# SCMA104 Systems of Ordinary Differential Equations and Applications in Medical Science

Pairote Satiracoo

2024-10-02

# Contents

# Chapter 1

# หลักการและความสำคัญของแคลคูลัสและระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

แคลคูลัสมีส่วนประกอบหลักที่สำคัญอยู่ 2 องค์ประกอบ คือ

1. การหาอนุพันธ์ (differentiation) และ
2. การหาปริพันธ์ (Integration)

การประยุกต์เรื่องการหาอนุพันธ์ในการแก้ปัญหาเบื้องต้นที่สำคัญในทางชีววิทยา หรือทางการแพทย์ประกอบด้วย การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณของตัวแปรที่เราสนใจ และการใช้แคลคูลัสในการแก้ปัญหาการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของปัญหาหรือฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เราสนใจ

ตัวอย่างการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่สนใจ เช่น ขนาดของประชากร จำนวนของผู้ติดเชื้อจากโรคทางเดินหายใจ ระดับน้ำตาลในกระแสเลือด ปริมาณของยาที่มีอยู่ในกระแสเลือกหรือส่วนหนึ่งของร่างกาย โดยที่การเปลี่ยนแปลงดังกล่าวสามารถเปรียบเทียบได้กับเวลา ดังต่อไปนี้

- ประชากรในประเทศไทยปี พ.ศ. 2566 มีจำนวน 66.05 ล้านคน (ข้อมูลอ้างอิงจาก สำนักงานคณะกรรมการส่งเสริมการลงทุน)
- ข้อมูลจำนวนผู้รักษาตัวในโรงพยาบาลจากศูนย์ข้อมูล COVID-19 ระหว่างวันที่ 28 กรกฎาคม ถึงวันที่ 3 สิงหาคม พ.ศ. 2567 (ข้อมูลอ้างอิงจาก ศูนย์ข้อมูล Covid-19)
- การเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำตาลในเลือดระหว่างมืออาหารสามมือในหนึ่งวัน (รูปภาพอ้างอิงจาก Wikipedia: Blood Sugar Level)


Figure 1.1: ข้อมูลจำนวนผู้รักษาตัวในโรงพยาบาลจากศูนย์ข้อมูล COVID-19

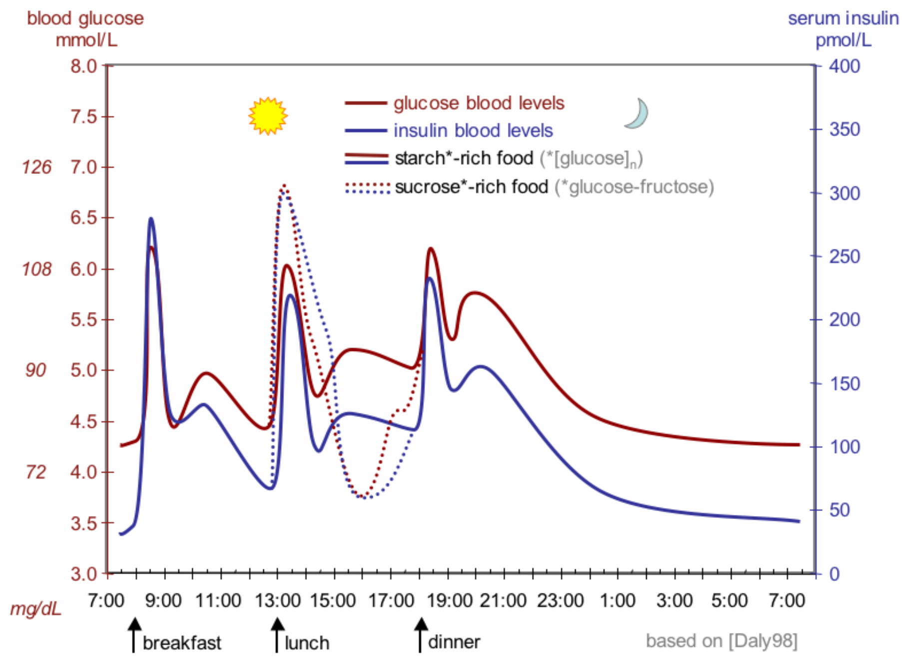



Figure 1.2: ความผันผวนของระดับน้ำตาลในเลือด (สีแดง) และฮอร์โมนอินซูลิน (สีน้ำเงิน) ในมนุษย์ระหว่างมื้ออาหารสามมื้อ

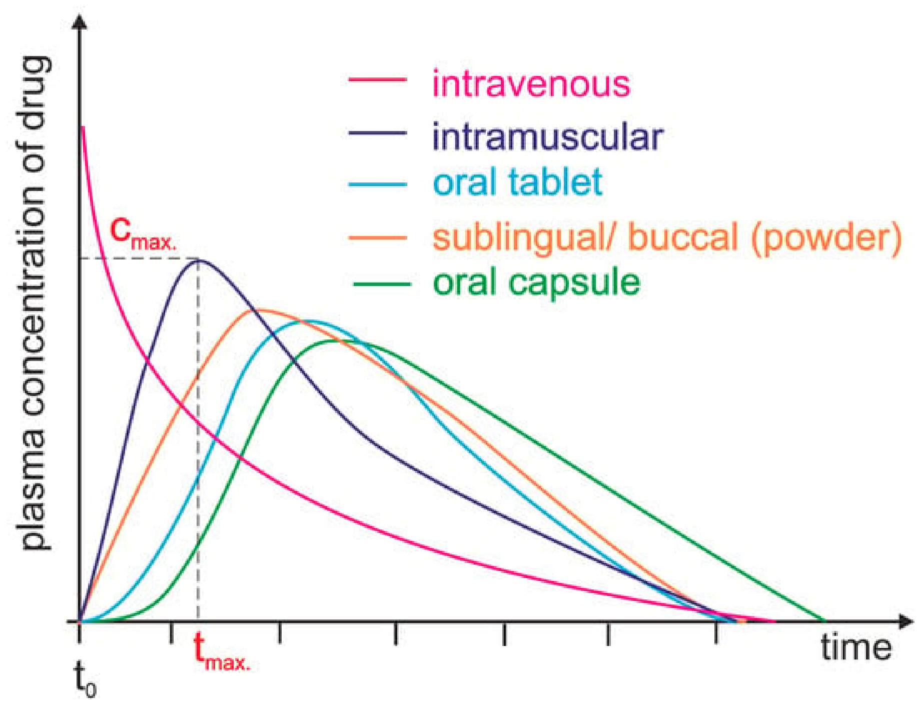



Figure 1.3: ความเข้มข้นของยาในกระแสเลือดที่เวลาต่างๆ

Table 1.1: จำนวนของแบคทีเรียที่เวลา t ใดๆ

| เวลา (10 นาที) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| จำนวนแบคทีเรีย | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |

