SCMA104 Systems of Ordinary Differential Equations and Applications in Medical Science

Pairote Satiracoo

2024-09-24

Contents

Chapter 1

หลักการและความสำคัญของแคลคูลัส และระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

แคลคูลัสมีส่วนประกอบหลักที่สำคัญอยู่ 2 องค์ประกอบ คือ

1. การหาอนุพันธ์ (differentiation) และ
2. การหาปริพันธ์ (Integration)

การประยุกต์เรื่องการหาอนุพันธ์ในการแก้ปัญหาเบื้องต้นที่สำคัญในทางชีววิทยา หรือทางการแพทย์ ประกอบด้วย การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณของตัวแปรที่เราสนใจ และการใช้แคลคูลัสในการแก้ปัญหาการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของปัญหาหรือฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เราสนใจ

ตัวอย่างการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่สนใจ เช่น ขนาดของประชากร จำนวนของผู้ติดเชื้อจากโรคทางเดินหายใจ ระดับน้ำตาลในกระแสเลือด ปริมาณของยาที่มีอยู่ในกระแสเลือกหรือส่วนหนึ่งของร่างกาย โดยที่การเปลี่ยนแปลงดังกล่าวสามารถเปรียบเทียบได้กับเวลา ดังต่อไปนี้

- ประชากรในประเทศไทยปี พ.ศ. 2566 มีจำนวน 66.05 ล้านคน (ข้อมูลอ้างอิงจาก สำนักงานคณะกรรมการส่งเสริมการลงทุน)
- ข้อมูลจำนวนผู้รักษาตัวในโรงพยาบาลจากศูนย์ข้อมูล COVID-19 ระหว่างวันที่ 28 กรกฎาคม ถึงวันที่ 3 สิงหาคม พ.ศ. 2567 (ข้อมูลอ้างอิงจาก ศูนย์ข้อมูล Covid-19)
- การเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำตาลในเลือดระหว่างมื้ออาหารสามมื้อในหนึ่งวัน (รูปภาพอ้างอิงจาก Wikipedia: Blood Sugar Level)

Figure 1.1: ข้อมูลจำนวนผู้รักษาตัวในโรงพยาบาลจากศูนย์ข้อมูล COVID-19

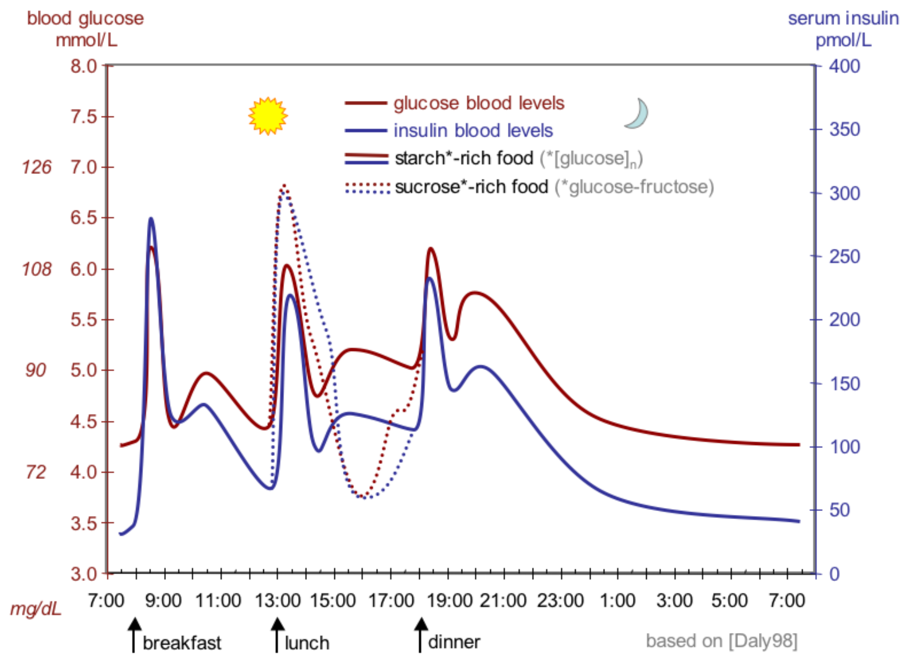


Figure 1.2: ความผันผวนของระดับน้ำตาลในเลือด (สีแดง) และฮอร์โมนอินซูลิน (สีน้ำเงิน) ในมนุษย์ระหว่างมื้ออาหารสามมื้อ

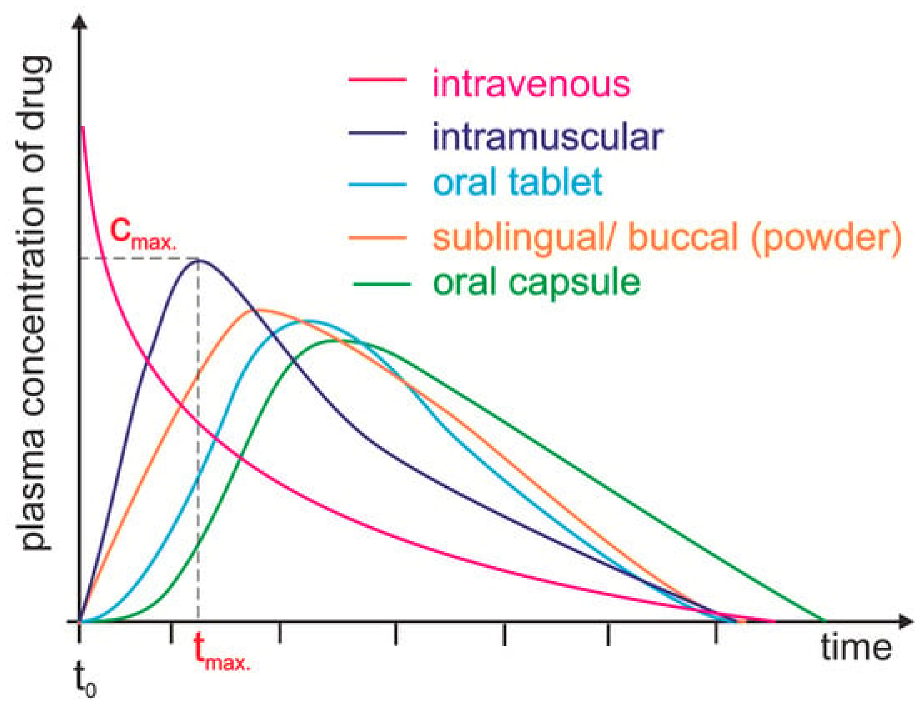


Figure 1.3: ความเข้มข้นของยาในกระแสเลือดที่เวลาต่างๆ

Table 1.1: จำนวนของแบคทีเรียที่เวลา t ใดๆ

เวลา (10 นาที)	0	1	2	3	4	5	6
จำนวนแบคทีเรีย	1	2	4	8	16	32	64

- การเปลี่ยนแปลงของปริมาณยาในกระแสเลือดที่เวลาต่างๆ สำหรับการให้ยาโดยวิธีต่างๆ (รูปภาพอ้างอิงจาก บทความทางวิชาการในฐานข้อมูล MDPI)

ในการทำความเข้าใจการเปลี่ยนแปลงของปริมาณข้างต้นเทียบกับเวลา เราสามารถประยุกต์ใช้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อมาใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงของปริมาณต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

> **การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์** เป็นกระบวนการอธิบายปัญหาหรือ ปรากฏการต่างๆ ที่เกิดขึ้นในธรรมชาติ โดยปกติแล้วจะอยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้จะช่วยให้อธิบายสิ่งต่างๆ ที่เกิดขึ้นในปัญหาหรือปรากฏที่สนใจ

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงถึงแนวคิดในการประยุกต์ของแคลคูลัสที่เกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของ

ตัวอย่าง 1.1. ในการทดลองหนึ่ง นักวิจัยต้องการศึกษาการขยายพันธ์ของแบคทีเรียที่มีการการแบ่งตัวที่เรียกว่า binary fission (การแบ่งตัวแบบทวิภาค) ซึ่งแบคทีเรียจะมีการแบ่งจากหนึ่งเป็นสองเซลเท่าๆ กัน และได้ผลการทำลองดังต่อไปนี้

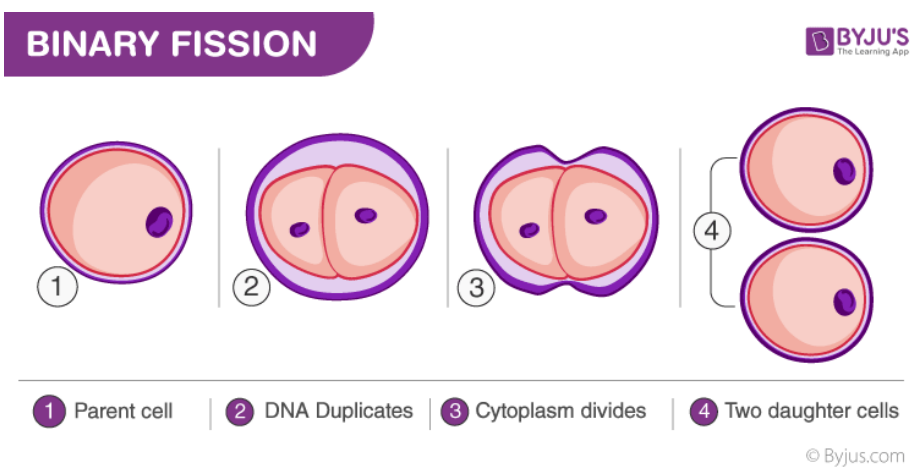


Figure 1.4: กระบวนการแบ่งตัวแบบทวิภาคของแบคทีเรีย

(รูปอ้างอิงจาก BYJU's Learning Website)

ตาราง 1.1 และรูปที่ 1.5 แสดงการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียที่เวลาใดๆ ในตัวอย่างนี้การเปลี่ยนแปลงของจำนวนของแบคทีเรียที่เวลา t สามารถเขียนในรูปฟังก์ชัน $N(t)$ ถ้าให้ N_0 แทนจำนวน

ของแบคทีเรียตอนเริ่มการทดลอง แล้วแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการเพิ่มของจำนวนแบคทีเรียจะสามารถเขียนในรูปของสมการ

$$N(t) = N_0 \cdot 2^t, \quad t = 0, 1, 2, ... \tag{1.1}$$

ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้การเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียที่เวลา t ใดๆ เพิ่มขึ้นในลักษณะที่เรียกว่า เอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Population Growth)

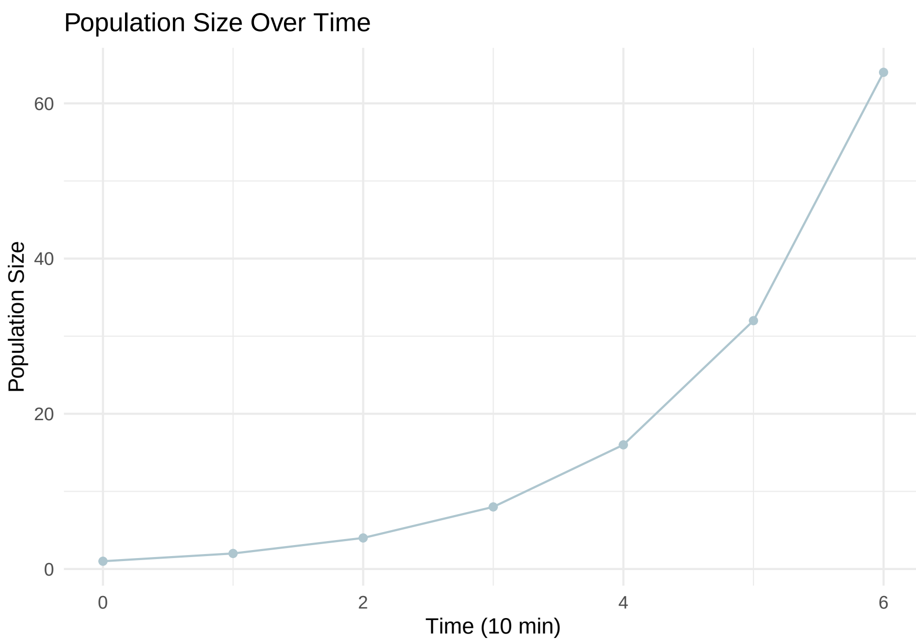


Figure 1.5: Population Size Over Time

ตัวอย่าง 1.2. ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ในตัวอย่างของการขยายพันธ์แบคทีเรีย หรือในปัญหาอื่นๆ แทนที่เราจะพยายามหาความสัมพันธ์ หรือฟังก์ชัน $N(t)$ ในรูปของเวลา t โดยตรง ถ้าเราทราบกระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร $N(t)$ นั้น เราสามารถนำมาใช้ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ได้ดังต่อนี้ กระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรีย (การเพิ่มหรือลดลงของแบคทีเรีย) ที่เกิดขึ้นในระหว่างเวลา t และเวลา $t + h$ เกิดจากจำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้น (เกิดขึ้นมาใหม่) ในช่วงเวลาดังกล่าว และลดลงจากจำนวนแบคทีเรียที่ลดลง (ตายไป) ในช่วงเวลาดังกล่าวเช่นกัน ซึ่งเราสามารถเขียนในรูปของสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} N(t+h) = N(t) & \\ & + \text{จำนวนแบคทีเรียที่เกิดขึ้นใหม่ระหว่าง } t \text{ และ } t+h \\ & - \text{จำนวนแบคทีเรียที่ตายไปประหว่าง } t \text{ และ } t+h \end{aligned} \tag{1.2}$$

ในที่นี้ "**การเกิด**" เราหมายถึงการเพิ่มจำนวนของแบคทีเรียจากหนึ่งเป็นสอง และเราจะกำหนดให้ h เป็นช่วงเวลาสั้นๆ (ซึ่งเราสามารถใช้ความรู้แคลคูลัสในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation)) ในสมการ (1.2) ถ้าเราสมมติว่า การเพิ่มของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่ในขณะนั้น หรือเขียนในรูปของสมการได้ดังนี้

$$\text{จำนวนแบคทีเรียที่เกิดใหม่ระหว่าง } t \text{ และ } t + h \approx b \cdot N \cdot h$$

$$\text{จำนวนแบคทีเรียที่ตายไประหว่าง } t \text{ และ } t + h \approx m \cdot N \cdot h$$

โดยที่ค่าคงตัว b และ m ในสมการข้างต้น คือ อัตราการเกิด (birth rate) และอัตราการตาย (mortality rate)

เมื่อแทนจำนวนแบคทีเรียที่เกิดใหม่ และตายไประหว่างช่วงเวลาที่กำหนดลงในสมการ (1.2) จะได้สมการ

$$N(t + h) - N(t) = b \cdot N(t) \cdot h - m \cdot N(t) \cdot h \tag{1.3}$$

เราสามารถจัดรูปสมการ (1.3) ได้ใหม่ในรูปของ**อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย**ของจำนวนแบคทีเรียในช่วงเวลาดังกล่าว ดังนี้

$$\frac{N(t + h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \tag{1.4}$$

$$\tag{1.5}$$

ดังนั้น ถ้าเราให้ h เข้าใกล้ 0 ผ่านการหาค่าลิมิต เราจะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง (instantaneous rate of change) และเขียนได้ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ ดังนี้

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{N(t + h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \tag{1.6}$$

$$\tag{1.7}$$

ทั้งนี้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (1.7) เพื่อให้ได้คำตอบที่แสดงจำนวนแบคทีเรีย $N(t)$ ในรูปของฟังก์ชันของ t เราจะต้องกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องกับจำนวนแบคทีเรีย $N(t)$ ที่เวลา t หนึ่ง โดยทั่วไปเราจะกำหนดค่าเริ่มต้นของจำนวนแบคทีเรียที่ $t = 0$ ดังนั้น ถ้าเรากำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition)

$$N(0) = N_0 \tag{1.8}$$

เราสามารถหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นโดยวิธีการหาปริพันธ์ (Integration) ได้คำตอบของสมการดังนี้

$$N(t) = N_0 e^{(b-m)t} \tag{1.9}$$

ตัวอย่าง 1.3. ในการทดลองเลี้ยงยีสต์ในขวดทดลองที่มีอาหารเลี้ยงยีสต์ในปริมาณที่เหมาะสม ผู้ทำการทดลองสนใจที่จะประมาณค่าของยีสต์โดยอาศัยแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงของประชากรที่อธิบายด้วยสมการ (1.9) กำหนดให้

- ภายใต้สภาวะของการทดลองที่เหมาะสม ยีสต์จะแบ่งตัวทุกๆ 90 นาที
- ยีสต์มีครึ่งชีวิตเท่ากับ 1 สัปดาห์

จากข้อมูลดังกล่าว จงแสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบจากคำถามต่อไปนี้

1. จงประมาณค่าของอัตราการเกิด b (1/ชั่วโมง) และอัตราการตาย m (1/ชั่วโมง)
2. เขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้ค่า b และ m ที่ประมาณค่าได้ (สมการ (1.9))
3. ใช้เครื่องมือที่นักศึกษามีอยู่ในการวาดกราฟแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนยีสต์ที่เวลาต่างๆ
4. เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับรูปภาพแสดงการเปลี่ยนแปลงของยีสต์จากการทดลองในห้องปฏิการตามรูปที่ 1.6 (รูปภาพอ้างอิงจาก https://homework.study.com/)

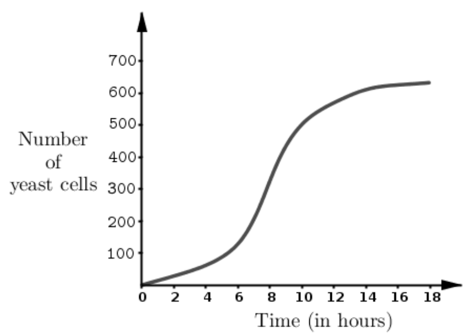


Figure 1.6: กราฟการเจริญเติบโตของเซลล์ยีสต์

ตัวอย่าง 1.4. จงใช้อินเทอร์เน็ตเพื่อค้นหาตัวอย่างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายโดยสมการเชิงอนุพันธ์หรือระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ข้อมูลที่ต้องการประกอบด้วย

1. ค้นหาหน้าเว็บที่ให้ข้อมูลเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในปัญหาที่นักศึกษาสนใจ
2. จดบันทึก URL ของหน้าเว็บ
3. เขียนสรุปสั้นๆ ว่าโมเดลนี้ใช้เพื่ออะไร

วิธีทำ

ตัวอย่างของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากการสืบค้นข้อมูลอินเทอร์เน็ตจาก

- CALCULUS IN MEDICINE (https://sites.northwestern.edu/recalculated/2019/05/05/calculus-in-medicine/)
- เภสัช จลนศาสตร์ (Pharmacokinetics) และ เภสัช พลศาสตร์ (Pharmacodynamics) (https:// ns.mahidol.ac.th/ english/ th/ departments/ MN/ th/ doc/ km54/ เภสัช จลนศาสตร์%20(Pharmacokinetics).pdf)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จำลองการเปลี่ยนแปลงของความเข้มข้นของยา c ณ เวลา t โดยที่กำหนดขนาดยา (drug dosage) เท่ากับ d

$$\frac{dc}{dt} = \frac{k_a}{k_a - k_e}\left[k_a \cdot d \cdot b \cdot e^{-at} - k_e \cdot c \cdot v\right]$$

โดยที่

- k_a คือ ค่าคงตัวของการดูดซึมยา
- k_e คือ ค่าคงตัวของการกำจัดยา
- v แทน ปริมาตรของยาในร่างกาย
- b แทน สัดส่วนของปริมาณยาที่ถูกดูดซึมเข้าไปในร่างกายเทียบกับขนาดของยา

ตามหลักเภสัชจลนศาสตร์ เมื่อได้รับยาเข้าสู่ร่างกาย จะมีกระบวนการดูดซึมยา การกระจายตัวของยา การเปลี่ยนแปลงยา และการขับถ่ายยาออกจากร่างกาย

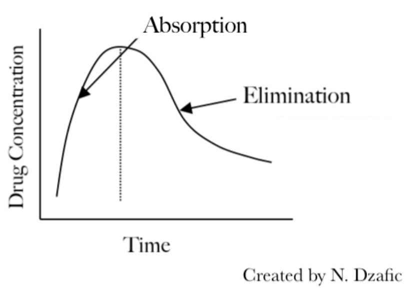


Figure 1.7: การเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของยาในระยะการดูดซึม และการกำจัดออกจากร่างกาย

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะมีประโยชน์ที่สำคัญที่ทำให้ผู้เชี่ยวชาญด้านยาสามารถกำหนดขนาดของยาที่เหมาะสม อย่างต่อเนื่องเป็นระยะเวลาที่เพียงพอกับการรักษา เพื่อให้ได้ผลการรักษาที่ดีที่สุด

