

测度与概率 Notes

Liu Fuzhou

2025 年 2 月 7 日

前言

要看偏微分方程，就要先看泛函分析。要看泛函分析，就要先看实分析。泛函分析和实分析对随机分析也是重要的。无论如何也绕不开 L^p 空间。可见掌握实分析十分重要。以前其实也看过这个主题的书，结果后来都忘了。看来做一些有形的笔记是很有必要的。不需要特别详细，提纲挈领即可。

主要参考文献：

1. 近代概率引论：测度、鞅和随机微分方程. 袁震东. 科学出版社, 1991.
2. 测度与概率教程. 任佳刚, 巫静. 科学出版社, 2018.
3. Measure, Integration & Real Analysis. Sheldon Axler. Springer, 2020.

Liu Fuzhou

2025 年 2 月 7 日

目录

1	集列的极限	1
2	Riemann 积分	1
3	Riemann 积分的若干缺陷	5
4	外测度	7
5	外测度的缺点：不可加性	9
6	可测空间与可测函数	13

插图

3.1	Graph of the piecewise function $f_n(x)$ depicted by equation	
	(17) for $n = 3$	7

1. 集列的极限 首先比较重要的概念就是集列的上极限与下极限. 集列 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 的上极限就是落到其中无限多个集合的元素所做成的集合, 也即 $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 下极限就是除去有限多个集合后, 落到所有集中的元素所做成的集合, 也即 $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. 换言之也即“最终落到集列” A_n 中的那些元素之全体. 显然, 下限集中的元素也都落到上限集之中, 也即 $\liminf A_n \subset \limsup A_n$. 如果集列 A_n 的上限集与下限集相等, 那么就说集列 A_n 收敛, 并称 $A = \liminf A_n = \limsup A_n$ 为集列 A_n 的极限. 这个极限是关于集合包含的偏序关系说的. 与实数的情况类似, 有单调集列的收敛定理: 如果 $A_n \uparrow$ 是单调递增的, 那么 $\lim A_n = \bigcup_n A_n$. 类似地, 如果 $A_n \downarrow$ 是单调递减的, 那么 $\lim A_n = \bigcap_n A_n$.

例 1.1. 设 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 为单调减少集列. 证明

$$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1}) + \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

证明. 首先, 右边的每个集合都含于 A_1 . 因此右边含于 A_1 . 其次, 若 $x \in A_1$ 且 $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 则 $x \in \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1})$ 且 $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 因此 A_1 也是单调递减的. 最后, 若 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 则存在某个 $n > 1$, 使得 $x \notin A_n$. 令 n_0 为最小的这种 n , 那么就有 $x \notin A_{n_0}$, $x \in A_{n_0-1}$. 于是就有 $x \in \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1})$. 这就证明了 $A_1 \subset \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - A_{n+1}) + \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. \square

2. Riemann 积分 还是用 [1] 作为参考书比较好, 还是彩色的. 我还是比较喜欢 Riemann 积分的, 最开始是在梅加强的书上学的. 比较重要的技术就是证明 Darboux 上和总是大于等于 Darboux 下和那里, 需要用到两个 partition 的 merge. 也就是说, 用到了有界闭区间的 partition 全体构成一个 directed set 的性质. Darboux 上和与 Darboux 下和之差就是所谓的函数振幅 $\Omega_{\mathcal{P}}(f) = \sum_i (\sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f - \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f)(x_i - x_{i-1})$, 这里 $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ 是所讨论的具体的分割.

如果向 partition 的点集增加元素, 也即使得分割变得更细, 那么结果就是上和不变, 下和不变. 这就导致了两个极限 $\lim_{\mathcal{P}} \mathcal{L}(f, \mathcal{P}, [a, b])$ 和

$\lim_{\mathcal{P}} \mathcal{U}(f, \mathcal{P}, [a, b])$, 称为 Riemann 下积分 \int_a^b 和上积分 $\overline{\int}_a^b$. 这两个极限是关于 partition 全体所具有的 directed set 结构说的, 也就是说 net 的极限. 由于下和不大于上和, 也即 $\mathcal{L} \leq \mathcal{U}$, 因此这两个极限之间也有关系

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \overline{\int}_a^b f(x) \, dx \quad (1)$$

如果 Riemann 上下积分相等, 就说 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 其积分 $\int_a^b f(x) \, dx$ 就定义为上下积分的共同值.

