoro valgono rispettivamente

$$\begin{aligned} r'_1 &= r_1 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = 19.9731 \text{ mm} \\ r'_2 &= r_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = 38.4098 \text{ mm} \end{aligned}$$

Il gioco di testa nel caso in cui il dente non sia ribassato vale

$$c = 0.210956m = 0.632867 \text{ mm}$$

con un ingombro totale dell'ingranaggio pari a

$$r_{a1} + r_{a2} + a' = (r_1 + m + x_1) + (r_2 + m + x_2) + a' = 122.883 \text{ mm}$$

Imponendo invece un gioco di testa in condizioni di lavoro pari a $0.25m$ si ottiene un dente del pignone ribassato in cui

$$c_1 = 0.289044m = 0.867133 \text{ mm}$$

ottenendo un'ingombro totale pari a

$$r_{a1} + r_{a2} + a' = (r_1 + 1.25m + x_1 - c_1) + (r_2 + m + x_2) + a' = 122.766 \text{ mm}$$

16.1.6 Extra

Per concludere l'esercizio si valuta la condizione di appuntimento del dente risolvendo il seguente sistema

$$\begin{aligned}\frac{x_{\max}}{m} &= \frac{z}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \hat{\alpha}} - 1 \right) - 1 \\ \frac{x_{\max}}{m} &= \frac{z (\operatorname{inv} \hat{\alpha} - \operatorname{inv} \alpha - \pi/2)}{2 \tan \alpha}\end{aligned}$$

dove z è il numero di denti della ruota che stiamo considerando. Considerando i diversi valori di z utilizzati nelle soluzioni presentate si ottiene che giustifica

z	x_{\max}/m	$\hat{\alpha}(\circ)$
22	1.30929	39.0454
44	2.08108	34.4868
15	0.983442	41.9989
30	1.62228	36.8831
12	0.820204	43.8651
24	1.39232	38.4183
13	0.876691	43.1834
25	1.43252	38.1296

tutti i valori scelti degli scostamenti per entrambe le ruote.

16.2 Linea di contatto e arco d'azione

In questa sezione viene studiato l'ingranamento di due ruote dentate cilindriche con fianchi ad evolvente. In particolare vengono studiate le condizioni affinché il moto si trasmetta in maniera continua dalla ruota motrice alla ruota condotta. Si faccia riferimento alla figura 16.1 dove si assume che la ruota ① sia motrice e la ruota ② sia condotta. Alla ruota ① è applicato un momento T_1 (motore) mentre alla ruota ② è applicato un momento T_2 (resistente).

In tale figura il segmento N_1N_2 è il *segmento di contatto* o *segmento di azione*. È opportuno distinguere due parti di questo segmento:

- Segmento di azione in accesso: N_1C
- Segmento di azione in recesso: CN_2

Inoltre si definisce l'*arco d'azione* la lunghezza dell'arco, misurato sulle primitive, entro cui le due ruote sono in presa. In particolare l'arco $A_1\widehat{B}_1$ è l'arco

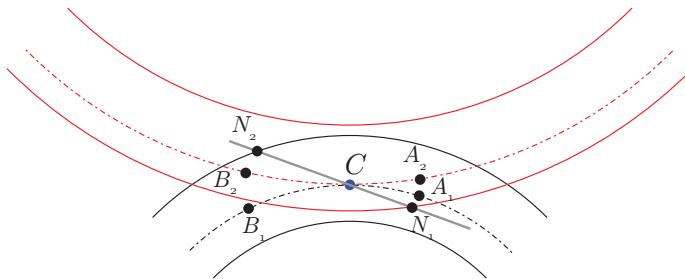


Figura 16.1: Schema di riferimento per determinare l'arco d'azione e la linea di contatto.

d'azione sulla primitiva \mathcal{C}_1 mentre l'arco $\widehat{A_2B_2}$ è l'arco d'azione sulla primitiva \mathcal{C}_2 . Dato che le primitive delle due ruote rotolano l'una sull'altra ne discende che

$$\widehat{A_1B_1} = \widehat{A_2B_2}$$

Affinchè la ruota ① trasmetta alla ruota ② un moto continuo, l'arco di azione deve essere maggiore del passo. Consideriamo ora il moto delle due ruote nella

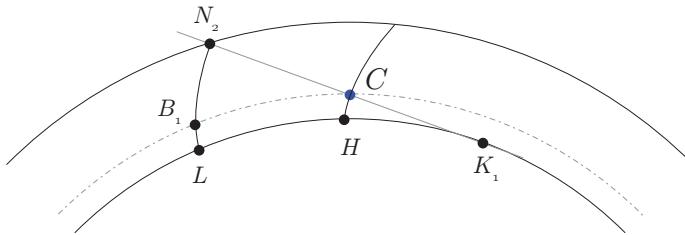


Figura 16.2: Dettaglio sull'arco d'azione in recesso.

fase di recesso, ossia nel segmento CN_2 e si faccia riferimento alla figura 16.2 dove sono state rappresentate le circonference di base, primitiva e di testa della ruota ①. Per la geometria dell'evolvente si ha

$$CN_2 = \widehat{LH}$$

Inoltre si nota che i due archi $\widehat{CB_1}$ e \widehat{LH} sono sottesi dallo stesso angolo e pertanto

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{LH}}{r_{b1}} &= \frac{\widehat{CB_1}}{r_1} \\ \frac{\widehat{LH}}{\widehat{CB_1}} &= \frac{r_{b1}}{r_1} = \cos(\alpha) \end{aligned}$$

da cui discende

$$\begin{aligned}\frac{CN_2}{\widehat{CB}_1} &= \frac{\widehat{LH}}{\widehat{CB}_1} = \cos(\alpha) \\ \widehat{CB}_1 &= \frac{CN_2}{\cos(\alpha)}\end{aligned}$$

In maniera del tutto analoga è possibile determinare l'espressione dell'arco $\widehat{A_1C}$. Per cui, in definitiva, il calcolo dell'arco di azione si riduce al calcolo del segmento di contatto.

16.2.1 Segmento di contatto

Nel seguito indicheremo con e_1 e e_2 l'addendum delle due ruote. Determiniamo ora la lunghezza del segmento di contatto in accesso. Tale segmento individua il triangolo $\triangle O_2\widehat{CN}_1$. Ne discendono pertanto le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}O_2N_1 &= r_2 + e_2 \\ O_2C &= r_2 \\ O_2N_1 &= O_2C^2 + CN_1^2 - 2(O_2C)(CN_1)\cos(\pi/2 + \alpha)\end{aligned}$$

dove l'ultima relazione discende dal teorema di Carnot. Dato che $\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin(\alpha)$ si ottiene

$$(r_2 + e_2)^2 = r_2^2 + CN_1^2 + 2(CN_1)r_2 \sin(\alpha)$$

Risolvendo tale espressione rispetto a CN_1 si ottiene

$$CN_1 = -r_2 \sin(\alpha) + \sqrt{r_2^2 \sin^2(\alpha) + e_2(e_2 + 2r_2)} \quad (16.3)$$

In maniera del tutto analoga è possibile determinare la lunghezza del segmento in recesso e si ottiene

$$CN_2 = -r_1 \sin(\alpha) + \sqrt{r_1^2 \sin^2(\alpha) + e_1(e_1 + 2r_1)} \quad (16.4)$$

da cui indicando con

$$s = \frac{N_1 N_2}{\cos(\alpha)}$$

la lunghezza dell'arco d'azione, si ottiene

$$s = \frac{1}{\cos(\alpha)} \left[r_1 \sqrt{\sin^2(\alpha) + \left(2 + \frac{e_1}{r_1}\right) \frac{e_1}{r_1}} + r_2 \sqrt{\sin^2(\alpha) + \left(2 + \frac{e_2}{r_2}\right) \frac{e_2}{r_2}} - (r_1 + r_2) \sin(\alpha) \right] \quad (16.5)$$

Caso di ruote uguali e normali

In tal caso si ha

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 = r \\ e_1 &= e_2 = m \end{aligned}$$

e pertanto la (16.5) diventa

$$s = \frac{2r}{\cos(\alpha)} \left[\sqrt{\sin^2(\alpha) + \frac{1}{z} \left(1 + \frac{4}{z} \right)} - \sin(\alpha) \right]$$

dove z è il numero di denti delle due ruote. Infatti da

$$\begin{aligned} 2\pi r &= m\pi z \\ r &= \frac{mz}{2} \end{aligned}$$

in questo caso si ottiene

$$\frac{e}{r} = \frac{m}{\frac{mz}{2}} = \frac{2}{z}$$

Per la condizione di continuità della trasmissione del moto fra pignone e corona si deve avere

$$\frac{s}{p} > 1 \quad (16.6)$$

da cui, rielaborando l'espressione di s

$$\sqrt{z^2 \sin^2(\alpha) + 4(1+z)} - z \sin(\alpha) > \pi \cos(\alpha)$$

e risolvendo rispetto al numero di denti z si ottiene

$$z > \frac{\pi^2 \cos^2(\alpha) - 4}{2 - (2\pi \sin(\alpha) \cos(\alpha))}$$

Caso di ruote diverse e corrette

Assumendo di avere un ingranaggio senza variazione di interasse si ha $x_2 = -x_1 = x$, da cui discende

$$\begin{aligned} e_1 &= m + x \\ e_2 &= m - x \end{aligned}$$

Con un valore di x positivo parliamo in questo caso di pignone *long-addendum* e ruota *short-addendum*. Attraverso le classiche relazioni

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{mz_1}{2} \\ r_2 &= \frac{mz_2}{2} \end{aligned}$$

si può risolvere la disequazione (16.6) nell'incognita z_1 oppure z_2 .

