SCMA104 Systems of Ordinary Differential Equations and Applications in Medical Science

Pairote Satiracoo

2024-08-18

Contents

หลักการและความสำคัญของแคลคูลัส และระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

แคลคูลัสมีส่วนประกอบหลักที่สำคัญอยู่ 2 องค์ประกอบ คือ

1. การหาอนุพันธ์ (differentiation) และ
2. การหาปริพันธ์ (Integration)

การ ประยุกต์ เรื่อง การ หา อนุพันธ์ใน การ แก้ ปัญหา เบื้อง ต้น ที่ สำคัญ ใน ทาง ชีววิทยา หรือ ทางการ แพทย์ ประกอบด้วย การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณของตัวแปรที่เราสนใจ และการใช้แคลคูลัสในการแก้ปัญหาการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของปัญหาหรือฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เราสนใจ

ตัวอย่างการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่สนใจ เช่น ขนาดของประชากร จำนวนของผู้ติดเชื้อจากโรคทางเดินหายใจ ระดับน้ำตาลในกระแสเลือด ปริมาณของยาที่มีอยู่ในกระแสเลือกหรือส่วนหนึ่งของร่างกาย โดยที่การเปลี่ยนแปลงดังกล่าวสามารถเปรียบเทียบได้กับเวลา ดังต่อไปนี้

- ประชากรในประเทศไทยปี พ.ศ. 2566 มีจำนวน 66.05 ล้านคน (ข้อมูลอ้างอิงจาก สำนักงานคณะกรรมการส่งเสริมการลงทุน)

- ข้อมูลจำนวนผู้รักษาตัวในโรงพยาบาลจากศูนย์ข้อมูล COVID-19 ระหว่างวันที่ 28 กรกฎาคม ถึงวันที่ 3 สิงหาคม พ.ศ. 2567 (ข้อมูลอ้างอิงจาก ศูนย์ข้อมูล Covid-19)

- การเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำตาลในเลือดระหว่างมืออาหารสามมือในหนึ่งวัน (รูปภาพอ้างอิงจาก Wikipedia: Blood Sugar Level)

- การเปลี่ยนแปลงของปริมาณยาในกระแสเลือดที่เวลาต่างๆ สำหรับการให้ยาโดยวิธีต่างๆ (รูปภาพอ้างอิงจาก บทความทางวิชาการในฐานข้อมูล MDPI)

ในการทำความเข้าใจการเปลี่ยนแปลงของปริมาณข้างต้นเทียบกับเวลา เราสามารถประยุกต์ใช้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อมาใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงของปริมาณต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการอธิบายปัญหาหรือ ปรากฏการต่างๆ ที่เกิด

