

Simulationsverfahren
für mechatronische Systeme

LV 437.224
SOMMER SEMESTER 2020

SMS - Projektarbeit

Induktive Kraftmessdose

vorgelegt von

Patrick Dominik Gsöls
11771814
patrick.gsöls@student.tugraz.at

Bernhard Pöllabauer
01430506
bernhard.poellabauer@student.tugraz.at

Übungsleiter
Dipl.-Ing. Dr.techn. Thomas Bauernfeind

Graz, at 5. Oktober 2020

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	ii
Tabellenverzeichnis	iii
Abbildungsverzeichnis	iii
1 Einleitung	1
2 Die mechanische Struktur	2
2.1 Detailansicht der Kraftmessdose	2
2.2 Numerische Optimierung der Eisenkreis-Geometrie	3
2.2.1 Auflistung der Teilvervolumina der Kraftmessdose	3
2.2.2 Numerischer Optimierungsprozess	4
2.3 Approximation der mittleren Eisenkreislänge und Querschnittsfläche	5
2.3.1 Substitutionsterme	5
2.3.2 Gesamte mittlere Eisenkreislänge	6
2.3.3 Mathematische Beschreibung des inneren Übergangsssegments	6
2.3.4 Mathematische Beschreibung des Deckel- und Bodensegments	7
2.3.5 Mathematische Beschreibung des äußeren Übergangsssegments	8
2.3.6 Mathematische Beschreibung des inneren und äußeren Zylinders	9
2.3.7 Mathematische Beschreibung der gesamten geometrischen Struktur	10
2.4 Mechanische Fertigungsskizze	11
3 Modellbildung	12
3.1 Die Lagrange-Methode	12
3.1.1 Generalisierte Koordinaten	12
3.1.2 Generalisierte Kräfte	13
3.1.3 Potentielle und kinetische Energie	15
3.2 Das Dynamische System	16
3.2.1 Identifizierung der generalisierten Koordinaten	16
3.2.2 Aufstellen der Energiebeziehungen	17
3.2.3 Die Dynamik des elektromechanischen Systems	20
3.2.4 Die Zustandsraumbeschreibung	22
4 Finite Elemente Simulation	24
4.1 Grundlegende Aspekte	24
4.2 Problemdefinition	25
4.3 Magnetostatische FEM-Simulation	28
4.4 Transiente FEM-Simulation	35
5 Das elektromechanische System	37
5.1 Simulink-Modell des dynamischen Systems	37
5.2 Visualisierung der dynamischen Vorgänge	41

6 Homogenes Modell der Kraftmessdose	46
6.1 Geometrische Größen im homogenen B-Feld	46
6.2 Berechnung des ohm'schen Widerstandes der Spule	47
6.3 Dimensionierung des elektrischen Stromkreises	47
6.4 Berechnung der Induktivität	48
6.5 Lagrange-Modellbildung am homogenen Modell der Messdose	50
6.6 Matlab-Simulation am homogenen Modell der Messdose	51
7 Ansatz mittels Load-Line Methode	54
7.1 Anwendung der Load-Line Methode	54
7.2 Vergleich zu FEM-Methode	58
Literatur	60

Tabellenverzeichnis

1 Bemaßungs-Bezeichnungen	11
-------------------------------------	----

Abbildungsverzeichnis

1 Schnitt durch das 3D Modell der induktiven Kraftmessdose	1
2 Querschnitt der Kraftmessdose	2
3 Viertelschnitt der numerisch zu optimierenden Geometrie	3
4 Numerischer Optimierungsprozess mittels MathCAD®	4
5 Viertelschnitt der Geometrie zur Berechnung der mittleren Eisenkreislänge und Eisenkreisfläche	5
6 Übergangsstruktur zwischen inneren vertikalen und horizontalen Eisenkern .	6
7 Deckel- und Bodensegment des Eisenkerns	7
8 Übergangsstruktur zwischen horizontalen und äußeren vertikalen Eisenkern .	8
9 Visualisierung der mittleren Querschnittsflächen	10
10 Querschnitt der Kraftmessdose mit Variablenbezeichnung	11
11 elektrisches Modell	16
12 mechanisches Modell	16
13 FEM-Abbild des elektromechanischen Problems	25
14 Rasterung der Kraftmessdose	25
15 Preprocessor Main Dialog Window	26
16 Grid Structure Dialog Window	26
17 Definition der für die Simulation benötigten Quelle	26
18 Boundary Conditions Window	27
19 BH-Kurve des verwendeten Materials	27
20 Definition des zu verwendenden Materials	27
21 Feldlinienplot der FEM-Simulation der Kraftmessdose bei $I = 110.06\text{ mA}$, $N = 1518$ und $\delta = 1.74\text{ mm}$	28
22 Zoom vom Feldlinienplot der Kraftmessdose	28

23	Flussverkettung in Abhängigkeit der Ankerposition bzw. Luftspaltbreite	29
24	Induktivität in Abhängigkeit des Spulenstroms	30
25	Induktivität in Abhängigkeit der Ankerposition bzw. Luftspaltbreite	30
26	Partielle Ableitung der Induktivität nach dem Strom	31
27	Partielle Ableitung der Induktivität nach der Ankerposition	31
28	Induktivität in Abhängigkeit vom Strom und der Ankerposition	32
29	Surface-Plot der partiellen Ableitung der Induktivität nach dem Strom	32
30	Surface-Plot der partiellen Ableitung der Induktivität nach der Ankerposition	33
31	Betrag der magnetischen Flussdichte im horizontalen Schnitt	33
32	Betrag der magnetischen Flussdichte entlang der mittleren Eisenkreislänge .	34
33	Definition der für die Simulation benötigten Quelle	35
34	Definition der für die Simulation benötigten Quelle	35
35	Transientes Verhalten des Spulenstroms	36
36	Transientes Verhalten der Flussverkettung	36
37	Transientes Verhalten der Induktivität	36
38	Magnetisierungskennlinie von Gußeisen mit Arbeitspunkt	37
39	Simulink-Modell des dynamischen Systems	38
40	Start-Up Block zur Gewährleistung eines stationären Anfangszustandes . .	39
41	Hüllkurven-Detektion zur Bestimmung des stationären Anfangszustandes .	39
42	Enable-LookUp-Table Block zur Gewährleistung der Aktivierung der Look- Up-Tabellen zum Zeitpunkt der Spulen-Bestromung	40
43	Stop-Block zur Detektion des stationären Endzustandes	40
44	Reluktanzkraft Ermittlung	40
45	Ermittlung der einwirkenden Federbeanspruchung	40
46	Zeitliche Änderung der Ankerposition $z(t)$	41
47	Elektrische Sprungantwort $i(t)$ des Systems	41
48	Zeitliche Induktivitätsänderung $L(t)$ des Systems	42
49	Vergleich der Einschaltvorgänge für konstantes und nicht konstantes μ_r .	42
50	Vorgegebene Kraft $F_G(t)$ und gemessene Kraft $F_{G_{sim}}(t)$	43
51	Fehler zwischen vorgegebener $F_G(t)$ und gemessener Kraft $F_{G_{sim}}(t)$	43
52	Zeitliche Änderung der Reluktanzkraft $F_R(t)$	44
53	Zeitliche Änderung der Federbeanspruchung $k \cdot F_c(t)$	44
54	Messcharakteristik der Apparatur	45
55	Magnetisierungskennlinie Gußeisen	46
56	Induktivität L in Abhängigkeit von z	49
57	Modellverhalten bei Spannungssprung bei $t = 1\text{ s}$ und linear ansteigender Gewichtsgraft $F_{G_{sim}}(t)$ ab $t = 2\text{ s}$	53
58	Schnittpunkt Bestimmung bei einem Luftspalt von $\delta = 0.7\text{ mm}$	55
59	Induktivität L in Abhängigkeit von z	56
60	Betrag der magnetischen Flussdichte entlang der mittlere Eisenkreislänge, be- rechnet durch die Load-Line Methode	57
61	Induktivitäten L in Abhängigkeit von z	58

1 Einleitung

Als Idee hinter diesem Projekt steht die Entwicklung einer alternativen Methode zur Bestimmung von Gewichtskräften F_G . Der physikalische Vorgang, der zur Bestimmung der Gewichtskraft F_G herangezogen wird, beruht auf dem Prinzip einer veränderlichen Induktivität L . Diese Induktivitätsänderung erfolgt aufgrund einer Veränderung der Luftspaltbreite δ eines nicht geschlossenen Eisenkreises. Die Luftspaltbreite verändert sich aufgrund einer externen Belastung (=Gewichtskraft F_G). Der elektromechanische Aufbau dieses Messprinzips ist in Abbildung 1 dargestellt.

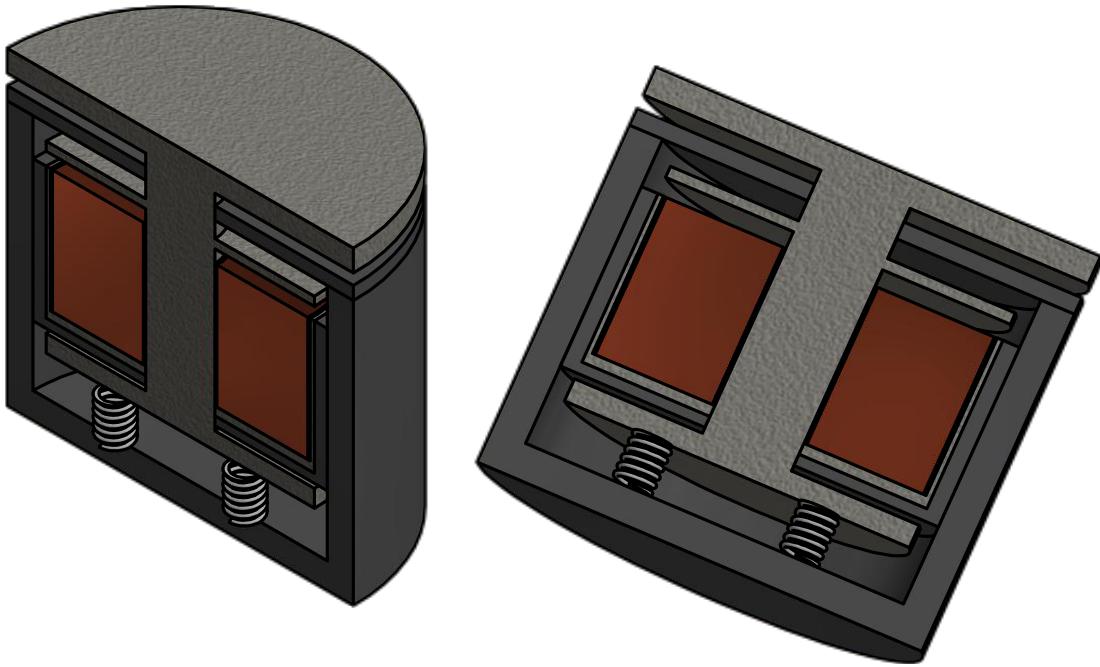


Abbildung 1: Schnitt durch das 3D Modell der induktiven Kraftmessdose

Der bronze farbige Bereich von Abbildung 1 repräsentiert den starren Wicklungskörper, welcher innen und außen von einer Kunststoffschicht berandet wird. Die ebenso nichtbeweglichen, hellgrauen, L-förmige angeordneten Segmente rund um den Spulenkörper, bilden den Unterteil des von oben geschlossenen Eisenkreises. Das dünne, hellgraue, zylinderförmige Segment, welches den Kern der umgebenen Toroidspule bildet, bildet mitsamt den oben und unten befestigten kreisförmigen Segmenten, den Kraftsensor. Dabei bildet das obere, kreisförmige Segment den Deckel des Eisenkreises, wodurch der Gesamteisenkreis geschlossen wird. Das oberste kreisförmige Segment, worauf eine Kraft F_G wirken kann, wurde so konzipiert, sodass bei Kräften, die die Maximalbelastbarkeit übersteigen, dieses Segment am Gehäuse (dunkelgrauer Bereich) anschlägt. Das in Abbildung 1 dunkelgrau gekennzeichnete Gehäuse wird aus Kunststoff gefertigt, sodass der im Inneren befindlichen Eisenkreis möglichst nicht beeinflusst wird. Damit der Kraftsensor bzw. der aus Gußeisen gefertigte Anker bei keiner Belastung ($F_G = 0N$) nicht zu Boden sackt, befinden sich unter dem untersten kreisförmigen Segment des Ankers vier Spiralfedern ($k = 4$).

2 Die mechanische Struktur

Dieser Abschnitt beschreibt die mechanische Zusammensetzung der Komponenten für die Realisierung der induktiven Kraftmessdose. Wie aus Abbildung 2 ersichtlich, ist die Messdose zylindersymmetrisch aufgebaut, wodurch die Schnittdarstellungen einen guten Überblick erlauben.

2.1 Detailansicht der Kraftmessdose

Die Detailansicht zeigt einen Schnitt durch die induktive Kraftmessdose, wobei die strichlierte Linie die Rotationsachse darstellt. Ebenso ist in Abbildung 2 der primäre Eisenkreis durch den magnetischen Fluss Φ gekennzeichnet. Der Eisenkreis aus Gußeisen ist so konzipiert, dass dieser anhand seiner Geometrie eine möglichst flächenhomogene Struktur aufweist. Der Eisenkreis wird durch den Luftspalt δ unterbrochen. Je nach Last (F_G) ändert sich die Breite des Luftpaltes, wodurch eine messbare Änderung der Spulen-Induktivität erwartet wird. Am dielektrischen Gehäuse aus Kunststoff, ist eine nicht bewegliche Komponente des Eisenkreises montiert. Diese Komponente ist in Abbildung 2 (L-förmiges Objekt) erkennbar. Die ebenso starre Spulenwicklung umschließt den beweglichen Anker aus Gußeisen, und induziert den Fluss Φ .

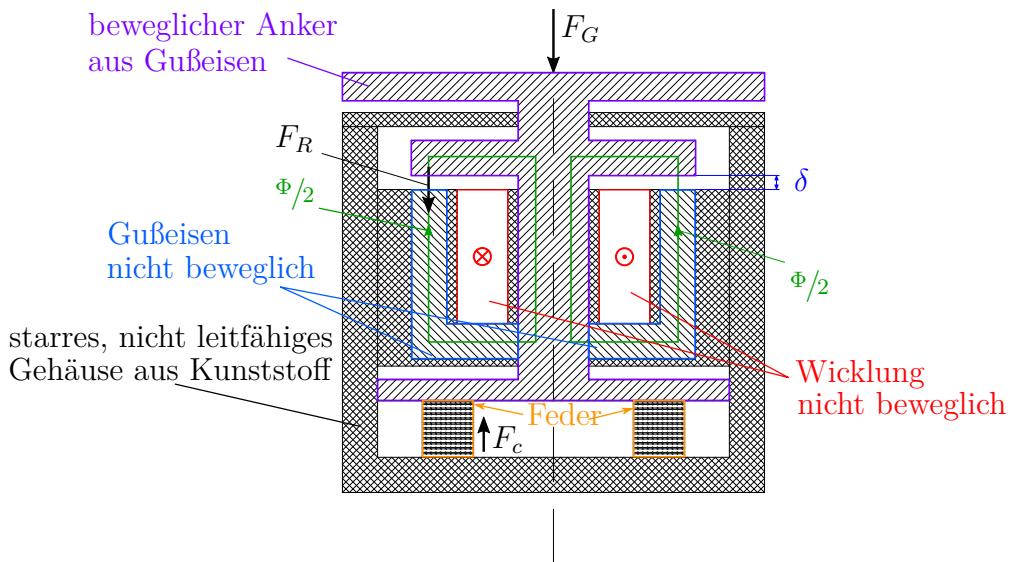


Abbildung 2: Querschnitt der Kraftmessdose

2.2 Numerische Optimierung der Eisenkreis-Geometrie

Um eine möglichst homogene Querschnittsfläche des Eisenkerns der Kraftmessdose zu erreichen, muss dessen Geometrie numerisch optimiert werden. Die numerische Optimierung erfolgt durch Vergleich der auf die Teilsegmente der mittleren Eisenkernlänge bezogenen Teilvolumina. Die Teilvolumina des in Abbildung 3 dargestellten Eisenkreises sind in den nachfolgenden Gleichungen 1 bis 10 aufgelistet. Jedes Teilvolumen der Kraftmessdose stellt einen separaten Rotationskörper dar. Damit die Gesamtstruktur eine möglichst homogene Querschnittsfläche aufweist, wurde diese in vier Teilsegmente unterteilt, von denen drei unabhängig sind. Die Volumina dieser Teilsegmente sollen äquivalent sein. Diese Äquivalenzbeziehungen sind in Abbildung 4 angeführt.

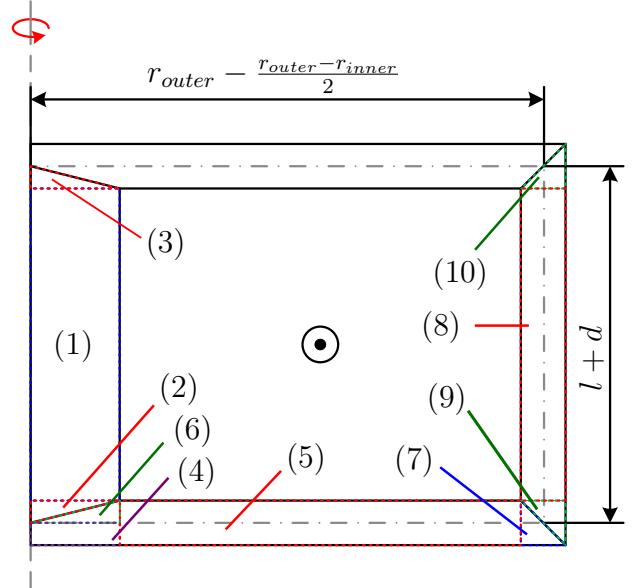


Abbildung 3: Viertschnitt der numerisch zu optimierenden Geometrie

2.2.1 Auflistung der Teilvolumina der Kraftmessdose

Die unten angeführten Gleichungen 1 bis 10 entsprechen den mittels runden Klammern gekennzeichneten Teilvolumina aus Abbildung 3.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{D}{2}} \int_0^{l+\delta+d} r dz dr d\varphi \quad (1) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{D}{2}} \int_0^{\frac{d \cdot r}{D}} r dz dr d\varphi \quad (6)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} \int_0^{\frac{z \cdot D}{d}} r dr dz d\varphi \quad (2) \quad \int_0^{2\pi} \int_0^d \int_{r_{inner}}^{r_{outer} - \frac{z \cdot (r_{outer} - r_{inner})}{d}} r dr dz d\varphi \quad (7)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{l+\delta}^{l+\delta+\frac{d}{2}} \int_0^{\frac{(l+\delta+\frac{d}{2}-z) \cdot D}{d}} r dr dz d\varphi \quad (3) \quad \int_0^{2\pi} \int_d^{l+d} \int_{r_{inner}}^{r_{outer}} r dr dz d\varphi \quad (8)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{D}{2}} \int_0^{\frac{d}{2}} r dz dr d\varphi \quad (4) \quad \int_0^{2\pi} \int_{r_{inner}}^{r_{outer}} \int_{\frac{d \cdot (r_{outer} - r)}{r_{outer} - r_{inner}}}^d r dz dr d\varphi \quad (9)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{\frac{D}{2}}^{r_{inner}} \int_0^d r dz dr d\varphi \quad (5) \quad \int_0^{2\pi} \int_{r_{inner}}^{r_{outer}} \int_l^{l+d+\frac{d \cdot (r_{outer} - r)}{r_{outer} - r_{inner}}} r dz dr d\varphi \quad (10)$$

2.2.2 Numerischer Optimierungsprozess

Die als Nebenbedingungen deklarierten Gleichungen aus Abbildung 4 sind jene Gleichungen, die den Geometrievergleich repräsentieren. Die rechte Seite der ersten Gleichung und die linke Seite der zweiten Gleichung des Nebenbedingungsblocks beschreibt die auf das Teilsegment ($l+d+\delta$) der mittleren Eisenkreislänge bezogene innere, vertikale Teilvolumen, welches durch die Gleichungen 1, 2 und 3 beschrieben wird. Dieses auf ein Teilsegment normierte Teilvolumen wird einerseits mit der linken Seite der ersten Gleichung des Nebenbedingungsblocks, welcher das auf das Teilsegment ($r_{outer} - \frac{r_{outer}-r_{inner}}{2}$) der mittleren Eisenkreislänge bezogene horizontale Teilvolumen (= Deckel-/Bodensegment des Eisenkreises) beschreibt, und andererseits mit der rechten Seite der zweiten Gleichung des Nebenbedingungsblocks, welcher das auf das Teilsegment ($l+d$) der mittleren Eisenkreislänge bezogene äußere, vertikale Teilvolumen beschreibt, verglichen.

Optimierung der Anker-Geometrie

Geforderte Parameter:

$$D := 16 \text{ mm} \quad \delta := 0 \text{ mm} \quad r_{inner} := 30 \text{ mm} \quad N := 1500 \quad A_{cu} := 0.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \quad t_{iso} := 0.5 \text{ mm}$$

$$\text{Durchmesser des Wicklungsdrähtes: } D_{cu} := \sqrt{\frac{A_{cu} \cdot 4}{\pi}} = 0.618 \text{ mm}$$

$$\text{Breite des Wicklungsraums: } b := r_{inner} - 2 \cdot t_{iso} - \frac{D}{2} = 21 \text{ mm}$$

$$\text{Anzahl der Wicklungen in } b\text{-Richtung: } N_b := \text{floor}\left(\frac{b}{D_{cu}}\right) = 33$$

$$\text{Anzahl der Wicklungen in } l\text{-Richtung: } N_l := \text{ceil}\left(\frac{N}{N_b}\right) = 46$$

$$\text{Höhe des Wicklungsraums: } l := N_l \cdot D_{cu} = 28.43 \text{ mm}$$

$$\text{Gesamtwicklungsanzahl: } N := N_b \cdot N_l = 1.518 \cdot 10^3$$

Numerischer Optimierungsprozess zur Approximation einer möglichst homogenen Querschnittsstruktur

Schaltwerte $d := 5 \text{ mm}$ $r_{outer} := 1.1 \cdot r_{inner}$	$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{D}{2}} \int_0^{\frac{d}{2}} r dz dr d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{D}{2}} \int_0^{\frac{d}{2}} r dz dr d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{r_{inner}}{2}} \int_0^d r dz dr d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{r_{outer}}{2}} \int_0^{\frac{d}{2}} r dz dr d\varphi - \frac{z \cdot (r_{outer} - r_{inner})}{d} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{r_{outer}}{2}} \int_0^{\frac{d}{2}} r dr dz d\varphi$	$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} \int_0^{\frac{z \cdot D}{2}} r dr dz d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{D}{2}} \int_0^{l+\delta+d} r dr dz d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{l+\delta+\frac{d}{2}}{2}} \int_0^{\frac{(l+\delta+\frac{d}{2}-z) \cdot D}{2}} r dr dz d\varphi$
Nebenbedingungen $r_{outer} - \frac{r_{outer} - r_{inner}}{2}$	$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} \int_0^{\frac{D}{2}} r dr dz d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{D}{2}} \int_0^{\frac{d}{2}} r dr dz d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{r_{inner}}{2}} \int_0^d r dr dz d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{r_{outer}}{2}} \int_0^d r dr dz d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{r_{outer}}{2}} \int_0^{\frac{d}{2}} r dr dz d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{r_{outer}}{2}} \int_0^{\frac{d}{2}} r dr dz d\varphi$	$= l + d + \delta$
Gleichungen $\begin{bmatrix} d \\ r_{outer} \end{bmatrix} := \text{find}(d, r_{outer}) = \begin{bmatrix} 2.028 \\ 31.002 \end{bmatrix} \text{ mm}$	$= l + d$	

Abbildung 4: Numerischer Optimierungsprozess mittels MathCAD®

2.3 Approximation der mittleren Eisenkreislänge und Querschnittsfläche

Abbildung 5 zeigt den Viertelschnitt der Geometrie, die zur Berechnung der mittleren Eisenkreislänge und -fläche von wichtiger Bedeutung ist. Die mittlere Eisenkreislänge l_{fe} (in Abbildung 5 grau, strichliert gekennzeichnet) stellt jenen Parameter dar, der zur Beschreibung der veränderlichen Querschnittsfläche $A_{fe}(l_{fe})$ benötigt wird. Dieser Parameter beschreibt jene Bahn, auf der die Visualisierung der Querschnittsfläche vorgenommen wird. Der in Abbildung 5 mit $l_{fe} = 0$ gekennzeichnete Punkt beschreibt den Startpunkt der Querschnittsflächenvisualisierung.

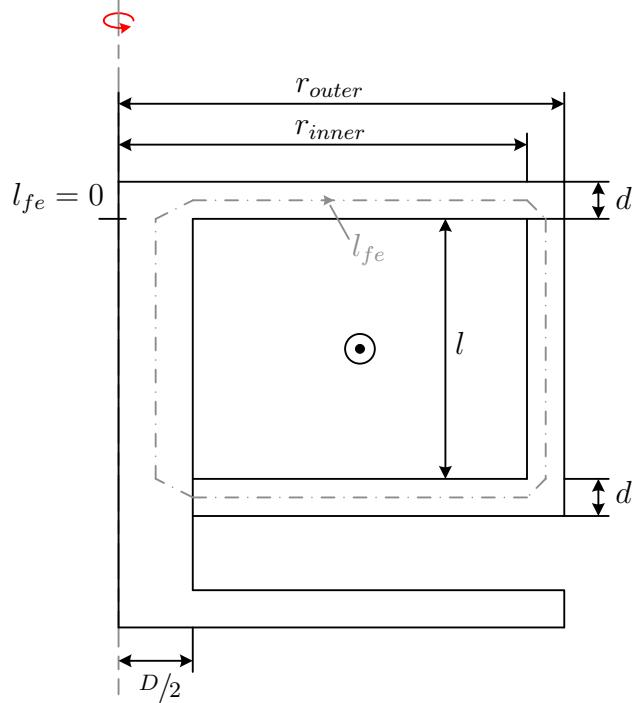


Abbildung 5: Viertelschnitt der Geometrie zur Berechnung der mittleren Eisenkreislänge und Eisenkreisfläche

2.3.1 Substitutionsterme

Die unten angeführten Gleichungen 11 bis 17 dienen lediglich als Substitutionsterme, um die in Abschnitt 2.3.2 bis 2.3.7 formulierten Gleichungen etwas kompakter darzustellen.

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2d}{D}\right) \quad (11) \quad l_3 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{r_{outer} - r_{inner}}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad (15)$$

$$\lambda = \arctan\left(\frac{d}{r_{outer} - r_{inner}}\right) \quad (12) \quad l_4 = \left(r_{inner} - \frac{D}{2}\right) \quad (16)$$

$$l_1 = \sqrt{\left(\frac{D}{8}\right)^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2} \quad (13) \quad \Delta r = r_{outer} - r_{inner} \quad (17)$$

$$l_2 = \sqrt{\left(\frac{D}{4}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad (14)$$

2.3.2 Gesamte mittlere Eisenkreislänge

Um die in Abschnitt 9 dargestellte Querschnittsflächenvisualisierung zu erzeugen, muss die mittlere Eisenkreislänge l_{fe} durchgestept werden. Dafür muss die gesamte mittlere Eisenkreislänge, die durch Gleichung 18 beschrieben wird, bekannt sein, um diese in äquidistante Segmente zu unterteilen.

$$l_{fe}^{max} = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{D}{4}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} + 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{r_{outer} - r_{inner}}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} + 2 \cdot \left(r_{inner} - \frac{D}{2}\right) + 2 \cdot l + \delta \quad (18)$$

2.3.3 Mathematische Beschreibung des inneren Übergangssegments

Wie aus Abbildung 1 ersichtlich ist, muss zur Beschreibung der mittleren Querschnittsfläche die gesamte Geometrie in Teilstrukturen unterteilt werden. Eine dieser Teile wird in Abbildung 6 gezeigt. Diese Zylindergeometrie, in Kombination mit dem schräg verlaufenden Teilsegment der mittleren Eisenkreislänge l_{fe} , beschreibt den Übergangsreich zwischen dem vertikalen, inneren Eisenkern, der die Induktivität durchsetzt und dem Deckel- bzw. Bodensegment, der im Eisenkreis eingeschlossenen Induktivität. Bei der Querschnittsfläche handelt es sich zu Beginn um eine Kreisfläche, die in die Mantelfläche eines Kegels, hernach in die Mantelfläche eines Kegelstumpfs und schlussendlich in die Mantelfläche eines Zylinders, übergeht.