16.3 Rendimento delle ruote dentate cilindriche

Con i risultati trovati nella sezione precedente determiniamo ora il rendimento delle ruote dentate cilindriche. Si faccia riferimento alla figura 16.3 dove si assume che il pignone (ruota ①) sia motore mentre la corona (ruota ②) sia condotta. Inoltre sia nota la coppia resistente T_2 e si assuma un coefficiente di attrito f nel contatto fra le due ruote. Si determina ora la coppia T_1 da

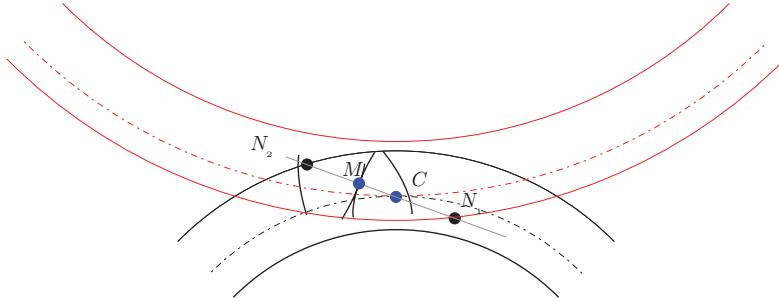


Figura 16.3: Schema di riferimento per il calcolo del rendimento.

applicare alla ruota motrice per mantenere costante la velocità di rotazione di ②. Cominciamo notando che il contatto fra ① e ② è caratterizzato da rotolamento e strisciamento. Si indica con M il punto di contatto fra le due ruote, con M_1 il punto di ① coincidente con M e con M_2 il punto di ② coincidente con M . Le velocità dei due punti M_1 e M_2 sono date rispettivamente dalle seguenti relazioni

$$\begin{aligned}\underline{v}_{M_1} &= \omega_1 \underline{k} \wedge \underline{O_1 M_1} \\ \underline{v}_{M_2} &= -\omega_2 \underline{k} \wedge \underline{O_2 M_2}\end{aligned}$$

Attenzione al segno delle velocità angolari: in questo caso per la ruota ② è stato scelto il verso positivo orario.

Possiamo riscrivere le precedenti relazioni come segue

$$\begin{aligned}\underline{v}_{M_1} &= \omega_1 \underline{k} \wedge \underline{O_1 C} + \omega_1 \underline{k} \wedge \underline{C M_1} \\ \underline{v}_{M_2} &= -\omega_2 \underline{k} \wedge \underline{O_2 C} - \omega_2 \underline{k} \wedge \underline{C M_2}\end{aligned}$$

La velocità di strisciamento \underline{v}_{12} nel punto di contatto è data dalla seguente relazione

$$\begin{aligned}\underline{v}_{12} &= \underline{v}_{M_1} - \underline{v}_{M_2} = \omega_1 \underline{k} \wedge \underline{O_1 C} + \omega_2 \underline{k} \wedge \underline{O_2 C} + (\omega_1 + \omega_2) \underline{k} \wedge \underline{C M} \\ &= (\omega_1 + \omega_2) \underline{k} \wedge \underline{C M}\end{aligned}$$

dove l'ultima relazione vale in quanto

$$\begin{aligned}\omega_1 \underline{k} \wedge \underline{O_1 C} + \omega_2 \underline{k} \wedge \underline{O_2 C} &= \omega_1 \underline{k} \wedge (\underline{j} r_1) + \frac{\omega_1 r_1}{r_2} \underline{k} \wedge (-\underline{j} r_2) \\ &= \omega_1 \underline{k} \wedge (\underline{j} r_1) - \omega_1 \underline{k} \wedge (\underline{j} r_1) = 0\end{aligned}$$

L'entità della velocità di strisciamento lungo la direzione tangente alle due superfici nel punto di contatto risulta pertanto

$$|\underline{v}_{12}| = (\underline{v}_{M_1} - \underline{v}_{M_2}) \cdot \tau = \pm (\omega_1 + \omega_2) |\underline{CM}|$$

Da quest'ultima relazione si nota che $\underline{v}_{12} = \underline{0}$ solamente se $M \equiv C$, mentre altrimenti vale

- $\underline{v}_{12} \cdot \tau = -(\omega_1 + \omega_2) |\underline{CM}|$ in fase di accesso ($M \in N_1 C$).
- $\underline{v}_{12} \cdot \tau = (\omega_1 + \omega_2) |\underline{CM}|$ in fase di recesso ($M \in C N_2$).

Scriviamo ora la forza che il dente di ① esercita sul dente di ②. Tale forza ha una componente normale $N_{12} = N$ alle superfici dei denti e una componente tangenziale $T_{12} = T$ tale per cui

$$T = f N \text{sign}(\underline{v}_{12} \cdot \tau)$$

Per determinare il momento necessario da applicare al pignone per mantenere costante la velocità angolare delle due ruote si deve fare distinzione fra la fase di accesso e la fase di recesso. *Per semplicità si assume che ci sia una sola coppia di denti in presa.*

Fase di accesso

Per quanto riguarda la ruota condotta abbiamo

$$T_2 = N [r_2 \cos(\alpha) - f (r_2 \sin(\alpha) + CM)]$$

mentre per la ruota motrice

$$T_1 = N [r_1 \cos(\alpha) - f (r_1 \sin(\alpha) - CM)]$$

da cui discende

$$\begin{aligned} T_1 &= T_2 \frac{r_1 \cos(\alpha) - f (r_1 \cos(\alpha) - CM)}{r_2 \cos(\alpha) - f (r_2 \cos(\alpha) + CM)} \\ &= T_2 \frac{r_1}{r_2} \frac{1 - f \left(\tan(\alpha) - \frac{s}{r_1} \right)}{1 - f \left(\tan(\alpha) - \frac{s}{r_2} \right)} \end{aligned} \quad (16.7)$$

dove

$$s = \frac{CM}{\cos(\alpha)}$$

Fase di recesso

In questo caso per la ruota condotta abbiamo

$$T_2 = N [r_2 \cos(\alpha) + f (r_2 \sin(\alpha) - CM)]$$

mentre per la ruota motrice vale

$$T_{1r} = N [r_1 \cos(\alpha) + f (r_1 \sin(\alpha) + CM)]$$

da cui

$$T_{1r} = T_2 \frac{r_1 \cos(\alpha) + f(r_1 \cos(\alpha) + CM)}{r_2 \cos(\alpha) + f(r_2 \cos(\alpha) - CM)} \quad (16.8)$$

$$= T_2 \frac{r_1}{r_2} \frac{1 + f \left(\tan(\alpha) + \frac{s}{r_1} \right)}{1 + f \left(\tan(\alpha) - \frac{s}{r_2} \right)} \quad (16.9)$$

16.3.1 Rendimento

Indicando con T_{10} la coppia necessaria da applicare al pignone nel caso di assenza d'attrito fra le due ruote si ha

$$T_{10} = T_2 \frac{r_1}{r_2}$$

Il rendimento istantaneo della trasmissione è diverso nel caso di fase di accesso (η_{i_a}) o fase di recesso (η_{i_r}) e risulta definito da

$$\begin{aligned} \eta_{i_a} &= \frac{T_{10}}{T_{1a}} = \frac{1 - f \left(\tan(\alpha) + \frac{s}{r_1} \right)}{1 - f \left(\tan(\alpha) - \frac{s}{r_2} \right)} \\ \eta_{i_r} &= \frac{T_{10}}{T_{1r}} = \frac{1 + f \left(\tan(\alpha) - \frac{s}{r_1} \right)}{1 + f \left(\tan(\alpha) + \frac{s}{r_2} \right)} \end{aligned}$$

Da queste due ultime relazioni si nota che

$$\eta_{i_a} < \eta_{i_r}$$

per cui è importante limitare al minimo la parte di accesso in quanto in tale condizione il rendimento è peggiore. Per questo motivo, nel caso di pignone motore (riduttore), è preferibile avere un pignone *long-addendum* e una corona *short-addendum*, mentre nel caso di corona motrice (moltiplicatore) è preferibile avere pignone *short-addendum* e corona *long-addendum* (si faccia riferimento alle espressioni (16.3) e (16.4)).

