

VEHICLE DYNAMICS
Notes on Vertical dynamics
Year 2018 – 2019

Vehicle models for ride and road holding.

Free vibrations of road cars: 2 dof model; modal analysis.

Tuning of suspension stiffness.

Dynamic index and stiffness index.

Numerical example.

Interconnected suspensions (longitudinally).

Quarter car model: natural frequencies and modes, solution in the frequency domain.

Shock absorber tuning: ride comfort optimization; road holding optimization.

Effects of unsprung masses.

Remarks on non-linear springs and non-linear shock absorbers.

COMFORT DI MARCIA E TENUTA DI STRADA

→ Strada irregolare

→ Sospensioni + pneumatici devono garantire ai passeggeri comfort e garantire alle ruote il contatto-strada.

CAMPI DI FREQUENZE

$0 \rightarrow 0.25$ Hz naturali variazioni di pendenza della strada; il veicolo deve seguirle fedelmente

$0.25 \rightarrow 20$ Hz campo di interesse nella dinamica del veicolo (campo detto RIDE);

sottodivisioni:

$\begin{cases} 0.25 \rightarrow 3 \text{ Hz} & \text{contributo modesto dei pneumatici - trascurabile (rigidi)} \\ 3 \rightarrow 20 \text{ Hz} & \text{contributo dei pneumatici non trascurabile (non rigidi)} \end{cases}$

$20 \rightarrow 20000$ Hz campo di interesse per fenomeni di rumore (campo detto NOISE);

diventano rilevanti le vibrazioni strutturali dei componenti (qualsiasi modello a corpi rigidi diviene inutile)

Si studia il campo $0.25 \rightarrow 20$ Hz (RIDE).

Per il comfort il parametro più significativo è l'accelerazione verticale della cassa (in realtà si dovrebbe anche tener conto dell'effetto smorzante dei sedili).

La qualità del contatto ruota-strada dipende invece dalle componenti di forze verticali fluttuanti (che sarebbe bene limitare il più possibile).

Oltre le irregolarità della strada, possono esserci sorgenti di vibrazioni all'interno dei veicoli - es. squilibramenti - ma queste in genere vanno ad influire nel campo del rumore.

IPOTESI SEMPLIFICATIVE

Ipotesi drastiche:

- COMPORTAMENTO LINEARE delle sospensioni [forze elastiche e smorzamento]
- COMPORTAMENTO LINEARE dei pneumatici in direzione radiale [lo smorzamento in direzione radiale è piuttosto piccolo; è molto importante invece per valutare la resistenza al rotolamento]
- MARCIA IN RETTILINEO con $u = \text{cost}$
- VEICOLO SIMMETRICO rispetto a piano longitudinale, PROFILO STRADALE COSTANTE in direzione trasversale al veicolo [in questo modo il veicolo ha $v = 0$, $\psi = 0$, $\phi = 0$; quindi restano solo 2 variabili z e θ]

Si ha un disaccoppiamento fra variabili = equazioni in $v, r, \phi, \dot{\phi}$ (HANDLING) ed equazioni in z, θ (COMFORT).

ANCORA COMFORT VEICOLO

▷ ripasso ipotesi semplificative:

- linearità
- moto rettilineo, velocità u uniforme
- veicolo simmetrico risp. a un piano longitudinale, profilo strada costante in tutto trasv. al veicolo = da cui velocità trasv. $v=0$, imbardata $\psi=0$, rollio $\phi=0$. Vi sono solo beccheggio θ e swash z_s .
- velocità z_s
- assiati con moto traslatorio solo verticale.

→ il profilo stradale è inteso come sostituito medio della pavimentazione. Si può pensare di scomporre un profilo, ipotizzato periodico, in serie di Fourier:

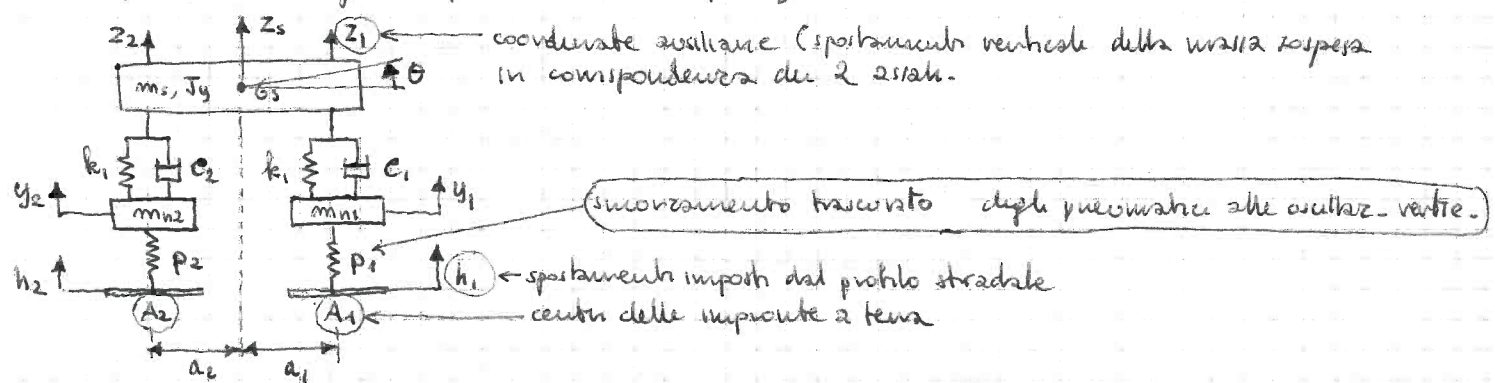
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)] \quad \text{ove } \frac{L}{n} \text{ è il "periodo spaziale"}. \quad \text{Se il veicolo}$$

si muove a velocità costante u , allora l'oscillazione costituisce un'oscillazione di periodo temporale $\frac{L}{nu}$, ossia di frequenza temporale $f_n = \frac{nu}{L}$

→ se vi è un'aspettata isolata, ha invece senso considerare la risposta "libera" del sistema veicolo su sospensioni.

MODELLO DI VEICOLO A 4 GDL

3 corpi rigidi e 4 gdl (2 per la cassa e 1 per ogni assale)



Tutti gli spostamenti sono assoluti e misurati a partire dalla configurazione di equilibrio

Con F_1, F_2 , si indicano le forze verticali scambiate fra ogni assale e la massa sospesa, e con N_1, N_2 , le forze verticali scambiate fra ogni assale ed il suolo.

