高数

极限

x→0 时常见的麦克劳林公式

$$
\begin{aligned}
&\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+o\left(x^3\right), \quad \cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o\left(x^4\right), \\
&\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right), \quad \arcsin x=x+\frac{1}{3!}x^3+o\left(x^3\right), \\
&\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right), \quad \ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o\left(x^3\right), \\
&e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+o\left(x^3\right),(1+x)^a=1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+o\left(x^2\right)
\end{aligned}
$$

Formula_Plus

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e-\frac{e}{2}x+\frac{11e}{24}x^2+o\left(x^2\right)$
2. $x\to 0: 1-\cos^{\alpha}x\sim\frac{\alpha}{2}x^2$

计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{\frac{1}{x}}+e^2\left(x-\sqrt{1-2x}\right)}{x^2}$

泰勒展开

Example1

$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，$f''(x)<0,$ 证明：$\int_0^1 f(x)dx<f(\frac{1}{2})$

解：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(t)}{2}(x-x_0)^2(t$位于$x_0$与$x$之间$)$

因为$f''(x)<0$，所以有$\int_0^1 f(x)dx<f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})\cdot\int_0^1(x-\frac{1}{2})dx$

又因为$\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^{2n+1}dx=0$，所以$\int_0^1 f(x)dx<f(\frac{1}{2})$

证毕。

Example2

设$g(x)$在$[0，1]$上为正值连续函数，证明：$\int_0^1\ln g(x)dx<\ln\int_0^1 g(x)dx$

高阶导数的求解

> $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$
> $f(x)|_{x=a}=f(a)+f'(a)x+\frac{f''(a)}{2}x\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n$
> $f^{(n)}(a)=n!\cdot a_n$

若$f(x)|_{x=a}=0$，对于求解高阶导数$f^{(n)}(a)$的值，受上述泰勒展开式的启发，针对选择题与填空题，可得到如下结论：

$f(x)=(x-a)^n\frac{f(x)}{(x-a)^n}$

则有$f^{(n)}(a)=n!\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}$

针对这个极限表达式$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^n}$，我们的目的不是求出极限值，而是求出$f(x)$的在泰勒展开后的对应的$(x-a)^n$的那一项,

如果在寻找过程非常困难，我们可以引入级数展开或者洛必达的方式。

Example1:

$f(x)=x^2\ln(1+x)$, 求$f^n(0)$ $(n>3)$

解：$f^{(n)}(0)=n!\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ln(1+x)}{x^n}$

根据$\ln(1+x)$级数展开后，有$\dfrac{x^2\ln(1+x)}{x^n}\sim\dfrac{x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}}{x^n}$

当分子上方的$n=n-2$时，在消除分母x^n, 有$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ln(1+x)}{x^n}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n-2}$

所以 $ans=n!\dfrac{(-1)^{n-1}}{n-2}$

Example2

$f(x)=(1-x^m)^n$, 求$f^{(n)}(1)$

解：$f^{(n)}(1)=n!(-1)^n\cdot\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{x^m-1}{x-1})^n$

$\dfrac{x^m-1}{x-1}\sim\sum\limits_{i=0}^{m-1}x^i$

因为$x\to 1$，所以$\dfrac{x^m-1}{x-1}=m$

$ans=n!(-1)^n\cdot m^n$

Example3

$f(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$， 求$f^{(100)}(0)$

解：$f(x)=1-\dfrac{x+x^2}{1+x+x^2}$

$f^{(n)}(0)=-1\cdot(3n+1)!\cdot\dfrac{(x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n}}{x^{3n+1}}$

$ans=100!\cdot(-1)\cdot(1)=-100!$

Example4

设函数$f(x)=(x+1)^n\cdot e^{-x^2}$, 求$f^{(n)}(-1)$

解：$f(x)=(x+1)^n\cdot\dfrac{(x+1)^n\cdot e^{-x^2}}{(x+1)^n}$

所以，$f^n(-1)=n!\cdot e^{-x^2}|_{x=-1}=\dfrac{n!}{e}$

$ans=\dfrac{n!}{e}$

二阶偏导数

Example1

设 $z=f(x^2-y^2,xy)$, 且 $f(u,v)$有连续的二阶偏导数数,则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$

