测度与概率 Notes

Liu Fuzhou

2025 年 2 月 4 日

前言

要看偏微分方程，就要先看泛函分析. 要看泛函分析，就要先看实分析. 泛函分析和实分析对随机分析也是重要的. 无论如何也绕不开 L^p 空间. 可见掌握实分析十分重要. 以前其实也看过这个主题的书，结果后来都忘了. 看来做一些有形的笔记是很有必要的. 不需要特别详细，提纲挈领即可.

主要参考文献：

1. 近代概率引论: 测度、鞅和随机微分方程. 袁震东. 科学出版社, 1991.

2. 测度与概率教程. 任佳刚, 巫静. 科学出版社, 2018.

3. Measure, Integration & Real Analysis. Sheldon Axler. Springer, 2020.

Liu Fuzhou

2025 年 2 月 4 日

目录

1. 集列的极限 首先比较重要的概念就是集列的上极限与下极限. 集列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的上极限就是落到其中无限多个集合的元素所做成的集合，也即 $\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. 下极限就是除去有限多个集合后，落到所有集中的元素所做成的集合，也即 $\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. 换言之也即“最终落到集列”$A_n$ 中的那些元素之全体. 显然，下限集中的元素也都落到上限集之中，也即 $\liminf A_n \subset \limsup A_n$. 如果集列 A_n 的上限集与下限集相等，那么就说集列 A_n 收敛，并称 $A = \liminf A_n = \limsup A_n$ 为集列 A_n 的极限. 这个极限是关于集合包含的偏序关系说的. 与实数的情况类似，有单调集列的收敛定理：如果 $A_n \uparrow$ 是单调递增的，那么 $\lim A_n = \bigcup_n A_n$. 类似地，如果 $A_n \downarrow$ 是单调递减的，那么 $\lim A_n = \bigcap_n A_n$.

例 1.1. 设 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为单调减少集列. 证明

$$A_1 = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n+1}) + \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

证明. 首先，右边的每个集合都含于 A_1. 因此右边含于 A_1. 其次，若 $x \in A_1$ 且 $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 则 $x \in \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n-1})$ 且 $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 因此 A_1 也是单调递减的. 最后，若 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, 则存在某个 $n > 1$, 使得 $x \notin A_n$. 令 n_0 为最小的这种 n, 那么就有 $x \notin A_{n_0}$, $x \in A_{n_0-1}$. 于是就有 $x \in \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n-1})$. 这就证明了 $A_1 \subset \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n+1}) + \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. □

2. Riemann 积分 还是用 [1] 作为参考书比较好，还是彩色的. 我还是比较喜欢 Riemann 积分的，最开始是在梅加强的书上学的. 比较重要的技术就是证明 Darboux 上和总是大于等于 Darboux 下和那里，需要用到两个 partition 的 merge. 也就是说，用到了有界闭区间的 partition 全体构成一个 directed set 的性质. Darboux 上和与 Darboux 下和之差就是所谓的函数振幅 $\Omega_{\mathcal{P}}(f) = \sum_i(\sup_{x_{i-1}\le x\le x_i} f - \inf_{x_{i-1}\le x\le x_i})(x_i - x_{i-1})$, 这里 $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ 是所讨论的具体的分割.

如果向 partition 的点集增加元素，也即使得分割变得更细，那么结果就是上和不增，下和不减. 这就导致了两个极限 $\lim_{\mathcal{P}} \mathcal{L}(f, \mathcal{P}, [a, b])$ 和

$\lim_{\mathcal{P}}\mathcal{U}(f,\mathcal{P},[a,b])$, 称为 Riemann 下积分 $\underline{\int}$ 和上积分 $\overline{\int}$. 这两个极限是关于 partition 全体所具有的 directed set 结构说的, 也就是说是 net 的极限. 由于下和不大于上和，也即 $\mathcal{L}\le\mathcal{U}$, 因此这两个极限之间也有关系

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \tag{1}$$

如果 Riemann 上下积分相等，就说 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，其积分 $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ 就定义为上下积分的共同值.