Al tutto vi sono 3 gruppi di equazioni:

<p>(A) CONGRUENZA</p> $\begin{cases} z_1 = z_s + a_1 \theta \\ z_2 = z_s - a_2 \theta \end{cases}$	<p>(B) EQUILIBRIO</p> $\begin{cases} m_s \ddot{z}_s = -(F_1 + F_2) \\ J_y \ddot{\theta} = -(F_1 a_1 - F_2 a_2) \\ m_{n1} \ddot{y}_1 = -(N_1 - F_1) \\ m_{n2} \ddot{y}_2 = -(N_2 - F_2) \end{cases}$	<p>(C) COSTITUIVE</p> $\begin{cases} F_1 = k_1(z_1 - y_1) + c_1(\dot{z}_1 - \dot{y}_1) \\ F_2 = k_2(z_2 - y_2) + c_2(\dot{z}_2 - \dot{y}_2) \\ N_1 = p_1(y_1 - h_1) \\ N_2 = p_2(y_2 - h_2) \end{cases}$
---	--	---

Sostituendo si ottiene:

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s + [k_1(z_1 - y_1) + c_1(\dot{z}_1 - \dot{y}_1)] + [k_2(z_2 - y_2) + c_2(\dot{z}_2 - \dot{y}_2)] = 0 \\ J_y \ddot{\theta} + a_1 [k_1(z_1 - y_1) + c_1(\dot{z}_1 - \dot{y}_1)] - a_2 [k_2(z_2 - y_2) + c_2(\dot{z}_2 - \dot{y}_2)] = 0 \\ m_{n1} \ddot{y}_1 + p_1(y_1 - h_1) - [k_1(z_1 - y_1) + c_1(\dot{z}_1 - \dot{y}_1)] = 0 \\ m_{n2} \ddot{y}_2 + p_2(y_2 - h_2) - [k_2(z_2 - y_2) + c_2(\dot{z}_2 - \dot{y}_2)] = 0 \end{cases}$$

quindi:

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s + [k_1(z_s + a_1\theta - y_1) + c_1(\dot{z}_s + a_1\dot{\theta} - \dot{y}_1)] + [k_2(z_s - a_2\theta - y_2) + c_2(\dot{z}_s - a_2\dot{\theta} - \dot{y}_2)] = 0 \\ J_y \ddot{\theta} + a_1 [\quad] - a_2 [\quad] = 0 \\ m_{n1} \ddot{y}_1 + p_1(y_1 - h_1) - [k_1(z_s + a_1\theta - y_1) + c_1(\dot{z}_s + a_1\dot{\theta} - \dot{y}_1)] = 0 \\ m_{n2} \ddot{y}_2 + p_2(y_2 - h_2) - [k_2(z_s - a_2\theta - y_2) + c_2(\dot{z}_s - a_2\dot{\theta} - \dot{y}_2)] = 0 \end{cases} \quad (3)$$

da cui:

$$M \ddot{\bar{w}} + C \dot{\bar{w}} + K \bar{w} = \bar{h}$$

con

$$\bar{w} = \begin{Bmatrix} z_s \\ \theta \\ y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}, \quad \bar{h} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p_1 h_1 \\ p_2 h_2 \end{Bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{n1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{n2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_1 a_1 - c_2 a_2 & -c_1 & -c_2 \\ c_1 a_1 - c_2 a_2 & c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 & -c_1 a_1 & c_2 a_2 \\ -c_1 & -c_1 a_1 & c_1 & 0 \\ -c_2 & c_2 a_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_1 a_1 - k_2 a_2 & -k_1 & -k_2 \\ k_1 a_1 - k_2 a_2 & k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2 & -k_1 a_1 & k_2 a_2 \\ -k_1 & -k_1 a_1 & k_1 + p_1 & 0 \\ -k_2 & k_2 a_2 & 0 & k_2 + p_2 \end{bmatrix}$$

{NB} con questo modello non è possibile avere $C = \beta K$

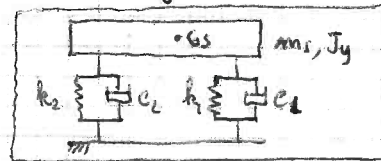
L'oscillazione è dovuta alle leggi h_1 ed h_2 (forzante a 4 componenti, 2 sole delle quali non nulle). Mediante analisi di Fourier, è possibile studiare la risposta all'oscillazione armonica, e poi - per sovrapposizione degli effetti - calcolare la risposta complessiva.

SI PUÒ TUTTAVIA SEMPLIFICARE ULTERIORMENTE IL PROBLEMA

Massa non sospesa molto vicino della massa sospesa, rigidità verticali degli pneumatici molto maggiori di quelle delle sospensioni ($p_i = 6 \div 12 k_i$). Per lo studio delle oscillazioni libere, a causa degli ammortizzatori con smorzamento viscoso, le oscillazioni sono lentamente smorzate, diminuendo molto il contributo dei modi a frequenze naturali più alte.

Se si eliminano quindi i gradi di libertà y_1 e y_2 si ottiene un sistema a 2 gdl, i cui modi propri si discostano poco da quelli del sistema a 4 gdl. Il vantaggio è quello di avere minori complicazioni analitiche.

(indichiamo componenti di \bar{w} in funzione di ω_n)



STUDIO DI OSCILLAZIONI LIBERE DEL SISTEMA A 2 GDL

$$M \ddot{\bar{w}}_0 + C \dot{\bar{w}}_0 + K \bar{w}_0 = \{0\}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & J_y \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & c_1 a_1 - c_2 a_2 \\ c_1 a_1 - c_2 a_2 & c_1 a_1^2 + c_2 a_2^2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_1 a_1 - k_2 a_2 \\ k_1 a_1 - k_2 a_2 & k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2 \end{bmatrix}, \quad \bar{w}_0 = \begin{Bmatrix} z_s \\ \theta \end{Bmatrix}$$

In questo caso si può avere $C = \beta K$ (non necessario, ma utile per capire come si comporta la soluzione).

La risposta libera si ottiene dopo aver risolto l'autoproblema $(K - \omega^2 M) \bar{x}_0 = 0$ se lo smorzamento è "proporzionale".

Calcolo degli autovalori (da cui le 2 pulsazioni naturali o proprie)

$$\det \left[\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & J_y \end{bmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} k_{11} - \omega^2 m_s & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \omega^2 J_y \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (m_s J_y) \omega^4 - (m_s k_{22} + J_y k_{11}) \omega^2 + \underbrace{(k_{11} k_{22} - k_{21} k_{12})}_{\det(K)} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2 m_s J_y} \left[\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 4 m_s J_y \det(K)} \right] \text{ con } \alpha = J_y (k_1 + k_2) + m_s (k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2)$$

la radice è sicuramente positiva $\rightarrow \left\{ \begin{aligned} V(\cdot), (\cdot) &= m_s^2 k_{22}^2 + J_y^2 k_{11}^2 + 2 m_s J_y k_{22} k_{11} + \\ &- 4 m_s J_y k_{11} k_{22} + 4 m_s J_y k_{21} k_{12} = \\ &= (m_s k_{22} - J_y k_{11})^2 + 4 m_s J_y k_{21} k_{12} > 0 \end{aligned} \right\}$
ed è anche $< \alpha$, per cui $\omega_{1,2}$ sono reali positivi.