Um nun den Übergangsbereich der Querschnittsfläche vom inneren, vertikalen Eisenkreis zum Deckelsegment zu beschreiben, wurde die mathematische Beschreibung aus Gleichung 19 herangezogen.

$$A_1(l_{fe}) = \begin{cases} \sqrt{\left(4 \cdot l_{fe} \cdot \sin(\alpha)\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2} \cdot \pi \cdot \frac{D}{2} & , l_{fe} \in \mathcal{D}_A^{(1)} \\ \pi \cdot \left(\frac{D}{2} + 4(l_{fe} - l_1) \cdot \cos(\alpha)\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{D}{2} - 4(l_{fe} - l_1) \cdot \cos(\alpha)\right)^2 + d^2} & , l_{fe} \in \mathcal{D}_A^{(2)} \end{cases} \quad (19)$$

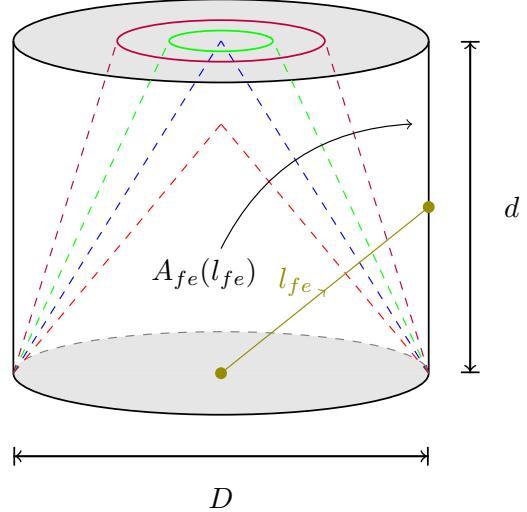


Abbildung 6: Übergangsstruktur zwischen inneren vertikalen und horizontalen Eisenkern

Sowie zur Beschreibung des Übergangsbereichs zwischen inneren, vertikalen Eisenkreis und Deckelsegment, existiert auch eine mathematische Beschreibung, die durch Gleichung 20 gegeben ist, für den Übergangsbereich zwischen Bodensegment und inneren, vertikalen Eisenkreis. Hierbei handelt es sich lediglich um die gespiegelte Formulierung der Gleichung 19.

$$A_7(l_{fe}) = \begin{cases} \pi \cdot \left(\frac{D}{2} + 4(l_1 - l_{fe}) \cdot \cos(\alpha) \right) \cdot \sqrt{\left(\frac{D}{2} - 4(l_1 - l_{fe}) \cdot \cos(\alpha) \right)^2 + d^2} & , l_{fe} \in \mathcal{D}_A^{(1)} \\ \sqrt{\left(4 \cdot (2l_1 - l_{fe}) \cdot \sin(\alpha) \right)^2 + \left(\frac{D}{2} \right)^2} \cdot \pi \cdot \frac{D}{2} & , l_{fe} \in \mathcal{D}_A^{(2)} \end{cases} \quad (20)$$

Die Beschreibungen aus Gleichung 19 und 20 sind erst dann vollständig, wenn diese auch einem entsprechenden Definitionsbereich zugeordnet bekommen. Diese Definitionsbereiche sind durch Gleichung 21 und 22 gegeben.

$$\mathcal{D}_A^{(1)} = \left\{ l_{fe} \in \mathbb{R}_0^+ \mid 0 \leq l_{fe} < l_1 \right\} \quad (21)$$

$$\mathcal{D}_A^{(2)} = \left\{ l_{fe} \in \mathbb{R}_0^+ \mid l_1 \leq l_{fe} \leq l_2 \right\} \quad (22)$$

2.3.4 Mathematische Beschreibung des Deckel- und Bodensegments

Zuvor wurde jene geometrische Struktur beschrieben, die den Übergangsbereich zwischen dem inneren, vertikalen Eisenkreis, der die Induktivität durchsetzt, und dem Deckel- bzw. Bodensegment beschrieben. In nebenstehender Abbildung 7 ist das Deckel- bzw. Bodensegment dargestellt. Umgehend kann bemerkt werden, dass die Querschnittsfläche, von innen ausgehend, immer größer wird. Um diesen Effekt zu unterdrücken, könnte man die Ober- und Unterseite des Deckel- bzw. Bodensegments konisch konzipieren. Damit geht einher, dass die Höhe des Deckels bzw. Bodens nach außen hin direkt proportional mit der mittleren Eisenkreislänge abnehmen müsste.

Die Querschnittsbeschreibung des Deckel- bzw. Bodensegments beschränkt sich auf eine Beschreibung der radiusabhängigen Mantelfläche eines Zylinders. Das Teilsegment der mittleren Eisenkreislänge ist hierbei repräsentativ für den Radius. Hierbei beschreibt Gleichung 23 die Querschnittsfläche, ausgehend vom kleineren zum größeren Radius.

$$A_2(l_{fe}) = 2 \cdot \pi \cdot l_{fe} \cdot d, \quad l_{fe} \in \mathcal{D}_A^{(3)} \quad (23)$$

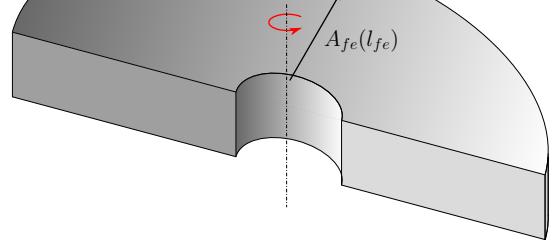


Abbildung 7: Deckel- und Bodensegment des Eisenkerns

Gleichung 24 stellt jene Querschnittsfläche dar, die sich ausgehend vom größeren zum kleineren Radius ergibt. Dabei handelt es sich lediglich um eine Spiegelung der Gleichung 23.

$$A_6(l_{fe}) = 2 \cdot \pi \cdot \left(r_{inner} + \frac{D}{2} - l_{fe} \right) \cdot d, \quad l_{fe} \in \mathcal{D}_A^{(3)} \quad (24)$$

Die Beschreibungen aus Gleichung 23 und 24 sind erst dann vollständig, wenn diese auch einem entsprechenden Definitionsbereich zugeordnet bekommen. Der Definitionsbereich ist durch Gleichung 25 gegeben.

$$\mathcal{D}_A^{(3)} = \left\{ l_{fe} \in \mathbb{R}_0^+ \mid \frac{D}{2} \leq l_{fe} \leq r_{inner} \right\} \quad (25)$$

2.3.5 Mathematische Beschreibung des äußeren Übergangssegments

Eine weitere geometrische Struktur, die eine wesentliche Bedeutung bei der Beschreibung der Querschnittsfläche spielt, ist jene die in Abbildung 8 dargestellt ist und den Übergangsbereich zwischen Deckel- bzw. Bodensegment und der äußeren, vertikalen Einrahmung der im Eisenkreis eingeschlossenen Induktivität darstellt. Bei der Flächenbeschreibung handelt es sich im Wesentlichen um eine Zylindermantelfläche, die in weiterer Folge in die Mantelfläche eines Kegelstumpfs und schlussendlich in die Fläche eines Kreisrings übergeht. Wiederum verändert sich die Querschnittsfläche aufgrund des Teils Segments der mittleren Eisenkreislänge l_{fe} . Bei dieser Ecke ist es nun nicht mehr trivial ein geometrisches Konstrukt zu finden, dass bei Variation der mittleren Eisenkreislänge eine konstante Querschnittsfläche bewahrt. Wichtig zu erwähnen ist, dass das hier und in Abschnitt 2.3.3 gezeigte Geradenstück nur eine Approximation des mittleren Feldlinienweges im Eckbereich darstellt.

Um nun den Übergangsbereich der Querschnittsfläche vom Deckelsegment zum äußeren, vertikalen Eisenkreis zu beschreiben, wurde die mathematische Beschreibung aus Gleichung 26 herangezogen.

$$A_3(l_{fe}) = \begin{cases} \pi \cdot (2r_{inner} + 4 \cdot l_{fe} \cdot \cos(\lambda)) \cdot \sqrt{(4 \cdot l_{fe} \cdot \cos(\lambda))^2 + d^2} & , l_{fe} \in \mathcal{D}_A^{(4)} \\ \pi \cdot (r_{outer} + r_{inner}) \cdot \sqrt{\Delta r^2 + (d - 4 \cdot (l_{fe} - l_3) \cdot \sin(\lambda))^2} & , l_{fe} \in \mathcal{D}_A^{(5)} \end{cases} \quad (26)$$

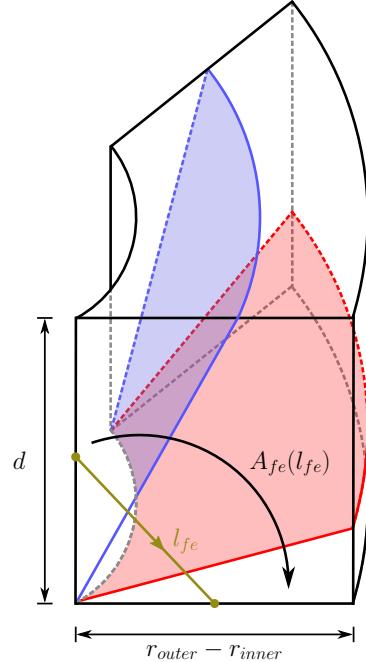


Abbildung 8: Übergangsstruktur zwischen horizontalen und äußeren vertikalen Eisenkern

Sowie zur Beschreibung des Übergangsbereichs zwischen Deckelsegment und äußeren, vertikalen Eisenkreis, existiert auch eine mathematische Beschreibung, die durch Gleichung 27 gegeben ist, für den Übergangsbereich zwischen äußeren, vertikalen Eisenkreis und Bodensegment. Dabei handelt es sich lediglich um die gespiegelte Formulierung der Gleichung 26.

$$A_5(l_{fe}) = \begin{cases} \pi \cdot (r_{outer} + r_{inner}) \cdot \sqrt{\Delta r^2 + (d - 4 \cdot (l_{fe} - l_3) \cdot \sin(\lambda))^2}, & l_{fe} \in \mathcal{D}_A^{(4)} \\ \pi \cdot (2r_{inner} + 4 \cdot l_{fe} \cdot \cos(\lambda)) \cdot \sqrt{(4 \cdot l_{fe} \cdot \cos(\lambda))^2 + d^2}, & l_{fe} \in \mathcal{D}_A^{(5)} \end{cases} \quad (27)$$

Die Beschreibungen aus Gleichung 26 und 27 sind erst dann vollständig, wenn diese auch einem entsprechenden Definitionsbereich zugeordnet bekommen. Diese Definitionsbereiche sind durch Gleichung 28 und 29 gegeben.

$$\mathcal{D}_A^{(4)} = \left\{ l_{fe} \in \mathbb{R}_0^+ \mid 0 \leq l_{fe} < l_3 \right\} \quad (28) \quad \mathcal{D}_A^{(5)} = \left\{ l_{fe} \in \mathbb{R}_0^+ \mid l_3 \leq l_{fe} \leq 2 \cdot l_3 \right\} \quad (29)$$

2.3.6 Mathematische Beschreibung des inneren und äußeren Zylinders

Die einfachste Geometrie ist einerseits der innere, vertikale Zylinder und andererseits der äußere, vertikale Hohlzylinder des Eisenkreises. Die mathematische Beschreibung der Querschnittsfläche des äußeren, vertikalen Hohlzylinders ist durch nachfolgende Gleichung 30 gegeben.

$$A_4(l_{fe}) = \pi \cdot (r_{outer}^2 - r_{inner}^2), \quad l_{fe} \in \mathcal{D}_A^{(6)} \quad (30)$$

Des Weiteren ist die mathematische Beschreibung der Querschnittsfläche des inneren, vertikalen Zylinders durch Gleichung 31 gegeben.

$$A_8(l_{fe}) = D^2 \cdot \frac{\pi}{4}, \quad l_{fe} \in \mathcal{D}_A^{(7)} \quad (31)$$

Die Beschreibungen aus Gleichung 30 und 31 sind erst dann vollständig, wenn diese auch einem entsprechenden Definitionsbereich zugeordnet bekommen. Diese Definitionsbereiche sind durch Gleichung 32 und 33 gegeben.

$$\mathcal{D}_A^{(6)} = \left\{ l_{fe} \in \mathbb{R}_0^+ \mid 0 \leq l_{fe} \leq l \right\} \quad (32) \quad \mathcal{D}_A^{(7)} = \left\{ l_{fe} \in \mathbb{R}_0^+ \mid 0 \leq l_{fe} \leq l + \delta \right\} \quad (33)$$

2.3.7 Mathematische Beschreibung der gesamten geometrischen Struktur

Durchläuft man nun die gesamte mittlere Eisenkreislänge, die zur Beschreibung der mittleren Querschnittsfläche der Geometrie herangezogen wird, müssen lediglich die einzelnen Querschnittsflächen gemäß der Definitionsbereiche entsprechend, zusammengesetzt werden, wodurch sich nachfolgende partielle Querschnittsflächenbeschreibung, wie in Gleichung 34 dargestellt, ergibt. Die einzelnen Querschnittsflächen sind durch die in den Abschnitten 2.3.3 bis 2.3.6 dargestellten Gleichungen gegeben.

$$A_{fe}(l_{fe}) = \begin{cases} A_1(l_{fe}) & , 0 \leq l_{fe} < l_2 \\ A_2(l_{fe} - l_2) & , l_2 \leq l_{fe} < l_2 + l_4 \\ A_3(l_{fe} - l_2 - l_4) & , l_2 + l_4 \leq l_{fe} < l_2 + 2l_3 + l_4 \\ A_4(l_{fe} - l_2 - 2l_3 - l_4) & , l_2 + 2l_3 + l_4 \leq l_{fe} < l + l_2 + 2l_3 + l_4 \\ A_5(l_{fe} - l - l_2 - 2l_3 - l_4) & , l + l_2 + 2l_3 + l_4 \leq l_{fe} < l + l_2 + 4l_3 + l_4 \\ A_6(l_{fe} - l - l_2 - 4l_3 - l_4) & , l + l_2 + 4l_3 + l_4 \leq l_{fe} < l + l_2 + 4l_3 + 2l_4 \\ A_7(l_{fe} - l - l_2 - 4l_3 - 2l_4) & , l + l_2 + 4l_3 + 2l_4 \leq l_{fe} < l + 2l_2 + 4l_3 + 2l_4 \\ A_8(l_{fe} - l - 2l_2 - 4l_3 - 2l_4) & , l + 2l_2 + 4l_3 + 2l_4 \leq l_{fe} < l_{fe}^{max} \end{cases} \quad (34)$$

Die Abbildung 9 zeigt den Verlauf der halben Querschnittsfläche durch den Eisenkreis bei geschlossenem Luftspalt. Zur Berechnung der Querschnittsfläche wird die optimierte Geometrie nach Abschnitt 2.3.3 bis 2.3.6 verwendet. Die Darstellung der Querschnittsfläche bei $l_{fe} = 0$ beginnt am oberen Ende des zylindrischen Ankers und geht dabei in das kreisförmige Deckelsegment über. Aus den Berechnungen ergibt sich eine mittlere Querschnittsfläche $\bar{A}_{fe} = 2.164 \cdot 10^{-4} m^2$ und eine mittlere Eisenkreislänge $\bar{l}_{fe} = 0.1114 m = 111.4 mm$.

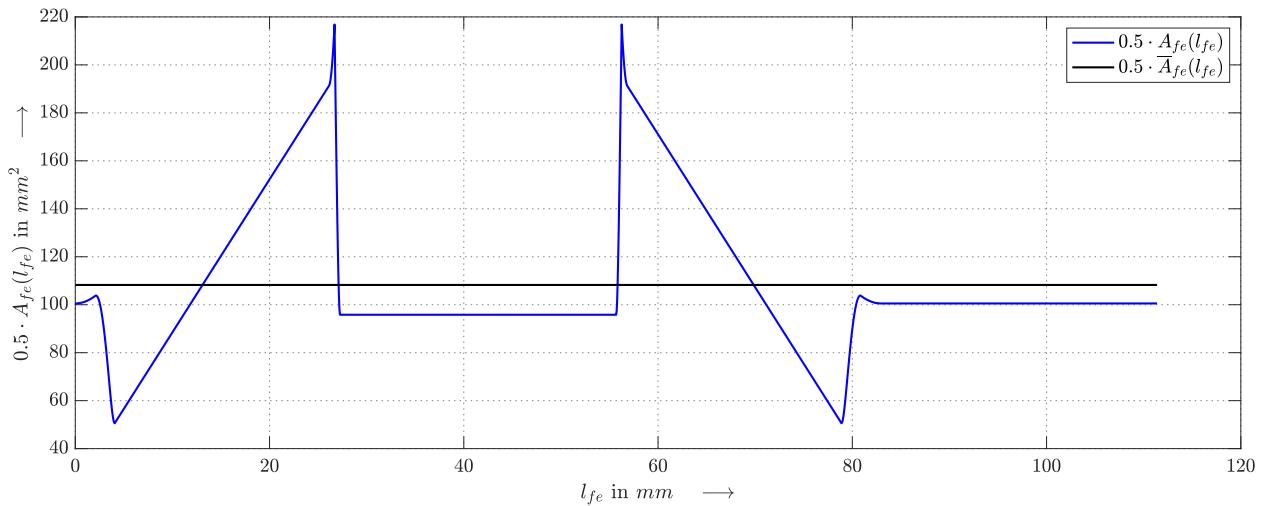


Abbildung 9: Visualisierung der mittleren Querschnittsflächen

2.4 Mechanische Fertigungsskizze

Abbildung 10 zeigt den Schnitt durch die induktive Kraftmessdose inklusive der Bezeichnung mittels Variablenbezeichnung. Die den Variablen entsprechenden Werte sind in nachfolgender Tabelle 1 mit dazugehörigen Bezeichnungen angeführt. Die neben angeführte Fertigungsskizze zeigt deutlich wie die Proportionen des Eisenkreises sind, die benötigt werden um eine möglichst homogene magnetische Flussdichte im gesamten Eisenkreis zu erzielen. Die dafür notwendigen numerischen Optimierungen sind in Abschnitt 2.2 angeführt.

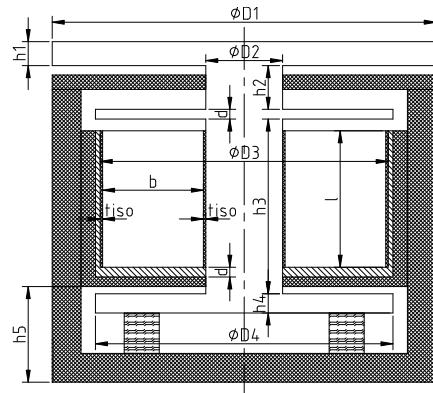


Abbildung 10: Querschnitt der Kraftmessdose mit Variablenbezeichnung

Tabelle 1: Bemaßungs-Bezeichnungen

Bezeichnung	Wert	Beschreibung
D_1	80 mm	Durchmesser des Deckels, auf den die zu bestimmende Kraft wirkt
D_2	16 mm	Durchmesser des Eisenkerns, der die Spule durchsetzt
D_3	60 mm	Innendurchmesser des Eisenkreises
D_4	82 mm	Außendurchmesser des Eisenkreises
h_1	5 mm	Höhe des Deckels, auf den die zu bestimmende Kraft wirkt
h_2	9.1 mm	Höhe zwischen Deckel und der Scheibe, die den Eisenkreis schließt
h_3	36.4 mm	Höhe des beweglichen Spulen-Eisenkerns
h_4	4 mm	Höhe der Eisenkreis-Bodenplatte
h_5	19.92 mm	Höhe des unteren Ankeranschlages
l	28.43 mm	Höhe des Wicklungskörpers
b	21 mm	Breite des Wicklungskörpers
d	2.03 mm	Numerisch optimierte Dicke der Scheiben, die den Eisenkreis von oben und unten schließt
t_{iso}	0.5 mm	Dicke der Isolierung

3 Modellbildung

In den folgenden Unterpunkten soll unter Zuhilfenahme der Lagrange-Methode ein Zustandsraummodell zur Beschreibung des elektromechanischen Vorgangs abgeleitet werden. Damit man mittels der Lagrange-Methode zu einem Zustandsraummodell gelangt, muss zuerst geklärt werden, wie die Lagrange-Methode funktioniert und ob sie auf die gegebene Problemstellung anwendbar ist. Dazu wird im nachfolgenden Unterpunkt 3.1 das Prinzip der Methode und die dazugehörigen Anwendbarkeitsbedingungen erläutert.

3.1 Die Lagrange-Methode

Die Lagrange-Methode ist ein besonders eleganter mathematischer Formalismus, der sehr häufig zur Beschreibung von dynamischen Vorgängen herangezogen wird, sofern diese die Anwendbarkeitsbedingungen erfüllen. Der Hauptvorteil des Lagrange-Formalismuses liegt darin, dass die Dynamik eines Systems, entlang einer Bewegungsrichtung (= generalisierte Koordinate), durch eine einzige skalare Funktion, nämlich der Euler-Lagrange Funktion \mathcal{L} beschrieben werden kann. Die Euler-Lagrange Differentialgleichung oder auch Lagrange-Gleichung zweiter Art lautet wie folgt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j \quad \text{für } j = 1, \dots, \# \mathcal{DOF} \text{ und } n = \# \mathcal{DOF} \quad (35)$$

Wobei \mathcal{L} der Euler-Lagrange Funktion entspricht, welche gleich der Energiedifferenz zwischen kinetischer und potentieller Energie ist.

$$\mathcal{L} = T - V \quad (36)$$

3.1.1 Generalisierte Koordinaten

Als generalisierte Koordinaten bezeichnet man jenen minimalisierten Koordinatensatz, mit dem es möglich ist, den gesamten Bewegungsvorgang bzw. allgemeinen physikalischen Vorgang, vollständig zu beschreiben. Das Wort generalisiert heißt in diesem Kontext, dass die Koordinaten nicht kartesischer Natur sein müssen.

Generalisierte Koordinaten

- sind nicht notwendigerweise kartesischer Natur.
- sind nicht notwendigerweise in Ruhe.
- müssen voneinander unabhängig sein.
- müssen vollständig sein.
- bilden ein holonomes System.

Die auf Seite 12 erwähnten Eigenschaften, die eine generalisierte Koordinate erfüllen muss, sind nachfolgend als Definitionen (siehe Definition 1 bis 3) dargestellt.

Defintion 1

Unabhängigkeit:

Man bezeichnet eine Koordinate als unabhängig, wenn es möglich ist, alle bis auf eine einzige Koordinate zu fixieren, und das System trotz der Einschränkungen in Richtung der freien Koordinate, seinen ursprünglichen uneingeschränkten Bewegungsvorgang vollziehen kann.

Defintion 2

Vollständigkeit:

Man bezeichnet eine Koordinate als vollständig, wenn es möglich ist jede Position, welche das System einnehmen kann, zu jedem Zeitpunkt zu lokalisieren.

Defintion 3

Holonomie:

Man bezeichnet eine Koordinate als holonom, wenn die Anzahl der erforderlichen Freiheitsgrade (degrees of freedom; DÖF) gleich der Anzahl der notwendigen Koordinaten ist, die den gesamten Bewegungsvorgang beschreiben.

$$\# \text{DÖF} = \# \text{ coordinates needed to describe motion} \quad (37)$$

3.1.2 Generalisierte Kräfte

Als generalisierte Kräfte $Q_j = Q_j^{NC}$ bezeichnet man die nicht-konservativen (externe) Kräfte des Systems. Also jene Kräfte, die keine Unabhängigkeit bezüglich der Wahl der gewählten Bahn aufweisen. Jene Kräfte bei denen eine Abhängigkeit bezüglich der gewählten Bahn besteht, implizieren zugleich, dass diese auch kein Potential besitzen. Die Existenz eines Potentials impliziert Wegunabhängigkeit. Für wegunabhängige Kräfte, also konservative Kräfte, bedeutet dies im Umkehrschluss, dass das Wirkungsintegral über die Kraft entlang eines geschlossenen Weges Null ergibt und diese ein Potential V besitzen.

Beispiel (konservative und nicht-konservative Kraft):

Eine nicht-konservative, also vom Weg abhängige Kraft wäre die Reibungskraft $F_\mu = \mu \cdot F_N$. Die Reibungskraft ist immer der einwirkenden Kraft (= Bewegungsrichtung) entgegengesetzt $F = -F_\mu$. Würde man einen massebehafteten Block, bei gegebener Haftreibung μ , einmal um die Länge l nach rechts und danach wieder in die ursprüngliche Lage bewegen, dann würde dies für die verrichtete Arbeit folgendes bedeuten:

$$W = W_{0 \rightarrow l} + W_{0 \leftarrow l} = \int_0^l -F_\mu dx + \int_l^0 F_\mu dx = -2 \cdot \int_0^l F_\mu dx \neq 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad Q_x = -Q_{-x} = -F_\mu + F$$

Als Pondon zur Reibungskraft kann man die Federkraft F_c sehen. Diese ist eine konservative Kraft und somit muss das Wirkungsintegral über einen geschlossenen Weg Null ergeben. Würde man eine Feder aus der Ruhelage um die Länge l in positive x-Richtung auslenken ($F = -F_c = -c \cdot x$) und danach wieder in die ursprüngliche Position zurückbringen ($-F = F_c = c \cdot x$), so ergibt sich für die verrichtete Arbeit folgendes:

$$W = W_{0 \rightarrow l} + W_{0 \leftarrow l} = \int_0^l c \cdot x \, dx + \int_l^0 c \cdot x \, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad F + F_c = 0$$

Defintion 4

Virtuelle Verschiebung:

Unter einer virtuellen Verschiebung $\delta \vec{r}_i = \partial \vec{r}_i$ wollen wir eine gedachte, bei festgehaltener Zeit ausgeführte, mit den kinematischen Bedingungen verträgliche, hinreichend kleine (differentielle) Verschiebung verstehen, unter der sich die auf den Körper einwirkenden Kräfte nicht ändern. Mathematisch stellen die virtuellen Verschiebungen eine Variation des Verschiebungszustandes eines Körpers bei festgehaltener Zeit dar. [1]

$$\partial \mathcal{W}_j^{NC} = Q_j^{NC} \cdot \partial q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{NC} \cdot \partial \vec{r}_i (q_1, \dots, q_n, t) \quad (38)$$

Durch Umstellen der in Definition 4 dargestellten Gleichung ist es möglich einen Ausdruck für die nicht-konservativen Kräfte Q_j zu bekommen.

$$Q_j^{NC} = \frac{\partial \mathcal{W}_j^{NC}}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{NC} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (39)$$

Die dissipativen Kräfte des Systems (also jene, die dem System Energie entziehen; z.B. mechanische Reibung, elektrischer Widerstand, usw.), können entweder direkt in den generalisierten Kräften oder in den sogenannten Dissipationsfunktionen P berücksichtigt werden.

$$P_j = \frac{1}{\text{degree} \{ f(\dot{q}_j) \} + 1} \cdot (f(\dot{q}_j))^{(\text{degree} \{ f(\dot{q}_j) \} + 1)} \quad (40)$$

Die negativen partiellen Ableitungen der Dissipationsfunktion nach den generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_j ergeben die generalisierten Kräfte Q_j der dissipativen Kräfte:

$$Q_j = -\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j} \quad (41)$$

3.1.3 Potentielle und kinetische Energie

Defintion 5

Potentielle Energie V :

Kräfte, die sich aus einem Potential V ableiten lassen, werden auch als konservative Kräfte \vec{F}^C bezeichnet. Die von einer konservativen Kraft geleistete Arbeit ist $W = -\Delta V$, wobei ΔV in diesem Kontext die potentielle Energie darstellt, welche aufgrund von \vec{F}^C auftritt. Das negative Vorzeichen kommt aus der Konvention, dass die gegen ein Kraftfeld geleistete Arbeit die potentielle Energie erhöht und vice versa.

$$\Delta V = -W = V(P_2) - V(P_1) = \int_{P_0}^{P_2} \vec{F}^C \cdot d\vec{r} - \int_{P_0}^{P_1} \vec{F}^C \cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}^C \cdot d\vec{r} = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (42)$$

Defintion 6

Kinetische Energie T :

Als kinetische Energie T bezeichnet man die Arbeit, die geleistet werden muss, um ein massebehaftetes Objekt innerhalb eines infinitesimalen Zeitintervalls dt um ein infinitesimales Wegstück dx zu verschieben.

$$T = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int \left[\frac{dm}{dt} \vec{v} + \frac{d\vec{v}}{dt} m \right] \cdot \vec{v} dt \quad (43)$$

$$\stackrel{m=\text{const.}}{=} \frac{m \cdot |\vec{v}|^2}{2}$$

3.2 Das Dynamische System

Nach all der Theorie zur Lagrange-Methode wollen wir uns wieder unserer elektromechanischen Problemstellung widmen. Um die Kraftmessdose aus Abbildung 2 zu beschreiben, wurde diese in ein elektrisches und mechanisches Modell, wie in Abbildung 11 und 12 dargestellt, aufgespalten. Die Kopplung zwischen den beiden Teilsystemen ist über die von der Position z und über die vom Strom $i(t)$ abhängige Induktivität $L(i, z)$ gegeben.

