

SCMA104 Systems of Ordinary Differential Equations and Applications in Medical Science

Pairote Satiracoo

2024-09-10

Contents

หลักการและความสำคัญของแคลคูลัสและระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ	1
ลิมิต (Limits)	11
ความต่อเนื่อง (Continuity)	19
อนุพันธ์ (Derivatives)	25
อนุพันธ์ (Derivatives)	25
การคำนวณหาอนุพันธ์	26
สูตรสำหรับหาอนุพันธ์	28
อนุพันธ์อันดับสูง (High Order Derivatives)	30
การตีความอนุพันธ์ (Interpretation of Derivatives)	31
กฎลูกโซ่ (The Chain Rule)	34
อนุพันธ์ของฟังก์ชันอินเวอร์ส (Derivatives of Inverse Functions)	38
Differentials, Implicit Differentiation and Related Rates	39
อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	50
การประยุกต์ของอนุพันธ์ (Applications of Differentiation)	57
Applications of derivatives related to students discipline	57
Sketching the graph of a function from the derivative	60
การประยุกต์ของ Monotonicity และ Concavity	68
การหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization)	70
รูปแบบไม่กำหนด (Indeterminate form) และกฎของโลปีตาล (L'Hopital Rule)	73

หลักการและความสำคัญของแคลคูลัส และระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

แคลคูลัสมีส่วนประกอบหลักที่สำคัญอยู่ 2 องค์ประกอบ คือ

1. การหาอนุพันธ์ (differentiation) และ
2. การหาปริพันธ์ (Integration)

การประยุกต์เรื่องการหาอนุพันธ์ในการแก้ปัญหาเบื้องต้นที่สำคัญในทางชีววิทยา หรือทางการแพทย์ ประกอบด้วย การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณของตัวแปรที่เราสนใจ และการใช้แคลคูลัสในการแก้ปัญหาการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของปัญหาหรือฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เราสนใจ

ตัวอย่างการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่สนใจ เช่น ขนาดของประชากร จำนวนของผู้ติดเชื้อจากโรคทางเดินหายใจ ระดับน้ำตาลในกระแสเลือด ปริมาณของยาที่มีอยู่ในกระแสเลือดหรือส่วนหนึ่งของร่างกาย โดยที่การเปลี่ยนแปลงดังกล่าวสามารถเปรียบเทียบได้กับเวลา ดังต่อไปนี้

- ประชากรในประเทศไทยปี พ.ศ. 2566 มีจำนวน 66.05 ล้านคน (ข้อมูลอ้างอิงจาก สำนักงานคณะกรรมการส่งเสริมการลงทุน)
- ข้อมูลจำนวนผู้รักษาตัวในโรงพยาบาลจากศูนย์ข้อมูล COVID-19 ระหว่างวันที่ 28 กรกฎาคม ถึงวันที่ 3 สิงหาคม พ.ศ. 2567 (ข้อมูลอ้างอิงจาก ศูนย์ข้อมูล Covid-19)
- การเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำตาลในเลือดระหว่างมื้ออาหารสามมื้อในหนึ่งวัน (รูปภาพอ้างอิงจาก Wikipedia: Blood Sugar Level)
- การเปลี่ยนแปลงของปริมาณยาในกระแสเลือดที่เวลาต่างๆ สำหรับการให้ยาโดยวิธีต่างๆ (รูปภาพอ้างอิงจาก บทความทางวิชาการในฐานข้อมูล MDPI)

ในการทำความเข้าใจการเปลี่ยนแปลงของปริมาณข้างต้นเทียบกับเวลา เราสามารถประยุกต์ใช้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อมาใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงของปริมาณต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง



Figure 1: ข้อมูลจำนวนผู้รักษาตัวในโรงพยาบาลจากศูนย์ข้อมูล COVID-19

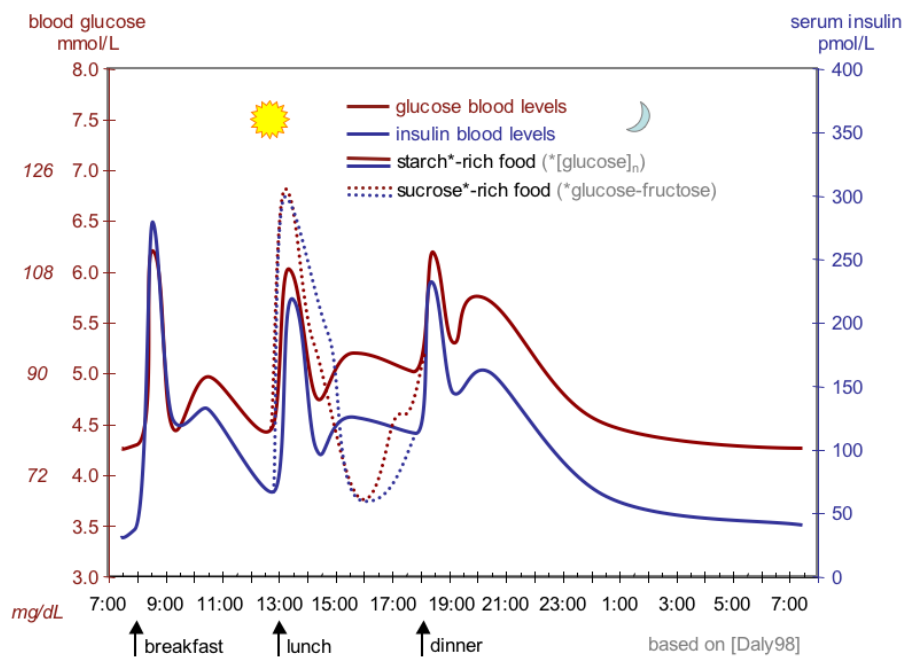


Figure 2: ความผันผวนของระดับน้ำตาลในเลือด (สีแดง) และฮอร์โมนอินซูลิน (สีน้ำเงิน) ในมนุษย์ระหว่างมื้ออาหารสามมื้อ

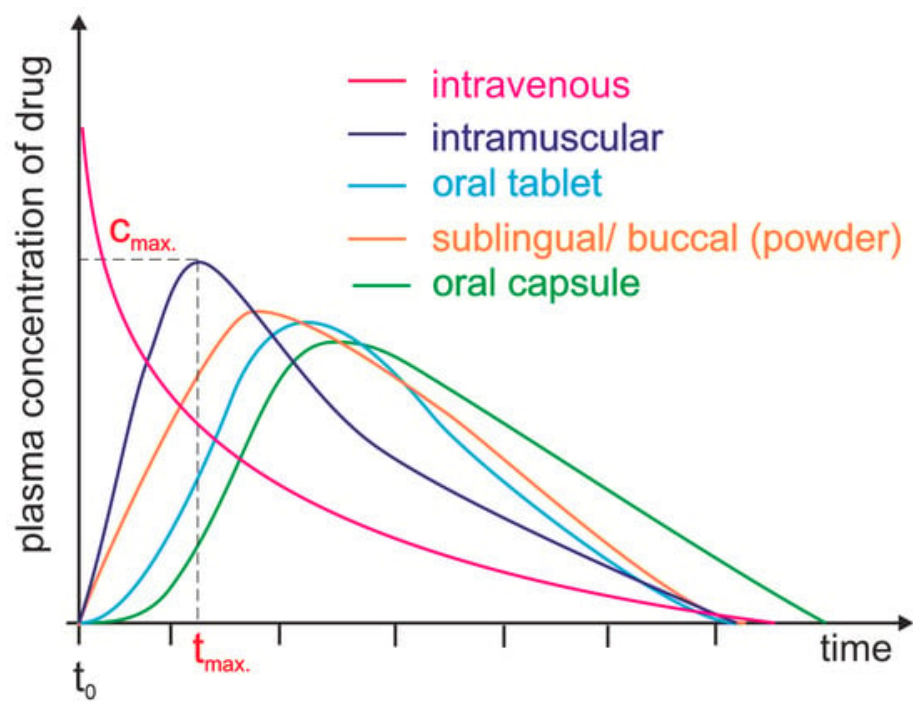


Figure 3: ความเข้มข้นของยาในกระแสเลือดที่เวลาต่างๆ

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการอธิบายปัญหาหรือ ปรากฏการณ์ ต่างๆ ที่เกิดขึ้นในธรรมชาติ โดยปกติแล้วจะอยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแบบ จำลองทางคณิตศาสตร์นี้จะช่วยให้อธิบายสิ่งต่างๆ ที่เกิดขึ้นในปัญหาหรือปรากฏการณ์ที่สนใจ

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงถึงแนวคิดในการประยุกต์ของแคลคูลัสที่เกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของ ในการทดลองหนึ่ง นักวิจัยต้องการศึกษาการขยายพันธุ์ของแบคทีเรียที่มีการแบ่งตัวที่เรียกว่า binary fission (การแบ่งตัวแบบทวิภาค) ซึ่งแบคทีเรียจะมีการแบ่งจากหนึ่งเป็นสองเซลล์เท่าๆ กัน และได้ผลการ ทำทดลองดังต่อไปนี้

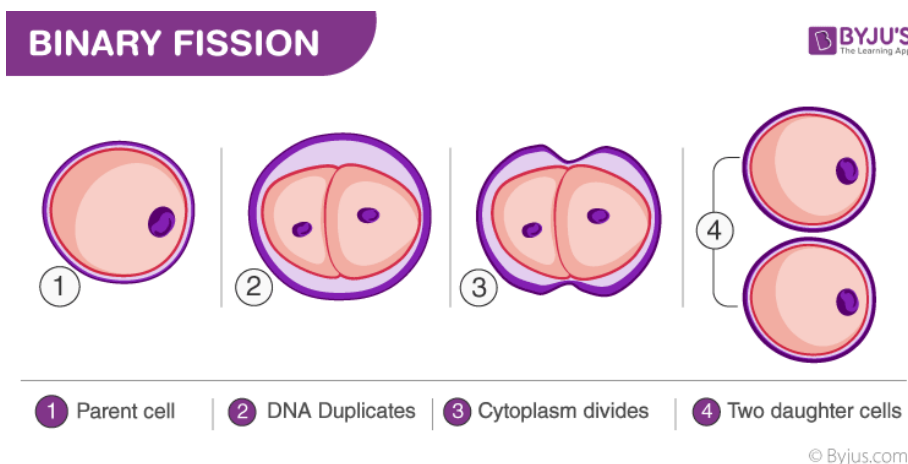


Figure 4: กระบวนการแบ่งตัวแบบทวิภาคของแบคทีเรีย

(รูปอ้างอิงจาก BYJU's Learning Website)

Table 1: จำนวนของแบคทีเรียที่เวลา t ใดๆ

เวลา (10 นาที)	0	1	2	3	4	5	6
จำนวนแบคทีเรีย	1	2	4	8	16	32	64

ตาราง @ref(tab:bacteria-table) และรูปที่ @ref(fig:population-plot) แสดง การเปลี่ยนแปลงของ จำนวนแบคทีเรียที่เวลาใดๆ ในตัวอย่างนี้การเปลี่ยนแปลงของจำนวนของแบคทีเรียที่เวลา t สามารถ เขียนในรูปฟังก์ชัน $N(t)$ ถ้าให้ N_0 แทนจำนวนของแบคทีเรียตอนเริ่มการทดลอง แล้วแบบจำลองทาง คณิตศาสตร์สำหรับการเพิ่มของจำนวนแบคทีเรียจะสามารถเขียนในรูปของสมการ

$$N(t) = N_0 \cdot 2^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \text{ (#eq : population - growth)} \quad (1)$$

ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้การเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียที่เวลา t ใดๆ เพิ่มขึ้นในลักษณะที่ เรียกว่า เอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Population Growth)

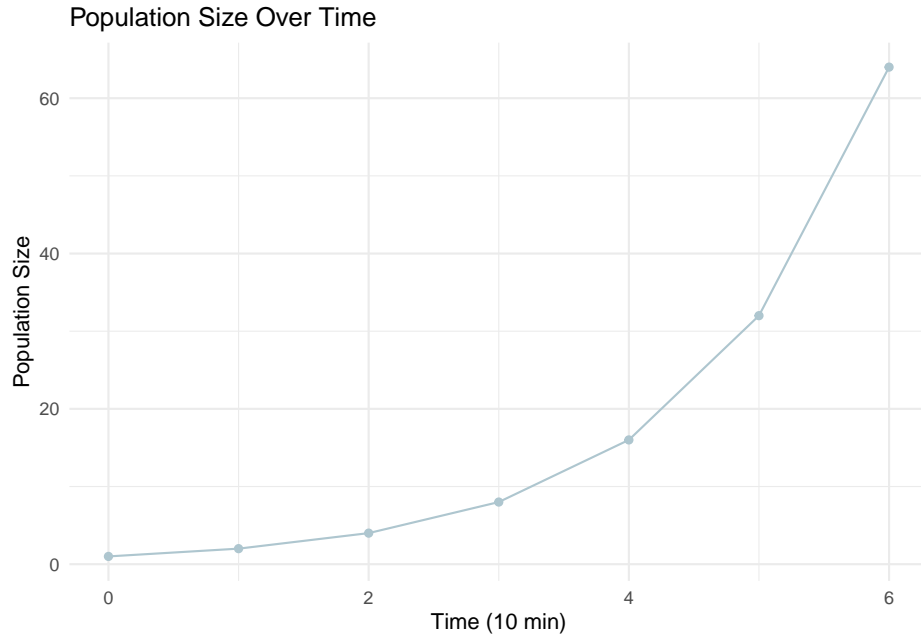


Figure 5: Population Size Over Time

ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ในตัวอย่างของการขยายพันธุ์แบคทีเรีย หรือในปัญหาอื่นๆ แทนที่เราจะพยายามหาความสัมพันธ์ หรือฟังก์ชัน $N(t)$ ในรูปของเวลา t โดยตรง ถ้าเราทราบกระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร $N(t)$ นั้น เราสามารถนำมาใช้ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ได้ดังต่อไปนี้ กระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรีย (การเพิ่มหรือลดลงของแบคทีเรีย) ที่เกิดขึ้นในระหว่างเวลา t และเวลา $t + h$ เกิดจากจำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้น (เกิดขึ้นมาใหม่) ในช่วงเวลาดังกล่าว และลดลงจากจำนวนแบคทีเรียที่ลดลง (ตายไป) ในช่วงเวลาดังกล่าวเช่นกัน ซึ่งเราสามารถเขียนในรูปของสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 N(t + h) &= N(t) \\
 &+ \text{จำนวนแบคทีเรียที่เกิดขึ้นใหม่ระหว่าง } t \text{ และ } t + h (\#eq : \text{population-growth-2}) \\
 &- \text{จำนวนแบคทีเรียที่ตายไประหว่าง } t \text{ และ } t + h
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

ในที่นี้ “การเกิด” เราหมายถึงการเพิ่มจำนวนของแบคทีเรียจากหนึ่งเป็นสอง และเราจะกำหนดให้ h เป็นช่วงเวลาสั้นๆ (ซึ่งเราสามารถใช้ความรู้แคลคูลัสในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation)) ในสมการ @ref(eq:population-growth-2) ถ้าเราสมมติว่า การเพิ่มของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่ในขณะนั้น หรือเขียนในรูปของสมการได้ดังนี้

$$\text{จำนวนแบคทีเรียที่เกิดขึ้นใหม่ระหว่าง } t \text{ และ } t + h \approx b \cdot N \cdot h$$

จำนวนแบคทีเรียที่ตายไประหว่าง t และ $t + h \approx m \cdot N \cdot h$

โดยที่ค่าคงตัว b และ m ในสมการข้างต้น คือ อัตราการเกิด (birth rate) และอัตราการตาย (mortality rate)

เมื่อแทนจำนวนแบคทีเรียที่เกิดขึ้นใหม่ และตายไประหว่างช่วงเวลาที่กำหนดลงในสมการ @ref(eq:population-growth-2) จะได้สมการ

$$N(t + h) - N(t) = b \cdot N(t) \cdot h - m \cdot N(t) \cdot h \quad (\#eq : population - growth - 3) \quad (3)$$

เราสามารถจัดรูปสมการ @ref(eq:population-growth-3) ได้ใหม่ในรูปของอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของจำนวนแบคทีเรียในช่วงเวลาดังกล่าว ดังนี้

$$\frac{N(t + h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \quad (4)$$

$$(\#eq : population - growth - 4) \quad (5)$$

ดังนั้น ถ้าเราให้ h เข้าใกล้ 0 ผ่านการหาลิมิต เราจะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง (instantaneous rate of change) และเขียนได้ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ ดังนี้

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(t + h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \quad (6)$$

$$(\#eq : population - growth - 5) \quad (7)$$

ทั้งนี้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ @ref(eq:population-growth-5) เพื่อให้ได้คำตอบที่แสดงจำนวนแบคทีเรีย $N(t)$ ในรูปของฟังก์ชันของ t เราจะต้องกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องกับจำนวนแบคทีเรีย $N(t)$ ที่เวลา t หนึ่ง โดยทั่วไปเราจะกำหนดค่าเริ่มต้นของจำนวนแบคทีเรียที่ $t = 0$ ดังนั้น ถ้าเรากำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition)

$$N(0) = N_0 \quad (\#eq : population - growth - 6) \quad (8)$$

เราสามารถหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นโดยวิธีการหาปริพันธ์ (Integration) ได้คำตอบของสมการดังนี้

$$N(t) = N_0 e^{(b-m)t} \quad (\#eq : population - growth - 7) \quad (9)$$

ในการทดลองเลี้ยงยีสต์ในขวดทดลองที่มีอาหารเลี้ยงยีสต์ในปริมาณที่เหมาะสม ผู้ทำการทดลองสนใจที่จะ ประมาณ ค่า ของ ยีสต์ โดย อาศัย แบบ จำลอง การ เปลี่ยนแปลง ของ ประชากร ที่ อธิบาย ด้วย สมการ @ref(eq:population-growth-7) กำหนดให้

- ภายใต้สภาวะของการทดลองที่เหมาะสม ยีสต์จะแบ่งตัวทุกๆ 90 นาที
- ยีสต์มีครึ่งชีวิตเท่ากับ 1 สัปดาห์

จากข้อมูลดังกล่าว จงแสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบจากคำถามต่อไปนี้

1. จงประมาณค่าของอัตราการเกิด b (1/ชั่วโมง) และอัตราการตาย m (1/ชั่วโมง)
2. เขียน แบบจำลอง ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ ค่า b และ m ที่ประมาณ ค่า ได้ (สมการ @ref(eq:population-growth-7))
3. ใช้เครื่องมือที่นักศึกษาถืออยู่ในการวาดกราฟแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนยีสต์ที่เวลาต่างๆ
4. เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับรูปภาพแสดงการเปลี่ยนแปลงของยีสต์จากการทดลองในห้องปฏิบัติการตามรูปที่ @ref(fig:fig-yeast-cells) (รูปภาพอ้างอิงจาก <https://homework.study.com/>)

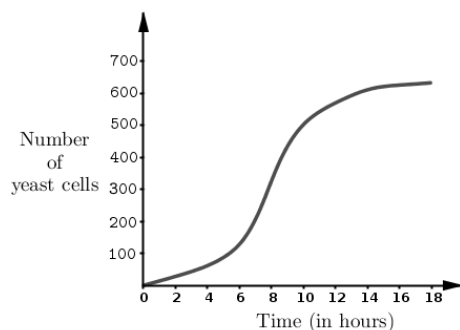


Figure 6: กราฟการเจริญเติบโตของเซลล์ยีสต์

จงใช้อินเทอร์เน็ตเพื่อค้นหาตัวอย่างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายโดยสมการเชิงอนุพันธ์หรือระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ข้อมูลที่ต้องการประกอบด้วย

