Гамов Павел. М80-407Б-18 1

пусть $u(x,t)$ - решение системы $\frac{du}{dt} = a\frac{d^2u}{dx^2}$, $u(x,0) = \varphi(x)$: тогда $V(x,t) = u(x-bt,t)$ - решение системы.

$\frac{dV}{dt} = a\frac{d^2V}{dx^2} - b\frac{dV}{dx}$, $V(x,0) = \varphi(x)$: проверим данное утверждение. найдем частные производные.

$\xi = x - bt$, $\eta = t$; $V(x,t) = u(\xi,\eta)$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} + \frac{du}{d\eta}\frac{d\eta}{dx} = \frac{du}{dx}; \quad \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{du}{d\eta}\frac{d\eta}{dt} = -b\frac{du}{dx}\frac{du}{dt}$$

проверим систему уравнений:

$$\frac{dV}{dt} = a\frac{d^2V}{dx^2} - b\frac{dV}{dx} - b\frac{du}{dx} + \frac{du}{dt} = a\frac{du}{dx^2} - b\frac{du}{t}$$

$$\frac{du}{dt} = a\frac{d^2u}{dx^2};$$

$V(x,0) = u(x - b\cdot 0, 0) = u(x,0) = \varphi(x)$ ■

пусть $u(x,t)$ - решение системы.

$$\frac{du}{dt} = a\frac{d^2u}{dx^2} - b\frac{dv}{dx}, \quad u_1(x,0) = \varphi(x)$$

Тогда $V(x,t) = e^{ct}u(x,t)$; - решение системы.

$$\frac{dV}{dt} = a\frac{d^2V}{dx^2} - b\frac{dv}{dx} + cv, \quad V(x,0) = \varphi(x)$$ проверим данные утверждения частные производные. V:

$$\frac{dV}{dx} = e^{ct}\frac{du}{dx} \qquad \frac{d^2V}{dx^2} = e^{ct}\frac{d^2V}{dx^2};$$

$$\frac{dV}{dt} = e^{ct}\frac{du}{dt} + ce^{ct}u$$; проверим сис. уравнений.

$$\frac{dV}{dt} = a\frac{d^2V}{dx^2} - b\frac{dV}{dx} + cV; \quad e^{ct}\frac{du}{dt} + ce^{ct}u = ae^{ct}\frac{d^2u}{dx^2} - be^{ct}\frac{du}{dx} + ce^{ct}u.$$

$$\frac{du}{dt} + cu = a\frac{d^2u}{dx^2} - b\frac{du}{dx} + cu;$$

$$\frac{du}{dt} = a\frac{d^2u}{dx^2} - b\frac{du}{dx}; \quad V(x,0) = e^{c\cdot 0}u\cdot(x,0) = \varphi(x) \quad \blacksquare$$

Таким образом если $u(x,t)$ - решение, то

$v(x,t) = e^{ct}u(x-bt,t)$ - решение системы

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b\frac{\partial v}{\partial x} + cv, \quad v(x,0)=\varphi(x)$$

Из лекции: решением системы $\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$u(x,0) = u_0\delta(x-x_0)$ является:

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2\sqrt{a\pi t}}\exp\left(\frac{(x-x_0)^2}{4at}\right)$$

Тогда решением системы:

$\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b\frac{\partial v}{\partial x} + cv$, $v(x,0) = u_0\delta(x-x_0)$ яв. функц.:

$$v(x,t) = e^{ct}u(x-bt,t) = \frac{u_0}{2\sqrt{a\pi t}}\exp(ct)\cdot\exp\left(\frac{(x-bt-x_0)^2}{4at}\right)$$