Calcolo degli autovettori

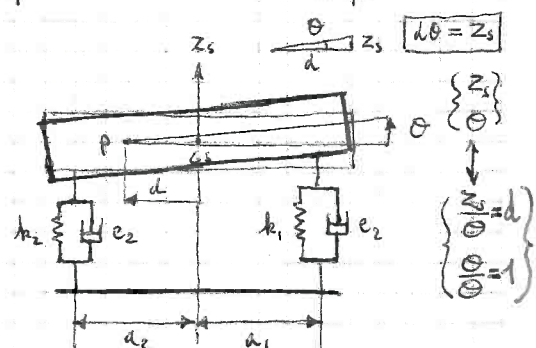
Si sceglie di normalizzare ponendo pari ad 1 la seconda componente, dunque

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \omega_i^2 m_s & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \omega_i^2 J_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_{01} = \frac{\omega_i^2 J_y - k_{22}}{k_{21}}$$

Nel caso in esame, ciascuno dei 2 modi se lo smorzamento è "proporzionale" è una rotazione attorno ad un punto fisso detto NODO o CENTRO DI NODO.

Se $\bar{x}_{01} = \left\{ \frac{d}{1} \right\}$ la componente di rappresentazione la distanza orizzontale fra il baricentro G_s ed il centro di moto P. Se $d > 0$, P si trova verso la parte posteriore del veicolo (rispetto a G_s) e viceversa.

I due modi sono detti «swoonimento» (il più "traslatorio", con centro di moto esterno agli assali) e «beccheggio» (il più "rotatorio", con centro di moto fra gli assali). NOTA CASO SMORZAM. GENERALE



Per caratterizzare il sistema si definiscono 2 indici:

INDICE DINAMICO $r_1 = \frac{J_y}{m_s a_1 a_2} = \frac{J^2}{a_1 a_2}$, J raggio d'inertia

per vetture europee $0.90 < r_1 < 0.97$. Fornisce una misura della distribuzione di massa rispetto agli assali. L'indice dinamico è da considerare un dato di progetto (non si può variare per migliorare le prestazioni delle sospensioni).

INDICE DI RIGIDEZZA $r_2 = \frac{k_1 a_1}{k_2 a_2}$

CASI PARTICOLARI (estremi, ma utili per comprendere il comportamento del modello).

*** SI ASSUME DI AVERE SMORZAMENTO PROPORZIONALE

Caso 1: $r_2 = 1 \Rightarrow k_1 a_1 = k_2 a_2 \Rightarrow K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2 \end{bmatrix}$ è diagonale

In tal caso z_s e θ sono le coordinate principali (sistema disaccoppiato)

(5)

Si trova subito che $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_s}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2}{J_y}}$

Si nota che risulta:

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \frac{J_y (k_1 + k_2)}{m_s (k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2)} = \frac{J_y (k_1 + k_2)}{m_s (k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2)} \frac{a_2}{a_2} = \frac{J_y}{m_s} \frac{(k_1 a_1 a_2 + k_2 a_2 a_1)}{(k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2)} \frac{1}{a_2} = \boxed{r_2}$$

indice dinamico

I due autovettori sono semplicemente:

$$\bar{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \boxed{\text{TRASLAZIONE PURA}} \quad ; \quad \bar{X}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \boxed{\text{ROTAZIONE PURA}}$$

svolgimento con centro di moto a distanza infinita beccheggio con centro di moto coincidente con G_s

Caso 2: $r_1 = 1 \Rightarrow \frac{J_y}{m_s a_1 a_2} = 1$

In questo caso le coordinate principali (che disaccoppiano le equazioni) altro non sono che le coordinate ausiliarie z_1 e z_2 . Questo si ottiene introducendo:

$$\begin{cases} z_1 = z_s + a_1 \theta \\ z_2 = z_s - a_2 \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_s = \frac{1}{a_1 + a_2} (a_2 z_1 + a_1 z_2) \\ \theta = \frac{1}{a_1 + a_2} (z_1 - z_2) \end{cases}$$

nelle eq. di equilibrio (smorza prop., quindi possiamo consid. l'eq. senza smorzamento).

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s + (k_1 + k_2) z_s + (k_1 a_1 - k_2 a_2) \theta = 0 \\ J_y \ddot{\theta} + (k_1 a_1 - k_2 a_2) z_s + (k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2) \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a_1 + a_2} \{ m_s (a_2 \ddot{z}_1 + a_1 \ddot{z}_2) + (k_1 + k_2) (a_2 z_1 + a_1 z_2) + (k_1 a_1 - k_2 a_2) (z_1 - z_2) \} = 0 \\ \frac{1}{a_1 + a_2} \{ J_y (\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2) + (k_1 a_1 - k_2 a_2) (a_2 z_1 + a_1 z_2) + (k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2) (z_1 - z_2) \} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$a_1 a_2 m_s$

si definiscono $\begin{cases} m_{s1} = \frac{m_s a_2}{a_1 + a_2} & \text{massa gravante sull'asse 1} \\ m_{s2} = \frac{m_s a_1}{a_1 + a_2} & \text{massa gravante sull'asse 2} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{s1} \ddot{z}_1 + m_{s2} \ddot{z}_2 + k_1 z_1 + k_2 z_2 = 0 \\ a_1 m_{s1} \ddot{z}_1 - a_2 m_{s2} \ddot{z}_2 + a_1 k_1 z_1 - a_2 k_2 z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m_{s1} \ddot{z}_1 + k_1 z_1) + (m_{s2} \ddot{z}_2 + k_2 z_2) = 0 \\ a_1 (m_{s1} \ddot{z}_1 + k_1 z_1) - a_2 (m_{s2} \ddot{z}_2 + k_2 z_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{s1} \ddot{z}_1 + k_1 z_1 = 0 \\ m_{s2} \ddot{z}_2 + k_2 z_2 = 0 \end{cases} \quad \text{equazioni disaccoppiate} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_{s1}}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_{s2}}} \end{cases}$$

In questo caso $\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \frac{k_1 a_1}{k_2 a_2} = \boxed{r_2}$

I due autovettori, nelle coordinate (z_s, θ) sono:

$$\bar{X}_1 = \begin{Bmatrix} a_2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \boxed{\text{ROTAZIONE con}} \quad ; \quad \bar{X}_2 = \begin{Bmatrix} -a_1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \boxed{\text{ROTAZIONE con}}$$

centro di moto sulla verticale dell'asse portante centro di moto sulla verticale dell'asse antenore

Risultato atteso, perché ciascuno dei due modi deve coinvolgere una sola delle 2 coordinate principali z_1, z_2 .

