Весьма замечательно, что имеет место даже следующий факт:

Теорема 185. *Существует функция $f(x)$, неограниченное число раз дифференцируемая для всех x и такая, что*

$$\lim_{m=\infty}\sum_{\nu=0}^{m}\frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}h^{\nu}$$

существует для каждого h, но имеет значение $f(h)$ лишь при $h=0$.

Доказательство. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad \mathrm{x}=0,\\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при} \quad x\neq 0.\end{cases}$$

Я покажу сначала, что для каждого целого $\nu\geqslant 0$

$$f^{(\nu)}(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad \mathrm{x}=0,\\ P_\nu(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при} \quad x\neq 0,\end{cases} \tag{1}$$

где $P_\nu(z)$ — полином относительно z.

Согласно примеру к теореме 160,

$$e^b>b \quad \text{при} \quad b>0.$$

Следовательно, при $x\neq 0$ для каждого целого $n\geqslant 0$ имеют место неравенства

$$e^{\frac{1}{x^2}}=(e^{\frac{1}{(n+1)x^2}})^{n+1}>(\frac{1}{(n+1)x^2})^{n+1},$$

$$\frac{1}{|x|^n}e^{-\frac{1}{x^2}}<(n+1)^{n+1}|x|^{n+2},$$

откуда

$$\lim_{x=0}\frac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$$

для каждого целого $n\geqslant 0$. Поэтому и для каждого полинома $P(z)$ имеем

$$\lim_{x=0}P(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}=0. \tag{2}$$

Формула (1) при $\nu = 0$ (с $P_0(z) = 1$) очевидна. Из ν следует $\nu + 1$, так как тогда, в силу равенства (2),

$$f^{(\nu+1)}(0) = \lim_{x=0} \frac{f^{(\nu)}(x)}{x} = \lim_{x=0} \frac{1}{x} P_\nu(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

(ведь $zP_\nu(z)$ также полином), а при $x \neq 0$

$$f^{\nu+1}(x) = (P_\nu(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}})' =$$

$$= P_\nu'(\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})e^{-\frac{1}{x^2}} + P_\nu(\frac{1}{x})\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} = P_{\nu+1}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Тем самым формула (1) доказана. Поэтому для всех h и всех целых $m \geqslant 0$

$$\sum_{\nu=0}^{m} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} h^\nu,$$

следовательно, для всех h

$$\lim_{m=\infty} \sum_{\nu=0}^{m} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} h^\nu,$$

а

$$f(h) = e^{-\frac{1}{h^2}}$$

отлично от 0.

Теорема 186. *Пусть $n \geqslant 2$ целое,*

$$f^{(\nu)}(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant \nu \leqslant n-1,$$

$$f^{(n)}(\xi) \neq 0.$$

1)*Если n четное и $f^{(n)}(\xi) > 0$, то $f(x)$ имеет в ξ минимум.*

2)*Если n четное и $f^{(n)}(\xi) < 0$, то $f(x)$ имеет в ξ максимум.*

3)*Если n нечетное и $f^{(n)}(\xi) > 0$, то $f(x)$ возрастает в ξ.*

4)*Если n нечетное и $f^{(n)}(\xi) < 0$, то $f(\xi)$ убывает в ξ,*