测度与概率 Notes

Liu Fuzhou

2025 年 2 月 7 日

前言

要看偏微分方程，就要先看泛函分析. 要看泛函分析，就要先看实分析. 泛函分析和实分析对随机分析也是重要的. 无论如何也绕不开 L^p 空间. 可见掌握实分析十分重要. 以前其实也看过这个主题的书，结果后来都忘了. 看来做一些有形的笔记是很有必要的. 不需要特别详细，提纲挈领即可.

主要参考文献：

1. 近代概率引论: 测度、鞅和随机微分方程. 袁震东. 科学出版社, 1991.
2. 测度与概率教程. 任佳刚, 巫静. 科学出版社, 2018.
3. Measure, Integration & Real Analysis. Sheldon Axler. Springer, 2020.

Liu Fuzhou

2025 年 2 月 7 日

目录

插图

1. 集列的极限 首先比较重要的概念就是集列的上极限与下极限. 集列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的上极限就是落到其中无限多个集合的元素所做成的集合，也即 $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 下极限就是除去有限多个集合后，落到所有集中的元素所做成的集合，也即 $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. 换言之也即“最终落到集列”$A_n$ 中的那些元素之全体. 显然，下限集中的元素也都落到上限集之中，也即 $\liminf A_n \subset \limsup A_n$. 如果集列 A_n 的上限集与下限集相等，那么就说集列 A_n 收敛，并称 $A = \liminf A_n = \limsup A_n$ 为集列 A_n 的极限. 这个极限是关于集合包含的偏序关系说的. 与实数的情况类似，有单调集列的收敛定理：如果 $A_n \uparrow$ 是单调递增的，那么 $\lim A_n = \bigcup_n A_n$. 类似地，如果 $A_n \downarrow$ 是单调递减的，那么 $\lim A_n = \bigcap_n A_n$.

例 1.1. 设 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为单调减少集列. 证明

$$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n+1}) + \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

证明. 首先，右边的每个集合都含于 A_1. 因此右边含于 A_1. 其次，若 $x \in A_1$ 且 $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 则 $x \in \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n-1})$ 且 $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 因此 A_1 也是单调递减的. 最后，若 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 则存在某个 $n > 1$, 使得 $x \notin A_n$. 令 n_0 为最小的这种 n, 那么就有 $x \notin A_{n_0}$, $x \in A_{n_0-1}$. 于是就有 $x \in \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n-1})$. 这就证明了 $A_1 \subset \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n+1}) + \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. □

2. Riemann 积分 还是用 [1] 作为参考书比较好，还是彩色的. 我还是比较喜欢 Riemann 积分的，最开始是在梅加强的书上学的. 比较重要的技术就是证明 Darboux 上和总是大于等于 Darboux 下和那里，需要用到两个 partition 的 merge. 也就是说，用到了有界闭区间的 partition 全体构成一个 directed set 的性质. Darboux 上和与 Darboux 下和之差就是所谓的函数振幅 $\Omega_{\mathcal{P}}(f) = \sum_i(\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f - \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i})(x_i - x_{i-1})$, 这里 $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ 是所讨论的具体的分割.

如果向 partition 的点集增加元素，也即使得分割变得更细，那么结果就是上和不增，下和不减. 这就导致了两个极限 $\lim_{\mathcal{P}} \mathcal{L}(f, \mathcal{P}, [a, b])$ 和

$\lim_{\mathcal{P}} \mathcal{U}(f, \mathcal{P}, [a, b])$, 称为 Riemann 下积分 $\underline{\int}$ 和上积分 $\overline{\int}$. 这两个极限是关于 partition 全体所具有的 directed set 结构说的, 也就是说是 net 的极限. 由于下和不大于上和，也即 $\mathcal{L} \leq \mathcal{U}$, 因此这两个极限之间也有关系

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \tag{1}$$

如果 Riemann 上下积分相等，就说 f 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积，其积分 $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ 就定义为上下积分的共同值.