โดยสรุป แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์เป็นเครื่องมือสำคัญในการทำความเข้าใจว่าสิ่งต่างๆ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไรและ แคลคูลัสช่วยให้เราวิเคราะห์อัตราการเปลี่ยนแปลงและพื้นที่ใต้เส้นโค้ง ในขณะที่สมการ

เชิงอนุพันธ์ช่วยให้เราสร้างแบบจำลองระบบที่ซับซ้อนในสาขาต่างๆ เช่น ฟิสิกส์ วิศวกรรม เศรษฐศาสตร์ และชีววิทยา แนวคิดทางคณิตศาสตร์เหล่านี้มีความสำคัญต่อการแก้ปัญหาในโลกแห่งความเป็นจริง เมื่อโลกของเราก้าวหน้ามากขึ้น ความสำคัญของแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ก็จะเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง ซึ่งสนับสนุนความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

Chapter 2

ลิมิต (Limits)

อาจกล่าวได้ว่า วิชาแคลคูลัส ถือกำเนิดขึ้นมาจากความพยายามในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตบนระนาบ 2 ปัญหาหลักๆ คือ

- การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งที่กำหนดให้
  กำหนดฟังก์ชัน (function) f และกำหนดจุด $P(x_0, y_0)$ บนกราฟ $y = f(x)$ จงหาสมการของเส้นตรงที่สัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด P
- การหาพื้นที่ของบริเวณที่กำหนดให้
  กำหนด function f และช่วง $[a, b]$ ในโดเมนของ f จงหาพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมด้วยแกน X และกราฟ $y = f(x)$ สำหรับ $x \in [a, b]$

แนวความคิดในการแก้ปัญหาทั้งสอง นำไปสู่การศึกษาเรื่อง ลิมิต (Limits) ซึ่งเป็นพื้นฐานของวิชาแคลคูลัสนั่นเอง

แต่ในปัจจุบันเราพบว่าวิชาแคลคูลัสมีประโยชน์ในการช่วยแก้ปัญหาในสาขาวิชาต่าง ๆ มากมาย เช่น เราจะพบในการศึกษาวิชานี้ว่า แคลคูลัสมีบทบาทในการแก้ปัญหาต่อไปนี้

- โดยทั่วไป ยาชนิดฉีดจะต้องใช้เวลาระยะหนึ่งหลังจากฉีดเข้าสู่ร่างกาย ในการที่จะไหลเวียนในกระแสโลหิต จนกระทั่งมีความเข้มข้นสูงสุด สมมุติว่า ยาฉีดชนิดหนึ่งหลังจากฉีดเข้าสู่ร่างกายนาน t ชั่วโมง จะมีความเข้มข้นเป็น $C(t) = 0.15(e^{-0.18t} - e^{-1.2t})$ มิลลิกรัมต่อมิลลิลิตร จงหาว่า นานเท่าใดหลังจากฉีดยา จึงจะมีความเข้มข้นของยา ในกระแสโลหิตสูงที่สุด
- เราอาจประมาณได้อย่างมีเหตุผลว่า artery มีรูปร่างที่เป็นผลมาจากการหมุนรอบแกน ของเส้นโค้งในระนาบ โดยในสภาวะนิ่ง รัศมีของ artery มีค่าคงที่เท่ากับ 1 หน่วย (รูปทรงกระบอก) แต่ในขณะที่หัวใจสูบฉีดโลหิตผ่าน artery artery จะพองตัวออก ทำให้รัศมีเปลี่ยนไปตามสมการ $R(x) = 1 + 0.4x - 0.04x^2$ หน่วย เมื่อ $0 \leq x \leq 10$ เป็นตำแหน่งบนแนวยาวของ artery จงหาว่า ปริมาณโลหิตที่อยู่ใน artery ขณะที่หัวใจสูบฉีดโลหิตผ่านเข้ามาเป็นกี่เท่าของความจุโลหิตในสภาวะนิ่ง

- ความก้าวหน้าในทางการแพทย์ และเทคโนโลยีปัจจุบัน ทำให้มีการประดิษฐ์อุปกรณ์ช่วยในการรักษาโรคเบาหวานชิ้นหนึ่งขึ้น อุปกรณ์นี้มีลักษณะเป็นแคปซูล ซึ่งเมื่อฝังอุปกรณ์นี้ภายในร่างกายแล้ว มันจะหลั่งสารอินซูลินที่บรรจุอยู่ภายใน ออกสู่กระแสโลหิต โดยมีอัตราการหลั่งเป็น $f(t) = 0.5te^{-0.09t}$ ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวัน เมื่อ t คือ เวลาเป็นวัน นับจากอุปกรณ์เริ่มทำงาน จงหาว่า แพทย์จะต้องสั่งให้บรรจุอินซูลินในแคปซูลเป็นปริมาณเท่าใด เพื่อให้อุปกรณ์นี้สามารถให้อินซูลินแก่ผู้ป่วยได้นาน 3 เดือน

- การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด $P_0(x_0, y_0)$

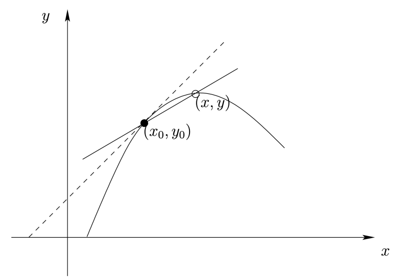


Figure 2.1: การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง

ขั้นตอนสรุปการหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง 2.1

1. เลือกจุดอื่นบนกราฟ เรียกจุดนี้ว่า $P(x, y)$
2. ลากเส้นผ่าน PP_0
3. ทำซ้ำโดยเลือกจุด P ให้ใกล้ P_0 มากขึ้น
4. เส้น PP_0 ที่ได้จะ “เข้าใกล้” เส้นสัมผัสมากขึ้นทุกที

- การหาพื้นที่ “ใต้กราฟ” ระหว่าง x = a กับ x = b

ขั้นตอนเบื้องต้นสำหรับการหาพื้นที่ใต้กราฟ

1. แบ่ง $[a, b]$ เป็นช่วงเล็กๆ
2. หาพื้นที่รวมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหมด
3. ทำซ้ำๆ โดยแบ่งช่วงให้เล็กมากขึ้น
4. พื้นที่ที่ได้จะ “เข้าใกล้” พื้นที่ที่ต้องการมากขึ้นทุกที

ตัวอย่าง 2.1. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y = -x^2 + 6x - 2$ ณ จุด $P_0(2, 6)$

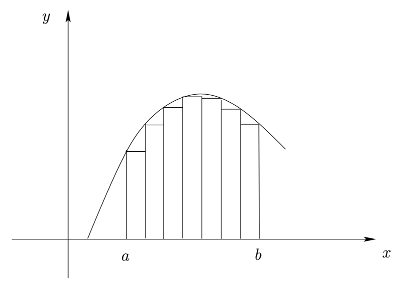


Figure 2.2: การหาพื้นที่ใต้กราฟ

วิธีทำ เลือกจุด $P(x,y)$ โดยที่ $x \neq 2$ และลากเส้น PP_0 จะได้ว่า ความชันของ PP_0 เท่ากับ

$$\begin{aligned}\frac{y-6}{x-2} &= \frac{-x^2+6x-8}{x-2} \\ &= -\frac{(x-2)(x-4)}{x-2} \\ &= 4-x\end{aligned} \tag{2.1}$$

ถ้า P อยู่ใกล้ P_0 มากขึ้น ค่า x ย่อมเกือบเป็น 2 ดังนั้น ความชันของ PP_0 จึงเข้าใกล้ $4-2=2$ มากขึ้นเรื่อย ๆ เส้นสัมผัสจึงควรมีความชันเป็น 2 และสมการเส้นสัมผัส คือ $y-6=2(x-2)$

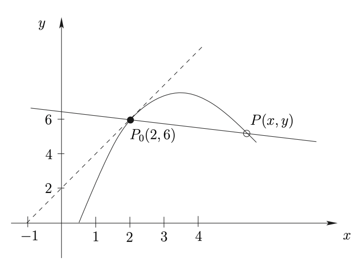


Figure 2.3: การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง $y=-x^2+6x-2$

จะเห็นว่า ในตัวอย่าง 2.1 นี้ เราสนใจพฤติกรรมของ function

$\frac{-x^2+6x-8}{x-2}$ เมื่อ $x \neq 2$ แต่มีค่าใกล้ 2 มาก ๆ นี่คือ ที่มาของเรื่อง

นิยาม 2.1. ให้ $f : D_f \to R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และให้ $a \in R$ โดยที่มีช่วง (a,b) บางช่วงที่ $(a,b) \subseteq D_f\,(b>a)$

เรากล่าวว่า “ลิมิต (limit) ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา หาค่าได้และมีค่าเท่ากับจำนวนจริง L” ถ้า “ไม่ว่าเราจะกำหนดบริเวณรอบ ๆ L ไว้แคบเพียงใด เมื่อเราพิจารณาค่าของ $f(x)$ สำหรับค่า x

ที่มากกว่า a โดยที่ให้ค่า ของ x ลดลงเรื่อย ๆ จนถึงจุดหนึ่ง ค่าของ $f(x)$ จะอยู่ในบริเวณรอบ ๆ L ที่เรากำหนดไว้นั้น และยังคงเป็นเช่นนี้สำหรับ x อื่น ๆ ที่น้อยกว่านั้น (แต่มากกว่า a) ทั้งหมดด้วย"

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราพิจารณาพฤติกรรมของ function สำหรับ x ที่น้อยกว่า a จะได้ limit ทางซ้าย ดังนี้ ให้ $f : D_f \to R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และให้ $a \in R$ โดยที่มีช่วง (b, a) บางช่วงที่ $(b, a) \subseteq D_f \, (b < a)$

เรากล่าวว่า "limit ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับจำนวนจริง L" ถ้า "ไม่ว่าเราจะกำหนดบริเวณรอบ ๆ L ไว้แคบเพียงใด

เมื่อเราพิจารณาค่าของ $f(x)$ สำหรับค่า x ที่น้อยกว่า a โดยที่ให้ค่า ของ x เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนถึงจุดหนึ่ง ค่าของ $f(x)$ จะอยู่ในบริเวณรอบ ๆ L ที่เรากำหนดไว้นั้น และยังคงเป็นเช่นนี้สำหรับ x อื่น ๆ ที่มากกว่านั้น (แต่น้อยกว่า a) ทั้งหมดด้วย"

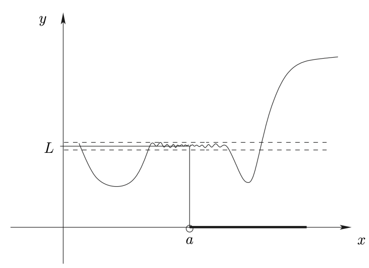


Figure 2.4: ลิมิตทางขวา

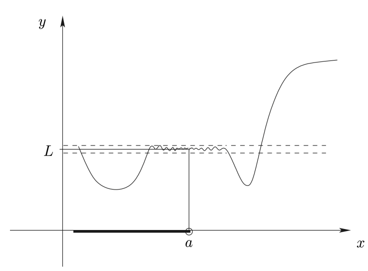


Figure 2.5: ลิมิตทางซ้าย

เราใช้สัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ แทนข้อความ "limit ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา" และใช้สัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ แทนข้อความ "limit ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย

นิยาม 2.2. ในกรณีที่ทั้ง $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากัน

เรากล่าวว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับค่านั้น

ตัวอย่าง 2.2. function f ที่ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ จึงหาค่าไม่ได้ด้วย

วิธีทำ จากรูปต่อไปนี้

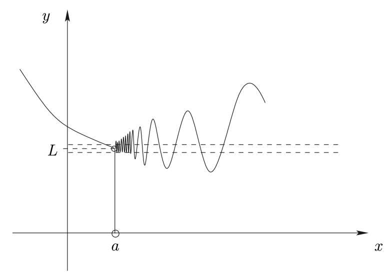


Figure 2.6: กราฟของฟังก์ชันที่หาลิมิตไม่ได้

ในกรณีนี้ จะเห็นว่า ไม่ว่าจะเลือก L เป็นค่าใด ก็ไม่สามารถสรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = L$ เพราะไม่ใช่ทุกครั้งที่เรากำหนดบริเวณรอบ ๆ L แล้ว function จะสอดคล้องตามนิยามเสมอไป จึงสรุปว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ หาค่าไม่ได้ด้วย

ทฤษฎี 2.1.

1. *$\lim\limits_{x\to c} c = c$ ถ้า c เป็นจำนวนจริง*
2. *$\lim\limits_{x\to a} x = a$*

ทฤษฎี 2.2. *ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ หาค่าได้แล้ว จะได้*

1. $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to a} (f-g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a} (f\cdot g)(x) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$
4. $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ *ถ้า* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

หมายเหตุ ทฤษฎีบททั้งสองนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย

ทฤษฎี 2.3. *ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้ และ $\sqrt[n]{f(x)}$ หาค่าได้ สำหรับทุก ๆ x ในช่วงเปิดบางช่วงที่มี a อยู่ด้วย แล้ว $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$*

หมายเหตุ ทฤษฎีบทนี้เป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย โดยเปลี่ยนเงื่อนไข "ทุก ๆ x" เป็น "ทุก ๆ $x < a$" และ "ทุก ๆ $x > a$" ตามลำดับ

ทฤษฎี 2.4. *ถ้า f และ g เป็น function ซึ่ง $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก ๆ x ยกเว้นบาง x ซึ่งมีอยู่เพียงจำนวนจำกัด แล้ว $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ ถ้า limit อันใดอันหนึ่งหาค่าได้*

หมายเหตุ ทฤษฎีบทนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย

ตัวอย่าง 2.3. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{-x^2+6x-8}{x-2}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{-x^2+6x-8}{x-2} &= \lim_{x\to 2} -\frac{(x-2)(x-4)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} -(x-4) \\
&= \lim_{x\to 2} (4-x) \\
&= \lim_{x\to 2} 4 - \lim_{x\to 2} x \\
&= 4-2 \\
&= 2
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

ตัวอย่าง 2.4. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ **วิธีทำ**

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} &= \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \\
&= \frac{\lim_{x\to 3} 1}{\lim_{x\to 3} \sqrt{x} + \lim_{x\to 3} \sqrt{3}} \\
&= \frac{\lim_{x\to 3} 1}{\sqrt{\lim_{x\to 3} x} + \lim_{x\to 3} \sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

ตัวอย่าง 2.5. จงหา limits ต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

วิธีทำ

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \frac{0-\sqrt{3}}{x-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2. เนื่องจาก function $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ ไม่ใช่ function ที่หาค่าได้บนช่วงเปิด $(b,0)$ ใด ๆ เลย ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ จึงหาค่าไม่ได้

3. เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ จึงหาค่าไม่ได้

ข้อสังเกต ในกรณีที่ function ที่มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีขอบเขต เมื่อตัวแปรต้นเข้าใกล้ a (ทางซ้ายหรือขวาหรือทั้งสองทาง) บางตำรากล่าวว่า limit ของ function มีค่าเป็น $+\infty$ และถ้า function มีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขต จะกล่าวว่า limit ของ function มีค่าเป็น $-\infty$ ในวิชานี้เราจะถือตามนิยามที่ให้ไว้ ดังนั้นในกรณีข้างต้น จะกล่าวว่า limit ดังกล่าวหาค่าไม่ได้ (เว้นแต่จะระบุให้พิจารณาค่า $\pm\infty$ ด้วย)

ตัวอย่าง 2.6. จงหา limit ของ function $f(x) = \frac{1}{x}$

1. เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย
2. เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางขวา
3. เมื่อ x เข้าใกล้ 0

วิธีทำ

1. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้ (หรือเท่ากับ $-\infty$)

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้ (หรือเท่ากับ $+\infty$)

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้

ในบางครั้ง เราสนใจพฤติกรรมของ function f เมื่อค่าตัวแปรต้นมีค่ามากขึ้นโดยไม่มีขอบเขต หรือน้อยลงโดยไม่มีขอบเขต ในกรณีเช่นนี้ เราใช้สัญลักษณ์ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ ตามลำดับ แทนที่จะใช้ $\lim\limits_{x\to \infty^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to \infty^+} f(x)$ (โปรดอ่านนิยามในเอกสารอ้างอิง) ทฤษฎีบทเกี่ยวกับ limit ที่กล่าวมาข้างต้นทั้งหมด เป็นจริงในกรณีนี้ด้วย นอกจากนี้ เรายังมี ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎี 2.5.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$
3. *ถ้า* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *แล้ว* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *ซึ่งเป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย ในที่นี้* $a \in R$ *หรือ a เป็น* $+\infty$ *หรือ* $-\infty$

ตัวอย่าง 2.7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+12}{x^3-5} = ?$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+12}{x^3-5} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2+12)/x^3}{(x^3-5)/x^3} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{12}{x^3}}{1-\frac{5}{x^3}} = \frac{0+0}{1-0} = 0\end{aligned} \tag{2.4}$$

ตัวอย่าง 2.8. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\frac{2}{3}} = ?$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{2}{3}} &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \sqrt[3]{\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\right)^2} = 0\end{aligned} \tag{2.5}$$

ตัวอย่าง 2.9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{5}}+5x^{\frac{1}{7}}}{3x^{\frac{1}{3}}+5x^{\frac{1}{5}}+7x^{\frac{1}{7}}} = ?$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{5}}+5x^{\frac{1}{7}}}{3x^{\frac{1}{3}}+5x^{\frac{1}{5}}+7x^{\frac{1}{7}}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}\left(1+3x^{-\frac{2}{15}}+5x^{-\frac{4}{21}}\right)}{x^{\frac{1}{3}}\left(3+5x^{-\frac{2}{15}}+7x^{-\frac{4}{21}}\right)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+3x^{-\frac{2}{15}}+5x^{-\frac{4}{21}}}{3+5x^{-\frac{2}{15}}+7x^{-\frac{4}{21}}} = \frac{1}{3}\end{aligned} \tag{2.6}$$

ข้อสังเกต ตัวแปร x ในสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ เรียกว่า “ตัวแปรหุ่น” (dummy variable) เพราะไม่ได้กล่าวถึงตัวแปร x แต่เราใช้มันเพื่อเขียนสัญลักษณ์แทนจำนวนจริงจำนวนหนึ่งที่ค่าของ function f ใกล้เข้าไปหา ในยามที่ตัวแปรต้นของมันมีค่าใกล้ a เข้าไปทุกที เราอาจเขียน $\lim\limits_{t\to a} f(t)$ แทนจำนวนจำนวนนี้ก็ได้ เป็นต้น ตัวอย่างของ dummy variable อื่น ๆ เช่น ตัวแปร n ในสัญลักษณ์ $\sum\limits_{n=1}^{4} n^2$ ซึ่งอาจเขียนใหม่เป็น $\sum\limits_{k=1}^{4} k^2$ ก็ได้ ทั้งสองสัญลักษณ์นี้แทนจำนวน $1^2+2^2+3^3+4^4$

ตัวอย่าง 2.10. จงหา $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} x^2-5 & \text{ถ้า } x \le 3 \\ \sqrt{x+13} & \text{ถ้า } x > 3 \end{cases}$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3^-} f(x) &= \lim_{x\to 3^-} x^2-5 \leftarrow \boxed{f(x) = x^2-5 \text{ เมื่อ } x \text{ อยู่ทางซ้ายของ } 3} \\ &= 4 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3^+} f(x) &= \lim_{x\to 3^+} \sqrt{x+13} \leftarrow \boxed{f(x) = \sqrt{x+13} \text{ เมื่อ } x \text{ อยู่ทางขวาของ } 3} \\ &= 4 \end{aligned} \tag{2.8}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 4$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ 4

ตัวอย่าง 2.11. จงหา $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} x^2-5 & \text{ถ้า } x \le 3 \\ \sqrt{x+13} & \text{ถ้า } x > 3 \end{cases}$$

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (x^2-5) = -5$

2.1 ความต่อเนื่อง (Continuity)

ในวิชาฟิสิกส์ เราสามารถเขียนตำแหน่งของวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่ในรูป function ของเวลาได้ (วัตถุย่อมอยู่ในที่ใดที่หนึ่งเพียงที่เดียว ณ เวลาหนึ่ง ๆ)

คำถาม : function ใด ๆ เป็น function ที่แสดงตำแหน่งของวัตถุใดวัตถุหนึ่งได้เสมอหรือไม่

ลองอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ ถ้า function ที่แสดงตำแหน่งของมัน คือ

1. $s_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } t < 3 \\ 1 & \text{ถ้า } t > 3 \end{cases}$

2. $s_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } t \le 3 \\ 1 & \text{ถ้า } t > 3 \end{cases}$

3. $s_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } t \neq 3 \\ 0 & \text{ถ้า } t = 3 \end{cases}$

