测度与概率 Notes

Liu Fuzhou

2025 年 2 月 5 日

前言

要看偏微分方程，就要先看泛函分析. 要看泛函分析，就要先看实分析. 泛函分析和实分析对随机分析也是重要的. 无论如何也绕不开 L^p 空间. 可见掌握实分析十分重要. 以前其实也看过这个主题的书，结果后来都忘了. 看来做一些有形的笔记是很有必要的. 不需要特别详细，提纲挈领即可.

主要参考文献：

1. 近代概率引论: 测度、鞅和随机微分方程. 袁震东. 科学出版社, 1991.
2. 测度与概率教程. 任佳刚, 巫静. 科学出版社, 2018.
3. Measure, Integration & Real Analysis. Sheldon Axler. Springer, 2020.

Liu Fuzhou

2025 年 2 月 5 日

目录

1 集列的极限 1
2 Riemann 积分 1
3 Riemann 积分的若干缺陷 5
4 外测度 7

插图

3.1 Graph of the piecewise function $f_n(x)$ depicted by equation (17) for $n = 3$. 7

1. 集列的极限 首先比较重要的概念就是集列的上极限与下极限. 集列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的上极限就是落到其中无限多个集合的元素所做成的集合，也即 $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 下极限就是除去有限多个集合后，落到所有集中的元素所做成的集合，也即 $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. 换言之也即"最终落到集列" A_n 中的那些元素之全体. 显然，下限集中的元素也都落到上限集之中，也即 $\liminf A_n \subset \limsup A_n$. 如果集列 A_n 的上限集与下限集相等，那么就说集列 A_n 收敛，并称 $A = \liminf A_n = \limsup A_n$ 为集列 A_n 的极限. 这个极限是关于集合包含的偏序关系说的. 与实数的情况类似，有单调集列的收敛定理：如果 $A_n \uparrow$ 是单调递增的，那么 $\lim A_n = \bigcup_n A_n$. 类似地，如果 $A_n \downarrow$ 是单调递减的，那么 $\lim A_n = \bigcap_n A_n$.

例 1.1. 设 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为单调减少集列. 证明

$$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n+1}) + \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

证明. 首先，右边的每个集合都含于 A_1. 因此右边含于 A_1. 其次，若 $x \in A_1$ 且 $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 则 $x \in \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n-1})$ 且 $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 因此 A_1 也是单调递减的. 最后，若 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 则存在某个 $n > 1$, 使得 $x \notin A_n$. 令 n_0 为最小的这种 n, 那么就有 $x \notin A_{n_0}$, $x \in A_{n_0-1}$. 于是就有 $x \in \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n-1})$. 这就证明了 $A_1 \subset \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n+1}) + \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. □

2. Riemann 积分 还是用 [1] 作为参考书比较好，还是彩色的. 我还是比较喜欢 Riemann 积分的，最开始是在梅加强的书上学的. 比较重要的技术就是证明 Darboux 上和总是大于等于 Darboux 下和那里，需要用到两个 partition 的 merge. 也就是说，用到了有界闭区间的 partition 全体构成一个 directed set 的性质. Darboux 上和与 Darboux 下和之差就是所谓的函数振幅 $\Omega_{\mathcal{P}}(f) = \sum_i(\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f - \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i})(x_i - x_{i-1})$, 这里 $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ 是所讨论的具体的分割.

如果向 partition 的点集增加元素，也即使得分割变得更细，那么结果就是上和不增，下和不减. 这就导致了两个极限 $\lim_{\mathcal{P}} \mathcal{L}(f, \mathcal{P}, [a, b])$ 和

$\lim_{\mathcal{P}}\mathcal{U}(f,\mathcal{P},[a,b])$, 称为 Riemann 下积分 $\underline{\int}$ 和上积分 $\overline{\int}$. 这两个极限是关于 partition 全体所具有的 directed set 结构说的, 也就是说是 net 的极限. 由于下和不大于上和，也即 $\mathcal{L}\le\mathcal{U}$, 因此这两个极限之间也有关系

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \tag{1}$$

如果 Riemann 上下积分相等，就说 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，其积分 $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ 就定义为上下积分的共同值.