任意分割 $\mathcal{P}$ 都将区间 $[a, b]$ 分成 $\#(\mathcal{P})-1$ 个首尾相接的闭区间 $[x_0, x_1], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$. 从每个闭区间挑选一个元素出来，就可以做成一个集合 Δ. 这种挑选当然是不唯一的. 称这种通过在每个闭区间中挑出一个元素所形成的集合为与 partition $\mathcal{P}$ 相伴的一个点集. 设 $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是任意一列 partition, 并且 $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列与之相伴的点集,每个 Δ_n 中元素形如 $\Delta_n = \{\xi_1, \cdots, \xi_{\#(\mathcal{P}_n)-1}\}$, 那么就可以考虑 Riemann 和所形成的数列

$$\mathcal{R}_n := \mathcal{R}(f, \mathcal{P}_n, \Delta_n, [a, b]) = \sum_{i=1}^{\#(\mathcal{P}_n)-1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{2}$$

显然有 $\mathcal{L}(f, \mathcal{P}_n, [a, b]) \leq \mathcal{R}_n \leq \mathcal{U}(f, \mathcal{P}_n, [a, b])$. 因此有

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \leq \liminf \mathcal{R}_n \leq \limsup \mathcal{R}_n \leq \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \tag{3}$$

这就表明，如果 $\mathcal{R}_n$ 有收敛子列的话，那么该子列的极限就必定位于上下积分之间. 当然了，如果 f 是 Riemann 可积的，这个极限就必定等于 $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.

以上讨论了利用 partition 的全体所组成的集合之上的 directed set 结构来定义的 Riemann 积分. 下面考虑利用 Riemann 和关于 partition 的 mesh 的极限的途径. 这就是说，把 Riemann 积分定义为极限

$$\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \mathcal{R}(f, \mathcal{P}, \Delta, [a, b]) \tag{4}$$

其中 $\|\mathcal{P}\| = \max_i |x_i - x_{i-1}|$ 是 partition 的 mesh. 这个极限其实相当强，因为其定义只涉及 partition, 对相伴的点集 Δ 没什么要求.

由不等式 (3) 可知，如果两种定义下的 Riemann 积分均存在，那么它们的值必定相等. 因此，两种定义的等价性的证明就归结于证明其存在性的等价性.

要证明两种定义的等价性，首先要注意到，上下积分之差恰好等于函数振幅的下确界 $\inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f)$. 这就是说 $\lim_{\mathcal{P}}(\mathcal{U}(f,\mathcal{P},[a,b]) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P},[a,b])) = \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f)$, 或者说 $\lim_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) = \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f)$. 事实上，设 $\varepsilon > 0$, 那么由 net 的极限的定义，存在 partition $\mathcal{P}_0$, 使得任意细于 $\mathcal{P}_0$ 的分割 $\mathcal{P}$ 都满足 $|\Omega_{\mathcal{P}_0}(f) - \lim_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f)| < \varepsilon$. 另一方面，由下确界的定义，存在 partition $\mathcal{P}_1$ 使得 $\Omega_{\mathcal{P}_1}(f) < \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) + \varepsilon$. 取分割 $\mathcal{P}_2$ 为 $\mathcal{P}_0$ 与 $\mathcal{P}_1$ 的 merge, 那么就有

$$\lim_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) - \varepsilon < \Omega_{\mathcal{P}_2}(f) \leq \Omega_{\mathcal{P}_1}(f) < \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) + \varepsilon \tag{5}$$

于是 $\inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) \leq \lim_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) < \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) + 2\varepsilon$. 这就证明了

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) \tag{6}$$

假如极限 (4) 存在，其值记为 A, 那么对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 partition 的 mesh 小于 δ, 就有 $|\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\Delta,[a,b]) - A| < \varepsilon$. 现在固定分割 $\mathcal{P}$, 那么由于该不等式对于任意与 $\mathcal{P}$ 相伴的点集 Δ 都成立，因此有 $\Omega_{\mathcal{P}}(f) \leq 2\varepsilon$. 这就证明了 $\inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) = 0$, 因而上下积分相等.

反之，要从上下积分相等导出极限 (4) 的存在性，还需要证明一个基于 partition 的 mesh 估计的技术性引理：

引理 2.1. 设 $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ 为区间 $[a,b]$ 的两个 partition, $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, 那么就有不等式

$$\Omega_{\mathcal{P}}(f) \leq \Omega_{\mathcal{P}'}(f) + (\#(\mathcal{P}') - 2)M\|\mathcal{P}\| \tag{7}$$

事实上，如果向 $\mathcal{P}$ 中添加一个新元素 y, 譬如说插入到区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 中，那么所形成的新分割 $\mathcal{P}''$ 的 Darboux 和与 $\mathcal{P}$ 的 Darboux 的差异仅来