In questo caso particolare (limite) non ha senso parlare di svolgimento e beccheggio perché i due modi sono qualitativamente simili.

Caso 3 $r_1 = 1$ e $r_2 = 1$.

Questa evenienza è possibile, ossia avere contemporaneamente perché sono condizioni indipendenti.

$$\begin{cases} \frac{J_y}{m s a_1 a_2} = 1 \\ \frac{k_1 a_1}{k_2 a_2} = 1 \end{cases}$$

In questo caso si ha $(\frac{\omega_1}{\omega_2})^2 = 1$. In questo caso le due pulsazioni sono uguali (autovalori coincidenti). Si parla in questo caso di CONDIZIONE DI MONOPERIODO.

Quanto ai modi propri, dovrebbero essere sia quelli del caso 1, sia quelli del caso 2 (paradossale). In realtà qualunque vettore è autovettore del sistema (la matrice dinamica $A = M^{-1}K$ è un multiplo della matrice identità). Poiché sarebbe impossibile rispettarla esattamente, si avrebbero veicoli uguali con comportamento sostanzialmente differente (dipendente da tolleranze di lavorazione). Caso da evitare assolutamente
CONSIDERAZIONI SU SMORZAMENTO NON PROPORZIONALE (centro di moto fluttuante nell'ambito di ciascun modo).

CRITERI DI PROGETTO PER LE RIGIDENZE

Si hanno tutti gli elementi per progettare k_1 e k_2 (c_1 e c_2 vengono progettati analizzando le oscillazioni forzate).

Si stabiliscono criteri per la scelta della frequenza ($f = \frac{\omega}{2\pi}$) e la forma dei 2 modi di vibrare (suolamento e beccheggio).

PER AVERE UN BUON CONFORT:

- f_1 e f_2 comprese fra 1 e 1.5 Hz
- il centro di moto del beccheggio cade nei pressi dei sedili anteriori.

Il primo criterio è dettato da 2 ordini di motivi:

- frequenze naturali vicine a quelle del passo umano (a cui siamo abituati);
- forze statiche non troppo elevate;

rigidree troppo alte portano a frequenze troppo elevate

$$\left(\begin{array}{l} \text{frequ. statica} \\ \text{a 1 gdl} \end{array} \right) k \Delta z = mg \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta z}} \Rightarrow f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\Delta z}}$$

Il secondo criterio posiziona il "nodo" del secondo modo in prossimità degli occupanti dei sedili anteriori (che così non avvertono che in misura minima il suo contributo).

Di solito i 2 sempassi sono quasi uguali, con a_1 lievemente minore di a_2 se il motore è anteriore (il bilanciamento si trova quindi in genere in prossimità dei sedili anteriori, subito dietro ad essi).

Per avere un centro di moto posizionato fra bilanciamento e assale anteriore bisogna scegliere opportunamente r_1 e r_2 . Se, come accade per vetture europee, r_1 è un poco minore di 1, allora si deve anche avere $r_2 < 1$ (di solito $r_2 \approx 0.9$).

L'altro centro di moto viene a cadere qualche metro dietro l'assale posteriore (è una rotazione, ma la si avverte come una traslazione).

Se r_1 e r_2 sono entrambi un poco minori di 1, la frequenza propria di beccheggio

risulta un po' più alta di quella di scuotimento. Se $v_1 > 1$ (certe automobili americane con forti sbalzi), il modo di scuotimento ha frequenza più elevata di quello di beccheggio. I valori di v_1 e v_2 di norma non scendono sotto 0.9.

ESEMPIO NUMERICO

Caratteristiche:

massa sospesa $m_s = 1000 \text{ kg}$, mom. inerzia $J_y = 1620 \text{ kg m}^2$;
 semipassi $a_1 = 1.2 \text{ m}$, $a_2 = 1.5 \text{ m}$;
 rigidità verticali assiali $k_1 = 31500 \text{ N/m}$, $k_2 = 28000 \text{ N/m}$

Da cui gli indici $v_1 = 0.9$, $v_2 = 0.9$.

Gli autovalori sono $\lambda_1 = -58.2409 \text{ s}^{-2}$, $\lambda_2 = -68.1480 \text{ s}^{-2}$
 Frequenze naturali $f_1 = \frac{\sqrt{-\lambda_1}}{2\pi} = 1.21 \text{ Hz}$, $f_2 = \frac{\sqrt{-\lambda_2}}{2\pi} = 1.31 \text{ Hz}$ } senza smorzamento

(NB se si fosse tentato di approssimare f_1 e f_2 con il disaccoppiamento del caso 1.
 $(\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_s}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2}{J_y}}$) si sarebbero ottenute $f_1 = 1.23 \text{ Hz}$, $f_2 = 1.30 \text{ Hz}$
 con una discreta approssimazione.

Le forme modali (autovalori) sono:

$$\bar{x}_1 = \begin{Bmatrix} 3.3357 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad \bar{x}_2 = \begin{Bmatrix} -0.4856 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

centro di moto "più indotto"
 di 3.33 m rispetto al
 baricentro (3.33 - 1.5 = 1.83 m
 dietro l'assiale posteriore)

centro di moto fis. 2
 assiale, 0.48 m avanti
 rispetto al baricentro

(NB Se si cambiasse solo il valore di J_y , portandolo a 1980 kg m^2 , si avrebbe $v_1 = 1.1$
 con $f_1 = 1.24 \text{ Hz}$ e centro di moto 2.93 davanti al baricentro, $f_2 = 1.16 \text{ Hz}$
 e centro di moto 0.67 m dietro al baricentro (beccheggio con frequenza più bassa
 dello scuotimento).