Figure 1: ข้อมูลจำนวนผู้รักษาตัวในโรงพยาบาลจากศูนย์ข้อมูล COVID-19

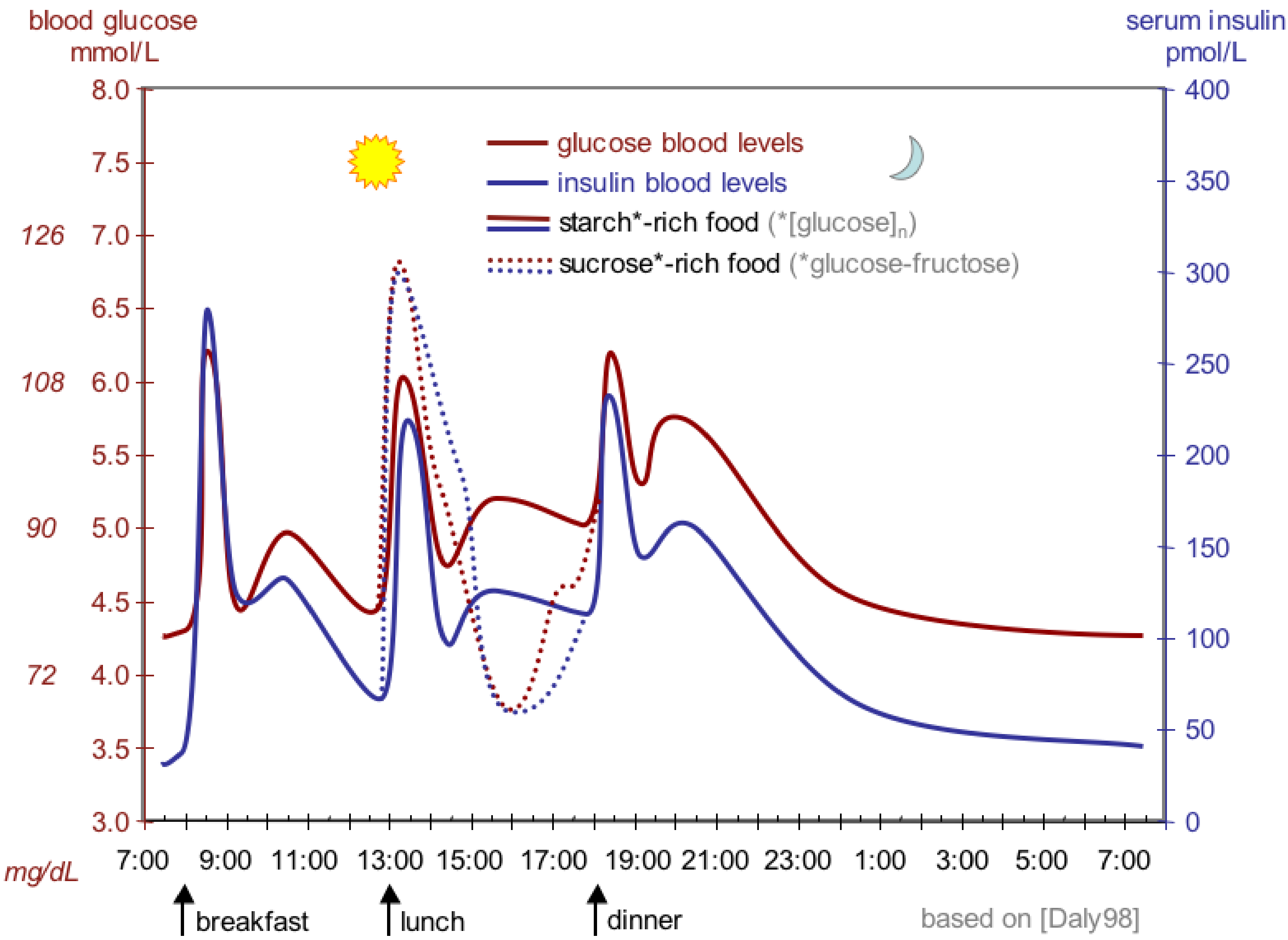

Figure 2: ความผันผวนของระดับน้ำตาลในเลือด (สีแดง) และฮอร์โมนอินซูลิน (สีน้ำเงิน) ในมนุษย์ระหว่างมื้ออาหารสามมื้อ

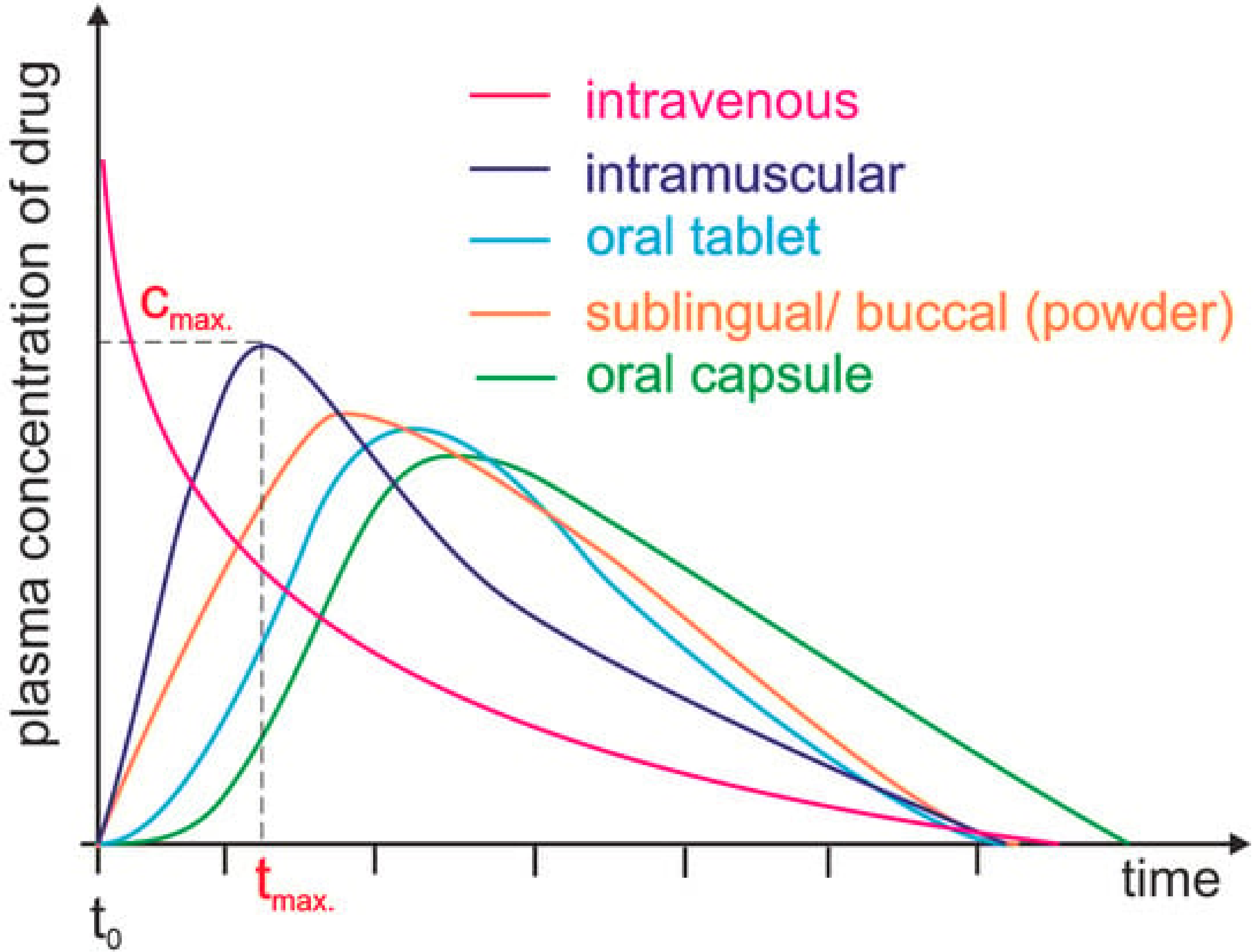

Figure 3: ความเข้มข้นของยาในกระแสเลือดที่เวลาต่างๆ

ขึ้นในธรรมชาติ โดยปกติแล้วจะอยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้จะช่วยให้อธิบายสิ่งต่างๆ ที่เกิดขึ้นในปัญหาหรือปรากฏที่สนใจ

