Ганов Павел М80-407Б-18 (4)

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Граничное условие $u(x,0) = u(x,l) = u(0,y) = u(1,y) = 0$

Найдем собств. значения. $L(u)$ Проверим для функции.

$u = \sin(nkx)\sin(nmy)$

$$L(u) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sin(nkx)\sin(nmy)) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sin(nkx)\sin(nmy)) =$$

$$= \sin(nmy)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sin(nkx)) + \sin(nkx)\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sin(nmy)) =$$

$$= \sin(nmy)(-n^2k^2\sin(nkx)) + \sin(nkx)(-n^2m^2\sin(nmy)) =$$

$$= -n^2(k^2+m^2)\sin(nmx)\sin(nmy) = -n^2(k^2+m^2)u$$

след-но $-n^2(k^2+m^2)$ - собств. значение, а

$u = \sin(nkx)\sin(nmy)$ - собств. вектор

подставим данную ~~модель~~ функцию в дискретную модель;

$$u_{i+1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} = \sin(nk(x-h))\cdot$$

$$\sin(nmy) + \sin(nk(x+h))\sin(nmy) + \sin(nkx)\sin(nm(y-h)) +$$

$$+\sin(nkx)\sin(nm(y+h)) - 4\sin(nkx)\sin(nmy) =$$

$$= \sin(nkx)\cos(nkh) - \cos(nkx)\sin(nkh)\sin(nmy) +$$

$$+\sin(nkx)\cos(nkh) + \cos(nkx)\sin(nkx)\sin(nkh)\sin(nmy) +$$

$$\sin(nkx)(\sin(nmy)\cos(nmh) - \cos(nmy)\sin(nmh))) +$$

$$+\sin(\pi kx)(\sin(\pi my)\cos(\pi mh)+\cos(\pi my)\sin(\pi mh))-$$

$$-4\sin(\pi kx)\sin(\pi my)=\sin(\pi kx)\cos(\pi kh)\sin(\pi my)-$$

$$-\cos(\pi kx)\sin(\pi kh)\sin(\pi my)+\sin(\pi kx)\cos(\pi kh)\cdot$$

$$\cdot\sin(\pi my)+\cos(\pi kx)\sin(\pi kh)\sin(\pi my)+\sin(\pi kx)\sin(\pi my)\cdot$$

$$\cdot\cos(\pi mh)-\sin(\pi kx)\cos(\pi my)\sin(\pi mh)+\sin(\pi kx)\sin(\pi my)\cdot$$

$$\cdot\cos(\pi mh)+\sin(\pi kx)\cos(\pi my)\sin(\pi mh)-4\sin(\pi kx)\cdot$$

$$\cdot\sin(\pi my)=2\cos(\pi kh)\sin(\pi kx)\sin(\pi my)+2\cos(\pi mh)\cdot$$

$$\cdot\sin(\pi kx)\sin(\pi my)-4\sin(\pi kx)\sin(\pi my)=$$

$$=(2\cos(\pi kh)+2\cos(\pi mh)-4)\sin(\pi kx)\sin(\pi my)$$

Функция яв-ся собственной и для дискрет. оператора.
Проверим равенство собств. значений (с учетом деления на h^2)

$$\frac{2\cos(\pi kh)+2\cos(\pi mh)-4}{h^2}=2\left(\frac{\cos(\pi kh)-1}{h^2}+\frac{\cos(\pi mh)-1}{h^2}\right)$$

разложим в ряд Тейлора $\Rightarrow$

$$2\left(\frac{1-\frac{(\pi kh)^2}{2}-1}{h^2}+\frac{1-\frac{(\pi mh)^2}{2}-1}{h^2}\right)$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{-(\pi k)^2}{2} + \frac{-(\pi m)^2}{2}\right) = -\pi^2(k^2+m^2)$$

при $h \to 0$, собств значения дискретного и непрерывного операторов совпадают.

Найдем собств значения матрицы.

$$a = F - D^{-1}A \; ; \; \mu_i = 1 - \frac{1}{4}d_i$$

$$\mu_{k,m} = 1 - \frac{1}{4}\left(2\cos(\pi kh) + 2\cos(\pi mh) - 4\right) = 1 - \frac{1}{2}(\cos(\pi kh)$$

$$-\frac{1}{2}\cos(\pi mh)) - 1 = -\frac{\cos(\pi kh) + \cos(\pi mh)}{2}$$

при $k,m \neq 0$;

$$|\cos(\pi kh)| < 1, \; |\cos(\pi mh)| < 1 \Rightarrow$$

$$|\cos(\pi kh) + \cos(\pi mh)| \leq |\cos(\pi kh)| + |\cos(\pi mh)| < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\mu_{k,m}| = \frac{|\cos(\pi kh) + \cos(\pi mh)|}{2} < 1$$

$$\rho(a) = \max_{k,m} |\mu_{k,m}| < 1$$

Следовательно, необходимое условие сх-ти выполняется