16.3.2 Rendimento medio

Per determinare il rendimento medio della trasmissione si assume per semplicità che l'arco di azione sia uguale al passo. In tal caso il lavoro resistente L_r è espresso da

$$L_r = T_2 \frac{p}{r_2}$$

mentre il lavoro motore è fornito dalla seguente espressione

$$\begin{aligned} L_m &= \frac{1}{r_1} \int_{s=p} T_1 ds \\ &= \frac{1}{r_1} \int_0^{s_1} T_{1a} ds + \int_0^{s_2} T_{1r} ds \end{aligned}$$

dove s_1 e s_2 sono le lunghezze degli archi di accesso e di recesso rispettivamente. Linearizzando le espressioni (16.7) e (16.8) si ottiene

$$\begin{aligned} T_{1a} &\simeq T_2 \frac{r_1}{r_2} \left[1 + \frac{f}{1 - f \tan(\alpha)} s \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \right] \\ T_{1r} &\simeq T_2 \frac{r_1}{r_2} \left[1 + \frac{f}{1 + f \tan(\alpha)} s \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \right] \end{aligned}$$

da cui l'espressione del lavoro motore risulta

$$L_m = T_2 \frac{1}{r_2} \left[p + \frac{f}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \left(\frac{s_1^2}{1 - f \tan(\alpha)} + \frac{s_2^2}{1 + f \tan(\alpha)} \right) \right]$$

Un'ulteriore approssimazione può essere fatta notando che il termine $f \tan(\alpha)$ è solitamente trascurabile rispetto a 1 e pertanto è possibile scrivere

$$L_m \simeq T_2 \frac{1}{r_2} \left[p + \frac{f}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) (s_1^2 + s_2^2) \right]$$

A questo punto il rendimento medio η si può scrivere come segue

$$\eta = \frac{L_r}{L_m} = \frac{1}{1 + \frac{f}{2p} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) (s_1^2 + s_2^2)}$$

Infine indicando con ϵ la frazione dell'arco d'azione in accesso e indicando

$$\begin{aligned} s_1 &= \epsilon p \\ s_2 &= (1 - \epsilon)p \end{aligned}$$

si ottiene

$$\eta \simeq \frac{1}{1 + \frac{fp}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) (2\epsilon^2 - 2\epsilon + 1)}$$

Si nota che il rendimento massimo si ha per $(2\epsilon^2 - 2\epsilon + 1)$ minimo in quanto le altre quantità sono costanti al variare di ϵ . Tale valore minimo si ottiene per $\epsilon = \epsilon^* = 0.5$.

Qualora non si trascurasse il termine $f \tan(\alpha)$ nell'espressione del lavoro motore si ottiene un valore massimo del rendimento per

$$\epsilon^* = \frac{1}{2} (1 - f \tan(\alpha))$$

dal quale si deduce che il rendimento massimo si ha quando l'arco di accesso risulta inferiore dell'arco di recesso.

Capitolo 17

Oscillazioni di un Rotismo

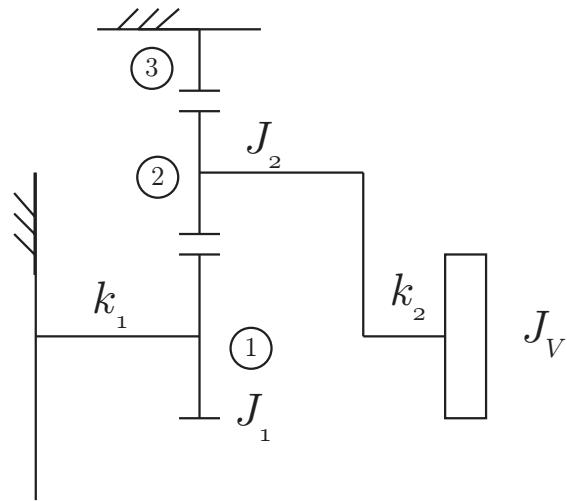


Figura 17.1: Schema meccanico.

Si consideri rotismo riportato in figura 17.1. Si studino le oscillazioni libere del sistema in esame.

17.1 Risoluzione del rotismo

Cominciamo la risoluzione dell'esercizio determinando le relazioni cinematiche fra i diversi corpi presenti nel sistema. Il rapporto di trasmissione τ_0 è definito come segue

$$\tau_0 = \frac{\omega_{30}}{\omega_{10}}$$

che, per la formula di Willis risulta

$$\tau_0 = \frac{\omega_3 - \omega_p}{\omega_1 - \omega_p} = -\frac{z_1}{z_3} \quad (17.1)$$

Il rapporto di trasmissione $\bar{\tau}$ fra il corpo ① e il corpo ② risulta invece

$$\bar{\tau} = \frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{\omega_2 - \omega_p}{\omega_1 - \omega_p} = -\frac{z_1}{z_2} \quad (17.2)$$

Dalle precedenti relazioni, poichè $\theta_3 = 0$ si ha

$$\begin{aligned}\tau_0 &= -\frac{\theta_p}{\theta_1 - \theta_p} \\ \frac{1}{\tau_0} &= 1 - \frac{\theta_1}{\theta_p} \\ \frac{\theta_1}{\theta_p} &= 1 - \frac{1}{\tau_0} = \frac{\tau_0 - 1}{\tau_0}\end{aligned}$$

da cui

$$\theta_p = \theta_1 \frac{\tau_0}{\tau_0 - 1}$$

Una volta determinato θ_p si ricava θ_2 attraverso la (17.2):

$$\frac{\frac{\theta_2}{\theta_p} - 1}{\frac{\theta_1}{\theta_p} - 1} = \bar{\tau}$$

da cui

$$\begin{aligned}\frac{\theta_2}{\theta_p} - 1 &= \bar{\tau} \left(\frac{\tau_0 - 1}{\tau_0} - 1 \right) \\ &= -\frac{\bar{\tau}}{\tau_0}\end{aligned}$$

Ne discende che

$$\begin{aligned}\frac{\theta_2}{\theta_p} &= 1 - \frac{\bar{\tau}}{\tau_0} \\ \theta_p &= \theta_2 \frac{\tau_0}{\tau_0 - \bar{\tau}}\end{aligned}$$

e infine

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \frac{\tau_0 - \bar{\tau}}{\tau_0} \theta_p = \frac{\tau_0 - \bar{\tau}}{\tau_0} \frac{\tau_0}{\tau_0 - 1} \theta_1 \\ &= \frac{\tau_0 - \bar{\tau}}{\tau_0 - 1} \theta_1\end{aligned}$$

Mediante i conti appena svolti abbiamo determinato le espressioni

$$\begin{aligned}\theta_p &= \theta_p(\theta_1) = c_1 \theta_1 \\ \theta_2 &= \theta_2(\theta_1) = c_2 \theta_1\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{\tau_0}{\tau_0 - 1} \\ c_2 &= \frac{\tau_0 - \bar{\tau}}{\tau_0 - 1}\end{aligned}$$

Il modulo della velocità v_{O_2} del centro di massa di ② risulta pertanto

$$\begin{aligned} v_{O_2} &= \dot{\theta}_p r_p = \dot{\theta}_p (r_1 + r_2) \\ &= \dot{\theta}_p (z_1 + z_2) \frac{m}{2} \end{aligned}$$

17.2 Dinamica

Passiamo ora a scrivere l'espressione della dinamica del sistema utilizzando le equazioni di Lagrange. Determiniamo innanzitutto l'energia cinetica T

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_3 \\ &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{O_2}^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} J_v \dot{\theta}_v^2 \end{aligned}$$

Trascurando gli effetti gravitazionali, l'energia potenziale U in questo caso è dovuta solamente agli effetti delle molle torsionali e pertanto risulta

$$U = \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (\theta_v - \theta_p)^2$$

Il sistema ha globalmente due gradi di libertà θ_1 e θ_v . I termini delle due equazioni di Lagrange sono i seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} &= \ddot{\theta}_1 (J_1 + m_2 r_p^2 c_1^2 + J_2 c_2^2) \\ \frac{\partial T}{\partial \theta_1} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_1} &= k_1 \theta_1 + k_2 (\theta_v - c_1 \theta_1) (-c_1) = (k_1 + k_2 c_1^2) \theta_1 - c_1 k_2 \theta_v \end{aligned}$$

per la prima coordinata. Per quanto riguarda la seconda coordinata lagrangiana invece si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_v} &= J_v \ddot{\theta}_v \\ \frac{\partial T}{\partial \theta_v} &= 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta_v} &= k_2 (\theta_v - c_1 \theta_1) = k_2 \theta_v - c_1 k_2 \theta_1 \end{aligned}$$

Indicando con

$$\begin{aligned} J_{1r} &= J_1 + m_2 r_p^2 c_1^2 + J_2 c_2^2 \\ k_{1r} &= k_1 + k_2 c_1^2 \end{aligned}$$

le equazioni di Lagrange risultano le seguenti

$$\begin{aligned} J_{1r} \ddot{\theta}_1 + k_{1r} \theta_1 - c_1 k_2 \theta_v &= 0 \\ J_v \ddot{\theta}_v + k_2 \theta_v - c_1 k_2 \theta_1 &= 0 \end{aligned}$$

Il sistema di equazioni differenziali così ottenuto può essere riscritto nella classica forma matriciale

$$M\ddot{\underline{\theta}} + K\underline{\theta} = \underline{0}$$

dove

$$M = \begin{pmatrix} J_{1r} & 0 \\ 0 & J_v \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & -c_1 k_2 \\ -c_1 k_2 & k_2 \end{pmatrix}$$

Le pulsazioni proprie del sistema si determinano imponendo nullo il determinante della matrice $(\lambda M + K)$:

$$\det(\lambda M + K) = (J_{1r} J_v) \lambda^2 + (k_2 J_{1r} + k_{1r} J_v) \lambda + (k_{1r} k_2 - c_1^2 k_2^2) = 0$$

da cui

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(k_2 J_{1r} + k_{1r} J_v) \pm \sqrt{(k_2 + J_{1r} + k_{1r} J_v)^2 - 4(J_{1r} J_v)(k_{1r} k_2 - c_1^2 k_2^2)}}{2 J_{1r} J_v}$$