1. ค้นหาเว็บไซต์ที่ให้ข้อมูลเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในปัญหาที่นักศึกษาสนใจ
2. จดบันทึก URL ของเว็บไซต์
3. เขียนสรุปสั้นๆ ว่าโมเดลนี้ใช้เพื่ออะไร

วิธีทำ

ตัวอย่างของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากการสืบค้นข้อมูลอินเทอร์เน็ตจาก

- CALCULUS IN MEDICINE (<https://sites.northwestern.edu/recalculated/2019/05/05/calculus-in-medicine/>)

- เกสซ์ จลนศาสตร์ (Pharmacokinetics) และ เกสซ์ พลศาสตร์ (Pharmacodynamics) ([https:// ns.mahidol.ac.th/ english/ th/ departments/ MN/ th/ doc/ km54/ เกสซ์จลนศาสตร์%20\(Pharmacokinetics\).pdf](https://ns.mahidol.ac.th/english/th/departments/MN/th/doc/km54/เกสซ์จลนศาสตร์%20(Pharmacokinetics).pdf))

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จำลองการเปลี่ยนแปลงของความเข้มข้นของยา c ณ เวลา t โดยที่กำหนดขนาดยา (drug dosage) เท่ากับ d

$$\frac{dc}{dt} = \frac{k_a}{k_a - k_e} [k_a \cdot d \cdot b \cdot e^{-at} - k_e \cdot c \cdot v]$$

โดยที่

- k_a คือ ค่าคงตัวของการดูดซึมยา
- k_e คือ ค่าคงตัวของการกำจัดยา
- v แทน ปริมาตรของยาในร่างกาย
- b แทน สัดส่วนของปริมาณยาที่ถูกดูดซึมเข้าไปในร่างกายเทียบกับขนาดของยา

ตามหลักเภสัชจลนศาสตร์ เมื่อได้รับยาเข้าสู่ร่างกาย จะมีกระบวนการดูดซึมยา การกระจายตัวของยา การเปลี่ยนแปลงยา และการขับถ่ายยาออกจากร่างกาย

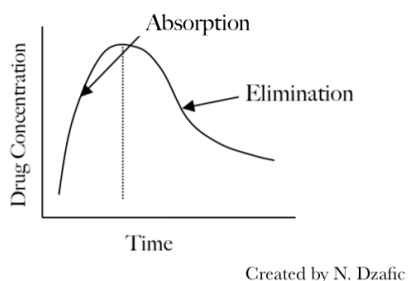


Figure 7: การเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของยาในระหว่างการดูดซึม และการกำจัดออกจากร่างกาย

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะมีประโยชน์ที่สำคัญที่ทำให้ผู้เชี่ยวชาญด้านยาสามารถกำหนดขนาดของยาที่เหมาะสม อย่างต่อเนื่องเป็นระยะเวลาที่เพียงพอกับการรักษา เพื่อให้ได้ผลการรักษาที่ดีที่สุด

โดยสรุป แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์เป็นเครื่องมือสำคัญในการทำความเข้าใจว่าสิ่งต่างๆ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไรและ แคลคูลัสช่วยให้เราวิเคราะห์อัตราการเปลี่ยนแปลงและพื้นที่ใต้เส้นโค้ง ในขณะที่สมการเชิงอนุพันธ์ช่วยให้เราสร้างแบบจำลองระบบที่ซับซ้อนในสาขาต่างๆ เช่น ฟิสิกส์ วิศวกรรม เศรษฐศาสตร์ และชีววิทยา แนวคิดทางคณิตศาสตร์เหล่านี้มีความสำคัญต่อการแก้ปัญหาในโลกแห่งความเป็นจริง เมื่อโลกของเราก้าวหน้ามากขึ้น ความสำคัญของแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ก็จะเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง ซึ่งสนับสนุนความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ลิมิต (Limits)

อาจกล่าวได้ว่า วิชาแคลคูลัส ถือกำเนิดขึ้นมาจากความพยายามในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตบนระนาบ 2 ปัญหาหลักๆ คือ

- การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งที่กำหนดให้
กำหนดฟังก์ชัน (function) f และกำหนดจุด $P(x_0, y_0)$ บนกราฟ $y = f(x)$ จงหาสมการของเส้นตรงที่สัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด P
- การหาพื้นที่ของบริเวณที่กำหนดให้
กำหนด function f และช่วง $[a, b]$ ในโดเมนของ f จงหาพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมด้วยแกน X และกราฟ $y = f(x)$ สำหรับ $x \in [a, b]$

แนวความคิดในการแก้ปัญหาทั้งสอง นำไปสู่การศึกษาเรื่อง ลิมิต (Limits) ซึ่งเป็นพื้นฐานของวิชาแคลคูลัสนั่นเอง

แต่ในปัจจุบันเราพบว่าวิชาแคลคูลัสมีประโยชน์ในการช่วยแก้ปัญหาในสาขาวิชาต่าง ๆ มากมาย เช่น เราจะพบในการศึกษาวิชาที่ว่า แคลคูลัสมีบทบาทในการแก้ปัญหาดังต่อไปนี้

- โดยทั่วไป ยาชนิดหนึ่งจะต้องใช้เวลาระยะหนึ่งหลังจากฉีดเข้าสู่ร่างกาย ในการที่จะไหลเวียนในกระแสโลหิต จนกระทั่งมีความเข้มข้นสูงสุด สมมติว่า ยาชนิดหนึ่งหลังจากฉีดเข้าสู่ร่างกายนาน t ชั่วโมง จะมีความเข้มข้นเป็น $C(t) = 0.15(e^{-0.18t} - e^{-1.2t})$ มิลลิกรัมต่อมิลลิลิตร จงหาว่า นานเท่าใดหลังจากฉีดยา จึงจะมีความเข้มข้นของยา ในกระแสโลหิตสูงที่สุด
- เราอาจประมาณได้อย่างมีเหตุผลว่า artery มีรูปร่างที่เป็นผลมาจากการหมุนรอบแกน ของเส้นโค้งในระนาบ โดยในสถานะนิ่ง รัศมีของ artery มีค่าคงที่เท่ากับ 1 หน่วย (รูปทรงกระบอก) แต่ในขณะที่หัวใจสูบฉีดโลหิตผ่าน artery artery จะพองตัวออก ทำให้รัศมีเปลี่ยนไปตามสมการ $R(x) = 1 + 0.4x - 0.04x^2$ หน่วย เมื่อ $0 \leq x \leq 10$ เป็นตำแหน่งบนแนวยาวของ artery จงหาว่า ปริมาณโลหิตที่อยู่ใน artery ขณะที่หัวใจสูบฉีดโลหิตผ่านเข้ามาเป็นกี่เท่าของความจุโลหิตในสถานะนิ่ง
- ความก้าวหน้าในทางการแพทย์ และเทคโนโลยีปัจจุบัน ทำให้มีการประดิษฐ์อุปกรณ์ช่วยในการรักษาโรคเบาหวานขึ้นหนึ่งขึ้น อุปกรณ์นี้มีลักษณะเป็นแคปซูล ซึ่งเมื่อฝังอุปกรณ์นี้ภายในร่างกาย

แล้ว มันจะหลังสารอินซูลินที่บรรจุอยู่ภายใน ออกสู่กระแสโลหิต โดยมีอัตราการหลังเป็น $f(t) = 0.5te^{-0.09t}$ ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวัน เมื่อ t คือ เวลาเป็นวัน นับจากอุปกรณ์เริ่มทำงาน จงหาว่า แพทย์จะต้องสั่งให้บรรจุอินซูลินในแคปซูลเป็นปริมาณเท่าใด เพื่อให้อุปกรณ์นี้สามารถให้อินซูลินแก่ผู้ป่วยได้นาน 3 เดือน

- การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด $P_0(x_0, y_0)$

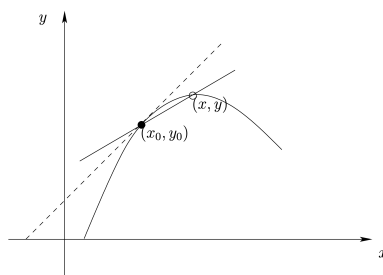


Figure 8: การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง

ขั้นตอนสรุปการหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง @ref(fig:fig-tangent-line)

1. เลือกจุดอื่นบนกราฟ เรียกจุดนี้ว่า $P(x, y)$
2. ลากเส้นผ่าน PP_0
3. ทำซ้ำโดยเลือกจุด P ให้ใกล้ P_0 มากขึ้น
4. เส้น PP_0 ที่ได้จะ “เข้าใกล้” เส้นสัมผัสมากขึ้นทุกที

- การหาพื้นที่ “ใต้กราฟ” ระหว่าง $x = a$ กับ $x = b$

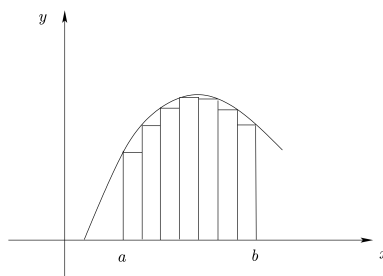


Figure 9: การหาพื้นที่ใต้กราฟ

ขั้นตอนเบื้องต้นสำหรับการหาพื้นที่ใต้กราฟ

1. แบ่ง $[a, b]$ เป็นช่วงเล็กๆ
2. หาพื้นที่รวมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหมด
3. ทำซ้ำๆ โดยแบ่งช่วงให้เล็กมากขึ้น
4. พื้นที่ที่ได้จะ “เข้าใกล้” พื้นที่ที่ต้องการมากขึ้นทุกที

จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y = -x^2 + 6x - 2$ ณ จุด $P_0(2, 6)$

วิธีทำ เลือกจุด $P(x, y)$ โดยที่ $x \neq 2$ และลากเส้น PP_0 จะได้ว่า ความชันของ PP_0 เท่ากับ

$$\begin{aligned} \frac{y-6}{x-2} &= \frac{-x^2+6x-8}{x-2} \\ &= -\frac{(x-2)(x-4)}{x-2} \\ &= 4-x \end{aligned} \quad (10)$$

ถ้า P อยู่ใกล้ P_0 มากขึ้น ค่า x ย่อมเกือบเป็น 2 ดังนั้น ความชันของ PP_0 จึงเข้าใกล้ $4-2=2$ มากขึ้นเรื่อย ๆ เส้นสัมผัสจึงควรมีความชันเป็น 2 และสมการเส้นสัมผัส คือ $y-6=2(x-2)$

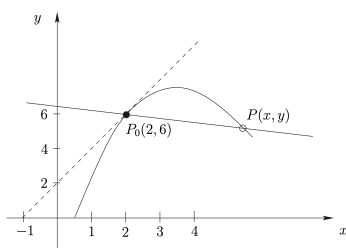


Figure 10: การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = -x^2 + 6x - 2$

จะเห็นว่า ในตัวอย่าง @ref(exm:ex-limit-1) นี้ เราสนใจพฤติกรรมของ function

$\frac{-x^2+6x-8}{x-2}$ เมื่อ $x \neq 2$ แต่มีค่าใกล้ 2 มาก ๆ นี่คือการที่ค่าของฟังก์ชัน

ให้ $f : D_f \rightarrow R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และให้ $a \in R$ โดยที่มีช่วง (a, b) บางช่วงที่ $(a, b) \subseteq D_f$ ($b > a$)

เรากล่าวว่า “ลิมิต (limit) ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา หาค่าได้และมีค่าเท่ากับจำนวนจริง L ” ถ้า “ไม่ว่าเราจะกำหนดบริเวณรอบ ๆ L ใดแคบเพียงใด เมื่อเราพิจารณาค่าของ $f(x)$ สำหรับค่า x ที่มากกว่า a โดยที่ค่าของ x ลดลงเรื่อย ๆ จนถึงจุดหนึ่ง ค่าของ $f(x)$ จะอยู่ในบริเวณรอบ ๆ L ที่เรากำหนดไว้นั้น และยังคงเป็นเช่นนั้นสำหรับ x อื่น ๆ ที่น้อยกว่านั้น (แต่มากกว่า a) ทั้งหมดด้วย”

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราพิจารณาพฤติกรรมของ function สำหรับ x ที่น้อยกว่า a จะได้ limit ทางซ้าย ดังนี้ ให้ $f : D_f \rightarrow R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และให้ $a \in R$ โดยที่มีช่วง (b, a) บางช่วงที่ $(b, a) \subseteq D_f$ ($b < a$)

เรากล่าวว่า “limit ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับจำนวนจริง L ” ถ้า “ไม่ว่าเราจะกำหนดบริเวณรอบ ๆ L ไว้แคบเพียงใด

เมื่อเราพิจารณาค่าของ $f(x)$ สำหรับค่า x ที่น้อยกว่า a โดยที่ให้ค่าของ x เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนถึงจุดหนึ่ง ค่าของ $f(x)$ จะอยู่ในบริเวณรอบ ๆ L ที่เรากำหนดไว้นั้น และยังคงเป็นเช่นนี้สำหรับ x อื่น ๆ ที่มากกว่านั้น (แต่น้อยกว่า a) ทั้งหมดด้วย”

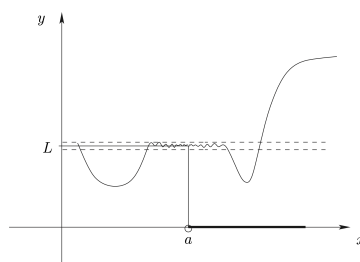


Figure 11: ลิมิตทางขวา

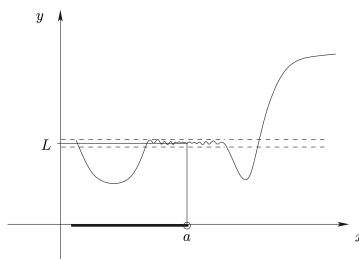


Figure 12: ลิมิตทางซ้าย

เราใช้สัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ แทนข้อความ “limit ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา” และใช้สัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ แทนข้อความ “limit ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย

ในกรณีที่ทั้ง $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากัน

เรากล่าวว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับค่านั้น

function f ที่ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ จึงหาค่าไม่ได้ด้วย

วิธีทำ จากรูปต่อไปนี้

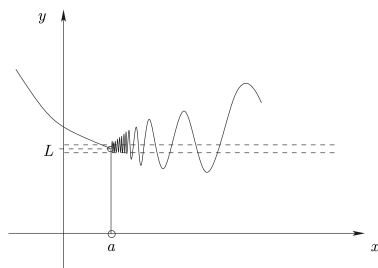


Figure 13: กราฟของฟังก์ชันที่หาขีดจำกัดไม่ได้

ในกรณีนี้ จะเห็นว่า ไม่ว่าจะเลือก L เป็นค่าใด ก็ไม่สามารถสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L$ เพราะไม่ใช่ทุกครั้งที่เรากำหนดบริเวณรอบ ๆ L แล้ว function จะสอดคล้องตามนิยามเสมอไป จึงสรุปว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ หาค่าไม่ได้ด้วย

1. $\lim_{x \rightarrow c} c = c$ ถ้า c เป็นจำนวนจริง
2. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ หาค่าได้แล้ว จะได้

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$
4. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

หมายเหตุ ทฤษฎีบททั้งสองนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้ และ $\sqrt[n]{f(x)}$ หาค่าได้ สำหรับทุก ๆ x ในช่วงเปิดบางช่วงที่มี a อยู่ด้วย แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$

หมายเหตุ ทฤษฎีบทนี้เป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย โดยเปลี่ยนเงื่อนไข “ทุก ๆ x ” เป็น “ทุก ๆ $x < a$ ” และ “ทุก ๆ $x > a$ ” ตามลำดับ

ถ้า f และ g เป็น function ซึ่ง $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก ๆ x ยกเว้นบาง x ซึ่งมีอยู่เพียงจำนวนจำกัด แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ถ้า limit อันใดอันหนึ่งหาค่าได้

หมายเหตุ ทฤษฎีบทนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย

จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 6x - 8}{x - 2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 6x - 8}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 4)}{x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} -(x - 4) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} (4 - x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} 4 - \lim_{x \rightarrow 2} x \\
 &= 4 - 2 \\
 &= 2
 \end{aligned} \tag{11}$$

จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$ **วิธีทำ**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 1}{\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3}} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 1}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} x} + \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{3}}
 \end{aligned} \tag{12}$$

จงหา limits ต่อไปนี้

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$
2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$

วิธีทำ

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \frac{0-\sqrt{3}}{0-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
2. เนื่องจาก function $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ ไม่ใช่ function ที่หาค่าได้บนช่วงเปิด $(b, 0)$ ใด ๆ เลย ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ จึงหาค่าไม่ได้
3. เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ จึงหาค่าไม่ได้

ข้อสังเกต ในกรณีที่ function ที่มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีขอบเขต เมื่อตัวแปรต้นเข้าใกล้ a (ทางซ้ายหรือขวา หรือทั้งสองทาง) บางตำรากล่าวว่า limit ของ function มีค่าเป็น $+\infty$ และถ้า function มีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขต จะกล่าวว่า limit ของ function มีค่าเป็น $-\infty$ ในวิชานี้เราจะถือตามนิยามที่ให้ไว้ ดังนั้นในกรณีข้างต้น จะกล่าวว่า limit ดังกล่าวหาค่าไม่ได้ (เว้นแต่จะระบุให้พิจารณาค่า $\pm\infty$ ด้วย)

จงหา limit ของ function $f(x) = \frac{1}{x}$

1. เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย
2. เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางขวา
3. เมื่อ x เข้าใกล้ 0

วิธีทำ

1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้ (หรือเท่ากับ $-\infty$)
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้ (หรือเท่ากับ $+\infty$)
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้

ในบางครั้ง เราสนใจพฤติกรรมของ function f เมื่อค่าตัวแปรต้นมีค่ามากขึ้นโดยไม่มีขอบเขต หรือน้อยลงโดยไม่มีขอบเขต ในกรณีเช่นนี้ เราใช้สัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ตามลำดับ แทนที่จะใช้ $\lim_{x \rightarrow \infty^-} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow \infty^+} f(x)$ (โปรดอ่านนิยามในเอกสารอ้างอิง) ทฤษฎีบทเกี่ยวกับ limit ที่กล่าวมาข้างต้นทั้งหมด เป็นจริงในกรณีนี้ด้วย นอกจากนี้ เรายังมี ทฤษฎีบทต่อไปนี้

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$
3. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ซึ่งเป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย ในที่นี้ $a \in R$ หรือ a เป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+12}{x^3-5} = ?$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+12}{x^3-5} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2+12)/x^3}{(x^3-5)/x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{12}{x^3}}{1 - \frac{5}{x^3}} = \frac{0+0}{1-0} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{2}{3}} = ?$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{2}{3}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \sqrt[3]{\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}\right)^2} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{5}} + 5x^{\frac{1}{7}}}{3x^{\frac{1}{3}} + 5x^{\frac{1}{5}} + 7x^{\frac{1}{7}}} = ?$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{5}} + 5x^{\frac{1}{7}}}{3x^{\frac{1}{3}} + 5x^{\frac{1}{5}} + 7x^{\frac{1}{7}}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} (1 + 3x^{-\frac{2}{15}} + 5x^{-\frac{4}{21}})}{x^{\frac{1}{3}} (3 + 5x^{-\frac{2}{15}} + 7x^{-\frac{4}{21}})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3x^{-\frac{2}{15}} + 5x^{-\frac{4}{21}}}{3 + 5x^{-\frac{2}{15}} + 7x^{-\frac{4}{21}}} = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (15)$$