In caso di smorzamento proporzionale, con $c_1/k_1 = c_2/k_2 = \beta = 0.09365$ [$C = \beta K$
 si ottengono: $\mu_1 = -2.73458 \pm i 7.12481 \text{ s}^{-1}$, $\mu_2 = -3.19975 \pm i 7.60983 \text{ s}^{-1}$

$$\text{Re}[\mu_1] = -\zeta_1 \omega_1 \Rightarrow \zeta_1 = 0.36; \quad \text{Re}[\mu_2] = -\zeta_2 \omega_2 \Rightarrow \zeta_2 = 0.39$$

(NB $\frac{\omega_1}{\omega_2} = 0.92 = \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$)

$$\frac{|\text{Im}[\mu_1]|}{2\pi} = \frac{\Omega_1}{2\pi} = \tilde{f}_1 = 1.13 \text{ Hz}; \quad \frac{|\text{Im}[\mu_2]|}{2\pi} = \frac{\Omega_2}{2\pi} = \tilde{f}_2 = 1.21 \text{ Hz}$$

Lo smorzamento produce un abbassamento delle frequenze di oscillazione (smorz. viscoso)

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{1}{2} \frac{c_1}{\sqrt{k_1 m_1}} = \frac{c_1}{k_1 \omega_1} = \frac{\beta \omega_1}{\omega_1} \\ \zeta_2 &= \frac{1}{2} \frac{c_2}{\sqrt{k_2 m_2}} = \frac{c_2 \omega_2}{k_2} = \beta \omega_2 \end{aligned} \right\}$$

SOSPENSIONI INTERCONNESSE LONGITUDINALMENTE

Si considerano le eq. di equilibrio di un sistema a 2 gdl senza smorz.

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s + (k_1 + k_2) z_s + (k_1 a_1 - k_2 a_2) \theta = 0 \\ J_y \ddot{\theta} + (k_1 a_1 - k_2 a_2) z_s + (k_1 a_1^2 + k_2 a_2^2) \theta = 0 \end{cases}$$

Questa non è la formulazione più generale. Più in generale si può scrivere:

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s + k_{zz} z_s + k_{z\theta} \theta = 0 \\ J_y \ddot{\theta} + k_{\theta z} z_s + k_{\theta\theta} \theta = 0 \end{cases} \quad \text{con } \underline{k_{z\theta} = k_{\theta z}}$$

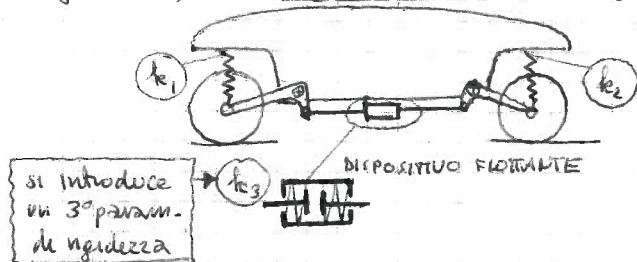
Le singole rigidità hanno un ben preciso significato fisico.

Imponendo alla massa sospesa una traslazione pura z_s ($\theta = 0$) la componente forza totale agente in direzione verticale è $-k_{zz} z_s$. Nasce anche una coppia $-k_{\theta z} z_s$ rispetto al baricentro che determina $k_{\theta z}$. Imponendo una rotazione pura θ intorno al baricentro nasce la coppia $-k_{\theta\theta} \theta$. Nasce anche una forza $-k_{z\theta} \theta$.

Quindi il comportamento elastico è caratterizzato da 3 parametri k_{zz} , $k_{\theta\theta}$, $k_{\theta z}$.

Questi possono essere dipendenti (funzioni di k_1 e k_2 come è stato visto), ma anche indipendenti, come nel caso delle SOSPENSIONI INTERCONNESSE.

Un esempio schematico puramente meccanico (ce ne sono anche di idraulici) è il seguente, con DISPOSITIVO FLOTTANTE



NB le barre antirullo sono dispositivi di interconnessione tra sospensioni sullo stesso asse

Le molle del dispositivo flottante entrano in azione principalmente a causa del modo di sintonimento (durante il modo di beccheggio il dispositivo si muove con una quasi-traslazione).

Dispositivi di questo tipo non sono comuni. Si possono impiegare per alzare la freq. di sintonimento (nel caso di troppo bassa) lasciando inalterata quella di beccheggio.

OSCUILLAZIONI FORZATE (MONOSOSPENSIONE)

A differenza delle oscillazioni libere, per cui si utilizza un modello semplificato a 2 gdl trascurando i 2 gdl delle masse non sospese (nella risposta libera, a causa dell'elevato smorzamento viscoso, i 2 modi a freq. naturale più elevata danno scarso contributo),

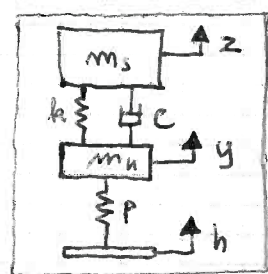
per lo studio delle oscillazioni forzate si preferisce utilizzare una "riduzione" a 2 gdl tipo "monosospensione" che può rappresentare, a seconda

del significato assegnato a m_s , m_n , k , c , p , sia un

"mezzo" veicolo, sia un "quarto" di veicolo⁽¹⁾. Equazioni:

$$\begin{cases} m_s \ddot{z} + c(\dot{z} - \dot{y}) + k(z - y) = 0 \\ m_n \ddot{y} + c(\dot{y} - \dot{z}) + k(y - z) + p(y - h) = 0 \end{cases}$$

(1) o anche tutto il veicolo



matrice
 $M = \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_n \end{bmatrix}$
 $C = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}$
 $K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k+p \end{bmatrix}$
 m generale C non proporz.

Si studia la risposta all'eccitazione armonica della base, ossia $h(t) = H \cos(\omega t)$ ⑨ cercando la soluzione a regime, che avrà stessa polarizzazione R dell'eccitazione, dunque:

$$\begin{cases} z(t) = Z \cos(\omega t + \varphi) \\ y(t) = Y \cos(\omega t + \psi) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{SI USA LA RAPPRES. CON NUM. COMPLESSI}}$$

$$h = \underset{\text{reale}}{\text{Re}}[H e^{j\omega t}]$$

$$\begin{cases} z = \text{Re}[Z e^{j(\omega t + \varphi)}] = \text{Re}[\tilde{Z} e^{j\omega t}] \\ y = \text{Re}[Y e^{j(\omega t + \psi)}] = \text{Re}[\tilde{Y} e^{j\omega t}] \end{cases}$$

con: $\tilde{Z} = Z e^{1j\psi}$ ed in forma vettoriale: $\tilde{W}(t) = \begin{Bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \text{Re}[\tilde{W} e^{1et}]$, $\tilde{W} = \begin{Bmatrix} \tilde{Z} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix}$