Le pulsazioni proprie ω_1 e ω_2 risultano pertanto

$$\omega_1 = \sqrt{-\lambda_1}$$

$$\omega_2 = \sqrt{-\lambda_2}$$

Per determinare la forma dei modi propri si indichi con

$$Q(\lambda) = \lambda M + K$$

e si risolva

$$Q(\lambda) \underline{x}_1 = \underline{0}$$

che in componenti risulta

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 J_{1r} + k_{1r} & -c_1 k_2 \\ -c_1 k_2 & \lambda_1 J_v + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Imponendo $x_{11} = 1$ si risolve la seconda riga dell'equazione matriciale appena scritta e si determina

$$x_{12} = \frac{\lambda_1 J_{1r} + k_{1r}}{c_1 k_2}$$

Per determinare la forma del secondo modo proprio (quello associato alla pulsazione propria ω_2) si procede in maniera analoga imponendo questa volta $x_{21} = 1$ e risolvendo su x_{22} , ottenendo

$$x_{22} = \frac{\lambda_2 J_{1r} - k_{1r}}{c_1 k_2}$$

Capitolo 18

Grado di irregolarità di una camma

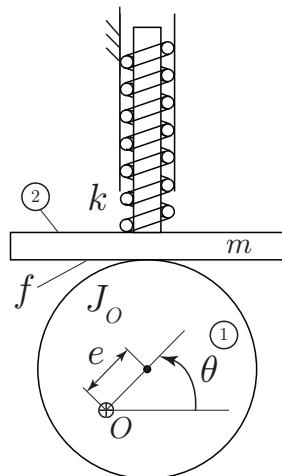


Figura 18.1: Schema meccanico.

Si consideri il meccanismo riportato in figura 18.1. Si determini il grado di irregolarità di tale meccanismo nel caso in cui non sia presente attrito fra la camma e il piattello, e nel caso in cui vi sia presente attrito caratterizzato da un coefficiente f noto.

18.1 Caso senza attrito

Cominciamo a studiare il sistema nel caso non vi sia attrito fra ① e ②. Dall'analisi di posizione e dalla cinematica si ottengono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned}x &= e \sin(\theta) \\ \dot{x} &= e\dot{\theta} \cos(\theta) \\ \ddot{x} &= e \left[-\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \ddot{\theta} \cos(\theta) \right]\end{aligned}$$

L'energia cinetica totale T del sistema è data dalla seguente espressione

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_O\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(J_O + me^2 \cos^2(\theta))\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(J_O + J_1(\theta))\dot{\theta}^2$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale si assume che non vi siano effetti gravitazionali e che la molla sia a riposo quando la quota della faccia inferiore del piattello assuma valore zero. L'energia potenziale U del sistema si scrive quindi come segue

$$U = \frac{1}{2}k(r + e \sin(\theta))^2$$

A questo punto possiamo scrivere l'equazione del moto utilizzando le equazioni di Lagrange:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= (J_O + me^2 \cos^2(\theta))\ddot{\theta} - 2me^2\dot{\theta}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= -me^2\dot{\theta}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} &= k(r + e \sin(\theta))e \cos(\theta)\end{aligned}$$

da cui segue l'equazione del moto del sistema

$$(J_O + me^2 \cos^2(\theta))\ddot{\theta} - 2me^2\dot{\theta}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + ke(r + e \sin(\theta)) \cos(\theta) = M_m$$

Volendo considerare la seguente espressione dell'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}(J_O + J_1(\theta))\dot{\theta}^2$$

il termine inerziale derivante dalle equazioni di Lagrange risulta

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= (J_O + J_1(\theta))\ddot{\theta} + \frac{dJ_1(\theta)}{d\theta}\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\frac{dJ_1(\theta)}{d\theta}\dot{\theta}^2 \\ &= (J_O + J_1(\theta))\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\frac{dJ_1(\theta)}{d\theta}\dot{\theta}^2\end{aligned}$$

dove

$$\frac{1}{2}\frac{dJ_1(\theta)}{d\theta}\dot{\theta}^2 = -me^2\dot{\theta}^2 \cos(\theta) \sin(\theta)$$

Conviene riordinare i termini dell'equazione del moto del sistema in modo tale da isolare la componente del momento resistente:

$$(J_O + J_1(\theta))\ddot{\theta} - me^2\dot{\theta}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) = M_m - ke(r + e \sin(\theta)) \cos(\theta) = M_m - M_r$$

Calcoliamo ora il lavoro del momento resistente L_r in un ciclo:

$$\begin{aligned} L_r &= \int_0^{2\pi} M_r(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(ker \cos(\theta) + \frac{ke^2}{2} \sin(2\theta) \right) d\theta \\ &= ker[\sin(\theta)]_0^{2\pi} + \frac{ke^2}{4} \int_0^{2\pi} \sin(2\theta) d(2\theta) \\ &= 0 + \frac{ke^2}{4} [-\cos(2\theta)]_0^{2\pi} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Come era lecito aspettarsi il lavoro resistente è identicamente nullo. Questo è giustificato dal fatto che, non essendoci attrito, il sistema è conservativo e quindi, per mantenere l'energia meccanica totale del sistema, *assumendo un momento motore costante*, il valore di M_m deve essere nullo, in caso contrario infatti, il sistema accelererebbe.

Utilizziamo adesso l'approssimazione di Tredgold che consiste nel sostituire il momento d'inerzia reale (ridotto all'asse della camma) con un momento d'inerzia medio J_r come segue

$$\begin{aligned} J_r &= J_O + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_1(\theta) d\theta = J_O + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} me^2 \cos^2(\theta) d\theta \\ &= J_O + \frac{me^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = J_O + \frac{me^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos(2\theta)) d\theta \\ &= J_O + \frac{me^2}{2} \end{aligned}$$

ed effettuare la seguente approssimazione (con ω_m costante)

$$\frac{1}{2} \frac{dJ_1(\theta)}{d\theta} \dot{\theta}^2 \simeq \frac{1}{2} \frac{dJ_1(\theta)}{d\theta} \omega_m^2$$

La dinamica del sistema può essere quindi scritta nella seguente forma approssimata

$$\begin{aligned} J_r \ddot{\theta} &= -\frac{1}{2} \frac{dJ_1(\theta)}{d\theta} \omega_m^2 - M_r(\theta) \\ &= \frac{me^2}{2} \sin(2\theta) \omega_m^2 - ke(r + e \sin(\theta)) \cos(\theta) \\ &= \frac{1}{2} e^2 (m \omega_m^2 - k) \sin(2\theta) - ker \cos(\theta) = f(\theta) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora l'integrale di ambo i membri della precedente espressione da zero fino a un valore generico $\bar{\theta}$

$$\int_0^{\bar{\theta}} J_r \ddot{\theta} d\theta = \int_0^{\bar{\theta}} f(\theta) d\theta$$

Ricordandosi che

$$d\theta = \dot{\theta} dt$$

possiamo riscrivere la precedente espressione come segue

$$\int_0^{\bar{\theta}} J_r \ddot{\theta} \dot{\theta} dt = \int_0^{\bar{\theta}} f(\theta) d\theta$$

da cui, risolvendo

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}J_r\dot{\theta}^2\right]_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}(t)} &= \int_0^{\bar{\theta}} f(\theta)d\theta \\ \frac{1}{2}J_r(\omega(\bar{\theta})^2 - \omega_0^2) &= \int_0^{\bar{\theta}} f(\theta)d\theta\end{aligned}$$

Pertanto è possibile scrivere quanto segue

$$\frac{1}{2}J_r(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = \left[\int_0^{\bar{\theta}} f(\theta)d\theta \right]_{\max} - \left[\int_0^{\bar{\theta}} f(\theta)d\theta \right]_{\min}$$

Per determinare i valori estremi dell'integrale a secondo membro si nota che tali valori estremi si ottengono per¹ $f(\theta) = 0$ cioè

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}e^2(m\omega_m^2 - k)\sin(2\theta) - ker\cos(\theta) &= 0 \\ \cos(\theta)[e^2(m\omega_m^2 - k)\sin(\theta) - ker] &= 0\end{aligned}$$

Le soluzioni di questa equazione in θ sono le seguenti

- Dal termine

$$\cos(\theta) = 0$$

si ottengono due soluzioni

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\pi}{2} \\ \theta &= \frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

- Dal termine

$$\sin(\theta) = \frac{ker}{e^2(m\omega_m^2 - k)}$$

si ottiene

$$\theta = \arcsin\left(\frac{kr}{e(m\omega_m^2 - k)}\right)$$

Affinchè tale soluzione abbia senso² deve valere (assumendo $e(m\omega_m^2 - k) > 0$)

$$\begin{aligned}\frac{kr}{e(m\omega_m^2 - k)} &< 1 \\ em\omega_m^2 &> kr \\ em\omega_m^2 &> k(e + r)\end{aligned}$$

¹Si annulla la derivata prima dell'integrale.

²L'argomento della funzione arcsin deve essere compreso in $(-1, 1)$.

e anche

$$\begin{aligned}\frac{kr}{e(m\omega_m^2 - k)} &> -1 \\ kr &> -em\omega_m^2 + ek \\ em\omega_m^2 &> k(e - r)\end{aligned}$$

L'ultima relazione scritta è sempre valida in quanto $e < r$ e tutte le altre quantità sono positive.