解：$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1+yf_2\\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1+xf_2\end{cases}$

小技巧(限选填)：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(\dfrac{\partial z}{\partial x})_y+\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=>$

$$\begin{aligned}I&=(2xf_1+yf_2)_y+(2xf_1+yf_2)\cdot(-2yf_1+xf_2)\\&=f_2-4xyf_{11}+2(x^2-y^2)f_{12}+xyf_{22}\end{aligned}$$

一些关于积分的高级结论

1. $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$
2. $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$
4. $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

1.当$f(x)(m \le f(x) \le M)$有界， $=> \lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$

2.当$f'(x)$连续(闭区间连续，则有界)， $=> \lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$

积分恒等式： $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

$\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^{2n+1}dx = 0$

有理函数积分的求解

任意一个有理真分式$\frac{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}(n > m)$可分解成

$$\frac{A}{x-a}, \frac{A}{(x-a)^k}(k=2,3,\cdots), \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^i}(i=2,3,\cdots)$$

这四类部分分式的和, 并且这四类部分分式的积分都可以求出！

$$\int\frac{1}{1+x^3}dx = \int\frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{1-x+x^2}dx$$

三角函数积分求解

该类积分的处理思想就是去二角变成有理函数的积分。

被积函数是$R(\sin x, \cos x)$,其中$R(x,y)$为x,y 的二元有理函数。

1. 若$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$,则原积分可化为$\int f(\sin x)d(\sin x)$或$\int f(\csc x)d(\csc x)$.
2. 若$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$,则原积分可化为$\int f(\cos x)d(\cos x)$或$\int f(\sec x)d(\sec x)$.
3. 若$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$,则原积分可化为$\int f(\tan x)d(\tan x)$或$\int f(\cot x)d(\cot x)$

其中$f(x)$为一元有理函数, 这样就可以消去三角函数, 将原分转换成有理函数的积分：

Example1

$$\begin{aligned} &\int\frac{1}{\sin x\cos^4 x}dx \\ =& -\int\frac{d\cos x}{(1-\cos^2 x)\cos^4 x} \end{aligned}$$

Example2

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{\sin^3 x+\sin x} \\
=&-\int \frac{d\cos x}{\sin^4 x+\sin^2 x} \\
=&-\int \frac{d\cos x}{(1-\cos x)^2+1-\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

Example3

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{5+8\sin x\cos x} \\
=&\int \frac{d\tan x}{5\sec^2+8\tan x} \\
=&\int \frac{d\tan x}{5(1+\tan^2 x)+8\tan x}
\end{aligned}
$$

Example4

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{ln\tan x}{\sin x\cdot\cos x}dx \\
=&\int \frac{\ln\tan x}{\tan x}d\tan x \\
=&\int \ln\tan x d\ln\tan x
\end{aligned}
$$

万能公式

$$
令\tan\frac{x}{2}=t,则dx=\frac{2dt}{t^2+1},\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.
$$

三指幂对反

Example1

$$
\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx
$$

Example2

$$
\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx
$$

变限积分

Example1

设函数$f(x)$连续，且$f(0)\neq 0$,求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\int_0^x(x-t)f(t)dt}{x\int_0^x f(x-t)dt}$

引理：$\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x f(t)dt$

解：化简分母，根据洛必达对分子分母求导可得 =>

$$
\begin{aligned}
I&=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+2xf(x)-2xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)} \\
&=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}=1,其中\xi\text{ 介于 }0,x\text{ 之间}
\end{aligned}
$$

注意：这里最后一步不能再次进行洛必达，因为函数连续不意味着可导,利用积分中值定理即可。

二重积分

Example1

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx$$

解：因为$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx$，$\frac{x^b}{\ln x}-\frac{x^a}{\ln x}=\int_a^b(\frac{x^t}{\ln x})'dt=\int_a^b x^t dt$

所以 $I=\int_0^1 dx\int_a^b x^t dt=\int_a^b dt\int_0^1 x^t dx=\int_a^b \frac{1}{t+1}dt=\ln\frac{a+1}{b+1}$