- การเปลี่ยนแปลงของปริมาณยาในกระแสเลือดที่เวลาต่างๆ สำหรับการให้ยาโดยวิธีต่างๆ (รูปภาพอ้างอิงจาก บทความทางวิชาการในฐานข้อมูล MDPI)

ในการทำความเข้าใจการเปลี่ยนแปลงของปริมาณข้างต้นเทียบกับเวลา เราสามารถประยุกต์ใช้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อมาใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงของปริมาณต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

> **การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์** เป็นกระบวนการอธิบายปัญหาหรือ ปรากฏการต่างๆ ที่เกิดขึ้นในธรรมชาติ โดยปกติแล้วจะอยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้จะช่วยให้อธิบายสิ่งต่างๆ ที่เกิดขึ้นในปัญหาหรือปรากฏที่สนใจ

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงถึงแนวคิดในการประยุกต์ของแคลคูลัสที่เกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของ

**ตัวอย่าง 1.1.** ในการทดลองหนึ่ง นักวิจัยต้องการศึกษาการขยายพันธ์ของแบคทีเรียที่มีการการแบ่งตัวที่เรียกว่า binary fission (การแบ่งตัวแบบทวิภาค) ซึ่งแบคทีเรียจะมีการแบ่งจากหนึ่งเป็นสองเซลเท่าๆ กันและได้ผลการทำลองดังต่อไปนี้

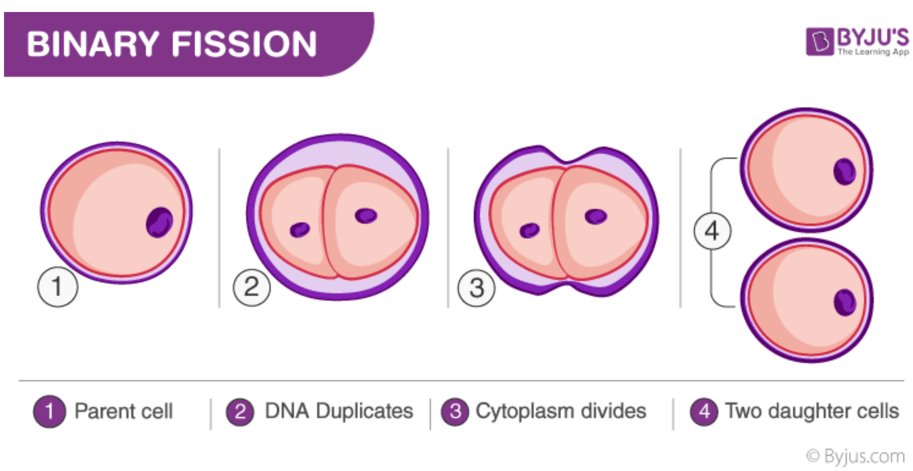



Figure 1.4: กระบวนการแบ่งตัวแบบทวิภาคของแบคทีเรีย

(รูปอ้างอิงจาก BYJU's Learning Website )

ตาราง 1.1 และรูปที่ 1.5 แสดงการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียที่เวลาใดๆ ในตัวอย่างนี้การเปลี่ยนแปลงของจำนวนของแบคทีเรียที่เวลา $t$ สามารถเขียนในรูปฟังก์ชัน $N(t)$ ถ้าให้ $N_0$ แทนจำนวน

ของแบคทีเรียตอนเริ่มการทดลอง แล้วแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการเพิ่มของจำนวนแบคทีเรียจะสามารถเขียนในรูปของสมการ

$$N(t) = N_0 \cdot 2^t, \quad t = 0, 1, 2, ... \tag{1.1}$$

ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้การเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียที่เวลา $t$ ใดๆ เพิ่มขึ้นในลักษณะที่เรียกว่า เอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Population Growth)