ข้อสังเกต ตัวแปร x ในสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ เรียกว่า “ตัวแปรหุ่น” (dummy variable) เพราะไม่ได้

กล่าวถึงตัวแปร x แต่เราใช้มันเพื่อเขียนสัญลักษณ์แทนจำนวนจริงจำนวนหนึ่งที่ค่าของ function f ใกล้เข้าไปหา ในยามที่ตัวแปรต้นของมันมีค่าใกล้ a เข้าไปทุกที เราอาจเขียน $\lim_{t \rightarrow a} f(t)$ แทนจำนวนจำนวน

นี้ก็ได้ เป็นต้น ตัวอย่างของ dummy variable อื่น ๆ เช่น ตัวแปร n ในสัญลักษณ์ $\sum_{n=1}^4 n^2$ ซึ่งอาจ

เขียนใหม่เป็น $\sum_{k=1}^4 k^2$ ก็ได้ ทั้งสองสัญลักษณ์นี้แทนจำนวน $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{ถ้า } x \leq 3 \\ \sqrt{x+13} & \text{ถ้า } x > 3 \end{cases}$$

วิธีทำ

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 5 \leftarrow \boxed{f(x) = x^2 - 5 \text{ เมื่อ } x \text{ อยู่ทางซ้ายของ } 3} \\ = 4 \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x + 13} \leftarrow \boxed{f(x) = \sqrt{x + 13} \text{ เมื่อ } x \text{ อยู่ทางขวาของ } 3} \\ = 4 \quad (17)$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ 4

จงหา $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{ถ้า } x \leq 3 \\ \sqrt{x + 13} & \text{ถ้า } x > 3 \end{cases}$$

วิธีทำ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 5) = -5$

ความต่อเนื่อง (Continuity)

ในวิชาฟิสิกส์ เราสามารถเขียนตำแหน่งของวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่ในรูป function ของเวลาได้ (วัตถุย่อมอยู่ในที่ใดที่หนึ่งเพียงที่เดียว ณ เวลาหนึ่ง ๆ)

คำถาม : function ใด ๆ เป็น function ที่แสดงตำแหน่งของวัตถุใดวัตถุหนึ่งได้เสมอหรือไม่

ลองอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ ถ้า function ที่แสดงตำแหน่งของมัน คือ

$$1. s_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } t < 3 \\ 1 & \text{ถ้า } t > 3 \end{cases}$$

$$2. s_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } t \leq 3 \\ 1 & \text{ถ้า } t > 3 \end{cases}$$

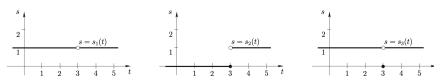
$$3. s_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } t \neq 3 \\ 0 & \text{ถ้า } t = 3 \end{cases}$$

กราฟของ s_1, s_2 และ s_3 เป็นดังนี้

ข้อสังเกต:

1. $s_1(3)$ หาค่าไม่ได้

2. $s_2(3)$ หาค่าได้ แต่ $\lim_{t \rightarrow 3} s_2(t)$ หาค่าไม่ได้
3. $s_3(3)$ หาค่าได้ $\lim_{t \rightarrow 3} s_3(t)$ หาค่าได้ แต่ $s_3(3) \neq \lim_{t \rightarrow 3} s_3(t)$

Figure 14: กราฟของฟังก์ชัน s_1 , s_2 และ s_3

ให้ $f : D_f \rightarrow R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และ $a \in R$ เรากล่าวว่า f ต่อเนื่อง (continuous) ที่ a ถ้า

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้
3. $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

ให้ f เป็น function และ S เป็นเซต (set) เรากล่าวว่า f ต่อเนื่องบน S (continuous on S) ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ สมาชิกของ S เรียก function ที่ continuous on R ว่า “ฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function)”

ข้อสังเกต จะเห็นว่า function ที่แสดงตำแหน่งของวัตถุต้องเป็น continuous function บนช่วงที่สนใจ ถ้า f และ g เป็น function ที่ต่อเนื่องที่ a แล้ว

1. $f + g$ ต่อเนื่องที่ a
2. $f - g$ ต่อเนื่องที่ a
3. $f \cdot g$ ต่อเนื่องที่ a
4. $\frac{f}{g}$ ต่อเนื่องที่ a ถ้า $g(a) \neq 0$

function f ซึ่งนิยามโดย $f(x) = |x|$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่

วิธีทำ ในที่นี้

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

เราต้องพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ $a \in R$ หรือไม่

- ถ้า $a > 0$ จะได้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a = f(a)$

- ถ้า $a < 0$ จะได้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (-x) = -a = f(a)$
- ถ้า $a = 0$ จะได้ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 = f(0)$
และ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = f(0)$
ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$

ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ $a \in R$ จึงสรุปว่า f เป็น continuous function

ฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) เป็น function ที่ต่อเนื่องบน domain ของมัน

หมายเหตุ: rational function คือ function ที่เป็นเศษส่วนของพหุนาม (polynomial) domain ของ rational function ได้แก่เซตของจำนวนจริงซึ่งไม่ทำให้ส่วนของมันเป็นศูนย์

ถ้า f และ g เป็น function และ $a \in R$ โดยที่ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ และ f ต่อเนื่องที่ L แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(L)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} \right| = ?$$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} \right| &= \left| \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} \right| \\ &= \left| \frac{1^4 - 1^2 + 1}{1^4 + 1^2 + 1} \right| \\ &= \left| \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (18)$$

ถ้า f ต่อเนื่องที่ a และ g ต่อเนื่องที่ $f(a)$ แล้ว $g \circ f$ ต่อเนื่องที่ a

จงพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้น

function f ซึ่งนิยามโดย $f(x) = \left| \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} \right|$ เป็น continuous function หรือไม่

วิธีทำ f เป็น continuous function เพราะ $f = g \circ h$ โดยที่ $g(x) = |x|$ และ $h(x) = \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$ ซึ่งเป็น continuous function ทั้งคู่

เรานิยาม “ภาวะต่อเนื่องทางซ้าย” และ “ภาวะต่อเนื่องทางขวา” ได้โดยแทนที่ $\lim_{x \rightarrow a}$ ในเงื่อนไขของนิยาม ด้วย $\lim_{x \rightarrow a^-}$ และ $\lim_{x \rightarrow a^+}$ ตามลำดับ นั่นคือ

ให้ $f: D_f \rightarrow R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และ $a \in R$ เรากล่าวว่า f “ต่อเนื่องทางซ้าย (left-continuous) ที่ a ” ถ้า

1. $f(a)$ หาค่าได้

$$2. \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ หาค่าได้}$$

$$3. f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

และกล่าวว่า f “ต่อเนื่องทางขวา (right-continuous) ที่ a ” ถ้า

$$1. f(a) \text{ หาค่าได้}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ หาค่าได้}$$

$$3. f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

ให้ $f : [a, b] \rightarrow R$ เรากล่าวว่า f ต่อเนื่องบน $[a, b]$ (continuous on $[a, b]$) ถ้า

$$1. f \text{ ต่อเนื่องบน } (a, b)$$

$$2. f \text{ ต่อเนื่องทางขวาที่ } a$$

$$3. f \text{ ต่อเนื่องทางซ้ายที่ } b$$

function f ที่นิยามโดย $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ เป็น continuous function บน $[-2, 2]$ หรือไม่

วิธีทำ เราตรวจสอบได้ว่า f เป็น continuous function บน $[-2, 2]$ เพราะ

$$1. f \text{ เป็น continuous function บน } (-2, 2)$$

$$2. f \text{ ต่อเนื่องทางขวาที่ } -2 \text{ เพราะ } \$\$$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4-x^2} \\ &= 0 = f(-2) \end{aligned} \quad (19)$$

$$3. f \text{ ต่อเนื่องทางซ้าย ที่ } 2 \text{ เพราะ}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4-x^2} \\ &= 0 = f(2) \end{aligned} \quad (20)$$

พิจารณา function f ซึ่งมีกราฟดังต่อไปนี้

$$1. f \text{ มีความต่อเนื่องที่ } -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ หรือไม่}$$

$$2. f \text{ มีความต่อเนื่องบน } [-1, 0], [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5] \text{ หรือไม่}$$

วิธีทำ ให้นักศึกษาทำเป็นแบบฝึกหัด

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และฟังก์ชันลอการิทึม เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนโดเมนของมัน

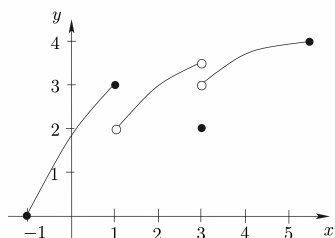
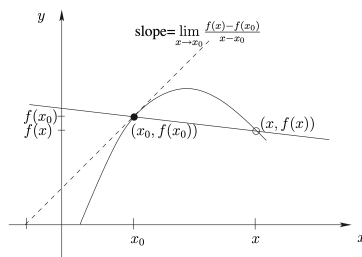


Figure 15: กราฟของฟังก์ชันในตัวอย่าง ref(exm:ex-cont-5)

อนุพันธ์ (Derivatives)

อนุพันธ์ (Derivatives)

จากตัวอย่าง 2.1 ในบทที่ 2 และเนื้อหาในเรื่อง limits เราจะเห็นว่า ความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ณ จุด $(x_0, f(x_0))$ บนกราฟ ก็คือ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ นั่นเอง (ถ้า limit หาค่าได้)



ปริมาณนี้มีความสำคัญ เพราะนำไปประยุกต์ใช้ได้มากมาย เราจึงกำหนดสัญลักษณ์และมีชื่อเรียกดังต่อไปนี้

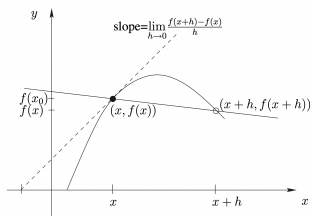
ถ้า $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่ $D_f \subseteq \mathbb{R}$ และถ้า $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ หาค่าได้แล้ว เรียกค่าของ limit นี้ว่า “อนุพันธ์ (derivative) ของ f ที่ x_0 ” และแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(x_0)$

เนื่องจากแต่ละ function g และแต่ละ x_0 จะมี $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ได้ค่าเดียว ดังนั้น f' จึงเป็น function เรียกว่า “อนุพันธ์ (derivative)” ของ f

ในการเขียนนิยามของ $f'(x)$ เพื่อใช้เป็นสูตรทั่วไปสำหรับ function f' เราเปลี่ยนตัวแปรเสียใหม่ ดังแสดงในรูป

จะได้ว่า

จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y = -x^2 + 6x - 2$ ณ จุด $P_0(2, 6)$



วิธีทำ ให้ $f(x) = -x^2 + 6x - 2$ จะได้ค่าความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด $(x, f(x))$ คือ $f'(x)$ ซึ่งเท่ากับ

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[-(x+h)^2 + 6(x+h) - 2] - [-x^2 + 6x - 2]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h^2 + 6h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (-2x - h + 6) \leftarrow \boxed{\text{อย่าเขียน } \lim_{h \rightarrow 0} -2x - h + 6} \\
 &= -2x + 6
 \end{aligned} \tag{21}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด $(2, 6)$ คือ $f'(2) = -2 \cdot 2 + 6 = 2$ เส้นสัมผัสจึงมีสมการเป็น $y - 6 = 2(x - 2)$

อัตราส่วน $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ คือ อัตราส่วนของค่า function ที่เปลี่ยนไป (จาก $f(x_0)$ กลายเป็น $f(x)$) ต่อค่าตัวแปรต้นที่เปลี่ยนไป (จาก x_0 กลายเป็น x) เรียกค่านี้ว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย (average rate of change) ของ $f(x)$ เทียบกับ x ” คำว่าเฉลี่ย แสดงถึงการคิดการเปลี่ยนแปลงบน ‘ช่วง’

แต่ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ เป็นการหา “แนวโน้ม” ของอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย เมื่อ x กับ x_0 อยู่ใกล้กันมากๆ จนแทบจะเป็นจุดเดียวกัน เราจึงเรียกค่านี้ว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง (instantaneous rate of change) ของ $f(x)$ เทียบกับ x ”

สัญลักษณ์อื่นๆ สำหรับ derivatives ได้แก่

ถ้า $f'(x_0)$ หาค่าได้ เรากล่าวว่า function f “หาอนุพันธ์ได้ (differentiable) ที่ x_0 ” ถ้า $f'(x_0)$ หาค่าได้สำหรับทุกๆ x ในเซต S เรากล่าวว่า function f “หาอนุพันธ์บน S (differentiable on S)” ถ้า $f'(x_0)$ หาค่าได้สำหรับทุกๆ จำนวนจริง x เรากล่าวว่า function f “หาอนุพันธ์ได้ (differentiable)”

การคำนวณหาอนุพันธ์

จงหา derivative ต่อไปนี้

$$(1) f'(x) \text{ เมื่อ } f(x) = x^2$$

$$(2) f'(2) \text{ เมื่อ } f(x) = \sqrt{x}$$

$$(3) \frac{ds(t)}{dt} \Big|_{t=t_0} \text{ เมื่อ } s(t) = \frac{1}{t}$$

วิธีทำ ใช้นิยามข้างต้นหา derivative ได้ดังนี้

$$(1) \text{ เมื่อ } f(x) = x^2 \text{ จะได้}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h \\ &= 2x \end{aligned} \tag{22}$$

$$(2) \text{ เมื่อ } f(x) = \sqrt{x} \text{ จะได้}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h \cdot (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h) - 2}{h \cdot (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{23}$$

(3) เมื่อ $s(x) = \frac{1}{t}$ จะได้

$$\begin{aligned}
 s'(t)|_{t=t_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t_0+h} - \frac{1}{t_0}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_0 - (t_0 + h)}{t_0(t_0 + h)h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{t_0(t_0 + h)h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{t_0(t_0 + h)} \\
 &= \frac{-1}{t_0^2}
 \end{aligned} \tag{24}$$

จงหาเซต S ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ function $f(x) = \sqrt{x}$ หาอนุพันธ์ได้บน S

วิธีทำ พิจารณาจำนวนจริง x ที่ทำให้ $f'(x)$ หาค่าได้ เนื่องจาก

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ถ้า } x > 0$$

ในกรณีที่ $x \leq 0$ จะได้ว่า $f(x)$ ไม่นิยาม จึงหาอนุพันธ์ที่ x ไม่ได้ และในกรณีที่ $x = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{0+h} + \sqrt{0}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}}
 \end{aligned} \tag{25}$$

ซึ่งหาค่าไม่ได้ ดังนั้นจึงได้ว่า เซตที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ function $f(x) = \sqrt{x}$ หาอนุพันธ์ได้บน S คือ ช่วงเปิด $(0, \infty)$

สูตรสำหรับหาอนุพันธ์

ถ้า c เป็นจำนวนจริง (real number) และ n เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว function $f(x) = c$ เป็น function ที่ differentiable และ function $g(x) = x^n$ เป็น function ที่ differentiable บนช่วงเปิดในโดเมนของมัน และ

1. $\frac{dc}{dx} = 0$
2. $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

ถ้า f และ g เป็น function ซึ่ง differentiable ที่ x_0 และ c เป็นค่าคงที่จริง แล้ว

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
3. $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
4. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

จงหา derivative ของแต่ละ function ต่อไปนี้ เทียบกับตัวแปรต้นของมัน

- (1) $f(x) = 5x^4$
- (2) $f(x) = 6x^{11} + 9$
- (3) $s(t) = 3t^8 - 2t^5 + 6t + 1$
- (4) $g(x) = \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right) \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$
- (5) $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}$

วิธีทำ ใช้สูตรในทฤษฎีบทข้างต้นหา derivative ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & f(x) = 5x^4 \\
 & f'(x) = \frac{d}{dx}(5 \cdot x^4) \\
 & = 5 \frac{d}{dx}(x^4) = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3
 \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & f(x) = 6x^{11} + 9 \\
 & f'(x) = \frac{d}{dx}(6x^{11} + 9) \\
 & = 5 \frac{d}{dx}(6x^{11}) + \frac{d}{dx}9 \\
 & = 66x^{10}
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & s(t) = 3t^8 - 2t^5 + 6t + 1 \\
 & s'(t) = \frac{d}{dt}(3t^8 - 2t^5 + 6t + 1) \\
 & = 24t^7 - 10t^4 + 6
 \end{aligned} \tag{28}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right) \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) \\
 g'(x) &= \frac{d}{dx} \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right) \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right) \frac{d}{dx} \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) \\
 &= \left(2x - \frac{1}{2}x^{-1}\right) \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right) (2x - 2x^{-3})
 \end{aligned} \tag{29}$$

(5)

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} \\
 h'(x) &= \frac{(x^4 + 1) \frac{d}{dx}(x^2 - 1) - (x^2 - 1) \frac{d}{dx}(x^4 + 1)}{(x^4 + 1)^2} \\
 &= \frac{(x^4 + 1)(2x) - (x^2 - 1)(4x^3)}{(x^4 + 1)^2}
 \end{aligned} \tag{30}$$

จงหา $f'(0)$ เมื่อ $f(x) = (x^6 - x^5 - x^4 - x^3)(x^5 - x^4 - x^3 - x^2)$

วิธีทำ จาก $f(x) = (x^6 - x^5 - x^4 - x^3)(x^5 - x^4 - x^3 - x^2)$ จะได้

$$f'(x) = (x^6 - x^5 - x^4 - x^3)(5x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x) + (x^5 - x^4 - x^3 - x^2)(6x^5 - 5x^4 - 4x^3 - 3x^2)$$

ดังนั้น $f'(0) = 0$

อนุพันธ์อันดับสูง (High Order Derivatives)

ถ้า f เป็น function ที่หา derivative ได้ และ f' ก็เป็น function ที่หา derivative ได้อีก เราเรียก $(f')'$ ว่า “อนุพันธ์อันดับสอง (second derivative) ของ f ” เขียนแทนด้วย f'' ในทำนองเดียวกัน เราจะมี “อนุพันธ์อันดับสาม (third derivative) ของ f ” เขียนแทนด้วย f''' ฯลฯ สำหรับอนุพันธ์อันดับ n (n th derivative) ของ f โดยที่ $n \geq 4$ เราเขียนแทนด้วย $f^{(n)}$ นอกจากนี้เราใช้สัญลักษณ์ $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ แทน n th derivative ของ f และ $\frac{d^n f(x)}{dx^n}|_{x=x_0}$ แทน n th derivative ของ f ที่ x_0 (ซึ่งคือ $f^{(n)}(x_0)$ นั่นเอง)

ถ้าให้ $y = f(x)$ เราสามารถใช้สัญลักษณ์ $y', y'', y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)}$ หรือ $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$ แทนอนุพันธ์อันดับที่ $1, 2, 3, 4, \dots, n$ ตามลำดับ และแทนค่าอนุพันธ์ที่ x_0 ด้วย $\frac{d^ny}{dx^n}|_{x=x_0}$