任意分割 $\mathcal{P}$ 都将区间 $[a,b]$ 分成 $\#(\mathcal{P})-1$ 个首尾相接的闭区间 $[x_0,x_1],\cdots,[x_{n-1},x_n]$. 从每个闭区间挑选一个元素出来，就可以做成一个集合 Δ. 这种挑选当然是不唯一的. 称这种通过在每个闭区间中挑出一个元素所形成的集合为与 partition $\mathcal{P}$ 相伴的一个点集. 设 $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是任意一列 partition, 并且 $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列与之相伴的点集,每个 Δ_n 中元素形如 $\Delta_n=\{\xi_1,\cdots,\xi_{\#(\mathcal{P}_n)-1}\}$, 那么就可以考虑 Riemann 和所形成的数列

$$\mathcal{R}_n := \mathcal{R}(f,\mathcal{P}_n,\Delta_n,[a,b]) = \sum_{i=1}^{\#(\mathcal{P}_n)-1} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) \tag{2}$$

显然有 $\mathcal{L}(f,\mathcal{P}_n,[a,b])\le\mathcal{R}_n\le\mathcal{U}(f,\mathcal{P}_n,[a,b])$. 因此有

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \le \liminf\mathcal{R}_n \le \limsup\mathcal{R}_n \le \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \tag{3}$$

这就表明，如果 $\mathcal{R}_n$ 有收敛子列的话，那么该子列的极限就必定位于上下积分之间. 当然了，如果 f 是 Riemann 可积的，这个极限就必定等于 $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.

以上讨论了利用 partition 的全体所组成的集合之上的 directed set 结构来定义的 Riemann 积分. 下面考虑利用 Riemann 和关于 partition 的 mesh 的极限的途径. 这就是说，把 Riemann 积分定义为极限

$$\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\Delta,[a,b]) \tag{4}$$

其中 $\|\mathcal{P}\|=\max_i|x_i-x_{i-1}|$ 是 partition 的 mesh. 这个极限其实相当强，因为其定义只涉及 partition, 对相伴的点集 Δ 没什么要求.

由不等式 (3) 可知，如果两种定义下的 Riemann 积分均存在，那么它们的值必定相等. 因此，两种定义的等价性的证明就归结于证明其存在性的等价性.

要证明两种定义的等价性，首先要注意到，上下积分之差恰好等于函数振幅的下确界 $\inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f)$. 这就是说 $\lim_{\mathcal{P}}(\mathcal{U}(f,\mathcal{P},[a,b]) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P},[a,b])) = \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f)$, 或者说 $\lim_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) = \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f)$. 事实上，设 $\varepsilon > 0$, 那么由 net 的极限的定义，存在 partition $\mathcal{P}_0$, 使得任意细于 $\mathcal{P}_0$ 的分割 $\mathcal{P}$ 都满足 $|\Omega_{\mathcal{P}_0}(f) - \lim_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f)| < \varepsilon$. 另一方面，由下确界的定义，存在 partition $\mathcal{P}_1$ 使得 $\Omega_{\mathcal{P}_1}(f) < \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) + \varepsilon$. 取分割 $\mathcal{P}_2$ 为 $\mathcal{P}_0$ 与 $\mathcal{P}_1$ 的 merge, 那么就有

$$\lim_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) - \varepsilon < \Omega_{\mathcal{P}_2}(f) \leq \Omega_{\mathcal{P}_1}(f) < \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) + \varepsilon \tag{5}$$

于是 $\inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) \leq \lim_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) < \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) + 2\varepsilon$. 这就证明了

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) \tag{6}$$

假如极限 (4) 存在，其值记为 A, 那么对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 partition 的 mesh 小于 δ, 就有 $|\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\Delta,[a,b]) - A| < \varepsilon$. 现在固定分割 $\mathcal{P}$, 那么由于该不等式对于任意与 $\mathcal{P}$ 相伴的点集 Δ 都成立，因此有 $\Omega_{\mathcal{P}}(f) \leq 2\varepsilon$. 这就证明了 $\inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) = 0$, 因而上下积分相等.