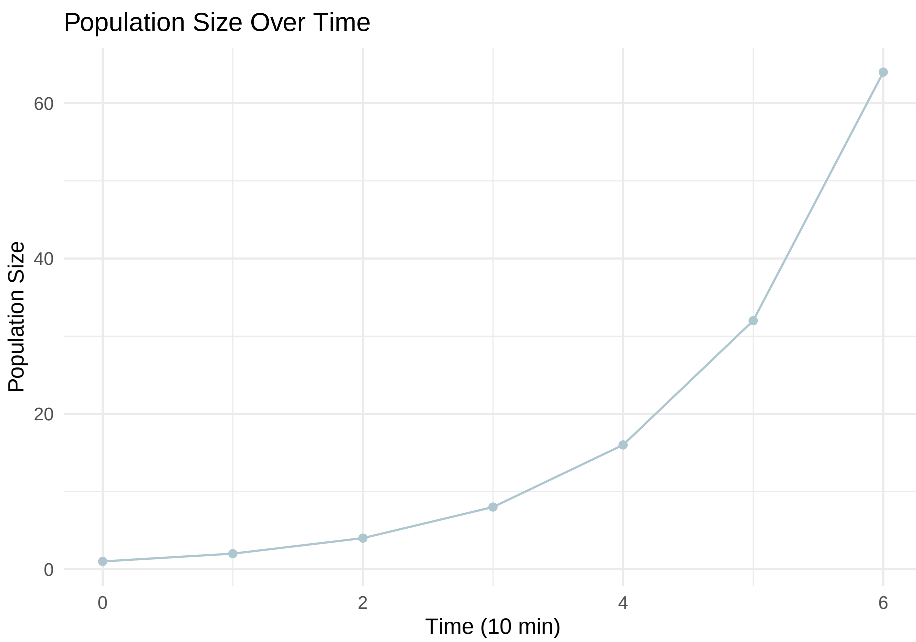



Figure 1.5: Population Size Over Time

**ตัวอย่าง 1.2.** ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ในตัวอย่างของการขยายพันธ์แบคทีเรีย หรือในปัญหาอื่นๆ แทนที่เราจะพยายามหาความสัมพันธ์ หรือฟังก์ชัน $N(t)$ ในรูปของเวลา $t$ โดยตรง ถ้าเราทราบกระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร $N(t)$ นั้น เราสามารถนำมาใช้ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ได้ดังต่อนี้ กระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรีย (การเพิ่มหรือลดลงของแบคทีเรีย) ที่เกิดขึ้นในระหว่างเวลา $t$ และเวลา $t + h$ เกิดจากจำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้น (เกิดขึ้นมาใหม่) ในช่วงเวลาดังกล่าว และลดลงจากจำนวนแบคทีเรียที่ลดลง (ตายไป) ในช่วงเวลาดังกล่าวเช่นกัน ซึ่งเราสามารถเขียนในรูปของสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} N(t+h) = N(t) & \\ & + \text{จำนวนแบคทีเรียที่เกิดขึ้นใหม่ระหว่าง } t \text{ และ } t+h \\ & - \text{จำนวนแบคทีเรียที่ตายไประหว่าง } t \text{ และ } t+h \end{aligned} \tag{1.2}$$

ในที่นี้ "**การเกิด**" เราหมายถึงการเพิ่มจำนวนของแบคทีเรียจากหนึ่งเป็นสอง และเราจะกำหนดให้ $h$ เป็นช่วงเวลาสั้นๆ (ซึ่งเราสามารถใช้ความรู้แคลคูลัสในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation)) ในสมการ (1.2) ถ้าเราสมมติว่า การเพิ่มของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่ในขณะนั้น หรือเขียนในรูปของสมการได้ดังนี้

$$\text{จำนวนแบคทีเรียที่เกิดใหม่ระหว่าง } t \text{ และ } t+h \approx b \cdot N \cdot h$$

$$\text{จำนวนแบคทีเรียที่ตายไประหว่าง } t \text{ และ } t+h \approx m \cdot N \cdot h$$

โดยที่ค่าคงตัว $b$ และ $m$ ในสมการข้างต้น คือ อัตราการเกิด (birth rate) และอัตราการตาย (mortality rate)

เมื่อแทนจำนวนแบคทีเรียที่เกิดใหม่ และตายไประหว่างช่วงเวลาที่กำหนดลงในสมการ (1.2) จะได้สมการ

$$N(t+h) - N(t) = b \cdot N(t) \cdot h - m \cdot N(t) \cdot h \tag{1.3}$$

เราสามารถจัดรูปสมการ (1.3) ได้ใหม่ในรูปของ**อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย**ของจำนวนแบคทีเรียในช่วงเวลาดังกล่าว ดังนี้

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \tag{1.4}$$

$$\tag{1.5}$$

ดังนั้น ถ้าเราให้ $h$ เข้าใกล้ 0 ผ่านการหาค่าลิมิต เราจะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง (instantaneous rate of change) และเขียนได้ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ ดังนี้

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \tag{1.6}$$

$$\tag{1.7}$$

ทั้งนี้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (1.7) เพื่อให้ได้คำตอบที่แสดงจำนวนแบคทีเรีย $N(t)$ ในรูปของฟังก์ชันของ $t$ เราจะต้องกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องกับจำนวนแบคทีเรีย $N(t)$ ที่เวลา $t$ หนึ่ง โดยทั่วไปเราจะกำหนดค่าเริ่มต้นของจำนวนแบคทีเรียที่ $t = 0$ ดังนั้น ถ้าเรากำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition)

$$N(0) = N_0 \tag{1.8}$$

เราสามารถหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นโดยวิธีการหาปริพันธ์ (Integration) ได้คำตอบของสมการดังนี้

$$N(t) = N_0 e^{(b-m)t} \tag{1.9}$$

**ตัวอย่าง 1.3.** ในการทดลองเลี้ยงยีสต์ในขวดทดลองที่มีอาหารเลี้ยงยีสต์ในปริมาณที่เหมาะสม ผู้ทำการทดลองสนใจที่จะประมาณค่าของยีสต์โดยอาศัยแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงของประชากรที่อธิบายด้วยสมการ (1.9) กำหนดให้

- ภายใต้สภาวะของการทดลองที่เหมาะสม ยีสต์จะแบ่งตัวทุกๆ 90 นาที
- ยีสต์มีครึ่งชีวิตเท่ากับ 1 สัปดาห์

จากข้อมูลดังกล่าว จงแสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบจากคำถามต่อไปนี้

1. จงประมาณค่าของอัตราการเกิด $b$ (1/ชั่วโมง) และอัตราการตาย $m$ (1/ชั่วโมง)
2. เขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้ค่า $b$ และ $m$ ที่ประมาณค่าได้ (สมการ (1.9))
3. ใช้เครื่องมือที่นักศึกษามีอยู่ในการวาดกราฟแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนยีสต์ที่เวลาต่างๆ
4. เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับรูปภาพแสดงการเปลี่ยนแปลงของยีสต์จากการทดลองในห้องปฏิการตามรูปที่ 1.6 (รูปภาพอ้างอิงจาก https://homework.study.com/)

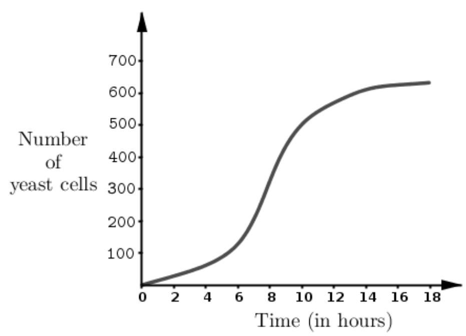



Figure 1.6: กราฟการเจริญเติบโตของเซลล์ยีสต์

**ตัวอย่าง 1.4.** จงใช้อินเทอร์เน็ตเพื่อค้นหาตัวอย่างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายโดยสมการเชิงอนุพันธ์หรือระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ข้อมูลที่ต้องการประกอบด้วย

1. ค้นหาหน้าเว็บที่ให้ข้อมูลเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในปัญหาที่นักศึกษาสนใจ
2. จดบันทึก URL ของหน้าเว็บ
3. เขียนสรุปสั้นๆ ว่าโมเดลนี้ใช้เพื่ออะไร