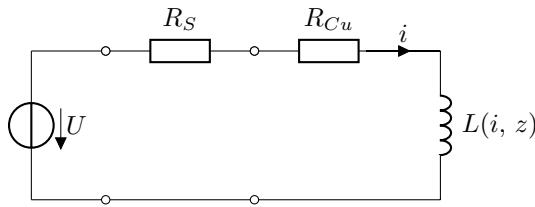


Abbildung 11: elektrisches Modell

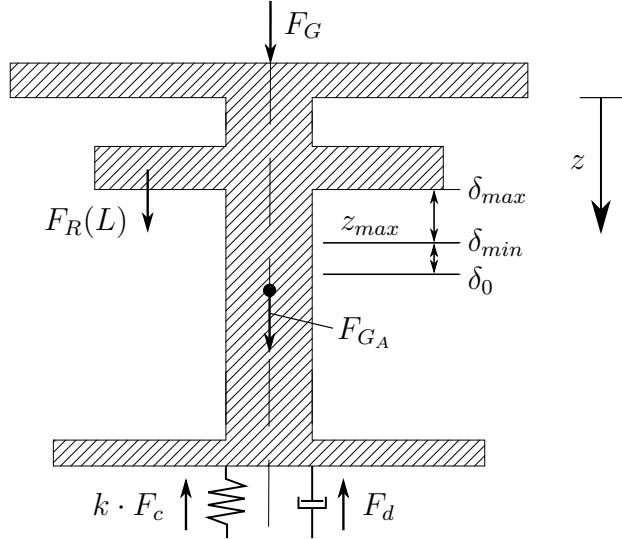


Abbildung 12: mechanisches Modell

3.2.1 Identifizierung der generalisierten Koordinaten

Als Erstes müssen die generalisierten Koordinaten für das in Abbildung 11 und 12 definierte Modell aufgestellt werden. Widmen wir uns als Erstes dem elektrischen Modell. Um hierfür passende generalisierte Koordinaten zu finden, sehen wir uns erneut die Definition der virtuellen Verschiebung an (siehe Definition 4). Die virtuelle Arbeit ist das Produkt aus der nicht konservativen (externen) Kraft Q_j und der virtuellen Verschiebung ∂q_j . Dadurch, dass unserer elektrischen Schaltung eine Spannung U (extern) eingeprägt wird, wird diese auch unsere treibende Kraft im System sein. Mit dieser Erkenntnis sind bereits $2/3$ der Gleichung festgelegt. Die einzige mögliche virtuelle Verschiebung, welche die physikalischen Dimensionen der Gleichung nicht verletzt, ist die Ladung q . Dadurch, dass die Energie im System nicht unendlich groß werden kann, ist die Ladung definitiv eine stetige Größe. Der in das System eingeprägte Strom lässt sich anhand der Ladung folgendermaßen beschreiben:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \dot{q} \quad (44)$$

Somit muss die Ladung stetig-differenzierbar sein, was aufgrund der endlichen Energie bereits gegeben ist. Eine weitere Beziehung, die das elektrische System liefert, ist der Zusammenhang zwischen Flussverkettung $\phi = L \cdot i$, Spannung u_L an der Induktivität L und Strom i mit dem die Induktivität durchsetzt wird.

$$u_L(t) = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d(L(i, z) \cdot i)}{dt} = \frac{di}{dt} \cdot L(i, z) + \frac{dL(i, z)}{dt} \cdot i = \frac{d\dot{q}}{dt} \cdot L(\dot{q}, z) + \frac{dL(\dot{q}, z)}{dt} \cdot \dot{q} \quad (45)$$

Wiederum kann die Energie in der Induktivität nicht unendlich groß werden. D.h. der Strom i muss stetig-differenzierbar sein. Dadurch, dass die Ladung stetig-differenzierbar ist, ist zugleich auch der Strom stetig-differenzierbar. Zusammenfassend kann man sagen, dass die Ladung q als unabhängige, vollständige und holonome Größe des Systems identifiziert wurde (siehe Definition 1 bis 3).

$$q_1 = q \quad (46)$$

Nun wollen wir uns auf die Suche nach geeigneten generalisierten Koordinaten für das mechanische Teilsystem machen. Dadurch, dass das System aufgrund seiner Struktur auf eine Bewegungsrichtung (die z -Richtung) eingeschränkt ist, ergibt sich für das System ein Freiheitsgrad ($n = \# \mathcal{DOF} = 1$). Somit ist bereits Definition 3 bezüglich der Holonomie des Systems erfüllt. Aufgrund der Tatsache, dass das System nur einen Bewegungsfreiheitsgrad aufweist, ist auch die Unabhängigkeit und Vollständigkeit der Koordinate (siehe Definition 1 bis 2) gegeben.

$$q_2 = z \quad (47)$$

3.2.2 Aufstellen der Energiebeziehungen

Einen Teil der Lagrange Gleichung, nämlich die generalisierten Koordinaten, wurden erfolgreich definiert. Nun fehlt noch der Kern der Gleichung, welcher sich aus der Euler-Lagrange Funktion zusammensetzt. Wie bereits aus Gleichung 36 ersichtlich ist, setzt sich die Euler-Lagrange Funktion \mathcal{L} aus der Energiedifferenz zwischen kinetischer T und potentieller Energie V zusammen.

Widmen wir uns zuerst der kinetischen Energie. Diese ergibt sich aus Superposition der elektrischen T_{el} und mechanischen T_{mech} kinetischen Teilenergie. Dadurch, dass kinetische Energie aufgrund von bewegter Massen auftritt und es keinerlei rotatorische Bewegungen im mechanischen Teilsystem (Abbildung 12) gibt, ist diese für das mechanische Teilsystem recht schnell gefunden. Das einzige massebehaftete, bewegliche Objekt im System ist der Anker. Daraus ergibt sich für das mechanische System folgende kinetische Teilenergie T_{mech} :

$$T_{mech} \stackrel{(43)}{=} \frac{m \cdot \dot{q}_2^2}{2} \quad (48)$$

Nun wollen wir herausfinden, ob das elektrische Teilsystem auch eine kinetische Energie T_{el} aufweist. Somit muss ein Ausdruck gefunden werden, der in Analogie mit der Bewegung von Massen steht. Wenn man sich die Definition des elektrischen Stroms i , welcher aufgrund von bewegter Ladung q entsteht, vor Augen führt, bemerkt man sofort, dass man auf einen

Ausdruck gestoßen ist, welcher einen kinetischen Energiebeitrag liefern wird. Bewegte Elektronen e^- weisen nämlich auch Massen m_e auf. Daraus ergibt sich für das elektrische System folgende kinetische Teilenergie T_{el} :

$$\begin{aligned}
 T_{el} &= \int_0^t u_L \cdot i \, dt \stackrel{(45)}{=} \int_0^t \left[\frac{di}{dt} \cdot L(i, z) + \frac{dL(i, z)}{dt} \cdot i \right] \cdot i \, dt \\
 &= \int_0^t \left[i \cdot \frac{di}{dt} \cdot L(i, z) + \frac{dL(i, z)}{dt} \cdot i^2 \right] \, dt = \int_0^t i \cdot \frac{di}{dt} \cdot L(i, z) \, dt + \int_0^t \frac{dL(i, z)}{dt} \cdot i^2 \, dt \\
 &= \frac{i^2}{2} \cdot L(i, z) - \int_0^t \frac{i^2}{2} \cdot \frac{dL(i, z)}{dt} \, dt + \int_0^t i^2 \cdot \frac{dL(i, z)}{dt} \, dt \\
 &= \frac{i^2}{2} \cdot L(i, z) + \int_0^t \frac{i^2}{2} \cdot \frac{dL(i, z)}{dt} \, dt = \frac{\dot{q}_1^2}{2} \cdot L(\dot{q}_1, q_2) + \int_0^t \frac{\dot{q}_1^2}{2} \cdot \frac{dL(\dot{q}_1, q_2)}{dt} \, dt \quad (49)
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die gesamte kinetische Energie T zu folgendem Ausdruck:

$$T = T_{mech} + T_{el} = \frac{m \cdot \dot{q}_2^2}{2} + \frac{\dot{q}_1^2}{2} \cdot L(\dot{q}_1, q_2) + \int_0^t \frac{\dot{q}_1^2}{2} \cdot \frac{dL(\dot{q}_1, q_2)}{dt} \, dt \quad (50)$$

Nachdem nun die kinetische Energie erfolgreich bestimmt wurde, fehlt nun nur noch die potentielle Energie des Systems. Diese ergibt sich wiederum aus Superposition der elektrischen V_{el} und mechanischen V_{mech} potentiellen Teilenergie. Für das mechanische Teilsystem (siehe Abbildung 12) ergibt sich einerseits eine potentielle Energie aufgrund der Gewichtskraft F_{GA} des Ankers und andererseits eine potentielle Energie aufgrund der Federkraft $F_c = -F = c \cdot z$, welche stets versucht der Ursache der Stauchung entgegenzuwirken.

$$\begin{aligned}
 V_{mech} &\stackrel{(42)}{=} \underbrace{- \int_{\hat{z}=0}^z m \cdot g \cdot \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \, d\hat{z}}_{-\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}} - \underbrace{\int -\hat{c} \cdot \hat{z} \cdot \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \, d\hat{z}}_{-\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}} = - \int_{\hat{z}=0}^z m \cdot g \, d\hat{z} + \int_{\hat{z}=0}^z \hat{c} \cdot \hat{z} \, d\hat{z} \quad (51) \\
 &= -m \cdot g \cdot z + \frac{\hat{c} \cdot z^2}{2} = -m \cdot g \cdot q_2 + \frac{\hat{c} \cdot q_2^2}{2} \Big|_{\hat{c}=k \cdot c} = -m \cdot g \cdot q_2 + \frac{k \cdot c \cdot q_2^2}{2}
 \end{aligned}$$

Nun fehlt noch die potentielle Energie des elektrischen Modells (siehe Abbildung 11). Wie aus der allgemeinen Netzwerktheorie konzentrierter Bauteile bekannt ist, gibt es einerseits Induktivitäten und andererseits Kapazitäten, die Energie speichern können. Die Induktivität wurde bereits der kinetischen Energie zugeordnet. Demzufolge muss es sich also bei der in der Kapazität gespeicherten Energie um potentielle Energie handeln. Dies steht auch im Einklang mit der Bauteilbeziehung des Kondensators $i_C = C \frac{du}{dt}$. Folglich ergibt sich, dass die potentielle Energie des gegebenen elektrischen Modells Null ist.

$$V_{el} = 0 \quad (52)$$

Damit ergibt sich die gesamte potentielle Energie V zu folgendem Ausdruck:

$$V = V_{mech} + V_{el} = -m \cdot g \cdot q_2 + \frac{k \cdot c \cdot q_2^2}{2} + 0 \quad (53)$$

Durch Definition der potentiellen und der kinetischen Energie wurden nun alle unbekannten Terme der Euler-Lagrange Funktion \mathcal{L} (linke Seite der Euler-Lagrange Differentialgleichung) beseitigt. Somit erhält man nachfolgenden Ausdruck für \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m \cdot \dot{q}_2^2}{2} + \frac{\dot{q}_1^2}{2} \cdot L(\dot{q}_1, q_2) + \int_0^t \frac{\dot{q}_1^2}{2} \cdot \frac{dL(\dot{q}_1, q_2)}{dt} dt - \left(-m \cdot g \cdot q_2 + \frac{k \cdot c \cdot q_2^2}{2} \right) \quad (54)$$

Die linke Seite der Euler-Lagrange Differentialgleichung (siehe Gleichung 35) ist somit festgelegt und es fehlt nun nur noch die rechte Seite der Differentialgleichung. Dafür benötigen wir die nicht-konservativen Kräfte des Systems. Widmen wir uns zu Beginn dem mechanischen Modell. Als nicht-konservative Kraft tritt die Kraft $F_d = \beta \cdot \dot{z}$ aufgrund der Dämpfung β auf. F_d ist definitiv nicht-konservativ, da bei Bewegung des Ankers jeweils in positiver und negativer z -Richtung aufgrund der Dämpfung eine zusätzliche Kraft aufgewandt werden muss. Diese zusätzlich benötigte Kraft kann man als Verluste interpretieren. Somit ergibt sich aufgrund der Dämpfung folgende generalisierte Kraft Q_2 :

$$Q_2^{(1)} = \frac{\partial \mathcal{W}_2^{(1)}}{\partial q_2} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{NC} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} = F_d \cdot (-\vec{e}_z) \cdot \underbrace{\frac{\partial (q_2 \cdot \vec{e}_z)}{\partial q_2}}_{=\vec{e}_z} = -\underbrace{F_d}_{\beta \cdot \dot{z}} = -\beta \cdot \dot{q}_2 \quad (55)$$

Alternativ könnte man Q_2 auch über eine Dissipationsfunktion P_2 ansetzen, um auf dasselbe Ergebnis zu kommen. Für die extern einwirkende Gewichtskraft kann man das gleiche Procedere anwenden.

$$Q_2^{(2)} = \frac{\partial \mathcal{W}_2^{(2)}}{\partial q_2} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{NC} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} = F_G \cdot \vec{e}_z \cdot \frac{\partial (z \cdot \vec{e}_z)}{\partial q_2} = F_G \cdot \vec{e}_z \cdot \underbrace{\frac{\partial (z \cdot \vec{e}_z)}{\partial z}}_{=\vec{e}_z} = F_G \quad (56)$$

Für die Summe aller generalisierten Kräfte in q_2 -Richtung ergibt sich somit folgendes:

$$Q_2 = Q_2^{(1)} + Q_2^{(2)} = -\beta \cdot \dot{q}_2 + F_G \quad (57)$$

Von den in Abbildung 11 und 12 abgebildeten Variablen ist nun nur noch eine vorhanden, die bis jetzt noch nicht berücksichtigt wurde, nämlich der ohm'sche Widerstand R . Dadurch, dass das Wort Widerstand bereits auf Verluste hinweist und man in elektrischen Schaltungen ganz selten von Kräften spricht, macht es Sinn die generalisierte Kraft über die Dissipationsfunktion P_j abzuleiten. Was nun fehlt ist eine Gleichung, die die generalisierte Koordinate q_1 mit dem ohm'schen Widerstand verbindet. Die Gleichung, die diesen Zusammenhang liefert, ist das Bauteilgesetz am ohm'schen Widerstand.

$$u_R = R \cdot i = R \cdot \dot{q}_1 = f(\dot{q}_1) \quad (58)$$

Damit ergibt sich für die Dissipationsfunktion P_1 nach Gleichung 40 folgender Ausdruck:

$$P_1 = \frac{1}{\text{degree}\{f(\dot{q}_1)\} + 1} \cdot (f(\dot{q}_1))^{(\text{degree}\{f(\dot{q}_1)\}+1)} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot \dot{q}_1^2 \quad (59)$$

Daraus kann nun mittels Gleichung 41 die generalisierte Kraft Q_1 bezüglich der Koordinate q_1 berechnet werden.

$$Q_1^{(1)} = -\frac{\partial P_1}{\partial \dot{q}_1} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\frac{1}{2} \cdot R \cdot \dot{q}_1^2 \right) = -R \cdot \dot{q}_1 = -u_R \quad (60)$$

Wie auch beim mechanischen Teilsystem, müssen beim elektrischen die externen Kräfte (= Spannungen) auch in den generalisierten Kräften berücksichtigt werden. Betrachtet man nun wieder die Definition der virtuellen Verschiebung (siehe Definition 4), dann erkennt man schon aufgrund der physikalischen Dimensionen, dass die externe Spannung U als generalisierte Kraft wirken muss.

$$Q_1^{(2)} = \frac{\partial \mathcal{W}_1^{(2)}}{\partial q_1} = U \quad (61)$$

Für die Summe aller generalisierten Kräfte in q_1 -Richtung ergibt sich somit folgendes:

$$Q_1 = Q_1^{(1)} + Q_1^{(2)} = -R \cdot \dot{q}_1 + U \quad (62)$$

Vergleicht man Gleichung 62 mit der Schaltungstruktur aus Abbildung 11, so erkennt man, dass die generalisierte Kraft Q_1 die Maschengleichung (Kirchhoff 2) erfüllt.

Mit der Definition der generalisierten Kräfte Q_j sind nun alle Terme (linke und rechte Seite) der Euler-Lagrange Differentialgleichung (siehe Gleichung 35) bekannt.

$$q_1 : \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -R \cdot \dot{q}_1 + U \quad (63)$$

$$q_2 : \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = -\beta \cdot \dot{q}_2 + F_G \quad (64)$$

3.2.3 Die Dynamik des elektromechanischen Systems

Um nun die Gleichungen bezüglich der einzelnen generalisierten Koordinaten q_j zu erhalten, lassen wir auf Gleichung 54 die Operatoren aus Gleichung 63 und 64 wirken.

Zu Beginn widmen wir uns der Gleichung der ersten generalisierten Koordinate q_1 . Dazu wird Gleichung 54 Schritt für Schritt in Gleichung 63 eingesetzt und die einzelnen Terme aufgelöst. Als Erstes wurde die partielle Ableitung bezüglich der Zeitableitung der ersten generalisierten Koordinate berechnet, wie in Gleichung 65 dargestellt ist.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = L(\dot{q}_1, q_2) \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial \dot{q}_1} \cdot \frac{\dot{q}_1^2}{2} + \int_0^t \left[\dot{q}_1 \cdot \frac{dL(\dot{q}_1, q_2)}{dt} + \frac{\dot{q}_1^2}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial \dot{q}_1} \right) \right] dt \quad (65)$$

In weiterer Folge wird die totale Zeitableitung auf die zuvor berechnete partielle Ableitung von Gleichung 65 angewandt, wodurch sich folgender Ausdruck ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) &= \frac{dL(\dot{q}_1, q_2)}{dt} \cdot \dot{q}_1 + L(\dot{q}_1, q_2) \cdot \ddot{q}_1 + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial \dot{q}_1} \right) \cdot \frac{\dot{q}_1^2}{2} + \frac{\partial L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial \dot{q}_1} \cdot \dot{q}_1 \cdot \ddot{q}_1 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{dL(\dot{q}_1, q_2)}{dt} \cdot \dot{q}_1 + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial \dot{q}_1} \right) \cdot \frac{\dot{q}_1^2}{2} \\ &= 2\dot{q}_1 \cdot \frac{dL(\dot{q}_1, q_2)}{dt} + L(\dot{q}_1, q_2) \cdot \ddot{q}_1 + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial \dot{q}_1} \right) \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{\partial L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial \dot{q}_1} \cdot \dot{q}_1 \cdot \ddot{q}_1 \quad (66) \end{aligned}$$

Nachdem das totale Zeit-Differential von der partiellen Ableitung der Lagrange-Funktion bezüglich der Zeitableitung der ersten generalisierten Koordinate gebildet wurde, widmen wir uns dem unbehandelten, verbleibenden Term von Gleichung 63. Dieser beschreibt nun die partielle Ableitung der Lagrange-Funktion bezüglich der ersten generalisierten Koordinate und ergibt sich in unserem Beispiel zu

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = 0. \quad (67)$$

Analog zur ersten generalisierten Koordinate q_1 sind die Operationen, die auf die zweite generalisierte Koordinate q_2 angewandt werden müssen. Allerdings wird nun Gleichung 54 Schritt für Schritt in Gleichung 64 eingesetzt und die einzelnen Terme aufgelöst. Deswegen wird zuerst die partielle Ableitung bezüglich der Zeitableitung der zweiten generalisierten Koordinate berechnet, wie in Gleichung 68 dargestellt ist.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = m \cdot \dot{q}_2 \quad (68)$$

In weiterer Folge wird wiederum die totale Zeitableitung auf die zuvor berechnete partielle Ableitung von Gleichung 68 angewandt, wodurch sich folgender Ausdruck ergibt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) = m \cdot \ddot{q}_2 \quad (69)$$

Zu guter Letzt muss nur noch der unbehandelte, verbleibende Term von Gleichung 64 behandelt werden. Dieser beschreibt nun die partielle Ableitung der Lagrange-Funktion bezüglich der zweiten generalisierten Koordinate und ergibt sich in unserem Beispiel zu

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \frac{\partial L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial q_2} \cdot \frac{\dot{q}_1^2}{2} + \int_0^t \underbrace{\frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{dL(\dot{q}_1, q_2)}{dt} \right)}_{\text{vertauschen der Ableitungen}^1} dt - (-m \cdot g + k \cdot c \cdot q_2). \quad (70)$$

¹Fall 1: $\frac{dL(\dot{q}_1, q_2)}{dt} = \frac{\partial L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial \dot{q}_1} \cdot \frac{d\dot{q}_1}{dt} + \frac{\partial L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial q_2} \cdot \frac{dq_2}{dt}$ & $\frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{dL(\dot{q}_1, q_2)}{dt} \right) = \frac{\partial L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial \dot{q}_1 \partial q_2} \cdot \frac{d\dot{q}_1}{dt} + \frac{\partial^2 L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial^2 q_2} \cdot \frac{dq_2}{dt}$

Fall 2: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial q_2} \right) = \frac{\partial L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial q_2 \partial \dot{q}_1} \cdot \frac{d\dot{q}_1}{dt} + \frac{\partial^2 L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial^2 q_2} \cdot \frac{dq_2}{dt}$

Identität: $\frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{dL(\dot{q}_1, q_2)}{dt} \right) \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial q_2} \right)$

Da nun alle Terme von Gleichung 63 und 64 bekannt sind, können diese eingesetzt werden. Daraus ergibt sich folgende Gleichung für die erste generalisierte Koordinate q_1 .

$$2\dot{q}_1 \cdot \frac{dL(\dot{q}_1, q_2)}{dt} + L(\dot{q}_1, q_2) \cdot \ddot{q}_1 + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial \dot{q}_1} \right) \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{\partial L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial \dot{q}_1} \cdot \dot{q}_1 \cdot \ddot{q}_1 = -R \cdot \dot{q}_1 + U \quad (71)$$

Und folgende Gleichung für die zweite generalisierte Koordinate q_2 .

$$m \cdot \ddot{q}_2 - \frac{\partial L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial q_2} \cdot \frac{\dot{q}_1^2}{2} - \int_0^t \frac{\dot{q}_1^2}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\dot{q}_1, q_2)}{\partial q_2} \right) dt + (-m \cdot g + k \cdot c \cdot q_2) = F_G - \beta \cdot \dot{q}_2 \quad (72)$$

Durch näheres Betrachten von Gleichung 71 und 72 fällt auf, dass die Gleichung bezüglich der ersten generalisierten Koordinate die Dynamik des elektrischen Systems und die Gleichung bezüglich der zweiten generalisierten Koordinate die Dynamik des mechanischen Systems beschreibt. Die Kopplung der beiden Teilsysteme erfolgt hierbei anhand der Induktivität L , die eine Abhängigkeit bezüglich der ersten und zweiten generalisierten Koordinate zeigt.

3.2.4 Die Zustandsraumbeschreibung

Um eine numerische Lösung der beiden zuvor ermittelten Differentialgleichungen (siehe Gleichung 71 und 72) zu erhalten, wird das System in ein äquivalentes Zustandsraummodell umgewandelt, sodass dieses mittels Simulink® gelöst werden kann. Gemäß der Konvention der Zustandsraumdarstellung werden die Zustandsgrößen mit der Variable x bezeichnet. Damit ergibt sich zwischen Zustandsgrößen und generalisierten Koordinaten folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} x_1 &:= \dot{q}_1 = i \\ x_2 &:= q_2 = z \\ x_3 &:= \dot{q}_2 = \dot{z} \end{aligned} \quad (73)$$

Die Einführung der Zustandsgrößen x_i geht mit der Tatsache einher, dass Zustandsraummodelle grundsätzlich immer nur Ableitungen ersten Grades behandeln. Betrachtet man Gleichung 71 und 72, so fällt auf, dass die in Gleichung 73 dargestellten Zustandsgrößen die beiden Gleichungen derart modifizieren, sodass diese ausschließlich durch 1. Ableitungen beschrieben werden können. Als Ausgangspunkt der Zustandsgröße x_1 dient nun Gleichung 71, die eine Abhängigkeit bezüglich der ersten generalisierten Koordinate zeigt.

$$2\dot{x}_1 \cdot \frac{dL(x_1, x_2)}{dt} \cdot x_1 + L(x_1, x_2) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right) \cdot x_1^2 + \frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_1} \cdot x_1 \cdot \dot{x}_1 = -R \cdot x_1 + U \quad (74)$$

Durch simples Faktorisieren und Umstellen von Gleichung 74 erhält man folgenden Ausdruck:

$$\dot{x}_1 \cdot \left[L(x_1, x_2) + \frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_1} \cdot x_1 \right] = U - R \cdot x_1 - \frac{dL(x_1, x_2)}{dt} \cdot 2x_1 - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right) \cdot x_1^2 \quad (75)$$

Dividiert man nun durch den Klammerausdruck, rechts neben der Zeitableitung der ersten Zustandsgröße \dot{x}_1 , so ergibt sich nachfolgender rationaler Term, der die zeitliche Änderung der ersten Zustandsgröße x_1 beschreibt.

$$\dot{x}_1 = \frac{U - R \cdot x_1 - \frac{dL(x_1, x_2)}{dt} \cdot 2x_1 - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right) \cdot x_1^2}{L(x_1, x_2) + \frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_1} \cdot x_1} \quad (76)$$

Wie zuvor erwähnt, weisen Zustandsraummodelle immer nur erste Ableitungen auf. Da nun Gleichung 72 eine Abhängigkeit bezüglich der zweiten generalisierten Koordinate x_2 und dessen erste und zweite Ableitung aufweist, wird die zusätzliche Zustandsgröße x_3 eingeführt, die äquivalent zur Zeitableitung der zweiten Zustandsgröße ist.