Sostituendo le espressioni complesse di h, z, y nel sistema di equazioni di equilibrio, ed eliminando $e^{i\omega t}$ si ottiene un sistema nelle 2 incognite complesse \tilde{z}, \tilde{y} :

$$\begin{cases} (k - m_s \Omega^2 + i c \Omega) \tilde{Z} - (k + i c \Omega) \tilde{Y} = 0 \\ -(k + i c \Omega) \tilde{Z} + [(p + k) - m_n \Omega^2 + i c \Omega] \tilde{Y} = p H \end{cases} \quad \begin{array}{l} \nearrow \text{horizontale} \end{array}$$

Risolvendo (in questo caso semplice, si può procedere senza disaccoppiare le eq. del moto):-

SIMILI A
RECELTANZE

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{Z_{IN}}{Z} &= \frac{p(k + j\omega L)}{(k - m_s \omega^2 + j\omega L)[(p + k) - m_n \omega^2 + j\omega L] - (k + j\omega L)^2} = G_{zy}(\omega) \\ \frac{Y}{Z} &= \frac{p(k - m_s \omega^2 + j\omega L)}{[\text{stesso denominatore}]} = G_{yy}(\omega) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{funzioni} \\ \text{adimension.} \end{array}$$

$$\begin{cases} \alpha \tilde{Z} - \beta \tilde{Y} = 0 \rightarrow \tilde{Z} = \frac{\beta}{\alpha} \tilde{Y} \rightarrow \tilde{\frac{Z}{Y}} = \frac{\beta}{\alpha} \\ -\beta \tilde{Z} + \gamma \tilde{Y} = p_H \rightarrow (\gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}) \tilde{Y} = p_H \rightarrow \tilde{\frac{Y}{H}} = \frac{p_H}{\alpha\gamma - \beta^2} \end{cases}$$

$$\alpha x - \beta^2 = f_1(x^2) + i c R f_2(x^2)$$

$$P_1(\Omega^2) = m_s m_n \Omega^4 - [(p+k_s)m_s + k_n m_n] \Omega^2 + p k_s \longleftrightarrow = \det [K - \Omega^2 M]$$

$$f_2(x^2) = p - (m_s + m_n)R^2$$

FUNZIONI COMPLESSE
ADIMENSIONALI SIMILI
A RECCATANZE

$$\frac{Z}{H} = G_{zy}(\Omega) = \frac{p(k + i\epsilon\Omega)}{P_1(\Omega^2) + i\epsilon\Omega P_2(\Omega^2)}$$

$$\frac{Y}{H} = G_{yy}(\Omega) = \frac{p(k - m_s\Omega^2 + i\epsilon\Omega)}{P_1(\Omega^2) + i\epsilon\Omega P_2(\Omega^2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z(t) = \text{Re} [H G_{zy}(\Omega) e^{i\Omega t}] \\ y(t) = \text{Re} [H G_{yy}(\Omega) e^{i\Omega t}] \end{cases}$$

E' di interesse lo studio di moduli e basi delle $G(\Omega)$ (soprattutto i moduli) al
variare di $\Omega =$

$$\left\{ \begin{aligned} |G_{zy}(\omega)| &= \frac{|\tilde{Z}|}{H} = \left(\frac{Z}{H} \right) = P \sqrt{\frac{k^2 + c^2 \omega^2}{f_1^2(\omega^2) + c^2 \omega^2 f_2^2(\omega^2)}}, & \text{tg } \varphi &= \frac{\text{Im}(\tilde{Z})}{\text{Re}(\tilde{Z})} \\ |G_{yy}(\omega)| &= \frac{|\tilde{Y}|}{H} = \left(\frac{Y}{H} \right) = P \sqrt{\frac{(k - m_s \omega^2)^2 + c^2 \omega^2}{f_1^2(\omega^2) + c^2 \omega^2 f_2^2(\omega^2)}}, & \text{tg } \psi &= \frac{\text{Im}(\tilde{Y})}{\text{Re}(\tilde{Y})} \end{aligned} \right.$$

SI RICAVANO LE
AMPIEZZE DELLE
ACCELERAZIONI:
 $\Omega^2 Z$ e $\Omega^2 Y$

RAPPORTI DI AMPLIFICAZIONE

La forza verticale scambiata con la strada è una funzione del tempo a causa delle oscillazioni. Più precisamente è una funzione armonica che si sovrappone alla parte costante dovuta al peso:

$$(m_n + m_s)g -$$

forza trasmissa al suolo:

$$f_s = p(h-y) = \operatorname{Re} [p(H-\tilde{Y})e^{i\omega t}] = \operatorname{Re} [\tilde{N}e^{i\omega t}] \text{ da cui } (\text{posto } p(H-\tilde{Y}) = \tilde{N}):$$

$$\frac{N}{pH} = \frac{|\tilde{N}|}{pH} = \left| \frac{p_1(\omega^2) + i c \omega p_2(\omega^2) - p(k - m_s \omega^2 + i c \omega)}{f_1(\omega^2) + i c \omega f_2(\omega^2)} \right| = \left| \frac{m_s m_n \omega^4 - (m_s + m_n) \omega^2 (k + i c \omega)}{f_1(\omega^2) + i c \omega f_2(\omega^2)} \right| =$$

$$= \omega^2 \sqrt{\frac{[m_s m_n \omega^2 - k(m_s + m_n)]^2 + c^2 \omega^2 (m_s + m_n)^2}{f_1^2(\omega^2) + c^2 \omega^2 f_2^2(\omega^2)}}$$

Se $c \leq \infty$ e $\omega \rightarrow \infty$ si ottengono i seguenti valori asintotici:

$$\frac{Z}{H} \rightarrow 0, \quad \frac{Y}{H} \rightarrow 0, \quad \omega^2 \frac{Z}{H} \rightarrow 0, \quad \omega^2 \frac{Y}{H} \rightarrow \frac{p}{m_n}, \quad \frac{N}{pH} \rightarrow 1$$

Lo studio di $\omega^2 \frac{Z}{H}$ è importante per il comfort, quello di $\frac{N}{pH}$ per la tenuta di strada.

CRITERI DI PROGETTO PER AMMORTIZZATORI

Occorre scegliere un opportuno valore per il coefficiente c .