任意分割 \mathcal{P} 都将区间 $[a, b]$ 分成 $\#(\mathcal{P})-1$ 个首尾相接的闭区间 $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. 从每个闭区间挑选一个元素出来, 就可以做成一个集合 Δ . 这种挑选当然是不唯一的. 称这种通过在每个闭区间中挑出一个元素所形成的集合为与 partition \mathcal{P} 相伴的一个点集. 设 $\{\mathcal{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是任意一系列 partition, 并且 $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是一列与之相伴的点集, 每个 Δ_n 中元素形如 $\Delta_n = \{\xi_1, \dots, \xi_{\#(\mathcal{P}_n)-1}\}$, 那么就可以考虑 Riemann 和所形成的数列

$$\mathcal{R}_n := \mathcal{R}(f, \mathcal{P}_n, \Delta_n, [a, b]) = \sum_{i=1}^{\#(\mathcal{P}_n)-1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (2)$$

显然有 $\mathcal{L}(f, \mathcal{P}_n, [a, b]) \leq \mathcal{R}_n \leq \mathcal{U}(f, \mathcal{P}_n, [a, b])$. 因此有

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \liminf \mathcal{R}_n \leq \limsup \mathcal{R}_n \leq \overline{\int}_a^b f(x) \, dx \quad (3)$$

这就表明, 如果 \mathcal{R}_n 有收敛子列的话, 那么该子列的极限就必定位于上下积分之间. 当然了, 如果 f 是 Riemann 可积的, 这个极限就必定等于 $\int_a^b f(x) \, dx$.

以上讨论了利用 partition 的全体所组成的集合之上的 directed set 结构来定义的 Riemann 积分. 下面考虑利用 Riemann 和关于 partition 的 mesh 的极限的途径. 这就是说, 把 Riemann 积分定义为极限

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \Delta, [a, b]) \quad (4)$$

其中 $\|\mathcal{P}\| = \max_i |x_i - x_{i-1}|$ 是 partition 的 mesh. 这个极限其实相当强, 因为其定义只涉及 partition, 对相伴的点集 Δ 没什么要求.

由不等式 (3) 可知, 如果两种定义下的 Riemann 积分均存在, 那么它们的值必定相等. 因此, 两种定义的等价性的证明就归结于证明其存在性的等价性.

要证明两种定义的等价性, 首先要注意到, 上下积分之差恰好等于函数振幅的下确界 $\inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f)$. 这就是说 $\lim_{\mathcal{P}} (\mathcal{U}(f, \mathcal{P}, [a, b]) - \mathcal{L}(f, \mathcal{P}, [a, b])) = \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f)$, 或者说 $\lim_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) = \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f)$. 事实上, 设 $\varepsilon > 0$, 那么由 net 的极限的定义, 存在 partition \mathcal{P}_0 , 使得任意细于 \mathcal{P}_0 的分割 \mathcal{P} 都满足 $|\Omega_{\mathcal{P}_0}(f) - \lim_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f)| < \varepsilon$. 另一方面, 由下确界的定义, 存在 partition \mathcal{P}_1 使得 $\Omega_{\mathcal{P}_1}(f) < \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) + \varepsilon$. 取分割 \mathcal{P}_2 为 \mathcal{P}_0 与 \mathcal{P}_1 的 merge, 那么就有

$$\lim_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) - \varepsilon < \Omega_{\mathcal{P}_2}(f) \leq \Omega_{\mathcal{P}_1}(f) < \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) + \varepsilon \quad (5)$$

于是 $\inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) \leq \lim_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) < \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) + 2\varepsilon$. 这就证明了

$$\overline{\int_a^b} f(x) \, dx - \underline{\int_a^b} f(x) \, dx = \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) \quad (6)$$

假如极限 (4) 存在, 其值记为 A , 那么对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 partition 的 mesh 小于 δ , 就有 $|\mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \Delta, [a, b]) - A| < \varepsilon$. 现在固定分割 \mathcal{P} , 那么由于该不等式对于任意与 \mathcal{P} 相伴的点集 Δ 都成立, 因此有 $\Omega_{\mathcal{P}}(f) \leq 2\varepsilon$. 这就证明了 $\inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) = 0$, 因而上下积分相等.

