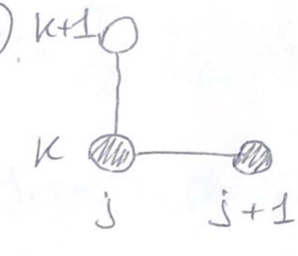
Гамов Павел М8О-407Б-18 [задачи]

$$\frac{du}{dt} + a\frac{du}{dx} = 0 \qquad u(x,0) = \varphi(x)$$

решение: $U(x,t) = \varphi(x-at)$

① 

Апроксимация.
Представим точное решение и выразим остаток

$$U(x,t^k+\tau) - U(x,t^k) + a\frac{U(x_i+h,t^k)-U(x_i,t^k)}{h} = r$$

разложение в ряд Тейлора:

$$U(x,t^k) + \tau U_t(x_i,t^k) + \frac{\tau^2}{2}V_{tt}(x_i,t^k) - \frac{U(x_i,t^k) + aU(x,t^k) + hV_x(x_i,t^k) +}{h} +$$

$$+ \frac{\frac{h^2}{2}V_{xx}(x_i,t^k) - V(x_i,t^k)}{h} = r$$

после упрощения: $$\frac{\tau V_t(x_i,t^k) + \frac{\tau^2}{2}V_{tt}(x_i,t^k)}{\tau} +$$

$$+ \frac{a\,h V_x(x_i,t^k) + \frac{h^2}{2}V_{xx}(x_i,t^k)}{h} = r$$

$v_t(x_i, t^k) + \frac{\tau}{2} v_{tt}(x_i, t^k) + a v_x(x_i, t^k) + \frac{ah}{2} v_{xx}(x_i, t^k) =$

$= r$; u - решение уравнения $\Rightarrow$

$\Rightarrow v_t(x_i; t^k) + a v_x(x_i; t^k) = 0 \Rightarrow$

$r = \frac{\tau}{2} v_{tt}(x_i, t^k) + \frac{ah}{2} v_{xx}(x_i, t^k) = O(h+\tau)$

Устойчивость:

Представим решение в виде $\lambda^k \exp(i\omega x)$

$$\frac{\lambda^{k+1}\exp(i\omega x_i) - \lambda^k \exp(i\omega x_i)}{\tau} + a\left[\frac{\lambda^k \exp(i\omega(x_i+h))}{h} - \frac{\lambda^k \exp(i\omega x_i)}{h}\right] = 0$$

Поделим на $\lambda^k \exp(i\omega x_i)$: $\frac{\lambda - 1}{\tau} + a\frac{\exp(i\omega h) - 1}{h} = 0$

$\lambda = 1 - \frac{a\tau}{h}\left[\exp(i\omega h) - 1\right]$

пусть $\sigma = \frac{a\tau}{h}$; $\theta = \omega h$

$\lambda = 1 - \sigma(\exp(i\omega h) - 1) = 1 - \sigma\cos\theta + i\sigma\sin\theta + \sigma$

$|\lambda|^2 = (1 + \sigma - \sigma\cos\theta^2) + (-\sigma\sin\theta)^2$;

$|\lambda^2| = 1 + 2\sigma^2(1-\cos\theta) + 2\sigma(1-\cos\theta)$

$|\lambda| \leq 1$, $|\lambda^2| \leq 1$ н.с. для устойчивости

$$1+2\sigma^2(1-\cos\theta) + 2\sigma(1-\cos\theta) \le 1$$

$2\sigma(\sigma+1)(1-\cos\theta) \le 0$ должно выполняться $\forall\theta$

при $\theta = 2\pi n \Rightarrow 1-\cos\theta = 0$

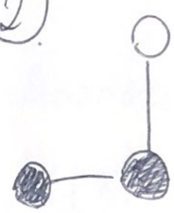
при $\theta \ne 2\pi n$: $1-\cos\theta > 0$

$2\sigma(\sigma+1) \le 0$ $\quad \sigma \in [-1;0]$, $\frac{a\tau}{h} \in [-1,0] \Rightarrow a \le 0$

Ответ: порядок апроксимации $O(\tau+h)$

условие устойчивости $a\tau/h \in [-1,0]$

(2)



$$\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{\tau} + a\frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h} = 0$$