**วิธีทำ**

ตัวอย่างของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากการสืบค้นข้อมูลอินเทอร์เน็ตจาก

- CALCULUS IN MEDICINE (https://sites.northwestern.edu/recalculated/2019/05/05/calculus-in-medicine/)
- เภสัช จลนศาสตร์ (Pharmacokinetics) และ เภสัช พลศาสตร์ (Pharmacodynamics) (https:// ns.mahidol.ac.th/ english/ th/ departments/ MN/ th/ doc/ km54/ เภสัช จลนศาสตร์%20(Pharmacokinetics).pdf)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จำลองการเปลี่ยนแปลงของความเข้มข้นของยา $c$ ณ เวลา $t$ โดยที่กำหนดขนาดยา (drug dosage) เท่ากับ $d$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{k_a}{k_a - k_e}\left[k_a \cdot d \cdot b \cdot e^{-at} - k_e \cdot c \cdot v\right]$$

โดยที่

- $k_a$ คือ ค่าคงตัวของการดูดซึมยา
- $k_e$ คือ ค่าคงตัวของการกำจัดยา
- $v$ แทน ปริมาตรของยาในร่างกาย
- $b$ แทน สัดส่วนของปริมาณยาที่ถูกดูดซึมเข้าไปในร่างกายเทียบกับขนาดของยา

ตามหลักเภสัชจลนศาสตร์ เมื่อได้รับยาเข้าสู่ร่างกาย จะมีระบวนการดูดซึมยา การกระจายตัวของยา การเปลี่ยนแปลงยา และการขับถ่ายยาออกจากร่างกาย

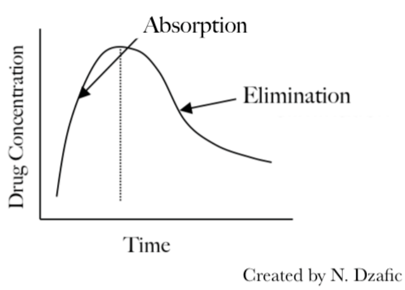



Figure 1.7: การเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของยาในระยะการดูดซึม และการกำจัดออกจากร่างกาย

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะมีประโยชน์ที่สำคัญที่ทำให้ผู้เชี่ยวชาญด้านยาสามารถกำหนดขนาดของยาที่เหมาะสม อย่างต่อเนื่องเป็นระยะเวลาที่เพียงพอกับการรักษา เพื่อให้ได้ผลการรักษาที่ดีที่สุด

โดยสรุป แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์เป็นเครื่องมือสำคัญในการทำความเข้าใจว่าสิ่งต่างๆ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไรและ แคลคูลัสช่วยให้เราวิเคราะห์อัตราการเปลี่ยนแปลงและพื้นที่ใต้เส้นโค้ง ในขณะที่สมการ

เชิงอนุพันธ์ช่วยให้เราสร้างแบบจำลองระบบที่ซับซ้อนในสาขาต่างๆ เช่น ฟิสิกส์ วิศวกรรม เศรษฐศาสตร์ และชีววิทยา แนวคิดทางคณิตศาสตร์เหล่านี้มีความสำคัญต่อการแก้ปัญหาในโลกแห่งความเป็นจริง เมื่อโลกของเราก้าวหน้ามากขึ้น ความสำคัญของแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ก็จะเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง ซึ่งสนับสนุนความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

# Chapter 2

# ลิมิต (Limits)

อาจกล่าวได้ว่า วิชาแคลคูลัส ถือกำเนิดขึ้นมาจากความพยายามในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตบนระนาบ 2 ปัญหาหลักๆ คือ

- การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งที่กำหนดให้
  กำหนดฟังก์ชัน (function) $f$ และกำหนดจุด $P(x_0, y_0)$ บนกราฟ $y = f(x)$ จงหาสมการของเส้นตรงที่สัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด $P$
- การหาพื้นที่ของบริเวณที่กำหนดให้
  กำหนด function $f$ และช่วง $[a, b]$ ในโดเมนของ $f$ จงหาพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมด้วยแกน $X$ และกราฟ $y = f(x)$ สำหรับ $x \in [a, b]$

แนวความคิดในการแก้ปัญหาทั้งสอง นำไปสู่การศึกษาเรื่อง ลิมิต (Limits) ซึ่งเป็นพื้นฐานของวิชาแคลคูลัสนั่นเอง

แต่ในปัจจุบันเราพบว่าวิชาแคลคูลัสมีประโยชน์ในการช่วยแก้ปัญหาในสาขาวิชาต่าง ๆ มากมาย เช่น เราจะพบในการศึกษาวิชานี้ว่า แคลคูลัสมีบทบาทในการแก้ปัญหาต่อไปนี้

- โดยทั่วไป ยาชนิดฉีดจะต้องใช้เวลาระยะหนึ่งหลังจากฉีดเข้าสู่ร่างกาย ในการที่จะไหลเวียนในกระแสโลหิต จนกระทั่งมีความเข้มข้นสูงสุด สมมุติว่า ยาฉีดชนิดหนึ่งหลังจากฉีดเข้าสู่ร่างกายนาน $t$ ชั่วโมง จะมีความเข้มข้นเป็น $C(t) = 0.15(e^{-0.18t} - e^{-1.2t})$ มิลลิกรัมต่อมิลลิลิตร จงหาว่า นานเท่าใดหลังจากฉีดยา จึงจะมีความเข้มข้นของยา ในกระแสโลหิตสูงที่สุด
- เราอาจประมาณได้อย่างมีเหตุผลว่า artery มีรูปร่างที่เป็นผลมาจากการหมุนรอบแกน ของเส้นโค้งในระนาบ โดยในสภาวะนิ่ง รัศมีของ artery มีค่าคงที่เท่ากับ 1 หน่วย (รูปทรงกระบอก) แต่ในขณะที่หัวใจสูบฉีดโลหิตผ่าน artery artery จะพองตัวออก ทำให้รัศมีเปลี่ยนไปตามสมการ $R(x) = 1 + 0.4x - 0.04x^2$ หน่วย เมื่อ $0 \le x \le 10$ เป็นตำแหน่งบนแนวยาวของ artery จงหาว่า ปริมาณโลหิตที่อยู่ใน artery ขณะที่หัวใจสูบฉีดโลหิตผ่านเข้ามาเป็นกี่เท่าของความจุโลหิตในสภาวะนิ่ง