反之, 要从上下积分相等导出极限 (4) 的存在性, 还需要证明一个基于 partition 的 mesh 估计的技术性引理:

引理 2.1. 设 $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ 为区间 $[a, b]$ 的两个 partition, $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$, 那么就有不等式

$$\Omega_{\mathcal{P}}(f) \leq \Omega_{\mathcal{P}'}(f) + (\#(\mathcal{P}') - 2)M\|\mathcal{P}\| \quad (7)$$

事实上, 如果向 \mathcal{P} 中添加一个新元素 y , 譬如说插入到区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 中, 那么所形成的新分割 \mathcal{P}'' 的 Darboux 和与 \mathcal{P} 的 Darboux 的差异仅来

自于区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 的贡献, 也即

$$\Omega_{\mathcal{P}''}(f) - \Omega_{\mathcal{P}}(f) = \omega_{x_k \leq x \leq y} f(x)(y - x_k) + \omega_{y \leq x \leq x_{k+1}} f(x)(x_{k+1} - y) - \omega_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} f(x)(x_{k+1} - x_k) \quad (8)$$

考虑到 $\omega_{x_k \leq x \leq y} - \omega_{x_k \leq x \leq x_{k+1}}$ 和 $\omega_{y \leq x \leq x_{k+1}} - \omega_{x_k \leq x \leq x_{k+1}}$ 都落到区间 $[-M, M]$ 内, 因此 $\Omega_{\mathcal{P}''}(f) - \Omega_{\mathcal{P}}(f)$ 的绝对值被 $M(x_{k+1} - x_k)$ 控制, 从而也被 $M\|\mathcal{P}\|$ 控制. 这就导出了 $|\Omega_{\mathcal{P}''}(f) - \Omega_{\mathcal{P}}(f)| \leq M\|\mathcal{P}\|$. 类似地, 如果向 \mathcal{P}'' 中再插入一个新元素得到新分割 \mathcal{P}''' , 那么同样有

$$|\Omega_{\mathcal{P}'''}(f) - \Omega_{\mathcal{P}''}(f)| \leq M\|\mathcal{P}''\| \quad (9)$$

由于 \mathcal{P}''' 细于 \mathcal{P} , 因此 $\|\mathcal{P}'''\| \leq \|\mathcal{P}\|$. 因此 $\Omega_{\mathcal{P}'''}(f) - \Omega_{\mathcal{P}''}(f)$ 的绝对值也被 $M\|\mathcal{P}\|$ 控制, 从而有 $|\Omega_{\mathcal{P}'''}(f) - \Omega_{\mathcal{P}}(f)| \leq 2M\|\mathcal{P}\|$. 现在考虑 \mathcal{P} 与 \mathcal{P}' 的 merge \mathcal{S} , 其可以通过反复向 \mathcal{P} 中插入元素来得到, 插入次数至多为 $\#(\mathcal{P}') - 2$ 次. 因此就有

$$\Omega_{\mathcal{P}}(f) - (\#(\mathcal{P}') - 2)M\|\mathcal{P}\| \leq \Omega_{\mathcal{S}}(f) \leq \Omega_{\mathcal{P}'}(f) \quad (10)$$

这就导出了不等式 (7). 这个引理最初是在 [3] pp.213 看到的.

作为引理 2.1 的一个推论, 立刻可以导出

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \Omega_{\mathcal{P}}(f) = \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) \quad (11)$$

这是因为, 设 $\varepsilon > 0$, 那么由下确界的定义可知存在 partition \mathcal{P}_0 , 使得 $\Omega_{\mathcal{P}_0}(f) < \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) + \varepsilon$. 记 $N = \#(\mathcal{P}_0) - 2$, 那么当 partition 的 mesh 小于 $\varepsilon/(MN)$ 时, 由引理 2.1 可知

$$\Omega_{\mathcal{P}}(f) \leq \Omega_{\mathcal{P}_0}(f) + (\#(\mathcal{P}') - 2)M\|\mathcal{P}\| < \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) + 2\varepsilon \quad (12)$$

这就证明了 (11) 式. 类似地可以证明

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \mathcal{L}(f, \mathcal{P}, [a, b]) = \int_a^b f(x) \, dx, \quad \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \mathcal{U}(f, \mathcal{P}, [a, b]) = \overline{\int}_a^b f(x) \, dx. \quad (13)$$

现在假设 Riemann 上下积分相等, 也即 $\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \Omega_{\mathcal{P}}(f) = 0$, 那么对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 partition 的 mesh 小于 δ , 就有 $|\mathcal{U} - \overline{\mathcal{J}}|, |\mathcal{L} - \underline{\mathcal{J}}| < \varepsilon$. 自然, 此时由不等式 (13) 可知

$$\int_a^b f(x) dx - \varepsilon < \mathcal{L}(f, \mathcal{P}, [a, b]) \leq \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \Delta, [a, b]) \leq \mathcal{U}(f, \mathcal{P}, [a, b]) \leq \int_a^b f(x) dx + \varepsilon \quad (14)$$

这就证明了极限 (4) 的存在性.