自于区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 的贡献，也即

$$\Omega_{\mathcal{P}''}(f)-\Omega_{\mathcal{P}}(f) = \omega_{x_k\le x\le y}f(x)(y-x_k)+\omega_{y\le x\le x_{k+1}}f(x)(x_{k+1}-y)-\omega_{x_k\le x\le x_{k+1}}f(x)(x_{k+1}-x_k) \tag{8}$$

考虑到 $\omega_{x_k\le x\le y}-\omega_{x_k\le x\le x_{k+1}}$ 和 $\omega_{y\le x\le x_{k+1}}-\omega_{x_k\le x\le x_{k+1}}$ 都落到区间 $[-M, M]$ 内，因此 $\Omega_{\mathcal{P}''}(f)-\Omega_{\mathcal{P}}(f)$ 的绝对值被 $M(x_{k+1}-x_k)$ 控制，从而也被 $M\|\mathcal{P}\|$ 控制. 这就导出了 $|\Omega_{\mathcal{P}''}(f)-\Omega_{\mathcal{P}}(f)| \le M\|\mathcal{P}\|$. 类似地，如果向 $\mathcal{P}''$ 中再插入一个新元素得到新分割 $\mathcal{P}'''$, 那么同样有

$$|\Omega_{\mathcal{P}'''}(f)-\Omega_{\mathcal{P}''}(f)| \le M\|\mathcal{P}''\| \tag{9}$$

由于 $\mathcal{P}'''$ 细于 $\mathcal{P}$, 因此 $\|\mathcal{P}'''\| \le \|\mathcal{P}\|$. 因此 $\Omega_{\mathcal{P}'''}(f)-\Omega_{\mathcal{P}''}(f)$ 的绝对值也被 $M\|\mathcal{P}\|$ 控制，从而有 $|\Omega_{\mathcal{P}'''}(f)-\Omega_{\mathcal{P}}(f)| \le 2M\|\mathcal{P}\|$. 现在考虑 $\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{P}'$ 的 merge $\mathcal{S}$, 其可以通过反复向 $\mathcal{P}$ 中插入元素来得到，插入次数至多为 $\#(\mathcal{P}')-2$ 次. 因此就有

$$\Omega_{\mathcal{P}}(f)-(\#(\mathcal{P}')-2)M\|\mathcal{P}\| \le \Omega_{\mathcal{S}}(f) \le \Omega_{\mathcal{P}'}(f) \tag{10}$$

这就导出了不等式 (7). 这个引理最初是在 [3] pp.213 看到的.

作为引理 2.1 的一个推论，立刻可以导出

$$\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\Omega_{\mathcal{P}}(f) = \inf_{\mathcal{P}}\Omega_{\mathcal{P}}(f) \tag{11}$$

这是因为，设 $\varepsilon > 0$, 那么由下确界的定义可知存在 partition $\mathcal{P}_0$, 使得 $\Omega_{\mathcal{P}_0}(f) < \inf_{\mathcal{P}}\Omega_{\mathcal{P}}(f)+\varepsilon$. 记 $N = \#(\mathcal{P}_0)-2$, 那么当 partition 的 mesh 小于 $\varepsilon/(MN)$ 时，由引理 2.1 可知

$$\Omega_{\mathcal{P}}(f) \le \Omega_{\mathcal{P}_0}(f)+(\#(\mathcal{P}')-2)M\|\mathcal{P}\| < \inf_{\mathcal{P}}\Omega_{\mathcal{P}}(f)+2\varepsilon \tag{12}$$

这就证明了 (11) 式. 类似地可以证明

$$\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\mathcal{L}(f,\mathcal{P},[a,b]) = \underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x, \quad \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\mathcal{U}(f,\mathcal{P},[a,b]) = \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x. \tag{13}$$

现在假设 Riemann 上下积分相等，也即 $\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\Omega_{\mathcal{P}}(f)=0$, 那么对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 partition 的 mesh 小于 δ, 就有 $|\mathcal{U}-\overline{\int}|, |\mathcal{L}-\underline{\int}|<\varepsilon$. 自然，此时由不等式 (13) 可知

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x-\varepsilon<\mathcal{L}(f,\mathcal{P},[a,b])\le\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\Delta,[a,b])\le\mathcal{U}(f,\mathcal{P},[a,b])\le\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x+\varepsilon \tag{14}$$

这就证明了极限 (4) 的存在性.

容易验证闭区间上的连续函数是 Riemann 可积的. 这主要用到了其一致连续性.