ด้วยหลักการเดียวกัน “อนุพันธ์อันดับหนึ่ง (first derivative) ของ f ” ก็คือ อนุพันธ์ของ f นั่นเอง

จงหาอนุพันธ์ทั้งหมดของ $f(x) = x^n$ เมื่อ $n > 1$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^n$ จะได้

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1} \\ f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} \\ f'''(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ f^{(4)}(x) &= n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= n! \\ f^{(k)}(x) &= 0 \text{ เมื่อ } k \geq n \end{aligned} \quad (31)$$

การตีความอนุพันธ์ (Interpretation of Derivatives)

อนุพันธ์ในเชิงความชัน (Derivatives as Slopes)

ในกรณีที่เราลองจุดกราฟ (plot graph) ของฟังก์ชัน เราได้ทราบมาแล้วว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x ใดๆ ก็คือความชันของเส้นสัมผัสกราฟ (เรียกว่าความชันของกราฟ) ของฟังก์ชัน f ที่จุด $(x, f(x))$ นั่นเอง ความจริงข้อนี้สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันได้

จงพิจารณาว่ามีเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ที่ตั้งฉากกันหรือไม่

วิธีทำ เราทราบว่าเส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ -1 พิจารณาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ที่จุด $(x, f(x))$ ใดๆ จะได้ว่า

$$\text{ความชันดังกล่าวมีค่าเท่ากับ } f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x+1} \right) = \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{ฉะนั้น ความชันของเส้นสัมผัส}$$

กราฟนี้ที่จุดใดๆ จึงมีค่าเป็นบวกเสมอ จึงสรุปได้ว่า กราฟของฟังก์ชันนี้ไม่มีเส้นสัมผัสคู่ใดที่ตั้งฉากกัน เพราะผลคูณของความชันของเส้นสัมผัสเป็นจำนวนจริงบวกเสมอ ไม่สามารถเป็น -1 ได้

ภูเขาจำลองในพิพิธภัณฑ์วิทยาศาสตร์แห่งหนึ่ง เกิดจากการหมุนของพาราโบลาคว่ำรอบแกนสมมาตรของมัน โดยที่ฐานของภูเขาจำลองเป็นรูปวงกลมรัศมี 5 เมตร และยอดเขาอยู่สูงจากฐานเป็นระยะทาง 8 เมตร บนยอดเขาติดตั้งโคมไฟ ณ ตำแหน่งสูงจากยอดเขาขึ้นไปอีก 0.5 เมตร เมื่อเปิดโคมไฟ แสงไฟจากโคมจะทำให้พื้นบริเวณรอบๆ ภูเขาจำลองที่ไม่ถูกภูเขาจำลองบัง สว่างขึ้น จงหาว่าบริเวณที่สว่างดังกล่าวเป็นบริเวณบนพื้นภายนอกวงกลมรัศมีเท่าใด

จากโจทย์จำลองรูปได้ดังภาพ 1.3 ในที่นี้สมมุติว่าแหล่งกำเนิดแสงเป็นจุด จะเห็นว่า แนวแบ่งส่วนมืดและส่วนสว่างจะผ่านจุดกำเนิดแสง และอยู่ในแนวเส้นสัมผัสผิวของพาราโบลาด้วย ให้จุดกึ่งกลางฐานของภูเขาจำลองเป็นจุดกำเนิด และสมมุติให้ $f(x) = a - kx^2$ เป็นสมการของรูปพาราโบลา จากเงื่อนไขความกว้างและความสูงของภูเขาจำลอง จะได้ว่า $f(0) = 8$ และ $f(5) = 0$ ซึ่งทำให้ $a = 8$ และ $k = 8/25$ ดังนั้น $f(x) = 8 - 8x^2/25$ ให้ $(x, f(x))$ เป็นจุดที่แนวแบ่งส่วนมืดและส่วนสว่างสัมผัสกับพาราโบลา จะได้ว่า ความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุดดังกล่าวเท่ากับ $f'(x) = -16x/25$ แต่เส้นสัมผัสนี้ผ่านจุดกำเนิดแสง $(0, 8.5)$ และจุด $(x, f(x)) = (x, 8 - 8x^2/25)$ จึงได้ว่า มีความชัน

เป็น $\frac{8 - 8x^2/25 - 8.5}{x - 0}$ นั่นคือ $\frac{8 - 8x^2/25 - 8.5}{x - 0} = -16x/25$ หรือ $x = 5/4$ ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ $-16 \times (5/4)/25 = -4/5$ ถ้าบริเวณบนพื้นที่สว่าง เป็นบริเวณภายนอกวงกลมรัศมี r จะได้ว่า เส้นสัมผัสข้างต้น ต้องผ่านจุด $(r, 0)$ ด้วย นั่นคือความชันจะเท่ากับ $\frac{0 - 8.5}{r - 0}$ ซึ่งทำให้ $\frac{0 - 8.5}{r - 0} = -4/5$ หรือ $r = 10.625$ นั่นคือ บริเวณที่สว่าง เป็นบริเวณบนพื้นภายนอกวงกลมรัศมี 10.625 เมตร

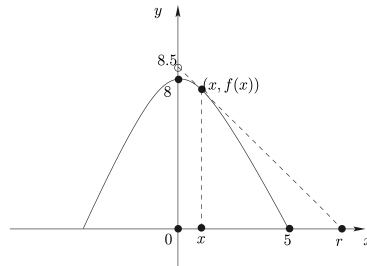


Figure 16: รูปภาพสำหรับตัวอย่างข้างต้น

อนุพันธ์ในเชิงอัตราเร็ว (Derivatives as Speeds)

ถ้าพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยให้ $f(t)$ เป็นระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ ณ เวลา t เราจะได้ว่า $f'(t)$ ก็คืออัตราเร็ว ณ เวลา t ซึ่งเรียกว่า อัตราเร็วชั่วขณะ (instantaneous speed) ในขณะที่ปริมาณ $\frac{f(s) - f(t)}{s - t}$ เรียกว่า อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุ ในช่วงเวลา ตั้งแต่ s ถึง t

วัตถุเคลื่อนที่เป็นเวลานาน 1 นาที ตามสมการ $s = 0.5t + 0.1t^2$ เมื่อ t คือเวลาเป็นวินาที และ s คือระยะทางที่เคลื่อนที่ได้เป็นเมตร จงหา

- (1) อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วง 10 วินาทีแรก และในช่วง 10 วินาทีถัดไป
- (2) อัตราเร็วของวัตถุ ณ วินาทีที่ 10 และ ณ วินาทีที่ 20

วิธีทำ

(1) อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วง 10 วินาทีแรก เท่ากับ

$$\frac{s(10) - s(0)}{10 - 0} = \frac{(0.5 \times 10 + 0.1 \times 10^2) - (0.5 \times 0 + 0.1 \times 0^2)}{10 - 0} = 1.5 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วง 10 วินาทีถัดไป เท่ากับ

$$\frac{s(20) - s(10)}{20 - 10} = \frac{(0.5 \times 20 + 0.1 \times 20^2) - (0.5 \times 10 + 0.1 \times 10^2)}{20 - 10} = 3.5 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

วินาที

(2) เนื่องจาก $\frac{d}{dt} (0.5t + 0.1t^2) = 0.5 + 0.2t$

ดังนั้น อัตราเร็วของวัตถุ ณ วินาทีที่ 10 เท่ากับ

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=10} = \left. \frac{d}{dt} (0.5t + 0.1t^2) \right|_{t=10} = 0.5 + 0.2 \times 10 = 2.5 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

และ อัตราเร็วของวัตถุ ณ วินาทีที่ 20 เท่ากับ

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=20} = \left. \frac{d}{dt} (0.5t + 0.1t^2) \right|_{t=20} = 0.5 + 0.2 \times 20 = 4.5 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

อนุพันธ์ในเชิงอัตราการเปลี่ยนแปลง (Derivatives as Rates of Change)

เราจะเห็นได้ชัดจากนิยามของอนุพันธ์ว่า ในกรณีของฟังก์ชันต่างๆ ไป อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ก็คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าฟังก์ชัน เทียบกับตัวแปรต้นของมันนั่นเอง

เมื่อใช้เครื่องสุบลม สูบลมเข้าไปในลูกโป่ง เราอาจประมาณได้ว่า ณ ระยะเวลาใดๆ ลูกโป่งมีรูปร่างเป็นรูปทรงกลม จงหาอัตราการเพิ่มขึ้นของปริมาตรของลูกโป่ง ต่อหนึ่งหน่วยรัศมีที่เพิ่มขึ้นของลูกโป่ง ขณะที่ลูกโป่งมีรัศมี 10 เซนติเมตร

วิธีทำ ให้ r เป็นรัศมีของลูกโป่ง และ V เป็นปริมาตรของลูกโป่ง จากข้อสมมุติว่าลูกโป่งเป็นทรงกลม จะได้ว่า $V = 4\pi r^3/3$ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของลูกโป่งเทียบกับรัศมีเท่ากับ $\frac{dV}{dr} = 12\pi r^2/3 = 4\pi r^2$ ลูกบาศก์หน่วยต่อหน่วย นั่นคือ ขณะที่ลูกโป่งมีรัศมี 10 เซนติเมตร มันจะมีปริมาตรเพิ่มขึ้นในอัตรา $4 \times \pi \times 10^2 \approx 1256$ ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อเซนติเมตร หรือประมาณ 1.256 ลิตรต่อรัศมีที่เพิ่มขึ้น 1 เซนติเมตร

แบบฝึกหัด (Exercises)

1. จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้ ถ้าอนุพันธ์ดังกล่าวหาได้ ในกรณีที่หาค่าไม่ได้ ให้ระบุว่าหาค่าไม่ได้

1. $f'(x)$ เมื่อ $f(x) = g(x)h(x)k(x)$

2. $f^{(n)}(0)$ เมื่อ $f(x) = \sum_{i=1}^k x^i$ โดยที่ k และ n เป็นจำนวนนับ

3. $\frac{d}{dt} \frac{1}{1-t}$ และ $\frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{1-t}$

4. $\frac{d}{dt} \frac{f(t)}{t}$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\frac{d}{dt} f(t) = \frac{f(t)}{t}$ สำหรับทุกๆ $t \neq 0$

5. $f'(-1)$, $f'(-\frac{2}{3})$, $f'(0)$, $f'(1)$ เมื่อ $f(x) = x\sqrt{1+x}$

6. $\left. \frac{d}{dx} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \right|_{x=0}$

7. $\frac{dy}{dx}$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0.25}$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1}$ เมื่อ $y = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$

8. $\frac{d}{dx} (x^2\sqrt{1+x})$

9. $\frac{d^2y}{dx^2}$ เมื่อ $y = (1+x^2)\sqrt{1-2x}$ (หาอนุพันธ์ของ $\sqrt{1-2x}$ และ $1/\sqrt{1-2x}$ ก่อน)
10. $\frac{d^{10}y}{dx^{10}}$ เมื่อ $y = (x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)(x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2)$

2. จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงหาความชันของกราฟของสมการ $y = x^3 - 3x$ ณ ตำแหน่งซึ่ง $x = 2$
2. จงหาจุดบนกราฟ $y = x^3 - 3x$ ซึ่งมีเส้นสัมผัสกราฟที่ขนานกับเส้นสัมผัส ณ จุดซึ่ง $x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ
3. จงหาจุดบนกราฟ $y = x^3 - 3x$ ซึ่งมีเส้นสัมผัสกราฟที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ณ จุดซึ่ง $x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

กฎลูกโซ่ (The Chain Rule)

การทราบข้อมูลของ derivative ของฟังก์ชัน f และฟังก์ชัน g ทำให้เราสามารถหา derivative ของผลบวก $f + g$ ผลคูณ fg และผลหาร f/g ของฟังก์ชัน ทั้งสองได้ ข้อมูลนี้ยังใช้หา derivative ของฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสมได้ เราเรียกวิธีการหา derivative ของฟังก์ชัน ประกอบว่า chain rule โดยมีแนวคิดสำคัญคือ การสร้างตัวแปรใหม่ขึ้นมาช่วย ในการคำนวณ ดังรายละเอียดในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ถ้าฟังก์ชัน g หา derivative ได้ที่จุด x และฟังก์ชัน f หา derivative ได้ที่จุด $g(x)$ แล้ว ฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ หา derivative ได้ที่จุด x ยิ่งกว่านั้น ถ้า

$$y = f(g(x)) \quad \text{และ} \quad u = g(x)$$

แล้ว $y = f(u)$ และ

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงให้เห็นถึงการใช้ chain rule หา derivative ของฟังก์ชัน

พิจารณาฟังก์ชัน $y = \frac{1}{x^2+1}$ กำหนดให้ $u = x^2 + 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ในที่นี้ $y = \frac{1}{u}$ เราใช้ chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du} \left[\frac{1}{u} \right] \cdot \frac{d}{dx} [x^2 + 1] \\ &= \left(-\frac{1}{u^2} \right) \cdot (2x) \\ &= -\frac{1}{(x^2 + 1)^2} \cdot (2x) \\ &= -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}\end{aligned}\tag{32}$$

นั่นคือ $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

กำหนดให้ $y = u^{100}$ และ $u = x^3 + x^2 + x + 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ใช้ chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du} [u^{100}] \cdot \frac{d}{dx} [x^3 + x^2 + x + 1] \\ &= (100u^{99}) \cdot (3x^2 + 2x + 1) \\ &= 100(x^3 + x^2 + x + 1)^{99} (3x^2 + 2x + 1)\end{aligned}\tag{33}$$

นั่นคือ $\frac{dy}{dx} = 100(x^3 + x^2 + x + 1)^{99} (3x^2 + 2x + 1)$

ข้อสังเกต สูตรของกฎลูกโซ่สามารถเขียนได้ในอีกรูป ซึ่งสะดวกในการนำไปใช้ สังเกตว่า $y = f(u)$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} [f(u)] \quad \text{และ} \quad \frac{dy}{du} = f'(u)$$

สูตรของ chain rule จึงเขียนได้ว่า

$$\boxed{\frac{d}{dx} [f(u)] = f'(u) \frac{du}{dx}}$$

ซึ่งเขียนได้อีกรูปคือ

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

จงหา derivative ของฟังก์ชัน $y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}$

วิธีทำ เราแนะนำตัวแปร $u = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ และใช้สูตร chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left[\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1} \right] &= \frac{d}{dx} [\sqrt{u}] \\
 &= \frac{d}{du} \sqrt{u} \cdot \frac{du}{dx} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2}x^2 + x + 1 \right] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}} \cdot (x + 1) \\
 &= \frac{x + 1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}}
 \end{aligned} \tag{34}$$

นั่นคือ $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}}$

จงหาค่าของ $f'(x^3 + x)$ เมื่อกำหนดให้

$$\frac{d}{dx}[f(x^3 + x)] = (3x^2 + 1)^2$$

วิธีทำ เราใช้ chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}[f(x^3 + x)] &= f'(x^3 + x) \frac{d}{dx}[x^3 + x] \\
 &= f'(x^3 + x) \cdot (3x^2 + 1)
 \end{aligned} \tag{35}$$

ดังนั้น

$$(3x^2 + 1)^2 = f'(x^3 + x) \cdot (3x^2 + 1)$$

หรือ

$$f'(x^3 + x) = 3x^2 + 1$$

สังเกตความแตกต่างระหว่าง $\frac{d}{dx}f(x^3 + x)$ และ $f'(x^3 + x)$

กำหนดให้ $f(x) = |x|$ จงหา derivative ของฟังก์ชัน f ที่ $x \neq 0$

วิธีทำ ฟังก์ชัน f เขียนได้ว่า

$$f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$$

ถ้า $x \neq 0$ แล้ว

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{d}{dx} \sqrt{x^2} \\
 &= \frac{d}{du} [\sqrt{u}] \cdot \frac{d}{dx} [x^2] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (2x) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot x \\
 &= \frac{x}{|x|}
 \end{aligned} \tag{36}$$

นั่นคือ เมื่อ $x \neq 0$ แล้ว $f'(x) = \frac{x}{|x|}$

แบบฝึกหัด

1. จงหา derivative ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = \sqrt{1-x+x^2}$

2. $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$

3. $f(x) = (2x+5)^3(3x-7)^5$

4. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3+x^2+1}$

2. จงหา derivative ของฟังก์ชัน

$$y = \sqrt{x + \sqrt[3]{3x + \sqrt[4]{4x}}}$$

3. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันหา derivative ได้ และ $g = f \circ f$ ถ้า $f(1) = 1$, $f(2) = 4$ และ $f'(4) = 8$ จงหาค่าของ $g'(1)$

4. พิจารณตารางค่าของฟังก์ชัน f, f', g, g' และ h, h' โดยที่ $h = f \circ g$

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$	$h'(x)$
-1	0	1	2	2	0	2
0	3	-1	?	1	1	?
1	?	0	0	?	?	3

จงหาค่าของ $h(0)$, $f(1)$, $h'(0)$, $f'(1)$ และ $g'(1)$

5. จาก chain rule

$E : chain1$

$$, \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \text{ จงหาสูตร ของ } \frac{d^2y}{dx^2}$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันอินเวอร์ส (Derivatives of Inverse Functions)

ถ้าฟังก์ชัน f และ g สอดคล้องสมบัติ

1. $g(f(x)) = x$ สำหรับ x ที่เป็นสมาชิกของโดเมนของ f
2. $f(g(y)) = y$ สำหรับ y ที่เป็นสมาชิกของโดเมนของ g

เรากล่าวว่า f และ g เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส โดยที่ f เป็น ฟังก์ชันอินเวอร์สของ g และ g เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส ของ f

ถ้าเขียน f^{-1} แทน g และใช้สัญกรณ์ x แทนสมาชิกทั้งในโดเมนของ f และ f^{-1} สมมติว่าทั้งสองฟังก์ชันหา derivative ได้ ให้

$$y = f^{-1}(x)$$

เราสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$x = f(y)$$

หา derivative เทียบกับ x

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x] &= \frac{d}{dx}[f(y)] \\ &= f'(y) \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned} \tag{37}$$

นั่นคือ

$$1 = f'(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

หรือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$$

เขียนใหม่ได้ว่า

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

กำหนดให้ $f(x) = x^3$ มี $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ จงหา $\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)]$

วิธีทำ คำนวณหา derivative ได้ว่า $f'(x) = 3x^2$ และ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^{1/3}] &= \frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{3[f^{-1}(x)]^2} \\ &= \frac{1}{3[x^{1/3}]^2} \\ &= \frac{1}{3x^{2/3}} \end{aligned} \tag{38}$$

ในการหา derivative ของฟังก์ชันอินเวอร์ส เราอาจจะไม่ใช่สูตรโดยตรง แต่ จะคำนวณหา derivative ตามขั้นตอนที่ได้แสดงข้างต้น ดังตัวอย่าง

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + x + 2$ จงหา derivative ของ $f^{-1}(x)$

วิธีทำ เราเขียน $x = f(y) = y^3 + y + 2$ แล้วหา derivative เทียบกับ x

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x] &= \frac{d}{dx}[y^3 + y + 2] \\ 1 &= (3y^2 + 1)\frac{dy}{dx}\end{aligned}\tag{39}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2 + 1}$$