กราฟของ s_1, s_2 และ s_3 เป็นดังนี้

ข้อสังเกต:

1. $s_1(3)$ หาค่าไม่ได้
2. $s_2(3)$ หาค่าได้ แต่ $\lim\limits_{t \to 3} s_2(t)$ หาค่าไม่ได้
3. $s_3(3)$ หาค่าได้ $\lim\limits_{t \to 3} s_3(t)$ หาค่าได้ แต่ $s_3(3) \neq \lim\limits_{t \to 3} s_3(t)$

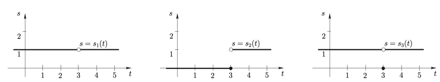


Figure 2.7: กราฟของฟังก์ชัน s_1, s_2 และ s_3

นิยาม 2.3. ให้ $f : D_f \to R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และ $a \in R$ เรากล่าวว่า f ต่อเนื่อง (cotinuous) ที่ a ถ้า

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้
3. $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

นิยาม 2.4. ให้ f เป็น function และ S เป็นเซต (set) เรากล่าวว่า f ต่อเนื่องบน S (continuous on S) ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ สมาชิกของ S เรียก function ที่ continuous on R ว่า “ฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function)”

ข้อสังเกต จะเห็นว่า function ที่แสดงตำแหน่งของวัตถุต้องเป็น continuous function บนช่วงที่สนใจ

ทฤษฎี 2.6. *ถ้า f และ g เป็น function ที่ต่อเนื่องที่ a แล้ว*

1. *$f + g$ ต่อเนื่องที่ a*
2. *$f - g$ ต่อเนื่องที่ a*
3. *$f \cdot g$ ต่อเนื่องที่ a*
4. *$\frac{f}{g}$ ต่อเนื่องที่ a ถ้า $g(a) \neq 0$*

ตัวอย่าง 2.12. function f ซึ่งนิยามโดย $f\left(x\right)=\left|x\right|$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่

วิธีทำ ในที่นี้

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x & \text{ถ้า } x\geq 0\\ -x & \text{ถ้า } x>0\end{cases}$$

เราต้องพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ $a\in R$ หรือไม่

- ถ้า $a>0$ จะได้ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}x=a=f(a)$
- ถ้า $a<0$ จะได้ $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}(-x)=-a=f(a)$
- ถ้า $a=0$จะได้ $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0=f(0)$
  และ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0=f(0)$
  ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$

ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ $a\in R$ จึงสรุปว่า f เป็น continuous function

ทฤษฎี 2.7. *ฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) เป็น function ที่ต่อเนื่องบน domain ของมัน*

หมายเหตุ: rational function คือ function ที่เป็นเศษส่วนของพหุนาม (polynomial) domain ของ rational function ได้แก่เซตของจำนวนจริงซึ่งไม่ทำให้ส่วนของมันเป็นศูนย์

ทฤษฎี 2.8. *ถ้า f และ g เป็น function และ $a\in R$ โดยที่ $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$ และ f ต่อเนื่องที่ L แล้ว $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to a}g(x))=f(L)$*

ตัวอย่าง 2.13. $\lim\limits_{x\to 1}\left|\frac{x^4-x^2+1}{x^4+x^2+1}\right|=?$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left|\frac{x^4-x^2+1}{x^4+x^2+1}\right| &= \left|\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^2+1}{x^4+x^2+1}\right|\\ &= \left|\frac{1^4-1^2+1}{1^4+1^2+1}\right|\\ &= \left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}\end{aligned} \tag{2.9}$$

ทฤษฎี 2.9. *ถ้า f ต่อเนื่องที่ a และ g ต่อเนื่องที่ $f(a)$ แล้ว $g\circ f$ ต่อเนื่องที่ a*

จงพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้น

ตัวอย่าง 2.14. function f ซึ่งนิยามโดย $f\left(x\right)=\left|\frac{x^4-x^2+1}{x^4+x^2+1}\right|$ เป็น continuous function หรือไม่

วิธีทำ f เป็น continuous function เพราะ $f = g \circ h$ โดยที่ $g(x) = |x|$ และ $h(x) = \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$ ซึ่งเป็น continuous function ทั้งคู่

นิยาม 2.5. เรานิยาม "*ภาวะต่อเนื่องทางซ้าย*" และ "*ภาวะต่อเนื่องทางขวา*" ได้โดยแทนที่ $\lim_{x \to a}$ ในเงื่อนไขของนิยาม ด้วย $\lim_{x \to a^-}$ และ $\lim_{x \to a^+}$ ตามลำดับ นั่นคือ

ให้ $f : D_f \to R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และ $a \in R$ เรากล่าวว่า f "ต่อเนื่องทางซ้าย (left-continuous) ที่ a" ถ้า

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \to a^-} f(x)$ หาค่าได้
3. $f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x)$

และกล่าวว่า f "ต่อเนื่องทางขวา (right-continuous) ที่ a" ถ้า

1. f(a) หาค่าได้
2. $\lim_{x \to a^+} f(x)$ หาค่าได้
3. f$(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

นิยาม 2.6. ให้ $f : [a, b] \to R$ เรากล่าวว่า f ต่อเนื่องบน $[a, b]$ (continuous on $[a, b]$) ถ้า

1. f ต่อเนื่องบน (a, b)
2. f ต่อเนื่องทางขวาที่ a
3. f ต่อเนื่องทางซ้ายที่ b

ตัวอย่าง 2.15. function f ที่นิยามโดย $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ เป็น continuous function บน $[-2, 2]$ หรือไม่

วิธีทำ เราตรวจสอบได้ว่า f เป็น continuous function บน $[-2, 2]$ เพราะ
1. f เป็น continuous function บน $(-2, 2)$
2. f ต่อเนื่องทางขวาที่ -2 เพราะ \$\$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2^+} f(x) &= \lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} \\ &= 0 = f(-2) \end{aligned} \tag{2.10}$$

3. f ต่อเนื่องทางซ้าย ที่ 2 เพราะ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^-} f(x) &= \lim_{x\to -2^-} \sqrt{4-x^2} \\ &= 0 = f(2)\end{aligned} \tag{2.11}$$

ตัวอย่าง 2.16. พิจารณา function f ซึ่งมีกราฟดังต่อไปนี้

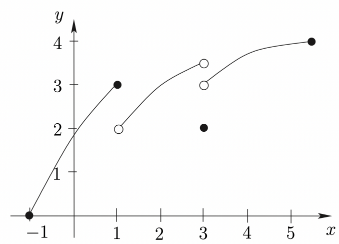


Figure 2.8: กราฟของฟังก์ชันในตัวอย่างrefexm:ex-cont-5

1. f มีความต่อเนื่องที่ $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ หรือไม่
2. f มีความต่อเนื่องบน $[-1, 0], [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5]$ หรือไม่

วิธีทำ ให้นักศึกษาทำเป็นแบบฝึกหัด

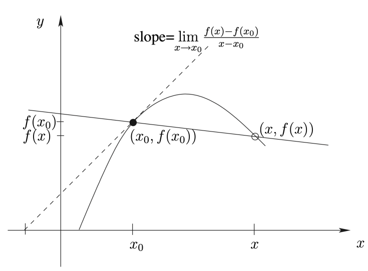
ทฤษฎี 2.10. *ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และฟังก์ชันลอการิทึม เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนโดเมนของมัน*

Chapter 3

อนุพันธ์ (Derivatives)

3.1 อนุพันธ์ (Derivatives)

จากตัวอย่าง 2.1 ในบทที่ 2 และเนื้อหาในเรื่อง limits เราจะเห็นว่า ความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ณ จุด $(x_0, f(x_0))$ บนกราฟ ก็คือ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ นั่นเอง (ถ้า limit หาค่าได้)

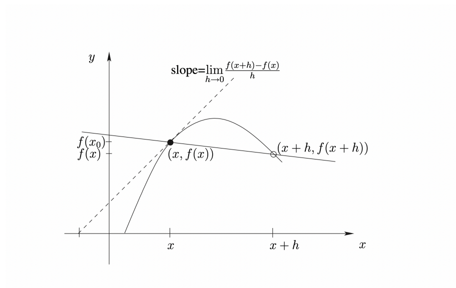


ปริมาณนี้มีความสำคัญ เพราะนำไปประยุกต์ใช้ได้มากมาย เราจึงกำหนดสัญลักษณ์และมีชื่อเรียกดังต่อไปนี้

นิยาม 3.1. ถ้า $f : D_f \to \mathbb{R}$ โดยที่ $D_f \subseteq \mathbb{R}$ และถ้า $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ หาค่าได้แล้ว เรียกค่าของ limit นี้ว่า “อนุพันธ์ (derivative) ของ f ที่ x_0” และแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(x_0)$

เนื่องจากแต่ละ function g และแต่ละ x_0 จะมี $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ ได้ค่าเดียว ดังนั้น f' จึงเป็น function เรียกว่า “อนุพันธ์ (derivative)” ของ f

ในการเขียนนิยามของ $f'(x)$ เพื่อใช้เป็นสูตรทั่วไปสำหรับ function f' เราเปลี่ยนตัวแปรเสียใหม่ ดังแสดงในรูป



จะได้ว่า

ตัวอย่าง 3.1. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y = -x^2 + 6x - 2$ ณ จุด $P_0(2, 6)$

วิธีทำ ให้ $f(x) = -x^2 + 6x - 2$ จะได้ค่าความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด $(x, f(x))$ คือ $f'(x)$ ซึ่งเท่ากับ

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{[-(x+h)^2+6(x+h)-2]-[-x^2+6x-2]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2+6h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(-2x-h+6) \leftarrow \boxed{\text{อย่าเขียน } \lim_{h\to 0} -2x-h+6} \\ &= -2x+6\end{aligned} \tag{3.1}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด $(2, 6)$ คือ $f'(2) = -2 \cdot 2 + 6 = 2$ เส้นสัมผัสจึงมีสมการเป็น $y - 6 = 2(x - 2)$

อัตราส่วน $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ คือ อัตราส่วนของค่า function ที่เปลี่ยนไป (จาก $f(x_0)$ กลายเป็น $f(x)$) ต่อค่าตัวแปรต้นที่เปลี่ยนไป (จาก x_0 กลายเป็น x) เรียกคำนี้ว่า "อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย (average rate of change) ของ $f(x)$ เทียบกับ x" คำว่าเฉลี่ยน แสดงถึงการคิดการเปลี่ยนแปลงบน 'ช่วง'
แต่ $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ เป็นการหา "แนวโน้ม" ของอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย เมื่อ x กับ x_0 อยู่ใกล้กันมากๆ จนแทบจะเป็นจุดเดียวกัน เราจึงเรียกค่านี้ว่า "อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง (instantaneous rate of change) ของ $f(x)$ เทียบกับ x"

สัญลักษณ์อื่นๆ สำหรับ derivatives ได้แก่

ถ้า $f'(x_0)$ หาค่าได้ เรากล่าวว่า function f "หาอนุพันธ์ได้ (differentiable) ที่ x_0" ถ้า $f'(x_0)$ หาค่าได้สำหรับทุกๆ x ในเซต S เรากล่าวว่า function f "หาอนุพันธ์บน S (differentiable on S)" ถ้า $f'(x_0)$ หาค่าได้สำหรับทุกๆ จำนวนจริง x เรากล่าวว่า function f "หาอนุพันธ์ได้ (differentiable)"

3.2 การคำนวณหาอนุพันธ์

ตัวอย่าง 3.2. จงหา derivative ต่อไปนี้

(1) $f'(x)$ เมื่อ $f(x) = x^2$

(2) $f'(2)$ เมื่อ $f(x) = \sqrt{x}$

(3) $\frac{ds(t)}{dt}|_{t=t_0}$ เมื่อ $s(t) = \frac{1}{t}$

วิธีทำ ใช้นิยามข้างต้นหา derivative ได้ดังนี้

(1) เมื่อ $f(x) = x^2$ จะได้

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x + h \\ &= 2x \end{aligned} \tag{3.2}$$

(2) เมื่อ $f(x) = \sqrt{x}$ จะได้

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h \cdot (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h) - 2}{h \cdot (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

(3) เมื่อ $s(x) = \frac{1}{t}$ จะได้

$$\begin{aligned} s'(t)|_{t=t_0} &= \lim_{h\to 0} \frac{s(t_0+h) - s(t_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{t_0+h} - \frac{1}{t_0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{t_0 - (t_0+h)}{t_0(t_0+h)h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{t_0(t_0+h)h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{t_0(t_0+h)} \\ &= \frac{-1}{t_0^2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

ตัวอย่าง 3.3. จงหาเซต S ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ function $f(x) = \sqrt{x}$ หาอนุพันธ์ได้บน S

วิธีทำ พิจารณาจำนวนจริง x ที่ทำให้ $f'(x)$ หาค่าได้ เนื่องจาก

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ ถ้า } x > 0$$

ในกรณีที่ $x \leq 0$ จะได้ว่า $f(x)$ ไม่นิยาม จึงหาอนุพันธ์ที่ x ไม่ได้ และในกรณีที่ $x = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{0+h} + \sqrt{0}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} \end{aligned} \tag{3.5}$$

ซึ่งหาค่าไม่ได้ ดังนั้นจึงได้ว่า เซตที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ function $f(x) = \sqrt{x}$ หาอนุพันธ์ได้บน S คือช่วงเปิด $(0, \infty)$

3.3 สูตรสำหรับหาอนุพันธ์

ทฤษฎี 3.1. *ถ้า c เป็นจำนวนจริง (real number) และ n เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว function $f(x) = c$ เป็น function ที่ differentiable และ function $g(x) = x^n$ เป็น function ที่ differentiable บนช่วงเปิดในโดเมนของมัน และ*

1. $\frac{dc}{dx} = 0$
2. $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

ทฤษฎี 3.2. *ถ้า f และ g เป็น function ซึ่ง differentiable ที่ x_0 และ c เป็นค่าคงที่จริง แล้ว*

1. $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
3. $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
4. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
5. $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

ตัวอย่าง 3.4. จงหา derivative ของแต่ละ function ต่อไปนี้ เทียบกับตัวแปรต้นของมัน

(1) $f(x) = 5x^4$

(2) $f(x) = 6x^{11} + 9$

(3) $s(t) = 3t^8 - 2t^5 + 6t + 1$

(4) $g(x) = \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right)\left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$

(5) $h(x) = \frac{x^2-1}{x^4+1}$

วิธีทำ ใช้สูตรในทฤษฎีบทข้างต้นหา derivative ได้ดังนี้

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^4 \\ f'(x) &= \frac{d}{dx}(5 \cdot x^4) \\ &= 5\frac{d}{dx}(x^4) = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3 \end{aligned} \tag{3.6}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x^{11} + 9 \\ f'(x) &= \frac{d}{dx}(6x^{11} + 9) \\ &= 5\frac{d}{dx}(6x^{11}) + \frac{d}{dx}9 \\ &= 66x^{10} \end{aligned} \tag{3.7}$$

(3)

$$\begin{aligned} s(t) &= 3t^8 - 2t^5 + 6t + 1 \\ s'(t) &= \frac{d}{dt}(3t^8 - 2t^5 + 6t + 1) \\ &= 24t^7 - 10t^4 + 6 \end{aligned} \tag{3.8}$$

(4)

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right)\left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ g'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right)\left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right)\frac{d}{dx}\left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left(2x - \frac{1}{2}x^{-1}\right)\left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right)(2x - 2x^{-3}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

(5)

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} \\ h'(x) &= \frac{(x^4+1)\frac{d}{dx}(x^2-1) - (x^2-1)\frac{d}{dx}(x^4+1)}{(x^4+1)^2} \\ &= \frac{(x^4+1)(2x) - (x^2-1)(4x^3)}{(x^4+1)^2} \end{aligned} \tag{3.10}$$

ตัวอย่าง 3.5. จงหา $f'(0)$ เมื่อ $f(x) = (x^6 - x^5 - x^4 - x^3)(x^5 - x^4 - x^3 - x^2)$

วิธีทำ จาก $f(x) = (x^6 - x^5 - x^4 - x^3)(x^5 - x^4 - x^3 - x^2)$ จะได้

$f'(x) = (x^6-x^5-x^4-x^3)(5x^4-4x^3-3x^2-2x)+(x^5-x^4-x^3-x^2)(6x^5-5x^4-4x^3-3x^2)$

ดังนั้น $f'(0) = 0$

3.4 อนุพันธ์อันดับสูง (High Order Derivatives)

ถ้า f เป็น function ที่หา derivative ได้ และ f' ก็เป็น function ที่หา derivative ได้อีก เราเรียก $(f')'$ ว่า "อนุพันธ์อันดับสอง (second derivative) ของ f" เขียนแทนด้วย f'' ในทำนองเดียวกัน เราจะมี "อนุพันธ์อันดับสาม (third derivative) ของ f" เขียนแทนด้วย f''' ฯลฯ สำหรับอนุพันธ์อันดับ n (nth derivative) ของ f โดยที่ $n \geq 4$ เราเขียนแทนด้วย $f^{(n)}$ นอกจากนี้เราใช้สัญลักษณ์ $\frac{d^n f(x)}{dx}$ แทน nth derivative ของ f และ $\frac{d^n f(x)}{dx}|_{x=x_0}$ แทน nth derivative ของ f ที่ x_0 (ซึ่งคือ $f^{(n)}(x_0)$ นั่นเอง)

ถ้าให้ $y = f(x)$ เราสามารถใช้สัญลักษณ์ $y', y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}$ หรือ $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ แทนอนุพันธ์อันดับที่ $1, 2, 3, 4, \ldots, n$ ตามลำดับ และแทนค่าอนุพันธ์ที่ x_0 ด้วย $\frac{d^ny}{dx^n}|_{x=x_0}$

ด้วยหลักการเดียวกัน "อนุพันธ์อันดับหนึ่ง (first derivative) ของ f" ก็คือ อนุพันธ์ของ f นั่นเอง

ตัวอย่าง 3.6. จงหาอนุพันธ์ทั้งหมดของ $f(x) = x^n$ เมื่อ $n > 1$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^n$ จะได้

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= nx^{n-1} \\
f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} \\
f'''(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\
f^{(4)}(x) &= n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= n! \\
f^{(k)}(x) &= 0 \text{ เมื่อ } k \geq n
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

3.5 การตีความอนุพันธ์ (Interpretation of Derivatives)

3.5.1 อนุพันธ์ในเชิงความชัน (Derivatives as Slopes)

ในกรณีที่เราลงจุดกราฟ (plot graph) ของฟังก์ชัน เราได้ทราบมาแล้วว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x ใดๆ ก็คือความชันของเส้นสัมผัสกราฟ (เรียกว่าความชันของกราฟ) ของฟังก์ชัน f ที่จุด $(x, f(x))$ นั่นเอง ความจริงข้อนี้สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันได้

ตัวอย่าง 3.7. จงพิจารณาว่ามีเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ ที่ตั้งฉากกันหรือไม่

วิธีทำ เราทราบว่าเส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ -1 พิจารณาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ ที่จุด $(x, f(x))$ ใดๆ จะได้ว่า ความชันดังกล่าวมีค่าเท่ากับ $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ ฉะนั้น ความชันของเส้นสัมผัสกราฟนี้ที่จุดใดๆ จึงมีค่าเป็นบวกเสมอ จึงสรุปได้ว่า กราฟของฟังก์ชันนี้ไม่มีเส้นสัมผัสคู่ใดตั้งฉากกัน เพราะผลคูณของความชันของเส้นสัมผัสเป็นจำนวนจริงบวกเสมอ ไม่สามารถเป็น -1 ได้

ตัวอย่าง 3.8. ภูเขาจำลองในพิพิธภัณฑ์วิทยาศาสตร์แห่งหนึ่ง เกิดจากการหมุนของพาราโบลาคว่ำรอบแกนสมมาตรของมัน โดยที่ฐานของภูเขาจำลองเป็นรูปวงกลมรัศมี 5 เมตร และยอดเขาอยู่สูงจากฐานเป็นระยะทาง 8 เมตร บนยอดเขาติดตั้งโคมไฟ ณ ตำแหน่งสูงจากยอดเขาขึ้นไปอีก 0.5 เมตร เมื่อเปิดโคมไฟ แสงไฟจากโคมจะทำให้พื้นบริเวณรอบๆ ภูเขาจำลองที่ไม่ถูกภูเขาจำลองบัง สว่างขึ้น จงหาว่าบริเวณที่สว่างดังกล่าว เป็นบริเวณบนพื้นภายนอกวงกลมรัศมีเท่าใด