È facilmente verificabile che la condizione di esistenza posta sulla funzione $\arcsin(\cdot)$ è in contrasto con la condizione di non-distacco fra la camma e il piattello e pertanto tale soluzione è da scartare in quanto non ha senso fisico. Infatti, scrivendo l'equilibrio verticale della valvola si ha

$$N(t) - k(r + x) = m\ddot{x}$$

e nell'ipotesi in cui $\dot{\theta} \simeq \omega_m = \text{cost}$ risulta

$$N(t) - k(r + e \sin(\theta)) = -m e \omega_m^2 \sin(\theta)$$

da cui

$$N(t) = k(r + e \sin(\theta)) - m e \omega_m^2 \sin(\theta) = (kr + ke \sin(\theta)) - m e \omega_m^2 \sin(\theta)$$

Assumendo per ipotesi che $m\omega_m^2 - k > 0$ il valore della forza $N(t)$ è data dalla differenza di una quantità costante (kr) che rappresenta il precarico, e una quantità armonica. Pertanto il valore minimo di tale forza si ha nelle condizioni in cui $\sin(\theta)$ è massimo e risulta

$$N(t)_{\min} = kr - e(m\omega_m^2 - k)$$

Affinchè si abbia sempre contatto fra la camma e il piattello è necessario che risulti $N(t) > 0$ ad ogni istante, e in particolare che $N(t)_{\min} > 0$. Pertanto deve valere

$$\begin{aligned}kr - e(m\omega_m^2 - k) &> 0 \\ em\omega_m^2 &< k(r + e) \\ \omega_m^2 &< \frac{k(r + e)}{em}\end{aligned}$$

che è in contrasto con la condizione di esistenza dell'argomento della funzione $\arcsin(\cdot)$.

Calcoliamo il valore del lavoro resistente L_r^* quando vale $f(\theta) = 0$:

$$\begin{aligned}L_r^*(\bar{\theta}) &= \int_0^{\bar{\theta}} \left(\frac{1}{2} e^2 (m\omega_m^2 - k) \sin(2\theta) - ker \cos(\theta) \right) d\theta \\ &= \left[-\frac{1}{4} e^2 (m\omega_m^2 - k) \cos(2\theta) - ker \sin(\theta) \right]_0^{\bar{\theta}} \\ L_r^*(\pi/2) &= -ker + \frac{1}{2} e^2 (m\omega_m^2 - k) \\ L_r^*(3\pi/2) &= ker + \frac{1}{2} e^2 (m\omega_m^2 - k)\end{aligned}$$

Nell'ipotesi in cui $\omega_m > \sqrt{k/m}$, ossia $m\omega_m^2 - k > 0$ si ha

$$L_r^*(\pi/2) < L_r^*(3\pi/2)$$

per cui

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}J_r(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) &= L_r^*(3\pi/2) - L_r^*(\pi/2) = 2ker \\ (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) &= \frac{4ker}{J_r} = \frac{4ker}{J_O + \frac{me^2}{2}} \end{aligned}$$

Da quest'ultima relazione discende che il grado di irregolarità δ risulta

$$\delta = \frac{(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2)}{2\omega_m^2} = \frac{2ker}{(J_O + \frac{me^2}{2})\omega_m^2}$$

18.2 Caso con attrito

Consideriamo ora il caso in cui vi sia attrito fra la camma e il piattello. Cominciamo scrivendo le equazioni del moto utilizzando le equazioni cardinali (la prima equazione è l'equilibrio alla rotazione della camma intorno al punto O , mentre la seconda equazione è l'equilibrio verticale della valvola):

$$\begin{aligned} \textcircled{O} : J_O \ddot{\theta} &= M_m - Ne \cos(\theta) - fN(r + e \sin(\theta)) \\ m\ddot{x} &= N - k(r + e \sin(\theta)) \end{aligned}$$

Determinando N dalla seconda equazione e sostituendo nella prima si ottiene

$$\begin{aligned} (J_O + me^2 \cos^2(\theta)) \ddot{\theta} &= M_m + me^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - ke(r + e \sin(\theta)) \cos(\theta) \\ &\quad - f(r + e \sin(\theta)) [me(-\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \ddot{\theta} \cos(\theta)) + k(r + e \sin(\theta))] \end{aligned}$$

Indicando con

$$M_a(\theta) = f(r + e \sin(\theta)) [me(-\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + \ddot{\theta} \cos(\theta)) + k(r + e \sin(\theta))]$$

il momento della forza d'attrito si ottiene

$$(J_O + me^2 \cos^2(\theta)) \ddot{\theta} = M_m + me^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta}^2 - ke(r + e \sin(\theta)) \cos(\theta) - M_a(\theta)$$

Analogamente al caso senza attrito, consideriamo la seguente approssimazione

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &\simeq \omega_m = \text{cost} \\ \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

per cui risulta

$$M_a(\theta) = f(r + e \sin(\theta)) (-mew_m^2 \sin(\theta) + k(r + e \sin(\theta)))$$

da cui discende il lavoro della forza d'attrito L_{a_p} :

$$L_{a_p} = \int_0^{2\pi} M_a(\theta) d\theta = f\pi ((k - m\omega_m^2)e^2 + 2kr^2)$$

Il momento motore M_m costante che, nell'arco di un periodo, fornisce lo stesso lavoro dissipato attraverso l'attrito vale quindi

$$M_m = \frac{L_m}{2\pi} = \frac{L_{a_p}}{2\pi} = \frac{f((k - m\omega_m^2)e^2 + 2kr^2)}{2}$$

Per il calcolo del grado di irregolarità si fa ancora uso dell'approssimazione di Tredgold:

$$(J_O + J_1(\theta))\ddot{\theta} = J_r\ddot{\theta} = f(\theta)$$

dove in questo caso si ha

$$\begin{aligned} f(\theta) = & \frac{f}{2} ((k - m\omega_m^2)e^2 + 2kr^2) + me^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \omega_m^2 - ke(r + e \sin(\theta)) \cos(\theta) \\ & - f(r + e \sin(\theta)) [-m e \omega_m^2 \sin(\theta) + k(r + e \sin(\theta))] \end{aligned}$$

Il procedimento per determinare il grado di irregolarità è del tutto analogo a quello utilizzato nel caso senza attrito. Nel caso in esame si dovrà utilizzare l'ultima espressione di $f(\theta)$ appena scritta.

Capitolo 19

Grado di irregolarità del manovellismo di spinta

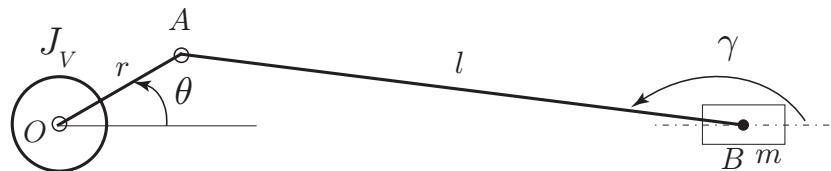


Figura 19.1: Schema meccanico.

Si consideri il manovellismo di spinta riportato in figura 19.1. La biella e la manovella si assumono prive di massa. Si considera invece una massa m concentrata nel pistone. Si determini il valore del momento d'inerzia J_v del volano calettato sulla manovella (come in figura) affinchè il grado di irregolarità sia inferiore ad un valore fissato δ^* .

19.1 Dinamica

Per il meccanismo in esame si definisce

$$\lambda = \frac{r}{l}$$

La posizione x del pistone risulta pertanto la seguente

$$x = r \left(\cos(\theta) - \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\theta)} \right)$$

Dato che solitamente il termine $\lambda^2 \sin^2(\theta)$ è trascurabile rispetto all'unità, la velocità del pistone può essere scritta nella seguente forma approssimata

$$\dot{x} \simeq r\dot{\theta} \left(\sin(\theta) + \frac{1}{2}\lambda \sin(2\theta) \right)$$

CAPITOLO 19. GRADO DI IRREGOLARITÀ DEL MANOVELLISMO DI SPINTA 109

Con questo risultato è possibile scrivere l'energia cinetica totale del sistema T come segue

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_v \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ &= \frac{1}{2} m r^2 \left(\sin(\theta) + \frac{1}{2} \lambda \sin(2\theta) \right)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_v \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} (J_v + J_p(\theta)) \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

dove si è posto

$$J_p(\theta) = m r^2 \left(\sin(\theta) + \frac{1}{2} \lambda \sin(2\theta) \right)^2$$

Utilizzando le equazioni di Lagrange, la dinamica del sistema si scrive come segue

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ 0 &= m r^2 (\lambda \cos(\theta) + 1)^2 \ddot{\theta} \sin^2(\theta) + \\ &\quad + m r^2 (\lambda \cos(\theta) + 1) (\cos(\theta) + \lambda \cos(2\theta)) \dot{\theta}^2 \sin(\theta) + J_v \ddot{\theta} \end{aligned}$$

in quanto non sono presenti termini non conservativi.