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอินเวอร์ส ถ้า $f(1) = 2$ และ $f'(1) = 3$ แล้ว จงหาค่าของ $(f^{-1})'(2)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(1) = 2$ แล้ว $f^{-1}(2) = 1$ และจากสูตร

$E : \text{inverse}$

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(2) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} \\ &= \frac{1}{f'(1)} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}\tag{40}$$

นั่นคือ $(f^{-1})'(2) = 1/3$

แบบฝึกหัด

1. จงหา $(f^{-1})'(x)$ เมื่อกำหนด

1. $f(x) = 2x^3 - 1$

2. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

3. $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$

4. $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$

Differentials, Implicit Differentiation and Related Rates

Differentials

ที่ผ่านมา เราให้ความหมายของ dy/dx ว่าเป็น derivative ของ y เทียบกับ x ในความหมายของตัวดำเนินการ $\frac{d}{dx}$ ที่กระทำ กับฟังก์ชัน y หัวข้อนี้เราจะนิยาม dy และ dx แยกจากกัน และให้ความ

หมาย dy/dx ว่าเป็นเศษส่วน

ผลต่างระหว่างค่าสองค่าของตัวแปร เราเรียกว่า increment เช่นในตัวแปร x ผลต่างระหว่างค่า $x = x_0$ และ $x = x_1$ เราเขียน increment ใน x นี้ ว่า $\Delta x = x_1 - x_0$

ให้ $y = f(x)$ และให้ x มีการเปลี่ยนค่าจาก $x = x_0$ ไปยัง $x = x_1$ ก็จะมี การเปลี่ยนค่าใน y จาก $y_0 = f(x_0)$ ไปยัง $y_1 = f(x_1)$ นั้นหมายความว่า increment Δx ทำให้เกิด increment $\Delta y = y_1 - y_0$ โดยที่

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$$

หรือ

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ดังนั้น สำหรับค่า x ทั่วไปแล้ว เราอาจเขียน

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

และนิยามของ derivative ก็เขียนได้อีกรูปว่า

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

เมื่อเราเห็นการเขียนสัญกรณ์ $\frac{dy}{dx}$ มีแนวโน้มที่จะ ทำให้เราคิดถึงผลหารของ dy ด้วย dx ซึ่งในขณะนี้ทั้งสองปริมาณยังไม่มี ความหมายใด ๆ สังเกตว่าในสูตรของ chain rule ที่ว่า $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ก็ให้ความรู้สึกแรกว่าน่าจะเป็นผลหารเช่นกัน ดังนั้นลำดับถัดไปเราจะให้ความหมายของ พจน์ dx , dy และการตีความหมายในรูปเศษส่วน

เริ่มด้วยการตรึงค่า x และนิยาม dx ว่าเป็นตัวแปรต้น กำหนดให้ $y = f(x)$ และ f เป็นฟังก์ชัน หา derivative ได้ เรานิยาม dy ว่าเป็นตัวแปรตามดังนี้

$$\boxed{dy = f'(x) dx}$$

ถ้า $dx \neq 0$ เราเขียนใหม่ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

เราเรียก dy ว่า differential ของ y และ dx ว่า differential ของ x

มีความแตกต่างระหว่าง ความหมายของ differential dy และ increment $\Delta y = y_1 - y_0$ ถ้าเรา กำหนดให้ differential dx และ increment Δx มีค่า เดียวกัน นั่นคือ $dx = \Delta x$ จะเห็นว่า Δy แทนถึง ค่าผลต่างใน y ของจุดเริ่มต้น x และจุดปลาย $x + \Delta x$ ตามเส้นโค้ง $y = f(x)$ นั่นคือ $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ในขณะที่ dy แทนถึงค่าผลต่างใน y ของจุดเริ่มต้น x และจุดปลาย $x + \Delta x$ ตามเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ผ่านจุด $(x, f(x))$ และ มีความชันเท่ากับ $f'(x)$

ถ้า $y = f(x) = x^2 + 1$ แล้ว $f'(x) = 2x$ กำหนดให้ $x = 3$ จงหาค่าของ dy และ Δy เมื่อ $dx = \Delta x = 0.1$

วิธีทำ ค่าของ dy คือ

$$dy = f'(x) dx = 2x dx$$

กรณีตรง $x = 3$ ได้ว่า

$$dy = 6 dx$$

ถ้าให้ $dx = 0.1$ ค่าของ $dy = 0.6$ ถ้าเราพิจารณาค่า $dx = \Delta x = 0.1$ เราจะได้

$$\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = (3.1)^2 + 1 - 3^2 - 1 = 0.61$$

สังเกตว่า $dy = 0.6$ ในขณะที่ $\Delta y = 0.61$

มีข้อสังเกตว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันหา derivative ได้ที่ค่า x_0 แล้วเส้นสัมผัส กับเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(x_0, f(x_0))$ จะใกล้เคียงกับกราฟของ f สำหรับค่า x ใกล้ ๆ กับค่า x_0 สมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งนี้ที่ผ่านจุด $(x_0, f(x_0))$ มี ความชัน $f'(x_0)$ คือ

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

เมื่อเรากล่าวว่า เส้นโค้ง $y = f(x)$ และเส้นสัมผัสกับเส้นใกล้เคียงกันหมายถึงถ้าเรา ให้ x เข้าใกล้ x_0 ค่าของ $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ก็จะใกล้เคียงค่า $f(x)$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

เราเรียกสมการ

$$E : approx$$

ว่า local linear approximation ของ f ที่ x_0 เรา อาจเขียนในอีกรูปว่า

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

จงหา local linear approximation ของฟังก์ชัน $f(x) = x^{1/3}$ ที่ $x_0 = 1$

วิธีทำ เรามี $f(x) = x^{1/3}$ และคำนวณหา derivative

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

local linear approximation ของ f ที่ $x_0 = 1$ จึงเป็น

$$x^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}(x - 1) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

ถ้าเราต้องการประมาณค่าของ $(1.1)^{1/3}$ เราใช้ local linear approximation ของ f ในการประมาณ โดยได้ค่าประมาณคือ $1 + \frac{1}{3}(1.1 - 1) = 1.03$

Implicit Differentiation

บางครั้งเราต้องการหา derivative ของฟังก์ชัน ซึ่งไม่สามารถเขียนได้ ในรูปฟอร์ม $y = f(x)$ เช่นในความสัมพันธ์

$$x^2 + y^3 - xy = 0$$

การหา derivative ของ y เทียบกับ x เราไม่จำเป็นต้องเขียนความสัมพันธ์ ให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ ก่อน หลักการสำคัญก็คือ เราคิดให้ y เป็น ฟังก์ชันของ x เช่นในตัวอย่างที่ยกมา ถ้าเราหา derivative ทั้งสองข้าง ของสมการเทียบกับ x

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^2 + y^3 - xy] &= \frac{d}{dx}[0] \\ \frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[y^3] - \frac{d}{dx}[xy] &= 0 \\ 2x + 3y^2 \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx} - y &= 0\end{aligned}\tag{41}$$

เขียนใหม่ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 3y^2}$$

กำหนดให้ $y^2 = x^3(2 - x)$ สังเกตว่า $(x, y) = (1, 1)$ อยู่บน กราฟของความสัมพันธ์ จงหาว่าความชันของกราฟนี้ที่จุด $(1, 1)$

วิธีทำ หา derivative เทียบกับ x ทั้งสองข้าง ของสมการ

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[y^2] &= \frac{d}{dx}[x^3(2 - x)] \\ \frac{d}{dy}[y^2] \cdot \frac{dy}{dx} &= x^3 \frac{d}{dx}[2 - x] + (2 - x) \frac{d}{dx}[x^3] \\ (2y) \cdot \frac{dy}{dx} &= -x^3 + (2 - x)(3x^2) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(2 - x)(3x^2)}{2y}\end{aligned}\tag{42}$$

ดังนั้นที่จุด $(x, y) = (1, 1)$ เราจะได้ derivative ของ y เทียบ กับ x เป็น $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}$

จงหาสมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งของสมการ

$$xy^2 = 1$$

ที่จุด $(1, -1)$

วิธีทำ เริ่มด้วยการหาความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $(1, -1)$ เราหา derivative ของสมการเทียบกับ x

ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[xy^2] &= \frac{d}{dx}[1] \\ x \frac{d}{dx}[y^2] + y^2 \frac{d}{dx}[x] &= 0 \\ x(2y) \frac{dy}{dx} + y^2 &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{2x}\end{aligned}\tag{43}$$

ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $(1, -1)$ มีค่าเท่ากับ $1/2$ สมการเส้น สัมผัสของเส้นโค้งที่จุด $(1, -1)$ จึงเป็น

$$\begin{aligned}\frac{y - (-1)}{x - 1} &= \frac{1}{2} \\ y + 1 &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\end{aligned}\tag{44}$$

นั่นคือ $y = \frac{x-3}{2}$

พิจารณาสมการ

$$\frac{1}{3}x^3 + y^3 - xy^2 = 5$$

จงหาว่าที่จุดใดบนเส้นโค้งที่เส้นสัมผัสขนานแกน x

วิธีทำ เราเริ่มด้วยการหา derivative ของสมการ

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3 + y^3 - xy^2\right] &= \frac{d}{dx}[5] \\ \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3\right] + \frac{d}{dx}[y^3] - \frac{d}{dx}[xy^2] &= 0 \\ x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - x \frac{d}{dx}[y^2] - y^2 &= 0 \\ x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - x(2y) \frac{dy}{dx} - y^2 &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y^2 - x^2}{3y^2 - 2xy}\end{aligned}\tag{45}$$

สังเกตว่าเส้นสัมผัสที่ขนานแกน x จะมีความชันเป็น 0 ดังนั้นที่จุดบน เส้นโค้งซึ่งมีเส้นสัมผัสขนานแกน x สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{aligned}y^2 - x^2 &= 0 \quad \text{และ} \\ \frac{1}{3}x^3 + y^3 - xy^2 &= 5\end{aligned}\tag{46}$$

เนื่องจาก $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) = 0$

- เมื่อ $y = x$ เราได้ว่า $x^3 = 15$ หรือ $x = y = \sqrt[3]{15}$
- เมื่อ $y = -x$ เราได้ว่า $x^3 = -3$ หรือ $x = -y = \sqrt[3]{-3}$

เพราะฉะนั้นที่จุด $(\sqrt[3]{15}, \sqrt[3]{15})$ และ $(\sqrt[3]{-3}, -\sqrt[3]{-3})$ บนเส้นโค้ง เส้นสัมผัสมีความชันเป็น 0

Related Rates

เราศึกษาปัญหา related rates เราต้องการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ ปริมาณหนึ่งซึ่งมีความสัมพันธ์ กับอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณอื่น ซึ่งเราทราบค่าแล้ว วิธีการทำได้ดังนี้

1. กำหนดปริมาณต่าง ๆ ด้วยตัวแปร
2. ระบุดัชนีการเปลี่ยนของปริมาณที่รู้ค่า และอัตราการเปลี่ยนแปลง ของปริมาณที่ต้องการหาค่า
3. หาสมการซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณในข้อสอง
4. หา derivative ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับเวลา แก้สมการหาค่าของ อัตราการเปลี่ยนของ ปริมาณที่ไม่รู้ค่า
5. หาค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงที่จุดกำหนด

สมมติว่าเนื้องอกมีรูปร่างคล้ายทรงกลม ซึ่งสูตรการหาปริมาตรของทรงกลม คือ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ เมื่อ r เป็นรัศมีของทรงกลม เนื่องจากเนื้องอกมีการขยายตัว ทำให้ r มีขนาดยาวขึ้นด้วยอัตราคงที่ 1.25 มิลลิเมตรต่อเดือน อยากทราบว่าปริมาตรของเนื้องอกจะเพิ่มขึ้นมากน้อยเพียงใด เมื่อ $r = 10$ mm

กำหนดให้ V เป็นปริมาตรของเนื้องอก (หน่วยคือ mm^3) r เป็นรัศมีของเนื้องอก (หน่วยคือ mm) จากโจทย์ จะเห็นว่า เมื่อเวลาผ่านไป เนื้องอกมีการขยายตัวทำให้ r มีขนาดยาวขึ้น และ V เพิ่มขึ้น ด้วย ดังนั้น V, r ล้วนเป็นตัวแปรตาม ในขณะที่ t เป็นตัวแปรต้น นอกจากนี้ โจทย์ยังบอกอีกด้วยว่า r มีขนาดยาวขึ้นด้วยอัตรา 1.25 มิลลิเมตรต่อเดือน ดังนั้น $\frac{dr}{dt} = 1.25$ สิ่งที่เราต้องการก็คือ อัตราการ

เปลี่ยนแปลงปริมาตรของเนื้องอก นั่นคือ $\frac{dV}{dt}$ จากความสัมพันธ์ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ หาอนุพันธ์เทียบกับ t ทั้ง 2 ข้าง $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ เมื่อ $r = 10$ mm

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(10)^2(1.25) = 500\pi > 0$$

ดังนั้น ปริมาตรของเนื้องอกจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 500π ลูกบาศก์มิลลิเมตรต่อเดือน

วิธีการอย่างง่าย ในการกำจัดตะกอนที่แขวนลอยอยู่ในน้ำ เหน้ล่างในกรวยที่มี filter ไว้ สมมติว่ากรวยสูง 16 นิ้ว และมีรัศมีที่ฐานเท่ากับ 4 นิ้ว ถ้าน้ำไหลออกจากกรวยด้วยอัตราเร็ว 2 ลูกบาศก์นิ้วต่อนาที เมื่อระดับน้ำสูง 8 นิ้ว ความลึกของน้ำจะลดลงมากน้อยเพียงไร

กำหนดให้ t เป็นเวลานับจากการเริ่มต้นการสังเกต (min) V เป็นปริมาตรของน้ำในกรวย ณ เวลา t (in^3) y เป็นความลึกของน้ำในกรวย ณ เวลา t (in) x เป็นรัศมีของพื้นที่ผิวของน้ำ ณ เวลา t (in) อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของน้ำ คือ $\frac{dV}{dt}$ และ อัตราการเปลี่ยนแปลงความลึกของน้ำ คือ $\frac{dy}{dt}$ โจทย์กล่าวว่าน้ำไหลออกจากกรวยด้วยอัตราเร็ว 2 in^3/min เมื่อระดับน้ำสูง 8 in แสดงว่า น้ำในกรวย มีปริมาตรลดลง

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{y=8} = -2$$

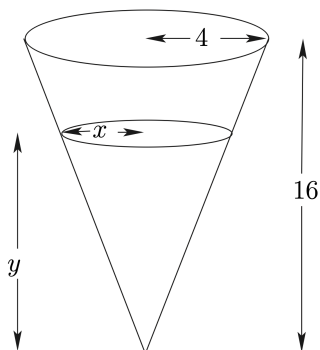


Figure 17: การไหลเวียนของอากาศในหลอดลม

การระบุอัตราการเปลี่ยนแปลงแบบนี้ แสดงให้เห็นว่า ณ ความลึกของน้ำต่างกัน อัตราการเปลี่ยนแปลง ปริมาตรของน้ำก็จะแตกต่างกันไป ไม่ได้เปลี่ยนแปลงด้วยอัตราที่คงที่เหมือนตัวอย่างก่อนหน้านี้ โจทย์ ต้องการทราบว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงความลึกของน้ำ เมื่อระดับน้ำสูง 8 นิ้ว นั่นคือ $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=8}$

จากสูตรการหาปริมาตรของกรวย

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

และจากคุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย $\frac{x}{y} = \frac{4}{16}$ หรือ $x = \frac{y}{4}$ ทำให้ได้ $V = \frac{\pi}{48}y^3$ หอนุนุพันธ์

เทียบกับ t ทั้ง 2 ข้าง จะได้ $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{48}(3y^2 \frac{dy}{dt})$ หรือ $\frac{dy}{dt} = \frac{16}{\pi y^2} \frac{dV}{dt}$ ดังนั้น

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=8} = \frac{16(-2)}{\pi(8)^2} = \frac{-1}{2\pi} \text{ (in/min)}$$

สรุปว่า เมื่อระดับน้ำสูง 8 นิ้ว ความลึกของน้ำจะลดลงด้วยอัตรา $\frac{1}{2\pi}$ นิ้วต่อวินาที

เมื่อโยนก้อนหินลงในสระน้ำ จะเกิดคลื่นซึ่งรัศมีเพิ่มขึ้นด้วย อัตรา 0.9 เมตร/วินาที พื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่นหลังจาก ผ่านไป 10 วินาทีเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด?

วิธีทำ กำหนดให้

1. t แทนเวลา (วินาที)
2. r แทนรัศมีของคลื่น (เมตร)
3. A แทนพื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่น (ตารางเมตร)

พื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่นเป็นไปตามสูตร

$$A = \pi r^2$$

เราหา derivative เทียบกับเวลา ได้ว่า

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

เรามีข้อมูลว่า $\frac{dr}{dt} = 0.9$ เมตร ในขณะวินาที ที่ 10 รัศมีของคลื่นจึงมีค่าเท่ากับ $0.9 \cdot 10 = 9$ เมตร และดังนั้นพื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่นจึงเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา

$$\frac{dA}{dt} = (2\pi)(9)(0.9) = 50.89$$

ตารางเมตรต่อวินาที

เครื่องเททราย เททรายเป็นรูปกรวย ซึ่งความสูงของกองทรายมีค่าเท่ากับ เส้นผ่านศูนย์กลางที่ฐานของกองทรายเสมอ ถ้าความสูงเพิ่มขึ้นด้วยอัตราคงที่ 1.5 เมตร ต่อนาที จงหาว่าเครื่องเททรายเททรายด้วยอัตราเท่าใดเมื่อกองทรายมีความ สูงเท่ากับ 3 เมตร

วิธีทำ กำหนดให้

1. t แทนเวลา (นาที)
2. V แทนปริมาตรของกองทราย ณ เวลา t (ลูกบาศก์เมตร)
3. h แทนความสูงของกองทราย ณ เวลา t (เมตร)
4. r แทนรัศมีของพื้นกองทราย ณ เวลา t (เมตร)

ในแต่ละเวลา t อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรทรายคือ dV/dt และอัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงของกองทรายคือ dh/dt จากข้อมูล ที่ให้มา เรารู้ว่า

$$\frac{dh}{dt} = 1.5$$

เนื่องจากกองทรายมีลักษณะเป็นรูปกรวย ซึ่งมีสูตรว่า

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

เรายังทราบอีกว่า ที่แต่ละเวลา t ความสูงของกองทราย มีค่าเท่ากับรัศมีของพื้นกองทราย $r = h$ เพราะฉะนั้น

$$V = \frac{1}{3}\pi h^3$$

หา derivative เทียบกับ t ได้ว่า

$$\frac{dV}{dt} = \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

ดังนั้น

$$\frac{dV}{dt} = 1.5\pi h^2$$

เมื่อกองทรายสูง 3 เมตร อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรกองทรายจึงเป็น

$$\frac{dV}{dt} = 13.5\pi = 42.41$$

ลูกบาศก์เมตรต่อนาที

จุด P เคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งตามสมการ

$$y = \sqrt{x^2 + 16}$$

เมื่อ $P = (3, 5)$ แล้ว y มีค่าเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2 หน่วย/วินาที ค่า x มีการเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด

วิธีทำ กำหนดให้

1. t แทนเวลา (วินาที)