容易验证闭区间上的连续函数是 Riemann 可积的. 这主要用到了其一致连续性.

3. Riemann 积分的若干缺陷 Riemann 积分的一些缺陷:

1. 如果函数的连续性较差, 则其 Riemann 可积性也较差: 典型的例子就是 Dirichlet 函数.
2. 无界函数的 Riemann 可积性较差 (反常积分): 一个例子就是取一列可求出瑕积分的函数 $f_k(x)$, 使得每个函数的瑕点恰好对应区间 $[0, 1]$ 上的一个有理数, 最终导致无法通过划分区间的办法求出函数 $f := \sum_k \frac{f_k}{2^k}$ 的瑕积分. 这里其实是说, 如果将面积的次可加性推广到可数的情况, 那么通常的 Riemann 积分就不太够用了. 毕竟这样构造出的 f 多多少少是个较为奇怪的函数, 这种例子更偏向于理论意义.
3. Riemann 积分与极限的可交换性较差: 这个问题看起来是最为致命的. 可以构造出一列函数 f_k , 它们的 Riemann 积分均为零, 但其逐点收敛到 Dirichlet 函数. 虽然可以证明, 如果一致有界的可积函数列的逐点极限函数是 Riemann 可积的, 那么其积分与极限可以交换位置, 也即 $\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_n f_n$, 但其证明却非常复杂, 并且也绕不过使用测度的思想. 这个缺陷使得 Riemann 积分在理论上使用起来尤为不便.

例 3.1. 定义闭区间 $[0, 1]$ 上的函数 f 为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数} \\ \frac{1}{n}, & \text{若 } x \text{ 为有理数, 且 } n \text{ 为形如 } x = \frac{m}{n} \text{ 的表达式中的最小正整数 } n \end{cases} \quad (15)$$

证明 f 是 Riemann 可积的, 并计算其积分值.

显然 f 的每一个 Darboux 下和都为零, 因此 $\int_0^1 f = 0$. 下面证明 f Riemann 可积. 只需构造出一列 partition \mathcal{P}_n , 使得 $\lim_n \Omega_{\mathcal{P}_n}(f) = 0$ 即可. 由于 $\mathcal{L} \equiv 0$, 因此只需证明 $\lim_n \mathcal{U}(f, \mathcal{P}_n, [0, 1]) = 0$. 事实上, 对于任意的 n , 满足 $f(x) = 1/n$ 的 $[0, 1]$ 内的有理数至多有 $n+1$ 个, 因此其数目有限. 自然, 可以适当地区分区间, 得到分割 \mathcal{P}_n , 使得满足 $f(x) \geq 1/n$, 也即 $f(x) = 1, 1/2, \dots, 1/n$ 的全体有理数 x 所在的区间的总长不超过 $1/n$. 自然, f 在剩下的那些区间上的上确界均小于 $1/n$. 于是就有

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(f, \mathcal{P}_n, [0, 1]) &= \sum_{f(x) \geq 1/n \text{ 的 } x \text{ 所在区间 } [x_{i-1}, x_i]} \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)(x_i - x_{i-1}) \\ &\quad + \sum_{\text{其余区间 } [x_{i-1}, x_i]} \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)(x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \end{aligned} \quad (16)$$

于是就有 $\lim_n \mathcal{U}(f, \mathcal{P}_n, [0, 1]) = 0$. 因此 f 是 Riemann 可积的, 并且其 Riemann 积分为 $\int_0^1 f = 0$.

例 3.2. Riemann 积分与极限交换时, 一致有界条件不可去掉.

事实上, 构造单位区间 $[0, 1]$ 上的连续函数列

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1/n \\ 2n - n^2 x, & \text{若 } 1/n < x \leq 2/n \\ 0 & \text{若 } x > 2/n \end{cases} \quad (17)$$



图 3.1: Graph of the piecewise function $f_n(x)$ depicted by equation (17) for $n = 3$.

