

# 测度与概率 Notes

Liu Fuzhou

2025 年 2 月 3 日

# 前言

要看偏微分方程，就要先看泛函分析。要看泛函分析，就要先看实分析。泛函分析和实分析对随机分析也是重要的。无论如何也绕不开  $L^p$  空间。可见掌握实分析十分重要。以前其实也看过这个主题的书，结果后来都忘了。看来做一些有形的笔记是很有必要的。不需要特别详细，提纲挈领即可。

主要参考文献：

1. 近代概率引论：测度、鞅和随机微分方程。袁震东。科学出版社，1991.
2. 测度与概率教程。任佳刚，巫静。科学出版社，2018.

Liu Fuzhou

2025 年 2 月 3 日

# 目录

第一章 测度论	1
1.1 $\sigma$ -代数与测度 . . . . .	1

# 第一章 测度论

## 1.1 $\sigma$ -代数与测度

首先比较重要的概念就是集列的上极限与下极限. 集列  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  的上极限就是落到其中无限多个集合的元素所做成的集合, 也即  $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ . 下极限就是除去有限多个集合后, 落到所有集中的元素所做成的集合, 也即  $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ . 换言之也即 “最终落到集列”  $A_n$  中的那些元素之全体. 显然, 下限集中的元素也都落到上限集之中, 也即  $\liminf A_n \subset \limsup A_n$ . 如果集列  $A_n$  的上限集与下限集相等, 那么就称集列  $A_n$  收敛, 并称  $A = \liminf A_n = \limsup A_n$  为集列  $A_n$  的极限. 这个极限是关于集合包含的偏序关系说的. 与实数的情况类似, 有单调集列的收敛定理: 如果  $A_n \uparrow$  是单调递增的, 那么  $\lim A_n = \bigcup_n A_n$ . 类似地, 如果  $A_n \downarrow$  是单调递减的, 那么  $\lim A_n = \bigcap_n A_n$ .

**例 1.1.1.** 设  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  为单调减少集列. 证明

$$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1}) + \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

证明. 首先, 右边的每个集合都含于  $A_1$ . 因此右边含于  $A_1$ . 其次, 若  $x \in A_1$  且  $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ , 则  $x \in \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1})$  且  $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ . 因此  $A_1$  也是单调递减的. 最后, 若  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ , 则存在某个  $n > 1$ , 使得  $x \notin A_n$ . 令  $n_0$  为最小的这种  $n$ , 那么就有  $x \notin A_{n_0}$ ,  $x \in A_{n_0-1}$ . 于是就有  $x \in \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1})$ . 这就证明了  $A_1 \subset \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1}) + \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ .  $\square$