- ความก้าวหน้าในทางการแพทย์ และเทคโนโลยีปัจจุบัน ทำให้มีการประดิษฐ์อุปกรณ์ช่วยในการรักษาโรคเบาหวานชิ้นหนึ่งขึ้น อุปกรณ์นี้มีลักษณะเป็นแคปซูล ซึ่งเมื่อฝังอุปกรณ์นี้ภายในร่างกายแล้ว มันจะหลั่งสารอินซูลินที่บรรจุอยู่ภายใน ออกสู่กระแสโลหิต โดยมีอัตราการหลั่งเป็น $f(t) = 0.5te^{-0.09t}$ ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวัน เมื่อ t คือ เวลาเป็นวัน นับจากอุปกรณ์เริ่มทำงาน จงหาว่า แพทย์จะต้องสั่งให้บรรจุอินซูลินในแคปซูลเป็นปริมาณเท่าใด เพื่อให้อุปกรณ์นี้สามารถให้อินซูลินแก่ผู้ป่วยได้นาน 3 เดือน

- การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด $P_0(x_0, y_0)$

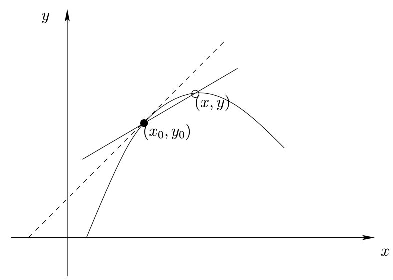



Figure 2.1: การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง

ขั้นตอนสรุปการหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง 2.1

1. เลือกจุดอื่นบนกราฟ เรียกจุดนี้ว่า $P(x, y)$
2. ลากเส้นผ่าน $PP_0$
3. ทำซ้ำโดยเลือกจุด P ให้ใกล้ $P_0$ มากขึ้น
4. เส้น $PP_0$ ที่ได้จะ “เข้าใกล้” เส้นสัมผัสมากขึ้นทุกที

- การหาพื้นที่ “ใต้กราฟ” ระหว่าง x = a กับ x = b

ขั้นตอนเบื้องต้นสำหรับการหาพื้นที่ใต้กราฟ

1. แบ่ง $[a, b]$ เป็นช่วงเล็กๆ
2. หาพื้นที่รวมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหมด
3. ทำซ้ำๆ โดยแบ่งช่วงให้เล็กมากขึ้น
4. พื้นที่ที่ได้จะ “เข้าใกล้” พื้นที่ที่ต้องการมากขึ้นทุกที

**ตัวอย่าง 2.1.** จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y = -x^2 + 6x - 2$ ณ จุด $P_0(2, 6)$

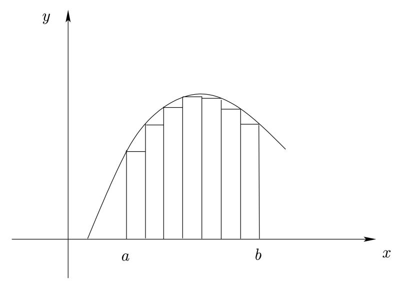



Figure 2.2: การหาพื้นที่ใต้กราฟ

**วิธีทำ** เลือกจุด $P(x,y)$ โดยที่ $x \neq 2$ และลากเส้น $PP_0$ จะได้ว่า ความชันของ $PP_0$ เท่ากับ

$$\begin{aligned}\frac{y-6}{x-2} &= \frac{-x^2+6x-8}{x-2} \\ &= -\frac{(x-2)(x-4)}{x-2} \\ &= 4-x\end{aligned} \tag{2.1}$$

ถ้า $P$ อยู่ใกล้ $P_0$ มากขึ้น ค่า x ย่อมเกือบเป็น 2 ดังนั้น ความชันของ $PP_0$ จึงเข้าใกล้ $4-2=2$ มากขึ้นเรื่อย ๆ เส้นสัมผัสจึงควรมีความชันเป็น 2 และสมการเส้นสัมผัส คือ $y-6=2(x-2)$

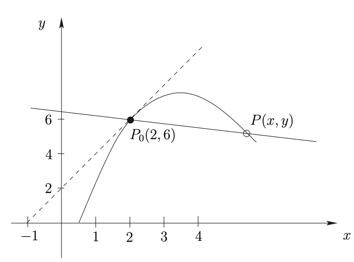



Figure 2.3: การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง $y=-x^2+6x-2$

จะเห็นว่า ในตัวอย่าง 2.1 นี้ เราสนใจพฤติกรรมของ function

$\frac{-x^2+6x-8}{x-2}$ เมื่อ $x \neq 2$ แต่มีค่าใกล้ 2 มาก ๆ นี่คือ ที่มาของเรื่อง

**นิยาม 2.1.** ให้ $f : D_f \to R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และให้ $a \in R$ โดยที่มีช่วง $(a,b)$ บางช่วงที่ $(a,b) \subseteq D_f \, (b > a)$

เรากล่าวว่า “ลิมิต (limit) ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา หาค่าได้และมีค่าเท่ากับจำนวนจริง L” ถ้า “ไม่ว่าเราจะกำหนดบริเวณรอบ ๆ $L$ ไว้แคบเพียงใด เมื่อเราพิจารณาค่าของ $f(x)$ สำหรับค่า $x$

ที่มากกว่า a โดยที่ให้ค่า ของ $x$ ลดลงเรื่อย ๆ จนถึงจุดหนึ่ง ค่าของ $f(x)$ จะอยู่ในบริเวณรอบ ๆ $L$ ที่เรากำหนดไว้นั้น และยังคงเป็นเช่นนี้สำหรับ $x$ อื่น ๆ ที่น้อยกว่านั้น (แต่มากกว่า $a$ ) ทั้งหมดด้วย”

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราพิจารณาพฤติกรรมของ function สำหรับ $x$ ที่น้อยกว่า $a$ จะได้ limit ทางซ้าย ดังนี้ ให้ $f : D_f \to R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และให้ $a \in R$ โดยที่มีช่วง $(b, a)$ บางช่วงที่ $(b, a) \subseteq D_f \, (b < a)$