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (77)$$

Als Ausgangspunkt der Zustandsgröße x_3 dient nun Gleichung 72, die eine Abhängigkeit bezüglich der zweiten generalisierten Koordinate aufweist. Hierbei wird nun die doppelte Zeitableitung bezüglich der generalisierten Koordinate \ddot{q}_2 durch die in Gleichung 73 definierte Zustandsgröße x_3 ersetzt, wodurch sich folgender Ausdruck ergibt:

$$m \cdot \dot{x}_3 - \frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_2} \cdot \frac{x_1^2}{2} - \int_0^t \frac{x_1^2}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) dt - m \cdot g + k \cdot c \cdot x_2 = F_G - \beta \cdot x_3 \quad (78)$$

Bringt man nun jene Terme, die die Zeitableitung bezüglich der dritten Zustandsgröße beschreiben auf die linke Seite und alle anderen auf die rechte Seite, so ergibt sich nachfolgende Gleichung:

$$m \cdot \dot{x}_3 = \frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_2} \cdot \frac{x_1^2}{2} + \int_0^t \frac{x_1^2}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) dt + m \cdot g - k \cdot c \cdot x_2 + F_G - \beta \cdot x_3 \quad (79)$$

Dividiert man nun obige Gleichung durch die Masse m des Ankers, so ergibt sich nachfolgender Ausdruck, welcher die zeitliche Änderung der dritten Zustandsgröße x_3 beschreibt.

$$\dot{x}_3 = \frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_2} \cdot \frac{x_1^2}{2m} + \int_0^t \frac{x_1^2}{2m} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right) dt + g - \frac{k \cdot c}{m} \cdot x_2 + \frac{F_G}{m} - \frac{\beta}{m} \cdot x_3 \quad (80)$$

4 Finite Elemente Simulation

Um das elektromechanische System aus Abbildung 11 vollständig beschreiben zu können (siehe Abschnitt 3.2), muss eine Look-Up Tabelle bezüglich der Induktivitätswerte der Anordnung vorliegen. Deswegen wurde das elektromechanische System einer FEM-Simulation (Finite Elemente Simulation) durch EleFAnT2D (Electromagnetic Field Analysis Tools des Institutes für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik der TU Graz) unterzogen.

4.1 Grundlegende Aspekte

Da es sich beim vorliegenden Problem aus Abbildung 1 um ein magnetostatisches rotations-symmetrisches Problem handelt, müssen zunächst einige grundlegende Aspekte angesprochen werden.

Ausgehend vom Durchflutungssatz, der Materialbeziehung für das magnetische Feld und der Quellenfreiheit des B-Feldes, lässt sich nachfolgende Differentialgleichung zur Beschreibung stationärer Magnetfelder ableiten, wobei \vec{A} dem Vektorpotential und \vec{J} der eingeprägten Stromdichte entspricht (siehe [2] Seite 93-94).

$$\vec{\nabla} \times ([\mu]^{-1} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{J} \quad (81)$$

Damit obige Differentialgleichung eindeutig gelöst werden kann, was auch eine Voraussetzung für die in den Abschnitten 4.2 bis 4.4 umgesetzte FEM-Simulation ist, müssen deren Randbedingungen definiert werden. Die Dirichlet'sche Randbedingung, also jene, die die Vorgabe der Normalkomponente des B-Feldes beschreibt, ist am Rand Γ_D wie folgt definiert:

$$\vec{A} \times \vec{n} = \vec{t} \cdot \vec{A}_t \quad @ \quad \Gamma_D \quad (82)$$

Die Neumann'sche Randbedingung, also jene, die die Vorgabe der Tangentialkomponente des H-Feldes beschreibt, ist am Rand Γ_N wie folgt definiert:

$$\vec{n} \times ([\mu]^{-1} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\alpha} \quad @ \quad \Gamma_N \quad (83)$$

Wobei $\vec{\alpha}$ der Tangentialkomponente der von \vec{H} äquivalenten Flächenstromdichte auf Γ_N entspricht.

Mit den oben genannten Informationen kann nun eine FEM-Simulation, die beispielsweise auf dem Galerkin'schen Verfahren beruht, aufgestellt werden. Da dies bereits durch die Software EleFAnT2D umgesetzt ist, müssen wir lediglich die notwendigen Randbedingungswerte in der Software definieren (siehe Abschnitt 4.2).

4.2 Problemdefinition

Um eine FEM-Simulation aufzusetzen, muss zu Beginn das Problemgebiet definiert werden. Für die vorliegende induktive Kraftmessdose wurde mittels EleFAnt2D das in Abbildung 13 und 14 dargestellte rotationssymmetrische Problemgebiet definiert. Abbildung 13 zeigt hierbei lediglich die angelegte geometrische Struktur mit Eisenkreis und Spulenkörper, wobei Abbildung 14 die Gesamtanordnung samt Makro-Elementen und Finiten Elementen zeigt. Die Makro-Elemente sind jene Elemente, bei denen die Mittenknoten verschoben werden können. Das Verschieben der Mittenknoten bringt im Bezug auf die Lösung des Problems wesentlich bessere Ergebnisse, als nur das Hinzufügen von Finiten Elementen, die die "Subdivisions" der Marko-Elemente sind.

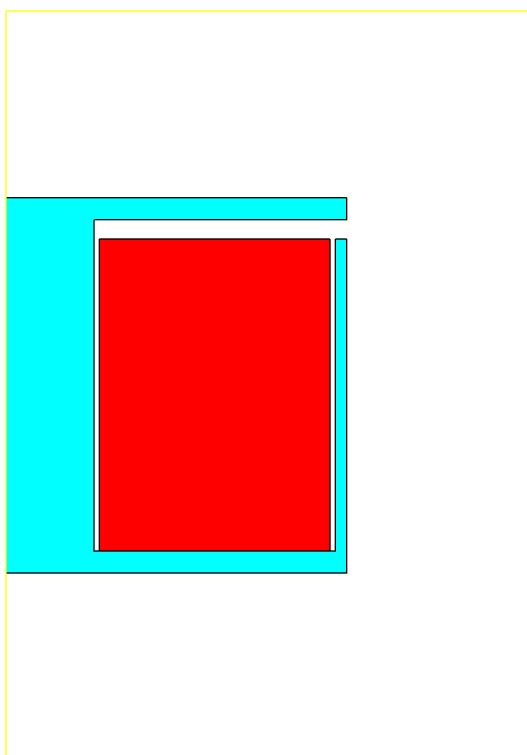


Abbildung 13: FEM-Abbild des elektromechanischen Problems

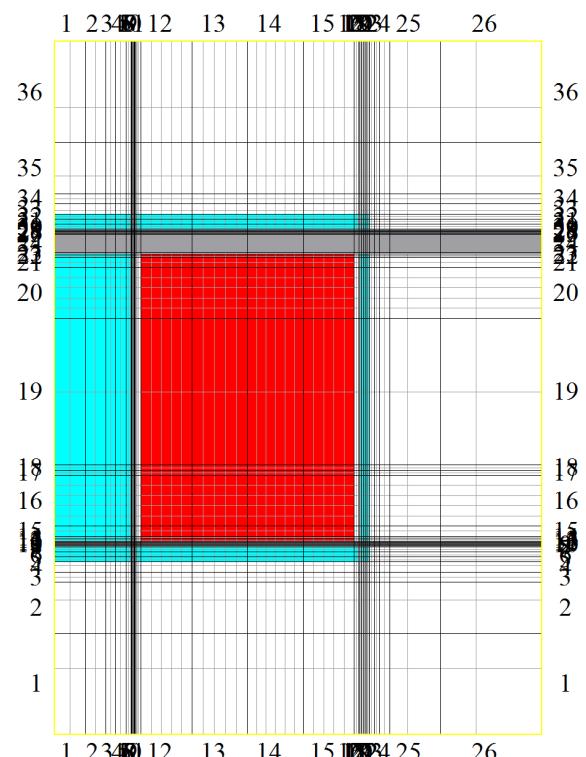


Abbildung 14: Rasterung der Kraftmessdose

Wie zuvor erwähnt, handelt es sich um ein rotationssymmetrisches, magnetostatisches Problem, weswegen im "Main Dialog" des Tiler2D Fensters, aus Abbildung 15, die CheckBox "Axisymmetric" angehakt und als "Problem Type" Magnetostatics ausgewählt wurde. Klickt man auf den Button "Grid Structure", erscheint das in Abbildung 16 dargestellte Fenster, mit dem die Problemdefinition erfolgt. Durch Auswählen von "R-Direction" und "Z-Direction" kann die Geometrie des rotationssymmetrischen Problems definiert werden.

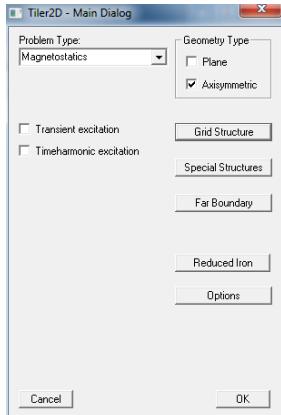


Abbildung 15: Preprocessor Main Dialog Window

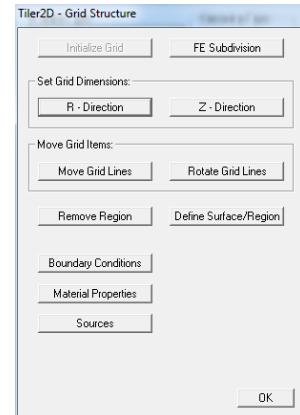


Abbildung 16: Grid Structure Dialog Window

Ist die Geometrie definiert, kann im nächsten Schritt die für die Erregung des Eisenkreises zuständige Spule für das Problemgebiet definiert werden. Dafür klickt man lediglich auf den in Abbildung 16 ersichtlichen Button "Sources" und das in Abbildung 17 dargestellte linke Fenster zur Bezeichnung der Spule öffnet sich.

Nach der Vergabe eines spezifischen Namens, wählt man die deklarierte Spule aus und klickt auf den Button "Current". Nachfolgend öffnet sich das in Abbildung 17 dargestellte rechte Fenster. Darin wird die Anzahl der Windungen sowie der einzuprägende Strom pro Windung definiert. Zu guter Letzt muss die definierte Spule nur noch einen entsprechenden Bereich zugeordnet werden. Dafür klickt man auf den Button "Define Region" und spezifiziert hernach über "Add" den entsprechenden Spulenbereich.

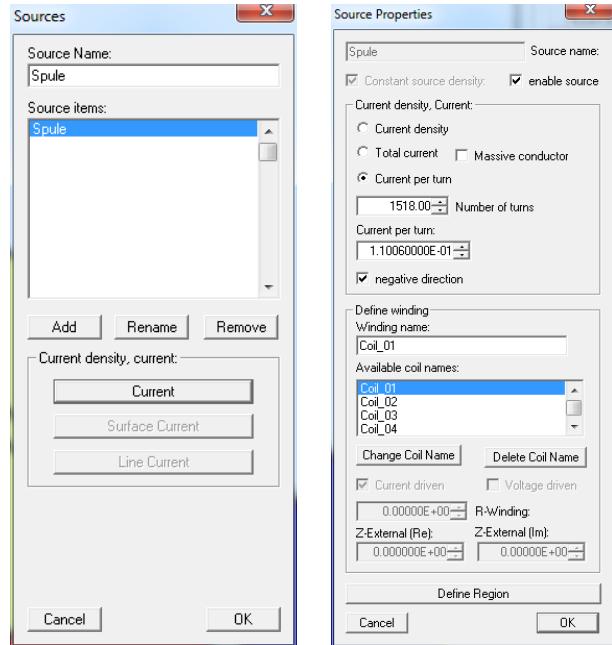


Abbildung 17: Definition der für die Simulation benötigten Quelle

Nach der Quellendefinition widmen wir uns den wohl wichtigsten Teil der Problemgebietsdefinition, nämlich dem Festlegen der Randbedingungen. Da sich beim gegebenen Problem die Feldlinien des B-Feldes, aus praktischer Sicht, immer über das Spulengebiet schließen werden, wird an den Rändern des Problemgebiets eine homogene Dirichlet'sche Randbedingung (siehe Abschnitt 4.1) vorgeschrieben, wodurch spezifiziert wird, dass das B-Feld keine Normalkomponente am Rand des Problemgebiets aufweist. Somit kann es an den Rändern maximal eine Tangentialkomponente geben.

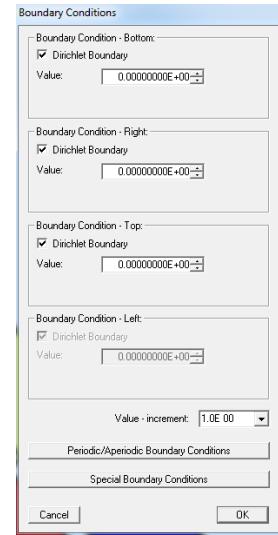


Abbildung 18: Boundary Conditions Window

Damit bei der Simulation die Nichtlinearität des Materials berücksichtigt werden kann Damit bei der Simulation die Nichtlinearität des Materials berücksichtigt werden kann, wird die zum Eisenkreis dazugehörige B-H-Kennlinie zur Simulation hinzugefügt. Spezifiziert wird diese durch Hinzufügen einer neuen Kennlinie im Menüpunkt "B-H Curves" in der Ele-FAnt2D Startoberfläche. Dieser Schritt ist in Abbildung 19 dargestellt. Danach muss lediglich im Menüpunkt "Grid Structures" und "Material Properties" das Material der definierten Geometrie zugeordnet werden. Dazu wird in Abbildung 20 die entsprechende B-H-Kennlinie im Reiter "BH-Curve" ausgewählt und hinterher der entsprechende Bereich über "Define Region" festgelegt.

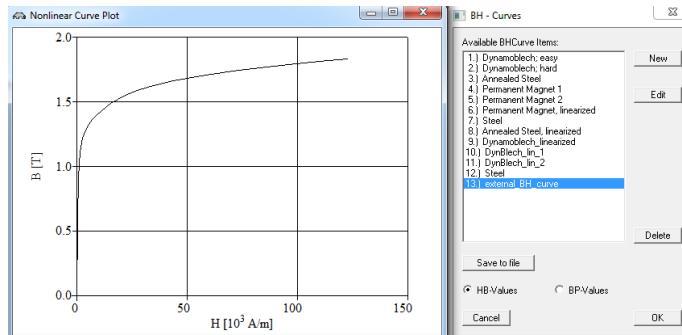


Abbildung 19: BH-Kurve des verwendeten Materials

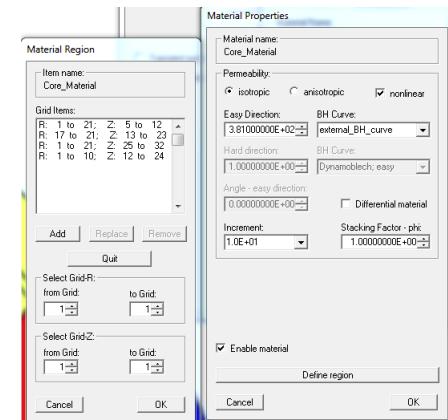


Abbildung 20: Definition des zu verwendenden Materials

4.3 Magnetostatische FEM-Simulation

Nach abgeschlossener Problemdefinition wird durch Klicken auf "Compute" das Problem durchgerechnet und mittels dem "Graphical Postprocessor" Tool können nachfolgende Feldlinienplots (siehe Abbildung 21 und 22) bezüglich der magnetischen Feldstärke erstellt werden. Die Feldlinienplots sind hierbei für einen eingeprägten Strom $I = 110.06\text{ mA}$, einer Windungszahl $N = 1518$ und einer Luftspaltbreite $\delta = 1.74\text{ mm}$ aufgenommen.

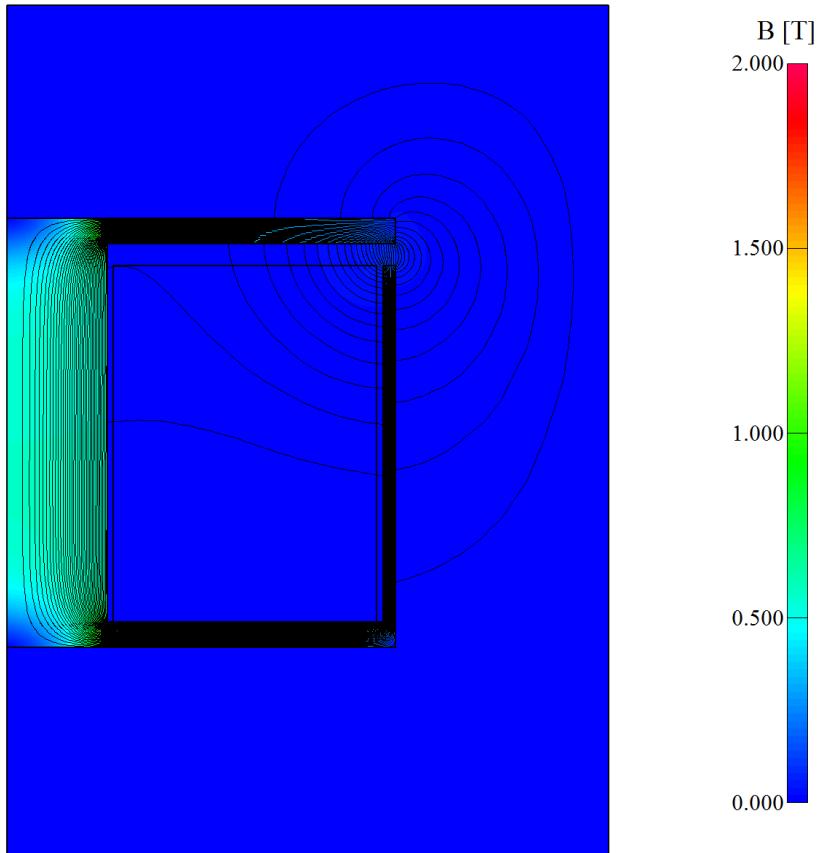


Abbildung 21: Feldlinienplot der FEM-Simulation der Kraftmessdose bei $I = 110.06\text{ mA}$, $N = 1518$ und $\delta = 1.74\text{ mm}$

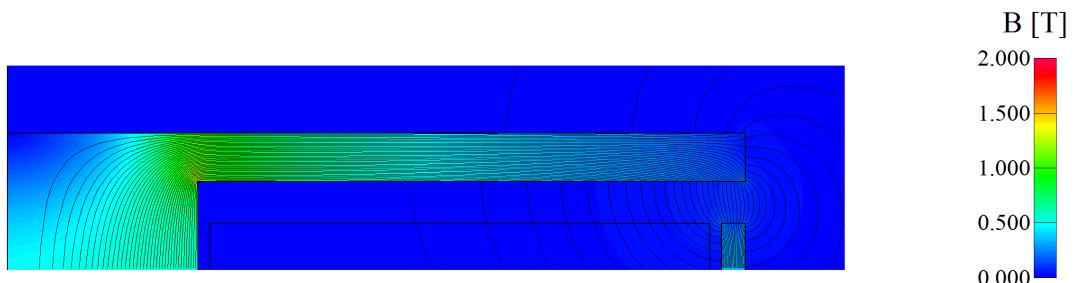


Abbildung 22: Zoom vom Feldlinienplot der Kraftmessdose

Führt man die magnetostatische FEM-Simulation für verschiedene Strom- i und Luftspaltwerte δ aus und speichert diese Ergebnisse zwischen, so erhält man jene Daten, die in weiterer Folge die Grundlage für das in Abschnitt 5 aufgesetzte, gekoppelte Simulink[®] Modell darstellen. Da für die Kurve nur eine bestimmte Anzahl an Punkten aufgenommen wurde, damit die Simulationszeit nicht zu stark divergiert, musste im Nachhinein eine Interpolation durchgeführt werden, um eine möglichst glatte Kurve zu bekommen. Für das in Abschnitt 5 aufgesetzte Simulink Modell, welches anhand der Zustandsraumbeschreibung aus Abschnitt 3.2.4 entwickelt wurde, muss man bedenken, dass die Induktivität bezüglich des Stroms und der Luftspaltbreite aufgrund der partiellen Ableitungen stetig-differenzierbar sein muss. Damit kommt das matlab-interne "spline-fitting" oder "cubic-fitting" nicht in Frage, da diese Interpolationen aufgrund der stückweisen Zusammensetzung nicht überall stetig-differenzierbar sind. Statt einer Interpolation wurde eine Polynom-Regression nach dem "Least Square Prinzip" durchgeführt. Dadurch wird die stetige Differenzierbarkeit gewährleistet. Die repräsentativen Grafiken der iterativ ermittelten magnetostatischen FEM-Simulation mit regredierten Datenpunkten ist nachfolgend dargestellt.

Abbildung 23 zeigt die Flussverkettung $\psi(i, z)$ in Abhängigkeit der eingestellten Luftspaltbreite δ bzw. z für fünf unterschiedliche Spulenströme i (zwecks der Übersichtlichkeit sind nur fünf Kurven dargestellt).

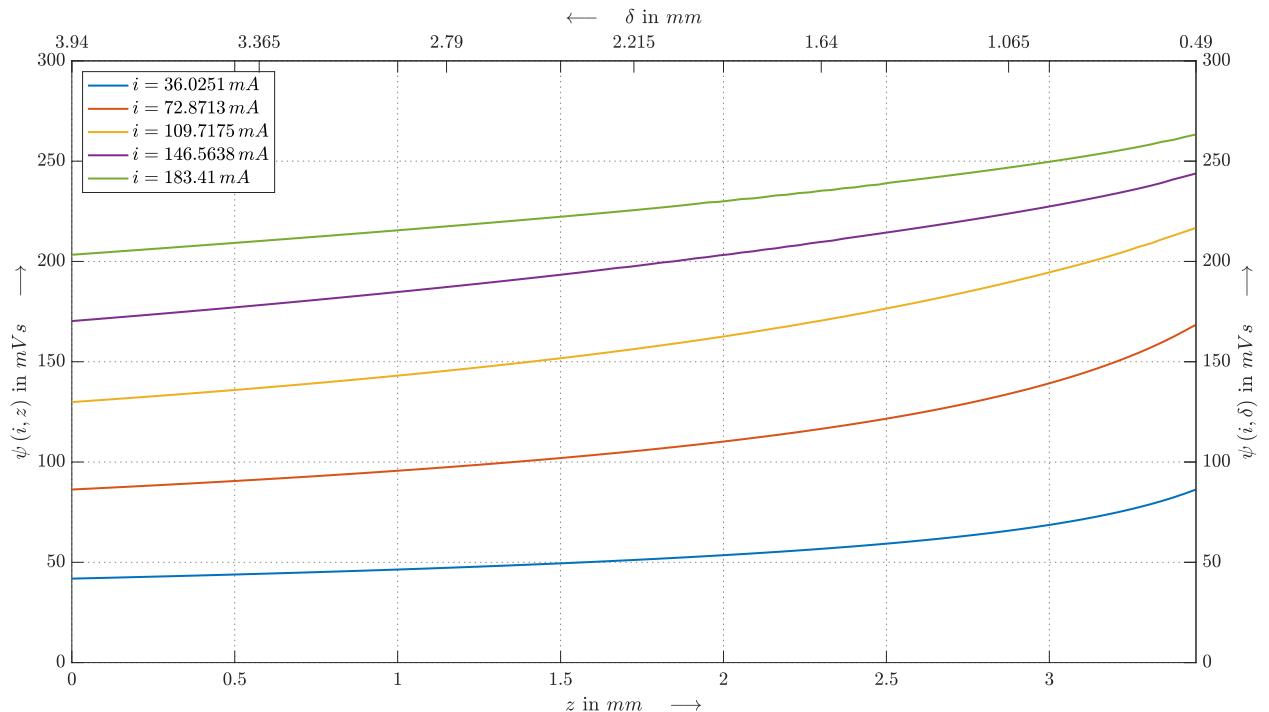


Abbildung 23: Flussverkettung in Abhängigkeit der Ankerposition bzw. Luftspaltbreite

Abbildung 24 zeigt die Induktivität $L(i, z)$ in Abhängigkeit des eingeprägten Spulenstroms i für fünf unterschiedliche Luftspaltbreiten δ bzw. z (zwecks der Übersichtlichkeit sind nur fünf Kurven dargestellt).

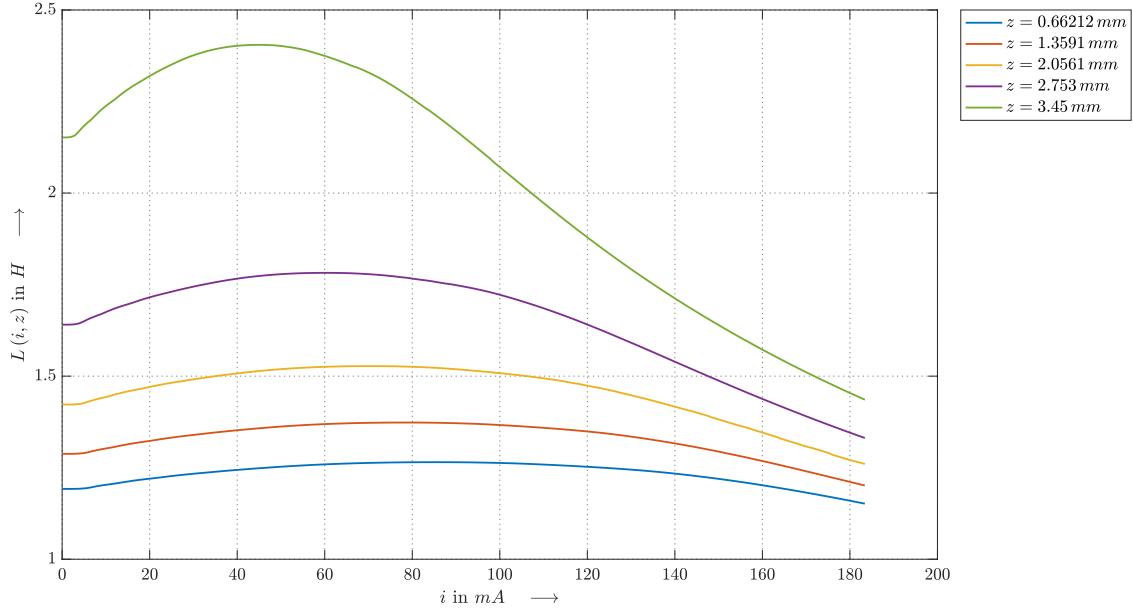


Abbildung 24: Induktivität in Abhängigkeit des Spulenstroms

Um den Induktivitätsverlauf von einem anderen Blickwinkel zu betrachten, wurde die Induktivität $L(i, z)$ zusätzlich in Abhängigkeit der eingestellten Luftspaltbreite δ bzw. z für fünf unterschiedliche Spulenströme i (zwecks der Übersichtlichkeit sind nur fünf Kurven dargestellt).

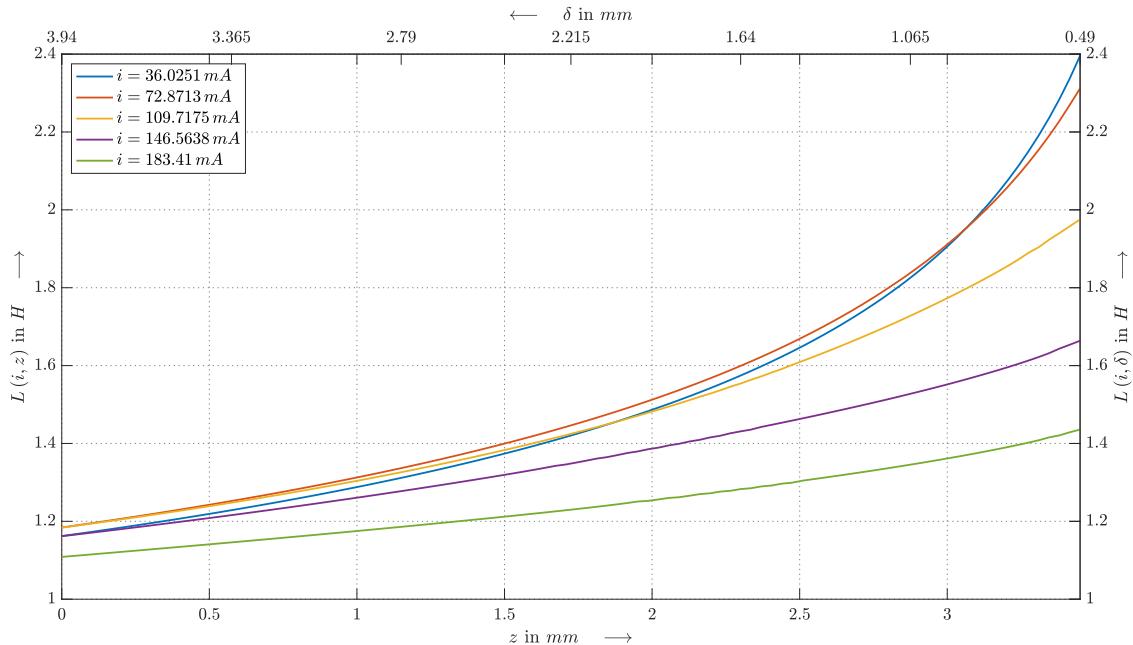


Abbildung 25: Induktivität in Abhängigkeit der Ankerposition bzw. Luftspaltbreite

Wie bereits zuvor besprochen, wird für das Zustandsraummodell aus Abschnitt 3.2.4 einerseits die partielle Ableitung der Induktivität bezüglich des Stroms i und andererseits die partielle Ableitung der Induktivität bezüglich des Luftspalts δ bzw. der Luftspaltposition z benötigt. Die Induktivitätsänderung in Folge einer Stromänderung ist wiederum für fünf unterschiedliche Luftspaltbreiten δ bzw. z ausgeführt und in Abbildung 26 ersichtlich.