Dati per tracciare le curve:

masse e rigidità relative all'intero veicolo
 $m_s = 1000 \text{ kg}$, $m_n = 100 \text{ kg}$ ($m_s = 10 m_n$)
 $k = 70 \text{ kN/m}$, $p = 560 \text{ kN/m}$ ($p = 8 k$)

Si riporta $\omega^2 \frac{Z}{H}$ in funzione di ω . Per $c=0$ si hanno due asintoti verticali (o picchi di risonanza dei due modi) in corrispondenza dei due valori di ω che si ottengono da

$$f_1(\omega^2) = \det[K - M\omega^2] = 0 \text{ ossia}$$

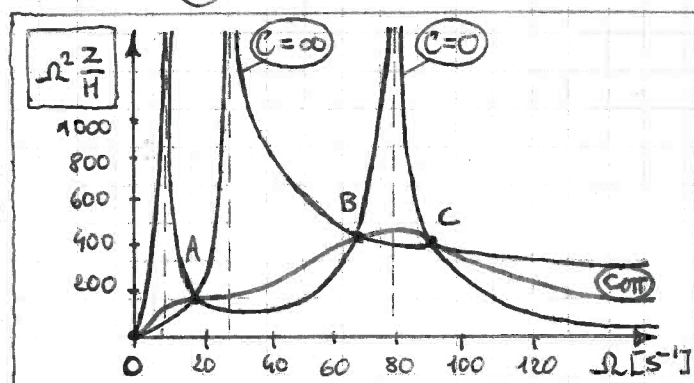
$$m_s m_n \omega^4 - [(p+k)m_s + k m_n] \omega^2 + p k = 0 \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p+k}{m_n} + \frac{k}{m_s} \pm \sqrt{\left(\frac{p+k}{m_n} - \frac{k}{m_s} \right)^2 + \frac{4 p k}{m_s m_n}} \right\}$$

Questi due valori, essendo $k \ll p$, $m_n \ll m_s$ si possono approssimare con:

$$\omega_1^2 \approx \frac{1}{m_s} \left(\frac{p k}{p+k} \right), \quad \omega_2^2 \approx \frac{p+k}{m_n}$$

Con i dati del problema i valori esatti e approssimati sono:

ESATTI	APPROSSIMATI
$f_1 = 1.254 \text{ Hz}$	$f_1 = 1.255 \text{ Hz}$
$f_2 = 12.64 \text{ Hz}$	$f_2 = 12.63 \text{ Hz}$

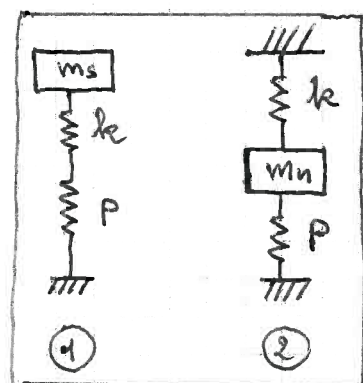


Si noti che la pulsazione naturale del primo modo non smorzato è quasi uguale a quella di due molle in serie collegate a m_s

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{p} = \frac{k+p}{k p} \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{1}{m_s} \frac{p k}{p+k}$$

Mentre la pulsazione naturale del secondo modo non smorzato è quasi uguale a quella di due molle in parallelo collegate a m_n

$$\omega_2^2 = \frac{p+k}{m_n}$$



Quindi il primo modo (a frequenza più bassa) è un'oscillazione della massa sospesa, mentre nel secondo modo (a frequenza più alta) è solo la massa non sospesa a muoversi in maniera apprezzabile.

In un veicolo, si può avere una condizione simile a $c=0$ in caso di ammortizzatori

molto scandin. Nel caso $c \rightarrow \infty$ si ha un solo picco di risonanza per

(11)

$f_2(\omega^2) = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{p}{m_s + m_n}}$. Infatti se $c \rightarrow \infty$ la sospensione resta fissa (collegamento rigido fra m_s e m_n) formando un sistema oscillante a singolo gdl.

Un veicolo potrebbe trovarsi in queste condizioni in caso di blocco degli ammortizzatori.

Esaminando il grafico di risposta in frequenza, si nota che la curva $c=0$ interseca la curva $c=\infty$ in tre punti (A, B, C) oltre l'origine O.

Si può dimostrare che le curve ottenute per qualsiasi valore di c passano tutte per O, A, B, C. A questo scopo basta considerare il rapporto Z/H ed imporre che esso non risulti dipendere da c , ossia:

$$\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2 = \left(\frac{c\omega f_2(\omega^2)}{f_1(\omega^2)}\right)^2 \text{ che è soddisfatta per } f_1(\omega^2) = \pm k f_2(\omega^2) \text{ che equivale a:}$$

$$m_s m_n \omega^4 - \{[(p+k)m_s + k m_n] \mp k(m_s + m_n)\} \omega^2 + p k \mp p k = 0$$

L'equazione con i segni negativi fornisce:

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_B = \sqrt{\frac{p}{m_n}}$$

mentre quella con i segni positivi fornisce:

$$\omega_{A,C} = \frac{m_s p + 2k(m_s + m_n) \pm \sqrt{[m_s p + 2k(m_s + m_n)]^2 - 8k p m_s m_n}}{2 m_s m_n}$$

Nel quarto punto fisso il rapporto $\frac{Z}{H}$ si riduce a $\boxed{\frac{Z}{H} = \frac{p k}{f_1(\omega^2)} = \frac{p}{f_2(\omega^2)}}$

Con procedimento analogo si possono calcolare i punti fissi anche sulle curve Y/H e $N/(pH)$.

Per la scelta di c si cerca un compromesso, ossia un valore che mantenga l'accelerazione verticale di m_s entro limiti accettabili in un intervallo di frequenze sufficientemente ampio.

Una possibile soluzione (che in genere porta ad una scelta abbastanza buona) consiste nell'individuare il valore di c per cui la curva $\omega^2 Z/H$ abbia tangente orizzontale nel punto fisso A.

Formalmente, tale valore (detto c "ottimale") si trova risolvendo l'equazione:

$$\frac{\partial(\omega^2 Z(c, \omega))}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_A} = 0 \Rightarrow \boxed{c_{opt} = \sqrt{\frac{m_s k}{2}} \sqrt{\frac{p+2k}{p}}}$$

Dato che $p \gg k$, la seconda radice contribuisce un fattore poco maggiore dell'unità.

Con i dati dell'esempio numerico si trova $c_{opt} = 6614.38 \text{ Ns/m}$ (somma per le quattro ruote).