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงถึงแนวคิดในการประยุกต์ของแคลคูลัสที่เกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของ

ในการทดลองหนึ่ง นักวิจัยต้องการศึกษาการขยายพันธ์ของแบคทีเรียที่มีการการแบ่งตัวที่เรียกว่า binary fission (การแบ่งตัวแบบทวิภาค) ซึ่งแบคทีเรียจะมีการแบ่งจากหนึ่งเป็นสองเซลเท่าๆ กัน และได้ผลการทำลองดังต่อไปนี้

(รูปอ้างอิงจาก BYJU’s Learning Website)

Table 1: จำนวนของแบคทีเรียที่เวลา t ใดๆ

เวลา (10 นาที)	0	1	2	3	4	5	6
จำนวนแบคทีเรีย	1	2	4	8	16	32	64

ตาราง @ref(tab:bacteria-table) และรูปที่ @ref(fig:population-plot) แสดงการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียที่เวลาใดๆ ในตัวอย่างนี้การเปลี่ยนแปลงของจำนวนของแบคทีเรียที่เวลา t สามารถ

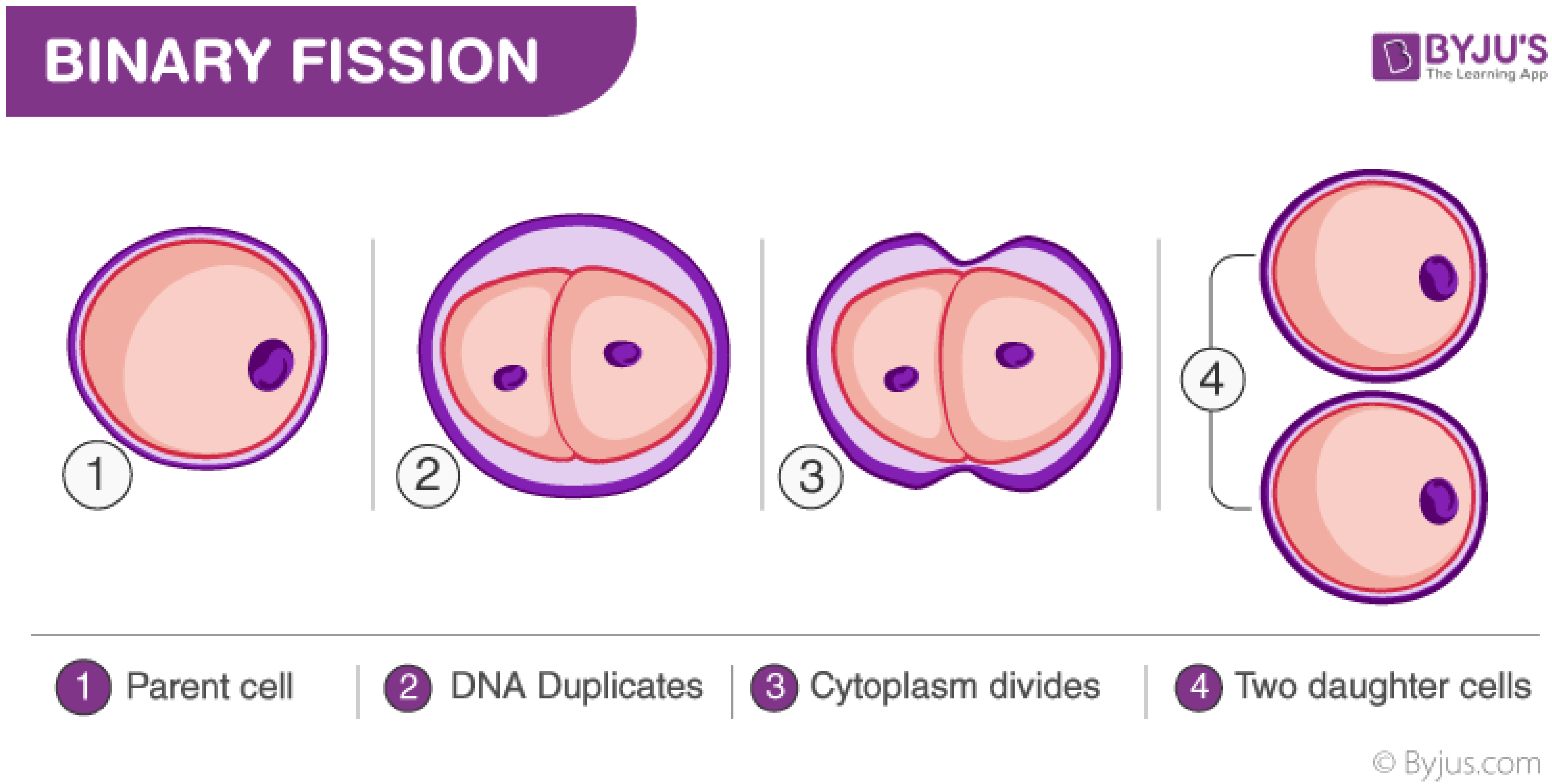

Figure 4: กระบวนการแบ่งตัวแบบทวิภาคของแบคทีเรีย

เขียนในรูปฟังก์ชัน $N(t)$ ถ้าให้ N_0 แทนจำนวนของแบคทีเรียตอนเริ่มการทดลอง แล้วแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการเพิ่มของจำนวนแบคทีเรียจะสามารถเขียนในรูปของสมการ

$$N(t) = N_0 \cdot 2^t, \quad t = 0, 1, 2, ... (\#eq : population - growth) \tag{1}$$

ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้การเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียที่เวลา t ใดๆ เพิ่มขึ้นในลักษณะที่เรียกว่า เอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Population Growth)

ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ในตัวอย่างของการขยายพันธ์แบคทีเรีย หรือในปัญหาอื่นๆ แทนที่เราจะพยายามหาความสัมพันธ์ หรือฟังก์ชัน $N(t)$ ในรูปของเวลา t โดยตรง ถ้าเราทราบกระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร $N(t)$ นั้น เราสามารถนำมาใช้ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ได้ดังต่อนี้ กระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรีย (การเพิ่มหรือลดลงของแบคทีเรีย) ที่เกิดขึ้นในระหว่างเวลา t และเวลา $t + h$ เกิดจากจำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้น (เกิดขึ้นมาใหม่) ในช่วงเวลาดังกล่าว และลดลงจากจำนวนแบคทีเรียที่ลดลง (ตายไป) ในช่วงเวลาดังกล่าวเช่นกัน ซึ่งเราสามารถเขียนในรูปของสมการได้ดังต่อไปนี้

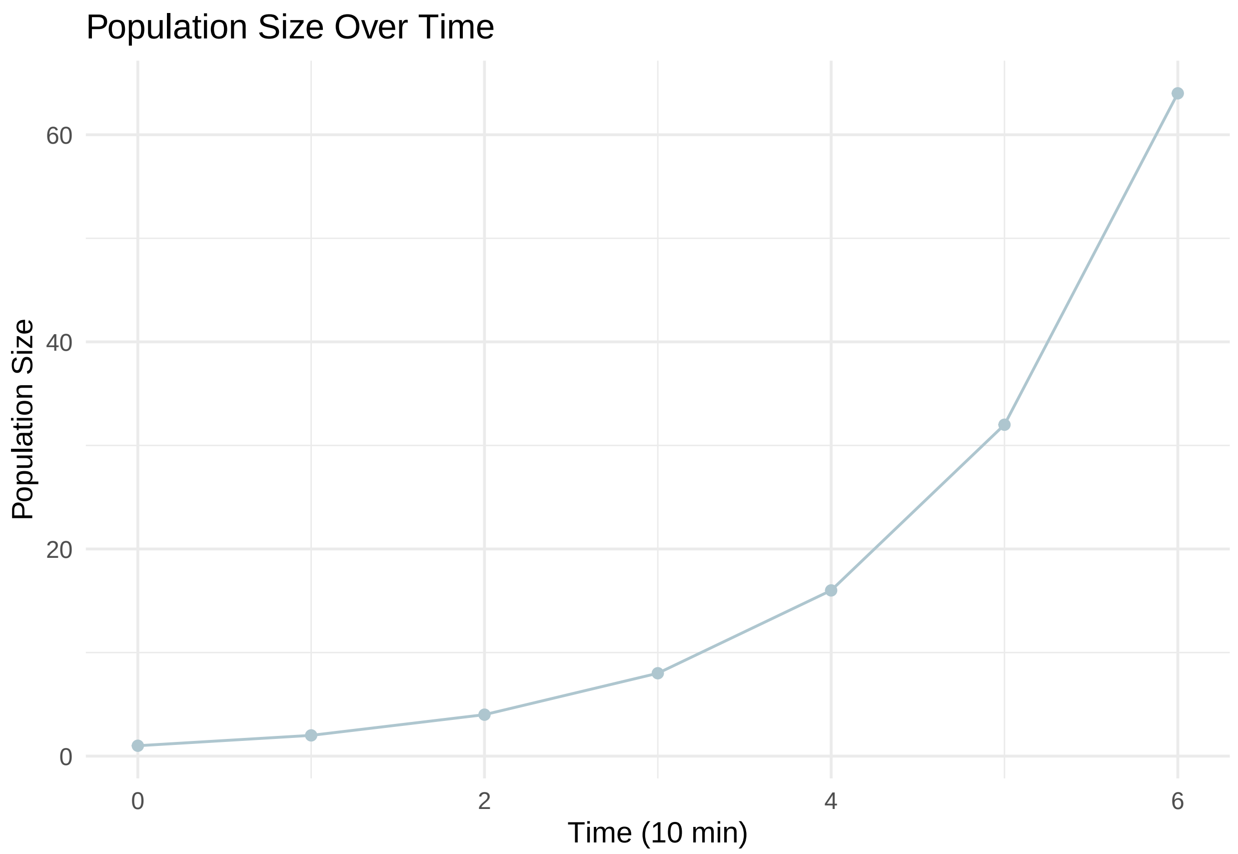

Figure 5: Population Size Over Time

$$N(t+h) = N(t) \tag{2}$$

$$+ \text{ จำนวนแบคทีเรียที่เกิดขึ้นใหม่ระหว่าง } t \text{ และ } t+h \tag{3}$$

$$- \text{ จำนวนแบคทีเรียที่ตายไประหว่าง } t \text{ และ } t+h(\#eq : population - growth - 2) \tag{4}$$