Per studiare il grado di irregolarità facciamo ricorso all'approssimazione di Tredgold e si scrive quindi

$$J_r = J_v + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} J_p(\theta) d\theta = J_v + \frac{1}{8} m r^2 (4 + \lambda^2)$$

inoltre si assume $\dot{\theta} = \omega_m$. La dinamica complessiva può quindi essere scritta come segue

$$J_r \ddot{\theta} = -m \omega_m r^2 (\lambda \cos(\theta) + 1) (\cos(\theta) + \lambda \cos(2\theta)) \sin(\theta) = f(\theta)$$

Il lavoro resistente L_r in un periodo è dato da

$$L_r = \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

e nel caso in esame risulta, come era lecito aspettarsi data la mancanza di termini non-conservativi

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0$$

I valori estremi $L_r|_{\max}$ e $L_r|_{\min}$ si hanno in corrispondenza dei valori di θ che risolvono la seguente equazione

$$f(\theta) = 0$$

Si definisce $k = L_r|_{\max} - L_r|_{\min}$ e pertanto risulta

$$\frac{1}{2} J_r (\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) = k$$

da cui il grado di irregolarità δ

$$\delta = \frac{(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2)}{2\omega_m^2} = \frac{k}{J_r \omega_m^2}$$

Dovendo risultare $\delta < \delta^*$ si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{k}{J_r \omega_m^2} &< \delta^* \\ J_r &> \frac{k}{\delta^* \omega_m^2} \\ J_v &> \frac{k}{\delta^* \omega_m^2} - \frac{1}{8} mr^2(4 + \lambda^2)\end{aligned}$$

Capitolo 20

Lubrificazione

In questo capitolo vengono studiate le caratteristiche di tipologie diverse di coppe lubrificate. Particolare attenzione è rivolta ai pattini lubrificati con differenti forme di meato. L'obiettivo è quello di confrontare i diversi tipi di meato in termini di capacità portante, pressione massima del fluido e coefficiente d'attrito.

20.1 Richiami di teoria

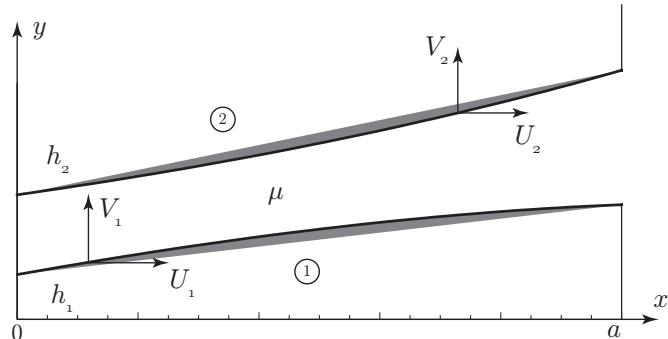


Figura 20.1: Schema di riferimento per un meato di forma generica.

Si consideri la figura 20.1 e partiamo dalla forma generale dell'equazione di Reynolds

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(h_2 - h_1)^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{(h_2 - h_1)^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ = 6 \left\{ (U_1 - U_2) \left(\frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) + (V_1 - V_2) \left(\frac{\partial h_2}{\partial z} + \frac{\partial h_1}{\partial z} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial z} + \frac{\partial V_2}{\partial z} \right) (h_2 - h_1) + 12 (V_2 - V_1) \right\} \end{aligned} \quad (20.1)$$

dove μ e p sono rispettivamente la viscosità (assunta costante) e la pressione del fluido, i due membri ① e ② della coppia hanno velocità rispettivamente

(U_1, V_1, W_1) e (U_2, V_2, W_2) . Inoltre si ha

$$(x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2$$

La forma del meato \mathcal{M} è definita da

$$\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A, h_1(x, z) \leq y \leq h_2(x, z)\} \quad (20.2)$$

Cerchiamo ora di riscrivere la (20.1) in funzione dell'altezza del meato $h(x, z)$ definita come segue

$$h(x, z) = h_2(x, z) - h_1(x, z)$$

Il primo membro della (20.1) si trasforma banalmente in

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

Per trasformare il secondo membro invece facciamo le seguenti assunzioni

- Le velocità in direzione x dei bordi dei due corpi sono costanti, e quindi indipendenti da x :

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \frac{\partial U_2}{\partial x} = 0$$

- Le velocità in direzione z dei bordi dei due corpi sono costanti, e quindi indipendenti da z :

$$\frac{\partial W_1}{\partial z} = \frac{\partial W_2}{\partial z} = 0$$

Con queste ipotesi si riscrive il secondo membro della (20.1) come segue

$$6(U_1 - U_2) \left(\frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) + 6(W_1 - W_2) \left(\frac{\partial h_2}{\partial z} + \frac{\partial h_1}{\partial z} \right) + 12(V_2 - V_1)$$

Al fine di riscrivere tale membro in funzione di $h = h_2 - h_1$ si utilizza la seguente scrittura (si aggiunge e si toglie la stessa quantità):

$$\begin{aligned} & 6(U_1 - U_2) \left(\frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) \\ & + 6(W_1 - W_2) \left(\frac{\partial h_2}{\partial z} - \frac{\partial h_1}{\partial z} + \frac{\partial h_1}{\partial z} + \frac{\partial h_1}{\partial z} \right) + 12(V_2 - V_1) \end{aligned}$$

che può quindi essere riscritta come

$$\begin{aligned} & 6(U_1 - U_2) \frac{\partial(h_2 - h_1)}{\partial x} + 6(W_1 - W_2) \frac{\partial(h_2 - h_1)}{\partial z} \\ & + 12(V_2 - V_1) - 12(U_2 - U_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} - 12(W_1 - W_2) \frac{\partial h_1}{\partial z} \end{aligned}$$

Da cui, definendo

$$\begin{aligned} V_1^* &= V_1 - U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} - W_1 \frac{\partial h_1}{\partial z} \\ V_2^* &= V_2 - U_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} - W_2 \frac{\partial h_1}{\partial z} \end{aligned}$$

si ottiene

$$6 \left\{ (U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + (W_1 - W_2) \frac{\partial h}{\partial z} \right\} + 12(V_2^* - V_1^*)$$

Nel caso in cui valgano le seguenti relazioni

$$W_1 = W_2 = 0$$

$$V_1 = U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x}$$

$$V_2 = U_2 \frac{\partial h_2}{\partial x}$$

cioè nel caso in cui la velocità del meato sia tangente al meato stesso, la precedente espressione si riscrive come

$$\begin{aligned} 6(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 12(V_2 - V_1) - 12(U_2 - U_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} &= \\ 6(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \left(U_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} - U_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right) - 12(U_2 - U_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} &= \\ 6(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 12U_2 \left(\frac{\partial(h_2 - h_1)}{\partial x} \right) &= \\ 6(U_1 + U_2) \frac{\partial h}{\partial x} & \end{aligned}$$

In definitiva l'equazione di Reynolds (20.1) può essere riscritta come segue

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6(U_1 + U_2) \frac{\partial h}{\partial x} \quad (20.3)$$

Assumendo un fluido di tipo newtoniano si ha che la tensione tangenziale τ fra due strati adiacenti di fluido, in moto laminare vale

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Ai fini dell'equilibrio lungo x di un elemento infinitesimo di fluido deve valere

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y}$$

da cui discende

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Integrando ambo i membri dell'ultima espressione e ponendo le seguenti condizioni

$$y = 0 \rightarrow u = -U$$

$$y = h \rightarrow u = 0$$

si ottiene

$$u(x, y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y - h(x)) + U \left(\frac{y}{h} - 1 \right) \quad (20.4)$$

L'equazione di Reynolds (20.3) si può ulteriormente semplificare considerando un pattino di lunghezza z infinita per il quale quindi la pressione p dipende solamente da x :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Si ottiene quindi la seguente equazione di Reynolds semplificata

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = -6U \frac{\partial h}{\partial x} \quad (20.5)$$

Per valutare la distribuzione delle pressioni e delle forze risultanti si integra la (20.5):

$$h^3 \frac{\partial p}{\partial x} = -6\mu U h + C_1$$

dove C_1 è una costante d'integrazione. Ne discende quindi che

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{6\mu U}{h^2} + \frac{C_1}{h^3}$$

Integrando questa espressione fra 0 e x e ponendo $p(0) = p(a)p_a$, dove p_a è la pressione esterna, si ottiene

$$p(x) - p_a = \int_0^x -\frac{6\mu U}{h(\xi)^2} d\xi + C_1 \int_0^x \frac{1}{h(\xi)^3} d\xi$$

da cui

$$\begin{aligned} p(a) - p_a &= \int_0^a -\frac{6\mu U}{h(\xi)^2} d\xi + C_1 \int_0^a \frac{1}{h(\xi)^3} d\xi = 0 \\ C_1 &= 6\mu U \frac{\int_0^a \frac{1}{h(\xi)^2} d\xi}{\int_0^a \frac{1}{h(\xi)^3} d\xi} = 6\mu U h^* \end{aligned}$$

dove si è posto

$$h^* = \frac{\int_0^a \frac{1}{h(\xi)^2} d\xi}{\int_0^a \frac{1}{h(\xi)^3} d\xi}$$

In questo modo è possibile scrivere quanto segue

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{6\mu U}{h^2} \left(1 - \frac{h^*}{h} \right)$$

Ne discende quindi che h^* è il valore di altezza del meato per cui si annulla la quantità $\frac{\partial p}{\partial x}$ e quindi dove la sovrapressione $p(x) - p_a$ è massima. Si noti che in corrispondenza del valore h^* il profilo di velocità nel meato è lineare in quanto nell'espressione (20.4) rimane diverso da zero solamente il termine $U(\frac{y}{h} - 1)$.