Example2

> Method1:凑微分

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$$

解：$I=\int_0^{+\infty}dx\int_a^b -e^{-xt}dt=\int_a^b(-\frac{e^{-xt}}{t})\Big|_0^{+\infty}dt=\int_a^b\frac{0-(-1)}{t}dt=\ln\frac{b}{a}$

Froullani积分公式

> Method2: **傅汝兰尼(Froullani)积分公式**
>
> $$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=(f(+\infty)-f(0^+))\ln\frac{a}{b}$$

解：$I=(0-1)\cdot\ln\frac{a}{b}=\ln\frac{b}{a}$

Example3

设$f(x)$为非负连续函数且满足$\int_x^{\frac{\pi}{2}}f(t)f(t-x)dt=\cos^4 x$,求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$

解：因为$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_x^{\frac{\pi}{2}}f(t)f(t-x)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$，由积分换序可得

$=>I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt\int_0^t f(t-x)dx,$

现对$K=\int_0^t f(t-x)dx$进行换元，可得$K=\int_0^t f(x)dx,$

所以有$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt\int_0^t f(x)dx$，

又因为$(\int_0^t f(x)dx)'=f(t)=>\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\int_0^t f(x)dx)d\int_0^t f(x)dx=\frac{1}{2}(\int_0^t f(x)dx)^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}==\frac{3\pi}{16}$

$ans=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=(\frac{3\pi}{8})^{\frac{1}{2}}$

Example4

设$f(x)\in C[0,1]$且满足$f(x)=1+\lambda\int_x^1 f(y)f(y-x)dy$,试证明:$\lambda\leqslant\frac{1}{2}$

证明：同上，易得$\int_0^1 f(x)dx=1+\frac{\lambda}{2}(\int_0^1 f(x)dx)^2$

$=>\frac{\lambda}{2}x^2-x+1=0,$方程要有解，则有$\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot\frac{\lambda}{2}\geq 0$，

所以$\lambda\geq\frac{1}{2}$,得证。

Example4

设$f\,(x)$为连续正函数,已知对所有的t,有$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|t-x|}f\,(x)dx\leqslant 1$

证明:对于任意的$a,b\,(a<b)$，有$\int_a^b f\,(x)dx\leqslant\frac{b-a+2}{2}$

证明：因为$\int_a^b e^{-|x-t|}f(x)dx\leq\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-t|}f(x)dx$，所以$\int_a^b dt\int_a^b e^{-|x-t|}f(x)dx=\int_a^b f(x)dt\int_a^b e^{-|x-t|}dx\leq b-a$

换元去除绝对值之后$=>\int_a^b f(x)dx[\int_0^{x-a}e^{-y}dy-\int_0^{x-b}e^y dy]=\int_a^b(2-e^{a-x}-e^{x-b})f(x)dx\leq b-a$

$$\int_a^b f(x)dx\leq\frac{b-a}{2}+\int_a^b(e^{a-x}+e^{x-b})f(x)dx=\frac{b-a}{2}+\int_a^b(e^{-|x-a|}+e^{-|x-b|})f(x)dx\leq\frac{a+b+2}{2}$$

Example5

已知$\int_0^{+\infty}\frac{sinx}{x}dx=\frac{\pi}{2}$, 则$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{sinx\cdot sin(x+y)}{x(x+y)}dxdy$

$$
\begin{aligned}
解：令F(x)&=\int_0^x\frac{sinx}{x}dx, F'(x)=\frac{sinx}{x}，I=\int_0^{+\infty}\frac{sinx}{x}dx\int_x^{+\infty}\frac{sint}{t}dt\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{sinx}{x}dx(\int_0^{+\infty}\frac{sint}{t}dt-\int_0^x\frac{sint}{t}dt)\\
&=(\frac{\pi}{2})^2-\int_0^{+\infty}(\int_0^x\frac{sint}{t}dt)d(\int_0^x\frac{sint}{t}dt)\\
&=(\frac{\pi}{2})^2-\frac{1}{2}(F(x))^2\\
&=(\frac{\pi}{2})^2-\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})^2=\frac{\pi^2}{8}
\end{aligned}
$$

雅可比变换

$$
设在变换\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}下,xOy\text{ 平面上的}D\text{ 变为}uOv\text{ 平面上的}D'
$$

$$
则有\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'}f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv, 其中J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\ \\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}
$$