ในที่นี้ “**การเกิด**” เราหมายถึงการเพิ่มจำนวนของแบคทีเรียจากหนึ่งเป็นสอง และเราจะกำหนดให้ h เป็นช่วงเวลาสั้นๆ (ซึ่งเราสามารถใช้ความรู้แคลคูลัสในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation)) ในสมการ @ref(eq:population-growth-2) ถ้าเราสมมติว่า การเพิ่มของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่ในขณะนั้น หรือเขียนในรูปของสมการได้ดังนี้

$$\text{จำนวนแบคทีเรียที่เกิดใหม่ระหว่าง } t \text{ และ } t+h \approx b \cdot N \cdot h$$

$$\text{จำนวนแบคทีเรียที่ตายไประหว่าง } t \text{ และ } t+h \approx m \cdot N \cdot h$$

โดยที่ค่าคงตัว b และ m ในสมการข้างต้น คือ อัตราการเกิด (birth rate) และอัตราการตาย (mortality rate)

เมื่อแทนจำนวนแบคทีเรียที่เกิดใหม่ และตายไประหว่างช่วงเวลาที่กำหนดลงในสมการ @ref(eq:population-growth-2) จะได้สมการ

$$N(t+h) - N(t) = b \cdot N(t) \cdot h - m \cdot N(t) \cdot h(\#eq: population - growth - 3) \quad (5)$$

เรา สามารถ จัด รูป สมการ @ref(eq:population-growth-3) ได้ใหม่ ใน รูป ของ**อัตรา การ เปลี่ยนแปลง เฉลี่ย**ของจำนวนแบคทีเรียในช่วงเวลาดังกล่าว ดังนี้

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \quad (6)$$

$$(\#eq: population - growth - 4) \quad (7)$$

ดังนั้น ถ้าเราให้ h เข้าใกล้ 0 ผ่านการหาค่าลิมิต เราจะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง (instantaneous rate of change) และเขียนได้ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ ดังนี้

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \tag{8}$$

$$(\#eq : population - growth - 5) \tag{9}$$

ทั้งนี้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ @ref(eq:population-growth-5) เพื่อให้ได้คำตอบที่แสดงจำนวนแบคทีเรีย $N(t)$ ในรูปของฟังก์ชันของ t เราจะต้องกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องกับจำนวนแบคทีเรีย $N(t)$ ที่เวลา t หนึ่ง โดยทั่วไปเราจะกำหนดค่าเริ่มต้นของจำนวนแบคทีเรียที่ $t = 0$ ดังนั้น ถ้าเรากำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition)

$$N(0) = N_0 (\#eq : population - growth - 6) \tag{10}$$

เราสามารถหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นโดยวิธีการหาปริพันธ์ (Integration) ได้คำตอบของสมการดังนี้

$$N(t) = N_0 e^{(b-m)t} (\#eq : population - growth - 7) \tag{11}$$

ในการทดลองเลี้ยงยีสต์ในขวดทดลองที่มีอาหารเลี้ยงยีสต์ในปริมาณที่เหมาะสม ผู้ทำการทดลองสนใจที่ จะ ประมาณ ค่า ของ ยีสต์ โดย อาศัย แบบ จำลอง การ เปลี่ยนแปลง ของ ประชากร ที่ อธิบาย ด้วย สมการ @ref(eq:population-growth-7) กำหนดให้

- ภายใต้สภาวะของการทดลองที่เหมาะสม ยีสต์จะแบ่งตัวทุกๆ 90 นาที
- ยีสต์มีครึ่งชีวิตเท่ากับ 1 สัปดาห์

จากข้อมูลดังกล่าว จงแสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบจากคำถามต่อไปนี้

1. จงประมาณค่าของอัตราการเกิด b (1/ชั่วโมง) และอัตราการตาย m (1/ชั่วโมง)
2. เขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้ค่า b และ m ที่ประมาณค่าได้ (สมการ @ref(eq:population-growth-7))
3. ใช้เครื่องมือที่นักศึกษามีอยู่ในการวาดกราฟแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนยีสต์ที่เวลาต่างๆ
4. เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับรูปภาพแสดงการเปลี่ยนแปลงของยีสต์จากการทดลองในห้องปฏิการ ตามรูปที่ @ref(fig:fig-yeast-cells) (รูปภาพอ้างอิงจาก https://homework.study.com/)

จงใช้อินเทอร์เน็ตเพื่อค้นหาตัวอย่างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายโดยสมการเชิงอนุพันธ์หรือระบบ