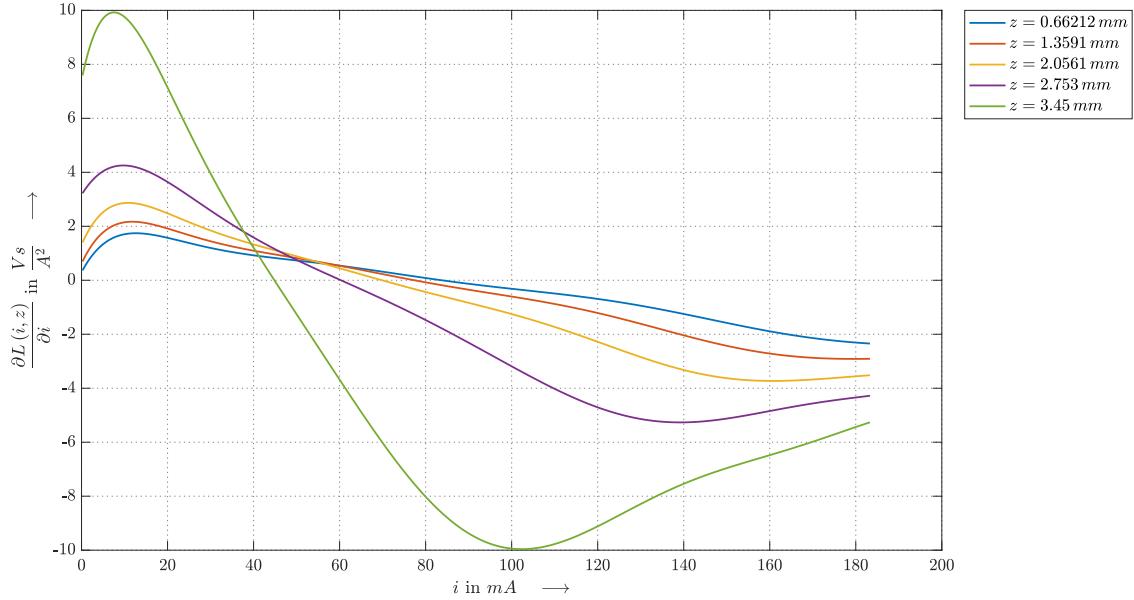


Abbildung 26: Partielle Ableitung der Induktivität nach dem Strom

Die Induktivitätsänderung in Folge einer Änderung der Luftspaltbreite ist wiederum für fünf unterschiedliche Spulenströme i ausgeführt und in Abbildung 27 ersichtlich.

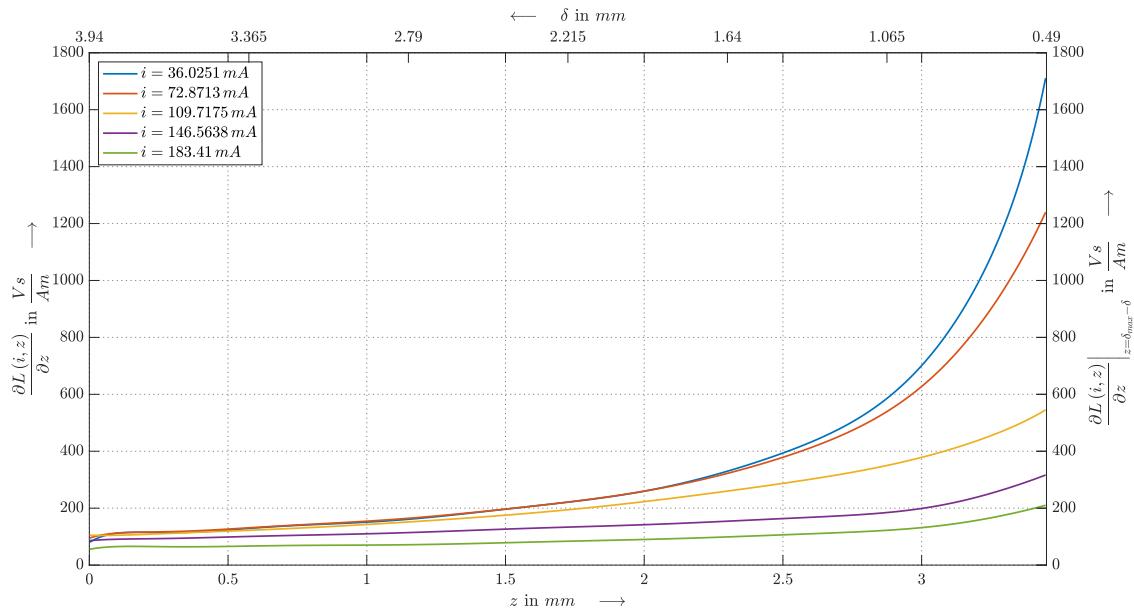


Abbildung 27: Partielle Ableitung der Induktivität nach der Ankerposition

Vereinigt man Abbildung 24 mit Abbildung 25, so erhält man eine dreidimensionale Darstellung der Induktivität $L(i, z)$ in Abhängigkeit des Spulenstroms i und des Luftspalts δ bzw. z .

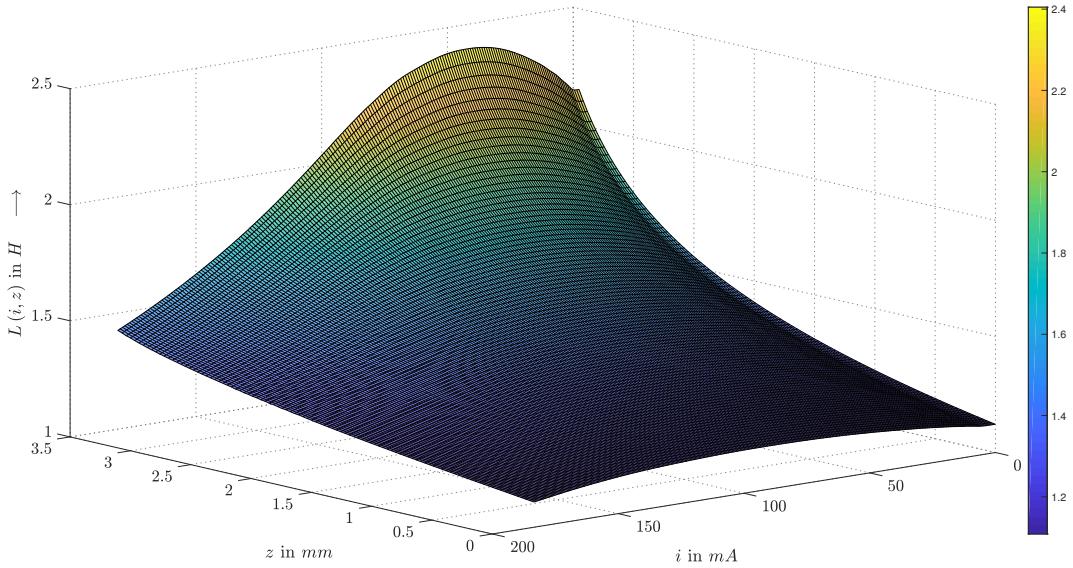


Abbildung 28: Induktivität in Abhängigkeit vom Strom und der Ankerposition

Analog zur dreidimensionalen Darstellung der Induktivität $L(i, z)$, kann dessen partielle Ableitung bezüglich des Spulenstroms i dargestellt werden, wie in Abbildung 29 ersichtlich ist.

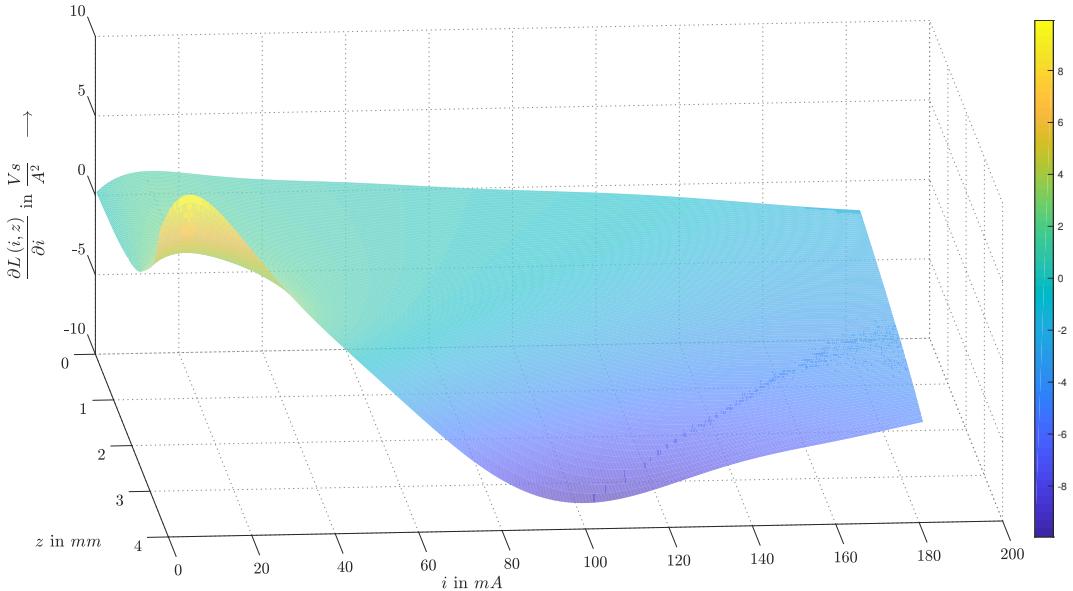


Abbildung 29: Surface-Plot der partiellen Ableitung der Induktivität nach dem Strom

Gleichtes gilt natürlich auch für die partielle Ableitung der Induktivität bezüglich des Luftspalts δ bzw. z , welche in Abbildung 30 dargestellt ist.

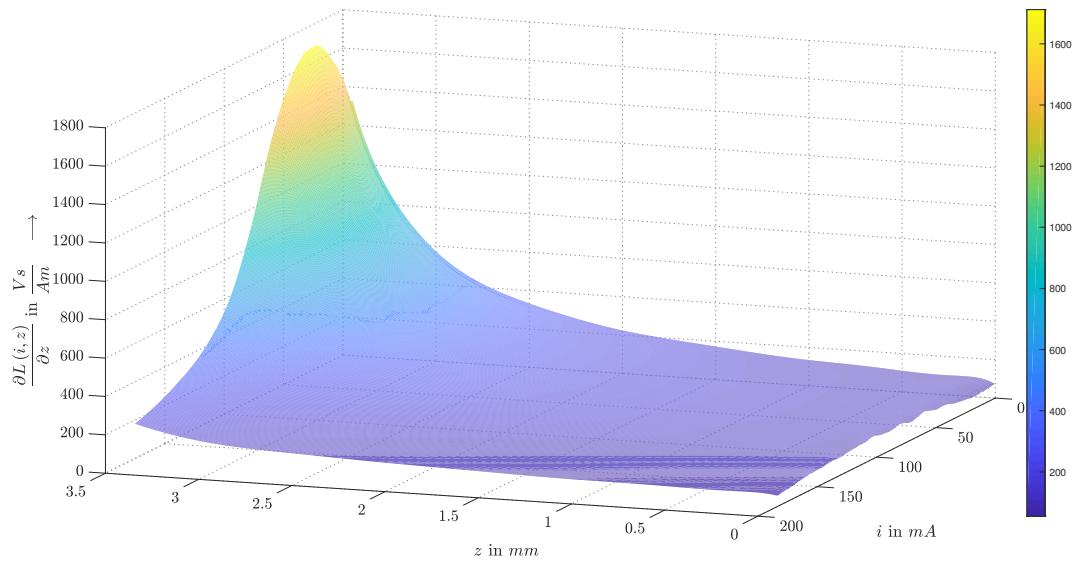


Abbildung 30: Surface-Plot der partiellen Ableitung der Induktivität nach der Ankerposition

Damit eine Aussage bezüglich des Betrags der vorherrschenden magnetischen Flussdichte bzw. Induktion $|\vec{B}(r)|$ getroffen werden kann, wurde diese in Abbildung 31 über die radialen Richtung r , für einen bestimmten Spulenstrom und Luftspalt, visualisiert.

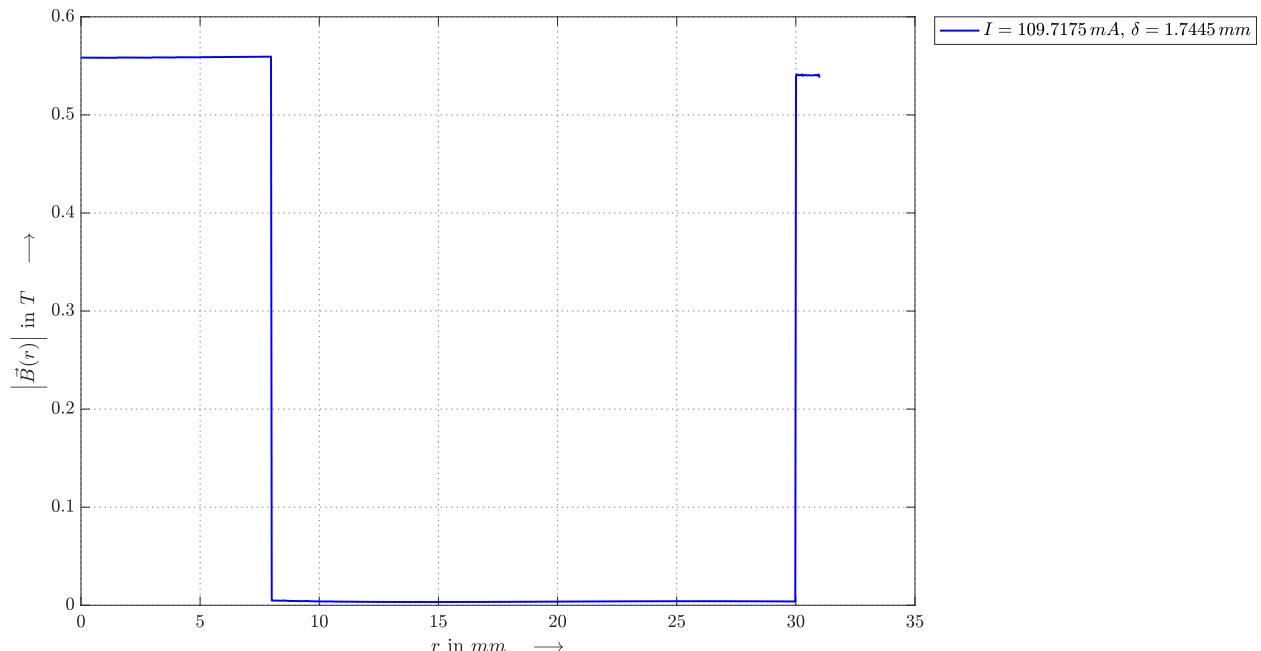


Abbildung 31: Betrag der magnetischen Flussdichte im horizontalen Schnitt

Einige Abschnitte zuvor (siehe Abschnitt 2.3) haben wir die mittlere Eisenkreislänge und -fläche hergeleitet und diskutiert. Wandern wir nun am Feldlinienplot, aus Abbildung 21, entlang der mittleren Eisenkreislänge (siehe Gleichung 18 - Abschnitt 2.3), so ergibt sich nachfolgende Grafik für den Betrag der vorherrschenden magnetischen Flussdichte bzw. Induktion $|\vec{B}(r)|$.

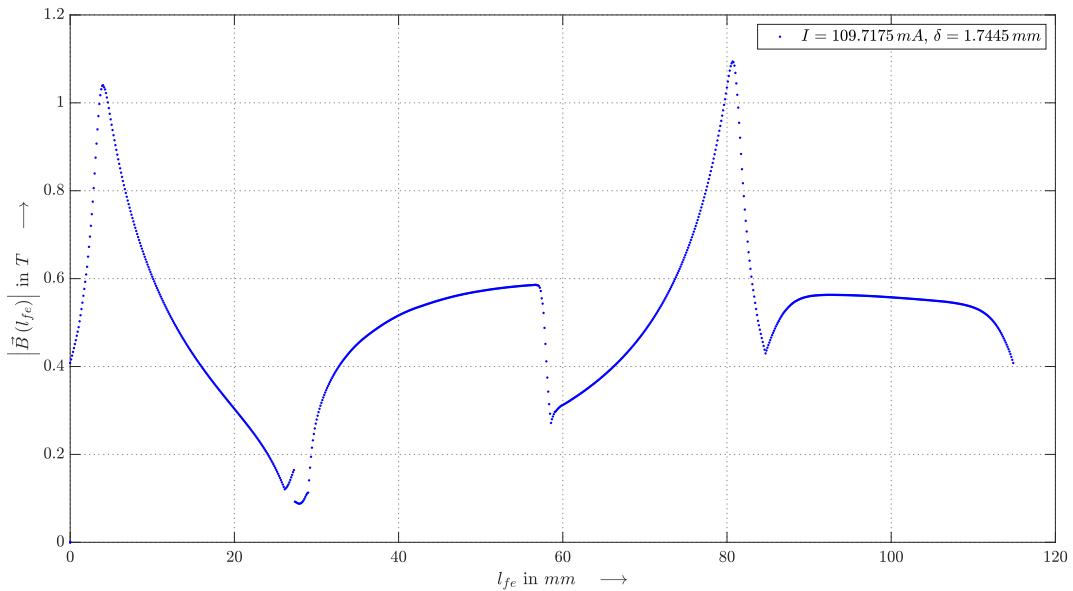


Abbildung 32: Betrag der magnetischen Flussdichte entlang der mittleren Eisenkreislänge

4.4 Transiente FEM-Simulation

Wendet man nun anstatt einer magnetostatischen FEM-Simulation eine transiente FEM-Simulation auf das Problem an, so müssen kleine Änderungen am EleFAnt2D Setup vorgenommen werden. Da wir eine transiente Simulation ausführen wollen, muss im "Main Dialog" (siehe Abbildung 33a) die Check-Box "Transient excitation" angehakt werden. Klickt man auf den Button "Time Dependency", so kann mit Hilfe einer "Polyline" eine Sprungantwort erzeugt werden (siehe Abbildung 33b und 33c). Mit "Time step" und "Number of time steps" wird spezifiziert in welchen Zeitabständen und wie viele Zeitschritte simuliert werden sollen.

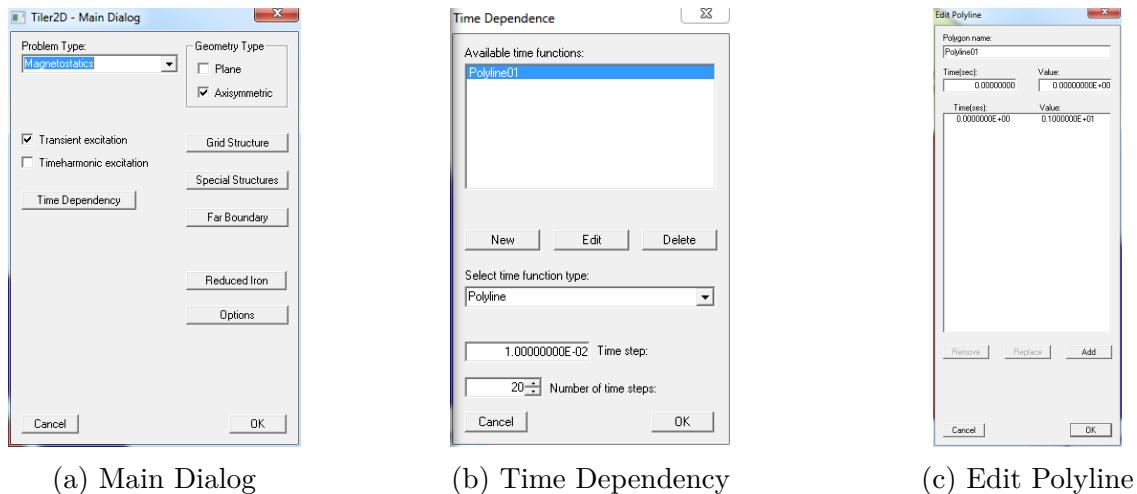


Abbildung 33: Definition der für die Simulation benötigten Quelle

Die sprungförmige Größe, die für die transiente Simulation benötigt wird, kann aufgrund des vorliegenden Problems nur die Spannung sein. Würde der Strom springen, so würde dies zu unendlicher Energie in der Induktivität führen (siehe Gleichung 45 - Abschnitt 3.2.1). Daher kann für die Spule im Problemgebiet nur noch die Spannung pro Windung vorgegeben werden (siehe Abbildung 34c).

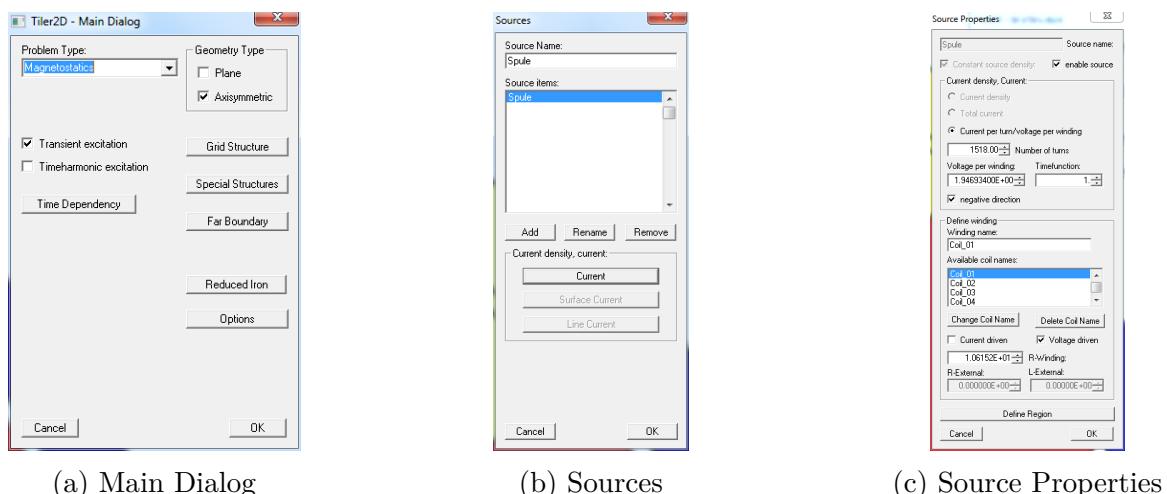


Abbildung 34: Definition der für die Simulation benötigten Quelle

Die nachfolgenden Abbildungen 35 bis 37 zeigen den zeitlichen Verlauf des Spulenstroms $i(t, \delta)$, der Flussverkettung $\psi(t, \delta)$ und der Induktivität $L(t, \delta)$ in Abhängigkeit der eingesetzten Luftspaltbreite δ (zwecks der Übersichtlichkeit sind nur fünf Kurven dargestellt).

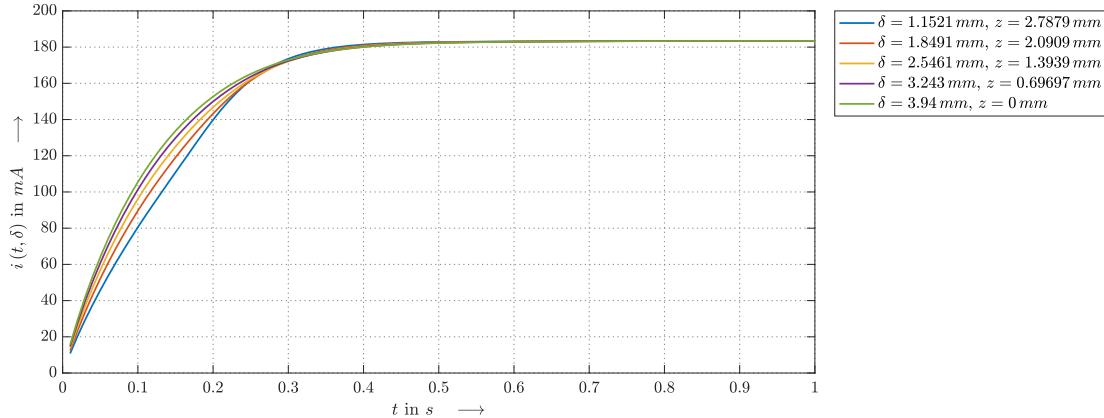


Abbildung 35: Transientes Verhalten des Spulenstroms

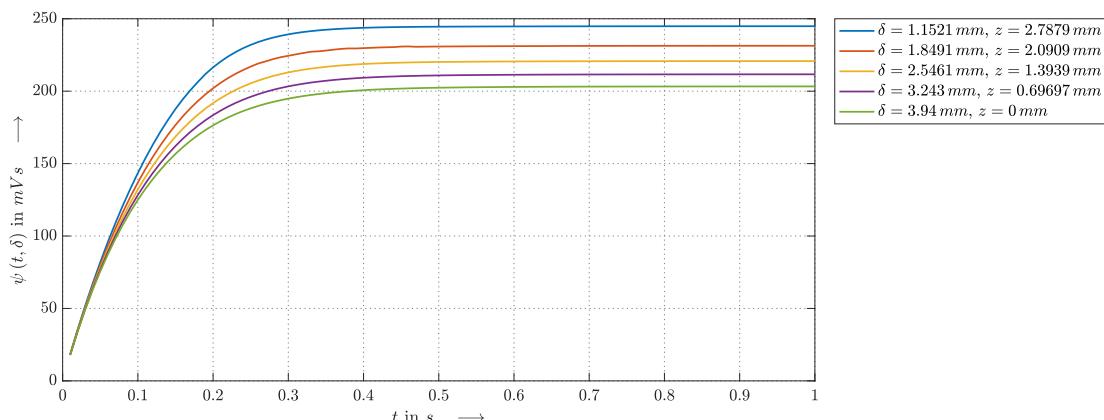


Abbildung 36: Transientes Verhalten der Flussverkettung

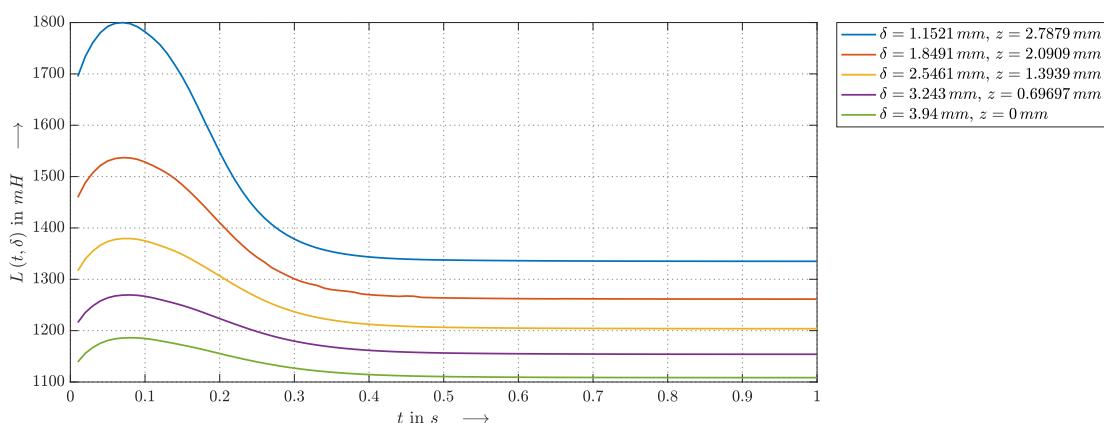


Abbildung 37: Transientes Verhalten der Induktivität

5 Das elektromechanische System

Bei der Betrachtung des Systems wurde das Hauptaugenmerk darauf gelegt, dass etwaige Simulationen Nichtlinearitäten des Materials berücksichtigen, sodass die damit einhergehenden Phänomene analysiert werden können. Die Nichtlinearitäten des verwendeten Gußeisens werden bei gegebenem dynamischen System (siehe Abbildung 2) anhand der Magnetisierungskennlinie, wie in Abbildung 38 dargestellt, berücksichtigt. Die Beschreibung des in Abbildung 2 dargestellten dynamischen Systems basiert auf den in Abschnitt 3.2.4 abgeleiteten gekoppelten elektromechanischen Bewegungsgleichungen. Da solche eine Komplexität kaum bis gar nicht analytisch berechnet werden kann, kommt das numerische Simulationstool Simulink® zum Einsatz.

