Лабораторная работа 2

Используя явную схему крест и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. Аппроксимацию второго начального условия произвести с первым и со вторым порядком. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением $U(x,t)$. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров τ, h.

1.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ a^2 > 0,$$

$u(0,t) = -\sin(at),$

$u(\pi,t) = \sin(at),$

$u(x,0) = \sin x,$

$u_t(x,0) = -a\cos x.$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \sin(x - at)$

2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ a^2 > 0,$$

$u_x(0,t) - u(0,t) = 0,$

$u_x(\pi,t) - u(\pi,t) = 0,$

$u(x,0) = \sin x + \cos x,$

$u_t(x,0) = -a(\sin x + \cos x).$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \sin(x - at) + \cos(x + at)$

3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3u,$$

$u(0,t) = \sin(2t)),$

$u(\pi,t) = -\sin(2t),$

$u(x,0) = 0,$

$u_t(x,0) = 2\cos x.$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \cos x \sin(2t)$

4.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5u,$$

$u_x(0,t) - 2u(0,t) = 0,$

$u_x(1,t) - 2u(1,t) = 0,$

$u(x,0) = \exp(2x)\,,$

$u_t(x,0) = 0\,.$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(2x)\cos t$

5.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial u}{\partial x}\,,$$

$u(0,t) = 0,$

$u(\pi,t) = 0,$

$u(x,0) = 0\,,$

$u_t(x,0) = \exp(-x)\sin x\,.$

Аналитическое решение: $U(x,t) = 0.5\exp(-x)\sin x\sin(2t)$

6.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - 2u\,,$$

$u(0,t) = \cos(2t),$

$u(\frac{\pi}{2},t) = 0,$

$u(x,0) = \exp(-x)\cos x\,,$

$u_t(x,0) = 0\,.$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-x)\cos x\cos(2t)$

7.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - 3u\,,$$

$u(0,t) = \exp(-t)\cos(2t),$

$u(\frac{\pi}{2},t) = 0,$

$u(x,0) = \exp(-x)\cos x\,,$

$u_t(x,0) = -\exp(-x)\cos x\,.$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-t-x)\cos x\cos(2t)$

8.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - 3u\,,$$

$u(0,t) = 0,$

$u(\pi,t) = 0,$

$u(x,0) = 0\,,$

$u_t(x,0) = 2\exp(-x)\sin x\,.$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-t-x)\sin x\sin(2t)$

9.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u + \sin x \exp(-t),$$

$u(0,t) = \exp(-t),$

$u(\pi,t) = -\exp(-t),$

$u(x,0) = \cos x,$

$u_t(x,0) = -\cos x.$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-t)\cos x$.

10.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - u - \cos x \exp(-t),$$

$u_x(0,t) = \exp(-t),$

$u_x(\pi,t) = -\exp(-t),$

$u(x,0) = \sin x,$

$u_t(x,0) = -\sin x.$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-t)\sin x$.