จากโจทย์จำลองรูปได้ดังภาพ 1.3 ในที่นี้สมมุติว่าแหล่งกำเนิดแสงเป็นจุด จะเห็นว่า แนวแบ่งส่วนมืดและส่วนสว่างจะผ่านจุดกำเนิดแสง และอยู่ในแนวเส้นสัมผัสผิวของพาราโบลาด้วย ให้จุดกึ่งกลางฐานของภูเขาจำลองเป็นจุดกำเนิด และสมมุติให้ $f(x) = a - kx^2$ เป็นสมการของรูปพาราโบลา จากเงื่อนไขความกว้างและความสูงของภูเขาจำลอง จะได้ว่า $f(0) = 8$ และ $f(5) = 0$ ซึ่งทำให้ $a = 8$ และ $k = 8/25$ ดังนั้น $f(x) = 8 - 8x^2/25$ ให้ $(x, f(x))$ เป็นจุดที่แนวแบ่งส่วนมืดและส่วนสว่างสัมผัสกับพาราโบลา จะได้ว่า ความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุดดังกล่าวเท่ากับ $f'(x) = -16x/25$ แต่เส้น

สัมผัสนี้ผ่านจุดกำเนิดแสง $(0, 8.5)$ และจุด $(x, f(x)) = (x, 8 - 8x^2/25)$ จึงได้ว่า มีความชันเป็น $\dfrac{8 - 8x^2/25 - 8.5}{x - 0}$ นั่นคือ $\dfrac{8 - 8x^2/25 - 8.5}{x - 0} = -16x/25$ หรือ $x = 5/4$ ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ $-16 \times (5/4)/25 = -4/5$ ถ้าบริเวณบนพื้นที่สว่าง เป็นบริเวณภายนอกวงกลมรัศมี r จะได้ว่า เส้นสัมผัสข้างต้น ต้องผ่านจุด $(r, 0)$ ด้วย นั่นคือความชันจะเท่ากับ $\dfrac{0 - 8.5}{r - 0}$ ซึ่งทำให้ $\dfrac{0 - 8.5}{r - 0} = -4/5$ หรือ $r = 10.625$ นั่นคือ บริเวณที่สว่าง เป็นบริเวณบนพื้นภายนอกวงกลมรัศมี 10.625 เมตร

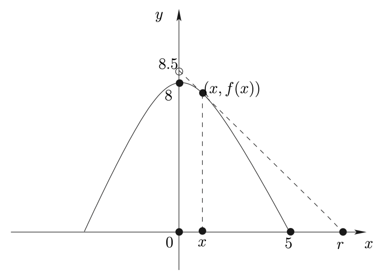


Figure 3.1: รูปภาพสำหรับตัวอย่างข้างต้น

3.5.2 อนุพันธ์ในเชิงอัตราเร็ว (Derivatives as Speeds)

ถ้าพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยให้ $f(t)$ เป็นระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ ณ เวลา t เราจะได้ว่า $f'(t)$ ก็คืออัตราเร็ว ณ เวลา t ซึ่งเรียกว่า อัตราเร็วชั่วขณะ (instantaneous speed) ในขณะที่ปริมาณ $\dfrac{f(s) - f(t)}{s - t}$ เรียกว่า อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุ ในช่วงเวลา ตั้งแต่ s ถึง t

ตัวอย่าง 3.9. วัตถุเคลื่อนที่เป็นเวลานาน 1 นาที ตามสมการ $s = 0.5t + 0.1t^2$ เมื่อ t คือเวลาเป็นวินาที และ s คือระยะทางที่เคลื่อนที่ได้เป็นเมตร จงหา

(1) อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วง 10 วินาทีแรก และในช่วง 10 วินาทีถัดไป

(2) อัตราเร็วของวัตถุ ณ วินาทีที่ 10 และ ณ วินาทีที่ 20

วิธีทำ
(1) อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วง 10 วินาทีแรก เท่ากับ
$\dfrac{s(10) - s(0)}{10 - 0} = \dfrac{(0.5 \times 10 + 0.1 \times 10^2) - (0.5 \times 0 + 0.1 \times 0^2)}{10 - 0} = 1.5$ เมตรต่อวินาที
อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วง 10 วินาทีถัดไป เท่ากับ
$\dfrac{s(20) - s(10)}{20 - 10} = \dfrac{(0.5 \times 20 + 0.1 \times 20^2) - (0.5 \times 10 + 0.1 \times 10^2)}{20 - 10} = 3.5$ เมตรต่อวินาที

(2) เนื่องจาก $\dfrac{d}{dt}\left(0.5t + 0.1t^2\right) = 0.5 + 0.2t$
ดังนั้น อัตราเร็วของวัตถุ ณ วินาทีที่ 10 เท่ากับ
$\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=10} = \left.\dfrac{d}{dt}\left(0.5t + 0.1t^2\right)\right|_{t=10} = 0.5 + 0.2 \times 10 = 2.5$ เมตรต่อวินาที
และ อัตราเร็วของวัตถุ ณ วินาทีที่ 20 เท่ากับ
$\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=20} = \left.\dfrac{d}{dt}\left(0.5t + 0.1t^2\right)\right|_{t=20} = 0.5 + 0.2 \times 20 = 4.5$ เมตรต่อวินาที

3.5.3 อนุพันธ์ในเชิงอัตราการเปลี่ยนแปลง (Derivatives as Rates of Change)

เราจะเห็นได้ชัดจากนิยามของอนุพันธ์ว่า ในกรณีของฟังก์ชันทั่วๆ ไป อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ก็คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าฟังก์ชัน เทียบกับตัวแปรต้นของมันนั่นเอง

ตัวอย่าง 3.10. เมื่อใช้เครื่องสูบลม สูบลมเข้าไปในลูกโป่ง เราอาจประมาณได้ว่า ณ ขณะเวลาใดๆ ลูกโป่งมีรูปร่างเป็นรูปทรงกลม จงหาอัตราการเพิ่มขึ้นของปริมาตรของลูกโป่ง ต่อหนึ่งหน่วยรัศมีที่เพิ่มขึ้นของลูกโป่ง ขณะที่ลูกโป่งมีรัศมี 10 เซนติเมตร

วิธีทำ ให้ r เป็นรัศมีของลูกโป่ง และ V เป็นปริมาตรของลูกโป่ง จากข้อสมมุติว่าลูกโป่งเป็นทรงกลม จะได้ว่า $V = 4\pi r^3/3$ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของลูกโป่งเทียบกับรัศมีเท่ากับ $\dfrac{dV}{dr} = 12\pi r^2/3 = 4\pi r^2$ ลูกบาศก์หน่วยต่อหน่วย นั่นคือ ขณะที่ลูกโป่งมีรัศมี 10 เซนติเมตร มันจะมีปริมาตรเพิ่มขึ้นในอัตรา $4 \times \pi \times 10^2 \approx 1256$ ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อเซนติเมตร หรือประมาณ 1.256 ลิตรต่อรัศมีที่เพิ่มขึ้น 1 เซนติเมตร

3.5.4 แบบฝึกหัด (Exercises)

1. จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้ ถ้าอนุพันธ์ดังกล่าวหาค่าได้ ในกรณีที่หาค่าไม่ได้ ให้ระบุว่าหาค่าไม่ได้

    1. $f'(x)$ เมื่อ $f(x) = g(x)h(x)k(x)$
    2. $f^{(n)}(0)$ เมื่อ $f(x) = \sum_{i=1}^{k} x^i$ โดยที่ k และ n เป็นจำนวนนับ
    3. $\dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{1-t}$ และ $\dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{1}{1-t}$
    4. $\dfrac{d}{dt}\dfrac{f(t)}{t}$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\dfrac{d}{dt}f(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ สำหรับทุกๆ $t \neq 0$
    5. $f'(-1)$, $f'(-\frac{2}{3})$, $f'(0)$, $f'(1)$ เมื่อ $f(x) = x\sqrt{1+x}$
    6. $\left.\dfrac{d}{dx}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right|_{x=0}$
    7. $\dfrac{dy}{dx}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0.25}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ เมื่อ $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$

8. $\dfrac{d}{dx}\left(x^2\sqrt{1+x}\right)$
9. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ เมื่อ $y=(1+x^2)\sqrt{1-2x}$ (หาอนุพันธ์ของ $\sqrt{1-2x}$ และ $1/\sqrt{1-2x}$ ก่อน)
10. $\dfrac{d^{10}y}{dx^{10}}$ เมื่อ $y=\left(x^5-x^4-x^3-x^2-x-1\right)\left(x^5+2x^4+2x^3+2x^2+2x+2\right)$

2. จงตอบคำถามต่อไปนี้

   1. จงหาความชันของกราฟของสมการ $y=x^3-3x$ ณ ตำแหน่งซึ่ง $x=2$
   2. จงหาจุดบนกราฟ $y=x^3-3x$ ซึ่งมีเส้นสัมผัสกราฟที่ขนานกับเส้นสัมผัส ณ จุดซึ่ง $x=a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ
   3. จงหาจุดบนกราฟ $y=x^3-3x$ ซึ่งมีเส้นสัมผัสกราฟที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ณ จุดซึ่ง $x=a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

3.6 กฎลูกโซ่ (The Chain Rule)

การทราบข้อมูลของ derivative ของฟังก์ชัน f และฟังก์ชัน g ทำให้เราสามารถหา derivative ของผลบวก $f+g$ ผลคูณ fg และผลหาร f/g ของฟังก์ชัน ทั้งสองได้ ข้อมูลนี้ยังใช้หา derivative ของฟังก์ชันประกอบ $f\circ g$ ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสมได้ เราเรียกวิธีการหา derivative ของฟังก์ชัน ประกอบว่า chain rule โดยมีแนวคิดสำคัญคือ การสร้างตัวแปรใหม่ขึ้นมาช่วย ในการคำนวณ ดังรายละเอียดในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎี 3.3. *ถ้าฟังก์ชัน g หา derivative ได้ที่จุด x และฟังก์ชัน f หา derivative ได้ที่จุด $g(x)$ แล้วฟังก์ชันประกอบ $f\circ g$ หา derivative ได้ที่จุด x ยิ่งกว่านั้น ถ้า*

$$y=f(g(x)) \quad \text{และ} \quad u=g(x)$$

แล้ว $y=f(u)$ และ

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงให้เห็นถึงการใช้ chain rule หา derivative ของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 3.11. พิจารณาฟังก์ชัน $y=\frac{1}{x^2+1}$ กำหนดให้ $u=x^2+1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ในที่นี้ $y = \frac{1}{u}$ เราใช้ chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du}\left[\frac{1}{u}\right] \cdot \frac{d}{dx}[x^2+1] \\ &= \left(-\frac{1}{u^2}\right) \cdot (2x) \\ &= -\frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot (2x) \\ &= -\frac{2x}{(x^2+1)^2}\end{aligned} \tag{3.12}$$

นั่นคือ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

ตัวอย่าง 3.12. กำหนดให้ $y = u^{100}$ และ $u = x^3 + x^2 + x + 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ใช้ chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du}[u^{100}] \cdot \frac{d}{dx}[x^3+x^2+x+1] \\ &= (100u^{99}) \cdot (3x^2+2x+1) \\ &= 100(x^3+x^2+x+1)^{99}(3x^2+2x+1)\end{aligned} \tag{3.13}$$

นั่นคือ $\dfrac{dy}{dx} = 100(x^3+x^2+x+1)^{99}(3x^2+2x+1)$

ข้อสังเกต สูตรของกฎลูกโซ่สามารถเขียนได้ในอีกรูป ซึ่งสะดวกในการนำไปใช้ สังเกตว่า $y = f(u)$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(u)] \quad \text{และ} \quad \frac{dy}{du} = f'(u)$$

สูตรของ chain rule จึงเขียนได้ว่า

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\frac{du}{dx}}$$

ซึ่งเขียนได้อีกรูปคือ

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ตัวอย่าง 3.13. จงหา derivative ของฟังก์ชัน $y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}$

วิธีทำ เราแนะนำตัวแปร $u = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ และใช้สูตร chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}\right] &= \frac{d}{dx}[\sqrt{u}] \\
&= \frac{d}{du}\sqrt{u} \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right] \qquad (3.14) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}} \cdot (x+1) \\
&= \frac{x+1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}}
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}}$

ตัวอย่าง 3.14. จงหาค่าของ $f'(x^3 + x)$ เมื่อกำหนดให้

$$\frac{d}{dx}[f(x^3 + x)] = (3x^2 + 1)^2$$

วิธีทำ เราใช้ chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x^3 + x)] &= f'(x^3 + x)\frac{d}{dx}[x^3 + x] \qquad (3.15) \\
&= f'(x^3 + x) \cdot (3x^2 + 1)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$(3x^2 + 1)^2 = f'(x^3 + x) \cdot (3x^2 + 1)$$

หรือ

$$f'(x^3 + x) = 3x^2 + 1$$

สังเกตความแตกต่างระหว่าง $\dfrac{d}{dx}f(x^3 + x)$ และ $f'(x^3 + x)$

ตัวอย่าง 3.15. กำหนดให้ $f(x) = |x|$ จงหา derivative ของฟังก์ชัน f ที่ $x \neq 0$

วิธีทำ ฟังก์ชัน f เขียนได้ว่า

$$f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$$

ถ้า $x \neq 0$ แล้ว

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\sqrt{x^2} \\ &= \frac{d}{du}[\sqrt{u}] \cdot \frac{d}{dx}[x^2] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (2x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot x \\ &= \frac{x}{|x|} \end{aligned} \tag{3.16}$$

นั่นคือ เมื่อ $x \neq 0$ แล้ว $f'(x) = \dfrac{x}{|x|}$

3.6.1 แบบฝึกหัด

1. จงหา derivative ของฟังก์ชันต่อไปนี้
   1. $f(x) = \sqrt{1 - x + x^2}$
   2. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$
   3. $f(x) = (2x+5)^3(3x-7)^5$
   4. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+x^2+1}$
2. จงหา derivative ของฟังก์ชัน

$$y = \sqrt{x + \sqrt[3]{3x + \sqrt[4]{4x}}}$$

3. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันหา derivative ได้ และ $g = f \circ f$ ถ้า $f(1) = 1,\ f(2) = 4$ และ $f'(4) = 8$ จงหาค่าของ $g'(1)$
4. พิจารณาตารางค่าของฟังก์ชัน $f, f',\ g, g'$ และ h, h' โดยที่ $h = f \circ g$

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$	$h'(x)$
-1	0	1	2	2	0	2
0	3	-1	?	1	1	?
1	?	0	0	?	?	3

   จงหาค่าของ $h(0),\ f(1),\ h'(0),\ f'(1)$ และ $g'(1)$

5. จาก chain rule

$$E : chain1$$

   , $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, จงหาสูตร ของ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

3.7 อนุพันธ์ของฟังก์ชันอินเวอร์ส (Derivatives of Inverse Functions)

นิยาม 3.2. ถ้าฟังก์ชัน f และ g สอดคล้องสมบัติ

1. $g(f(x)) = x$ สำหรับ x ที่เป็นสมาชิกของโดเมนของ f
2. $f(g(y)) = y$ สำหรับ y ที่เป็นสมาชิกของโดเมนของ g

เรากล่าวว่า f และ g เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส โดยที่ f เป็น ฟังก์ชันอินเวอร์สของ g และ g เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส ของ f

ถ้าเขียน f^{-1} แทน g และใช้สัญกรณ์ x แทนสมาชิกทั้งในโดเมนของ f และ f^{-1} สมมติว่าทั้งสองฟังก์ชันหา derivative ได้ ให้

$$y = f^{-1}(x)$$

เราสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$x = f(y)$$

หา derivative เทียบกับ x

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x] &= \frac{d}{dx}[f(y)] \\ &= f'(y) \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned} \tag{3.17}$$

นั่นคือ

$$1 = f'(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

หรือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$$

เขียนใหม่ได้ว่า

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

ตัวอย่าง 3.16. กำหนดให้ $f(x) = x^3$ มี $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ จงหา $\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)]$

วิธีทำ คำนวณหา derivative ได้ว่า $f'(x) = 3x^2$ และ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^{1/3}] = \frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] &= \frac{1}{3[f^{-1}(x)]^2} \\ &= \frac{1}{3[x^{1/3}]^2} \\ &= \frac{1}{3x^{2/3}} \end{aligned} \tag{3.18}$$

ในการหา derivative ของฟังก์ชันอินเวอร์ส เราอาจจะไม่ใช้สูตรโดยตรง แต่ จะคำนวณหา derivative ตามขั้นตอนที่ได้แสดงข้างต้น ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 3.17. พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + x + 2$ จงหา derivative ของ $f^{-1}(x)$

วิธีทำ เราเขียน $x = f(y) = y^3 + y + 2$ แล้วหา derivative เทียบกับ x

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x] &= \frac{d}{dx}[y^3 + y + 2] \\ 1 &= (3y^2 + 1)\frac{dy}{dx} \end{aligned} \tag{3.19}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3y^2 + 1}$

ตัวอย่าง 3.18. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอิสเวอร์ส ถ้า $f(1) = 2$ และ $f'(1) = 3$ แล้ว จงหาค่าของ $(f^{-1})'(2)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(1) = 2$ แล้ว $f^{-1}(2) = 1$ และจากสูตร

$$E : inverse$$

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(2) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} \\ &= \frac{1}{f'(1)} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{3.20}$$

นั่นคือ $(f^{-1})'(2) = 1/3$

3.7.1 แบบฝึกหัด

1. จงหา $(f^{-1})'(x)$ เมื่อกำหนด
    1. $f(x) = 2x^3 - 1$
    2. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$
    3. $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$
    4. $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$

3.8 Differentials, Implicit Differentiation and Related Rates

3.8.1 Differentials

ที่ผ่านมา เราให้ความหมายของ dy/dx ว่าเป็น derivative ของ y เทียบกับ x ในความหมายของตัวดำเนินการ $\frac{d}{dx}$ ที่กระทำ กับฟังก์ชัน y หัวข้อนี้เราจะนิยาม dy และ dx แยกจากกัน และให้ความ

หมาย dy/dx ว่าเป็นเศษส่วน

ผลต่างระหว่างค่าสองค่าของตัวแปร เราเรียกว่า increment เช่นในตัวแปร x ผลต่างระหว่างค่า $x = x_0$ และ $x = x_1$ เราเขียน increment ใน x นี้ ว่า $\Delta x = x_1 - x_0$

ให้ $y = f(x)$ และให้ x มีการเปลี่ยนค่าจาก $x = x_0$ ไปยัง $x = x_1$ ก็จะมี การเปลี่ยนค่าใน y จาก $y_0 = f(x_0)$ ไปยัง $y_1 = f(x_1)$ นั่นหมายความ ว่า increment Δx ทำให้เกิด increment $\Delta y = y_1 - y_0$ โดยที่

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$$

หรือ

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ดังนั้น สำหรับค่า x ทั่วไปแล้ว เราอาจเขียน

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

และนิยามของ derivative ก็เขียนได้อีกรูปว่า

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

เมื่อเราเห็นการเขียนสัญกรณ์ $\dfrac{dy}{dx}$ มีแนวโน้มที่จะ ทำให้เราคิดถึงผลหารของ dy ด้วย dx ซึ่งในขณะนี้ทั้งสองปริมาณยังไม่มี ความหมายใด ๆ สังเกตว่าในสูตรของ chain rule ที่ว่า $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ ก็ให้ความรู้สึกแรกว่าน่าจะเป็นผลหารเช่นกัน ดังนั้นลำดับถัดไปเราจะให้ความหมายของ พจน์ dx, dy และการตีความหมายในรูปเศษส่วน

เริ่มด้วยการตรึงค่า x และนิยาม dx ว่าเป็นตัวแปรต้น กำหนดให้ $y = f(x)$ และ f เป็นฟังก์ชัน หา derivative ได้ เรานิยาม dy ว่าเป็นตัวแปรตามดังนี้

$$\boxed{dy = f'(x)\, dx}$$

ถ้า $dx \neq 0$ เราเขียนใหม่ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

เราเรียก dy ว่า differential ของ y และ dx ว่า differential ของ x

มีความแตกต่างระหว่าง ความหมายของ differential dy และ increment $\Delta y = y_1 - y_0$ ถ้าเรากำหนดให้ differential dx และ increment Δx มีค่า เดียวกัน นั่นคือ $dx = \Delta x$ จะเห็นว่า Δy แทนถึง ค่าผลต่างใน y ของจุดเริ่มต้น x และจุดปลาย $x + \Delta x$ ตามเส้นโค้ง $y = f(x)$ นั่นคือ $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ในขณะที่ dy แทนถึงค่าผลต่างใน y ของจุดเริ่มต้น x และจุดปลาย $x + \Delta x$ ตามเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ผ่านจุด $(x, f(x))$ และ มีความชันเท่ากับ $f'(x)$

ตัวอย่าง 3.19. ถ้า $y = f(x) = x^2 + 1$ แล้ว $f'(x) = 2x$ กำหนดให้ $x = 3$ จงหาค่าของ dy และ Δy เมื่อ $dx = \Delta x = 0.1$