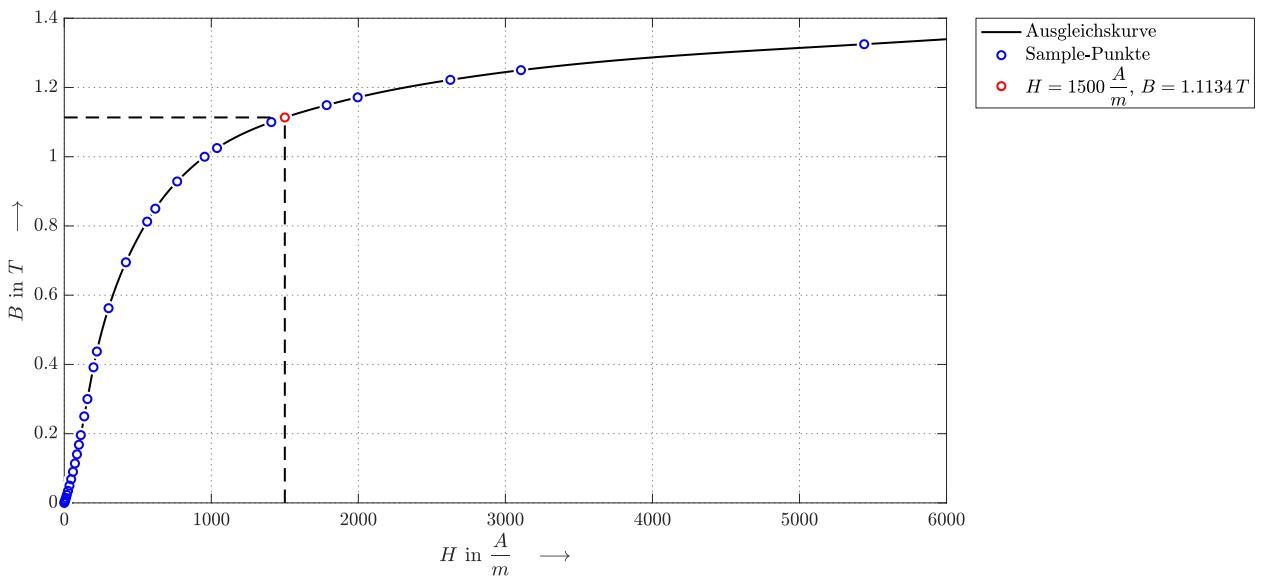


Abbildung 38: Magnetisierungskennlinie von Gußeisen mit Arbeitspunkt

5.1 Simulink-Modell des dynamischen Systems

Abbildung 39 zeigt die Simulink-Beschreibung des elektromechanischen Systems. Das Simulink-Modell stellt eine direkte Abbildung der in Abschnitt 3.2.4 abgeleiteten gekoppelten elektromechanischen Bewegungsgleichungen dar, welche auch abhängig von den Finiten Elemente Simulationen aus Abschnitt 4 sind. Die Simulationsdaten der Finite Elemente Simulationen werden im Simulink-Modell durch zweidimensionale Look-Up Tabellen berücksichtigt. Neben den Look-Up Tabellen wurden noch zusätzliche Blöcke wie "Start-Up", "Enable-LookUp-Table", "Stop-Simulation", "Reluctance-Force" und "Spring-Force" hinzugefügt. Besonders wichtig zu erwähnen ist der Solver, der zum Lösen des Systems herangezogen wird. Wie bereits zuvor erwähnt, handelt es sich bei dem hier vorliegenden Problems um ein gekoppeltes elektromechanisches System. Dadurch können im System auch Zeitkonstanten zwischen mechanischen und elektrischen Teilsystem auftreten, die sehr weit auseinander liegen. Für solche Systeme verwendet man sogenannte "Stiff-Solver" verwendet, die auf einem variablen Zeitschrittverfahren basieren. Für das in Abbildung 39 vorliegende Model wurden unter

⚙ Model Configuration Parameters ► Solver folgende Solver-Parameter konfiguriert (die nicht erwähnten blieben bei der Standardeinstellung):

- Type = Variable-step • Initial step size = 1e-4
- Solver = ode23s • Relative tolerance = 1e-5
- Max step size = 1e-4 • Absolute tolerance = auto
- Min step size = 1e-9 • Solver Jacobian method = Sparse Analytical

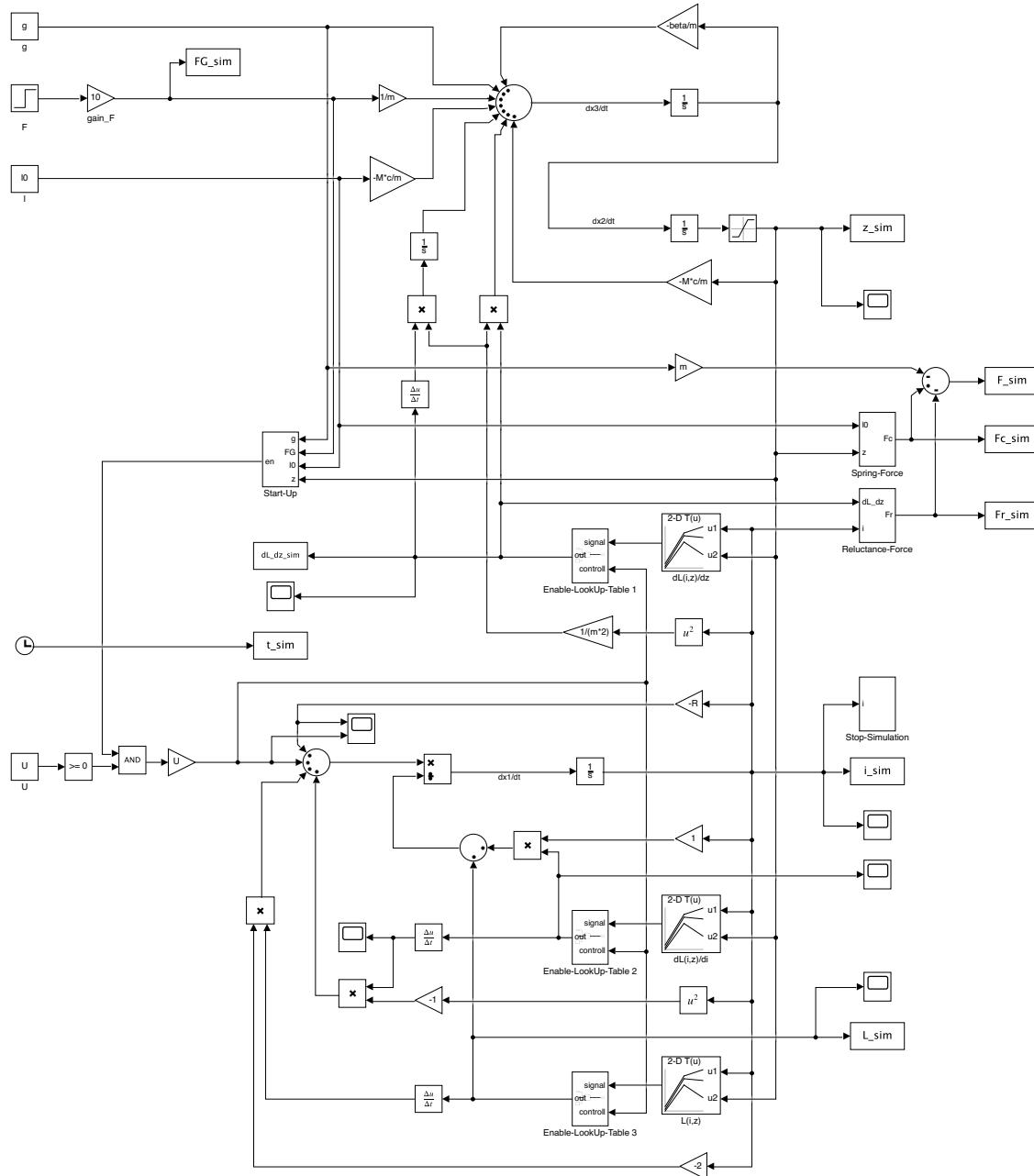


Abbildung 39: Simulink-Modell des dynamischen Systems

Der "Start-Up" Block, welcher in Abbildung 40 abgebildet ist, ist dafür konzipiert das elektrische Teilsystem erst dann zuzuschalten, wenn das mechanische Teilsystem einen stationären Zustand erreicht hat. Zur Ermittlung des stationären Zustandes des mechanischen Teilsystems, wird ein Hüllkurven-Detektor verwendet.

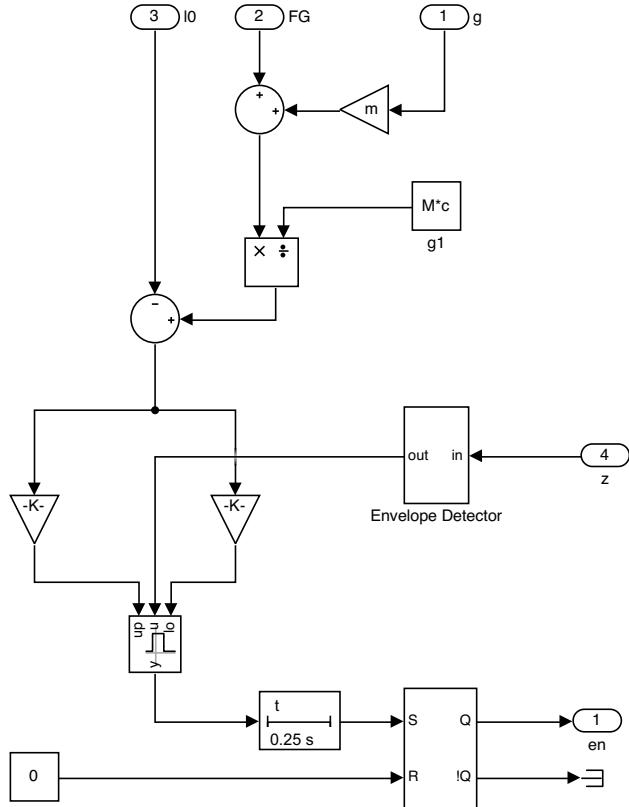


Abbildung 40: Start-Up Block zur Gewährleistung eines stationären Anfangszustandes

Der stationäre Zustand ist erreicht, wenn das Ausgangssignal des Hüllkurven-Detektors (siehe Abbildung 41) zwischen einer definierten oberen und unteren Schranke liegt. Um zu gewährleisten, dass das Signal nicht nur einmalig innerhalb der Schranke liegt und dadurch das elektrische Teilsystem aktiviert, wurde zusätzlich ein Verzögerungsglied eingebaut, um diesen Fall zu vermeiden. Das Verzögerungsglied setzt hernach permanent den "S"-Zustand des RS-Flip-Flop's.

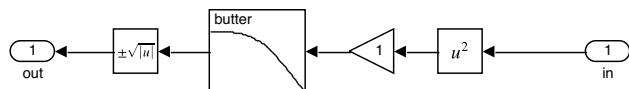


Abbildung 41: Hüllkurven-Detektion zur Bestimmung des stationären Anfangszustandes

Nachdem der stationäre Zustand ist erreicht ist, gibt der "Start-Up" Block ein "High"-Signal aus. Dadurch springt die Spannung am Eingang des Systems auf seinen Endwert U . Dies führt dazu, dass die Spule bestromt wird. Gleichzeitig detektiert nun der "Enable-LookUp-Table" Block den Spannungssprung und aktiviert die Look-Up Tabellen.

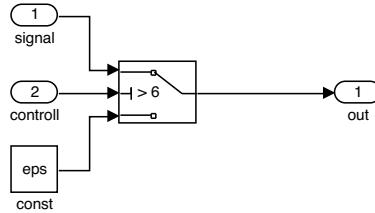


Abbildung 42: Enable-LookUp-Table Block zur Gewährleistung der Aktivierung der LookUp-Tabellen zum Zeitpunkt der Spulen-Bestromung

Ähnlich wie beim "Start-Up" Block wird auch beim "Stop-Simulation" Block, welcher in Abbildung 43 dargestellt ist, ein Signal mit einer oberen und unteren Schranke verglichen. Liegt der Spulen-Strom innerhalb eines definierten Bereichs und dauert dieser eine bestimmte Zeitdauer an (= eingeschwungener Fall), so wird die Simulation beendet, um keine unnötig langen Simulationszeiten zu bekommen.

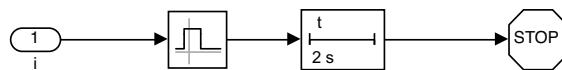


Abbildung 43: Stop-Block zur Detektion des stationären Endzustandes

Der "Reluctance-Force" Block, der in Abbildung 44 dargestellt ist, dient zur Berechnung der Reluktanz-Kraft aus den im Simulink-Modell spezifizierten/simulierten Parametern wie i und $\frac{\partial L(i,z)}{\partial z}$. Zusätzlich dient der Block zur Separation von Zustandsraumgrößen und jenen Größen, die von den Zustandsgrößen abgeleitet sind, wie z.B. die Reluktanz-Kraft.

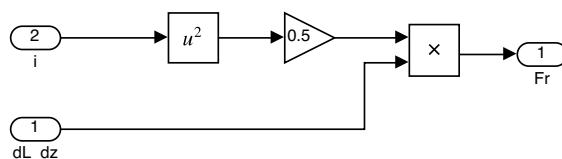


Abbildung 44: Reluktanzkraft Ermittlung

So wie für den "Reluctance-Force" Block gilt auch für den "Spring-Force" Block (siehe Abbildung 45), dass dieser lediglich zur Separation von Zustandsraumgrößen und jenen Größen, die von den Zustandsgrößen abgeleitet sind, wie z.B. der Federkraft, dient.

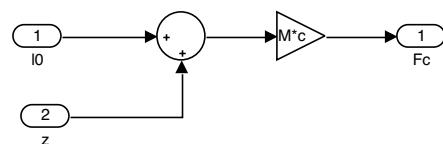


Abbildung 45: Ermittlung der einwirkenden Federbeanspruchung

5.2 Visualisierung der dynamischen Vorgänge

Angesichts der Tatsache, dass das System eine starke mechanische Schwingneigung aufweist, wurde ein ausschließlich theoretisch möglicher Dämpfungswert $\beta = 1 \text{ Ns/m}$ eingestellt. Somit ergibt sich für den zeitlichen Verlauf der Ankerposition der in Abbildung 46 dargestellte Verlauf.

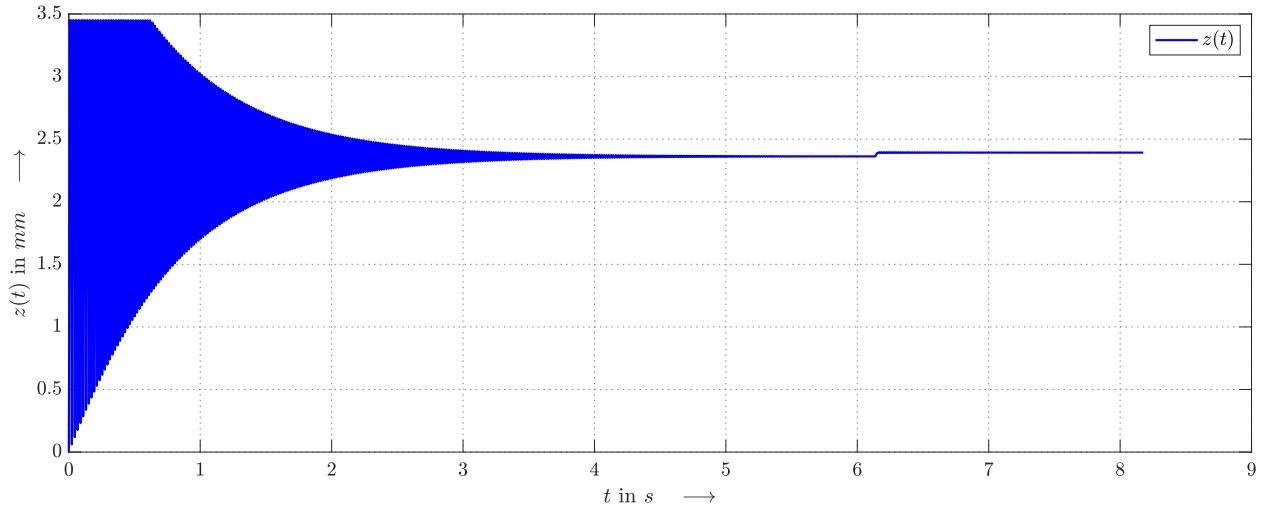


Abbildung 46: Zeitliche Änderung der Ankerposition $z(t)$

Abbildung 47 zeigt das zu erwartende Charakteristikum eines Einschaltvorganges einer Induktivität. Betrachtet man nun Abbildung 46 und 47 so erkennt man, dass die Spule des elektromechanischen Systems erst bestromt wird, wenn sich das mechanische Teilsystem quasi in Ruhe befindet. Diese ist eine Notwendigkeit zur Gewährleistung der Stabilität des Systems.

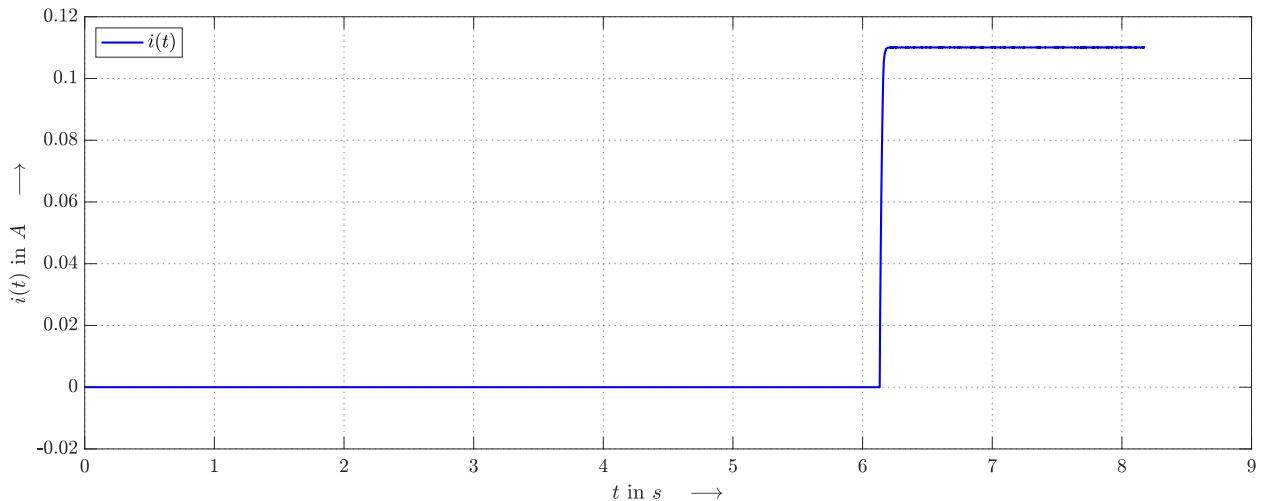


Abbildung 47: Elektrische Sprungantwort $i(t)$ des Systems

Sowie bei der Charakteristik des Stroms $i(t)$ sieht man auch bei der Zeitbereichsbetrachtung der Induktivität $L(t)$ (dargestellt in Abbildung 48), dass diese erst zum "Start-up" Zeitpunkt Werte ungleich Null annimmt. Dies liegt daran, dass sich erst zum Zeitpunkt der Spulen-Bestromung ein magnetischer Fluss $\phi(t)$ im Eisenkreis aufbaut.

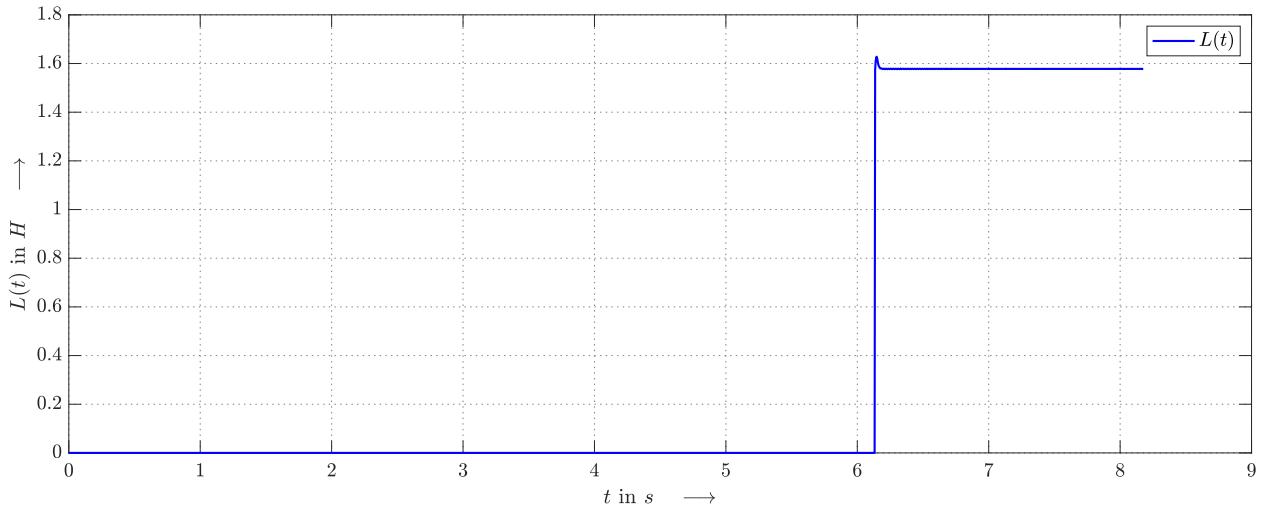


Abbildung 48: Zeitliche Induktivitätsänderung $L(t)$ des Systems

Auf den ersten Blick ist die Nichtlinearität des Systems in Abbildung 47 nicht zu erkennen. Führt man allerdings eine FEM-Simulation mit konstanter relativer Permeabilität μ_r durch, verwendet diese Simulationsdaten im dynamischen System von Abbildung 39 und überlagert anschließend die beiden simulierten Stromverläufe, so erhält man die in Abbildung 49 dargestellten Verläufe. Dabei erkennt man, dass der Strom bei hinterlegter BH-Kurve (siehe Abbildung 38) nicht mehr rein-exponentiell anwächst.

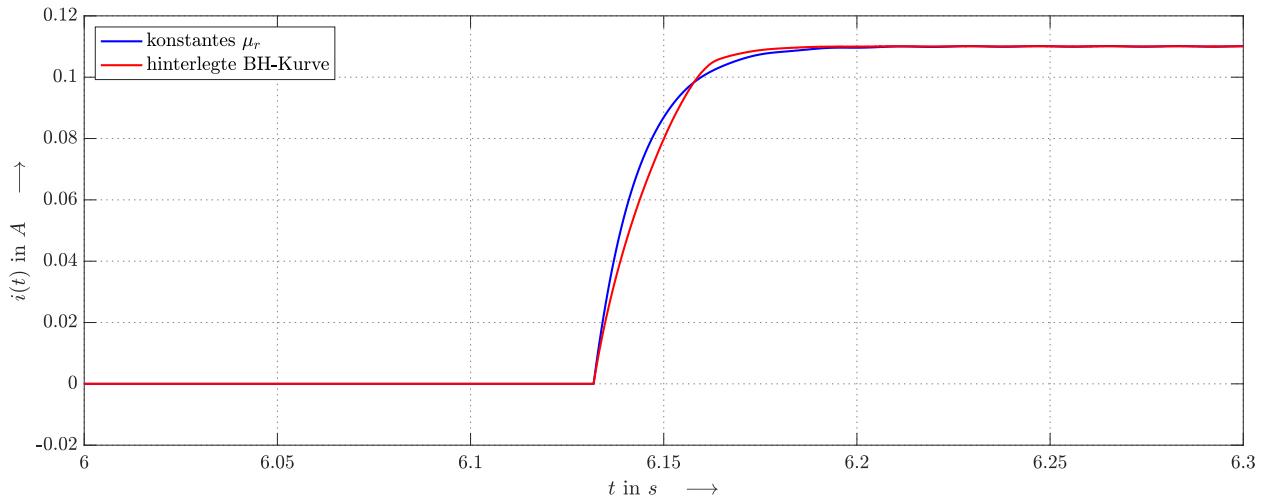


Abbildung 49: Vergleich der Einschaltvorgänge für konstantes und nicht konstantes μ_r

Abbildung 50 zeigt den Vergleich zwischen einwirkender/zu bestimmender $F_G(t)$ und gemessener Gewichtskraft $F_{Gsim}(t)$. Dabei erkennt man, dass nach dem Einschwingen die einwirkende und gemessene Gewichtskraft quasi ident ist.

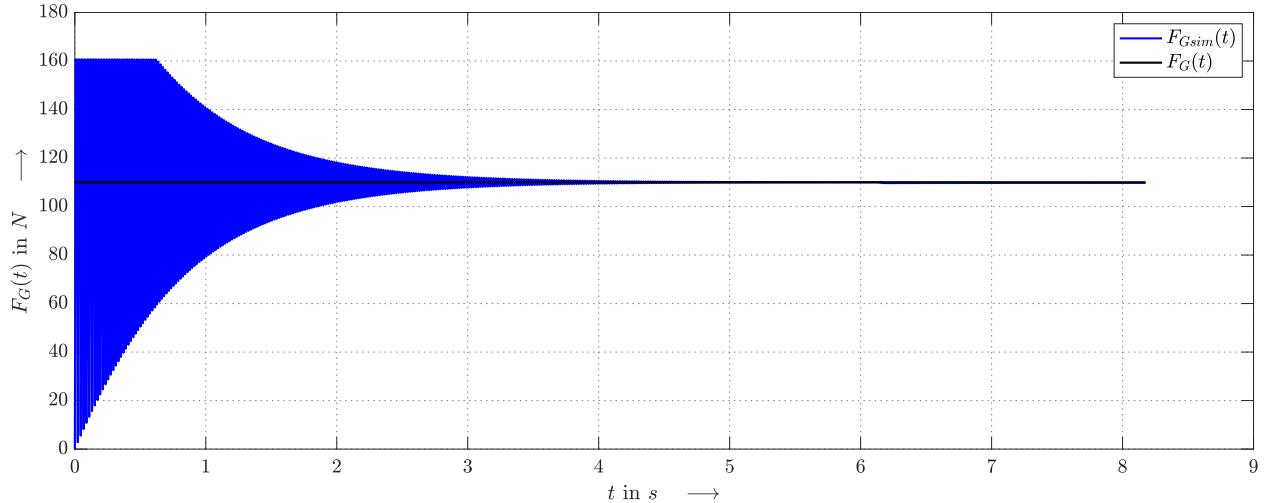


Abbildung 50: Vorgegebene Kraft $F_G(t)$ und gemessene Kraft $F_{Gsim}(t)$

Wie oben erwähnt ist nach dem Einschwingen die einwirkende und gemessene Gewichtskraft quasi ident. Dies ist auch deutlich beim dynamischen Fehler der Gewichtskraft $F_{Gerror}(t)$ zu erkennen. Nach ausreichend langer Zeit konvergiert der dynamische Fehler in Richtung Null.