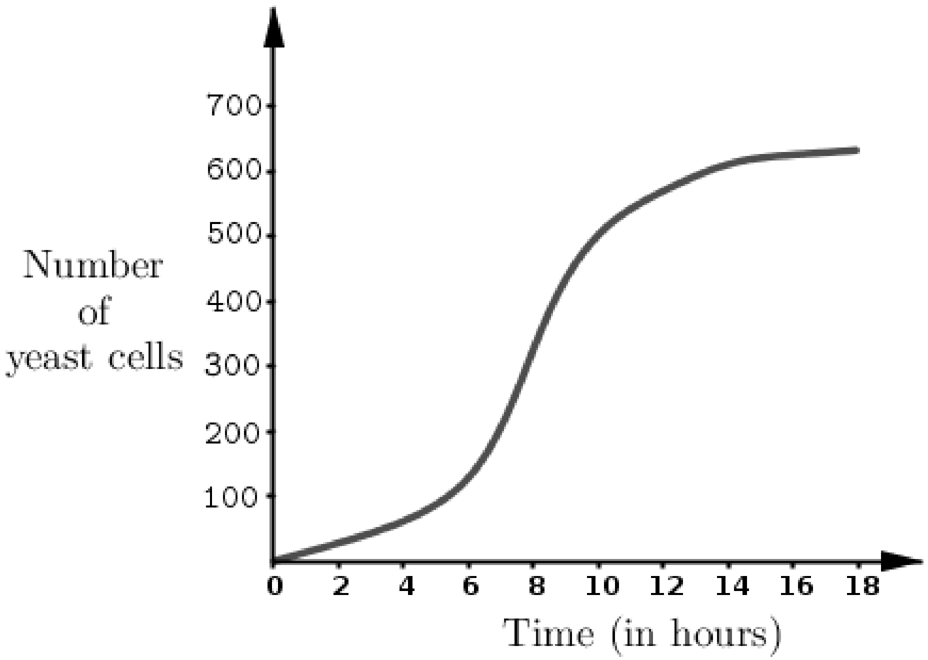

Figure 6: กราฟการเจริญเติบโตของเซลล์ยีสต์

สมการเชิงอนุพันธ์ ข้อมูลที่ต้องการประกอบด้วย

1. ค้นหาหน้าเว็บที่ให้ข้อมูลเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในปัญหาที่นักศึกษาสนใจ
2. จดบันทึก URL ของหน้าเว็บ
3. เขียนสรุปสั้นๆ ว่าโมเดลนี้ใช้เพื่ออะไร

โดยสรุป แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์เป็นเครื่องมือสำคัญในการทำความเข้าใจว่าสิ่งต่างๆ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไรและ แคลคูลัสช่วยให้เราวิเคราะห์อัตราการเปลี่ยนแปลงและพื้นที่ใต้เส้นโค้ง ในขณะที่สมการเชิงอนุพันธ์ช่วยให้เราสร้างแบบจำลองระบบที่ซับซ้อนในสาขาต่างๆ เช่น ฟิสิกส์ วิศวกรรม เศรษฐศาสตร์ และชีววิทยา แนวคิดทางคณิตศาสตร์เหล่านี้มีความสำคัญต่อการแก้ปัญหาในโลกแห่งความเป็นจริง เมื่อโลกของเราก้าวหน้ามากขึ้น ความสำคัญของแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ก็จะเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง ซึ่งสนับสนุนความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ลิมิต (Limits)

อาจกล่าวได้ว่า วิชาแคลคูลัส ถือกำเนิดขึ้นมาจากความพยายามในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตบนระนาบ 2 ปัญหาหลักๆ คือ

- การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งที่กำหนดให้

  กำหนดฟังก์ชัน (function) f และกำหนดจุด $P(x_0, y_0)$ บนกราฟ $y = f(x)$ จงหาสมการของเส้นตรงที่สัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด P

- การหาพื้นที่ของบริเวณที่กำหนดให้

  กำหนด function f และช่วง $[a, b]$ ในโดเมนของ f จงหาพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมด้วยแกน X และกราฟ $y = f(x)$ สำหรับ $x \in [a, b]$

แนวความคิดในการแก้ปัญหาทั้งสอง นำไปสู่การศึกษาเรื่อง ลิมิต (Limits) ซึ่งเป็นพื้นฐานของวิชาแคลคูลัส นั่นเอง

แต่ในปัจจุบันเราพบว่าวิชาแคลคูลัสมีประโยชน์ในการช่วยแก้ปัญหาในสาขาวิชาต่าง ๆ มากมาย เช่น เราจะพบในการศึกษาวิชานี้ว่า แคลคูลัสมีบทบาทในการแก้ปัญหาต่อไปนี้

- โดยทั่วไป ยาชนิดฉีดจะต้องใช้เวลาระยะหนึ่งหลังจากฉีดเข้าสู่ร่างกาย ในการที่จะไหลเวียนในกระแสโลหิต จนกระทั่งมีความเข้มข้นสูงสุด สมมุติว่า ยาฉีดชนิดหนึ่งหลังจากฉีดเข้าสู่ร่างกายนาน t ชั่วโมง จะมีความเข้มข้นเป็น $C(t) = 0.15(e^{-0.18t} - e^{-1.2t})$ มิลลิกรัมต่อมิลลิลิตร จงหาว่า นานเท่าใดหลังจากฉีดยา จึงจะมีความเข้มข้นของยา ในกระแสโลหิตสูงที่สุด

- เราอาจประมาณได้อย่างมีเหตุผลว่า artery มีรูปร่างที่เป็นผลมาจากการหมุนรอบแกน ของเส้นโค้งในระนาบ โดยในสภาวะนิ่ง รัศมีของ artery มีค่าคงที่เท่ากับ 1 หน่วย (รูปทรงกระบอก) แต่ในขณะที่หัวใจสูบฉีดโลหิตผ่าน artery artery จะพองตัวออก ทำให้รัศมีเปลี่ยนไปตามสมการ $R(x) = 1 + 0.4x - 0.04x^2$ หน่วย เมื่อ $0 \leq x \leq 10$ เป็นตำแหน่งบนแนวยาวของ artery จงหาว่าปริมาณโลหิตที่อยู่ใน artery ขณะที่หัวใจสูบฉีดโลหิตผ่านเข้ามาเป็นกี่เท่าของความจุโลหิตในสภาวะนิ่ง