เรากล่าวว่า “limit ของ $f(x)$ เมื่อ $x$ เข้าใกล้ a ทางซ้าย หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับจำนวนจริง $L$” ถ้า “ไม่ว่าเราจะกำหนดบริเวณรอบ ๆ $L$ ไว้แคบเพียงใด

เมื่อเราพิจารณาค่าของ $f(x)$ สำหรับค่า $x$ ที่น้อยกว่า $a$ โดยที่ให้ค่า ของ $x$ เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนถึงจุดหนึ่ง ค่าของ $f(x)$ จะอยู่ในบริเวณรอบ ๆ $L$ ที่เรากำหนดไว้นั้น และยังคงเป็นเช่นนี้สำหรับ $x$ อื่น ๆ ที่มากกว่านั้น (แต่น้อยกว่า $a$ ) ทั้งหมดด้วย”

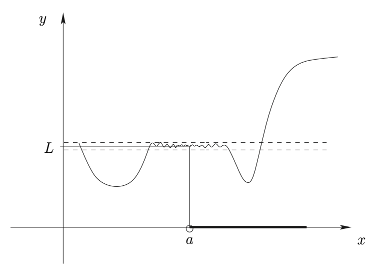



Figure 2.4: ลิมิตทางขวา

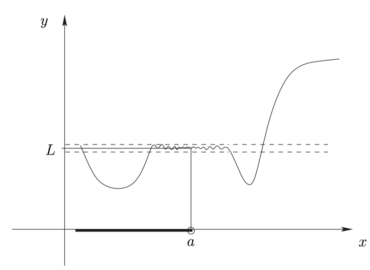



Figure 2.5: ลิมิตทางซ้าย

เราใช้สัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ แทนข้อความ “limit ของ $f(x)$ เมื่อ $x$ เข้าใกล้ a ทางขวา” และใช้สัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ แทนข้อความ “limit ของ $f(x)$ เมื่อ $x$ เข้าใกล้ a ทางซ้าย

**นิยาม 2.2.** ในกรณีที่ทั้ง $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากัน

เรากล่าวว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับค่านั้น

**ตัวอย่าง 2.2.** function $f$ ที่ $\lim_{x\to a^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น

$\lim_{x\to a} f(x)$ จึงหาค่าไม่ได้ด้วย

**วิธีทำ** จากรูปต่อไปนี้

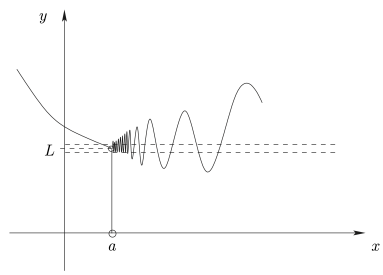



Figure 2.6: กราฟของฟังก์ชันที่หาลิมิตไม่ได้

ในกรณีนี้ จะเห็นว่า ไม่ว่าจะเลือก $L$ เป็นค่าใด ก็ไม่สามารถสรุปได้ว่า $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L$ เพราะไม่ใช่ทุกครั้งที่เรากำหนดบริเวณรอบ ๆ $L$ แล้ว function จะสอดคล้องตามนิยามเสมอไป จึงสรุปว่า $\lim_{x\to a} f(x) = L$ หาค่าไม่ได้ด้วย

**ทฤษฎี 2.1.**

1. $\lim_{x\to c} c = c$ *ถ้า* $c$ *เป็นจำนวนจริง*
2. $\lim_{x\to a} x = a$

**ทฤษฎี 2.2.** *ถ้า* $\lim_{x\to a} f(x)$ *และ* $\lim_{x\to a} g(x)$ *หาค่าได้แล้ว จะได้*

1. $\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
2. $\lim_{x\to a} (f-g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
3. $\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$
4. $\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ *ถ้า* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

**หมายเหตุ** ทฤษฎีบททั้งสองนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย

**ทฤษฎี 2.3.** *ถ้า* $\lim_{x\to a} f(x)$ *หาค่าได้ และ* $\sqrt[n]{f(x)}$ *หาค่าได้ สำหรับทุก ๆ* $x$ *ในช่วงเปิดบางช่วงที่มี* $a$ *อยู่ด้วย แล้ว* $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

**หมายเหตุ** ทฤษฎีบทนี้เป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย โดยเปลี่ยนเงื่อนไข "ทุก ๆ $x$" เป็น "ทุก ๆ $x < a$" และ "ทุก ๆ $x > a$" ตามลำดับ

**ทฤษฎี 2.4.** *ถ้า $f$ และ $g$ เป็น function ซึ่ง $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x$ ยกเว้นบาง $x$ ซึ่งมีอยู่เพียงจำนวนจำกัด แล้ว $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ ถ้า limit อันใดอันหนึ่งหาค่าได้*

**หมายเหตุ** ทฤษฎีบทนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย

**ตัวอย่าง 2.3.** จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 2} \frac{-x^2+6x-8}{x-2}$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{-x^2+6x-8}{x-2} &= \lim_{x\to 2} -\frac{(x-2)(x-4)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} -(x-4) \\
&= \lim_{x\to 2} (4-x) \\
&= \lim_{x\to 2} 4 - \lim_{x\to 2} x \\
&= 4-2 \\
&= 2
\end{aligned} \tag{2.2}$$

**ตัวอย่าง 2.4.** จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ **วิธีทำ**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} &= \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \\
&= \frac{\lim_{x\to 3} 1}{\lim_{x\to 3} \sqrt{x} + \lim_{x\to 3} \sqrt{3}} \\
&= \frac{\lim_{x\to 3} 1}{\sqrt{\lim_{x\to 3} x} + \lim_{x\to 3} \sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

**ตัวอย่าง 2.5.** จงหา limits ต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

2. $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

**วิธีทำ**

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \frac{0-\sqrt{3}}{x-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2. เนื่องจาก function $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ ไม่ใช่ function ที่หาค่าได้บนช่วงเปิด $(b, 0)$ ใด ๆ เลย ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ จึงหาค่าไม่ได้

3. เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ จึงหาค่าไม่ได้

**ข้อสังเกต** ในกรณีที่ function ที่มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีขอบเขต เมื่อตัวแปรต้นเข้าใกล้ $a$ (ทางซ้ายหรือขวาหรือทั้งสองทาง) บางตำรากล่าวว่า limit ของ function มีค่าเป็น $+\infty$ และถ้า function มีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขต จะกล่าวว่า limit ของ function มีค่าเป็น $-\infty$ ในวิชานี้เราจะถือตามนิยามที่ให้ไว้ ดังนั้นในกรณีข้างต้น จะกล่าวว่า limit ดังกล่าวหาค่าไม่ได้ (เว้นแต่จะระบุให้พิจารณาค่า $\pm\infty$ ด้วย)