那么就有 $\int_0^1 f_n = 1$, 以及 $\lim_n f_n(x) \equiv 0$. 这是因为 $f_n(x)$ 也就只在开区间 $(0, 2/n)$ 上不为零, 该区间随着 $n \rightarrow \infty$ 而消失. 因此, 极限函数 $f := \lim_n f_n$ 是连续的, 并且有 $\int_0^1 f = 0$. 因此

$$\lim_n \int_0^1 f_n = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_n f_n \quad (18)$$

当然, f_n 不是一致有界的: $\sup_{x \in [0,1]} f_n(x) = n$, 因此 $f_n(x)$ 不可能被某个有限的数所一致控制.

4. 外测度 外测度的概念是经典的: 对 \mathbb{R} 的任意子集 A , 都可定义其外测度 $|A|$ 为覆盖 A 的开区间列的总长度之下确界, 也即 $|A| = \inf_{A \subset \bigcup_n I_n} \sum_n \ell(I_n)$. 这总是定义良好的. 如果某个 $\ell(I_n)$ 为 $+\infty$, 那么显然 $\sum_n \ell(I_n) = +\infty$. 反之, $\sum_n \ell(I_n)$ 是一个非负项的数项级数. 自然, 非负项级数要么收敛, 要么发散到 $+\infty$. 因此, 如果将 $+\infty$ 也作为一个合法的长度值, 那么 $\sum_n \ell(I_n)$ 总是有定义的, 并且总是大于等于零. 因此任意的实数集 A 的外测度总是有定义的.

例 4.1. 可数集的外测度为零.

设 $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\varepsilon > 0$, 那么可以构造区间列 $I_n = (a_n - \varepsilon/2^n, a_n + \varepsilon/2^n)$,

使得 $A \subset \bigcup_n I_n$, 于是

$$|A| \leq \sum_n \ell(I_n) = \sum_n \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} = 2\varepsilon \quad (19)$$

这就证明了 $|A| = 0$.

特别的, 有理数集 \mathbb{Q} 的外测度为零. 这表明外测度的性质至少要比 Jordan 测度要好, 因为 $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ 的 Jordan 测度正是 Dirichlet 函数的 Riemann 积分, 因而不存在的.

如果实数集 A 含于 B , 那么任意覆盖了 B 的开区间列也覆盖了 A , 因而 $|A| \leq |B|$. 因此外测度与集合的包含关系的相容性良好. 此外, 由于平移变换并不改变开区间的长度, 并且将开区间变为开区间, 并且还是可逆的, 因此任意实数集 A 平移 t 距离后, 其外测度保持不变: $|A + t| = |A|$. 这就是说外测度具有平移不变性.

外测度最为重要的一条性质恐怕就是次可数可加性了.

定理 4.2. 外测度具有次可数可加性: $|\bigcup_n A_n| \leq \sum_n |A_n|$.

首先, 如果某个集合 A_n 的外测度为 $+\infty$, 那么结论显然成立. 下面假设所有 $|A_n|$ 都是有限的. 设 $\varepsilon > 0$. 对于任意固定的 n , 根据外测度的定理, 可以找到一列开区间 $\{I_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, 使得

$$\sum_k \ell(I_{n,k}) < |A_n| + \frac{\varepsilon}{2^n} \quad (20)$$

自然, 记所有这些区间 $I_{n,k}$ 所做成的集合为 X , 那么映射 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X$, $(n, k) \mapsto I_{n,k}$ 可以重新排列顺序为 $\mathbb{N} \rightarrow X$, $j \mapsto I_{n(j), k(j)}$. 这一列区间 $I'_j := I_{n(j), k(j)}$ 覆盖了 $\bigcup_n A_n$, 并且对于每个正整数 $p \in \mathbb{N}$, 记 $n(1), \dots, n(p)$ 中的最大值为 $N(p)$, 则有

$$\sum_{j=1}^p \ell(I'_j) \leq \sum_{n=1}^{N(p)} \sum_k \ell(I_{n,k}) \leq \sum_n \sum_k \ell(I_{n,k}) < \sum_n |A_n| + \varepsilon \quad (21)$$

于是 $\sum_j \ell(J_j) \leq \sum_n |A_n| + \varepsilon$. 这就证明了

$$\left| \bigcup_n A_n \right| \leq \sum_n |A_n| \quad (22)$$

作为一个简单推论, 外测度也具有次有限可加性: $|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \leq \sum_{i=1}^n |A_i|$.