เราหา derivative ของสมการที่กำหนดเทียบกับเวลา t พบว่า

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} \frac{dx}{dt}$$

เรารู้ว่าที่จุด $P = (3, 5)$

$$\frac{dy}{dt} = 2$$

แทนค่าทั้งสองในสมการ

$$E : \text{example}$$

เราจะได้ว่า

$$2 = \frac{2}{\sqrt{9 + 16}} \frac{dx}{dt}$$

นั่นคือ

$$\frac{dx}{dt} = 5$$

นั่นคือ x มีการเปลี่ยนแปลงด้วยอัตรา 5 หน่วยต่อวินาที

ทำเรือหนึ่ง มีแท่งแขวนลูกเรืออยู่เหนือท่า มีเชือกผูกไว้กับ หัวเรือซึ่งอยู่ต่ำกว่าดรรชนีของแท่งแขวน 3 เมตร ถ้าเราดึงเชือกด้วยอัตราเร็ว 6 เมตร/นาที เรือถูกดึงเข้าหาท่าด้วยอัตราเร็วเท่าใดเมื่อเชือก จากหัวเรือถึงลูกเรือมีความยาว 40 เมตร

วิธีทำ กำหนดให้

1. t แทนเวลา (นาที)

2. x ระยะทางในแนวนอน (เมตร)
3. y ระยะทางในแนวตั้ง (เมตร)

จากข้อมูลของปัญหา เราสรุปได้ว่า อัตราการดึงเชือกแทนด้วยพจน์

$$\frac{dy}{dt} = 6$$

คำถามให้ $\frac{dx}{dt}$ เมื่อเชือกยาว 40 เมตรนับจากหัวเรือถึงลูกเรือ โดยการใช้พีทาโกรัส เราจึงได้ความสัมพันธ์

$$x^2 + y^2 = 40^2$$

เราหา derivative เทียบกับ t ทั้งสองข้างของสมการ

$$\begin{aligned} 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} &= 0 \\ x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{47}$$

เนื่องจากลูกเรืออยู่สูงกว่าหัวเรือ 3 เมตร หรือ $y = 3$ ในขณะ ที่ การดึงเชือกด้วยอัตราเร็ว 6 เมตร หรือ $\frac{dy}{dt} = 6$ เพราะฉะนั้น เมื่อเชือกยาว 40 เมตร เรืออยู่ห่างออกไปเป็นระยะทาง

$$x^2 + 3^2 = 40^2$$

หรือ $x = \sqrt{1591}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sqrt{1591} \frac{dx}{dt} + 4(6) &= 0 \\ \frac{dx}{dt} &= -\frac{24}{\sqrt{1591}} = -0.60 \end{aligned} \tag{48}$$

ซึ่งหมายถึงเรือถูกดึงเข้าหาท่าด้วยอัตราเร็ว 0.6 เมตรต่อวินาที

1. วาดภาพและกำหนดตัวแปรต่างๆ เช่น x, y เป็นต้น
2. ระบุอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรทุกตัวที่โจทย์กำหนดให้ และที่โจทย์ต้องการให้หา เช่น $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ เป็นต้น
3. หาสมการสมการหนึ่งๆ ที่แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่กำหนดขึ้นในขั้นตอนที่ 1 และเมื่อหาอนุพันธ์ของสมการนี้ จะมีเทอมที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ในขั้นตอนที่ 2
4. หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการในขั้นตอนที่ 3 เทียบกับเวลาและนำค่าของอนุพันธ์ที่ทราบลงไป ในสมการ
5. หาค่าของอนุพันธ์ที่โจทย์ต้องการด้วยวิธีทางพีชคณิต

แบบฝึกหัด

- กำหนดให้ $y = \ln x$ จงหา dy และ Δy ที่ $x = 1$ โดย ที่ $dx = \Delta x = 0.5$
- พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ แล้วหาสูตร dy และ Δy
 - $y = x\sqrt{x-1}$
 - $y = xe^x$
 - $y = x \sin x$
 - $y = \tan(x^2)$
- จงหา local linear approximation ของเส้นโค้งจากสมการ $xe^y = y$ ที่จุด $(0, 0)$ และใช้สมการที่ได้ประมาณค่าของ y เมื่อ $x = 0.1$
- จงหา $\frac{dy}{dx}$ สำหรับความสัมพันธ์ต่อไปนี้
 - $x^2 + y^2 = 25$
 - $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$
 - $x \sin y + y \sin x = 1$
 - $e^{xy} + xy = 1$
- หญิงคนหนึ่งสูง 1.55 เมตร เดินเข้าเสาไฟด้วยอัตราเร็ว 0.75 เมตร/วินาที เสาไฟติดดวงไฟสูง 5 เมตร
 - เงาของหญิงคนนี้เปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด
 - ปลายเงาของด้านศีรษะหญิงคนนี้เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่าใด
- อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งอธิบายตามสมการ

$$\frac{x^2 y}{1 + y^2} = \frac{2}{5}$$

- กำหนดให้พิกัดแกน x ของอนุภาคเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 4 หน่วย/วินาที เมื่ออนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง $(1, 2)$
- พิกัดแกน y ของอนุภาคเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด เมื่ออนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง $(1, 2)$
 - ณ ตำแหน่ง $(1, 2)$ อนุภาคกำลังเคลื่อนสูงขึ้นหรือลดลงในพิกัด xy
- ความเข้มของแสงที่ผ่านเข้าตาขึ้นอยู่กับรัศมีของ pupil ถ้า pupil มีขนาดมากขึ้น ปริมาณของแสงก็จะเข้าตามากขึ้น ดังสมการ $I = kr^2$ เมื่อ I เป็นความเข้มของแสง r เป็นรัศมีของ pupil และ k เป็นค่าคงตัว ในช่วงเวลา 6 โมงเช้าถึงเที่ยง รัศมีของ pupil จะขยายตัวด้วยอัตราเร็วคงที่ 0.1 mm/min จงหาว่าในช่วงเวลาดังกล่าว ความเข้มของแสงที่ผ่านเข้าตา จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร เมื่อ $r = 0.5$ cm

8. การแพร่ระบาดของแมลงวันทอง เริ่มที่ใจกลางของหมู่บ้านเล็กๆ แห่งหนึ่งนอกเมือง พื้นที่การแพร่ระบาดมีลักษณะคล้ายวงกลมดังแสดงในรูป 1.5 รัศมีของพื้นที่การแพร่ระบาดขยายเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 1.5 ไมล์ต่อปี จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่การแพร่ระบาด เมื่อรัศมีของพื้นที่การแพร่ระบาดมีค่าเท่ากับ 4 ไมล์

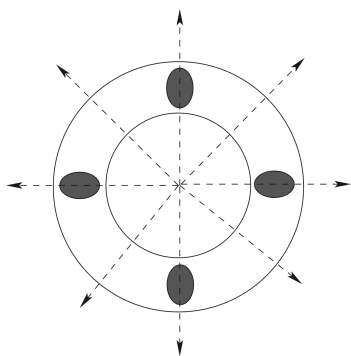


Figure 18: การแพร่ระบาดของแมลงวันทอง โดยที่วงรีสีเทาแทนแมลงวัน

อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เรา จะ ใช้ ความรู้ เกี่ยว กับ เอก ลั ก ษณ์ ตรีโกณมิติ และ ลิ มิต ของ ฟังก์ชัน ตรีโกณ ช่วย ในการ หา อนุพันธ์ ของ ฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ โดย นิยาม ดังนี้

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \quad \text{เมื่อ } x \text{ มีหน่วยเป็นเรเดียน} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= 0 \\ \sin A - \sin B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{aligned} \quad (49)$$

ถ้า $f(x) = \sin x$ แล้ว $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \sin x &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{h} \\
&= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{h} \\
&= 2 \cos x \lim_{\frac{h}{2} \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\
&= 2(\cos x) \frac{1}{2} \\
&= \cos x
\end{aligned} \tag{50}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
\sin(x+h) - \sin x &= 2 \cos \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{h}{2} \\
&= 2 \cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}
\end{aligned} \tag{51}$$

สำหรับการหาอนุพันธ์ของ cosine ก็ทำได้ในทำนองเดียวกันกับ sine ส่วนฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ หาได้โดยแปลงในรูป cosine หรือ sine เช่น

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ และ } \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

1. $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
2. $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
3. $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$
4. $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$
5. $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \sec x &= \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{\cos x} \\
 &= \frac{d}{dx} (\cos x)^{-1} \\
 &= (-1)(\cos x)^{-2} \frac{d}{dx} \cos x \\
 &= \frac{-1}{\cos^2 x} (-\sin x) \\
 &= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \\
 &= \sec x \tan x
 \end{aligned} \tag{52}$$

กำหนดให้ $y = x^2 \tan 3x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (x^2 \tan 3x) \\
 &= x^2 \frac{d}{dx} \tan 3x + \tan 3x \frac{d}{dx} x^2 \\
 &= x^2 (\sec^2 3x)(3) + (\tan 3x)(2x) \\
 &= 3x^2 \sec^2 3x + 2x \tan 3x
 \end{aligned} \tag{53}$$

กำหนดให้ $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) \\
 &= \frac{(1 + \cos x) \frac{d}{dx} \sin x - \sin x \frac{d}{dx} (1 + \cos x)}{(1 + \cos x)^2} \\
 &= \frac{(1 + \cos x) \cos x - (\sin x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} \\
 &= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} \\
 &= \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} \\
 &= \frac{1}{1 + \cos x}
 \end{aligned} \tag{54}$$

กำหนดให้ $y = \sec^2(3x - 1)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \sec^2(3x-1) \\
&= 2 \sec(3x-1) \frac{d}{dx} \sec(3x-1) \\
&= 2 \sec(3x-1) \sec(3x-1) \tan(3x-1) \frac{d}{dx} (3x-1) \\
&= 3.2 \sec^2(3x-1) \tan(3x-1) \\
&= 6 \sec^2(3x-1) \tan(3x-1)
\end{aligned} \tag{55}$$

ถ้า $x \cos y + y \cos x = 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ใช้ implicit differentiation

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} (x \cos y + y \cos x) &= \frac{d}{dx} 1 \\
\frac{d}{dx} (x \cos y) + \frac{d}{dx} (y \cos x) &= 0 \\
x \frac{d}{dx} \cos y + \cos y \frac{dx}{dy} + y \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \frac{dy}{dx} &= 0 \\
x(-\sin y) \frac{dy}{dx} + \cos y + y(-\sin x) + \cos x \frac{dy}{dx} &= 0 \\
(-x \sin y + \cos x) \frac{dy}{dx} &= y \sin x - \cos y \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y \sin x - \cos y}{\cos x - x \sin y}
\end{aligned} \tag{56}$$

จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$ ของฟังก์ชัน $y = x \cos x$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
y &= x \cos x \\
y' &= \frac{d}{dx} (x \cos x) \\
&= \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \frac{dx}{dx} \\
&= -x \sin x + \cos x \\
y'' &= -(x \frac{d}{dx} \sin x + \sin x \frac{dx}{dx}) + \frac{d}{dx} \cos x \\
&= -(x \cos x + \sin x) - \sin x \\
&= -x \cos x - 2 \sin x
\end{aligned} \tag{57}$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จะเห็นว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งหมดคือ sine, cosine, tangent, cotangent, secant และ cosecant เป็นฟังก์ชันคาบซึ่งสมาชิกในโดเมน จะให้ค่าซ้ำกัน ดังนั้น ฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็น 1-1 ฟังก์ชัน แต่เราสามารถจำกัดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อให้ฟังก์ชันเหล่านี้ เป็น 1-1 ฟังก์ชัน ก็จะทำให้อินเวอร์สของฟังก์ชันเหล่านั้นเป็นฟังก์ชันด้วย เช่น

$$F = \{(x, y) | y = \sin x\} \text{ มีโดเมน } = \mathfrak{R} \text{ และเรนจ์ } = [-1, 1]$$

ไม่เป็น 1-1 ฟังก์ชัน แต่

$$F = \{(x, y) | y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$$

เป็น 1-1 ฟังก์ชัน ดังนั้น

$$F^{-1} = \{(x, y) | x = \sin y, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], x \in [-1, 1]\}$$

เป็น อินเวอร์สฟังก์ชันของ F เรียกว่า inverse sine function ใช้สัญลักษณ์ $\sin^{-1} x$ หรือ $\arcsin x$

ในทำนองเดียวกัน

$$1. \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$$

$$2. \frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$$

$$3. \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = \frac{-1}{1+x^2}.$$

$$4. \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$$

$$5. \frac{d}{dx} \operatorname{arccosec} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$$

$$6. \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

ให้ $y = \arcsin x, |x| < 1$

$$\begin{aligned}
 x &= \sin y, \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\
 \frac{dx}{dx} &= \frac{d}{dx} \sin y \\
 1 &= \cos y \frac{dy}{dx} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y}, |x| < 1 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}
 \end{aligned} \tag{58}$$

จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = \sin^{-1}(2x)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(2x) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}
 \end{aligned} \tag{59}$$

จงหา y' เมื่อ $y = \operatorname{arcsec} x^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x^2 \\
 &= \frac{1}{|x|^2 \sqrt{x^4 - 1}} \cdot \frac{d}{dx}(x)^2 \\
 &= \frac{2x}{x^2 \sqrt{x^4 - 1}} \\
 &= \frac{2}{x \sqrt{x^4 - 1}}
 \end{aligned} \tag{60}$$

จงหา y' เมื่อ $y = \cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \tan^{-1} x$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 y &= \cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \tan^{-1} \\
 y' &= \frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \tan^{-1}\right) \\
 &= \frac{d}{dx} \cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{d}{dx} \tan^{-1} x \\
 &= \frac{-1}{1 - \frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{1 + x^2} \\
 &= \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{1 + x^2} \\
 &= \frac{2}{x^4 - 1}
 \end{aligned} \tag{61}$$

การประยุกต์ของอนุพันธ์ (Applications of Differentiation)

Applications of derivatives related to students discipline

จากบทเรียนก่อนหน้านี้ เราทราบว่าถ้าตัวแปร y สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันๆ หนึ่ง ที่ขึ้นกับตัวแปร x นั่นคือ $f(x)$ เราจะสามารถวาดกราฟของ y หรือฟังก์ชัน $f(x)$ ได้ และถ้าเราทราบว่า จุด $P(x_0, y_0)$ และจุด $Q(x_1, y_1)$ ต่างอยู่บนกราฟของ y แสดงว่า $y_0 = f(x_0)$ และ $y_1 = f(x_1)$ นั่นเอง ความชันของเส้นตรงที่ลากผ่านจุด P และจุด Q มักใช้ m เป็นสัญลักษณ์ มีสูตรการหาดังนี้

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

ความชันของเส้นตรงที่กล่าวมาแล้วนี้ มีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $f(x)$ ตั้งแต่ $x = x_0$ จนถึง $x = x_1$ และ

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ ณ $x = x_0$ หรือการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ เทียบกับตัวแปร x เมื่อ x มีค่าเท่ากับ x_0 นั่นเอง

หลัก การ หา อนุพันธ์ สามารถ นำ ไป ประยุกต์ ใช้ได้ ใน หลาก หลาย สาขา วิชาชีพ ไม่ว่าจะเป็น ธุรกิจ เศรษฐศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ฟิสิกส์ เคมี หรือแม้กระทั่งชีววิทยา สำหรับบทนี้ ผู้เขียนจะขอกล่าวถึง การนำแนวคิดทางคณิตศาสตร์นี้ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาทางวิทยาศาสตร์ชีวภาพ เพื่อให้สอดคล้องกับความสนใจของผู้เรียน

AIDS ย่อมาจาก acquired immunodeficiency syndrome เป็นโรคติดต่อทางเพศสัมพันธ์และการให้เลือด ซึ่งพบการแพร่ระบาดมาตั้งแต่ปี พ.ศ. 2523 โดยผู้ป่วยที่เป็นโรค AIDS จะพบเชื้อไวรัส HIV ใน antibodies ซึ่งไวรัส HIV นี้มีระยะฟักตัวตั้งแต่ไม่กี่เดือน จนกระทั่งนานนับปี นักวิจัยคนหนึ่งนำเชื้อไวรัส HIV มาเพาะเลี้ยงในจานเพาะเชื้อ พบว่า ขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา t , $N(t)$ สอดคล้องกับสมการ $N(t) = 1000 + 20t + t^2$ อยากทราบว่าไวรัสชุดนี้มีอัตราการเปลี่ยนแปลง ณ t ใดๆ เป็นอย่างไร

กำหนดให้ t แทน เวลา $N(t)$ แทน ขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา t จากการทดลองพบว่า ขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา t ใดๆ สอดคล้องกับสมการ

$$N(t) = 1000 + 20t + t^2$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา t ใดๆ คือ

$$\frac{dN}{dt} = 20 + 2t$$

จากการสำรวจพบว่า จำนวนผู้ป่วยด้วยโรค AIDS, $P(t)$ มีความสัมพันธ์กับสมการ

$$P(t) = 100t^2 - 2t^3$$

เมื่อ t เป็นเวลาที่ผ่านไปนับจากวันนี้ มีหน่วยเป็นวัน อยากทราบว่าเมื่อ 20 วันผ่านไป จะมีผู้ป่วยด้วยโรคนี้กี่คน และมีอัตราการเพิ่มจำนวนผู้ป่วยเป็นเท่าไร

กำหนดให้ t แทน เวลา มีหน่วยเป็นวัน $P(t)$ แทน จำนวนผู้ป่วยด้วยโรค AIDS มีหน่วยเป็นคน จากการสำรวจพบว่า

$$P(t) = 100t^2 - 2t^3$$

เมื่อ 20 วันผ่านไป แสดงว่า $t = 20$ จะได้ว่า $P(20) = 100(20)^2 - 2(20)^3 = 24,000$ ดังนั้น เมื่อ 20 วันผ่านไป จะมีผู้ป่วยโรค AIDS 24,000 คน อัตราการเพิ่มจำนวนผู้ป่วยโรค AIDS ณ เวลา t ใดๆ หาได้ดังนี้

$$\frac{dP}{dt} = 200t - 6t^2$$

ดังนั้น เมื่อ 20 วันผ่านไป อัตราการเพิ่มจำนวนผู้ป่วยจะมีค่าเท่ากับ $200(20) - 6(20)^2$ หรือ 1,600 คนต่อวัน

จากการศึกษาทางสิ่งแวดล้อมระบุว่า $Q(t)$ ระดับ carbon monoxide (CO) เฉลี่ยในอากาศ (หน่วยเป็น ppm) จะมีค่าเป็นเท่าไร

$$Q(t) = 0.05t^2 + 0.1t + 3.4$$

เมื่อ t เป็นเวลาที่นับจากนี้เป็นต้นไป มีหน่วยเป็นปี อยากทราบว่า ระดับ CO เฉลี่ยในอากาศจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร ในอีก 2 ปี ข้างหน้า

กำหนดให้ t เป็นเวลาที่นับจากวันนี้ มีหน่วยเป็นปี $Q(t)$ เป็นระดับ CO เฉลี่ยในอากาศมีหน่วยเป็น ppm จากการศึกษาดังกล่าว

$$Q(t) = 0.05t^2 + 0.1t + 3.4$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงระดับ CO เฉลี่ยในอากาศ ณ t ใดๆ คือ

$$\frac{dQ}{dt} = 0.1t + 0.1$$

ในอีก 2 ปีข้างหน้า $t = 2$

$$\frac{dQ}{dt} = 0.1(2) + 0.1 = 0.3 > 0$$

ระดับ CO เฉลี่ยในอากาศจะเพิ่มขึ้น (เพราะ $\frac{dQ}{dt} > 0$) ด้วยอัตราเร็ว 0.3 ppm ต่อปี