วิธีทำ ค่าของ dy คือ

$$dy = f'(x)\,dx = 2x\,dx$$

กรณีตรึง $x = 3$ ได้ว่า

$$dy = 6\,dx$$

ถ้าให้ $dx = 0.1$ ค่าของ $dy = 0.6$ ถ้าเราพิจารณาค่า $dx = \Delta x = 0.1$ เราก็จะได้

$$\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = (3.1)^2 + 1 - 3^2 - 1 = 0.61$$

สังเกตว่า $dy = 0.6$ ในขณะที่ $\Delta y = 0.61$

มีข้อสังเกตว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันหา derivative ได้ที่ค่า x_0 แล้วเส้นสัมผัส กับเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(x_0, f(x_0))$ จะใกล้เคียงกับกราฟของ f สำหรับค่า x ใกล้ ๆ กับค่า x_0 สมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งนี้ที่ผ่านจุด $(x_0, f(x_0))$ มี ความชัน $f'(x_0)$ คือ

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

เมื่อเรากล่าวว่า เส้นโค้ง $y = f(x)$ และเส้นสัมผัสกับเส้นใกล้เคียงกันหมายถึงถ้าเรา ให้ x เข้าใกล้ x_0 ค่าของ $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ก็จะใกล้เคียงค่า $f(x)$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

เราเรียกสมการ

$$E : approx$$

ว่า local linear approximation ของ f ที่ x_0 เรา อาจเขียนในอีกรูปว่า

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

ตัวอย่าง 3.20. จงหา local linear approximation ของฟังก์ชัน $f(x) = x^{1/3}$ ที่ $x_0 = 1$

วิธีทำ เรามี $f(x) = x^{1/3}$ และคำนวณหา derivative

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

local linear approximation ของ f ที่ $x_0 = 1$ จึงเป็น

$$x^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}(x - 1) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

ถ้าเราต้องการประมาณค่าของ $(1.1)^{1/3}$ เราใช้ local linear approximation ของ f ในการประมาณ โดยได้ค่าประมาณคือ $1 + \frac{1}{3}(1.1 - 1) = 1.03$

3.8.2 Implicit Differentiation

บางครั้งเราต้องการหา derivative ของฟังก์ชัน ซึ่งไม่สามารถเขียนได้ ในรูปฟอร์ม $y = f(x)$ เช่นในความสัมพันธ์

$$x^2 + y^3 - xy = 0$$

การหา derivative ของ y เทียบกับ x เราไม่จำเป็นต้องเขียนความสัมพันธ์ ให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ ก่อน หลักการสำคัญก็คือ เราคิดให้ y เป็น ฟังก์ชันของ x เช่นในตัวอย่างที่ยกมา ถ้าเราหา derivative ทั้งสองข้าง ของสมการเทียบกับ x

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^2 + y^3 - xy] &= \frac{d}{dx}[0] \\ \frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[y^3] - \frac{d}{dx}[xy] &= 0 \\ 2x + 3y^2\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} - y &= 0\end{aligned} \tag{3.21}$$

เขียนใหม่ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 3y^2}$$

ตัวอย่าง 3.21. กำหนดให้ $y^2 = x^3(2 - x)$ สังเกตว่า $(x, y) = (1, 1)$ อยู่บน กราฟของความสัมพันธ์ จงหาว่าความชันของกราฟนี้ที่จุด $(1, 1)$

วิธีทำ หา derivative เทียบกับ x ทั้งสองข้าง ของสมการ

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[y^2] &= \frac{d}{dx}[x^3(2 - x)] \\ \frac{d}{dy}[y^2]\cdot\frac{dy}{dx} &= x^3\frac{d}{dx}[2 - x] + (2 - x)\frac{d}{dx}[x^3] \\ (2y)\cdot\frac{dy}{dx} &= -x^3 + (2 - x)(3x^2) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(2 - x)(3x^2)}{2y}\end{aligned} \tag{3.22}$$

ดังนั้นที่จุด $(x, y) = (1, 1)$ เราจะได้ derivative ของ y เทียบ กับ x เป็น $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}$

ตัวอย่าง 3.22. จงหาสมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งของสมการ

$$xy^2 = 1$$

ที่จุด $(1, -1)$

วิธีทำ เริ่มด้วยการหาความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $(1, -1)$ เราหา derivative ของสมการเทียบกับ x

ได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[xy^2] &= \frac{d}{dx}[1] \\ x\frac{d}{dx}[y^2] + y^2\frac{d}{dx}[x] &= 0 \\ x(2y)\frac{dy}{dx} + y^2 &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{2x} \end{aligned} \tag{3.23}$$

ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $(1,-1)$ มีค่าเท่ากับ $1/2$ สมการเส้น สัมผัสของเส้นโค้งที่จุด $(1,-1)$ จึงเป็น

$$\begin{aligned} \frac{y-(-1)}{x-1} &= \frac{1}{2} \\ y+1 &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.24}$$

นั่นคือ $y = \dfrac{x-3}{2}$

ตัวอย่าง 3.23. พิจารณาสมการ

$$\frac{1}{3}x^3 + y^3 - xy^2 = 5$$

จงหาว่าที่จุดใดบนเส้นโค้งที่เส้นสัมผัสขนานแกน x

วิธีทำ เราเริ่มด้วยการหา derivative ของสมการ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\frac{1}{3}x^3 + y^3 - xy^2] &= \frac{d}{dx}[5] \\ \frac{d}{dx}[\frac{1}{3}x^3] + \frac{d}{dx}[y^3] - \frac{d}{dx}[xy^2] &= 0 \\ x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - x\frac{d}{dx}[y^2] - y^2 &= 0 \\ x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - x(2y)\frac{dy}{dx} - y^2 &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y^2 - x^2}{3y^2 - 2xy} \end{aligned} \tag{3.25}$$

สังเกตว่าเส้นสัมผัสที่ขนานแกน x จะมีความชันเป็น 0 ดังนั้นที่จุดบน เส้นโค้งซึ่งมีเส้นสัมผัสขนานแกน x สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{aligned} y^2 - x^2 &= 0 \quad \text{และ} \\ \frac{1}{3}x^3 + y^3 - xy^2 &= 5 \end{aligned} \tag{3.26}$$

เนื่องจาก $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) = 0$

1. เมื่อ $y = x$ เราได้ว่า $x^3 = 15$ หรือ $x = y = \sqrt[3]{15}$

2. เมื่อ $y = -x$ เราได้ว่า $x^3 = -3$ หรือ $x = -y = \sqrt[3]{-3}$

เพราะฉะนั้นที่จุด $(\sqrt[3]{15}, \sqrt[3]{15})$ และ $(\sqrt[3]{-3}, -\sqrt[3]{-3})$ บนเส้นโค้ง เส้นสัมผัสมีความชันเป็น 0

3.8.3 Related Rates

เราศึกษาปัญหา related rates เราต้องการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ ปริมาณหนึ่งซึ่งมีความสัมพันธ์กับอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณอื่น ซึ่งเราทราบค่าแล้ว วิธีการทำได้ดังนี้

1. กำหนดปริมาณต่าง ๆ ด้วยตัวแปร
2. ระบุอัตราการเปลี่ยนของปริมาณที่รู้ค่า และอัตราการเปลี่ยนแปลง ของปริมาณที่ต้องการหาค่า
3. หาสมการซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณในข้อสอง
4. หา derivative ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับเวลา แก้สมการหาค่าของ อัตราการเปลี่ยนของปริมาณที่ไม่รู้ค่า
5. หาค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงที่จุดกำหนด

ตัวอย่าง 3.24. สมมติว่าเนื้องอกมีรูปร่างคล้ายทรงกลม ซึ่งสูตรการหาปริมาตรของทรงกลม คือ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ เมื่อ r เป็นรัศมีของทรงกลม เนื่องจากเนื้องอกมีการขยายตัว ทำให้ r มีขนาดยาวขึ้นด้วยอัตราคงที่ 1.25 มิลลิเมตรต่อเดือน อยากทราบว่าปริมาตรของเนื้องอกจะเพิ่มขึ้นมากน้อยเพียงใด เมื่อ $r = 10$ mm

กำหนดให้ V เป็นปริมาตรของเนื้องอก (หน่วยคือ mm^3) r เป็นรัศมีของเนื้องอก (หน่วยคือ mm) จากโจทย์ จะเห็นว่า เมื่อเวลาผ่านไป เนื้องอกมีการขยายตัวทำให้ r มีขนาดยาวขึ้น และ V เพิ่มขึ้นด้วย ดังนั้น V, r ล้วนเป็นตัวแปรตาม ในขณะที่ t เป็นตัวแปรต้น นอกจากนี้ โจทย์ยังบอกอีกด้วยว่า r มีขนาดยาวขึ้นด้วยอัตรา 1.25 มิลลิเมตรต่อเดือน ดังนั้น $\frac{dr}{dt} = 1.25$ สิ่งที่โจทย์ถามก็คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของเนื้องอก นั่นคือ $\frac{dV}{dt}$ จากความสัมพันธ์ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ หาอนุพันธ์เทียบ t ทั้ง 2 ข้าง $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ เมื่อ $r = 10$ mm

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(10)^2(1.25) = 500\pi > 0$$

ดังนั้น ปริมาตรของเนื้องอกจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 500π ลูกบาศก์มิลลิเมตรต่อเดือน

ตัวอย่าง 3.25. วิธีการอย่างง่าย ในการกำจัดตะกอนที่แขวนลอยอยู่ในน้ำ เทน้ำลงในกรวยที่มี filter ไว้ สมมติว่ากรวยสูง 16 นิ้ว และมีรัศมีที่ฐานเท่ากับ 4 นิ้ว ถ้าน้ำไหลออกจากกรวยด้วยอัตราเร็ว 2 ลูกบาศก์นิ้วต่อนาที เมื่อระดับน้ำสูง 8 นิ้ว ความลึกของน้ำจะลดลงมากน้อยเพียงไร

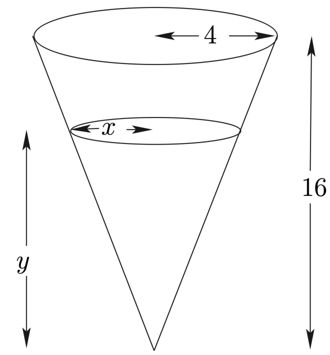


Figure 3.2: การไหลเวียนของอากาศในหลอดลม

กำหนดให้ t เป็นเวลานับจากการเริ่มต้นการสังเกต (min) V เป็นปริมาตรของน้ำในกรวย ณ เวลา t (in^3) y เป็นความลึกของน้ำในกรวย ณ เวลา t (in) x เป็นรัศมีของพื้นที่ผิวของน้ำ ณ เวลา t (in) อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของน้ำ คือ $\dfrac{dV}{dt}$ และ อัตราการเปลี่ยนแปลงความลึกของน้ำ คือ $\dfrac{dy}{dt}$ โจทย์กล่าวว่าน้ำไหลออกจากกรวยด้วยอัตราเร็ว 2 in^3/min เมื่อระดับน้ำสูง 8 in แสดงว่า น้ำในกรวยมีปริมาตรลดลง

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{y=8} = -2$$

การระบุอัตราการเปลี่ยนแปลงแบบนี้ แสดงให้เห็นว่า ณ ความลึกของน้ำต่างกัน อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของน้ำก็จะแตกต่างกันไป ไม่ได้เปลี่ยนแปลงด้วยอัตราที่คงที่เหมือนตัวอย่างก่อนหน้านี้ โจทย์ต้องการทราบว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงความลึกของน้ำ เมื่อระดับน้ำสูง 8 นิ้ว นั่นคือ $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{y=8}$

จากสูตรการหาปริมาตรของกรวย

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

และจากคุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย $\dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{16}$ หรือ $x = \dfrac{y}{4}$ ทำให้ได้ $V = \dfrac{\pi}{48}y^3$ หาอนุพันธ์เทียบ t ทั้ง 2 ข้าง จะได้ $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\pi}{48}(3y^2\dfrac{dy}{dt})$ หรือ $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{16}{\pi y^2}\dfrac{dV}{dt}$ ดังนั้น

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=8} = \frac{16(-2)}{\pi(8)^2} = \frac{-1}{2\pi} \text{ (in/min)}$$

สรุปว่า เมื่อระดับน้ำสูง 8 นิ้ว ความลึกของน้ำจะลดลงด้วยอัตรา $\dfrac{1}{2\pi}$ นิ้วต่อวินาที

ตัวอย่าง 3.26. เมื่อโยนก้อนหินลงในสระน้ำ จะเกิดคลื่นซึ่งรัศมีเพิ่มขึ้นด้วย อัตรา 0.9 เมตร/วินาที พื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่นหลังจาก ผ่านไป 10 วินาทีเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด?

วิธีทำ กำหนดให้

1. t แทนเวลา (วินาที)
2. r แทนรัศมีของคลื่น (เมตร)
3. A แทนพื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่น (ตารางเมตร)

พื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่นเป็นไปตามสูตร

$$A = \pi r^2$$

เราหา derivative เทียบกับเวลา ได้ว่า

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

เรามีข้อมูลว่า $\frac{dr}{dt} = 0.9$ เมตร ในขณะที่วินาที ที่ 10 รัศมีของคลื่นจึงมีค่าเท่ากับ $0.9 \cdot 10 = 9$ เมตร และดังนั้นพื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่นจึงเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา

$$\frac{dA}{dt} = (2\pi)(9)(0.9) = 50.89$$

ตารางเมตรต่อวินาที

ตัวอย่าง 3.27. เครื่องเททราย เททรายเป็นรูปกรวย ซึ่งความสูงของกองทรายมีค่าเท่ากับ เส้นผ่านศูนย์กลางที่ฐานของกองทรายเสมอ ถ้าความสูงเพิ่มขึ้นด้วยอัตราคงที่ 1.5 เมตร ต่อนาที จงหาว่าเครื่องเททรายเททรายด้วยอัตราเท่าใดเมื่อกองทรายมีความ สูงเท่ากับ 3 เมตร

วิธีทำ กำหนดให้

1. t แทนเวลา (นาที)
2. V แทนปริมาตรของกองทราย ณ เวลา t (ลูกบาศก์เมตร)
3. h แทนความสูงของกองทราย ณ เวลา t (เมตร)
4. r แทนรัศมีของพื้นกองทราย ณ เวลา t (เมตร)

ในแต่ละเวลา t อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรทรายคือ dV/dt และอัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงของกองทรายคือ dh/dt จากข้อมูล ที่ให้มา เรารู้ว่า

$$\frac{dh}{dt} = 1.5$$

เนื่องจากกองทรายมีลักษณะเป็นรูปกรวย ซึ่งมีสูตรว่า

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

เรายังทราบอีกว่า ที่แต่ละเวลา t ความสูงของกองทราย มีค่าเท่ากับรัศมีของพื้นกองทราย $r = h$ เพราะฉะนั้น

$$V = \frac{1}{3}\pi h^3$$

หา derivative เทียบกับ t ได้ว่า

$$\frac{dV}{dt} = \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

ดังนั้น

$$\frac{dV}{dt} = 1.5\pi h^2$$

เมื่อกองทรายสูง 3 เมตร อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรกองทรายจึงเป็น

$$\frac{dV}{dt} = 13.5\pi = 42.41$$

ลูกบาศก์เมตรต่อนาที

ตัวอย่าง 3.28. จุด P เคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งตามสมการ

$$y = \sqrt{x^2 + 16}$$

เมื่อ $P = (3, 5)$ แล้ว y มีค่าเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2 หน่วย/วินาที ค่า x มีการเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด

วิธีทำ กำหนดให้

1. t แทนเวลา (วินาที)

เราหา derivative ของสมการที่กำหนดเทียบกับเวลา t พบว่า

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} \frac{dx}{dt}$$

เรารู้ว่าที่จุด $P = (3, 5)$

$$\frac{dy}{dt} = 2$$

แทนค่าทั้งสองในสมการ

$$E : example$$

เราจะได้ว่า

$$2 = \frac{2}{\sqrt{9 + 16}} \frac{dx}{dt}$$

นั่นคือ

$$\frac{dx}{dt} = 5$$

นั่นคือ x มีการเปลี่ยนแปลงด้วยอัตรา 5 หน่วยต่อวินาที

ตัวอย่าง 3.29. ท่าเรือหนึ่ง มีแท่งแขวนลูกรอกผูกเรืออยู่เหนือท่า มีเชือกผูกไว้กับ หัวเรือซึ่งอยู่ต่ำกว่าตัวรอกของแท่งแขวน 3 เมตร ถ้าเราดึงเชือกด้วยอัตราเร็ว 6 เมตร/นาที เรือถูกดึงเข้าหาท่าด้วยอัตราเร็วเท่าใดเมื่อเชือก จากหัวเรือถึงลูกรอกมีความยาว 40 เมตร

วิธีทำ กำหนดให้

1. t แทนเวลา (นาที)
2. x ระยะทางในแนวนอน (เมตร)
3. y ระยะทางในแนวดิ่ง (เมตร)

จากข้อมูลของปัญหา เราสรุปได้ว่า อัตราการดึงเชือกแทนด้วยพจน์

$$\frac{dy}{dt} = 6$$

คำถามให้ $\frac{dx}{dt}$ เมื่อเชือกยาว 40 เมตรนับจากหัวเรือถึงลูกรอก โดยการใช้พิทาโกรัส เราจึงได้ความสัมพันธ์

$$x^2 + y^2 = 40^2$$

เราหา derivative เทียบกับ t ทั้งสองข้างของสมการ

$$\begin{aligned} 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} &= 0 \\ x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

เนื่องจากลูกรอกอยู่สูงกว่าหัวเรือ 3 เมตร หรือ $y = 3$ ในขณะที่ การดึงเชือกด้วยอัตราเร็ว 6 เมตร หรือ $\frac{dy}{dt} = 6$ เพราะฉะนั้น เมื่อเชือกยาว 40 เมตร เรืออยู่ห่างออกไปเป็นระยะทาง

$$x^2 + 3^2 = 40^2$$

หรือ $x = \sqrt{1591}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sqrt{1591}\frac{dx}{dt} + 4(6) = 0 \\ \frac{dx}{dt} = -\frac{24}{\sqrt{1591}} = -0.60 \end{aligned} \tag{3.28}$$

ซึ่งหมายถึงเรือถูกดึงเข้าหาท่าด้วยอัตราเร็ว 0.6 เมตรต่อนาที

1. วาดภาพและกำหนดตัวแปรต่างๆ เช่น x, y เป็นต้น
2. ระบุอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรทุกตัวที่โจทย์กำหนดให้ และที่โจทย์ต้องการให้หา เช่น $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ เป็นต้น

3. หาสมการสมการหนึ่งที่แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่กำหนดขึ้นในขั้นตอนที่ 1 และเมื่อหาอนุพันธ์ของสมการนี้ จะมีเทอมที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ในขั้นตอนที่ 2
4. หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการในขั้นตอนที่ 3 เทียบกับเวลาและนำค่าของอนุพันธ์ที่ทราบลงไปในสมการ
5. หาค่าของอนุพันธ์ที่โจทย์ต้องการด้วยวิธีทางพีชคณิต

3.8.4 แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $y = \ln x$ จงหา dy และ Δy ที่ $x = 1$ โดย ที่ $dx = \Delta x = 0.5$
2. พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ แล้วหาสูตร dy และ Δy
    1. $y = x\sqrt{x-1}$
    2. $y = xe^x$
    3. $y = x \sin x$
    4. $y = \tan(x^2)$
3. จงหา local linear approximation ของเส้นโค้งจากสมการ $xe^y = y$ ที่จุด $(0,0)$ และใช้สมการที่ได้ประมาณค่าของ y เมื่อ $x = 0.1$
4. จงหา $\frac{dy}{dx}$ สำหรับความสัมพันธ์ต่อไปนี้
    1. $x^2 + y^2 = 25$
    2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$
    3. $x \sin y + y \sin x = 1$
    4. $e^{xy} + xy = 1$
5. หญิงคนหนึ่งสูง 1.55 เมตร เดินเข้าเสาไฟด้วยอัตราเร็ว 0.75 เมตร/วินาที เสาไฟติดดวงไฟสูง 5 เมตร
    1. เงาของหญิงคนนี้เปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด
    2. ปลายเงาของด้านศรีษะหญิงคนนี้เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่าใด
6. อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งอธิบายตามสมการ

$$\frac{x^2 y}{1+y^2} = \frac{2}{5}$$

กำหนดให้พิกัดแกน x ของอนุภาคเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 4 หน่วย/วินาที เมื่ออนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง $(1,2)$

    1. พิกัดแกน y ของอนุภาคเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด เมื่ออนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง $(1,2)$

2. ณ ตำแหน่ง $(1, 2)$ อนุภาคกำลังเคลื่อนสูงขึ้นหรือลดลงในพิกัด xy

7. ความเข้มของแสงที่ผ่านเข้าตาขึ้นอยู่กับรัศมีของ pupil ถ้า pupil มีขนาดมากขึ้น ปริมาณของแสงก็จะเข้าตามากขึ้น ดังสมการ $I = kr^2$ เมื่อ I เป็นความเข้มของแสง r เป็นรัศมีของ pupil และ k เป็นค่าคงตัว ในช่วงเวลา 6 โมงเช้าถึงเที่ยง รัศมีของ pupil จะขยายตัวด้วยอัตราเร็วคงที่ 0.1 mm/min จงหาว่าในช่วงเวลาดังกล่าว ความเข้มของแสงที่ผ่านเข้าตา จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร เมื่อ $r = 0.5$ cm

8. การแพร่ระบาดของแมลงวันทอง เริ่มที่ใจกลางของหมู่บ้านเล็กๆ แห่งหนึ่งนอกเมือง พื้นที่การแพร่ระบาดมีลักษณะคล้ายวงกลมดังแสดงในรูป 1.5 รัศมีของพื้นที่การแพร่ระบาดขยายเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 1.5 ไมล์ต่อปี จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่การแพร่ระบาด เมื่อรัศมีของพื้นที่การแพร่บาดมีค่าเท่ากับ 4 ไมล์

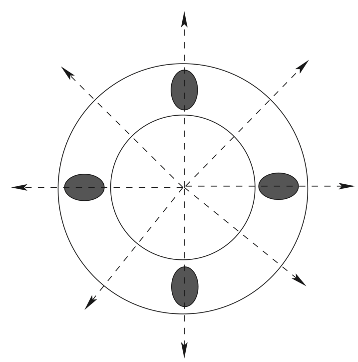


Figure 3.3: การแพร่ระบาดของแมลงวันทอง โดยที่วงรีสีเทาแทนแมลงวัน

3.9 อนุพันธ์ ของ ฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ และ อิน เวอร์ ส ของ ฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ

3.9.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เราจะใช้ความรู้เกี่ยวกับเอกลักษณ์ตรีโกณมิติและลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณ ช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยนิยามดังนี้

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \qquad \text{เมื่อ } x \text{ มีหน่วยเป็นเรเดียน} \\ \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= 1 \qquad\qquad (3.29) \\ \sin A - \sin B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

ทฤษฎี 3.4. *ถ้า* $f(x) = \sin x$ *แล้ว* $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}\\
&= 2\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2}).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{h} \qquad (3.30)\\
&= 2\cos x\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\\
&= 2(\cos x)\frac{1}{2}\\
&= \cos x
\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
\sin(x+h)-\sin x &= 2\cos\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{h}{2}\\
&= 2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}
\end{aligned} \qquad (3.31)$$

สำหรับการหาอนุพันธ์ของ cosine ก็ทำได้ในทำนองเดียวกันกับ sine ส่วนฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ หาได้โดยแปลงในรูป cosine หรือ sine เช่น

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ และ } \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

ทฤษฎี 3.5.

1. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
2. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
3. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
4. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x$
5. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\csc x\cot x$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sec x &= \frac{d}{dx}.\frac{1}{\cos x} \\
&= \frac{d}{dx}(\cos x)^{-1} \\
&= (-1)(\cos x)^{-2}\frac{d}{dx}\cos x \\
&= \frac{-1}{\cos^2 x}(-\sin x) \\
&= \frac{1}{\cos x}.\frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \sec x \tan x
\end{aligned} \tag{3.32}$$

ตัวอย่าง 3.30. กำหนดให้ $y = x^2 \tan 3x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3 \tan 3x) \\
&= x^2\frac{d}{dx}\tan 3x + \tan 3x\frac{d}{dx}x^2 \\
&= x^2(\sec^2 3x)(3) + (\tan 3x)(2x) \\
&= 3x^2\sec^2 3x + 2x\tan 3x
\end{aligned} \tag{3.33}$$

ตัวอย่าง 3.31. กำหนดให้ $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{1+\cos x}) \\
&= \frac{(1+\cos x)\frac{d}{dx}\sin x - \sin x\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{(1+\cos x)\cos x - (\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2} \\
&= \frac{1}{1+\cos x}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

ตัวอย่าง 3.32. กำหนดให้ $y = \sec^2(3x-1)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\sec^2(3x-1) \\
&= 2\sec(3x-1)\frac{d}{dx}\sec(3x-1) \\
&= 2\sec(3x-1)\sec(3x-1)\tan(3x-1)\frac{d}{dx}(3x-1) \\
&= 3.2\sec^2(3x-1)\tan(3x-1) \\
&= 6\sec^2(3x-1)\tan(3x-1)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

ตัวอย่าง 3.33. ถ้า $x\cos y + y\cos x = 1$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

วิธีทำ ใช้ implicit differentiation

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x\cos y + y\cos x) &= \frac{d}{dx}1 \\
\frac{d}{dx}(x\cos y) + \frac{d}{dx}(y\cos x) &= 0 \\
x\frac{d}{dx}\cos y + \cos y\frac{dx}{dy} + y\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{dy}{dx} &= 0 \\
x(-\sin y)\frac{dy}{dx} + \cos y + y(-\sin x) + \cos x\frac{dy}{dx} &= 0 \\
(-x\sin y + \cos x)\frac{dy}{dx} &= y\sin x - \cos y \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y\sin x - \cos y}{\cos x - x\sin y}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

ตัวอย่าง 3.34. จงหา $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ของฟังก์ชัน $y = x\cos x$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
y &= x\cos x \\
y' &= \frac{d}{dx}(x\cos x) \\
&= \frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{dx}{dx} \\
&= -x\sin x + \cos x \\
y'' &= -(x\frac{d}{dx}\sin x + \sin x\frac{dx}{dx}) + \frac{d}{dx}\cos x \\
&= -(x\cos x + \sin x) - \sin x \\
&= -x\cos x - 2\sin x
\end{aligned} \tag{3.37}$$

3.9.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จะเห็นว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งหมดคือ sine, cosine, tangent, cotangent, secant และ cosecant เป็นฟังก์ชันคาบซึ่งสมาชิกในโดเมน จะให้ค่าซ้ำกัน ดังนั้น ฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็น 1-1 ฟังก์ชัน แต่เราสามารถจำกัดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อทำให้ฟังก์ชันเหล่านี้ เป็น 1-1 ฟังก์ชัน ก็จะทำให้อินเวอร์สของฟังก์ชันเหล่านั้นเป็นฟังก์ชันด้วย เช่น

$$F = \{(x,y)|y = \sin x\} \text{ มีโดเมน } = \mathfrak{R} \text{ และเรนจ์ } = [-1,1]$$

ไม่เป็น1-1ฟังก์ชัน แต่

$$F = \{(x,y)|y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$$

เป็น 1-1 ฟังก์ชัน ดังนั้น

$$F^{-1} = \{(x,y)|x = \sin y, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], x \in [-1,1]\}$$

เป็น อินเวอร์สฟังก์ชันของFเรียกว่า inverse sine function ใช้สัญลักษณ์ $\sin^{-1} x$ หรือ $\arcsin x$

ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎี 3.6.

1. $\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}., |x| < 1$

2. $\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}., |x| < 1$

3. $\frac{d}{dx}arccotx = \frac{-1}{1+x^2}.$

4. $\frac{d}{dx}arcsecx = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$

5. $\frac{d}{dx}arccosecx = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$

6. $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

ให้ $y = \arcsin x, |x| < 1$

$$
\begin{aligned}
x &= \sin y, \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\
\frac{dx}{dx} &= \frac{d}{dx} \sin y \\
1 &= \cos y \frac{dy}{dx} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y}, |x| < 1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

ตัวอย่าง 3.35. จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = \sin^{-1}(2x)$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} . \frac{d}{dx}(2x) \\
&= \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

ตัวอย่าง 3.36. จงหา y' เมื่อ $y = arcsecx^2$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx} arcsecx^2 \\
&= \frac{1}{|x|^2 \sqrt{x^4 - 1}} . \frac{d}{dx}(x)^2 \\
&= \frac{2x}{x^2 \sqrt{x^4 - 1}} \\
&= \frac{2}{x \sqrt{x^4 - 1}}
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

ตัวอย่าง 3.37. จงหา y' เมื่อ $y = cot^{-1}(\dfrac{1}{x}) - \tan^{-1} x$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
y &= \cot^{-1}(\frac{1}{x}) - \tan^{-1} \\
y' &= \frac{d}{dx}(\cot^{-1}(\frac{1}{x}) - \tan^{-1}) \\
&= \frac{d}{dx}\cot^{-1}(\frac{1}{x}) - \frac{d}{dx}\tan^{-1} x \\
&= \frac{-1}{1-\frac{1}{x^2}}(-\frac{1}{x^2}) - \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{2}{x^4-1}
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

3.10 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

ในบทที่ 1 เราอธิบายการขยายพันธ์แบคทีเรีย $N(t)$ ในรูปของเวลา t ในรูปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยมีสมการดังต่อไปนี้

$$\frac{N(t+h)-N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \tag{3.42}$$

(3.43)

ในทางคณิตศาสตร์เราเรียกสมการดังกล่าวว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) และมีเนื้อหาในรายวิชานี้ที่จะเรียนในบทถัดๆ ไป ทั้งนี้ฟังก์ชัน $N(t)$ ที่ปรากฏในสมการเป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า (unknown function) และเราสามารถหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นโดยวิธีการหาปริพันธ์ (Integration) ได้คำตอบของสมการดังนี้

$$N(t) = N_0 e^{(b-m)t} \tag{3.44}$$

ดังนั้นในบทนี้ เราจะกล่าวถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม เราสามารถใช้นิยาม หรือสูตรต่อไปนี้ในการหาอนุพันธ์

ทฤษฎี 3.7.

1. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
2. $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$
3. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

4. $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$

ตัวอย่าง 3.38. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = e^{x^2+1}$

วิธีทำ

เราสามารถใช้กฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ของ $f(x) = e^{x^2+1}$ ได้ดังต่อไปนี้
โดยการกำหนดให้ $u = x^2 + 1,$ แล้ว $f(x) = e^u$ และจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{du}e^u \cdot \frac{d}{dx}u$$

เนื่องจาก $\frac{d}{du}e^u = e^u$ และ $\frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x.$
ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}f(x) = e^u \cdot 2x$$

เมื่อแทนตัวแปร $u = x^2 + 1$ ลงในสมการข้างต้น เราจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}f(x) = e^{x^2+1} \cdot 2x$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $f(x) = e^{x^2+1}$ คือ

$$\boxed{\frac{d}{dx}f(x) = 2xe^{x^2+1}}$$

ตัวอย่าง 3.39. จงแสดงว่า $N(t) = \frac{K}{1+(K-1)e^{-rt}}$ เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

โดยที่ r และ K เป็นค่าคงตัวที่เป็นบวก สมการเชิงอนุพันธ์นี้มีชื่อเรียกว่า the logistic growth equation

วิธีทำ

1. **หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $N(t)$**:
   กำหนดให้ $N(t) = \frac{K}{1+(K-1)e^{-rt}}$.

   เราสามารถใช้กฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{K \cdot (K-1) \cdot (-r)e^{-rt}}{(1+(K-1)e^{-rt})^2}$$

2. **จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปอย่างง่าย**

$$\frac{dN}{dt} = \frac{rK(K-1)e^{-rt}}{(1+(K-1)e^{-rt})^2}$$

3. **แทน** $N(t)$ ลงใน the logistic equation:

   เนื่องจาก

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

   โดยการแทน $N(t) = \frac{K}{1+(K-1)e^{-rt}}$ ลงไปในสมการข้างต้น เราจะได้ว่า

$$rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = \frac{rK(K-1)e^{-rt}}{(1+(K-1)e^{-rt})^2}$$

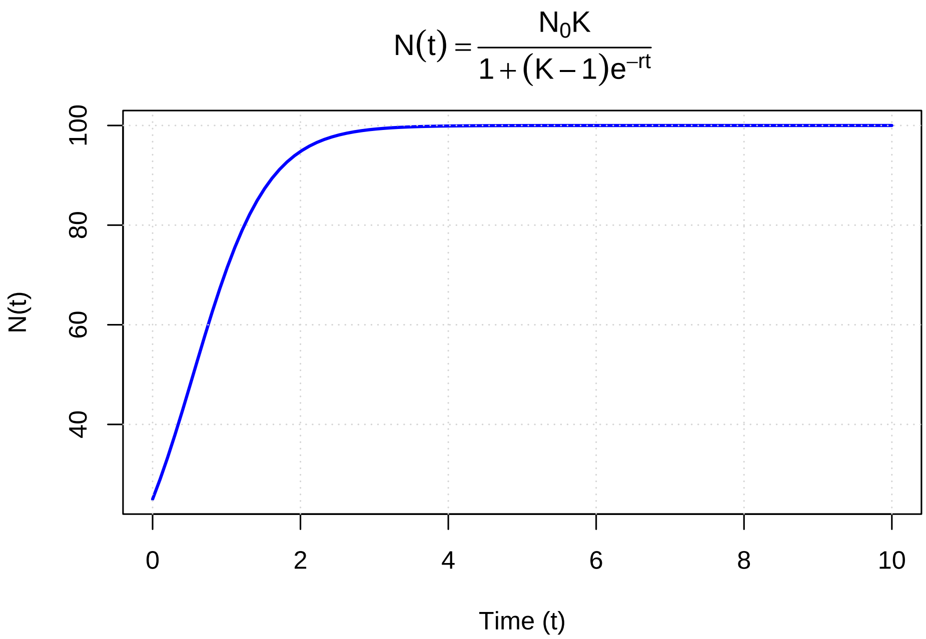
4. **ผลสรุปที่ได้จากการหาอนุพันธ์ และการแทนค่าฟังก์ชัน**

   เราจะเห็นว่าทั้ง 2 ข้างของสมการข้างต้นเท่ากัน แสดงว่า ฟังก์ชัน $N(t) = \frac{K}{1+(K-1)e^{-rt}}$ เป็นคำตอบของสมการ the logistic growth equation

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้นเราสมมติให้ $N(0) = 1$ ในกรณีที่กำหนดให้ $N(0) = N_0$ แล้วคำตอบของสมการ the logistic growth equation จะอยู่ในรูป

$$N(t) = \frac{N_0 \cdot K}{1+(K-1)e^{-rt}}$$

รูปต่อไปนี้แสดงกราฟของคำตอบของแบบจำลองการเติบโตแบบ logistic เมื่อกำหนดให้ $N_0 = 25$, $K = 4$ และ $r = 2$ กราฟจะมีลักษณะเป็นรูปตัว S (ซิกมอยด์, sigmoidal) ซึ่งสะท้อนการเติบโตที่จำกัดเนื่องจากความจุที่รองรับได้ (carrying capacity) หรือค่า K ในตอนแรก ประชากรจะเติบโตแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล แต่เมื่อเข้าใกล้ K อัตราการเติบโตจะช้าลงและกราฟจะแบนลง ซึ่งแตกต่างจากแบบจำลองการเติบโตแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลธรรมดา โดยประชากรจะเติบโตโดยไม่มีขอบเขต โดยเป็นไปตามกราฟที่เพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง ในโมเดลโลจิสติกส์ การเติบโตถูกจำกัดและจะคงตัวเมื่อจำนวนประชากรใกล้ถึงขีดจำกัดความจุ



ตัวอย่าง 3.40. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน:

$$y = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

โดยใช้การลอการิทึมทั้งสองฝั่งก่อนทำการหาอนุพันธ์

วิธีทำ

1. **ลอการิทึมทั้งสองข้าง:**

$$\ln y = \ln\left(\frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

ใช้สมบัติลอการิทึม

$$\ln y = \ln(e^x) + \ln(x^2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

ย่อ:

$$\ln y = x + 2\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

2. **หาอนุพันธ์ทั้งสองข้าง:**

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1}$$

ย่อ:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

3. **จัดรูปหา** $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = y\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)$$

4. **แทนค่า** $y = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $y = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ คือ:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)}$$

Chapter 4

การประยุกต์ของอนุพันธ์ (Applications of Differentiation)

4.1 Applications of derivatives related to students discipline

จากบทเรียนก่อนหน้านี้ เราทราบว่าถ้าตัวแปร y สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันๆ หนึ่ง ที่ขึ้นกับตัวแปร x นั่นคือ $f(x)$ เราจะสามารถวาดกราฟของ y หรือฟังก์ชัน $f(x)$ ได้ และถ้าเราทราบว่า จุด $P(x_0, y_0)$ และจุด $Q(x_1, y_1)$ ต่างอยู่บนกราฟของ y แสดงว่า $y_0 = f(x_0)$ และ $y_1 = f(x_1)$ นั่นเอง ความชันของเส้นตรงที่ลากผ่านจุด P และจุด Q มักใช้ m เป็นสัญลักษณ์ มีสูตรการหาดังนี้

$$m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

ความชันของเส้นตรงที่กล่าวมาแล้วนี้ มีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $f(x)$ ตั้งแต่ $x = x_0$ จนถึง $x = x_1$ และ

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ ณ $x = x_0$ หรือการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ เทียบกับตัวแปร x เมื่อ x มีค่าเท่ากับ x_0 นั่นเอง

หลัก การ หา อนุพันธ์ สามารถ นำ ไป ประยุกต์ ใช้ได้ ใน หลาก หลาย สาขา วิชาชีพ ไม่ ว่า จะ เป็น ธุรกิจ เศรษฐศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ฟิสิกส์ เคมี หรือแม้กระทั่งชีววิทยา สำหรับบทนี้ ผู้เขียนจะขอกล่าวถึง การนำแนวคิดทางคณิตศาสตร์นี้ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาทางวิทยาศาสตร์ชีวภาพ เพื่อให้สอดคล้องกับความสนใจของผู้เรียน

ตัวอย่าง 4.1. AIDS ย่อมาจาก acquired immunodeficiency syndrome เป็นโรคติดต่อทางเพศสัมพันธ์และการให้เลือด ซึ่งพบการแพร่ระบาดมาตั้งแต่ปี พ.ศ. 2523 โดยผู้ป่วยที่เป็นโรค AIDS จะพบเชื้อไวรัส HIV ใน antibodies ซึ่งไวรัส HIV นี้มีระยะฟักตัวตั้งแต่ไม่กี่เดือน จนกระทั่งนานนับปี นักวิจัยคนหนึ่งนำเชื้อไวรัส HIV มาเพาะเลี้ยงในจานเพาะเชื้อ พบว่า ขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา t , $N(t)$ สอดคล้องกับสมการ $N(t) = 1000 + 20t + t^2$ อยากทราบว่าไวรัสชุดนี้มีอัตราการเปลี่ยนแปลง ณ t ใดๆ เป็นอย่างไร

กำหนดให้ t แทน เวลา $N(t)$ แทน ขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา t จากการทดลองพบว่า ขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา t ใดๆ สอดคล้องกับสมการ

$$N(t) = 1000 + 20t + t^2$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา t ใดๆ คือ

$$\frac{dN}{dt} = 20 + 2t$$

ตัวอย่าง 4.2. จากการสำรวจพบว่า จำนวนผู้ป่วยด้วยโรค AIDS, $P(t)$ มีความสัมพันธ์กับสมการ

$$P(t) = 100t^2 - 2t^3$$

เมื่อ t เป็นเวลาที่ผ่านไปนับจากวันนี้ มีหน่วยเป็นวัน อยากทราบว่าเมื่อ 20 วันผ่านไป จะมีผู้ป่วยด้วยโรคนี้กี่คน และมีอัตราการเพิ่มจำนวนผู้ป่วยเป็นเท่าไหร่

กำหนดให้ t แทน เวลา มีหน่วยเป็นวัน $P(t)$ แทน จำนวนผู้ป่วยด้วยโรค AIDS มีหน่วยเป็นคน จากการสำรวจพบว่า

$$P(t) = 100t^2 - 2t^3$$

เมื่อ 20 วันผ่านไป แสดงว่า $t = 20$ จะได้ว่า $P(20) = 100(20)^2 - 2(20)^3 = 24,000$ ดังนั้น เมื่อ 20 วันผ่านไป จะมีผู้ป่วยโรค AIDS 24,000 คน อัตราการเพิ่มจำนวนผู้ป่วยโรค AIDS ณ เวลา t ใดๆ หาได้ดังนี้

$$\frac{dP}{dt} = 200t - 6t^2$$

ดังนั้น เมื่อ 20 วันผ่านไป อัตราการเพิ่มจำนวนผู้ป่วยจะมีค่าเท่ากับ $200(20) - 6(20)^2$ หรือ $1,600$ คนต่อวัน

ตัวอย่าง 4.3. จากการศึกษาทางสิ่งแวดล้อมระบุว่า $Q(t)$ ระดับ carbon monoxide (CO) เฉลี่ยในอากาศ (หน่วยเป็น ppm) จะมีค่าเป็นเท่าไร

$$Q(t) = 0.05t^2 + 0.1t + 3.4$$

เมื่อ t เป็นเวลาที่นับจากนี้เป็นต้นไป มีหน่วยเป็นปี อยากทราบว่า ระดับ CO เฉลี่ยในอากาศจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร ในอีก 2 ปี ข้างหน้า