反之，要从上下积分相等导出极限 (4) 的存在性，还需要证明一个基于 partition 的 mesh 估计的技术性引理：

引理 2.1. 设 $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ 为区间 $[a,b]$ 的两个 partition, $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, 那么就有不等式

$$\Omega_{\mathcal{P}}(f) \leq \Omega_{\mathcal{P}'}(f) + (\#(\mathcal{P}') - 2)M\|\mathcal{P}\| \tag{7}$$

事实上，如果向 $\mathcal{P}$ 中添加一个新元素 y, 譬如说插入到区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 中，那么所形成的新分割 $\mathcal{P}''$ 的 Darboux 和与 $\mathcal{P}$ 的 Darboux 的差异仅来

自于区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 的贡献，也即

$$\Omega_{\mathcal{P}''}(f)-\Omega_{\mathcal{P}}(f)=\omega_{x_k\le x\le y}f(x)(y-x_k)+\omega_{y\le x\le x_{k+1}}f(x)(x_{k+1}-y)-\omega_{x_k\le x\le x_{k+1}}f(x)(x_{k+1}-x_k) \tag{8}$$

考虑到 $\omega_{x_k\le x\le y}-\omega_{x_k\le x\le x_{k+1}}$ 和 $\omega_{y\le x\le x_{k+1}}-\omega_{x_k\le x\le x_{k+1}}$ 都落到区间 $[-M, M]$ 内，因此 $\Omega_{\mathcal{P}''}(f)-\Omega_{\mathcal{P}}(f)$ 的绝对值被 $M(x_{k+1}-x_k)$ 控制，从而也被 $M\|\mathcal{P}\|$ 控制. 这就导出了 $|\Omega_{\mathcal{P}''}(f)-\Omega_{\mathcal{P}}(f)|\le M\|\mathcal{P}\|$. 类似地，如果向 $\mathcal{P}''$ 中再插入一个新元素得到新分割 $\mathcal{P}'''$, 那么同样有

$$|\Omega_{\mathcal{P}'''}(f)-\Omega_{\mathcal{P}''}(f)|\le M\|\mathcal{P}''\| \tag{9}$$

由于 $\mathcal{P}'''$ 细于 $\mathcal{P}$, 因此 $\|\mathcal{P}'''\|\le\|\mathcal{P}\|$. 因此 $\Omega_{\mathcal{P}'''}(f)-\Omega_{\mathcal{P}''}(f)$ 的绝对值也被 $M\|\mathcal{P}\|$ 控制，从而有 $|\Omega_{\mathcal{P}'''}(f)-\Omega_{\mathcal{P}}(f)|\le 2M\|\mathcal{P}\|$. 现在考虑 $\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{P}'$ 的 merge $\mathcal{S}$, 其可以通过反复向 $\mathcal{P}$ 中插入元素来得到，插入次数至多为 $\#(\mathcal{P}')-2$ 次. 因此就有

$$\Omega_{\mathcal{P}}(f)-(\#(\mathcal{P}')-2)M\|\mathcal{P}\|\le\Omega_{\mathcal{S}}(f)\le\Omega_{\mathcal{P}'}(f) \tag{10}$$

这就导出了不等式 (7). 这个引理最初是在 [3] pp.213 看到的.