Poiseuille's law กล่าวว่า ความเร็วของเลือด (หน่วย คือ เซนติเมตรต่อวินาที) ที่อยู่ห่างจากจุดกึ่งกลางของหลอดเลือด r เซนติเมตร มีสูตรดังนี้ $S(r) = C(R^2 - r^2)$ เมื่อ C เป็นค่าบวกใดๆ และ R เป็นรัศมีของหลอดเลือด อยากทราบว่า ความเร็วของเลือดจะเปลี่ยนแปลงเป็นอย่างไร เมื่อเลือดอยู่บริเวณกึ่งกลางระหว่างจุดกึ่งกลางและผนังของหลอดเลือด

กำหนดให้ r เป็นระยะห่างจากจุดกึ่งกลางของหลอดเลือด (หน่วยเป็นเซนติเมตร) $S(r)$ เป็นความเร็วของเลือด ณ r ใดๆ (หน่วยเป็นเซนติเมตรต่อวินาที) จาก Poiseuille's law

$$S(r) = C(R^2 - r^2)$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วของเลือด ณ r ใดๆ คือ

$$\frac{dS}{dr} = -2Cr$$

เลือดที่อยู่บริเวณกึ่งกลางระหว่างจุดกึ่งกลางและผนังของหลอดเลือดหมายถึง $r = \frac{R}{2}$ ดังนั้น

$$\left. \frac{dS}{dr} \right|_{r=R/2} = -CR < 0 \text{ เพราะว่า } C > 0, R > 0$$

แสดงว่าความเร็วของเลือดจะลดลง (เพราะ $\frac{dS}{dr} < 0$) ด้วยอัตรา CR (cm/s)/cm

แบบฝึกหัด

- ผลการทดลองแสดงให้เห็นว่า ความเข้มข้นของปริมาณ adrenaline ที่ฉีดเข้าไปในร่างกาย, x , มีความสัมพันธ์กับการตอบสนองของกล้ามเนื้อ, y , ด้วยสมการ $y = \frac{x}{a+bx}$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงการตอบสนองของกล้ามเนื้อ เมื่อเทียบกับความเข้มข้นของปริมาณ adrenaline ที่ฉีดเข้าไปในร่างกาย
- กำหนดให้ $P(t) = \frac{1000t}{t+10}$ แสดงถึงขนาดของประชากรแบคทีเรีย เมื่อ t เป็นเวลา จงหาอัตราการเจริญเติบโตของประชากร
- Schutzy - Borisoff laws กล่าวว่าถึง ปริมาณ substrate, y , ที่ถูกเปลี่ยนรูปด้วยเอนไซม์ ในรูปของฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลา t ดังนี้

$$y = k\sqrt{cat}$$

เมื่อ k , a , c เป็นค่าคงตัว จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาณ substrate ที่ถูกเปลี่ยนรูปด้วยเอนไซม์ ณ เวลา t ใดๆ

Sketching the graph of a function from the derivative

ในหัวข้อนี้เราใช้ประโยชน์จากเรื่อง derivative ในการวาดกราฟของฟังก์ชัน เมื่อนึกถึงกราฟของฟังก์ชัน เราสนใจลักษณะที่สำคัญ เช่น ช่วงใดที่กราฟเพิ่ม ช่วงใดที่กราฟลด ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของกราฟอยู่ที่ใด กราฟมีลักษณะคว่ำในช่วงใด หรือมีลักษณะหงายในช่วงใด เป็นต้น

แนวคิดแรกคือเรื่องของการเพิ่มและลดของฟังก์ชัน เรามารู้จักนิยามก่อน

ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วง I ให้ x_1 และ x_2 เป็น สมาชิกในช่วง I

- f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง I ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$
- f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง I ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$
- f เป็นฟังก์ชันคงตัวบนช่วง I ก็ต่อเมื่อ สำหรับค่า x_1 และ x_2 ใด ๆ แล้ว $f(x_1) = f(x_2)$

ประโยชน์ของ derivative ที่ใช้ในการตรวจสอบการเพิ่มและลดของฟังก์ชัน มาจาก ทฤษฎีบท :

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหา derivative ได้ บนช่วงเปิด (a, b)

1. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็น ฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a, b]$
2. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็น ฟังก์ชันลดบนช่วง $[a, b]$
3. ถ้า $f'(x) = 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็น ฟังก์ชันคงตัวบนช่วง $[a, b]$

ทฤษฎีบทนี้สามารถขยายผลจากช่วง $[a, b]$ ไปได้ถึงช่วงในรูป $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ และ $(-\infty, \infty)$

พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

เราหา derivative ของฟังก์ชัน ได้ว่า $f'(x) = 2x - 3$ ซึ่งบอกเราว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \text{ สำหรับ } x < 3/2 \\ f'(x) &> 0 \text{ สำหรับ } x > 3/2 \end{aligned} \tag{62}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 3/2$ เราจึงบอกได้ว่า

$$\begin{aligned} f &\text{ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง } (-\infty, 3/2] \\ f &\text{ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง } [3/2, \infty) \end{aligned} \tag{63}$$

แนวคิดต่อไป เป็นเรื่องของลักษณะหงายหรือคว่ำของกราฟของฟังก์ชัน ถ้ากราฟของฟังก์ชันมีลักษณะหงาย เราเรียกว่าฟังก์ชัน concave up ในขณะที่ถ้ากราฟของฟังก์ชันมีลักษณะคว่ำ เราเรียกว่า ฟังก์ชัน concave down นิยามที่ชัดเจนของ concavity ของฟังก์ชันเป็นดังนี้

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหา derivative ได้บนช่วงเปิด I

- f concave up บนช่วง I ถ้า f' เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง I
- f concave down บนช่วง I ถ้า f' เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง I

ลักษณะ concavity ของฟังก์ชัน สามารถตรวจสอบโดยใช้ derivative ดังนี้

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหา derivative อันดับสองได้บนช่วง I

1. ถ้า $f''(x) > 0$ บนช่วง I แล้ว f concave up บนช่วง I
2. ถ้า $f''(x) < 0$ บนช่วง I แล้ว f concave down บนช่วง I

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ถ้าเราคำนวณ derivative อันดับสอง $f''(x) = 2$ ซึ่งจากทฤษฎีบท เรากล่าวได้ว่า f concave up บนช่วง $(-\infty, \infty)$

การเปลี่ยนทิศทางของ concavity ของฟังก์ชัน ก็เป็นอีกที่หนึ่งของกราฟของ ฟังก์ชัน ซึ่งมีลักษณะเด่นที่จุดนี้กราฟอาจมีการเปลี่ยนจากลักษณะหนึ่ง เป็นคว่ำ หรือจากลักษณะคว่ำเป็นหงาย

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด I ซึ่งมี x_0 เป็น สมาชิก และ f เปลี่ยนทิศทางของ concavity ที่จุดนี้ แล้วเรากล่าวว่า f มี inflection point ที่ x_0 และเราเรียก $(x_0, f(x_0))$ ว่า inflection point ของ f

ฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ มี

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x$$

สังเกตว่า

- เมื่อ $x < 0$, $f''(x) < 0$
- เมื่อ $x > 0$, $f''(x) > 0$

ดังนั้น ที่จุด $x = 0$, f มีการเปลี่ยนทิศทางของ concavity จาก concave down เมื่อ $x < 0$ เป็น concave up เมื่อ $x > 0$ เพราะฉะนั้น inflection point จึงเป็น $(0, 0)$ สังเกตอีก ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดช่วง $(-\infty, \infty)$

ค่าสูงสุดและต่ำสุดในย่านหนึ่ง ๆ ของกราฟก็เป็นอีกลักษณะเด่น ที่เราสามารถ ตรวจสอบได้โดยใช้ derivative ของฟังก์ชัน

1. ฟังก์ชัน f มี relative maximum ที่ x_0 ถ้ามีช่วงเปิดที่มี x_0 เป็นสมาชิก และ $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุก ๆ x ที่เป็น สมาชิกในช่วงเปิดดังกล่าว
2. ฟังก์ชัน f มี relative minimum ที่ x_0 ถ้ามีช่วงเปิดที่มี x_0 เป็นสมาชิก และ $f(x_0) \leq f(x)$ สำหรับทุก ๆ x ที่เป็น สมาชิกในช่วงเปิดดังกล่าว
3. ถ้า f มี relative maximum หรือ relative minimum ที่ x_0 แล้ว เรากล่าวว่า f มี relative extremum ที่ x_0

ฟังก์ชันหนึ่ง ๆ อาจมี relative maximum, relative minimum หลายที่ อาจมีที่เดียว หรืออาจไม่มีเลยก็ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

1. ฟังก์ชัน $f(x) = (x-1)^2$ มี relative minimum ที่ $x = 1$ แต่ไม่มี relative maximum
2. ฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ ไม่มี relative extremum
3. ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ มี relative maximum ที่ $x = 0$ และมี relative minimum ที่ $x = 1$
4. ฟังก์ชัน $f(x) = \sin x$ มี relative maxima ที่ $\pi/2 + 2n\pi$ และมี relative minima ที่ $3\pi/2 + 2n\pi$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม n ใด ๆ

ถ้า f มี relative extremum ที่จุด x_0 แล้ว $f'(x_0) = 0$ หรือ f หา derivative ไม่ได้ที่ x_0

เราเรียก x_0 ว่า critical point ของฟังก์ชัน f ถ้า $f'(x_0) = 0$ หรือ f หา derivative ไม่ได้ที่ x_0

ฟังก์ชัน $f(x) = |x^2 - x|$ มี critical point ที่จุด $x = 0, 1$ และฟังก์ชัน $g(x) = x^2 - x$ ก็มี critical point ที่จุด $x = 0, 1$ เช่นกัน สังเกตว่า ฟังก์ชัน f หา derivative ไม่ได้ที่จุด $x = 0, 1$ ในขณะที่ฟังก์ชัน g หา derivative ได้ ที่จุดดังกล่าว

การตรวจสอบหา relative extremum โดยใช้ derivative เราใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ critical point x_0 และถ้า ค่าของ f' เปลี่ยนเครื่องหมายที่ x_0 แล้ว f มี relative minimum หรือ relative maximum ที่ x_0

1. ถ้า f' มีค่าเป็นลบสำหรับค่าทางซ้ายของ x_0 และมีค่า เป็นบวกสำหรับค่าทางขวาของ x_0 แล้ว f มี relative minimum ที่ x_0
2. ถ้า f' มีค่าเป็นบวกสำหรับค่าทางซ้ายของ x_0 และมีค่า เป็นลบสำหรับค่าทางขวาของ x_0 แล้ว f มี relative maximum ที่ x_0

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = |x^2 - x|$ จงหาค่า x ที่ทำให้ f มี relative extrema

วิธีทำ เรารู้ว่า $x = 0, 1$ เป็น critical point เขียนฟังก์ชัน f ใหม่ว่า

$$f(x) = |x||x-1| = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 0 \\ -x(x-1) & 0 < x \leq 1 \\ x(x-1) & x > 1 \end{cases}$$

นั่นคือ

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & x < 0 \\ -2x+1 & 0 < x < 1 \\ 2x-1 & x > 1 \end{cases}$$

ดังนั้นที่จุด x ใกล้เคียง 0 และ $x < 0$ เราพบว่า $f'(x) < 0$ ในขณะที่ที่จุด x ใกล้เคียง 0 และ $x > 0$ เราพบว่า $f'(x) > 0$ เราจึงสรุปว่า f มี relative minimum ที่ 0 ในทำนองเดียวกัน ที่จุด x ใกล้เคียง 1 และ $x < 1$ เราพบว่า $f'(x) < 0$ ในขณะที่ที่จุด x ใกล้เคียง 1 และ $x > 1$ เราพบว่า $f'(x) > 0$ เราจึงสรุปได้เช่นกันว่า f มี relative minimum ที่ 1

เมื่อเราพิจารณาฟังก์ชัน แล้วต้องการวาดกราฟของฟังก์ชัน เราคงจำได้ว่า มีข้อมูล บางประการที่เราสามารถตรวจสอบได้ก่อน เช่น x -intercepts y -intercepts ลักษณะ ของกราฟเมื่อ x เข้าใกล้ค่าอนันต์ เป็นต้น ตัวอย่างต่อไปนี้ เราจะใช้ความรู้เหล่านี้ ประกอบกับเรื่องของ derivative ในการวาดกราฟของฟังก์ชัน

จงวาดกราฟของฟังก์ชัน

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$

วิธีทำ

- x -intercepts: ให้ $y = 0$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2 &= 0 \\ (x+2)(x^2 - 2x + 1) &= 0 \\ (x+2)(x-1)^2 &= 0 \end{aligned} \tag{64}$$

ดังนั้น $x = -2, 1$

- y -intercepts: ให้ $x = 0$ ได้ว่า $y = 2$
- ลักษณะกราฟเมื่อ $x \rightarrow \infty$ และ $x \rightarrow -\infty$: สังเกตว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 3x + 2) &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 2) &= -\infty \end{aligned} \tag{65}$$

- ช่วงการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน เราหา derivative ของ f ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

ดังนั้น f จึงเป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $x < -1$ เป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $-1 < x < 1$ และ เป็นฟังก์ชันเพิ่มอีกครั้งเมื่อ $x > 1$

- ช่วงการ concave up และ concave down ของฟังก์ชัน f เราหา derivative อันดับ สองของฟังก์ชัน f ได้ว่า

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

ดังนั้น f จึง concave up เมื่อ $x > 0$ และ concave down เมื่อ $x < 0$ ฟังก์ชัน f มี inflection point ที่ 0

จากข้อมูลทั้งหมด เราเขียนกราฟคร่าว ๆ ดังรูปที่

Fig : graph1

กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 3x + 2$

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน และเรามีข้อมูลเกี่ยวกับ f' ดังนี้

1. $f'(x) > 0$ และ f' เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง $(-\infty, -1)$
2. $f'(x) > 0$ และ f' เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $(-1, 1)$
3. $f'(1) = 0$
4. $f'(x) < 0$ และ f' เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $(1, \infty)$

จงวาดกราฟที่เป็นไปได้ของฟังก์ชัน f

วิธีทำ จากข้อมูลที่ได้มา เราสรุปว่า

1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ concave up ในช่วง $(-\infty, -1)$
2. f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ concave down ในช่วง $(-1, 1)$
3. f มี relative maximum ที่ $x = 1$
4. f เป็นฟังก์ชันลด และ concave down ในช่วง $(1, \infty)$

ตัวอย่างกราฟของฟังก์ชัน f เช่นรูป

Fig : graph2

กราฟของฟังก์ชัน f จากข้อมูลที่กำหนด

พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

วิธีทำ

- x -intercepts: ให้ $y = 0$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2 + 1} &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned} \tag{66}$$

- y -intercepts: ให้ $x = 0$ ได้ว่า $y = 0$

- ลักษณะกราฟเมื่อ $x \rightarrow \infty$ และ $x \rightarrow -\infty$: สังเกตว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} &= 0\end{aligned}\tag{67}$$

- ช่วงการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน เราหา derivative ของ f ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + 1)^2}$$

ดังนั้น f จึงเป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $x < -1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $-1 < x < 1$ และ เป็นฟังก์ชันลดอีกครั้งเมื่อ $x > 1$

- ช่วงการ concave up และ concave down ของฟังก์ชัน f เราหา derivative อันดับ สองของฟังก์ชัน f ได้ว่า

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x^2 + 1)^3}$$

ดังนั้น f จึง concave up เมื่อ $x > \sqrt{3}$ หรือเมื่อ $-\sqrt{3} < x < 0$ ในขณะที่ f concave down เมื่อ $x < -\sqrt{3}$ หรือเมื่อ $0 < x < \sqrt{3}$ ฟังก์ชัน f มี inflection point ที่ $0, \pm\sqrt{3}$

จากข้อมูลทั้งหมด เราเขียนกราฟคร่าว ๆ ดังรูป

Fig : graph3

กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \ln(x^3 + 1)$$

นิยามบนช่วง $(-1, \infty)$ จงวาดกราฟของฟังก์ชันนี้

วิธีทำ

- x -intercepts: ให้ $y = 0$ พบว่า $x = 0$
- y -intercepts: ให้ $x = 0$ พบว่า $y = 0$
- ลักษณะกราฟเมื่อ $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^3 + 1) = \infty$$

- ลักษณะกราฟเมื่อ $x \rightarrow (-1)^+$:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \ln(x^3 + 1) = -\infty$$

- ช่วงการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน เราหา derivative ของ f ได้ว่า

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 1} > 0$$

สำหรับ $x > -1$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดโดเมน

- ช่วงการ concave up และ concave down ของฟังก์ชัน f เราหา derivative อันดับสองของฟังก์ชัน f ได้ว่า

$$f''(x) = \frac{-3x^4 + 6x}{(x^3 + 1)^2} = \frac{-3x(x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})}{(x^3 + 1)^2}$$

ดังนั้น f จึง concave up เมื่อ $0 < x < \sqrt[3]{2}$ และ f concave down เมื่อ $x < 0$ หรือเมื่อ $x > \sqrt[3]{2}$ ฟังก์ชัน f มี inflection point ที่ $0, \sqrt[3]{2}$ ค่าของ $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$

จากข้อมูลทั้งหมด เราเขียนกราฟคร่าว ๆ ดังรูป

Fig : graph4

กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \ln(x^3+1)$ บนช่วง $(-1, \infty)$

พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามบนช่วง $(-3, 3)$ และหา derivative อันดับสองได้ ฟังก์ชัน f มีกราฟดังรูป

Fig : graph5

กราฟของฟังก์ชัน f บนช่วง $(-3, 3)$

ที่จุดใดที่ฟังก์ชัน f' เปลี่ยนเครื่องหมาย และที่จุดใด f' มี relative extrema

วิธีทำ จากรูป ที่จุดซึ่ง f' เปลี่ยนเครื่องหมายคือจุด x ที่ $f'(x) = 0$ ซึ่ง คือ a, c, e และ j ในขณะที่จุดซึ่ง f' มี relative extrema เป็นจุดซึ่ง f'' เปลี่ยนเครื่องหมาย ในที่นี้คือจุดซึ่ง f มี inflection point ซึ่งก็คือ b, d, i และ k

แบบฝึกหัด

1. พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

2

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

2. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

3. $f(x) = x^{4/3} - x^{1/3}$

4. $f(x) = \ln(1 + x^2)$

ในแต่ละฟังก์ชัน จงหา

2

1. x -intercepts และ y -intercepts
2. ช่วงเปิดซึ่ง f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
3. ช่วงเปิดซึ่ง f เป็นฟังก์ชันลด
4. ช่วงเปิดซึ่ง f เป็นฟังก์ชัน concave up
5. ช่วงเปิดซึ่ง f เป็นฟังก์ชัน concave down
6. ค่า x ที่ทำให้ f มี inflection point

2. จงหา relative extrema ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2

1. $f(x) = x^3 + 5x - 2$
2. $f(x) = x(x - 2)^2$
3. $f(x) = \frac{x}{x - 1}$
4. $f(x) = |x^2 - 1|$

3. จงสเก็ตกราฟของฟังก์ชัน

2

1. $f(x) = x^3 - 3x + 3$
2. $f(x) = -(x + 1)x^2(x - 1)$
3. $f(x) = e^{1/x}$

4. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ และ $a < b < c$ จากข้อมูลต่อไปนี้

1. $f'(a) = f'(b) = 0$

2.