กำหนดให้ t เป็นเวลาที่นับจากวันนี้ มีหน่วยเป็นปี $Q(t)$ เป็นระดับ CO เฉลี่ยในอากาศมีหน่วยเป็น ppm จากการศึกษาทางสิ่งแวดล้อมระบุว่า

$$Q(t) = 0.05t^2 + 0.1t + 3.4$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงระดับ CO เฉลี่ยในอากาศ ณ t ใดๆ คือ

$$\frac{dQ}{dt} = 0.1t + 0.1$$

ในอีก 2 ปีข้างหน้า $t = 2$

$$\frac{dQ}{dt} = 0.1(2) + 0.1 = 0.3 > 0$$

ระดับ CO เฉลี่ยในอากาศจะเพิ่มขึ้น (เพราะ $\dfrac{dQ}{dt} > 0$) ด้วยอัตราเร็ว 0.3 ppm ต่อปี

ตัวอย่าง 4.4. Poiseuille's law กล่าวว่า ความเร็วของเลือด (หน่วย คือ เซนติเมตรต่อวินาที) ที่อยู่ห่างจากจุดกึ่งกลางของหลอดเลือด r เซนติเมตร มีสูตรดังนี้ $S(r) = C(R^2 - r^2)$ เมื่อ C เป็นค่าบวกใดๆ และ R เป็นรัศมีของหลอดเลือด อยากทราบว่า ความเร็วของเลือดจะเปลี่ยนแปลงเป็นอย่างไร เมื่อเลือดอยู่บริเวณกึ่งกลางระหว่างจุดกึ่งกลางและผนังของหลอดเลือด

กำหนดให้ r เป็นระยะห่างจากจุดกึ่งกลางของหลอดเลือด (หน่วยเป็นเซนติเมตร) $S(r)$ เป็นความเร็วของเลือด ณ r ใดๆ (หน่วยเป็นเซนติเมตรต่อวินาที) จาก Poiseuille's law

$$S(r) = C(R^2 - r^2)$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วของเลือด ณ r ใดๆ คือ

$$\frac{dS}{dr} = -2Cr$$

เลือดที่อยู่บริเวณกึ่งกลางระหว่างจุดกึ่งกลางและผนังของหลอดเลือดหมายถึง $r = \frac{R}{2}$ ดังนั้น

$$\left.\frac{ds}{dr}\right|_{r=R/2} = -CR < 0 \text{ เพราะว่า } C > 0, R > 0$$

แสดงว่าความเร็วของเลือดจะลดลง (เพราะ $\dfrac{dS}{dr} < 0$) ด้วยอัตรา CR (cm/s)/cm

4.1.1 แบบฝึกหัด

1. ผลการทดลองแสดงให้เห็นว่า ความเข้มข้นของปริมาณ adrenaline ที่ฉีดเข้าไปในร่างกาย, x, มีความสัมพันธ์กับการตอบสนองของกล้ามเนื้อ, y, ด้วยสมการ $y = \frac{x}{a+bx}$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงการตอบสนองของกล้ามเนื้อ เมื่อเทียบกับความเข้มข้นของปริมาณ adrenaline ที่ฉีดเข้าไปในร่างกาย
2. กำหนดให้ $P(t) = \dfrac{1000t}{t+10}$ แสดงถึงขนาดของประชากรแบคทีเรีย เมื่อ t เป็นเวลา จงหาอัตราการเจริญเติบโตของประชากร
3. Schuty - Borisoff laws กล่าวถึง ปริมาณ substrate, y, ที่ถูกเปลี่ยนรูปด้วยเอนไซม์ ในรูปของฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลา t ดังนี้

   $$y = k\sqrt{cat}$$

   เมื่อ k, a, c เป็นค่าคงตัว จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาณ substrate ที่ถูกเปลี่ยนรูปด้วยเอนไซม์ ณ เวลา t ใดๆ

4.2 Sketching the graph of a function from the derivative

ในหัวข้อนี้เราใช้ประโยชน์จากเรื่อง derivative ในการวาดกราฟของฟังก์ชัน เมื่อนึกถึงกราฟของฟังก์ชัน เราสนใจลักษณะที่สำคัญ เช่นช่วงใดที่กราฟเพิ่ม ช่วงใดที่กราฟลด ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของกราฟอยู่ที่ใด กราฟมีลักษณะคว่ำในช่วงใด หรือมีลักษณะหงายในช่วงใด เป็นต้น

แนวคิดแรกคือเรื่องของการเพิ่มและลดของฟังก์ชัน เรามารู้จักนิยามก่อน

นิยาม 4.1. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วง I ให้ x_1 และ x_2 เป็น สมาชิกในช่วง I

- f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง I ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$
- f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง I ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$
- f เป็นฟังก์ชันคงตัวบนช่วง I ก็ต่อเมื่อ สำหรับค่า x_1 และ x_2 ใด ๆ แล้ว $f(x_1) = f(x_2)$

ประโยชน์ของ derivative ที่ใช้ในการตรวจสอบการเพิ่มและลดของฟังก์ชัน มาจาก ทฤษฎีบท :

ทฤษฎี 4.1. *ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหา derivative ได้ บนช่วงเปิด (a, b)*

1. *ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็น ฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a, b]$*
2. *ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็น ฟังก์ชันลดบนช่วง $[a, b]$*
3. *ถ้า $f'(x) = 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็น ฟังก์ชันคงตัวบนช่วง $[a, b]$*

ทฤษฎีบทนี้สามารถขยายผลจากช่วง $[a, b]$ ไปได้ถึงช่วงในรูป $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ และ $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่าง 4.5. พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

เราหา derivative ของฟังก์ชัน ได้ว่า $f'(x) = 2x - 3$ ซึ่งบอกเราว่า

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 \text{ สำหรับ } x < 3/2 \\ f'(x) > 0 \text{ สำหรับ } x > 3/2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 3/2$ เราจึงบอกได้ว่า

$$\begin{aligned} f \text{ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง } (-\infty, 3/2] \\ f \text{ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง } [3/2, \infty) \end{aligned} \tag{4.2}$$

แนวคิดต่อไป เป็นเรื่องของลักษณะหงายหรือคว่ำของกราฟของฟังก์ชัน ถ้ากราฟของฟังก์ชันมีลักษณะหงาย เราเรียกว่าฟังก์ชัน concave up ในขณะที่ถ้ากราฟของฟังก์ชันมีลักษณะคว่ำ เราเรียกว่า ฟังก์ชัน concave down นิยามที่ชัดเจนของ concavity ของฟังก์ชันเป็นดังนี้

นิยาม 4.2. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหา derivative ได้บนช่วงเปิด I

- f concave up บนช่วง I ถ้า f' เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง I
- f concave down บนช่วง I ถ้า f' เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง I

ลักษณะ concavity ของฟังก์ชัน สามารถตรวจสอบโดยใช้ derivative ดังนี้

ทฤษฎี 4.2. *ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหา derivative อันดับสองได้บนช่วง I*

1. *ถ้า $f''(x) > 0$ บนช่วง I แล้ว f concave up บนช่วง I*
2. *ถ้า $f''(x) < 0$ บนช่วง I แล้ว f concave down บนช่วง I*

ตัวอย่าง 4.6. พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ถ้าเราคำนวณ derivative อับดับสอง $f''(x) = 2$ ซึ่งจากทฤษฏีบท เราบอกได้ว่า f concave up บนช่วง $(-\infty, \infty)$

การเปลี่ยนทิศทางของ concavity ของฟังก์ชัน ก็เป็นอีกที่หนึ่งของกราฟของ ฟังก์ชัน ซึ่งมีลักษณะเด่น ที่จุดนี้กราฟอาจมีการเปลี่ยนจากลักษณะหงาย เป็นคว่ำ หรือจากลักษณะคว่ำเป็นหงาย

นิยาม 4.3. ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด I ซึ่งมี x_0 เป็น สมาชิก และ f เปลี่ยนทิศทางของ concavity ที่จุดนี้ แล้วเรากล่าว ว่า f มี inflection point ที่ x_0 และเราเรียก $(x_0, f(x_0))$ ว่า inflection point ของ f

ตัวอย่าง 4.7. ฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ มี

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x$$

สังเกตว่า

- เมื่อ $x < 0,\ f''(x) < 0$
- เมื่อ $x > 0,\ f''(x) > 0$

ดังนั้น ที่จุด $x = 0,\ f$ มีการเปลี่ยนทิศทางของ concavity จาก concave down เมื่อ $x < 0$ เป็น concave up เมื่อ $x > 0$ เพราะฉะนั้น inflection point จึงเป็น $(0, 0)$ สังเกตอีก ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดช่วง $(-\infty, \infty)$

ค่าสูงสุดและต่ำสุดในย่านหนึ่ง ๆ ของกราฟก็เป็นอีกลักษณะเด่น ที่เราสามารถ ตรวจสอบได้โดยใช้ derivative ของฟังก์ชัน

นิยาม 4.4.

1. ฟังก์ชัน f มี relative maximum ที่ x_0 ถ้ามีช่วงเปิดที่มี x_0 เป็นสมาชิก และ $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุก ๆ x ที่เป็น สมาชิกในช่วงเปิดดังกล่าว
2. ฟังก์ชัน f มี relative minimum ที่ x_0 ถ้ามีช่วงเปิดที่มี x_0 เป็นสมาชิก และ $f(x_0) \leq f(x)$ สำหรับทุก ๆ x ที่เป็น สมาชิกในช่วงเปิดดังกล่าว

3. ถ้า f มี relative maximum หรือ relative minimum ที่ x_0 แล้ว เรากล่าวว่า f มี relative extremum ที่ x_0

ฟังก์ชันหนึ่ง ๆ อาจมี relative maximum, relative minimum หลายที่ อาจมีที่เดียว หรืออาจไม่มีเลยก็ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.8.

1. ฟังก์ชัน $f(x) = (x-1)^2$ มี relative minimum ที่ $x = 1$ แต่ไม่มี relative maximum
2. ฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ ไม่มี relative extremum
3. ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ มี relative maximum ที่ $x = 0$ และมี relative minimum ที่ $x = 1$
4. ฟังก์ชัน $f(x) = \sin x$ มี relative maxima ที่ $\pi/2 + 2n\pi$ และมี relative minima ที่ $3\pi/2 + 2n\pi$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม n ใด ๆ

ทฤษฎี 4.3. *ถ้า f มี relative extremum ที่จุด x_0 แล้ว $f'(x_0) = 0$ หรือ f หา derivative ไม่ได้ที่ x_0*

นิยาม 4.5. เราเรียก x_0 ว่า critical point ของฟังก์ชัน f ถ้า $f'(x_0) = 0$ หรือ f หา derivative ไม่ได้ที่ x_0

ตัวอย่าง 4.9. ฟังก์ชัน $f(x) = |x^2 - x|$ มี critical point ที่จุด $x = 0, 1$ และฟังก์ชัน $g(x) = x^2 - x$ ก็มี critical point ที่จุด $x = 0, 1$ เช่นกัน สังเกตว่า ฟังก์ชัน f หา derivative ไม่ได้ที่จุด $x = 0, 1$ ในขณะที่ฟังก์ชัน g หา derivative ได้ ที่จุดดังกล่าว

การตรวจสอบหา relative extremum โดยใช้ derivative เราใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎี 4.4. *ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ critical point x_0 และถ้า ค่าของ f' เปลี่ยนเครื่องหมายที่ x_0 แล้ว f มี relative minimum หรือ relative maximum ที่ x_0*

1. *ถ้า f' มีค่าเป็นลบสำหรับค่าทางซ้ายของ x_0 และมีค่า เป็นบวกสำหรับค่าทางขวาของ x_0 แล้ว f มี relative minimum ที่ x_0*
2. *ถ้า f' มีค่าเป็นบวกสำหรับค่าทางซ้ายของ x_0 และมีค่า เป็นลบสำหรับค่าทางขวาของ x_0 แล้ว f มี relative maximum ที่ x_0*

ตัวอย่าง 4.10. พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = |x^2 - x|$ จงหาค่า x ที่ทำให้ f มี relative extrema

วิธีทำ เรารู้ว่า $x = 0, 1$ เป็น critical point เขียนฟังก์ชัน f ใหม่ว่า

$$f(x) = |x||x-1| = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 0 \\ -x(x-1) & 0 < x \leq 1 \\ x(x-1) & x > 1 \end{cases}$$

นั่นคือ

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & x<0 \\ -2x+1 & 0<x<1 \\ 2x-1 & x>1 \end{cases}$$

ดังนั้นที่จุด x ใกล้ ๆ 0 และ $x<0$ เราพบว่า $f'(x)<0$ ในขณะที่ที่จุด x ใกล้ ๆ 0 และ $x>0$ เราพบว่า $f'(x)>0$ เราจึงสรุปว่า f มี relative minimum ที่ 0 ในทำนองเดียวกัน ที่จุด x ใกล้ ๆ 1 และ $x<1$ เราพบว่า $f'(x)<0$ ในขณะที่ที่จุด x ใกล้ ๆ 1 และ $x>1$ เราพบว่า $f'(x)>0$ เราจึงสรุปได้เช่นกันว่า f มี relative minimum ที่ 1

เมื่อเราพิจารณาฟังก์ชัน แล้วต้องการวาดกราฟของฟังก์ชัน เราคงจำได้ว่า มีข้อมูล บางประการที่เราสามารถตรวจสอบได้ก่อน เช่น x-intercepts y-intercepts ลักษณะ ของกราฟเมื่อ x เข้าใกล้ค่าอนันต์ เป็นต้น ตัวอย่างต่อไปนี้ เราจะใช้ความรู้เหล่านี้ ประกอบกับเรื่องของ derivative ในการวาดกราฟของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 4.11. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$

วิธีทำ

- x-intercepts: ให้ $y=0$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2 &= 0 \\ (x+2)(x^2-2x+1) &= 0 \\ (x+2)(x-1)^2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

  ดังนั้น $x=-2,1$

- y-intercepts: ให้ $x=0$ ได้ว่า $y=2$

- ลักษณะกราฟเมื่อ $x\to\infty$ และ $x\to-\infty$: สังเกตว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}(x^3-2x+2) &= \infty \\ \lim_{x\to-\infty}(x^3-2x+2) &= -\infty \end{aligned} \tag{4.4}$$

- ช่วงการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน เราหา derivative ของ f ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

  ดังนั้น f จึงเป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $x<-1$ เป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $-1<x<1$ และ เป็นฟังก์ชันเพิ่มอีกครั้งเมื่อ $x>1$

- ช่วงการ concave up และ concave down ของฟังก์ชัน f เราหา derivative อันดับ สอง ของฟังก์ชัน f ได้ว่า
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$
ดังนั้น f จึง concave up เมื่อ $x > 0$ และ concave down เมื่อ $x < 0$ ฟังก์ชัน f มี inflection point ที่ 0

จากข้อมูลทั้งหมด เราเขียนกราฟคร่าว ๆ ดังรูปที่

$$Fig : graph1$$

กราฟของฟังก์ชัน f(x) = x3 − 3x + 2

ตัวอย่าง 4.12. ถ้า f เป็นฟังก์ชัน และเรามีข้อมูลที่เกี่ยวกับ f' ดังนี้

1. $f'(x) > 0$ และ f' เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง $(-\infty, -1)$
2. $f'(x) > 0$ และ f' เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $(-1, 1)$
3. $f'(1) = 0$
4. $f'(x) < 0$ และ f' เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $(1, \infty)$

จงวาดกราฟที่เป็นไปได้ของฟังก์ชัน f

วิธีทำ จากข้อมูลที่ได้มา เราสรุปว่า

1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ concave up ในช่วง $(-\infty, -1)$
2. f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ concave down ในช่วง $(-1, 1)$
3. f มี relative maximum ที่ $x = 1$
4. f เป็นฟังก์ชันลด และ concave down ในช่วง $(1, \infty)$

ตัวอย่างกราฟของฟังก์ชัน f เช่นรูป
$$Fig : graph2$$

กราฟของฟังก์ชัน f จากข้อมูลที่กำหนด

ตัวอย่าง 4.13. พิจารณาฟังก์ชัน
$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

วิธีทำ

- x-intercepts: ให้ $y = 0$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+1} &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

- y-intercepts: ให้ $x = 0$ ได้ว่า $y = 0$
- ลักษณะกราฟเมื่อ $x \to \infty$ และ $x \to -\infty$: สังเกตว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} &= 0 \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} &= 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

- ช่วงการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน เราหา derivative ของ f ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

  ดังนั้น f จึงเป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $x < -1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $-1 < x < 1$ และ เป็นฟังก์ชันลดอีกครั้งเมื่อ $x > 1$

- ช่วงการ concave up และ concave down ของฟังก์ชัน f เราหา derivative อันดับ สอง ของฟังก์ชัน f ได้ว่า

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

  ดังนั้น f จึง concave up เมื่อ $x > \sqrt{3}$ หรือเมื่อ $-\sqrt{3} < x < 0$ ในขณะที่ f concave down เมื่อ $x < -\sqrt{3}$ หรือเมื่อ $0 < x < \sqrt{3}$ ฟังก์ชัน f มี inflection point ที่ $0, \pm\sqrt{3}$

จากข้อมูลทั้งหมด เราเขียนกราฟคร่าว ๆ ดังรูป

$$Fig : graph3$$

กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

ตัวอย่าง 4.14. พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \ln(x^3+1)$$

นิยามบนช่วง $(-1, \infty)$ จงวาดกราฟของฟังก์ชันนี้

วิธีทำ

- x-intercepts: ให้ $y = 0$ พบว่า $x = 0$
- y-intercepts: ให้ $x = 0$ พบว่า $y = 0$

- ลักษณะกราฟเมื่อ $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x^3+1) = \infty$$

- ลักษณะกราฟเมื่อ $x \to (-1)^+$:

$$\lim_{x\to(-1)^+} \ln(x^3+1) = -\infty$$

- ช่วงการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน เราหา derivative ของ f ได้ว่า

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3+1} > 0$$

  สำหรับ $x > -1$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดโดเมน

- ช่วงการ concave up และ concave down ของฟังก์ชัน f เราหา derivative อันดับ สอง ของฟังก์ชัน f ได้ว่า

$$f''(x) = \frac{-3x^4+6x}{(x^3+1)^2} = \frac{-3x(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})}{(x^3+1)^2}$$

  ดังนั้น f จึง concave up เมื่อ $0 < x < \sqrt[3]{2}$ และ f concave down เมื่อ $x < 0$ หรือ เมื่อ $x > \sqrt[3]{2}$ ฟังก์ชัน f มี inflection point ที่ $0, \sqrt[3]{2}$ ค่าของ $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$

จากข้อมูลทั้งหมด เราเขียนกราฟคร่าว ๆ ดังรูป

$$Fig : graph4$$

กราฟของฟังก์ชัน f(x) = ln (x3+1) บนช่วง (−1,∞)

ตัวอย่าง 4.15. พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามบนช่วง $(-3, 3)$ และหา derivative อันดับสองได้ ฟังก์ชัน f มีกราฟดังรูป

$$Fig : graph5$$

กราฟของฟังก์ชัน f บนช่วง (−3,3)

ที่จุดใดที่ฟังก์ชัน f' เปลี่ยนเครื่องหมาย และที่จุดใด f' มี relative extrema

วิธีทำ จากรูป ที่จุดซึ่ง f' เปลี่ยนเครื่องหมายคือจุด x ที่ $f'(x) = 0$ ซึ่ง คือ a, c, e และ j ในขณะที่จุดซึ่ง f' มี relative extrema เป็นจุดซึ่ง f'' เปลี่ยนเครื่องหมาย ในที่นี้คือจุดซึ่ง f มี inflection point ซึ่งก็คือ b, d, i และ k

4.2.1 แบบฝึกหัด

1. พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

   2

   1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
   2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$
   3. $f(x) = x^{4/3} - x^{1/3}$
   4. $f(x) = \ln(1 + x^2)$

   ในแต่ละฟังก์ชัน จงหา

   2

   1. x-intercepts และ y-intercepts
   2. ช่วงเปิดซึ่ง f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
   3. ช่วงเปิดซึ่ง f เป็นฟังก์ชันลด
   4. ช่วงเปิดซึ่ง f เป็นฟังก์ชัน concave up
   5. ช่วงเปิดซึ่ง f เป็นฟังก์ชัน concave down
   6. ค่า x ที่ทำให้ f มี inflection point

2. จงหา relative extrema ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   2

   1. $f(x) = x^3 + 5x - 2$
   2. $f(x) = x(x-2)^2$
   3. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$
   4. $f(x) = |x^2 - 1|$