3. Riemann 积分的若干缺陷 Riemann 积分的一些缺陷：

1. 如果函数的连续性较差，则其 Riemann 可积性也较差：典型的例子就是 Dirichlet 函数.

2. 无界函数的 Riemann 可积性较差 (反常积分)：一个例子就是取一列可求出瑕积分的函数 $f_k(x)$, 使得每个函数的瑕点恰好对应区间 $[0,1]$ 上的一个有理数，最终导致无法通过划分区间的办法求出函数 $f:=\sum_k \frac{f_k}{2^k}$ 的瑕积分. 这里其实是说，如果将面积的次可加性推广到可数的情况，那么通常的 Riemann 积分就不太够用了. 毕竟这样构造出的 f 多多少少是个较为奇怪的函数，这种例子更偏向于理论意义.

3. Riemann 积分与极限的可交换性较差：这个问题看起来是最为致命的. 可以构造出一列函数 f_k, 它们的 Riemann 积分均为零，但其逐点收敛到 Dirichlet 函数. 虽然可以证明，如果一致有界的可积函数列的逐点极限函数是 Riemann 可积的，那么其积分与极限可以交换位置，也即 $\lim_n\int_a^b f_n=\int_a^b\lim_n f_n$, 但其证明却非常复杂，并且也绕不过使用测度的思想. 这个缺陷使得 Riemann 积分在理论上使用起来尤为不便.

例 3.1. 定义闭区间 $[0,1]$ 上的函数 f 为

$$f(x)=\begin{cases}0, & 若\ x\ 为无理数\\ \frac{1}{n}, & 若\ x\ 为有理数，且\ n\ 为形如\ x=\frac{m}{n}\ 的表达式中的最小正整数\ n\end{cases} \tag{15}$$

证明 f 是 Riemann 可积的，并计算其积分值.

显然 f 的每一个 Darboux 下和都为零，因此 $\underline{\int_0^1} f=0$. 下面证明 f Riemann 可积. 只需构造出一列 partition $\mathcal{P}_n$, 使得 $\lim_n \Omega_{\mathcal{P}_n}(f)=0$ 即可. 由于 $\mathcal{L}\equiv 0$, 因此只需证明 $\lim_n \mathcal{U}(f,\mathcal{P}_n,[0,1])=0$. 事实上，对于任意的 n, 满足 $f(x)=1/n$ 的 $[0,1]$ 内的有理数至多有 $n+1$ 个，因此其数目有限. 自然，可以适当地划分区间，得到分割 $\mathcal{P}_n$, 使得满足 $f(x)\geq 1/n$, 也即 $f(x)=1,1/2,\cdots,1/n$ 的全体有理数 x 所在的区间的总长不超过 $1/n$. 自然，f 在剩下的那些区间上的上确界均小于 $1/n$. 于是就有

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(f,\mathcal{P}_n,[0,1])=&\sum_{f(x)\geq 1/n\ 的\ x\ 所在区间\ [x_{i-1},x_i]}\sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)(x_i-x_{i-1})\\ &+\sum_{其余区间\ [x_{i-1},x_i]}\sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)(x_i-x_{i-1})\\ <&\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\\ =&\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\end{aligned} \tag{16}$$

于是就有 $\lim_n \mathcal{U}(f,\mathcal{P}_n,[0,1])=0$. 因此 f 是 Riemann 可积的，并且其 Riemann 积分为 $\int_0^1 f=0$.

例 3.2. Riemann 积分与极限交换时，一致有界条件不可去掉.

事实上，构造单位区间 $[0,1]$ 上的连续函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}n^2x, & 若\ 0\leq x\leq 1/n\\ 2n-n^2x, & 若\ 1/n<x\leq 2/n\\ 0 & 若\ x>2/n\end{cases} \tag{17}$$

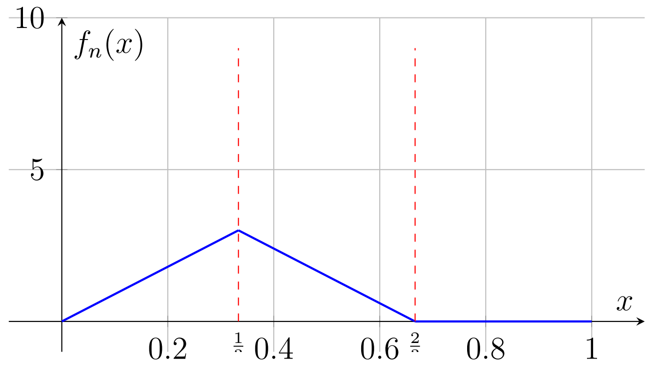

图 3.1: Graph of the piecewise function $f_n(x)$ depicted by equation (17) for $n = 3$.