**ตัวอย่าง 2.6.** จงหา limit ของ function $f(x) = \frac{1}{x}$

1. เมื่อ $x$ เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย

2. เมื่อ $x$ เข้าใกล้ 0 ทางขวา

3. เมื่อ $x$ เข้าใกล้ 0

**วิธีทำ**

1. $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้ (หรือเท่ากับ $-\infty$)

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้ (หรือเท่ากับ $+\infty$)

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้

ในบางครั้ง เราสนใจพฤติกรรมของ function $f$ เมื่อค่าตัวแปรต้นมีค่ามากขึ้นโดยไม่มีขอบเขต หรือน้อยลงโดยไม่มีขอบเขต ในกรณีเช่นนี้ เราใช้สัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ตามลำดับ แทนที่จะใช้ $\lim\limits_{x \to \infty^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to \infty^+} f(x)$ (โปรดอ่านนิยามในเอกสารอ้างอิง) ทฤษฎีบทเกี่ยวกับ limit ที่กล่าวมาข้างต้นทั้งหมด เป็นจริงในกรณีนี้ด้วย นอกจากนี้ เรายังมี ทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎี 2.5.**

1. $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$
2. $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$
3. *ถ้า* $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ *แล้ว* $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ *ซึ่งเป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย ในที่นี้* $a \in R$ *หรือ a เป็น* $+\infty$ *หรือ* $-\infty$

**ตัวอย่าง 2.7.** $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+12}{x^3-5} = ?$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+12}{x^3-5} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2+12)/x^3}{(x^3-5)/x^3} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{12}{x^3}}{1 - \frac{5}{x^3}} = \frac{0+0}{1-0} = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

**ตัวอย่าง 2.8.** $\lim_{x \to +\infty} x^{-\frac{2}{3}} = ?$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} x^{-\frac{2}{3}} &= \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \sqrt[3]{\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\right)^2} = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

**ตัวอย่าง 2.9.** $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{5}}+5x^{\frac{1}{7}}}{3x^{\frac{1}{3}}+5x^{\frac{1}{5}}+7x^{\frac{1}{7}}} = ?$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{5}}+5x^{\frac{1}{7}}}{3x^{\frac{1}{3}}+5x^{\frac{1}{5}}+7x^{\frac{1}{7}}} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}\left(1+3x^{-\frac{2}{15}}+5x^{-\frac{4}{21}}\right)}{x^{\frac{1}{3}}\left(3+5x^{-\frac{2}{15}}+7x^{-\frac{4}{21}}\right)} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1+3x^{-\frac{2}{15}}+5x^{-\frac{4}{21}}}{3+5x^{-\frac{2}{15}}+7x^{-\frac{4}{21}}} = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{2.6}$$

**ข้อสังเกต** ตัวแปร $x$ ในสัญลักษณ์ $\lim_{x \to a} f(x)$ เรียกว่า "ตัวแปรหุ่น" (dummy variable) เพราะไม่ได้กล่าวถึงตัวแปร $x$ แต่เราใช้มันเพื่อเขียนสัญลักษณ์แทนจำนวนจริงจำนวนหนึ่งที่ค่าของ function $f$ ใกล้เข้าไปหา ในยามที่ตัวแปรต้นของมันมีค่าใกล้ $a$ เข้าไปทุกที เราอาจเขียน $\lim_{t \to a} f(t)$ แทนจำนวนจำนวนนี้ก็ได้ เป็นต้น ตัวอย่างของ dummy variable อื่น ๆ เช่น ตัวแปร $n$ ในสัญลักษณ์ $\sum_{n=1}^{4} n^2$ ซึ่งอาจเขียนใหม่เป็น $\sum_{k=1}^{4} k^2$ ก็ได้ ทั้งสองสัญลักษณ์นี้แทนจำนวน $1^2+2^2+3^3+4^4$

**ตัวอย่าง 2.10.** จงหา $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{ถ้า } x \le 3 \\ \sqrt{x+13} & \text{ถ้า } x > 3 \end{cases}$$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3^-} f(x) &= \lim_{x\to 3^-} x^2 - 5 \leftarrow \boxed{f(x) = x^2 - 5 \text{ เมื่อ } x \text{ อยู่ทางซ้ายของ 3}} \\ &= 4 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3^+} f(x) &= \lim_{x\to 3^+} \sqrt{x+13} \leftarrow \boxed{f(x) = \sqrt{x+13} \text{ เมื่อ } x \text{ อยู่ทางขวาของ 3}} \\ &= 4 \end{aligned} \tag{2.8}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 4$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ 4

**ตัวอย่าง 2.11.** จงหา $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{ถ้า } x \le 3 \\ \sqrt{x+13} & \text{ถ้า } x > 3 \end{cases}$$

**วิธีทำ** $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (x^2 - 5) = -5$

## 2.1 ความต่อเนื่อง (Continuity)

ในวิชาฟิสิกส์ เราสามารถเขียนตำแหน่งของวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่ในรูป function ของเวลาได้ (วัตถุย่อมอยู่ในที่ใดที่หนึ่งเพียงที่เดียว ณ เวลาหนึ่ง ๆ)

**คำถาม** : function ใด ๆ เป็น function ที่แสดงตำแหน่งของวัตถุใดวัตถุหนึ่งได้เสมอหรือไม่

ลองอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ ถ้า function ที่แสดงตำแหน่งของมัน คือ

1. $s_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } t < 3 \\ 1 & \text{ถ้า } t > 3 \end{cases}$

2. $s_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } t \le 3 \\ 1 & \text{ถ้า } t > 3 \end{cases}$

3. $s_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } t \neq 3 \\ 0 & \text{ถ้า } t = 3 \end{cases}$

กราฟของ $s_1, s_2$ และ $s_3$ เป็นดังนี้

**ข้อสังเกต**:

1. $s_1(3)$ หาค่าไม่ได้
2. $s_2(3)$ หาค่าได้ แต่ $\lim\limits_{t \to 3} s_2(t)$ หาค่าไม่ได้
3. $s_3(3)$ หาค่าได้ $\lim\limits_{t \to 3} s_3(t)$ หาค่าได้ แต่ $s_3(3) \neq \lim\limits_{t \to 3} s_3(t)$