Example1

计算$\iint\limits_D(x+y)dxdy$，其中D：$x^2+y^2\le x+y+1$

$$
\begin{cases}x=r\cos\theta+\frac{1}{2}\\y=r\sin\theta+\frac{1}{2}\end{cases}=>I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}}(1+r\sin\theta+r\cos\theta)rdr=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}}rdr=\frac{3\pi}{2}(sinx和cosx在0\sim 2\pi上积分和为零)
$$

Example2

> 形如以下题目的求解，我们可以通过$\begin{cases}u=\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y\\v=\sin\theta\cdot x-\cos\theta\cdot y\end{cases}$，采用这种换元简化运算
>
> 此时有雅可比行列式的值$|J|=1$

计算$\iint\limits_D|3x+4y|d\sigma$, 其中$D: x^2+y^2\le 1$

$$
\begin{aligned}
&解：令\begin{cases}u=(3x+4y)/5\\v=(4x-5y)/5\end{cases}，由克莱默法则得到\begin{cases}x=f_1(u,v)\\y=f_2(u,v)\end{cases}，可以推得|J|=1\\
&\quad I=5\iint\limits_{D_1}|u|d\sigma, 其中D1: u^2+v^2\le 1\\
&\quad 令\begin{cases}u=r\cos\theta\\v=r\sin\theta\end{cases}，I=5\int_0^{2\pi}|\cos\theta|d\theta\int_0^1 r\cdot rdr=20\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_0^1 r\cdot rdr=\frac{20}{3}
\end{aligned}
$$

极坐标

计算伯努利双纽线$(x^2+y^2)^2=2a^2xy$所围面积$(a>0)$

$$
\begin{aligned}
&解：令\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}=>r^2=a^2\cdot\sin 2\theta>0,\quad 2\theta\in[0,\pi]\cup[2\pi,3\pi]\\
&\quad S=(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta+\int_\pi^{\frac{3\pi}{2}}d\theta)\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}rdr
\end{aligned}
$$

三重积分

穿线法

$$
I=\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dv=\iint\limits_{D_\perp}dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz
$$

截面法

$$
I=\int_{下}^{上}function(z)\cdot S_zdz, 其中(S_z=\iint\limits_{D_z}f(x,y,z)dz)
$$

柱坐标

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(rcos\theta，rsin\theta，z)\cdot(r)drd\theta dz$$

球坐标

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(rsin\varphi cos\theta，rsin\varphi sin\theta，rcos\theta)\cdot(r^2sin\theta)drd\varphi d\theta$$

Example1

计算$I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dV$, 其中$V$由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与圆柱面$x^2+y^2=2x$及平面$z=0$所围成。

$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}dr\int_0^r r^2dz$

微分方程

1. 对于简单的变量注意分类讨论，注意分母为0的情况

> 求微分方程$y'\tan x=y\ln y$ 的通解。
> 注意变量分离时，注意$ylny\neq 0$，解出的结果不要忽略 $y\equiv 1$

2. 齐次微分方程**(记得换元要还回去变量（x，y）！！！)**

> **Example1**

> $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx=xdy$
>
> 解：$dy=tdx+xdt$
> $\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$
> $=>\ln|x|=\ln(t+\sqrt{t^2+1})+C_1=>c_2x=t+\sqrt{t^2+1}$
>
> **Example2**
>
> $(1-e^{-\frac{x}{y}})ydx+(y-x)dy=0$
>
> 解： $=>t=\frac{x}{y},t-e^{-t}=\frac{C_0}{y}$

3. 可降阶的二阶微分方程

> **Example1**

> 求微分方程$yy''-y'^2=0$ 的通解及满足$y(0)=1,y'(0)=\frac{1}{2}$的特解。
>
> 解：$p=y^2,y''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\cdot\frac{dp}{dy}$
> $=>\int\frac{1}{p}dp=\int\frac{1}{y}dy=>y=c_1e^{c_2x}$