那么就有 $\int_0^1 f_n = 1$, 以及 $\lim_n f_n(x) \equiv 0$. 这是因为 $f_n(x)$ 也就只在开区间 $(0, 2/n)$ 上不为零，该区间随着 $n \to \infty$ 而消失. 因此，极限函数 $f := \lim_n f_n$ 是连续的，并且有 $\int_0^1 f = 0$. 因此

$$\lim_n \int_0^1 f_n = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_n f_n \tag{18}$$

当然，f_n 不是一致有界的：$\sup_{x \in [0,1]} f_n(x) = n$, 因此 $f_n(x)$ 不可能被某个有限的数所一致控制.

4. 外测度 外测度的概念是经典的：对 $\mathbb{R}$ 的任意子集 A, 都可定义其外测度 $|A|$ 为覆盖 A 的开区间列的总长度之下确界，也即 $|A| = \inf_{A \subset \bigcup_n I_n} \sum_n \ell(I_n)$. 这总是定义良好的. 如果某个 $\ell(I_n)$ 为 $+\infty$, 那么显然 $\sum_n \ell(I_n) = +\infty$. 反之，$\sum_n \ell(I_n)$ 是一个非负项的数项级数. 自然，非负项级数要么收敛，要么发散到 $+\infty$. 因此，如果将 $+\infty$ 也作为一个合法的长度值，那么 $\sum_n \ell(I_n)$ 总是有定义的，并且总是大于等于零. 因此任意的实数集 A 的外测度总是有定义的.

例 4.1. 可数集的外测度为零.

设 $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\varepsilon > 0$, 那么可以构作区间列 $I_n = (a_n - \varepsilon/2^n, a_n + \varepsilon/2^n)$,

使得 $A \subset \bigcup_n I_n$, 于是

$$|A| \le \sum_n \ell(I_n) = \sum_n \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} = 2\varepsilon \tag{19}$$

这就证明了 $|A| = 0$.

特别的，有理数集 $\mathbb{Q}$ 的外测度为零. 这表明外测度的性质至少要比 Jordan 测度要好，因为 $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ 的 Jordan 测度正是 Dirichlet 函数的 Riemann 积分，因而是不存在的.

如果实数集 A 含于 B, 那么任意覆盖了 B 的开区间列也覆盖了 A, 因而 $|A| \le |B|$. 因此外测度与集合的包含关系的相容性良好. 此外，由于平移变换并不改变开区间的长度，并且将开区间变为开区间，并且还是可逆的，因此任意实数集 A 平移 t 距离后，其外测度保持不变：$|A+t| = |A|$. 这就是说外测度具有平移不变性.

外测度最为重要的一条性质恐怕就是次可数可加性了.

定理 4.2. 外测度具有次可数可加性：$|\bigcup_n A_n| \le \sum_n |A_n|$.

首先，如果某个集合 A_n 的外测度为 $+\infty$, 那么结论显然成立. 下面假设所有 $|A_n|$ 都是有限的. 设 $\varepsilon > 0$. 对于任意固定的 n, 根据外测度的定理，可以找到一列开区间 $\{I_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, 使得

$$\sum_k \ell(I_{n,k}) < |A_n| + \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{20}$$

自然,记所有这些区间 $I_{n,k}$ 所做成的集合为 X, 那么映射 $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to X$, $(n,k) \mapsto I_{n,k}$ 可以重新排列顺序为 $\mathbb{N} \to X$, $j \mapsto I_{n(j),k(j)}$. 这一列区间 $I'_j := I_{n(j),k(j)}$ 覆盖了 $\bigcup_n A_n$, 并且对于每个正整数 $p \in \mathbb{N}$, 记 $n(1), \cdots, n(p)$ 中的最大值为 $N(p)$, 则有

$$\sum_{j=1}^{p} \ell(J_j) \le \sum_{n=1}^{N(j)} \sum_k \ell(I_{n,k}) \le \sum_n \sum_k \ell(I_{n,k}) < \sum_n |A_n| + \varepsilon \tag{21}$$

于是 $\sum_j \ell(J_j) \le \sum_n |A_n| + \varepsilon$. 这就证明了

$$\left|\bigcup_n A_n\right| \le \sum_n |A_n| \tag{22}$$

作为一个简单推论，外测度也具有次有限可加性：$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| \le \sum_{i=1}^n |A_i|$.