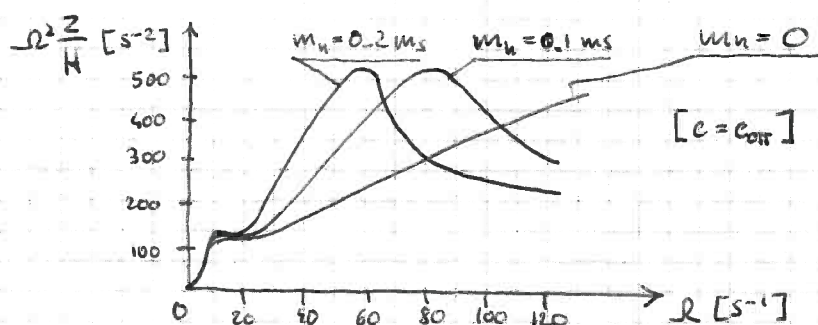
Se si soppressero perfettamente rigidi gli pneumatici, si otterrebbe un sistema oscillante ad 1 gdl (m_s, k) con smorzamento viscoso critico pari a:

$$c_{cr} = 2\sqrt{k m_s}. \text{ In questo caso si avrebbe: } c_{opt} = \sqrt{\frac{k m_s}{2}} \Rightarrow \zeta = \frac{c_{opt}}{c_{cr}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.35$$

ossia un valore di smorzamento elevato, ma subcritico. Di conseguenza il moto è periodico molto smorzato (in questo caso si parla di moto libero).

Le curve con c_{opt} , o con valore di c prossimo a c_{opt} presentano andamento privo di picchi di misura pronunciati (andamento abbastanza uniforme e "piatto"). La curva ha anche un massimo assoluto fra i più bassi (il massimo assoluto più basso si ha per $c \approx 1.2 c_{opt}$, ma in questo caso la curva avrebbe valori più elevati nel tratto compreso fra R_A e R_B).

- Si noti che c_{opt} non dipende dalle masse non sospese m_n , quindi resta valido se si montano cerchi con massa differente (es. cerchi in lega leggera).
- Al contrario, se si irrigidiscono le molle delle sospensioni, occorre aumentare anche c per mantenere il comfort a par livello.
- Le masse non sospese m_n non influenzano c_{opt} , ma influenzano la risposta in accelerazione del sistema:

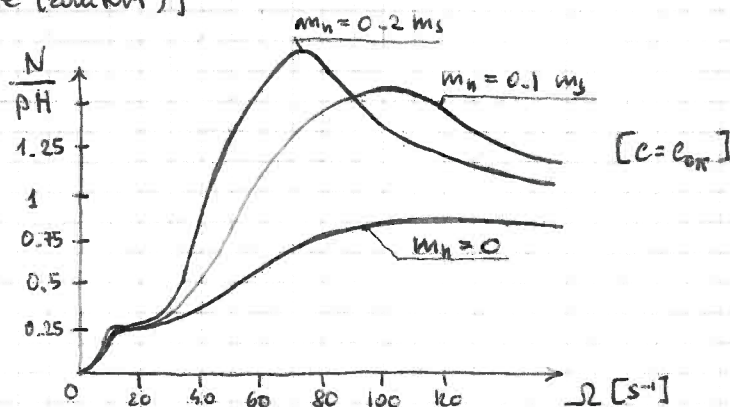
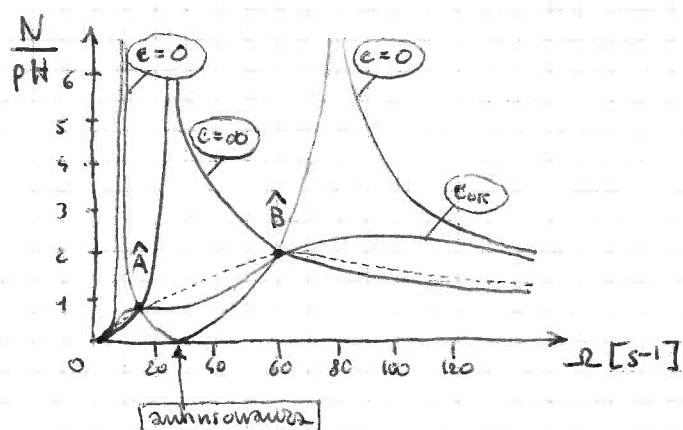


Il massimo dell'accelerazione non cambia, ma lo si ottiene a valori tanto minori di Ω quanto maggiore è m_n e si ha bene del comfort, e bene avere m_n il più modesto possibile.

Forza verticale al suolo

Per una buona tenuta di strada è bene che la forza verticale scambiata fra suolo e i pneumatici risulti il meno possibile delle oscillazioni indotte dalle asperità stradali, e quindi si mantenga vicino al valore $(m_s + m_n)g$ della forza peso.

[Stessi valori numerici di riferimento del caso precedente (comfort)]



Il c_{opt} scelto in base a considerazioni di comfort, non è altrettanto buono per la tenuta di strada. La curva con il massimo assoluto più basso con questi dati si avrebbe per $c = 2.72 c_{opt}$ (curva con il max nel punto basso \hat{B}). Ma è uno smorzamento eccessivo per il comfort di marcia. Si può aumentare un poco c_{opt} (es. $c = 1.3 c_{opt}$) senza peggiorare sensibilmente il comfort, e migliorando la tenuta di strada.

Le autovetture sportive montano molle di maggior rigidità per avere meno rollio ed un inserimento in curva più rapido. A questo va associato un consistente aumento del coefficiente di smorzamento degli ammortizzatori perché una maggior rigidità comporta un maggior c_{or} e perché questo valore va ulteriormente innalzato per garantire una maggiore tenuta di strada anche su fondo sconnesso.

La riduzione delle masse non sospese m_{ns} (ad esempio mediante l'uso di cerchi in lega leggera) ha un effetto benefico anche sulla tenuta di strada.

NON LINEARITÀ

Non linearità volute (effetti desiderati) e non volute (effetti nocivi)



↓
tentativo di sfurciamento dei bracci telescopici
(tendono a bloccare le sospensioni con piccoli cuscinetti)

- ▷ Non linearità della forza elastica: si vuole mantenere circa costante la frequenza al variare delle condizioni di carico. Se aumenta la massa deve aumentare anche la rigidità (che quindi deve aumentare in maniera più che lineare con lo schiacciamento: **EFFETTO HARDENING**). Si può agire anche solo sulle molle, lavorando con molle a rigidità variabile (ad esempio molle elicoidali con passo variabile).
- ||| Tuttavia la rigidità si può sempre linearizzare in un intorno della posizione di equilibrio (quindi il modello lineare resta valido).
- ▷ Più complicato il caso degli ammortizzatori: in questo caso si cerca un comportamento **BILIBEAR** con un C in estensione più grande di quello in compressione (C in estensione può essere 2 o 3 volte quello in compressione, perché si desidera che nel caso di una buca la ruota non scenda rapidamente perdendo contatto, mentre nel caso di un derto la ruota deve "cedere" facilmente alzandosi). Il comportamento dunque non è linearizzabile.
- ▷ Negli ammortizzatori vi sono altre cause di non-linearità, interne. Inoltre, il comportamento è influenzato dalla temperatura.