3. จงสเก็ตกราฟของฟังก์ชัน

   2

   1. $f(x) = x^3 - 3x + 3$
   2. $f(x) = -(x+1)x^2(x-1)$
   3. $f(x) = e^{1/x}$

4. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ และ $a < b < c$ จากข้อมูลต่อไปนี้

   1. $f'(a) = f'(b) = 0$

2.

$$f'(x)\begin{cases} > 0 & \text{สำหรับ } x < a \\ > 0 & \text{สำหรับ } a < x < c \\ < 0 & \text{สำหรับ } x > c \end{cases} \tag{4.7}$$

3. $f''(a) = f"'(b) = 0$

4.

$$f''(x)\begin{cases} < 0 & \text{สำหรับ } x < a \\ > 0 & \text{สำหรับ } a < x < b \\ < 0 & \text{สำหรับ } x > b \end{cases} \tag{4.8}$$

5. กำหนดให้ฟังก์ชัน f' เป็นดังรูป

$$Fig : graph6$$

กราฟของฟังก์ชัน f′

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. ช่วงใดที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
2. ฟังก์ชัน f มี relative maximum ที่ใด
3. ช่วงใดที่ f concave up
4. ฟังก์ชัน f มี inflection point ที่ใด

4.3 การประยุกต์ของ Monotonicity และ Concavity

จากที่ได้ศึกษามาแล้ว ถ้า f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วงเปิด (a, b) และ $x_1,\ x_2$ เป็นจุดที่อยู่ภายในช่วงดังกล่าว แล้ว

(1) f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ เมื่อ $x_1 < x_2$ หรือ $f'(x) > 0$ สำหรับทุกค่า x ที่อยู่ในช่วง (a, b)

(2) f เป็นฟังก์ชันลด ถ้า $f(x_2) < f(x_1)$ เมื่อ $x_1 < x_2$ หรือ $f'(x) < 0$ สำหรับทุกค่า x ที่อยู่ในช่วง (a, b) นอกจากนี้แล้ว

(3) f มีลักษณะแบบ concave up ในช่วง (c, d) ถ้า f' เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วงดังกล่าว หรือ $f''(x) > 0$ สำหรับทุกค่า x ที่อยู่ในช่วง (c, d)

(4) f มีลักษณะแบบ concave down ในช่วง (c, d) ถ้า f' เป็นฟังก์ชันลดในช่วงดังกล่าว หรือ $f''(x) < 0$ สำหรับทุกค่า x ที่อยู่ในช่วง (c, d)

ซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาทางวิทยาศาสตร์ชีวภาพ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.16. อัตราการเจริญเติบโตของพืชขึ้นอยู่กับธาตุอาหารที่ได้รับซึ่ง Monod ได้อธิบายไว้ดังสมการ

$$f(R) = \frac{aR}{K+R}, \quad R \geq 0$$

โดยที่ $f(R)$ เป็นอัตราการเจริญเติบโต, R เป็นระดับธาตุอาหาร, a และ K เป็นค่าบวกใดๆ ขึ้นอยู่กับชนิดของพืช อยากทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตของพืชจะเพิ่มขึ้น หรือลดลงเมื่อไหร่

กำหนดให้ R เป็นระดับธาตุอาหาร $f(R)$ เป็นอัตราการเจริญเติบโต เนื่องจาก

$$f(R) = \frac{aR}{K+R}, \quad R \geq 0$$

จะได้

$$f'(R) = \frac{aK}{(K+R)^2} > 0$$

เพราะ $a > 0,\ K > 0$ ดังนั้น อัตราการเจริญเติบโตของพืชจะเพิ่มขึ้นและจะไม่มีวันลดลง

ตัวอย่าง 4.17. จากตัวอย่างที่แล้ว เราทราบว่า อัตราการเจริญเติบโตของพืชเป็นฟังก์ชันเพิ่ม อยากทราบว่าอัตราการเพิ่มของอัตราการเจริญเติบโตของพืชจะเป็นอย่างไร

เนื่องจาก $f(R) = \dfrac{aR}{K+R}, \quad R \geq 0$ จะได้ $f'(R) = \dfrac{aK}{(K+R)^2} > 0$ นั่นคือ อัตราการเจริญเติบโตของพืชเป็นฟังก์ชันเพิ่ม โจทย์อยากทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตของพืชที่เพิ่มขึ้นนี้จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าไร นั่นคือการหาอนุพันธ์ของ $f'(R)$ จะได้ $f''(R) = \dfrac{-2aK}{(K+R)^3} < 0$ หมายความว่า อัตราการเจริญเติบโตของพืชนั้นเพิ่มขึ้น แต่อัตราการเพิ่มขึ้นนั้นจะลดลง ดังรูป 2.7
กราฟของฟังก์ชัน $f(R) = \frac{aR}{K+R}$

ตัวอย่าง 4.18. อัตราการเจริญเติบโตของประชากรสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ logistic

$$f(N) = rN(1 - \frac{N}{K})$$

เมื่อ N เป็นจำนวนประชากร, r และ K เป็นค่าบวก อยากทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตของประชากรจะเพิ่มขึ้น หรือลดลงอย่างไร

โจทย์ต้องการทราบว่า $f(N)$ จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไร นั่นคือ $f'(N) > 0$ หรือ $f'(N) < 0$ เมื่อ N อยู่ในช่วงใด เนื่องจากอนุพันธ์ใช้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงแบบค่อยเป็นค่อยไป ดังนั้น $f'(N)$ จะเปลี่ยนจากค่าลบเป็นค่าบวก ย่อมต้องผ่านค่าศูนย์ก่อน การหาค่า N^* ที่ทำให้ $f(N^*) = 0$ ย่อมเป็นหนทางหนึ่งที่สามารถใช้พิจารณาช่วงที่ทำให้ $f'(N) > 0$ และ $f'(N) < 0$ ได้ จาก $f(N) = rN(1 - \dfrac{N}{K})$ จะได้

$$f'(N) = r - \frac{2rN}{K}$$

ซึ่ง $f'(N) = 0$ เมื่อ $N = \frac{K}{2}$

ถ้า $N > \dfrac{K}{2}$ $f'(N) < 0$ และถ้า $N < \dfrac{K}{2}$ $f'(N) > 0$ ดังนั้น อัตราการเจริญเติบโตของประชากรจะเพิ่มขึ้น เมื่อ $N < \dfrac{K}{2}$ และจะลดลง เมื่อ $N > \dfrac{K}{2}$ แสดงว่าประชากรยิ่งหนาแน่น อัตราการเพิ่มของประชากรก็จะยิ่งลดลง

4.3.1 แบบฝึกหัด

1. จากตัวอย่างที่ 9 จงวาดกราฟของ $f(N)$ และระบุช่วงที่ทำให้ f มีลักษณะแบบ concave up และแบบ concave down
2. ค่า pH ของสารละลายสัมพันธ์กับความเข้มข้นของไฮโดรเจนอิออน, H^+, ดังนี้

$$pH = -log(H^+)$$

   จงพิจารณาว่าค่า pH ของสารละลายจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไร

4.4 การหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization)

การหาค่าเหมาะที่สุด คือปัญหาที่ต้องการทราบค่าสูงสุด (absolute maximum) และค่าต่ำสุด (absolute minimum) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.19. ผลผลิตของพืชผักสัมพันธ์กับปริมาณไนโตรเจนดังสมการ $Y(N) = \dfrac{N}{1+N^2}$ เมื่อ $Y(N)$ เป็นผลผลิตของพืชผัก และ N เป็นปริมาณไนโตรเจน $(N \geq 0)$ จงหาปริมาณไนโตรเจนที่ทำให้ได้ผลผลิตของพืชผักมากที่สุด

กำหนดให้ N เป็นปริมาณไนโตรเจน $Y(N)$ เป็นผลผลิตของพืชผัก จากความสัมพันธ์

$$Y(N) = \frac{N}{1+N^2}$$

หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการ

$$Y'(N) = \frac{(1+N^2) - N(2N)}{(1+N^2)^2} = \frac{1-N^2}{(1+N^2)^2}$$

กำหนดให้ $Y'(N) = 0$ เพื่อหา relative extrema $Y'(N) = 0$ เมื่อ $1 - N^2 = 0$ ดังนั้น $N = \pm 1$

เราจะพิจารณา N ในช่วง $N \geq 0$ ดังนั้น $N = -1$ จึงอยู่นอกโดเมน จุดที่สนใจจึงเหลือเพียง $N = 1$ โดยพิจารณาเครื่องหมายของ $Y'(N)$ เราจะได้ว่า

$$Y'(N) > 0 \text{ เมื่อ } -1 < N < 1 \quad Y'(N) < 0 \text{ เมื่อ } N > 1$$

เนื่องจาก $Y(N)$ เปลี่ยนจากฟังก์ชันเพิ่ม เป็นฟังก์ชันลด ที่ $N = 1$ ดังนั้น ที่ $N = 1$ เกิดจากจุดสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) โดย $Y(1) = \frac{1}{2}$

เนื่องจากเราสนใจ absolute maximum จึงต้องตรวจสอบจุดปลายของโดเมน ($N \geq 0$ หรือ $N \in [0, \infty)$) นั่นคือ $N = 0$ และ $N \to \infty$ ด้วย ว่าทำให้ Y มีค่ามากกว่า $Y(1) = \frac{1}{2}$ หรือไม่

$$Y(0) = 0, \qquad \lim_{N\to\infty} Y(N) = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{1+N^2} = 0$$

ดังนั้นที่ $N = 1$ จะเกิดจุดสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) ซึ่งเป็นปริมาณไนโตรเจนที่ทำให้พืชผักมีผลผลิตมากที่สุด คือ $Y(1) = \frac{1}{2}$ (ดูกราฟ 2.8)

ตัวอย่าง 4.20. เรือบรรทุกน้ำมันของบริษัทแห่งหนึ่งอับปางลงบริเวณอ่าวไทย ทำให้น้ำมันไหลรั่วซึมลงสู่ทะเล กระทบต่อระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ และสิ่งมีชีวิตที่อาศัยอยู่ในบริเวณดังกล่าว สมมติว่าระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ หลังเหตุการณ์เรือล่ม มีการเปลี่ยนแปลงดังสมการ

$$P(t) = 500[1 - \frac{4}{t+4} + \frac{16}{(t+4)^2}]$$

เมื่อ $P(t)$ เป็นระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ หลังเหตุการณ์เรือล่มผ่านพ้นไป t เดือน อยากทราบว่าเมื่อไหร่ออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำบริเวณดังกล่าวจะอยู่ในระดับที่ต่ำที่สุด

กำหนดให้ t เป็นเวลาหลังเหตุการณ์เรือล่ม $P(t)$ เป็นระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ บริเวณที่เกิดเหตุ จาก $P(t) = 500[1 - \frac{4}{t+4} + \frac{16}{(t+4)^2}]$ หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการ

$$\begin{aligned} P'(t) &= \frac{2000}{(t+4)^2} - \frac{16000}{(t+4)^3} \\ &= \frac{2000(t+4) - 16000}{(t+4)^3} \\ &= \frac{2000t - 8000}{(t+4)^3} \end{aligned} \tag{4.9}$$

กำหนดให้ $P'(t) = \dfrac{2000t - 8000}{(t+4)^3} = 0$ จะได้ $t = 4$ เครื่องหมายของ $P'(t) > 0$ เมื่อ $t > 4$ และ $P'(t)0$ เมื่อ $t < 4$ ดังนั้น $P(t)$ เปลี่ยนจากฟังก์ชันลดเป็นฟังก์ชันเพิ่มที่ $t = 4$ ดังนั้น ที่ $t = 4$ เกิดจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) โดย $P(4) = 375$

เนื่องจากเราสนใจ absolute minimum จึงต้องตรวจสอบค่า $P(t)$ ที่จุดปลายของโดเมน t ด้วย นั่นคือ $t = 0$ และ $t \to \infty$ $P(0) = 500$ และ $\lim_{t\to\infty} P(t) = 500$ ดังนั้น ที่ $t = 4$ เกิดจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum) ระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ บริเวณดังกล่าวต่ำสุด หลังเหตุการณ์เรืออับปางผ่านพ้นไป 4 เดือน

ตัวอย่าง 4.21. นักชีววิทยาต้องการออกแบบพื้นที่ทดลองให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เขามีรั้วยาว 1600 ฟุต เขาจะใช้รั้วนี้อย่างไร จึงจะทำให้ได้พื้นที่ทดลองที่กว้างใหญ่ที่สุด

กำหนดให้

x เป็นความกว้างของพื้นที่ทดลอง
y เป็นความยาวของพื้นที่ทดลอง
A เป็นพื้นที่ของพื้นที่ทดลอง
P เป็นความยาวรอบรูปของพื้นที่ทดลอง

เนื่องจาก $A = xy$ และ $P = 2x + 2y$ จากโจทย์ $P = 2x + 2y = 1600$ ดังนั้น $x + y = 800$ หรือ $y = 800 - x$ แทน y ลงใน $A = xy$ จะได้

$$\begin{aligned} A(x) &= x(800 - x), \quad 0 \leq x \leq 800 \\ &= 800x - x^2 \end{aligned} \tag{4.10}$$

โจทย์ต้องการหาพื้นที่กว้างใหญ่ที่สุด เราจึงต้องหาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้าง

$$A'(x) = 800 - 2x$$

กำหนดให้ $A'(x) = 800 - 2x = 0$ จะได้ $x = 400$ และ $A(400) = 1600$ ตามลำดับ ทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง $A''(x) = -2 < 0$ พบว่า $x = 400$ ทำให้เกิดจุดสูงสุดสัมบูรณ์ เพราะ $A(x)$ มีลักษณะแบบ concave down ดังนั้นนักชีววิทยาควรกั้นรั้วเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกว้าง 400 ฟุต จึงจะได้พื้นที่ทดลองที่กว้างใหญ่ที่สุด

1. วาดภาพและกำหนดตัวแปรต่างๆ เช่น x, y เป็นต้น
2. หาสูตรหรือสมการของปริมาณที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด
3. ใช้เงื่อนไขที่โจทย์ระบุให้ในการตัดทอนตัวแปร เพื่อทำให้สมการในขั้นตอนที่ 2 อยู่ในรูปฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรเพียงตัวเดียว
4. หาช่วงที่เป็นไปได้ของตัวแปร โดยให้สอดคล้องกับความหมายของโจทย์
5. ใช้เทคนิคการหาค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ ไม่ว่าจะเป็นทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง หรือทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับสอง
6. ตรวจสอบจุดปลายของโดเมนของตัวแปร เพื่อยืนยันการเกิดค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมบูรณ์

4.4.1 แบบฝึกหัด

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงของการสังเคราะห์แสงขึ้นกับความเข้มของแสง x, ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $R(x) = 270x - 90x^2$ จงหาความเข้มของแสง ที่ทำให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของการสังเคราะห์แสงมากที่สุด
2. การตอบสนองต่อยาชนิดหนึ่งขึ้นกับปริมาณของยา, x, ดังสมการ $S = 1000x - x^2$ จงหาปริมาณยาที่ทำให้มีการตอบสนองต่อยาชนิดนี้มากที่สุด

3. นักวิจัยพบว่าขณะไอ ปริมาณอากาศที่ไหลผ่านทางหลอดลมสัมพันธ์กับสมการ $F = SA$ เมื่อ S คือความเร็วของอากาศ และ A คือพื้นที่ตัดขวางของหลอดลม ดังรูป 2.9 ถ้าความเร็วของอากาศมีสูตรเป็น $S = c - r$ โดย r คือรัศมีของหลอดลมขณะไอ และ c คือรัศมีของหลอดลมในสภาวะปกติ จงหารัศมีที่ทำให้ปริมาณอากาศที่ไหลผ่านหลอดลมมีมากที่สุด ขณะที่ไอ

4. เภสัชกรต้องการสร้างกล่องไร้ฝาอย่างง่ายเพื่อขนย้ายยา เขามีกระดาษแข็งกว้าง 16 นิ้ว ยาว 30 นิ้ว เขาตั้งใจจะตัดมุมของกระดาษแข็งทั้ง 4 ออก ตามรูป 2.10 แล้วทำการพับตามรอยปะและเชื่อมรอยต่อด้วยเทปกาว จงหาความยาว x ที่ตัดตามมุม เพื่อให้ได้กล่องที่มีปริมาตรมากที่สุด

5. คราวนี้นักชีววิทยาคนเดิม ต้องการพื้นที่ทดลองแบบสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 320 ตารางเมตร ด้านที่ขนานกันคู่หนึ่งใช้รั้วราคา 100 บาทต่อเมตร ส่วนด้านคู่ที่เหลือใช้รั้วราคา 200 บาทต่อเมตร จงหาความกว้างและความยาวของพื้นที่ทดลองแห่งนี้ เมื่อใช้งบประมาณน้อยที่สุด

การไหลเวียนของอากาศในหลอดลม

กล่องไร้ฝาสำหรับขนย้ายยา

4.5 รูปแบบไม่กำหนด (Indeterminate form) และกฎของโลปิตาล (L'Hopital Rule)

นิยาม 4.6. ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ เราจะกล่าวว่า $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$ อาจแทน $x \to a$ ด้วย $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$

ในการหาค่าลิมิตของรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\dfrac{0}{0}$ นั้น เราจะนำกฎของโลปิตาลมาประยุกต์ใช้

ทฤษฎี 4.5. *(กฎของโลปิตาล)*

1. *ถ้า* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *และ* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *แล้ว* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *จะอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด* $\dfrac{0}{0}$ *และได้ว่า* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

2. *ถ้า* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *และ* $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ *แล้ว* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *จะอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด* $\dfrac{\infty}{\infty}$ *และได้ว่า* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

ตัวอย่าง 4.22. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{(2\sqrt{x-1})(2x)}=\frac{1}{40}$$

กฎของโลปิตาลยังคงเป็นจริงในกรณีที่ $x\to a^+$, $x\to a^-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$

ตัวอย่าง 4.23. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1/2\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

กฎของโลปิตาลใช้กับลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$ หรือ $\dfrac{\infty}{\infty}$ เท่านั้น หากลิมิตไม่ได้อยู่ในรูปแบบดังกล่าว เราจะต้องจัดให้อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$ หรือ $\dfrac{\infty}{\infty}$ เสียก่อนแล้วจึงนำกฎของโลปิตาลมาใช้

4.5.1 การหาลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $0\cdot\infty$ หรือ $\infty-\infty$

การหาลิมิตในรูปแบบไม่กำหนด $0\cdot\infty$ หรือ $\infty-\infty$ สามารถทำได้โดยจัดให้ลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$ หรือ $\dfrac{\infty}{\infty}$ ก่อนแล้วจึงนำกฎของโลปิตาลมาใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.24. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{1/x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

ตัวอย่าง 4.25. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x})$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x})=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{(\frac{1}{x}-1)}{(\frac{x-1}{x})+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x-1+x\ln x}$$

ซึ่งยังอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x-1+x\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{1+1+\ln x}=\frac{-1}{2}$$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x})=-\frac{1}{2}$

4.5.2 การหาลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $0^0, 1^\infty, \infty^0$

ในการหาค่าลิมิตทั้ง 3 แบบนี้ เราสามารถจัดให้ลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ โดยอาศัยฟังก์ชันลอการิทึมเข้าช่วย แล้วจึงนำกฎของโลปิตาลมาใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.26. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0^+} x^x$

วิธีทำ ให้ $y=x^x$ ดังนั้น $\ln y=x\ln x$

$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0^+}\ln y=0$

เพราะว่า $\lim_{x\to 0^+}\ln y=\ln(\lim_{x\to 0^+}y)$ ดังนั้น $\ln(\lim_{x\to 0^+}y)=0$

นั่นคือ $\lim_{x\to 0^+}y=e^0=1$

หรือ $\lim_{x\to 0^+}x^x=1$

ตัวอย่าง 4.27. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 1}x^{1/(x-1)}$

วิธีทำ ให้ $y=x^{1/(x-1)}$ ดังนั้น $\ln y=\frac{\ln x}{x-1}$

และ $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 1}\ln y=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}=1$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1}\ln y=1$

เพราะว่า $\lim_{x\to 1}\ln y=\ln(\lim_{x\to 1}y)$ ดังนั้น $\ln(\lim_{x\to 1}y)=1$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to 1} y = e^1 = e$

หรือ $\lim\limits_{x \to 1} x^{1/(x-1)} = e$

ตัวอย่าง 4.28. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x}$

วิธีทำ ให้ $y = x^{1/x}$ ดังนั้น $\ln y = \dfrac{\ln x}{x}$

และ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \ln y = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to \infty} \ln y = 0$

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to \infty} \ln y = \ln(\lim\limits_{x \to \infty} y)$ ดังนั้น $\ln(\lim\limits_{x \to \infty} y) = 0$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to \infty} y = e^0 = 1$

หรือ $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x} = 1$