下面来计算有界区间的外测度. 从几何上来看，开区间 (a,b) 的外测度应该就等于其长度 $b-a$. 严格的证明稍微麻烦一些，需要借助有界闭区间的紧性. 首先，(a,b) 与 $[a,b]$ 的外测度相同：$|(a,b)| \le |[a,b]| \le b-a$, 并且由 $[a,b] \subset (a-\varepsilon, b+\varepsilon)$, 以及 $|(a-\varepsilon,b+\varepsilon)| \le |(a,b)|+2\varepsilon$ 可得 $[a,b] \le (a,b)$. 这就证明了开区间 (a,b) 的外测度与其闭包相同. 另一方面，由 $[a,b]$ 的紧性可知，任意覆盖了 $[a,b]$ 的开区间列 I_n 都存在有限子覆盖 $J_1, \cdots, J_p$. 下面只需证明 $\sum_{i=1}^p \ell(J_i) \ge b-a$ 即可. 最简单的证法是用归纳法 ([1] pp. 20). 当 $p=1$ 时结论显然成立. 假设该结论对 $p \le k$ 成立，那么当 $p=k+1$ 时，设 $[a,b]$ 被开区间 $J_1, \cdots, J_p$ 中的某个 $J_s = (c,d)$ 所覆盖，那么若 $c \le a$, 则 $\ell((c,d)) \ge b-a$, 故结论成立. 若 $c > a$, 则闭区间 $[a,c]$ 被 k 个开区间 $\{J_i\}_{1\le i\le p,\ i\ne s}$ 所覆盖，于是由归纳假设即知 $\sum_{i\ne s} \ell(J_i) \ge c-a$. 于是就有 $\sum_{i=1}^p \ell(J_i) \ge (c-a)+(b-c) = b-a$, 因此总是有 $\sum_n \ell(I_n) \ge b-a$. 这就证明了 $|[a,b]| = b-a$, 因而开区间 (a,b) 的外测度也等于 $b-a$.

利用区间的外测度还可以给出区间的不可数性的另一个证明.

例 4.3. 非空区间是不可数的.

事实上，由于可数集的外测度为零，而非空区间的外测度都大于零，因而非空区间不可能是可数集. 这就证明了结论.

5. 外测度的缺点：不可加性 Vitali 提供了集合的不交并的外测度不等于各自外测度之和的一个例子.

例 5.1. 存在不交的实数集 A 和 B，使得 $|A \cup B| \ne |A| + |B|$.

对于区间 $[-1,1]$ 内的任意实数 a, 定义相伴的集合 $\tilde{a}$ 为 $[-1,1]$ 内所有与 a 只相差一个有理移位的元素之全体，那么若 $\tilde{a} \cap \tilde{b} \ne \emptyset$, 譬如说 $c \in \tilde{a} \cap \tilde{b}$,

那么就有 $a-c, b-c \in \mathbb{Q}$. 因此 a, b 本身就只相差一个有理移位. 因此对于任意实数来说，与 a 的距离为有理数当且仅当与 b 的距离为有理数，从而有 $\tilde{a}=\tilde{b}$. 自然，由 $a \in \tilde{a}$ 可知 $[-1,1] \subset \bigcup_{a\in[-1,1]} \tilde{a}$. 利用选择公理可从集合簇 $\{\tilde{a}\}_{a\in[-1,1]}$ 中的每个集合中取出一个元素，做成一个新集合 V. 令 $[-2,2]$ 内的全体有理数所做成的数列为 $r_1, r_2, \cdots$, 那么就有 $[-1,1] \subset \bigcup_k (r_k+V)$. 这是因为对于 $[-1,1]$ 中的任意元素 a, 设 V 所含的 $\tilde{a}$ 中元素为 x, 则有 $a-x \in \mathbb{Q}\cap[-2,2]$, 因而 $a-x$ 等于某个 r_k, 于是 $a \in \bigcup_k (r_k+V)$. 由外测度的次可数可加性和平移不变性即知