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{สำหรับ } x < a \\ > 0 & \text{สำหรับ } a < x < c \\ < 0 & \text{สำหรับ } x > c \end{cases} \quad (68)$$

3. $f''(a) = f''(b) = 0$

4.

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{สำหรับ } x < a \\ > 0 & \text{สำหรับ } a < x < b \\ < 0 & \text{สำหรับ } x > b \end{cases} \quad (69)$$

5. กำหนดให้ฟังก์ชัน f' เป็นดังรูป

Fig : graph6

กราฟของฟังก์ชัน f

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. ช่วงใดที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
2. ฟังก์ชัน f มี relative maximum ที่ใด
3. ช่วงใดที่ f concave up
4. ฟังก์ชัน f มี inflection point ที่ใด

การประยุกต์ของ Monotonicity และ Concavity

จากที่ได้ศึกษามาแล้ว ถ้า f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วงเปิด (a, b) และ x_1, x_2 เป็นจุดที่อยู่ในช่วงดังกล่าว แล้ว

- (1) f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ เมื่อ $x_1 < x_2$ หรือ $f'(x) > 0$ สำหรับทุกค่า x ที่อยู่ในช่วง (a, b)
- (2) f เป็นฟังก์ชันลด ถ้า $f(x_2) < f(x_1)$ เมื่อ $x_1 < x_2$ หรือ $f'(x) < 0$ สำหรับทุกค่า x ที่อยู่ในช่วง (a, b) นอกจากนั้นแล้ว
- (3) f มีลักษณะแบบ concave up ในช่วง (c, d) ถ้า f' เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วงดังกล่าว หรือ $f''(x) > 0$ สำหรับทุกค่า x ที่อยู่ในช่วง (c, d)
- (4) f มีลักษณะแบบ concave down ในช่วง (c, d) ถ้า f' เป็นฟังก์ชันลดในช่วงดังกล่าว หรือ $f''(x) < 0$ สำหรับทุกค่า x ที่อยู่ในช่วง (c, d)

ซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาทางวิทยาศาสตร์ชีวภาพ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

อัตราการเจริญเติบโตของพืชขึ้นอยู่กับธาตุอาหารที่ได้รับซึ่ง Monod ได้อธิบายไว้ดังสมการ

$$f(R) = \frac{aR}{K + R}, \quad R \geq 0$$

โดยที่ $f(R)$ เป็นอัตราการเจริญเติบโต, R เป็นระดับธาตุอาหาร, a และ K เป็นค่าบวกใดๆ ขึ้นอยู่กับชนิดของพืช อยากทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตของพืชจะเพิ่มขึ้น หรือลดลงเมื่อไหร่

กำหนดให้ R เป็นระดับธาตุอาหาร $f(R)$ เป็นอัตราการเจริญเติบโต เนื่องจาก

$$f(R) = \frac{aR}{K + R}, \quad R \geq 0$$

จะได้

$$f'(R) = \frac{aK}{(K+R)^2} > 0$$

เพราะ $a > 0$, $K > 0$ ดังนั้น อัตราการเจริญเติบโตของพืชจะเพิ่มขึ้นและจะไม่วันลดลง

จากตัวอย่างที่แล้ว เราทราบว่า อัตราการเจริญเติบโตของพืชเป็นฟังก์ชันเพิ่ม อยากทราบว่าอัตราการเพิ่มของอัตราการเจริญเติบโตของพืชจะเป็นอย่างไร

เนื่องจาก $f(R) = \frac{aR}{K+R}$, $R \geq 0$ จะได้ $f'(R) = \frac{aK}{(K+R)^2} > 0$ นั่นคือ อัตราการเจริญเติบโตของพืชเป็นฟังก์ชันเพิ่ม โจทย์อยากทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตของพืชที่เพิ่มขึ้นนี้จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าไร นั่นคือการหาอนุพันธ์ของ $f'(R)$ จะได้ $f''(R) = \frac{-2aK}{(K+R)^3} < 0$ หมายความว่า อัตราการเจริญเติบโตของพืชนั้นเพิ่มขึ้น แต่อัตราการเพิ่มขึ้นนั้นจะลดลง ดังรูป 2.7

กราฟของฟังก์ชัน $f(R) = \frac{aR}{K+R}$

อัตราการเจริญเติบโตของประชากรสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ logistic

$$f(N) = rN(1 - \frac{N}{K})$$

เมื่อ N เป็นจำนวนประชากร, r และ K เป็นค่าบวก อยากทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตของประชากรจะเพิ่มขึ้น หรือลดลงอย่างไร

โจทย์ต้องการทราบว่า $f(N)$ จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไร นั่นคือ $f'(N) > 0$ หรือ $f'(N) < 0$ เมื่อ N อยู่ในช่วงใด เนื่องจากอนุพันธ์ใช้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงแบบค่อยเป็นค่อยไป ดังนั้น $f'(N)$ จะเปลี่ยนจากค่าลบเป็นค่าบวก ย่อมต้องผ่านค่าศูนย์ก่อน การหาค่า N^* ที่ทำให้ $f(N^*) = 0$ ย่อมเป็นหนทางหนึ่งที่สามารถใช้พิจารณาช่วงที่ทำให้ $f'(N) > 0$ และ $f'(N) < 0$ ได้ จาก $f(N) = rN(1 - \frac{N}{K})$ จะได้

$$f'(N) = r - \frac{2rN}{K}$$

ซึ่ง $f'(N) = 0$ เมื่อ $N = \frac{K}{2}$

ถ้า $N > \frac{K}{2}$ $f'(N) < 0$ และถ้า $N < \frac{K}{2}$ $f'(N) > 0$ ดังนั้น อัตราการเจริญเติบโตของประชากรจะเพิ่มขึ้น เมื่อ $N < \frac{K}{2}$ และจะลดลง เมื่อ $N > \frac{K}{2}$ แสดงว่าประชากรยิ่งหนาแน่น อัตราการเพิ่มของประชากรก็จะยิ่งลดลง

แบบฝึกหัด

1. จากตัวอย่างที่ 9 จงวาดกราฟของ $f(N)$ และระบุช่วงที่ทำให้ f มีลักษณะแบบ concave up และแบบ concave down

2. ค่า pH ของสารละลายสัมพันธ์กับความเข้มข้นของไฮโดรเจนไอออน, H^+ , ดังนี้

$$pH = -\log(H^+)$$

จงพิจารณาว่าค่า pH ของสารละลายจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไร

การหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization)

การหาค่าเหมาะที่สุด คือปัญหาที่ต้องการหาค่าสูงสุด (absolute maximum) และค่าต่ำสุด (absolute minimum) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ผลผลิตของพืชผักสัมพันธ์กับปริมาณไนโตรเจนดังสมการ $Y(N) = \frac{N}{1+N^2}$ เมื่อ $Y(N)$ เป็นผลผลิตของพืชผัก และ N เป็นปริมาณไนโตรเจน ($N \geq 0$) จงหาปริมาณไนโตรเจนที่ทำให้ได้ผลผลิตของพืชผักมากที่สุด

กำหนดให้ N เป็นปริมาณไนโตรเจน $Y(N)$ เป็นผลผลิตของพืชผัก จากความสัมพันธ์

$$Y(N) = \frac{N}{1+N^2}$$

หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการ

$$Y'(N) = \frac{(1+N^2) - N(2N)}{(1+N^2)^2} = \frac{1-N^2}{(1+N^2)^2}$$

กำหนดให้ $Y'(N) = 0$ เพื่อหา relative extrema $Y'(N) = 0$ เมื่อ $1 - N^2 = 0$ ดังนั้น $N = \pm 1$

เราจะพิจารณา N ในช่วง $N \geq 0$ ดังนั้น $N = -1$ จึงอยู่นอกโดเมน จุดที่สนใจจึงเหลือเพียง $N = 1$ โดยพิจารณาเครื่องหมายของ $Y'(N)$ เราจะได้ว่า

$$Y'(N) > 0 \text{ เมื่อ } -1 < N < 1 \quad Y'(N) < 0 \text{ เมื่อ } N > 1$$

เนื่องจาก $Y(N)$ เปลี่ยนจากฟังก์ชันเพิ่ม เป็นฟังก์ชันลด ที่ $N = 1$ ดังนั้น ที่ $N = 1$ เกิดจากจุดสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) โดย $Y(1) = \frac{1}{2}$

เนื่องจากเราสนใจ absolute maximum จึงต้องตรวจสอบจุดปลายของโดเมน ($N \geq 0$ หรือ $N \in [0, \infty)$) นั่นคือ $N = 0$ และ $N \rightarrow \infty$ ด้วย ว่าทำให้ Y มีค่ามากกว่า $Y(1) = \frac{1}{2}$ หรือไม่

$$Y(0) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} Y(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{1+N^2} = 0$$

ดังนั้นที่ $N = 1$ จะเกิดจุดสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) ซึ่งเป็นปริมาณไนโตรเจนที่ทำให้พืชผักมีผลผลิตมากที่สุด คือ $Y(1) = \frac{1}{2}$ (ดูกราฟ 2.8)

เรือบรรทุกน้ำมันของบริษัทแห่งหนึ่งอับปางลงบริเวณอ่าวไทย ทำให้น้ำมันไหลรั่วซึมลงสู่ทะเล กระทบต่อระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ และสิ่งมีชีวิตที่อาศัยอยู่ในบริเวณดังกล่าว สมมติว่าระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ หลังเหตุการณ์เรือล่ม มีการเปลี่ยนแปลงดังสมการ

$$P(t) = 500\left[1 - \frac{4}{t+4} + \frac{16}{(t+4)^2}\right]$$

เมื่อ $P(t)$ เป็นระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ หลังเหตุการณ์เรือล่มผ่านพ้นไป t เดือน อยากทราบว่าเมื่อไหร่ออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำบริเวณดังกล่าวจะอยู่ในระดับที่ต่ำที่สุด

กำหนดให้ t เป็นเวลาหลังเหตุการณ์เรือล่ม $P(t)$ เป็นระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ บริเวณที่เกิดเหตุ จาก $P(t) = 500\left[1 - \frac{4}{t+4} + \frac{16}{(t+4)^2}\right]$ หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการ

$$\begin{aligned} P'(t) &= \frac{2000}{(t+4)^2} - \frac{16000}{(t+4)^3} \\ &= \frac{2000(t+4) - 16000}{(t+4)^3} \\ &= \frac{2000t - 8000}{(t+4)^3} \end{aligned} \quad (70)$$

กำหนดให้ $P'(t) = \frac{2000t - 8000}{(t+4)^3} = 0$ จะได้ $t = 4$ เครื่องหมายของ $P'(t) > 0$ เมื่อ $t > 4$ และ $P'(t) < 0$ เมื่อ $t < 4$ ดังนั้น $P(t)$ เปลี่ยนจากฟังก์ชันลดเป็นฟังก์ชันเพิ่มที่ $t = 4$ ดังนั้น ที่ $t = 4$ เกิดจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) โดย $P(4) = 375$

เนื่องจากเราสนใจ absolute minimum จึงต้องตรวจสอบค่า $P(t)$ ที่จุดปลายของโดเมน t ด้วย นั่นคือ $t = 0$ และ $t \rightarrow \infty$ $P(0) = 500$ และ $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 500$ ดังนั้น ที่ $t = 4$ เกิดจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum) ระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ บริเวณดังกล่าวต่ำสุด หลังเหตุการณ์เรืออับปางผ่านพ้นไป 4 เดือน

นักชีววิทยาต้องการออกแบบพื้นที่ทดลองให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เขามีรั้วยาว 1600 ฟุต เขาจะใช้รั้วนี้อย่างไร จึงจะทำให้ได้พื้นที่ทดลองที่กว้างใหญ่ที่สุด

กำหนดให้

x เป็นความกว้างของพื้นที่ทดลอง

y เป็นความยาวของพื้นที่ทดลอง

A เป็นพื้นที่ของพื้นที่ทดลอง

P เป็นความยาวรอบรูปของพื้นที่ทดลอง

เนื่องจาก $A = xy$ และ $P = 2x + 2y$ จากโจทย์ $P = 2x + 2y = 1600$ ดังนั้น $x + y = 800$ หรือ $y = 800 - x$ แทน y ลงใน $A = xy$ จะได้

$$\begin{aligned} A(x) &= x(800 - x), \quad 0 \leq x \leq 800 \\ &= 800x - x^2 \end{aligned} \quad (71)$$

โจทย์ต้องการหาพื้นที่กว้างใหญ่ที่สุด เราจึงต้องหาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้าง

$$A'(x) = 800 - 2x$$

กำหนดให้ $A'(x) = 800 - 2x = 0$ จะได้ $x = 400$ และ $A(400) = 1600$ ตามลำดับ ทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง $A''(x) = -2 < 0$ พบว่า $x = 400$ ทำให้เกิดจุดสูงสุดสัมบูรณ์ เพราะ $A(x)$ มีลักษณะแบบ concave down ดังนั้นนักชีววิทยาควรกันรั้วเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกว้าง 400 ฟุต จึงจะได้พื้นที่ทดลองที่กว้างใหญ่ที่สุด

1. วาดภาพและกำหนดตัวแปรต่างๆ เช่น x, y เป็นต้น
2. หาสูตรหรือสมการของปริมาณที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด
3. ใช้เงื่อนไขที่โจทย์ระบุให้ในการตัดทอนตัวแปร เพื่อทำให้สมการในขั้นตอนที่ 2 อยู่ในรูปฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรเพียงตัวเดียว
4. หาช่วงที่เป็นไปได้ของตัวแปร โดยให้สอดคล้องกับความหมายของโจทย์
5. ใช้เทคนิคการหาค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ ไม่ว่าจะเป็นทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง หรือทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับสอง
6. ตรวจสอบจุดปลายของโดเมนของตัวแปร เพื่อยืนยันการเกิดค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมบูรณ์

แบบฝึกหัด

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงของการสังเคราะห์แสงขึ้นกับความเข้มของแสง x , ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $R(x) = 270x - 90x^2$ จงหาความเข้มของแสง ที่ทำให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของการสังเคราะห์แสงมากที่สุด
2. การตอบสนองต่อยาชนิดหนึ่งขึ้นกับปริมาณของยา, x , ดังสมการ $S = 1000x - x^2$ จงหาปริมาณยาที่ทำให้มีการตอบสนองต่อยาชนิดนี้มากที่สุด
3. นักวิจัยพบว่าขณะไถ ปริมาณอากาศที่ไหลผ่านทางหลอดลมสัมพันธ์กับสมการ $F = SA$ เมื่อ S คือความเร็วของอากาศ และ A คือพื้นที่ตัดขวางของหลอดลม ดังรูป 2.9 ถ้าความเร็วของอากาศมีสูตรเป็น $S = c - r$ โดย r คือรัศมีของหลอดลมขณะไถ และ c คือรัศมีของหลอดลมในสภาวะปกติ จงหารัศมีที่ทำให้ปริมาณอากาศที่ไหลผ่านทางหลอดลมมีมากที่สุด ขณะไถ
4. เกษตรกรต้องการสร้างกล่องไร่ฝ้ายอย่างง่ายเพื่อขนย้ายยา เขามีกระดาษแข็งกว้าง 16 นิ้ว ยาว 30 นิ้ว เขาตั้งใจจะตัดมุมของกระดาษแข็งทั้ง 4 ออก ตามรูป 2.10 แล้วทำการพับตามรอยปะและเชื่อมรอยต่อด้วยเทปกาว จงหาความยาว x ที่ตัดตามมุม เพื่อให้ได้กล่องที่มีปริมาตรมากที่สุด
5. คราวนี้นักชีววิทยาคนเดิม ต้องการพื้นที่ทดลองแบบสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 320 ตารางเมตร ด้านที่ขนานกันคู่หนึ่งใช้รั้วราคา 100 บาทต่อเมตร ส่วนด้านคู่ที่เหลือใช้รั้วราคา 200 บาทต่อเมตร จงหาความกว้างและความยาวของพื้นที่ทดลองแห่งนี้ เมื่อใช้งบประมาณน้อยที่สุด

การไหลเวียนของอากาศในหลอดลม

กล่องไร่ฝ้ายสำหรับขนย้ายยา

รูปแบบไม่กำหนด (Indeterminate form) และกฎของโลปีตาล (L'Hopital Rule)

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ เราจะกล่าวว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ อาจแทน $x \rightarrow a$ ด้วย $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$

ในการหาลิมิตของรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ นั้น เราจะนำกฎของโลปีตาลมาประยุกต์ใช้

(กฎของโลปีตาล)

1. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ จะอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

$$\text{และได้ว่า } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ จะอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$

$$\text{และได้ว่า } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\text{จงหาค่าของ } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(2\sqrt{x-1})(2x)} = \frac{1}{40}$$

กฎของโลปีตาลยังคงเป็นจริงในกรณีที่ $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$

$$\text{จงหาค่าของ } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

กฎของโลปีตาลใช้กับลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ เท่านั้น หากลิมิตไม่ได้อยู่ในรูปแบบดัง

กล่าว เราจะต้องจัดให้อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ เสียก่อนแล้วจึงนำกฎของโลปีตาลมาใช้

การหาขีดจำกัดที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $0 \cdot \infty$ หรือ $\infty - \infty$

การหาขีดจำกัดในรูปแบบไม่กำหนด $0 \cdot \infty$ หรือ $\infty - \infty$ สามารถทำได้โดยจัดให้ขีดจำกัดอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ก่อนแล้วจึงนำกฎของโลปีตาลมาใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{\left(\frac{x-1}{x}\right) + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x-1+x \ln x}$$

ซึ่งยังอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x-1+x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{1+1+\ln x} = \frac{-1}{2}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = -\frac{1}{2}$

การหาขีดจำกัดที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $0^0, 1^\infty, \infty^0$

ในการหาค่าขีดจำกัดทั้ง 3 แบบนี้ เราสามารถจัดให้ขีดจำกัดอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ โดยอาศัยฟังก์ชันลอการิทึมเข้าช่วย แล้วจึงนำกฎของโลปีตาลมาใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

วิธีทำ ให้ $y = x^x$ ดังนั้น $\ln y = x \ln x$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 0$

เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \ln(\lim_{x \rightarrow 0^+} y)$ ดังนั้น $\ln(\lim_{x \rightarrow 0^+} y) = 0$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1$

หรือ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$

จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)}$

วิธีทำ ให้ $y = x^{1/(x-1)}$ ดังนั้น $\ln y = \frac{\ln x}{x-1}$

และ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = 1$

เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \ln(\lim_{x \rightarrow 1} y)$ ดังนั้น $\ln(\lim_{x \rightarrow 1} y) = 1$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow 1} y = e^1 = e$

หรือ $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)} = e$

จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$

วิธีทำ ให้ $y = x^{1/x}$ ดังนั้น $\ln y = \frac{\ln x}{x}$

และ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = 0$

เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \ln(\lim_{x \rightarrow \infty} y)$ ดังนั้น $\ln(\lim_{x \rightarrow \infty} y) = 0$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow \infty} y = e^0 = 1$

หรือ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = 1$