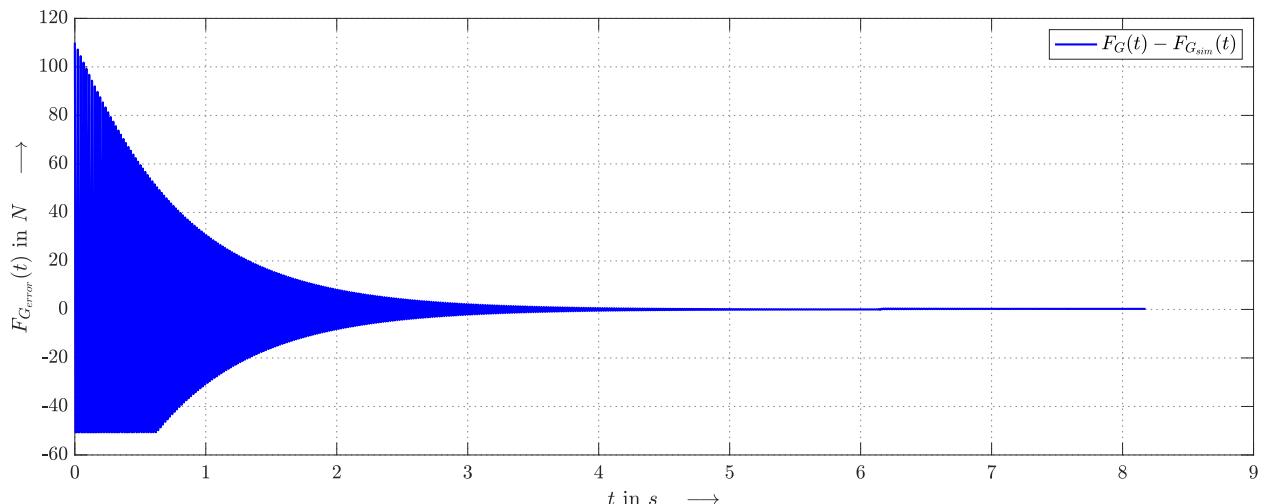


Abbildung 51: Fehler zwischen vorgegebener $F_G(t)$ und gemessener Kraft $F_{Gsim}(t)$

In Abbildung 52 ist wiederum der zu erwartende Effekt zu erkennen, dass die Reluktanzkraft $F_R(t)$ erst dann einsetzt, wenn die Spule bestromt wird. Der "Start-Up" Block sorgt also dafür, dass die Spannungsquelle auf die Induktivität aufgeschaltet wird.

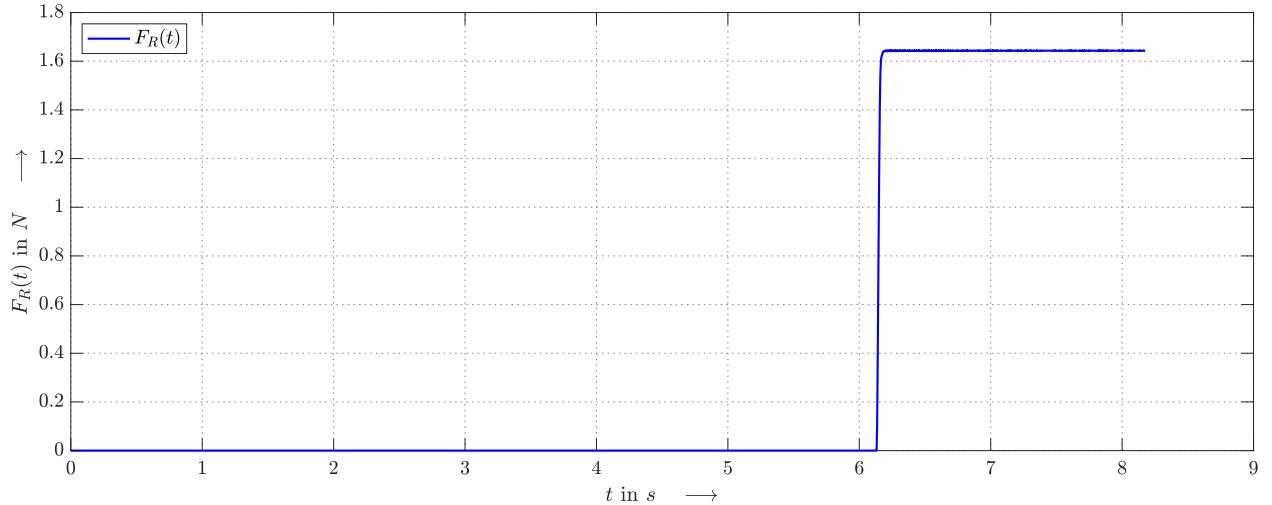


Abbildung 52: Zeitliche Änderung der Reluktanzkraft $F_R(t)$

Abbildung 53 zeigt die zeitliche Änderung der Federbeanspruchung $k \cdot F_c(t)$. Der k -Faktor beschreibt in diesen Zusammenhang die Anzahl der verwendeten Spiralfedern. Im Modell des dynamischen Systems aus Abbildung 39 entspricht der k -Faktor der M -Variable. Die k Feder stellen für die einwirkende Kraft die entsprechende Gegenkraft dar.

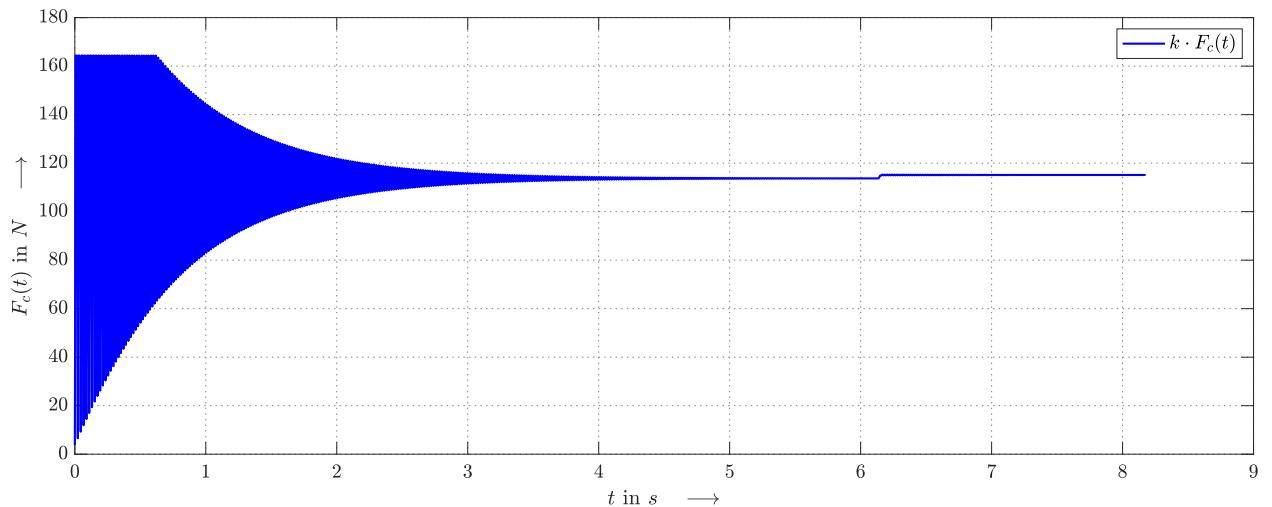


Abbildung 53: Zeitliche Änderung der Federbeanspruchung $k \cdot F_c(t)$

Simuliert man das dynamische System aus Abbildung 39 für unterschiedliche einwirkende Gewichtskräfte F_G und bringt diese mit der korrespondierenden Induktivität L in Verbindung, so ergibt sich die in Abbildung 54 dargestellte Charakteristik für die Kraftmessdose. Die Induktivitätswerte, für die die Charakteristik aufgenommen ist, wurden aus dem Einschaltvorgang der Spule bei einer Zeitkonstante von τ ermittelt. Mit der aufgenommenen Charakteristik wäre es theoretisch möglich eine einwirkende Kraft F_G durch anlegen eines Spannungssprunges $u(t) = \sigma(t)$ und messen des resultierenden Einschaltvorgangs $i(t)$ an der Induktivität zu ermitteln. Die Messung ist natürlich umso genauer, desto niedriger die Sättigung des Eisenkreises ist.

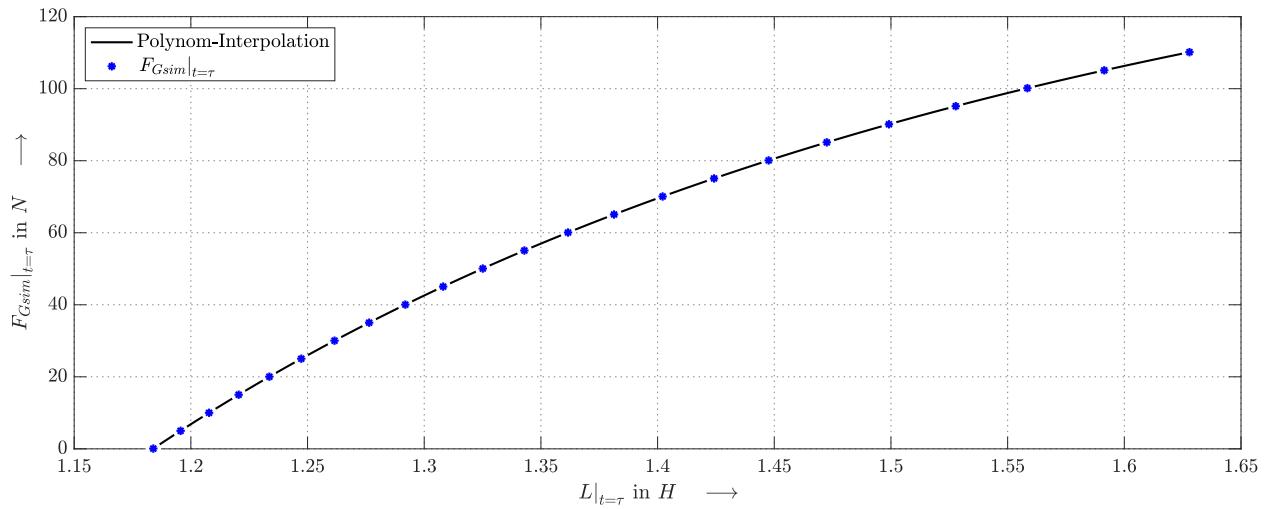


Abbildung 54: Messcharakteristik der Apparatur

6 Homogenes Modell der Kraftmessdose

Das homogene, lineare Modell der Kraftmessdose stellt eine Vereinfachung des gesamten elektromagnetischen Modells dar. Dabei wird eine konstante, homogene Flussdichte B im gesamten magnetischen Kreis angenommen. Dadurch entstehen wesentliche Vereinfachungen bei der Betrachtung des Durchflutungssatzes (siehe Gleichung 86). Aus diesen Gegebenheiten lässt sich die Induktivität L der stromdurchflossenen Spule einfach berechnen. Im geschlossenen und gesättigten Eisenkreis wird für die Modellbildung eine konstante Flussdichte $B_{sat} = 1.1134 T$ angenommen. Durch die Verwendung von Gußeisen ist daher eine magnetische Erregung von $H_{Fe} = 1500 \frac{A}{m}$ notwendig (siehe Kennlinie in Abbildung 55).

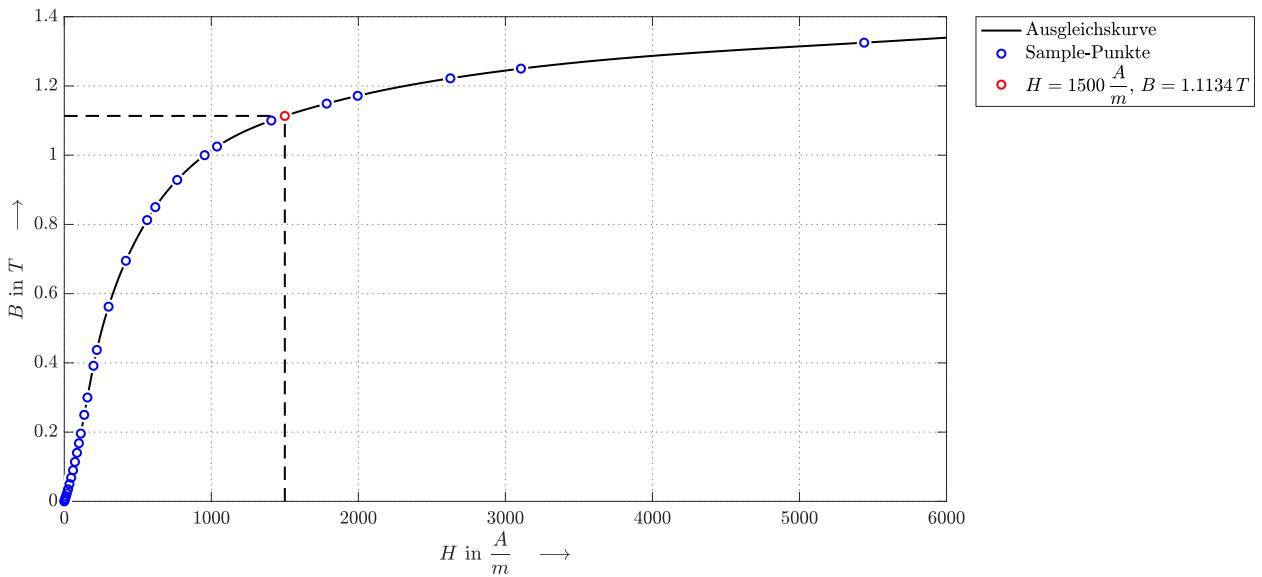


Abbildung 55: Magnetisierungskennlinie Gußeisen

6.1 Geometrische Größen im homogenen B-Feld

Die effektive Fläche des Eisenkreises A_{Fe} , sowie die mittlere Länge des Eisenkreises l_{Fe} , beschreiben wesentliche geometrische Größen für die weitere Betrachtung des linearen, homogenen, elektromagnetischen Modells der induktiven Kraftmessdose. Zur Berechnung dieser beiden geometrischen Größen werden die mittlere Querschnittsfläche sowie die mittlere Eisenkreislänge aus Abbildung 9 verwendet. Die einseitige, mittlere Eisenkreislänge ergibt somit $l_{fe} = 0.1114 m$ und die mittlere Querschnittsfläche $A_{fe} = 2.164 \cdot 10^{-4} m^2$.

Die Länge des mittleren magnetischen Kreises wird nun durch die Beziehung $l_{Mag} = l_{Fe} + \delta$ beschrieben, wobei δ den veränderlichen Luftspalt darstellt. Der größtmögliche Luftspalt wird im unbelasteten Zustand ($F_G = 0 N$) erreicht und beträgt $\delta_{max} = 3.94 mm$. Hingegen erreicht der Luftspalt eine Breite von $\delta_{min} = 0.49 mm$ bei maximaler Last ($F_G = 152 N$).

6.2 Berechnung des ohm'schen Widerstandes der Spule

Aufgrund der geometrischen Gegebenheiten und einer Windungszahl von $N = 1518 \text{ Wdg}$ kann der ohm'sche Wicklungswiderstand der Spule R_{Cu} in guter Näherung berechnet werden. Dieser Widerstand wird in weiterer Folge für die Dimensionierung des elektrischen Stromkreises benötigt.

Der durchschnittliche Windungsradius beträgt dabei $\bar{r}_w = 19 \text{ mm}$. Die gesamte Drahtlänge der Spule l_w errechnet sich bei $N = 1518 \text{ Wdg}$ daher durch die folgende Beziehung:

$$l_w \approx 2\pi \cdot \bar{r}_w \cdot N = 2\pi \cdot 19 \text{ mm} \cdot 1518 = 181.22 \text{ m} \quad (84)$$

Die Querschnittsfläche des Wicklungsdrähtes beträgt $A_w = 0.412 \text{ mm}^2$. Der spezifische Widerstand von Kupfer beträgt $\rho_{Cu} = 0.018 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$. Daraus errechnet sich ein näherungsweise der ohmsche Widerstand der Spule zu

$$R_{Cu} = \rho_{Cu} \cdot \frac{l_w}{A_w} = 0.018 \cdot \frac{181.22}{0.412} \Omega = 7.917 \Omega. \quad (85)$$

6.3 Dimensionierung des elektrischen Stromkreises

Der Strom I bedingt durch die Spannungsquelle U sorgt für die gewünschte magnetische Erregung H , verursacht durch die Induktivität L der Spule. Dabei wird das Ersatzschaltbild für den Stromkreis aus Abbildung 11 betrachtet. Durch die wesentliche Vereinfachung der Betrachtung einer linearen, homogenen Flussdichte B im gesamten Magnetkreis kann aus dem Durchflutungssatz der geforderte Strom I durch einen einfachen linearen Zusammenhang berechnet werden.

$$\Theta = N \cdot I = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_{Fe} \cdot l_{Fe} \quad (86)$$

Hierbei stellt Θ die Durchflutung dar, wobei stets der Zusammenhang $B = \mu_0 \mu_r H$ gilt. Durch das gesättigte Gußeisen bei einer magnetischen Erregung $H_{Fe} = 1500 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ und einer Flussdichte von $B_{sat} = 1.1134 \text{ T}$ ergibt sich eine Permeabilität von $\mu_r = 590.68$.

Durch Äquivalenzumformung des Durchflutungssatzes aus Gleichung 86 ergibt sich ein geforderter Strom I von

$$I = \frac{H_{Fe} \cdot l_{Fe}}{N} = \frac{1500 \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 0.1114 \text{ m}}{1518} = 110 \text{ mA}. \quad (87)$$

Unter Verwendung einer üblichen 12 V Spannungsquelle muss daher ein Vorwiderstand $R_S = 101 \Omega$ verwendet werden, damit ein Strom $I = 110 \text{ mA}$ eine magnetische Erregung von $H_{Fe} = 1500 \frac{\text{A}}{\text{m}}$ verursacht.

6.4 Berechnung der Induktivität

Nun erfolgt die allgemeine Herleitung der Induktivität L der in Abbildung 2 gezeigten elektromechanischen Anordnung. Hierbei wird ausschließlich die äußere Induktivität der Spule im Eisenkreis betrachtet. Durch die Vereinfachung einer homogenen Flussdichte B im gesamten Magnetkreis ergibt sich eine reine Abhängigkeit der Induktivität vom Luftspalt $L = L(\delta)$.

Erneut wird der Durchflutungssatz für die Berechnung der Induktivität benötigt.

$$\Theta = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_{Fe} \cdot l_{Fe} + H_\delta \cdot \delta \quad (88)$$

Durch die gemeinsame Flussdichte B und unter Berücksichtigung der Materialbeziehungen ergibt sich aus Gleichung 88 folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} \Theta &= H_{Fe} \cdot l_{Fe} + H_\delta \cdot \delta = \frac{B}{\mu_0 \cdot \mu_r} \cdot l_{Fe} + \frac{B}{\mu_0} \cdot \delta \\ &= \frac{B}{\mu_0} \left(\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta \right) \Leftrightarrow B = \frac{\Theta \cdot \mu_0}{\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta} \end{aligned} \quad (89)$$

Ebenso ergibt sich durch die vereinfachte, homogene Betrachtung der Flussdichte B eine lineare Beziehung für die Flussverkettung ψ .

$$\Psi = N \cdot \Phi = N \cdot \int_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\Gamma} = N \cdot B \cdot A_{Fe} \Leftrightarrow \Phi = B \cdot A_{Fe} \quad (90)$$

Der magnetische Fluss $\Phi = \frac{I \cdot L}{N}$ hängt hier in weitere Folge linear vom Strom I und von der Induktivität L der Anordnung ab. Aus dieser Beziehung sowie aus dem in Gleichung 89 erläuterten Zusammenhang ergibt sich, wie folgt, ein temporärer Ausdruck für die Induktivität:

$$L = \frac{N \cdot \Phi}{I} = \frac{N \cdot B \cdot A_{Fe}}{I} \quad (91)$$

Setzt man in weiterer Folge die Beziehung der Flussdichte aus Gleichung 89 in den Ausdruck der Induktivität in Gleichung 91 ein, so ergibt sich der endgültige Ausdruck der Induktivität L in Abhängigkeit vom Luftspalt δ .

$$L = \frac{N \cdot B \cdot A_{Fe}}{I} = \frac{N \cdot \Theta \cdot \mu_0 \cdot A_{Fe}}{I \cdot \left(\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta \right)} = \frac{N \cdot N \cdot I \cdot \mu_0 \cdot A_{Fe}}{I \cdot \left(\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta \right)} \quad (92)$$

$$L = L(\delta) = \frac{\mu_0 \cdot A_{Fe} \cdot N^2}{\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta}$$

Unter Betrachtung des in Abbildung 12 gewählten Koordinatensystems ändert sich der Luftspalt δ in entgegengesetzter Richtung der z-Koordinate. Dabei gilt die Beziehung $\delta = \delta_{max} - z$, wodurch sich die Abhängigkeit der Induktivität $L(\delta) \rightarrow L(z)$ ergibt.

$$L(z) = \frac{\mu_0 \cdot A_{Fe} \cdot N^2}{\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta_{max} - z} \quad (93)$$

Abbildung 56 zeigt den erwarteten Verlauf der Induktivität L in Abhängigkeit des Weges z im homogenen Modell der Kraftmessdose.

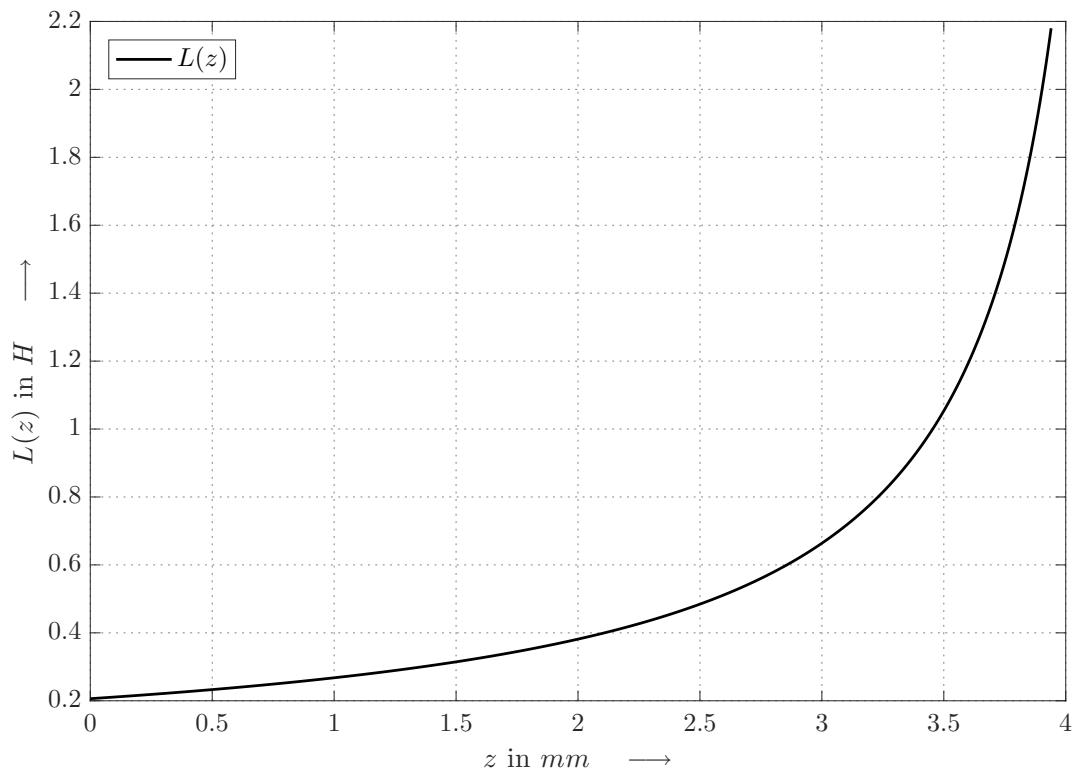


Abbildung 56: Induktivität L in Abhängigkeit von z

6.5 Lagrange-Modellbildung am homogenen Modell der Messdose

Als Grundlage zur Beschreibung des homogenen Modells der Kraftmessdose dienen die allgemeinen Lagrange Gleichungen aus Kapitel 3.2.4. Aufgrund der getroffenen Vereinfachungen zur Homogenität und zur Linearität der elektrischen Flussdichte können nun die angeführten Lagrange Gleichungen weiterhin analytisch vereinfacht werden. Vorerst gilt, dass die Induktivität $L(z) = L(q_2)$ ² lediglich vom Weg q_2 abhängt und keine Stromabhängigkeit gegeben ist. Daher entfallen die Ableitungen $\frac{\partial L(q_1, q_2)}{\partial q_1}$ in der Dynamik des elektromechanischen Modells, wobei $q_1 = i$ gilt. Ebenso erfolgt eine Vernachlässigung des Dämpfungskoeffizienten β , da die Schwingneigung des linearen Modells vorerst keinen gravierenden Einfluss auf die Ergebnisse zeigt.

Aus den Gleichungen 71 und 72 von Kapitel 3.2.4 ergibt sich nun folgendes dynamisches System:

$$q_1 : \frac{dL(q_2)}{dt} \cdot \dot{q}_1 + L(q_2) \cdot \ddot{q}_1 = -R \cdot \dot{q}_1 + U \quad (94)$$

$$q_2 : m \cdot \ddot{q}_2 - \frac{\partial L(q_2)}{\partial q_2} \cdot \frac{\dot{q}_1^2}{2} - m \cdot g + k \cdot c \cdot q_2 = F_G \quad (95)$$

Zur weiteren Auflösung der Bewegungsgleichungen erfolgen die zeitliche Ableitung der Induktivität $\frac{dL(q_2)}{dt}$ sowie die Ableitung nach dem Weg $\frac{\partial L(q_2)}{\partial q_2}$.

$$\frac{dL(q_2)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 \cdot A_{Fe} \cdot N^2}{\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta_{max} - q_2} \right) = \frac{\mu_0 \cdot A_{Fe} \cdot N^2}{\left(\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta_{max} - q_2 \right)^2} \cdot \dot{q}_2 = \frac{L(q_2)}{\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta_{max} - q_2} \cdot \dot{q}_2 \quad (96)$$

$$\frac{\partial L(q_2)}{\partial q_2} = \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\mu_0 \cdot A_{Fe} \cdot N^2}{\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta_{max} - q_2} \right) = \frac{\mu_0 \cdot A_{Fe} \cdot N^2}{\left(\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta_{max} - q_2 \right)^2} = \frac{L(q_2)}{\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta_{max} - q_2} \quad (97)$$

Nach dem Einsetzen der partiellen und totalen Ableitungen der Induktivität nach Ort und Zeit in Gleichung 94 und 95, ergeben sich die endgültigen Bewegungsgleichungen des dynamischen Systems.

$$q_1 : \frac{L(q_2)}{\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta_{max} - q_2} \cdot \dot{q}_2 \cdot \dot{q}_1 + L(q_2) \cdot \ddot{q}_1 = -R \cdot \dot{q}_1 + U \quad (98)$$

$$q_2 : m \cdot \ddot{q}_2 - \underbrace{\frac{L(q_2)}{\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta_{max} - q_2} \cdot \frac{\dot{q}_1^2}{2}}_{F_R} - m \cdot g + \underbrace{k \cdot c \cdot q_2}_{F_c} = F_G \quad (99)$$

²Hinweis: Durch die Einführung der generalisierten Koordinaten gilt $q_1 = i$ und $q_2 = z$.

Äußerst bemerkenswert zeigt sich, dass durch den Lagrange-Formalismus in Gleichung 99 des dynamischen Systems genau der Ausdruck für die Reluktanzkraft F_R aufweist, der ebenso über die Betrachtung der Änderung der Spulenenergie durch eine infinitesimale Wegänderung $F_R = \frac{\partial W_L}{\partial q_2}$ hergeleitet werden kann. Dieses erstaunliche Ergebnis gilt vorerst lediglich für die homogene, lineare Betrachtung des magnetischen Kreises.