$$2=|[-1,1]| \leq \sum_k |r_k+V| = \sum_k |V| \tag{23}$$

这表明 V 的外测度必定大于零. 容易验证集列 $\{r_k+V\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是互不相交的. 这是因为，若 $x \in (r_{k_1}+V)\cap(r_{k_2}+V)$, 其中 $r_{k_1} \neq r_{k_2}$, 那么存在实数 a, b, 使得 $x-r_{k_1} \in \tilde{a}\cap V$, $x-r_{k_2} \in \tilde{b}\cap V$. 自然，$x-r_{k_2} = x-r_{k_1}+(r_{k_1}-r_{k_2})$ 也落入 $\tilde{a}$ 中，这就表明 $\tilde{a}$ 与 $\tilde{b}$ 相交，于是 $\tilde{a}=\tilde{b}$. 由 V 的定义即知 $x-r_{k_1}=x-r_{k_2}$, 这就导出了 $r_{k_1}=r_{k_2}$, 矛盾！

由于 $r_k \in [-2,2]$, $V \subset [-1,1]$, 因此 $\bigcup_k (r_k+V) \subset [-3,3]$. 于是 $|\bigcup_k (r_k+V)| \leq 6$. 另一方面，由于 $|V|>0$, 因此必定存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} (r_k+V)\right| < n|V| = \sum_{k=1}^{n} |r_k+V| \tag{24}$$

特别的，如果对于任意的不交的实数集 A, B, 均有等式 $|A\cup B|=|A|+|B|$, 那么以上不等式必定不成立. 因此必定存在不交的集合 A, B, 使得其并集的外测度不等于各自外测度之和.

例 5.2. 若 $\mathbb{R}$ 的一簇闭子集的交集为空集，并且其中某个集合有界，那么该集合簇中可以找到有限个集合，使得其交集为空集.

事实上，设 $\bigcap_{F\in\mathcal{A}} F = \emptyset$, 那么 $\{F^C\}_{F\in\mathcal{A}}$ 就是 $\mathbb{R}$ 的一个开覆盖. 设其中的 $F \in \mathcal{A}$ 有界，那么其为紧集，故存在有限多个 $F_1^C, \cdots, F_n^C$ 覆盖了 F.

自然，$F_1^C, \cdots, F_n^C, F^C$ 就是 $\mathbb{R}$ 的一个有限开覆盖，从而有

$$F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap F = \emptyset \tag{25}$$

例 5.3. 若 $I_1, I_2, \cdots$ 为一列互不相交的开区间，则有 $|\bigcup_n I_n| = \sum_n \ell(I_n)$.

左 $\leq$ 右是明显的. 下面证明左 $\geq$ 右. 设 J_n 是一列覆盖了 $\bigcup_n I_n$ 的开区间，那么对于每个 n, 可定义开区间 (包括空集) 列 $\{J_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 为 $J_{n,k} := J_k \cap I_n$. 自然，$\{J_{n,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 覆盖了 I_n, 于是有 $\sum_k \ell(J_{n,k}) \geq |I_n| = \ell(I_n)$. 由于 I_n 互不相交，因此对于任意固定的 m, 可以验证 $\ell(J_k) \geq \sum_{n=1}^m \ell(J_k \cap I_n)$. 不妨将其写为一个引理：

引理 5.4. 设 I 为开区间，$K_1, \cdots, K_n$ 为互不相交的开区间，那么 $\ell(I) \geq \sum_{k=1}^n \ell(I \cap K_n)$.

事实上，若 I 退化或者为空集，那么结论显然成立. 下面设 $I = (a, b)$ 非退化，将 $I \cap K_n$ 中的非退化区间的左端点做成一个集合，并进行排序，得到数组 $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$, 将右端点也做成一个集合，排序为 $b_1 < b_2 < \cdots < b_m$. 那么由于 K_i 两两不交，因此必定有

$$a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \cdots \leq a_m < b_m \leq b \tag{26}$$

也就是说，如果令 $b_0 := a$, 那么就有 $b_{i-1} \leq a_i < b_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$. 这是因为，对于两个不交的非退化开区间 $(c, d), (c', d')$ 来说，由 $c \leq d'$ 即可导出 $c < d \leq c' < d'$, 类似地由 $c \geq d'$ 也可导出 $c' < d' \leq c < d$. 现在由于 $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$, 因此如果记 a_i 所对应的区间右端点为 $\tilde{a}_i$, 则有 $a_{i-1} < a_i < \tilde{a}_i$, $(a_0 := a)$, 这就导出了

$$a_{i-1} < \tilde{a}_{i-1} \leq a_i < \tilde{a}_i \tag{27}$$

从而得到了 m 个区间的右端点数组 $\tilde{a}_1 < \tilde{a}_2 < \cdots < \tilde{a}_m$. 对比 b_i 的定义即知 $\tilde{a}_i = b_i$, 这就导出了不等式 (26). 由此还可以知道，非退化区间 $I \cap K_n$