- ความก้าวหน้าในทางการแพทย์ และเทคโนโลยีปัจจุบัน ทำให้มีการประดิษฐ์อุปกรณ์ช่วยในการรักษาโรคเบาหวานชิ้นหนึ่งขึ้น อุปกรณ์นี้มีลักษณะเป็นแคปซูล ซึ่งเมื่อฝังอุปกรณ์นี้ภายในร่างกายแล้ว มันจะ

หลั่งสารอินซูลินที่บรรจุอยู่ภายใน ออกสู่กระแสโลหิต โดยมีอัตราการหลั่งเป็น $f(t) = 0.5te^{-0.09t}$ ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวัน เมื่อ t คือ เวลาเป็นวัน นับจากอุปกรณ์เริ่มทำงาน จงหาว่า แพทย์จะต้องสั่งให้บรรจุอินซูลินในแคปซูลเป็นปริมาณเท่าใด เพื่อให้อุปกรณ์นี้สามารถให้อินซูลินแก่ผู้ป่วยได้นาน 3 เดือน

- การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด $P_0(x_0, y_0)$

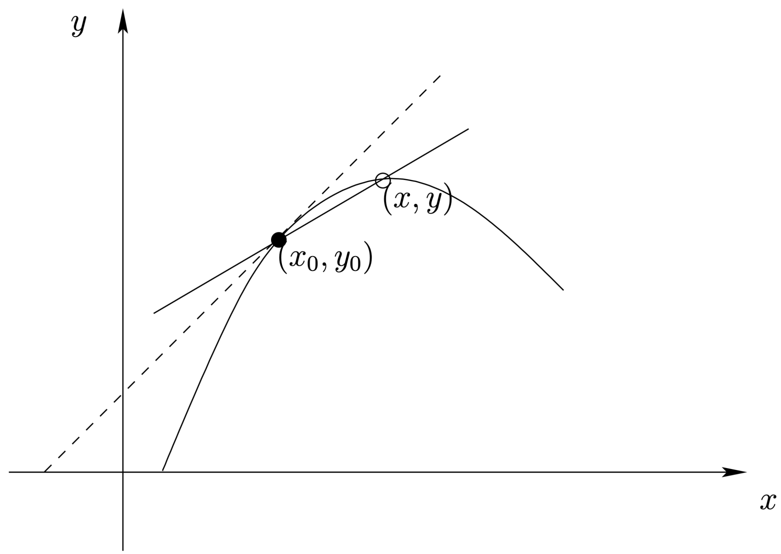

Figure 7: การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง

ขั้นตอนสรุปการหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง

1. เลือกจุดอื่นบนกราฟ เรียกจุดนี้ว่า $P(x, y)$
2. ลากเส้นผ่าน PP_0
3. ทำซ้ำโดยเลือกจุด P ให้ใกล้ P_0 มากขึ้น
4. เส้น PP_0 ที่ได้จะ "เข้าใกล้" เส้นสัมผัสมากขึ้นทุกที

- การหาพื้นที่ "ใต้กราฟ" ระหว่าง x = a กับ x = b

ขั้นตอนเบื้องต้นสำหรับการหาพื้นที่ใต้กราฟ

1. แบ่ง $[a, b]$ เป็นช่วงเล็กๆ
2. หาพื้นที่รวมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหมด
3. ทำซ้ำๆ โดยแบ่งช่วงให้เล็กมากขึ้น
4. พื้นที่ที่ได้จะ "เข้าใกล้" พื้นที่ที่ต้องการมากขึ้นทุกที

จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y = -x^2 + 6x - 2$ ณ จุด $P_0(2, 6)$

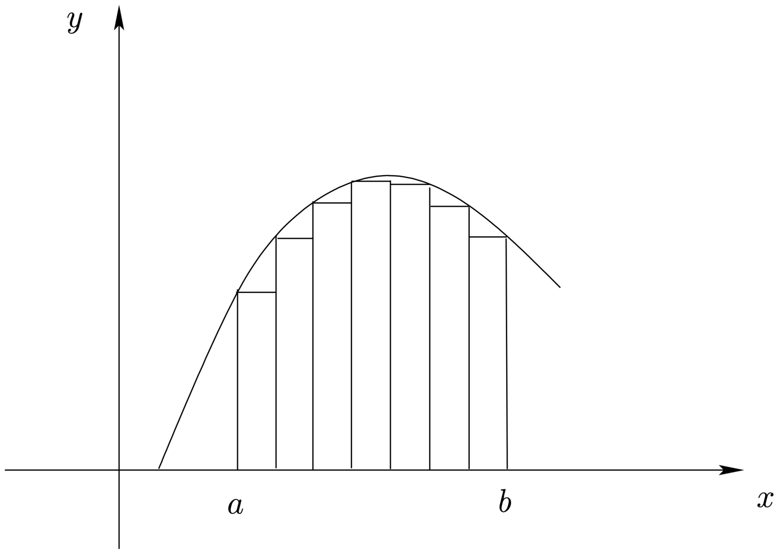

Figure 8: การหาพื้นที่ใต้กราฟ

วิธีทำ เลือกจุด $P(x,y)$ โดยที่ $x \neq 2$ และลากเส้น PP_0 จะได้ว่า ความชันของ PP_0 เท่ากับ

$$\begin{aligned}\frac{y-6}{x-2} &= \frac{-x^2+6x-8}{x-2} \\ &= -\frac{(x-2)(x-4)}{x-2} \\ &= 4-x\end{aligned}$$