6.6 Matlab-Simulation am homogenen Modell der Messdose

In diesem Kapitel wird das Zustandsraummodell des dynamischen Systems der induktiven Kraftmessdose unter Berücksichtigung eines homogenen, linearen, magnetischen Kreises erläutert. Ebenso finden sich hier die Simulationsergebnisse bei konstanter Spannungsversorgung $U = 12 \text{ V}$ des elektrischen Stromkreises, sowie bei einer linear steigenden Gewichtskraft F_G . Vorerst wird das Zustandsraummodell betrachtet, das in weiterer Folge als Vorlage für den Simulink-Koppelplan dient. Durch Einführung neuer Variablenbezeichnungen werden aus den generalisierten Koordinaten q_1, q_2 der Bewegungsgleichungen nun die Zustandsvariablen x_1, x_2 und x_3 . Dabei gelten die angeführten Beziehungen:

$$\begin{array}{ll} x_1 := q_2 & \dot{x}_1 := \dot{q}_2 \\ x_2 := \dot{q}_2 & \dot{x}_2 := \ddot{q}_2 \\ x_3 := \dot{q}_1 & \dot{x}_3 := \ddot{q}_1 \end{array} \quad (100)$$

Durch Äquivalenzumformung der Bewegungsgleichungen 98 und 99 ergibt sich das folgende nicht-lineare Zustandsraummodell der induktiven Kraftmessdose unter linearen Betrachtungen des magnetischen Kreises.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{F_G}{m} - \frac{k \cdot c}{m} \cdot x_1 + \frac{L(x_1)}{2m \left(\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta_{max} - x_1 \right)} \cdot x_3^2 + g \\ \dot{x}_3 &= \frac{U}{L(x_1)} - \frac{R}{L(x_1)} \cdot x_3 - \frac{1}{\frac{l_{Fe}}{\mu_r} + \delta_{max} - x_1} \cdot x_3 x_2 \end{aligned} \quad (101)$$

Nun erfolgt die Veranschaulichung der Matlab-Simulation des homogenen Modells der Kraftmessdose. In dieser Simulation wird ein Sprung der Spannungsquelle U von 0 V auf 12 V zum Zeitpunkt $t = 1 \text{ s}$ eingestellt. Ab dem Zeitpunkt $t = 2 \text{ s}$ erfolgt ein linearer Anstieg der Gewichtskraft F_G von 0 N auf ca. 152 N .

An den Ergebnissen der Simulation (siehe Abbildung 57) fällt direkt auf, dass die Induktivität L bei ansteigender Gewichtskraft F_{Gsim} zunimmt. Diese Eigenschaft ist auf den abnehmenden Luftspaltabstand δ zurückzuführen. In weiterer Folge bedeutet das, dass die Reluktanzkraft F_R ebenso zunimmt und in Richtung der Gewichtskraft wirkt, wobei die Wegzunahme dadurch beschleunigt wird. Bemerkenswert erscheint die präzise Rückrechnung der Kraft F_G über die ermittelte Induktivität L . Dabei unterscheidet sich die eingeprägte Kraft F_{Gsim} zur errechneten Kraft F_G nur minimal nach dem Spannungssprung. Diese Kraftunterschiede sind im Wesentlichen auf den Einfluss der zeitlichen Änderung des Stromes $i(t)$ während des Einschaltvorgangs zurückzuführen. Diese Kenntnis dient als Voraussetzung für die praktische Umsetzung der Kraftmessdose, wobei mittels Zeitkonstantenbestimmung eine Rückrechnung der Induktivität L erfolgen könnte. Zumindest liefert hier das lineare und homogene Modell der Kraftmessdose eine gute Aussicht.

Bildbeschreibung zu Abbildung 57:

- (a) Zurückgelegter Weg $z(t)$ des Ankers über die Zeit t .
- (b) Strom $i(t)$ über die Zeit t .
- (c) Induktivität $L(t)$ über die Zeit t .
- (d) Simulierte Gewichtskraft $F_{Gsim}(t)$ und über die Induktivität zurückberechnete Kraft $F_G(t)$ über die Zeit t .
- (e) Reluktanzkraft $F_R(t)$ verursacht durch das magnetische Feld.
- (f) Federkraft $F_c(t)$ über die Zeit t .

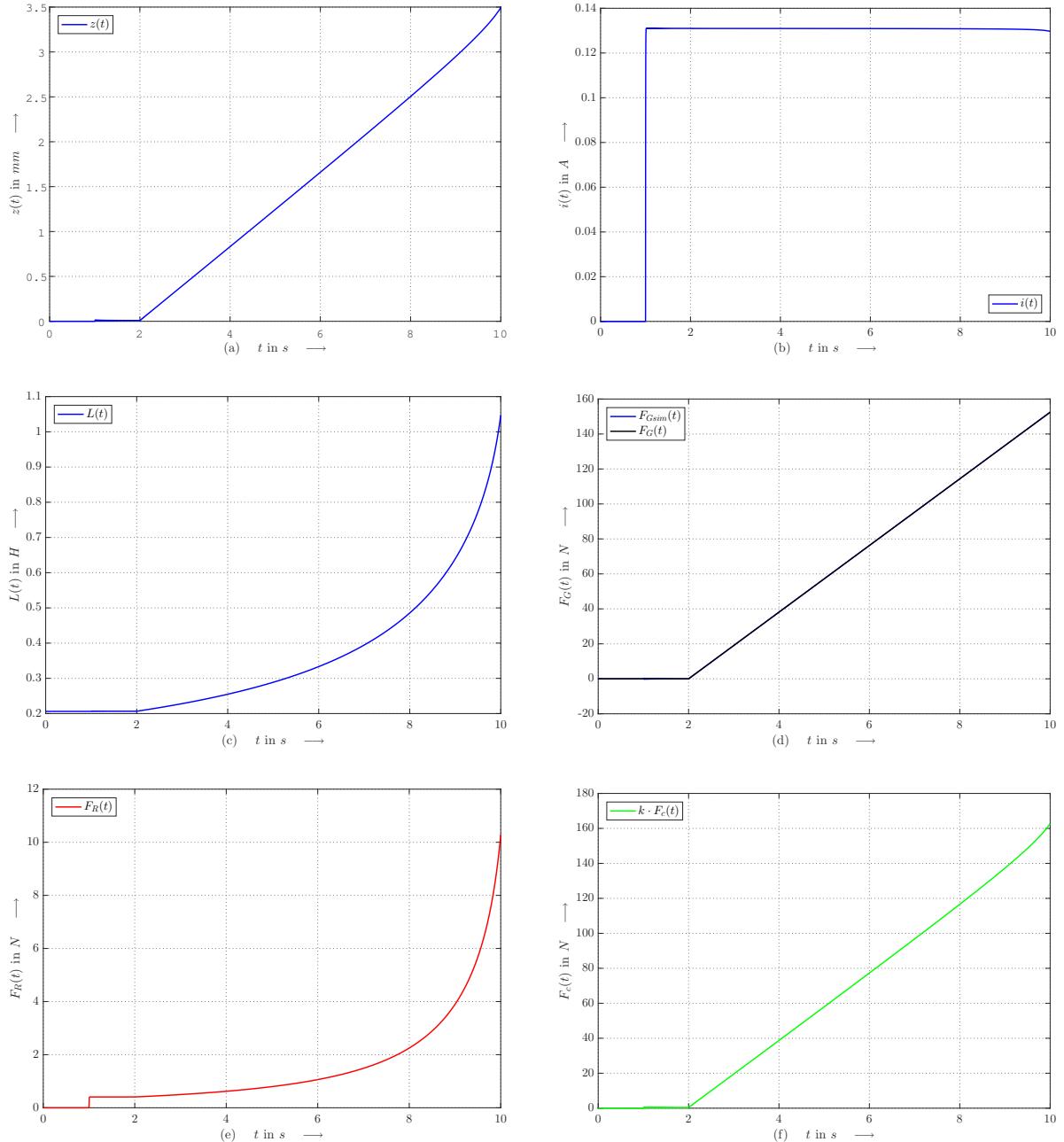


Abbildung 57: Modellverhalten bei Spannungssprung bei $t = 1\text{ s}$ und linear ansteigender Gewichtskraft $F_{Gsim}(t)$ ab $t = 2\text{ s}$

7 Ansatz mittels Load-Line Methode

In diesem Abschnitt wird eine grafische Methode, die Load-Line Methode (siehe [3]), zur Lösung eines nichtlinearen magnetostatischen Problems beschrieben. Diese Methode dient letztlich zur Berechnung der magnetischen Energie W_m , und der magnetischen Flussverteilung ψ wodurch die Induktivität L des elektromagnetischen Systems bestimmt werden kann. Die Load-Line Methode bietet daher eine Alternative zur FEM-Simulation. Vorerst wird auf die Problemstellung eingegangen.

7.1 Anwendung der Load-Line Methode

Betrachtet man ein nichtlineares, magnetostatisches Problem, wie in Abbildung 13 dargestellt, mit bekannter Erregung NI durch eine Spule mit N Wicklungen und dem eingeprägten Strom I , so ergibt sich vorerst ein unbekannter Fluss ϕ . Durch die unterschiedlichen Geometrien der Teilsegmente k ergibt sich somit die Berechnung des Flusses ϕ aus

$$\phi = \frac{NI}{\sum_k \frac{l_k}{\mu(\phi) \cdot A_k} + \frac{l_g}{\mu_0 \cdot A_g}} \quad (102)$$

wobei l_g und A_g die Länge sowie die Fläche des Luftspaltes beschreiben. Hierbei fällt auf, dass aufgrund des flussabhängigen Materials, beschrieben durch die Permeabilität $\mu(\phi)$, eine implizite, nichtlineare Gleichung vorliegt. Eine Variante zur Lösung dieser Gleichung 102 kann nun durch die Load-Line Methode beschrieben werden.

Es wird für die Berechnung des Flusses ϕ mittels der Load-Line Methode vorausgesetzt, dass die Magnetisierungskurve (B/H Kurve) bekannt ist. Nun erfolgt die Zerlegung der Geometrie des magnetostatischen Problems in k äquidistante Teilstücke der Länge Δl . Der Luftspalt wird dabei nicht berücksichtigt. Es ergibt sich zu jedem Teilstück eine dementsprechende Querschnittsfläche A_k . In weiterer Folge wird für jedes einzelne Teilstück auf Basis der B/H Kurve die entsprechende ϕ_k/Θ_k Kurve berechnet. Diese Kurven lassen sich wie folgt ermitteln.

$$\begin{aligned}\phi_k &= B \cdot A_k \\ \Theta_k &= H \cdot \Delta l\end{aligned}$$

Aufgrund der äquidistanten Unterteilung ist ersichtlich, dass alle Teilstücke derselben Θ_k Beziehung unterliegen. Die Idee ist nun, dass zu bestimmten Werten des Flusses ϕ_j die jeweilige magnetische Durchflutung Θ_k der Teilstücke zu Θ_{sum} summiert werden. Zur Verdeutlichung sei angemerkt, dass ϕ_j in der Programmierumgebung als ein n-elementiger Vektor von 0 bis zum maximal auftretenden Fluss ϕ_{max} dargestellt werden kann, dabei verläuft j von 1 bis n .

$$\Theta_{sum}(\phi_j) = \sum_j \sum_k \Theta_k(\phi_j) \quad (103)$$

Die Durchflutung Θ_{sum} repräsentiert die summierte magnetische Erregung jedes einzelnen Teilstückes multipliziert mit der Stücklänge Δl über die Länge des Eisenkreises l_{Fe} . Somit errechnet sich die gesamte, eingeprägte magnetische Durchflutung NI aus der Summe der Durchflutung im Eisenkreis Θ_{sum} und der Durchflutung im Luftspalt Θ_g .

$$NI = \Theta_{sum}(\phi_j) + \Theta_g(\phi_j) = \Theta_{sum}(\phi_j) + \phi_j \frac{l_g}{\mu_0 \cdot A_g} \Leftrightarrow$$

$$\Theta_{sum}(\phi_j) = NI - \phi_j \frac{l_g}{\mu_0 \cdot A_g} = -\frac{l_g}{\mu_0 \cdot A_g} \phi_j + NI \quad (104)$$

Aus Gleichung 104 wird schnell ersichtlich, dass sich die magnetische Durchflutung im Eisenkreis Θ_{sum} durch eine lineare Beziehung aus der gesamten magnetischen Durchflutung NI und magnetischen Durchflutung im Luftspalt Θ_g ergibt. Variiert man nun den Fluss ϕ_j von $j \in [1, n]$ so erhält man eine Geraden-Funktion, siehe Abbildung 58. Bildet diese Funktion mit der nichtlinearen Kurve $\Theta_{sum}(\phi_j)$ aus Gleichung 103 einen Schnittpunkt, so entspricht dieser Schnittpunkt $\Theta_{sum}(\phi_s)$ dem aktuellen Betriebspunkt, wobei genau der magnetische Fluss $\phi = \phi_s$ und die magnetische Durchflutung $\Theta = \Theta_{sum}(\phi_s)$ abgelesen werden können. Das heißt, dass ϕ_j solange variiert wird bis die folgende Gleichung 105 gültig ist. Daraus ergibt sich der aktuelle Betriebspunkt.

$$\sum_j \sum_k \Theta_k(\phi_j) \stackrel{!}{=} -\frac{l_g}{\mu_0 \cdot A_g} \phi_j + NI \quad (105)$$

Die Abbildung 58 stellt die Gleichung 105 grafisch dar, wobei zur besseren Darstellung Abszisse und Ordinate vertauscht wurden. Es wird hier der Betriebspunkt des Modells der Kraftmessdose bei einem Luftspalt von $\delta = 0.7mm$ und einer eingeprägten magnetischen Durchflutung von $NI = 1518 \cdot 0.18341A = 278.4A$ ermittelt. Dabei ergibt sich ein magnetischer Fluss durch den Eisenkreis von $\phi = 0.167 mVs$.

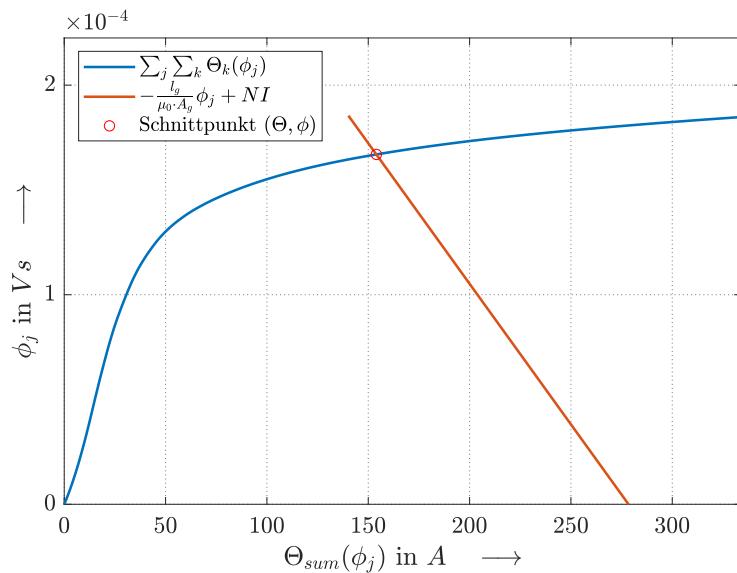


Abbildung 58: Schnittpunkt Bestimmung bei einem Luftspalt von $\delta = 0.7mm$

Als nächstes kann aus dem Fluss ϕ für jedes Teilstück k die Flussdichte anhand der Beziehung $B_k = \frac{\phi}{A_k}$ bestimmt werden. Mittels der B/H Kurve kann nun die magnetische Erregung $H_k = \frac{B_k}{\mu_0 \cdot \mu_k}$ in jedem Teilstück bestimmt werden. Zur Berechnung der Induktivität L wird vorerst die Flussverkettung $\psi = N \cdot \phi$ benötigt. Nun kann die Induktivität L des Betriebspunktes berechnet werden. Durch Variation des Lufspaltes δ kann in jedem neuen Betriebspunkt mittels der Load-Line Methode ein Schnittpunkt gefunden werden. Somit lässt sich die Induktivität in Abhängigkeit des Lufspaltes $\delta = \delta_{max} - z$ darstellen, siehe Abbildung 59.

$$L(z) = \frac{\psi(z)}{I}$$

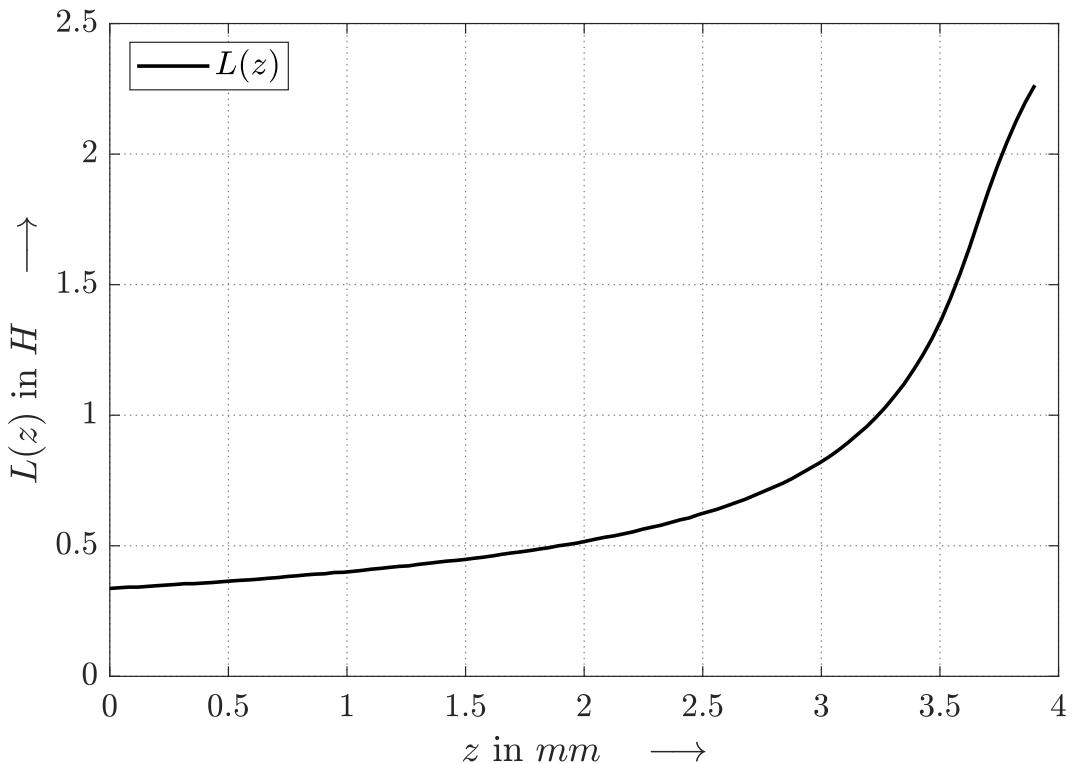


Abbildung 59: Induktivität L in Abhängigkeit von z

Da nun in jedem Teilstück die Flussdichte B_k bekannt ist, kann diese über den Verlauf des Eisenkreises l_{Fe} dargestellt werden, siehe Abbildung 60. Ein Vergleich mit Abbildung 32 zeigt eine gute Übereinstimmung im Betriebspunkt $I = 110 \text{ mA}$, $\delta = 1.7 \text{ mm}$. Wodurch sich die beiden Berechnungsarten jedoch unterscheiden wird in nächstem Abschnitt diskutiert.

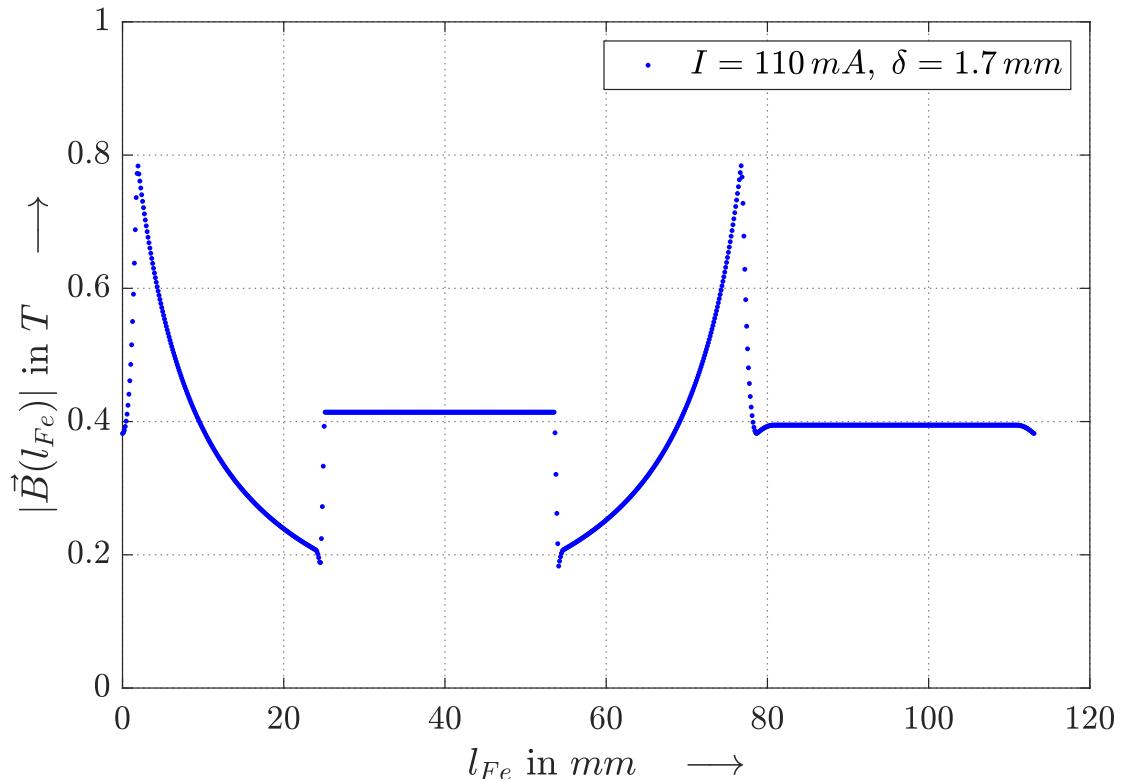


Abbildung 60: Betrag der magnetischen Flussdichte entlang der mittlere Eisenkreislänge, berechnet durch die Load-Line Methode

7.2 Vergleich zu FEM-Methode

Die Load-Line Methode bietet eine gute Alternative zur Berechnung magnetischer Kenngrößen eines nichtlinearen magnetostatischen Problems, wie es die Kraftmessdose darstellt. Die Bestimmung des Schnittpunktes, wie in Abbildung 58 dargestellt, lässt sich einfach in einer Programmierumgebung umsetzen. Je größer die Anzahl der Unterteilung des Eisenkreises in k Teilstücke erfolgt, desto genauer kann die Berechnung erfolgen. Es sei aber angemerkt, dass aufgrund numerischer Ungenauigkeit k nicht zu groß gewählt werden soll, da sich daraus sehr kleine magnetische Erregungen H_k in den Teilstücken ergeben.

Betrachtet man nun Abbildung 61 so lässt sich ein deutlicher Unterschied in den Induktivitäten $L(z)$ der Methoden erkennen.

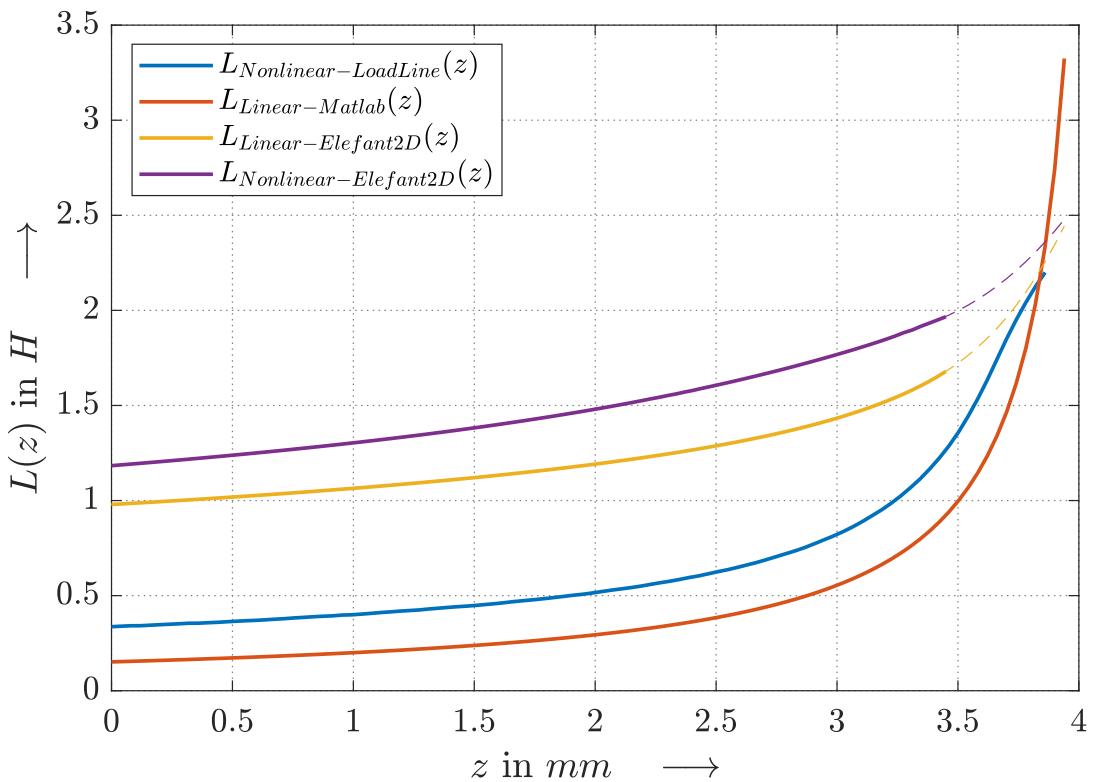


Abbildung 61: Induktivitäten L in Abhängigkeit von z

Die Ergebnisse der FEM Methode durch Elefant2D unterscheiden sich aufgrund der Homogenität des Eisenkreis-Materials. Dabei ist für die Simulation des linearen Falls eine konstante Permeabilität μ_r eingestellt worden. Die Abweichung der Load Line Methode zur Elefant2D Simulation könnte auf die Streuung der Flusslinien am Luftspalt zurück zu führen sein. Diese Streuung der Flusslinien kann in Abbildung 21 sehr gut beobachtet werden. Je größer der Luftspalt des Modells der Kraftmessdose wird, desto mehr werden die Flusslinien streuen. Das bedeutet, dass die Flussdichte im Luftspalt keineswegs mehr als homogen zu betrachten ist, da sich durch die Streuung die Länge sowie die Querschnittsfläche der Flusslinien drastisch ändern. Dieses Phänomen wird in der FEM-Simulation berücksichtigt, jedoch bei der Load-Line Methode nicht. Eine Abhilfe zu diesem Problem leistet dabei die Einführung des

Fringing-Faktors F . Dieser Faktor beschreibt in einer Näherung wie sich die mittlere Weglänge der Flusslinien sowie die mittlere Querschnittsfläche des Luftspaltes durch die Streuung ändern. Eine gängige Berechnung des Fringing-Faktors ist durch die folgende Gleichung gegeben

$$F = 1 + \frac{\delta}{2\sqrt{A_g}} \cdot \log \left(\frac{2l}{\delta} \right),$$

wobei A_g der Querschnitt des Luftspaltes und l die Wicklungslänge darstellen [4]. Der Fringing-Faktor wird nun in Gleichung 104 angewandt.

$$\Theta_{sum}(\phi_j) = -\frac{l_g}{\mu_0 \cdot A_g \cdot F} \phi_j + NI$$

Trotz der Korrektur durch den Fringing-Faktor bleibt eine Abweichung zur FEM-Methode bestehen. Diese Abweichung könnte durch die Platzierung des Luftspaltes in den mittleren Anker verbessert werden, da hier die Querschnittsfläche des Eisenkreises um ein Vielfaches kleiner ist als in der äußeren, vertikalen Einrahmung. Die größere Querschnittsfläche bietet durch die ringförmige Geometrie ein höheres Potential für die Streuung der Flusslinien. Ebenso ist unter anderem die Abweichung des linearen Matlab Modells auf etwaige Streuflüsse zurück zu führen.

Literatur

- [1] O. Bruhns, *Aufgabensammlung Technische Mechanik 1*, 2nd ed. Vieweg & Sohn, Nov. 2000.
- [2] K. Preis, “Ergänzende unterlagen zur vorlesung simulation mechatronischer systeme,” 2017.
- [3] M. T. Slawomir Wiak, A. Krawczyk, *Computer Engineering in Applied Electromagnetism*. Springer, 2005.
- [4] S. Zurek, “Flux fringing,” Online, Jul. 2020. [Online]. Available: http://www.encyclopedia-magnetica.com/doku.php/flux_fringing