下面来计算有界区间的外测度. 从几何上来看, 开区间 (a, b) 的外测度应该就等于其长度 $b - a$. 严格的证明稍微麻烦一些, 需要借助有界闭区间的紧性. 首先, (a, b) 与 $[a, b]$ 的外测度相同: $|(a, b)| \leq |[a, b]| \leq b - a$, 并且由 $[a, b] \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$, 以及 $|(a - \varepsilon, b + \varepsilon)| \leq |(a, b)| + 2\varepsilon$ 可得 $[a, b] \leq (a, b)$. 这就证明了开区间 (a, b) 的外测度与其闭包相同. 另一方面, 由 $[a, b]$ 的紧性可知, 任意覆盖了 $[a, b]$ 的开区间列 I_n 都存在有限子覆盖 J_1, \dots, J_p . 下面只需证明 $\sum_{i=1}^p \ell(J_i) \geq b - a$ 即可. 最简单的证法是用归纳法 ([1] pp. 20). 当 $p = 1$ 时结论显然成立. 假设该结论对 $p \leq k$ 成立, 那么当 $p = k + 1$ 时, 设 $[a, b]$ 被开区间 J_1, \dots, J_p 中的某个 $J_s = (c, d)$ 所覆盖, 那么若 $c \leq a$, 则 $\ell((c, d)) \geq b - a$, 故结论成立. 若 $c > a$, 则闭区间 $[a, c]$ 被 k 个开区间 $\{J_i\}_{1 \leq i \leq p, i \neq s}$ 所覆盖, 于是由归纳假设即知 $\sum_{i \neq s} \ell(J_i) \geq c - a$. 于是就有 $\sum_{i=1}^p \ell(J_i) \geq (c - a) + (b - c) = b - a$, 因此总是有 $\sum_n \ell(I_n) \geq b - a$. 这就证明了 $|[a, b]| = b - a$, 因而开区间 (a, b) 的外测度也等于 $b - a$.

利用区间的外测度还可以给出区间的不可数性的另一个证明.

例 4.3. 非空区间是不可数的.

事实上, 由于可数集的外测度为零, 而非空区间的外测度都大于零, 因而非空区间不可能是可数集. 这就证明了结论.

5. 外测度的缺点：不可加性 Vitali 提供了集合的不交并的外测度不等于各自外测度之和的一个例子.

例 5.1. 存在不交的实数集 A 和 B , 使得 $|A \cup B| \neq |A| + |B|$.

对于区间 $[-1, 1]$ 内的任意实数 a , 定义相伴的集合 \tilde{a} 为 $[-1, 1]$ 内所有与 a 只相差一个有理移位的元素之全体, 那么若 $\tilde{a} \cap \tilde{b} \neq \emptyset$, 譬如说 $c \in \tilde{a} \cap \tilde{b}$,

那么就有 $a - c, b - c \in \mathbb{Q}$. 因此 a, b 本身就只相差一个有理移位. 因此对于任意实数来说, 与 a 的距离为有理数当且仅当与 b 的距离为有理数, 从而有 $\tilde{a} = \tilde{b}$. 自然, 由 $a \in \tilde{a}$ 可知 $[-1, 1] \subset \bigcup_{a \in [-1, 1]} \tilde{a}$. 利用选择公理可从集合簇 $\{\tilde{a}\}_{a \in [-1, 1]}$ 中的每个集合中取出一个元素, 做成一个新集合 V . 令 $[-2, 2]$ 内的全体有理数所做成的数列为 r_1, r_2, \dots , 那么就有 $[-1, 1] \subset \bigcup_k (r_k + V)$. 这是因为对于 $[-1, 1]$ 中的任意元素 a , 设 V 所含的 \tilde{a} 中元素为 x , 则有 $a - x \in \mathbb{Q} \cap [-2, 2]$, 因而 $a - x$ 等于某个 r_k , 于是 $a \in \bigcup_k (r_k + V)$. 由外测度的次可数可加性和平移不变性即知

$$2 = |[-1, 1]| \leq \sum_k |r_k + V| = \sum_k |V| \quad (23)$$

这表明 V 的外测度必定大于零. 容易验证集列 $\{r_k + V\}_{k \in \mathbb{N}}$ 是互不相交的. 这是因为, 若 $x \in (r_{k_1} + V) \cap (r_{k_2} + V)$, 其中 $r_{k_1} \neq r_{k_2}$, 那么存在实数 a, b , 使得 $x - r_{k_1} \in \tilde{a} \cap V$, $x - r_{k_2} \in \tilde{b} \cap V$. 自然, $x - r_{k_2} = x - r_{k_1} + (r_{k_1} - r_{k_2})$ 也落入 \tilde{a} 中, 这就表明 \tilde{a} 与 \tilde{b} 相交, 于是 $\tilde{a} = \tilde{b}$. 由 V 的定义即知 $x - r_{k_1} = x - r_{k_2}$, 这就导出了 $r_{k_1} = r_{k_2}$, 矛盾!