Il fatto che in corrispondenza di h^* si abbia un massimo della sovrapressione viene ora giustificato. Indicando con x^* l'ascissa alla quale il meato assume altezza pari a h^* si ha:

- Per $x < x^*$ si ha $h < h^*$ e pertanto il termine

$$\left(1 - \frac{h^*}{h}\right) < 0$$

da cui discende de

$$\frac{\partial p}{\partial x} > 0$$

- In maniera analoga, se $x > x^*$ si ha $h > h^*$ e pertanto

$$\left(1 - \frac{h^*}{h}\right) > 0$$

da cui discende de

$$\frac{\partial p}{\partial x} < 0$$

Per cui il punto in cui $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ è un punto di massimo.

La capacità portante P_1 per unità di spessore del meato può essere facilmente determinata una volta noto l'andamento della pressione all'interno del meato stesso. A tal fine è sufficiente risolvere il seguente integrale

$$P_1 = \int_0^a (p(x) - p_a) dx \quad (20.6)$$

Tale forza verticale risulta applicata su una retta che, in generale, non passa per la mezzeria del meato. Per determinare la retta di applicazione di P_1 è necessario risolvere la seguente equazione rispetto ad e (eccentricità):

$$P_1 \left(\frac{a}{2} - e\right) = \int_0^a (p(x) - p_a) x dx$$

che conduce a

$$e = \frac{a}{2} - \frac{\int_0^a (p(x) - p_a) x dx}{P_1} \quad (20.7)$$

L'azione tangenziale T_1 applicata dal fluido alla parete mobile viene ricavata attraverso la seguente espressione

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^a \tau|_{y=0} = \int_0^a \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \right) dx \\ &= \int_0^a \left(\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y - h(x)) + U \left(\frac{y}{h} - 1 \right) \right) \right) dx \\ &= \int_0^a \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y - h)_{y=0} + \frac{\mu U}{h} \right) dx \\ &= \int_0^a \left(-\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu U}{h} \right) dx \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione di $\frac{\partial p}{\partial x}$ si ottiene in definitiva

$$T_1 = \int_0^a U \mu \frac{4h - 3h^*}{h^2} dx \quad (20.8)$$

Si noti che l'espressione dell'azione tangenziale T_2 trasmessa dal meato al corpo fisso risulta in generale diversa dal valore di T_1 . Infatti si ha

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_0^a \tau|_{y=h} dx = \int_0^a \left(\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y - h)|_{y=h} + \frac{\mu U}{h} \right) dx \\ &= \int_0^a \left(\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu U}{h} \right) dx \\ &= \int_0^a U \mu \frac{3h^* - 2h}{h^2} dx \end{aligned}$$

Infine si definisce il coefficiente d'attrito f del meato attraverso il seguente rapporto

$$f = \frac{T_1}{P_1} \quad (20.9)$$

20.2 Pattino lineare

Si riporta come primo caso analizzato il pattino lubrificato con profilo lineare, rappresentato in figura 20.2. L'altezza h del meato in funzione dell'ascissa x si

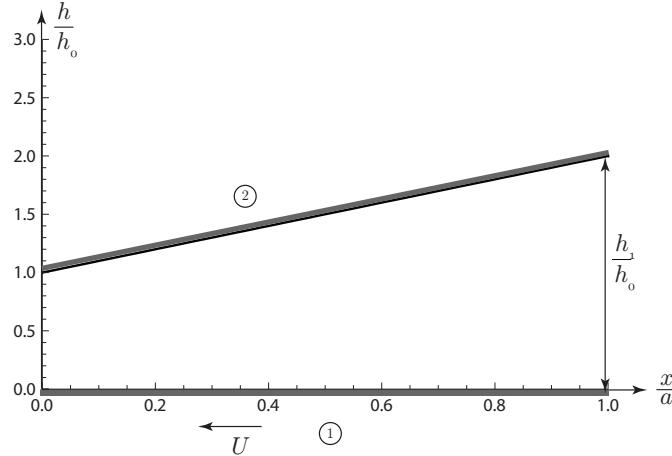


Figura 20.2: Pattino lineare.

può esprimere come segue

$$h(x) = h_0 + \frac{h_1 - h_0}{a} x = h_0 \left(1 + \frac{m}{a} x \right)$$

dove

$$m = \frac{h_1 - h_0}{h_0}$$

Nel seguito si assume che

$$\begin{aligned} h_1 &= 2h_0 \\ m &= 1 \end{aligned}$$

Si ricorda che dalla teoria si ottiene che il valore h^* per cui la sovrapressione nel meato è massima (ossia dove si annulla la quantità $\frac{\partial p}{\partial x}$) è dato da

$$h^* = \frac{\int_0^a \frac{1}{h(x)^2} dx}{\int_0^a \frac{1}{h(x)^3} dx} \quad (20.10)$$

che in questo caso diventa

$$h^* = h_0 \frac{\int_0^a \frac{1}{(1+\frac{m}{a}x)^2} dx}{\int_0^a \frac{1}{(1+\frac{m}{a}x)^3} dx}$$

Sostituendo l'espressione dell'altezza del meato $h(x)$ e risolvendo i due integrali si arriva alla seguente espressione

$$h^* = 2h_0 \frac{1+m}{2+m} = 1.33333h_0$$

Si ricorda che l'espressione dell'andamento della pressione lungo il meato è dato è la seguente

$$p(x) - p_a = -6\mu U \left(\int_0^x \frac{1}{h^2} dx - h^* \int_0^x \frac{1}{h^3} dx \right)$$

dove p_a è la pressione ambiente, all'esterno del meato. Il valore della pressione massima $(p - p_a)|_{\max}$ risulta quindi

$$(p - p_a)|_{\max} = 0.0416667 \frac{6aU\mu}{h_0^2}$$

Il valore x^* dell'ascissa x tale per cui si ottiene il valore h^* è quindi dato da

$$x^* = \frac{a}{2+m} = 0.33333a$$

Una volta noto l'andamento della pressione, il campo di velocità del fluido lungo l'asse x può essere determinato dalla seguente relazione

$$u(x, y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} y (y - h) + U \left(\frac{y}{h} - 1 \right)$$

L'andamento della sovrapressione nel meato e il campo di velocità del fluido sono rappresentati in figura 20.3 La capacità di carico P_1 del pattino può essere determinata attraverso

$$P_1 = \int_0^a (p(x) - p_a) dx$$

che in questo caso risulta

$$P_1 = 0.158883 \frac{a^2 U \mu}{h_0^2}$$

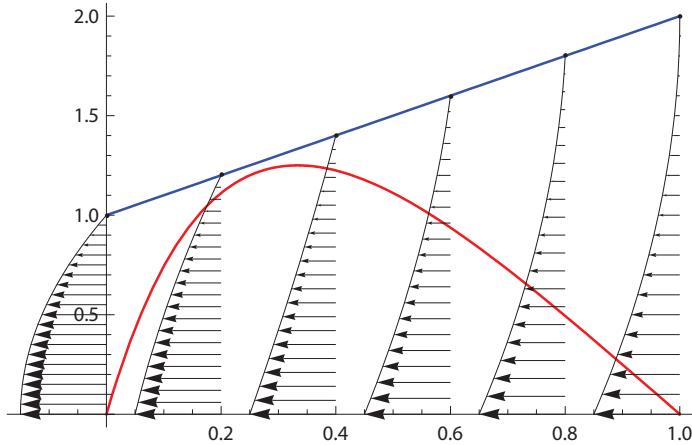


Figura 20.3: Andamento qualitativo della sovrapressione (rosso) e campo di velocità nel pattino lineare.

Per il calcolo della forza tangenziale T_1 trasmessa dal fluido al membro in moto si ricorre alla seguente espressione

$$T_1 = \int_0^a \tau_{y=0} dx$$

dove dalla teoria abbiamo (si veda l'espressione (20.8))

$$\tau = \mu \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

Per cui, nel caso in esame si ha

$$T_1 = 0.772589 \frac{\mu U a}{h_0}$$

Ne discende che il coefficiente d'attrito f definito in (20.9) nel caso in esame vale

$$f = 4.86262 \frac{h_0}{a}$$

Infine si calcola l'eccentricità e del pattino che è definita come segue

$$P_1 \left(\frac{a}{2} - e \right) = \int_0^a (p(x) - p_a) x dx$$

da cui

$$e = \frac{a}{2} - \frac{\int_0^a (p(x) - p_a) x dx}{P_1} = \frac{a}{2} - \frac{\int_0^a (p(x) - p_a) x dx}{\int_0^a (p(x) - p_a) dx}$$

che in questo caso vale

$$e = 0.0686879a$$

20.3 Pattino esponenziale

Studiamo ora le caratteristiche del pattino con profilo esponenziale rappresentato in figura 20.4. Al fine di confrontare tale forma con il pattino lineare si

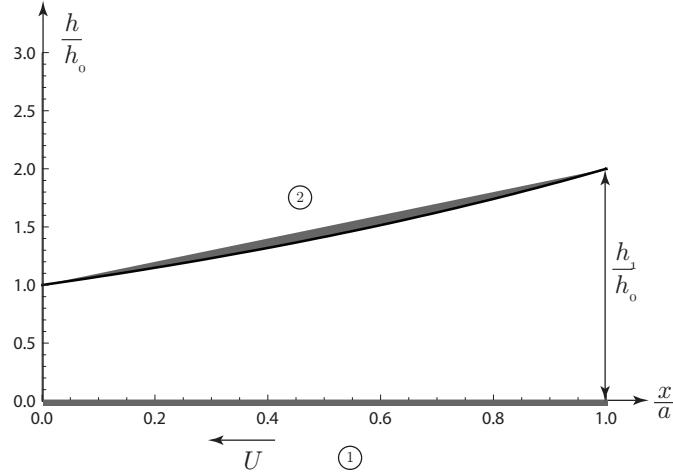


Figura 20.4: Pattino esponenziale.