作为引理 2.1 的一个推论，立刻可以导出

$$\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\Omega_{\mathcal{P}}(f)=\inf_{\mathcal{P}}\Omega_{\mathcal{P}}(f) \tag{11}$$

这是因为，设 $\varepsilon>0$, 那么由下确界的定义可知存在 partition $\mathcal{P}_0$, 使得 $\Omega_{\mathcal{P}_0}(f)<\inf_{\mathcal{P}}\Omega_{\mathcal{P}}(f)+\varepsilon$. 记 $N=\#(\mathcal{P}_0)-2$, 那么当 partition 的 mesh 小于 $\varepsilon/(MN)$ 时，由引理 2.1 可知

$$\Omega_{\mathcal{P}}(f)\le\Omega_{\mathcal{P}_0}(f)+(\#(\mathcal{P}')-2)M\|\mathcal{P}\|<\inf_{\mathcal{P}}\Omega_{\mathcal{P}}(f)+2\varepsilon \tag{12}$$

这就证明了 (11) 式. 类似地可以证明

$$\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\mathcal{L}(f,\mathcal{P},[a,b])=\underline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x,\quad \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\mathcal{U}(f,\mathcal{P},[a,b])=\overline{\int_a^b}f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{13}$$

现在假设 Riemann 上下积分相等，也即 $\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\Omega_{\mathcal{P}}(f)=0$, 那么对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 partition 的 mesh 小于 δ, 就有 $|\mathcal{U}-\overline{\int}|,|\mathcal{L}-\underline{\int}|<\varepsilon$. 自然，此时由不等式 (13) 可知

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x-\varepsilon<\mathcal{L}(f,\mathcal{P},[a,b])\le\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\Delta,[a,b])\le\mathcal{U}(f,\mathcal{P},[a,b])\le\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x+\varepsilon \tag{14}$$

这就证明了极限 (4) 的存在性.

容易验证闭区间上的连续函数是 Riemann 可积的. 这主要用到了其一致连续性.

3. Riemann 积分的若干缺陷 Riemann 积分的一些缺陷：

1. 如果函数的连续性较差，则其 Riemann 可积性也较差：典型的例子就是 Dirichlet 函数.

2. 无界函数的 Riemann 可积性较差 (反常积分)：一个例子就是取一列可求出瑕积分的函数 $f_k(x)$, 使得每个函数的瑕点恰好对应区间 $[0,1]$ 上的一个有理数，最终导致无法通过划分区间的办法求出函数 $f:=\sum_k\frac{f_k}{2^k}$ 的瑕积分. 这里其实是说，如果将面积的次可加性推广到可数的情况，那么通常的 Riemann 积分就不太够用了. 毕竟这样构造出的 f 多多少少是个较为奇怪的函数，这种例子更偏向于理论意义.

3. Riemann 积分与极限的可交换性较差：这个问题看起来是最为致命的. 可以构造出一列函数 f_k, 它们的 Riemann 积分均为零，但其逐点收敛到 Dirichlet 函数. 虽然可以证明，如果一致有界的可积函数列的逐点极限函数是 Riemann 可积的，那么其积分与极限可以交换位置，也即 $\lim_n\int_a^b f_n=\int_a^b\lim_n f_n$, 但其证明却非常复杂，并且也绕不过使用测度的思想. 这个缺陷使得 Riemann 积分在理论上使用起来尤为不便.

例 3.1. 定义闭区间 $[0,1]$ 上的函数 f 为

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } x \text{ 为无理数}\\ \frac{1}{n}, & \text{若 } x \text{ 为有理数，且 } n \text{ 为形如 } x=\frac{m}{n} \text{ 的表达式中的最小正整数 } n\end{cases} \tag{15}$$

证明 f 是 Riemann 可积的，并计算其积分值.