由于 $r_k \in [-2, 2]$, $V \subset [-1, 1]$, 因此 $\bigcup_k (r_k + V) \subset [-3, 3]$. 于是 $|\bigcup_k (r_k + V)| \leq 6$. 另一方面, 由于 $|V| > 0$, 因此必定存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得

$$\left| \bigcup_{k=1}^n (r_k + V) \right| < n|V| = \sum_{k=1}^n |r_k + V| \quad (24)$$

特别的, 如果对于任意的不交的实数集 A, B , 均有等式 $|A \cup B| = |A| + |B|$, 那么以上不等式必定不成立. 因此必定存在不交的集合 A, B , 使得其并集的外测度不等于各自外测度之和.

例 5.2. 若 \mathbb{R} 的一簇闭子集的交集为空集, 并且其中某个集合有界, 那么该集合簇中可以找到有限个集合, 使得其交集为空集.

事实上, 设 $\bigcap_{F \in \mathcal{A}} F = \emptyset$, 那么 $\{F^C\}_{F \in \mathcal{A}}$ 就是 \mathbb{R} 的一个开覆盖. 设其中的 $F \in \mathcal{A}$ 有界, 那么其为紧集, 故存在有限多个 F_1^C, \dots, F_n^C 覆盖了 F .

自然, F_1^C, \dots, F_n^C, F^C 就是 \mathbb{R} 的一个有限开覆盖, 从而有

$$F_1 \cap \dots \cap F_n \cap F = \emptyset \quad (25)$$

例 5.3. 若 I_1, I_2, \dots 为一列互不相交的开区间, 则有 $|\bigcup_n I_n| = \sum_n \ell(I_n)$.

左 \leq 右是明显的. 下面证明左 \geq 右. 设 J_n 是一列覆盖了 $\bigcup_n I_n$ 的开区间, 那么对于每个 n , 可定义开区间 (包括空集) 列 $\{J_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ 为 $J_{n,k} := J_k \cap I_n$. 自然, $\{J_{n,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ 覆盖了 I_n , 于是有 $\sum_k \ell(J_{n,k}) \geq |I_n| = \ell(I_n)$. 由于 I_n 互不相交, 因此对于任意固定的 m , 可以验证 $\ell(J_k) \geq \sum_{n=1}^m \ell(J_k \cap I_n)$. 不妨将其写为一个引理:

引理 5.4. 设 I 为开区间, K_1, \dots, K_n 为互不相交的开区间, 那么 $\ell(I) \geq \sum_{k=1}^n \ell(I \cap K_n)$.

事实上, 若 I 退化或者为空集, 那么结论显然成立. 下面设 $I = (a, b)$ 非退化, 将 $I \cap K_n$ 中的非退化区间的左端点做成一个集合, 并进行排序, 得到数组 $a_1 < a_2 < \dots < a_m$, 将右端点也做成一个集合, 排序为 $b_1 < b_2 < \dots < b_m$. 那么由于 K_i 两两不交, 因此必定有

$$a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_m < b_m \leq b \quad (26)$$

也就是说, 如果令 $b_0 := a$, 那么就有 $b_{i-1} \leq a_i < b_i$, $i = 1, 2, \dots, m$. 这是因为, 对于两个不交的非退化开区间 $(c, d), (c', d')$ 来说, 由 $c \leq d'$ 即可导出 $c < d \leq c' < d'$, 类似地由 $c \geq d'$ 也可导出 $c' < d' \leq c < d$. 现在由于 $a_1 < a_2 < \dots < a_m$, 因此如果记 a_i 所对应的区间右端点为 \tilde{a}_i , 则有 $a_{i-1} < a_i < \tilde{a}_i$, ($a_0 := a$), 这就导出了

$$a_{i-1} < \tilde{a}_{i-1} \leq a_i < \tilde{a}_i \quad (27)$$

从而得到了 m 个区间的右端点数组 $\tilde{a}_1 < \tilde{a}_2 < \dots < \tilde{a}_m$. 对比 b_i 的定义即知 $\tilde{a}_i = b_i$, 这就导出了不等式 (26). 由此还可以知道, 非退化区间 $I \cap K_n$

可枚举为 $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$. 于是就有

$$\sum_{k=1}^n \ell(I \cap K_n) = \sum_{I \cap K_n \text{ 非退化}} \ell(I \cap K_n) = \sum_{i=1}^m (b_i - a_i) \leq \sum_{i=1}^m (b_i - b_{i-1}) \leq b - a \quad (28)$$

即证明了引理 5.4.