可枚举为 $(a_1,b_1),\cdots,(a_m,b_m)$. 于是就有

$$\sum_{k=1}^{n}\ell(I\cap K_n)=\sum_{I\cap K_n\ \text{非退化}}\ell(I\cap K_n)=\sum_{i=1}^{m}(b_i-a_i)\le\sum_{i=1}^{m}(b_i-b_{i-1})\le b-a \tag{28}$$

即证明了引理 5.4.

根据引理 5.4，我们有 $\ell(J_k)\ge\sum_n\ell(J_k\cap I_n)$, 从而有

$$\sum_k\ell(J_k)\ge\sum_k\sum_n\ell(J_k\cap I_n)=\sum_n\sum_k\ell(J_{n,k})\ge\sum_n\ell(I_n) \tag{29}$$

这就证明了

$$\left|\bigcup_n I_n\right|=\sum_n\ell(I_n) \tag{30}$$

例 5.5. 设 $r_1,r_2,\cdots$ 为全体有理数的一个枚举. 令 $F=\mathbb{R}\backslash\bigcup_k(r_k-2^{-k},r_k+2^{-k})$. 证明

1. F 是闭集.

2. F 所包含的区间都是退化的.

3. $|F|=+\infty$.

1. 是平凡的. 至于 2, 设 I 是 F 是包含的一个区间，若 I 非退化，那么就必定包含一个有理数 r_k 作为其内点，从而也是 F 的内点. 由 F 的定义可知 r_k 不是 F 的内点，矛盾！至于第三条，则是因为 $\sum_k\ell((r_k-2^{-k},r_k+2^{-k}))=2$, 因此由 $+\infty=|F\cup(\bigcup_k(r_k-2^{-k},r_k+2^{-k}))|\le|F|+\sum_k|(r_k-2^{-k},r_k+2^{-k})|$ 即知 $|F|=+\infty$.

6. 可测空间与可测函数 在 Vitali 的例子 (5.1) 中，只使用到了外测度的以下几条性质：

1. $\mathbb{R}$ 的任意子集的外测度均有定义.

2. 开区间的外测度等于其长度.

3. 外测度具有次可数可加性.

4. 外测度与集合的包含关系相容.

5. 外测度具有平移不变性.

其中性质 4. 实际上可从性质 3. 推出. 自然，对于任何一个定义在 $\mathbb{R}$ 的子集簇上的 $[0, +\infty]$ 值函数 μ, 只要其同时满足上述五条性质，那么它就不可能满足有限可加性，遑论可数可加性. 因而为了获得可加性，势必要作出一些妥协. 由于后 4 条性质与几何直觉以及分析的需要密切相关，因此最容易放弃的就是第 1 条，也即限制 μ 的定义域，选择一些较小的集类. 由此引入的 $\sigma-$ 代数恐怕就是测度论中最为重要的概念了，没有之一.

所谓 X 上的一个 $\sigma-$ 代数就是指一个包含集合 X 本身，且对补集运算和可数并封闭的 X 的子集类. 自然，其对有限并、有限交和可数交也封闭.

例 6.1. X 的所有至多可数子集，以及补集为至多可数集的子集，构成 X 上的一个 $\sigma-$ 代数 $\mathcal{S}$.

首先，$X \in \mathcal{S}$. 其次，显然 $\mathcal{S}$ 对补集运算封闭. 最后，设 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 $\mathcal{S}$ 中的一列集合，那么若 E_n 均至多可数，则 $\bigcup_n E_n$ 当然也至多可数. 否则，必定存在某个 E_n, 其补集至多可数. 于是 $[\bigcup_n E_n]^C = \bigcap_n E_n^C$ 至多可数. 这就证明了 $\mathcal{S}$ 关于有限并的封闭性.

参考文献

[1] Sheldon Axler. *Measure, Integration & Real Analysis*. Springer, 2020.

[2] 任佳刚 and 巫静. *测度与概率教程*. 科学出版社, 2018.

[3] 梅加强. *数学分析*. 高等教育出版社, 2011.

[4] 袁震东. *近代概率引论: 测度、鞅和随机微分方程*. 科学出版社, 1991.