全微分方程

Example1

求微分方程$(4-x+y)dx+(x+y-2)dy=0$的通解

解：$u(x,y)=\int_L(4-x+y)dx+(x+y-2)dy$
因为$\begin{vmatrix}P & Q\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4-x+y & x+y-2\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\end{vmatrix}=1-1=0$，所以曲线积分与路径无关
$u(x,y)=\int_0^x(4-x)dx+\int_0^y(x+y-2)dy=4x-\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2-2y$
所以$4x-\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2-2y=C$为此微分方程的解

Example2

求微分方程$(y^2+1)dx=y(y-2x)dy$ 的通解

解：$(y^2+1)dx+(2x-y)ydy=0$符合全微分方程的结构
$=>dx+dxy^2-y^2dy=0$
$=>x+xy^2-y^2=C$

可化为齐次方程的微分方程

求微分方程$(x-y+3)y'=(x+y-1)$的通解。

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y-1}{x-y+3}$
$\begin{cases}x+y-1=0\\x-y+3=0\end{cases}=>\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$
令$\begin{cases}u=x+1\\v=y-2\end{cases}=>\dfrac{dv}{du}=\dfrac{u+v}{u-v}$

反向代理+伯努利方程

Example1

求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^3y}{x^4+y^2}$满足y(1)=1的通解。

解：$\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{2}yx=\dfrac{1}{2}y\cdot x^{-3}$
$=>\dfrac{dx^4}{dy}-2yx^4=2y$
$=>x^4=e^{y^2}\cdot(2y\cdot e^{-y^2}+C)$, 又因为$y(1)=1$
所以$x^4=e^{y^2}\cdot(2y\cdot e^{-y^2}-\dfrac{1}{e})$

Example2

求微分方程$(5x^2y^3-2x)y'+y=0$的通解

解：$\dfrac{dx^{-1}}{dy}+\dfrac{2}{y}x^{-1}=5y^2$

x'的妙用

求微分方程$y''+(x+\sin y)y'^3=0$ 的通解.

解：因为$\begin{cases}y'=\frac{1}{x'}\\y''=\frac{d\frac{1}{x'}}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{x''}{(x')^3}\end{cases}$
原式可以化为
$=>x''-x=\sin y$
$\overline{x}=e^y\cdot(c_1+c_2y),\quad x^*=\dfrac{1}{D^2-1}\sin y=-\dfrac{1}{2}\sin y$
$x=\bar{x}+x^*=e^y\cdot(c_1+c_2y)-\dfrac{1}{2}\sin y$

曲线积分

设L为球面$x^2+y^2+z^2=1$与平面$x+y+z=0$的交线，求$\displaystyle\oint_L xyds$。

$Method1$

解：$\begin{cases}x+\frac{y}{2}=\cos\theta\\\frac{\sqrt{3}}{2}y=\sin\theta\\z=-(x+y)\end{cases}=>\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta\\y=\frac{\sqrt{6}}{3}\sin\theta\\z=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta\end{cases}$

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}x(\theta)\cdot y(\theta)\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2+(z'(\theta))^2}d\theta\\&=\int_0^{2\pi}(\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\cos\theta-\frac{1}{3}\sin^2\theta)d\theta\\&=\int_0^{2\pi}(\frac{\sqrt{3}}{6}\sin2\theta-\frac{1}{3}\sin^2\theta)d\theta\\&=-\frac{1}{3}\pi\end{aligned}$$

$Method2$

解：$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{3}ds==\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}ds=-\frac{1}{3}\pi$

格林公式

$$\oint_{L^+} Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

Example1

求$I=\int_L(e^x\sin y-b\,(x+y))dx+(e^x\cos y-ax)dy$, 其中$a,b$为正常数，$L$为从点$A(2a,0)$沿曲线$y=\sqrt{ax-x^2}$到点$O(0,0)$的弧。

$$\begin{aligned}
\text{解：}I&=\oint_{L+\overrightarrow{OA}}-\int_{\overrightarrow{OA}}\\
&=\iint\limits_{D_1}(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y})d\sigma-\int_0^{2a}(-bx)dx\\
&=(b-a)\iint\limits_{D_1}d\sigma+2a^2b\\
&=(b-a)\frac{\pi a^2}{2}+2a^2b
\end{aligned}$$