根据引理 5.4, 我们有 $\ell(J_k) \geq \sum_n \ell(J_k \cap I_n)$, 从而有

$$\sum_k \ell(J_k) \geq \sum_k \sum_n \ell(J_k \cap I_n) = \sum_n \sum_k \ell(J_{n,k}) \geq \sum_n \ell(I_n) \quad (29)$$

这就证明了

$$\left| \bigcup_n I_n \right| = \sum_n \ell(I_n) \quad (30)$$

上面这个例子说明 Vitali 的例子多少是有些奇异的. 看起来, 如果集合较为规则, 那么外测度的可加性还是可以成立的. 当然, 找到适当的集类就属于可测空间理论的任务了.

例 5.5. 设 r_1, r_2, \dots 为全体有理数的一个枚举. 令 $F = \mathbb{R} \setminus \bigcup_k (r_k - 2^{-k}, r_k + 2^{-k})$. 证明

1. F 是闭集.
2. F 所包含的区间都是退化的.
3. $|F| = +\infty$.

1. 是平凡的. 至于 2, 设 I 是 F 是包含的一个区间, 若 I 非退化, 那么就必定包含一个有理数 r_k 作为其内点, 从而也是 F 的内点. 由 F 的定义可知 r_k 不是 F 的内点, 矛盾! 至于第三条, 则是因为 $\sum_k \ell((r_k - 2^{-k}, r_k + 2^{-k})) = 2$, 因此由 $+\infty = |F \cup (\bigcup_k (r_k - 2^{-k}, r_k + 2^{-k}))| \leq |F| + \sum_k |(r_k - 2^{-k}, r_k + 2^{-k})|$ 即知 $|F| = +\infty$.

6. 可测空间与可测函数 在 Vitali 的例子 (5.1) 中, 只使用到了外测度的以下几条性质:

1. \mathbb{R} 的任意子集的外测度均有定义.
2. 开区间的外测度等于其长度.
3. 外测度具有次可数可加性.
4. 外测度与集合的包含关系相容.
5. 外测度具有平移不变性.

其中性质 4. 实际上可从性质 3. 推出. 自然, 对于任何一个定义在 \mathbb{R} 的子集簇上的 $[0, +\infty]$ 值函数 μ , 只要其同时满足上述五条性质, 那么它就不可能满足有限可加性, 遑论可数可加性. 因而为了获得可加性, 势必要作出一些妥协. 由于后 4 条性质与几何直觉以及分析的需要密切相关, 因此最容易放弃的就是第 1 条, 也即限制 μ 的定义域, 选择一些较小的集类. 由此引入的 σ -代数恐怕就是测度论中最为重要的概念了, 没有之一.

所谓 X 上的一个 σ -代数就是指一个包含集合 X 本身, 且对补集运算和可数并封闭的 X 的子集类. 自然, 其对有限并、有限交和可数交也封闭.

例 6.1. X 的所有至多可数子集, 以及补集为至多可数集的子集, 构成 X 上的一个 σ -代数 \mathcal{S} .

首先, $X \in \mathcal{S}$. 其次, 显然 \mathcal{S} 对补集运算封闭. 最后, 设 $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 为 \mathcal{S} 中的一列集合, 那么若 E_n 均至多可数, 则 $\bigcup_n E_n$ 当然也至多可数. 否则, 必定存在某个 E_n , 其补集至多可数. 于是 $[\bigcup_n E_n]^C = \bigcap_n E_n^C$ 至多可数. 这就证明了 \mathcal{S} 关于有限并的封闭性.

参考文献

- [1] Sheldon Axler. *Measure, Integration & Real Analysis*. Springer, 2020.
- [2] 任佳刚 and 巫静. 测度与概率教程. 科学出版社, 2018.
- [3] 梅加强. 数学分析. 高等教育出版社, 2011.
- [4] 袁震东. 近代概率引论: 测度、鞅和随机微分方程. 科学出版社, 1991.