апроксимация: $\dfrac{u(x_i, t^n+\tau) - u(x_i, t^n)}{\tau} +$

$$+ a\frac{u(x_i, t^n) - u(x_i - h, t^n)}{h} = \tau$$

устойчивость: $\dfrac{\lambda^{n+1}\exp(i\omega x_i) - \lambda^k \exp(i\omega h_i)}{\tau} +$

$$+ a\frac{\lambda^n \exp(i\omega x_i) - \lambda^k \exp(i\omega(x_i - h))}{h} = 0$$

$\lambda = 1 - \frac{aT}{h}\left(1-\exp(-i\omega h)\right)$

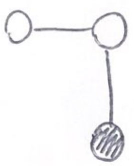
пусть $\sigma = \frac{-aT}{h}$, $\theta = -\omega h$; тогда $\lambda = 1+\sigma(1-\exp(i\theta)) =$

$= 1-\sigma\left[\exp(i\theta)-1\right]$ — то же что и в 1.

Ответ: порядок аппрокс. $O(T+h)$

устойчивость $aT/h \in [0;1]$

3.



$$\frac{u_i^{k+1}-u_i^k}{T} + a\,\frac{u_i^{k+1}-u_{i-1}^{k+1}}{h} = 0$$

Аппроксимация:

$$\frac{u(x_i, t^k+T) - u(x_i, t^k)}{T} + a\,\frac{u(x_i, t^k+T) - u(x_i-h, t^k+T)}{h} = r$$

Аналогично в предыдущем:

$$r = -\frac{T}{2}\,u_{tt}(x_i, t^k+T) - \frac{ah}{2}\,u_{xx}(x_i, t^k+T) = O(T+h)$$

Устойчивость: $\frac{\lambda^{k+1}\exp(i\omega x_i) - \lambda^k\exp(i\omega x_i)}{T} +$

$$a\,\frac{\lambda^{k+1}\exp(i\omega x_i) - \lambda^{k+1}\exp(i\omega(x_i-h))}{h} = 0$$

$$1/\lambda = 1 + \frac{aT}{h}\left(1 - \exp(-i w h)\right)$$

пусть $\sigma = \frac{aT}{h}$, $\Theta = -wh$

Тогда $\lambda = \frac{1}{1 - \sigma(\exp(i\Theta) - 1)}$

$$|\lambda| = \left| \frac{1}{1 - \sigma(\exp(i\Theta) - 1)} \right| \leq 1$$

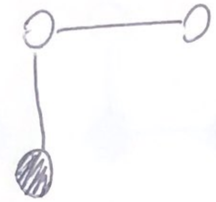
$$\left| 1 - \sigma(\exp(i\Theta) - 1) \right| \geq 1$$

из неравенства ранее $\left| 1 - \sigma(\exp(i\Theta) - 1) \right| \leq 1$

$\Rightarrow \sigma \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$

Ответ: порядок аппроксимации $O(T + h)$

устойчивость: $\frac{aT}{h} \notin (-1; 0)$

④  $$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} + a\frac{u_{i+1}^{k+1} - u_i^{k+1}}{h} = 0$$

Апроксимация: $$\frac{u(x_i; t^k+\tau) - u(x_i, t^k)}{\tau} +$$

$$+ a\frac{v(x_i+h, t^k+\tau) + v(x_i, t^k+\tau)}{h} = r \Rightarrow$$

$$v_t(x_i, t^k+\tau) - \frac{\tau}{2} v_{tt}(x_i, t^k+\tau) + a v_x(x, t^k+\tau) +$$

$$+ \frac{ah}{2} v_{xx}(x_i, t^k+\tau) = r$$

$$r = -\frac{\tau}{2} v_{tt}(x_i, t^k+\tau) + \frac{ah}{2} v_{xx}(x_i, t^k+\tau) = O(\tau+h)$$

Устойчивость:

$$\frac{\lambda^{k+1}\exp(i\omega x_i) - \lambda^k\exp(i\omega x_i)}{\tau} + a\frac{\lambda^{k+1}\exp(i\omega(x_i+h)) - \lambda^{k+1}\exp(i\omega x_i)}{h} = 0$$

$\lambda = \dfrac{1}{1+\sigma(1-\exp(i\theta))}$ $\Rightarrow$ подставим в ③.

$\sigma \in (-\infty; -1] \cup [0, +\infty)$; при $a \le 0$ устойчив.

Ответ: порядок апроксимации $O(\tau+h)$

условие $\frac{a\tau}{h} \notin [0,1]$

(5). 

