

测度与概率 Notes

Liu Fuzhou

2025 年 2 月 3 日

前言

要看偏微分方程，就要先看泛函分析。要看泛函分析，就要先看实分析。泛函分析和实分析对随机分析也是重要的。无论如何也绕不开 L^p 空间。可见掌握实分析十分重要。以前其实也看过这个主题的书，结果后来都忘了。看来做一些有形的笔记是很有必要的。不需要特别详细，提纲挈领即可。

主要参考文献：

1. 近代概率引论：测度、鞅和随机微分方程。袁震东。科学出版社，1991.
2. 测度与概率教程。任佳刚，巫静。科学出版社，2018.
3. Measure, Integration & Real Analysis. Sheldon Axler. Springer, 2020.

Liu Fuzhou

2025 年 2 月 3 日

目录

第一章 测度论	1
1.1 σ -代数与测度	1

第一章 测度论

1.1 σ -代数与测度

首先比较重要的概念就是集列的上极限与下极限. 集列 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的上极限就是落到其中无限多个集合的元素所做成的集合, 也即 $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 下极限就是除去有限多个集合后, 落到所有集中的元素所做成的集合, 也即 $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. 换言之也即 “最终落到集列” A_n 中的那些元素之全体. 显然, 下限集中的元素也都落到上限集之中, 也即 $\liminf A_n \subset \limsup A_n$. 如果集列 A_n 的上限集与下限集相等, 那么就称集列 A_n 收敛, 并称 $A = \liminf A_n = \limsup A_n$ 为集列 A_n 的极限. 这个极限是关于集合包含的偏序关系说的. 与实数的情况类似, 有单调集列的收敛定理: 如果 $A_n \uparrow$ 是单调递增的, 那么 $\lim A_n = \bigcup_n A_n$. 类似地, 如果 $A_n \downarrow$ 是单调递减的, 那么 $\lim A_n = \bigcap_n A_n$.

例 1.1.1. 设 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 为单调减少集列. 证明

$$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1}) + \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

证明. 首先, 右边的每个集合都含于 A_1 . 因此右边含于 A_1 . 其次, 若 $x \in A_1$ 且 $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 则 $x \in \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1})$ 且 $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 因此 A_1 也是单调递减的. 最后, 若 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 则存在某个 $n > 1$, 使得 $x \notin A_n$. 令 n_0 为最小的这种 n , 那么就有 $x \notin A_{n_0}$, $x \in A_{n_0-1}$. 于是就有 $x \in \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1})$. 这就证明了 $A_1 \subset \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1}) + \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. \square