Example2

> 挖洞法

计算曲线积分$I=\oint_{L^+}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$, 其中$L$是以$(1,0)$为中心，$R$为半径的圆周$(R>1)$, 取逆时针方向。

解：我们可以看到所求积分内含有奇点(未被定义的点)，所以我们得采取$'$挖洞法$'$(遵循外逆内顺的原则)。

$$\begin{aligned}
&L_1:4x^2+y=\epsilon^2(\epsilon>0,\epsilon\text{足够小})\\
&=>\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\epsilon\right)^2}+\frac{y^2}{\epsilon^2}=1\\
&I=\oint_{L^+}=\oint_{L^+-L_1^+}+\oint_{L_1^+}=0+\oint_{L_1^+}=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{D}2d\sigma=\frac{2}{\epsilon^2}\cdot\pi\cdot\frac{\epsilon^2}{2}=\pi
\end{aligned}$$

Example3

> 补线+挖洞

计算$I=\int_{L^+}\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, 其中$L$为从点$A(\pi,-\pi)$沿曲线$y=\pi\cos x$到点$B(-\pi,-\pi)$的弧段

$$\begin{aligned}
\text{解：}I&=\oint_{L^+}=\oint_{L^+-L_1^++\overrightarrow{OA}}+\oint_{L_1^+}-\oint_{\overrightarrow{OA}}=0+\oint_{L_1^+}-\oint_{\overrightarrow{OA}}=\oint_{L_1^+}-\oint_{\overrightarrow{OA}}\\
&=\frac{1}{\epsilon^2}\iint\limits_{D_{L_1^+}}(-2)d\sigma-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x-\pi}{x^2+\pi^2}dx\\
&=2\arctan 1-2\pi=-\frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

Example4

> $f(tx,ty)=t^mf(x,y)$, 我们对函数左右两边分别对t进行求导
> $=>xf_1'+yf_2'=mt^{m-1}f(x,y)$
> 令$t=1$，得到 $xf_x'+yf_y'=mf(x,y)$

设在上半平面$D=(x,y)|y>0)$内函数$f(x,y)$具有偏导数，且对任意的$t>0$都有$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$, 证明对D内的任意分段光滑的有向简单闭曲都有$\int_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$

$$\begin{aligned}
\text{证明：}&\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=\iint(2f+xf_x'+yf_y')d\sigma\\
&t=-2,\text{由上述结论}=>xf_x'+yf_y'=-2f(x,y)\\
&\text{对}I=\int_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy\text{，使用格林公式}=>\text{结合}xf_x'+yf_y'=-2f(x,y)\text{，易得}I=0
\end{aligned}$$

路径无关

Example1

设函数$f(x,y)$在xOy平面上具有一阶连续偏导数，曲线$\int_L 2xydx+Q(x,y)dy$与路径无关，并且对于任意t恒有
$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xydx+Q(x,y)dy=\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xydx+Q(x,y)dy$,求$Q(x,y)$。

解：$Q'_x(x,y)=2x$，$Q(x,y)=x^2+f(y)$

$=>\int_0^1 (t^2+f(y))dy=\int_0^t (1+f(y))dy => f(t)=2t-1$

所以，$Q(x,y)=x^2+2y-1$

曲面积分

高斯定理

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\iint\limits_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

中值定理

达布定理

$$\text{若 } f'(x) \text{ 在区间 } [a,b] \text{ 上存在, 则对任意 } x_1,x_2\in[a,b] \text{ 和 } y\in[f'(x_1),f'(x_2)],\ \exists\, c\in(x_1,x_2) \text{ 使得 } f'(c)=y.$$

Example1

设$f(x)$在$(-2,2)$内可导，证明：
(1)存在$\xi\in(-2,2)$, 使得$\xi(1-\xi)f'(\xi)+1-2\xi=0$
(2)存在$\xi\in(-2,2)$, 使得$\xi(1-\xi)f'(\xi)+1-3\xi=0$

解：$(1)f'(x)+\dfrac{1-2x}{x-x^2}=0$, 对等式左右两边分别积分 $=>\int f'(x)dx+\int\dfrac{d(x-x^2)}{x-x^2}=C_1$

$e^{f(x)}\cdot(x-x^2)=C_2$, 于是我们构造：$F(x)=e^{f(x)}\cdot x(1-x)$

因为$F(0)=F(1)=0$, 由罗尔定理 $=> F(x)=0(x\in(0,1))$

对$F(x)$求导，易得$\xi(1-\xi)f'(\xi)+1-2\xi=0$

(2)同上。

Example2

设$f(x)$在$\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$上二阶可导, $f(0)=f'(0), f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$,
证明:存在$\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, 使得$f''(\xi)=\dfrac{3f'(\xi)}{1-2\xi}$.