显然 f 的每一个 Darboux 下和都为零，因此 $\underline{\int_0^1} f = 0$. 下面证明 f Riemann 可积. 只需构造出一列 partition $\mathcal{P}_n$, 使得 $\lim_n \Omega_{\mathcal{P}_n}(f)=0$ 即可. 由于 $\mathcal{L}\equiv 0$, 因此只需证明 $\lim_n \mathcal{U}(f,\mathcal{P}_n,[0,1])=0$. 事实上，对于任意的 n, 满足 $f(x)=1/n$ 的 $[0,1]$ 内的有理数至多有 $n+1$ 个，因此其数目有限. 自然，可以适当地划分区间，得到分割 $\mathcal{P}_n$, 使得满足 $f(x)\geq 1/n$, 也即 $f(x)=1,1/2,\cdots,1/n$ 的全体有理数 x 所在的区间的总长不超过 $1/n$. 自然，f 在剩下的那些区间上的上确界均小于 $1/n$. 于是就有

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(f,\mathcal{P}_n,[0,1])=&\sum_{f(x)\geq 1/n \text{ 的 } x \text{ 所在区间 } [x_{i-1},x_i]}\ \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)(x_i-x_{i-1})\\ &+\sum_{\text{其余区间 } [x_{i-1},x_i]}\ \sup_{x_{i-1}\leq x\leq x_i} f(x)(x_i-x_{i-1})\\ <&\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\\ =&\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\end{aligned} \tag{16}$$

于是就有 $\lim_n \mathcal{U}(f,\mathcal{P}_n,[0,1])=0$. 因此 f 是 Riemann 可积的，并且其 Riemann 积分为 $\int_0^1 f=0$.

例 3.2. Riemann 积分与极限交换时，一致有界条件不可去掉.

事实上，构造单位区间 $[0,1]$ 上的连续函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}n^2x, & \text{若 } 0\leq x\leq 1/n\\ 2n-n^2x, & \text{若 } 1/n<x\leq 2/n\\ 0 & \text{若 } x>2/n\end{cases} \tag{17}$$

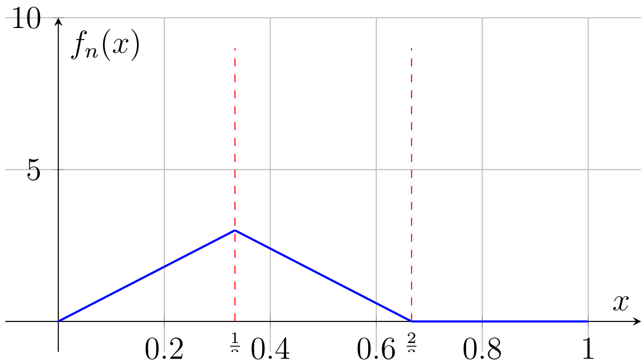

图 3.1: Graph of the piecewise function $f_n(x)$ depicted by equation (17) for $n = 3$.

那么就有 $\int_0^1 f_n = 1$, 以及 $\lim_n f_n(x) \equiv 0$. 这是因为 $f_n(x)$ 也就只在开区间 $(0, 2/n)$ 上不为零，该区间随着 $n \to \infty$ 而消失. 因此，极限函数 $f := \lim_n f_n$ 是连续的，并且有 $\int_0^1 f = 0$. 因此

$$\lim_n \int_0^1 f_n = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_n f_n \tag{18}$$

当然，f_n 不是一致有界的：$\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = n$, 因此 $f_n(x)$ 不可能被某个有限的数所一致控制.

4. 外测度 外测度的概念是经典的：对 $\mathbb{R}$ 的任意子集 A, 都可定义其外测度 $|A|$ 为覆盖 A 的开区间列的总长度之下确界，也即 $|A| = \inf_{A\subset\bigcup_n I_n} \sum_n \ell(I_n)$.

参考文献

[1] Sheldon Axler. *Measure, Integration & Real Analysis*. Springer, 2020.

[2] 任佳刚 and 巫静. *测度与概率教程*. 科学出版社, 2018.

[3] 梅加强. *数学分析*. 高等教育出版社, 2011.

[4] 袁震东. *近代概率引论: 测度、鞅和随机微分方程*. 科学出版社, 1991.