任意分割 $\mathcal{P}$ 都将区间 $[a,b]$ 分成 $\#(\mathcal{P})-1$ 个首尾相接的闭区间 $[x_0,x_1],\cdots,[x_{n-1},x_n]$. 从每个闭区间挑选一个元素出来，就可以做成一个集合 Δ. 这种挑选当然是不唯一的. 称这种通过在每个闭区间中挑出一个元素所形成的集合为与 partition $\mathcal{P}$ 相伴的一个点集. 设 $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是任意一列 partition, 并且 $\{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一列与之相伴的点集,每个 Δ_n 中元素形如 $\Delta_n=\{\xi_1,\cdots,\xi_{\#(\mathcal{P}_n)-1}\}$, 那么就可以考虑 Riemann 和所形成的数列

$$\mathcal{R}_n := \mathcal{R}(f,\mathcal{P}_n,\Delta_n,[a,b]) = \sum_{i=1}^{\#(\mathcal{P}_n)-1} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) \tag{2}$$

显然有 $\mathcal{L}(f,\mathcal{P}_n,[a,b])\le\mathcal{R}_n\le\mathcal{U}(f,\mathcal{P}_n,[a,b])$. 因此有

$$\underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \le \liminf\mathcal{R}_n \le \limsup\mathcal{R}_n \le \overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x \tag{3}$$

这就表明，如果 $\mathcal{R}_n$ 有收敛子列的话，那么该子列的极限就必定位于上下积分之间. 当然了，如果 f 是 Riemann 可积的，这个极限就必定等于 $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.

以上讨论了利用 partition 的全体所组成的集合之上的 directed set 结构来定义的 Riemann 积分. 下面考虑利用 Riemann 和关于 partition 的 mesh 的极限的途径. 这就是说，把 Riemann 积分定义为极限

$$\lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0}\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\Delta,[a,b]) \tag{4}$$

其中 $\|\mathcal{P}\|=\max_i|x_i-x_{i-1}|$ 是 partition 的 mesh. 这个极限其实相当强，因为其定义只涉及 partition, 对相伴的点集 Δ 没什么要求.

要证明两种定义的等价性，首先要注意到，上下积分之差恰好等于函数振幅的下确界 $\inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f)$. 这就是说 $\lim_{\mathcal{P}}(\mathcal{U}(f,\mathcal{P},[a,b]) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P},[a,b])) = \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f)$, 或者说 $\lim_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) = \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f)$. 事实上，设 $\varepsilon > 0$, 那么由 net 的极限的定义，存在 partition $\mathcal{P}_0$, 使得任意细于 $\mathcal{P}_0$ 的分割 $\mathcal{P}$ 都满足 $|\Omega_{\mathcal{P}_0}(f) - \lim_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f)| < \varepsilon$. 另一方面，由下确界的定义，存在 partition $\mathcal{P}_1$ 使得 $\Omega_{\mathcal{P}_1}(f) < \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) + \varepsilon$. 取分割 $\mathcal{P}_2$ 为 $\mathcal{P}_0$ 与 $\mathcal{P}_1$ 的 merge, 那么就有

$$\lim_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) - \varepsilon < \Omega_{\mathcal{P}_2}(f) \le \Omega_{\mathcal{P}_1}(f) < \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) + \varepsilon \tag{5}$$

于是 $\inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) \le \lim_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) < \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) + 2\varepsilon$. 这就证明了

$$\overline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\ \mathrm{d}x = \inf_{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(f) \tag{6}$$

假如极限 (4) 存在，那么

参考文献

[1] Sheldon Axler. *Measure, Integration & Real Analysis*. Springer, 2020.

[2] 任佳刚 and 巫静. 测度与概率教程. 科学出版社, 2018.

[3] 袁震东. 近代概率引论: 测度、鞅和随机微分方程. 科学出版社, 1991.