解：这里我们有两种方式得到构造的函数：
1.通过这个二阶微分方程找到y，y'之间的联系改造
2.通过表格法
这里我们采用第二种方式：

$$\begin{matrix} 1-2x & -2 & 0 \\ f''(x) & f'(x) & f(x) \end{matrix}$$

$(1-2x)f'(x)+2f(x)=3f(x)+C$

我们构造函数$F(x)=(1-2x)f'(x)-f(x)=C$, 因为$F(\dfrac{1}{2})=F(0)=0$

之后我们对于$F(x)$求导，易得到题中的形式。

Example3

设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上有二阶导数且$g(x),g'\prime(x)\neq 0$,又$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$
证明：存在$\xi\in(a,b)$,使得$\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

解：$u=f(x),v=g(x),\int uv''dx-\int vu''dx=0$
$F(x)=\int udv'-\int vdu'=uv'-u'v=f(x)\cdot g'(x)-f'(x)g(x)$
所以有$F(x)=f(x)\cdot g'(x)-f'(x)g(x)$

Example4

设$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，且$f(0)=f'(0)=0$
证明:存在$\xi\in(0,1)$,使得$f''(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{(1-\xi)^2}$。

解：$\dfrac{f''(x)}{f(x)}=\dfrac{2}{(x-1)^2}=\dfrac{((x-1)^2)''}{(x-1)^2}$。(回见$Example3$同作法)

引理

> 当我们在证明这一类型问题时：$f''(\xi)+f(\xi)=0$
> 通过解微分方程得到通解$f(x)=C_1\sin x+C_2\cos x$;
> 适当变形得到$f(x)\cos x-f'(x)\sin x=C$或$f(x)\sin x+f'(x)\cos x=C$或$f^2(x)+(f'(x))^2$

Stolz定理

$$设数列\{b_n\}单调增加且\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty,如果\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}存在或为+\infty/-\infty,则\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$$

切比雪夫积分不等式

若$f(x)$、$g(x)$在(a,b)上同单调，则有：

$$(b-a)\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx>\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b g(x)dx$$

Example1

比较$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{cosx}{1+e^x}dx$与$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{sinx}{1+e^x}dx$之间的大小

解：构造$I=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sinx-cosx)\cdot\dfrac{1}{1+e^x}dx$
则有$\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sinx-cosx)\cdot\dfrac{1}{1+e^x}dx>\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sinx-cosx)dx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{1+e^x}dx=0$

柯西-施瓦茨不等式

若$f(x),g(x)$在开区间(a,b)连续，则有：

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$$

Example1

设$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，$f(0)=f(1)=0,$证明

$$[\int_0^1 f(x)dx]^2 \le \frac{1}{12}\cdot\int_0^1[f'(x)]^2dx$$

解：因为$f(0)=f(1)=0$，所以有$\int_0^1 f'(x)dx=0 \quad (1)$

又因为$\int_0^1 f(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx = -\int_0^1 xf'(x)dx \quad (2)$

由(2)式，结合$[(1)*\frac{1}{2}]$和$'$柯西$-$施瓦茨不等式$'$，可得 $=>$

$[\int_0^1 f(x)dx]^2 = [\int_0^1 (x-\frac{1}{2})f'(x)dx]^2 \le \int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2dx\int_0^1[f'(x)]^2dx = \frac{1}{12}\cdot\int_0^1[f'(x)]^2dx$

证毕。

Laplace 变换

$$设f(x)以T为周期,则有\int_0^{+\infty} e^{-kx}f(x)dx = \frac{1}{1-e^{-kT}}\int_0^T e^{-kx}\cdot f(x)dx$$