impone che

$$\begin{aligned} h(0) &= h_0 \\ h(a) &= h_1 \end{aligned}$$

La forma del meato $h(x)$, in questo caso ha la seguente espressione

$$h(x) = h_0 e^{\lambda \frac{x}{a}}$$

dove, per le condizioni poste vale

$$\begin{aligned} h_1 &= h_0 e^\lambda \\ \lambda &= \log\left(\frac{h_1}{h_0}\right) \end{aligned}$$

Si ripercorrono ora gli stessi passi seguiti per il calcolo del pattino lineare. Il valore h^* per cui si ha il picco di sovrapressione è dato da¹

$$h^* = -\frac{3e^{-\lambda} h_0 \sinh(\lambda)}{-1 + e^{-3\lambda}} = 1.28571 h_0$$

L'andamento della sovrapressione nel meato è quindi dato da

$$p(x) - p_a = -\frac{6aU\mu}{h_0^2} \frac{\left(\frac{2e^{2\lambda} \left(-1 + e^{-\frac{3x\lambda}{a}} \right) \sinh(\lambda)}{-1 + e^{3\lambda}} - e^{-\frac{2x\lambda}{a}} + 1 \right)}{2\lambda}$$

¹Ricordare che $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

mentre il valore massimo della pressione è

$$(p - p_a)|_{\max} = 0.0424073 \frac{6aU\mu}{h_0^2}$$

Si noti che tale valore risulta leggermente più alto rispetto al caso del pattino lineare. Inoltre il valore x^* a cui si raggiunge il picco di sovrapressione è dato da

$$x^* = \frac{a \log \left(\frac{3e^{-\lambda} \sinh(\lambda)}{1-e^{-3\lambda}} \right)}{\lambda} = 0.36257a$$

che risulta più *centrato* rispetto al caso del pattino lineare. L'andamento della sovrapressione e del campo di velocità del fluido all'interno del meato è rappresentato in figura La capacità di carico P_1 di questo tipo di pattino è data

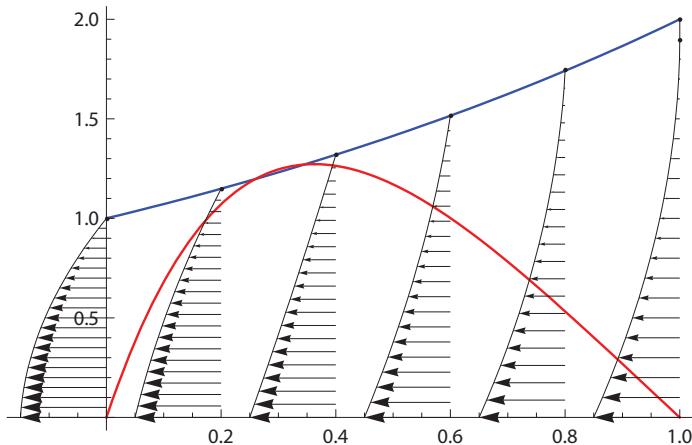


Figura 20.5: Andamento qualitativo della sovrapressione (rosso) e campo di velocità nel pattino esponenziale.

da

$$P_1 = \frac{a^2 U \mu (-3\lambda + \sinh(\lambda) + \sinh(2\lambda))}{(1 + e^\lambda + e^{2\lambda}) h_0^2 \lambda^2} = 0.162215 \frac{a^2 U \mu}{h_0^2}$$

Confrontando tale valore con quello relativo al pattino lineare si vede che in questo caso la capacità di carico è maggiore di circa il 2%.

La forza tangenziale T_1 trasmessa dal fluido al membro in moto risulta

$$T_1 = \frac{ae^{-\lambda} (-1 + e^\lambda) U \mu (7 \cosh(\lambda) - 1)}{2h_0 \lambda (2 \cosh(\lambda) + 1)} = 0.798635 \frac{a U \mu}{h_0}$$

da cui discende che il coefficiente d'attrito f vale

$$f = \frac{T_1}{P_1} = 4.9233 \frac{h_0}{a}$$

che risulta maggiore rispetto al caso lineare.

In maniera analoga al caso del pattino lineare si calcola l'eccentricità e che risulta

$$e = 0.0579307a$$

Si nota che l'eccentricità è minore rispetto al caso del pattino lineare e pertanto la retta d'azione nel caso esponenziale risulta più vicina alla mezzeria.

20.4 Pattino a gradino

Calcoliamo ora le caratteristiche di un pattino a gradino rappresentato in figura 20.6. Anche in questo caso per confrontare i risultati con quelli dei profili di

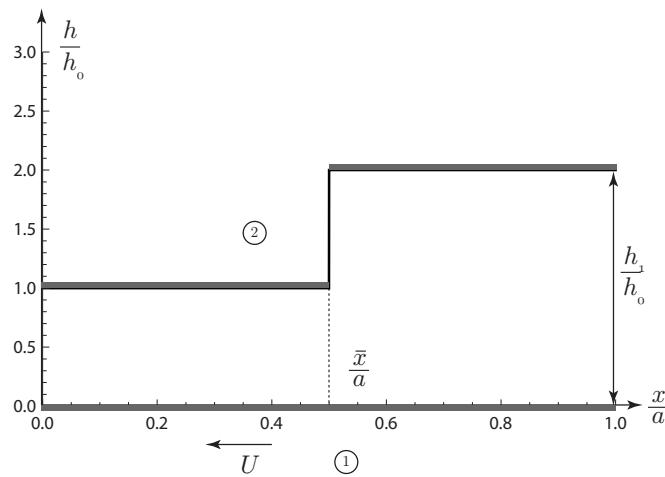


Figura 20.6: Pattino a gradino.

meato calcolati in precedenza si impone

$$h_1 = 2h_0$$

Inoltre, per semplicità si assume che il valore di $x = \bar{x}$ per cui si ha la discontinuità nel profilo sia per $\bar{x} = a/2$. L'espressione dell'altezza del meato risulta quindi

$$h(x) = \begin{cases} h_0 & x < \frac{a}{2} \\ h_1 & x \geq \frac{a}{2} \end{cases}$$

Si noti che per il calcolo del valore di h^* la discontinuità nell'espressione di $h(x)$ non comporta alcun problema in quanto gli integrali possono essere risolti separatamente per le due parti del profilo del meato. Il valore di h^* risulta pertanto

$$h^* = 1.11111h_0$$

L'andamento della pressione nel meato in questo caso è facilmente ricavabile e risulta

$$p(x) - p_a = \begin{cases} \frac{2Ux\mu}{3h_0^2} & x < a/2 \\ \frac{2U(a-x)\mu}{3h_0^2} & x \geq a/2 \end{cases}$$

ed è pertanto banale ricavare che

$$x^* = \frac{a}{2}$$

Il valore massimo della sovrapressione risulta in questo caso

$$(p - p_a)|_{\max} = 0.0555556 \frac{6aU\mu}{h_0^2}$$

L'andamento della sovrapressione e del campo di velocità del fluido all'interno del meato sono rappresentati in figura 20.7 La capacità di carico P_1 in questo

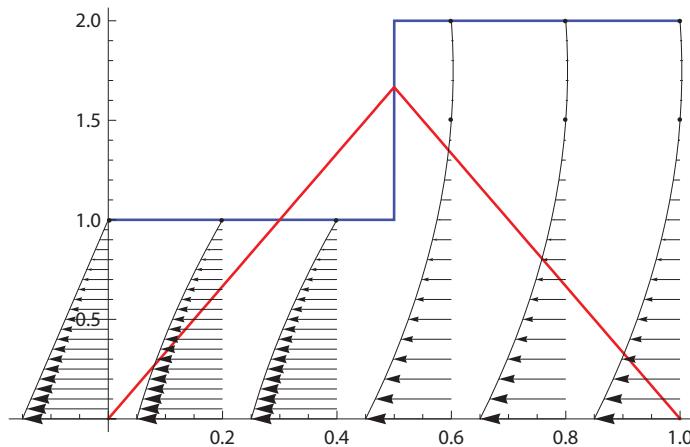


Figura 20.7: Andamento qualitativo della sovrapressione (rosso) e campo di velocità nel pattino a gradino.

caso risulta

$$P_1 = \frac{a^2 U \mu}{6h_0^2} = 0.166667 \frac{a^2 U \mu}{h_0^2}$$

mentre la forza tangenziale trasmessa T_1 vale

$$T_1 = \frac{11aU\mu}{12h_0} = 0.916667 \frac{aU\mu}{h_0}$$

per cui il coefficiente d'attrito f risulta

$$f = \frac{T_1}{P_1} = 5.5 \frac{h_0}{a}$$

che risulta notevolmente più alto rispetto ai due casi precedenti.

Per concludere l'analisi sul pattino a gradino si calcola il valore dell'eccentricità e che nel caso particolare risulta

$$e = 0$$

Qualora il pattino a scalino non fosse simmetrico, ovvero, in generale, $\bar{x} = \epsilon a$ si avrebbe

$$e = \frac{1}{6}(a - 2a\epsilon)$$