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} + a\frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} = 0$$

Аппроксимация

$$\frac{u(x_i, t^k+\tau) - u(x_i, t^k)}{\tau} + a\frac{u(x_i+h, t^k) - u(x_i-h, t^k)}{2h} = r$$

$$r = \frac{\tau}{2} v_{tt}(x_i; t^k) + \frac{ah^2}{6} v_{xx}(x_i; t^k) = O(\tau + h^2)$$

Устойчивость:

$$\frac{\lambda^{k+1}\exp(i\omega x_i) - \lambda^k \exp(i\omega x_i)}{\tau} + a\left[\frac{\lambda^k \exp(i\omega(x_i+h))}{2h} - \frac{\lambda^k \exp(i\omega(x_i-h))}{2h}\right] = 0$$

$\lambda = 1 - \frac{a\tau i}{h}\sin(\omega h)$; $|\lambda|^2 = 1 + \sigma^2 \sin^2\theta \le 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ замена; $\sigma^2 \sin^2\theta \le 0$, при $\theta = 2\pi n \sin^2\theta = 0$

$\theta \ne \pi n \sin^2\theta > 0 \Rightarrow \sigma^2 \le 0$ $\sigma = 0 \Rightarrow a = 0$

Ответ: аппроксимация $O(\tau + h^2)$

устойчивость $a = 0$

6 

$$\frac{u_i^{k+1} - \frac{u_{i+1}^{k} + u_{i-1}^{k}}{2}}{\tau} +$$

$$+ a\,\frac{u_{i+1}^{k} - u_{i-1}^{k}}{2h} = 0$$

Апроксимация:

$$\frac{v(x_i, t^k+\tau) - \frac{v(x_i-h, t^k) + u(x_i+h, t^k)}{2}}{\tau} +$$

$$+ a\,\frac{u(x_i+h, t^k) - u(x_i-h, t^k)}{2h} = \tau$$

в ряд Тейлора

$$u(x_i \mp h, t^k) = u(x_i, t^k) - h\, v_x(x_i, t^k) + \frac{h^2}{2} v_{xx}(x_i, t^k) -$$

$$- \frac{h^3}{6} v_{xxx}(x_i, t^k)$$

$$\frac{u(x_i \mp h, t^k) + u(x_i+h, t^k)}{2} = u(x_i, t^k) + \frac{h^2}{2} v_{xx}(x_i, t^k)$$

$$u(x_i, t^k+\tau) - \frac{u(x_i-h, t^k) + u(x_i+h, t^k)}{2\tau} = u_t(x_i, t^k) + \frac{\tau}{2} v_{tt}(x_i, t^k)$$

$$- \frac{h^2}{2\tau} v_{xx}(x_i, t^k)$$

$$a\frac{U(x_i+h,t^n)-U(x_i-h,t^n)}{2h}=aU_x(x_i,t^n)+$$

$$+\frac{ah^2}{6}U_{xxx}(x_i,t^n)$$

подставим в ур-ние и выразим r

$$r=\frac{T}{2}U_{tt}(x_i,t^n)-\frac{h^2}{2T}U_{xx}(x_i,t^n)+$$

$$+\frac{ah^2}{6}U_{xxx}(x_i,t^n)=O\left(T+\frac{h^2}{T}+h^2\right)$$

при $T<1$ выполняется $h^2<\frac{h^2}{T}\Rightarrow r=aT+\frac{h^2}{T}$

Устойчивость.

$$\frac{\lambda^{n+1}\exp(iwx_i)-\frac{\lambda^n\exp(iw(x_i-h))+\lambda^n\exp(iw(x_i+h))}{2}}{T}+$$

$$+a\frac{\lambda^n\exp(iw(x_i+h))-\lambda^n\exp(iw(x_i-h))}{2h}=0$$

$\lambda=\frac{aTi}{2h}\sin(wh)\cos(wh)$; пусть $\sigma=\frac{aT}{2h}$, $\theta=wh$

$$|\lambda|=1+(\sigma^2-1)\sin^2\theta\le 1$$

$(\sigma^2-1)\sin^2\theta \le 0$

$\sigma^2-1\le 0$

при $\theta \neq \pi n$: $\sin^2\theta > 0 \Rightarrow \sigma^2 \le 1$

$\sigma \in [-1;1]$

~~Пор~~

Ответ: порядок апроксимоции

$O\left(\tau+\frac{h^2}{\tau}\right)$

условие устойчивости $\frac{a\tau}{2h} \in [-1;1]$