测度与概率 Notes

Liu Fuzhou

2025 年 2 月 3 日

前言

以前其实也看过这个主题的书，结果后来都忘了. 要看偏微分方程，就要先看泛函分析. 要看泛函分析，就要先看实分析. 泛函分析和实分析对随机分析也是重要的. 无论如何也绕不开 L^p 空间. 可见掌握实分析十分重要. 看来做一些有形的笔记是很有必要的. 不需要特别详细，提纲挈领即可.

主要参考文献：

1. 近代概率引论: 测度、鞅和随机微分方程. 袁震东. 科学出版社, 1991.

Liu Fuzhou

2025 年 2 月 3 日

目录

第一章　测度论

1.1　σ-代数与测度

首先比较重要的概念就是集列的上极限与下极限. 集列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的上极限就是落到其中无限多个集合的元素所做成的集合,也即 $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 下极限就是除去有限多个集合后，落到所有集中的元素所做成的集合，也即 $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. 换言之也即“最终落到集列”$A_n$ 中的那些元素之全体. 显然，下限集中的元素也都落到上限集之中，也即 $\liminf A_n \subset \limsup A_n$. 如果集列 A_n 的上限集与下限集相等，那么就说集列 A_n 收敛，并称 $A = \liminf A_n = \limsup A_n$ 为集列 A_n 的极限. 这个极限是关于集合包含的偏序关系说的. 与实数的情况类似，有单调集列的收敛定理：如果 $A_n \uparrow$ 是单调递增的，那么 $\lim A_n = \bigcup_n A_n$. 类似地，如果 $A_n \downarrow$ 是单调递减的，那么 $\lim A_n = \bigcap_n A_n$.

例 1.1.1. *设 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为单调减少集列. 证明*

$$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n+1}) + \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

证明. 首先，右边的每个集合都含于 A_1. 因此右边含于 A_1. 其次，若 $x \in A_1$ 且 $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 则 $x \in \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n-1})$ 且 $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 因此 A_1 也是单调递减的. 最后，若 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 则存在某个 $n > 1$, 使得 $x \notin A_n$. 令 n_0 为最小的这种 n, 那么就有 $x \notin A_{n_0}$, $x \in A_{n_0-1}$. 于是就有 $x \in \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n-1})$. 这就证明了 $A_1 \subset \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n+1}) + \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. □