ถ้า P อยู่ใกล้ P_0 มากขึ้น ค่า x ย่อมเกือบเป็น 2 ดังนั้น ความชันของ PP_0 จึงเข้าใกล้ 4-2 = 2 มากขึ้นเรื่อย ๆ เส้นสัมผัสจึงควรมีความชันเป็น 2 และสมการเส้นสัมผัส คือ $y-6=2(x-2)$

จะเห็นว่า ในตัวอย่าง @ref(exm:ex-limit-1) นี้ เราสนใจพฤติกรรมของ function

$\frac{-x^2+6x-8}{x-2}$ เมื่อ $x \neq 2$ แต่มีค่าใกล้ 2 มาก ๆ นี่คือ ที่มาของเรื่อง

ให้ $f : D_f \to R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และให้ $a \in R$ โดยที่มีช่วง (a,b) บางช่วงที่ $(a,b) \subseteq D_f\,(b>a)$

เรากล่าวว่า ”ลิมิต (limit) ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา หาค่าได้และมีค่าเท่ากับจำนวนจริง L” ถ้า ”ไม่ว่าเราจะกำหนดบริเวณรอบ ๆ L ไว้แคบเพียงใด เมื่อเราพิจารณาค่าของ $f(x)$ สำหรับค่า x ที่มา

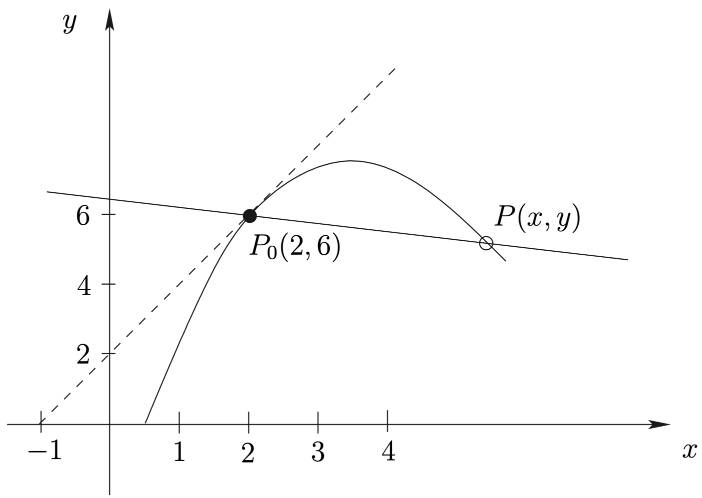

Figure 9: การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = -x^2 + 6x - 2$

กกว่า a โดยที่ให้ค่า ของ x ลดลงเรื่อย ๆ จนถึงจุดหนึ่ง ค่าของ $f(x)$ จะอยู่ในบริเวณรอบ ๆ L ที่เรากำหนดไว้นั้น และยังคงเป็นเช่นนี้สำหรับ x อื่น ๆ ที่น้อยกว่านั้น (แต่มากกว่า a) ทั้งหมดด้วย”

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราพิจารณาพฤติกรรมของ function สำหรับ x ที่น้อยกว่า a จะได้ limit ทางซ้าย ดังนี้ ให้ $f : D_f \rightarrow R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และให้ $a \in R$ โดยที่มีช่วง (b, a) บางช่วงที่ $(b, a) \subseteq D_f \, (b < a)$

เรากล่าวว่า ”limit ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับจำนวนจริง L” ถ้า ”ไม่ว่าเราจะกำหนดบริเวณรอบ ๆ L ไว้แคบเพียงใด

เมื่อเราพิจารณาค่าของ $f(x)$ สำหรับค่า x ที่น้อยกว่า a โดยที่ให้ค่า ของ x เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนถึงจุดหนึ่ง ค่าของ $f(x)$ จะอยู่ในบริเวณรอบ ๆ L ที่เรากำหนดไว้นั้น และยังคงเป็นเช่นนี้สำหรับ x อื่น ๆ ที่มากกว่านั้น (แต่น้อยกว่า a) ทั้งหมดด้วย”

เราใช้สัญลักษณ์ $\lim_{x \to a^+} f(x)$ แทนข้อความ ”limit ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา” และใช้สัญลักษณ์ $\lim_{x \to a^-} f(x)$ แทนข้อความ ”limit ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย

ในกรณีที่ทั้ง $\lim_{x \to a^+} f(x)$ และ $\lim_{x \to a^-} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากัน

เรากล่าวว่า $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับค่านั้น

function f ที่ $\lim_{x\to a^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น

$\lim_{x\to a} f(x)$ จึงหาค่าไม่ได้ด้วย

วิธีทำ จากรูปต่อไปนี้

ในกรณีนี้ จะเห็นว่า ไม่ว่าจะเลือก L เป็นค่าใด ก็ไม่สามารถสรุปได้ว่า $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$ เพราะไม่ใช่ทุกครั้งที่เรากำหนดบริเวณรอบ ๆ L แล้ว function จะสอดคล้องตามนิยามเสมอไป จึงสรุปว่า $\lim_{x\to a} f(x) = L$ หาค่าไม่ได้ด้วย