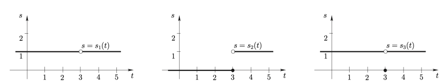


Figure 2.7: กราฟของฟังก์ชัน $s_1$, $s_2$ และ $s_3$

**นิยาม 2.3.** ให้ $f : D_f \to R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และ $a \in R$ เรากล่าวว่า $f$ ต่อเนื่อง (cotinuous) ที่ $a$ ถ้า

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้
3. $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

**นิยาม 2.4.** ให้ $f$ เป็น function และ $S$ เป็นเซต (set) เรากล่าวว่า $f$ ต่อเนื่องบน $S$ (continuous on $S$) ถ้า $f$ ต่อเนื่องที่ทุก ๆ สมาชิกของ $S$ เรียก function ที่ continuous on $R$ ว่า “ฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function)”

**ข้อสังเกต** จะเห็นว่า function ที่แสดงตำแหน่งของวัตถุต้องเป็น continuous function บนช่วงที่สนใจ

**ทฤษฎี 2.6.** *ถ้า $f$ และ $g$ เป็น function ที่ต่อเนื่องที่ $a$ แล้ว*

1. $f + g$ *ต่อเนื่องที่* $a$
2. $f - g$ *ต่อเนื่องที่* $a$
3. $f \cdot g$ *ต่อเนื่องที่* $a$
4. $\frac{f}{g}$ *ต่อเนื่องที่* $a$ *ถ้า* $g(a) \neq 0$

**ตัวอย่าง 2.12.** function $f$ ซึ่งนิยามโดย $f(x) = |x|$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่

**วิธีทำ** ในที่นี้

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ -x & \text{ถ้า } x > 0 \end{cases}$$

เราต้องพิจารณาว่า $f$ ต่อเนื่องที่ทุก ๆ $a \in R$ หรือไม่

- ถ้า $a > 0$ จะได้ $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x = a = f(a)$
- ถ้า $a < 0$ จะได้ $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (-x) = -a = f(a)$
- ถ้า $a = 0$จะได้ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0 = f(0)$
  และ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0 = f(0)$
  ดังนั้น $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

ดังนั้น $f$ ต่อเนื่องที่ทุก ๆ $a \in R$ จึงสรุปว่า $f$ เป็น continuous function

**ทฤษฎี 2.7.** *ฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) เป็น function ที่ต่อเนื่องบน domain ของมัน*

**หมายเหตุ**: rational function คือ function ที่เป็นเศษส่วนของพหุนาม (polynomial) domain ของ rational function ได้แก่เซตของจำนวนจริงซึ่งไม่ทำให้ส่วนของมันเป็นศูนย์

**ทฤษฎี 2.8.** *ถ้า $f$ และ $g$ เป็น function และ $a \in R$ โดยที่ $\lim_{x \to a} g(x) = L$ และ $f$ ต่อเนื่องที่ $L$ แล้ว $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(L)$*

**ตัวอย่าง 2.13.** $\lim_{x \to 1} \left| \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} \right| = ?$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \left| \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} \right| &= \left| \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} \right| \\ &= \left| \frac{1^4 - 1^2 + 1}{1^4 + 1^2 + 1} \right| \\ &= \left| \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{2.9}$$

**ทฤษฎี 2.9.** *ถ้า $f$ ต่อเนื่องที่ $a$ และ $g$ ต่อเนื่องที่ $f(a)$ แล้ว $g \circ f$ ต่อเนื่องที่ $a$*

**จงพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้น**

**ตัวอย่าง 2.14.** function f ซึ่งนิยามโดย $f(x) = \left| \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} \right|$ เป็น continuous function หรือไม่

**วิธีทำ** $f$ เป็น continuous function เพราะ $f = g \circ h$ โดยที่ $g\left(x\right) = \left|x\right|$ และ $h\left(x\right) = \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$ ซึ่งเป็น continuous function ทั้งคู่

**นิยาม 2.5.** เรานิยาม "*ภาวะต่อเนื่องทางซ้าย*" และ "*ภาวะต่อเนื่องทางขวา*" ได้โดยแทนที่ $\lim\limits_{x \to a}$ ในเงื่อนไขของนิยาม ด้วย $\lim\limits_{x \to a^-}$ และ $\lim\limits_{x \to a^+}$ ตามลำดับ นั่นคือ

ให้ $f : D_f \to R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และ $a \in R$ เรากล่าวว่า $f$ "ต่อเนื่องทางซ้าย (left-continuous) ที่ $a$" ถ้า

1. $f\left(a\right)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ หาค่าได้
3. $f\left(a\right) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

และกล่าวว่า $f$ "ต่อเนื่องทางขวา (right-continuous) ที่ $a$" ถ้า

1. f$(a)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ หาค่าได้
3. f$(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

**นิยาม 2.6.** ให้ $f : [a, b] \to R$ เรากล่าวว่า $f$ ต่อเนื่องบน $[a, b]$ (continuous on $[a, b]$) ถ้า

1. $f$ ต่อเนื่องบน $(a, b)$
2. $f$ ต่อเนื่องทางขวาที่ $a$
3. $f$ ต่อเนื่องทางซ้ายที่ $b$

**ตัวอย่าง 2.15.** function $f$ ที่นิยามโดย $f\left(x\right) = \sqrt{4 - x^2}$ เป็น continuous function บน $[-2, 2]$ หรือไม่

**วิธีทำ** เราตรวจสอบได้ว่า $f$ เป็น continuous function บน $[-2, 2]$ เพราะ
1. $f$ เป็น continuous function บน $(-2, 2)$
2. $f$ ต่อเนื่องทางขวาที่ -2 เพราะ \$\$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -2^+} f(x) &= \lim_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} \\
&= 0 = f\left(-2\right)
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

3. $f$ ต่อเนื่องทางซ้าย ที่ 2 เพราะ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2^-} f(x) &= \lim_{x\to -2^-} \sqrt{4-x^2} \\ &= 0 = f(2)\end{aligned} \tag{2.11}$$

**ตัวอย่าง 2.16.** พิจารณา function f ซึ่งมีกราฟดังต่อไปนี้

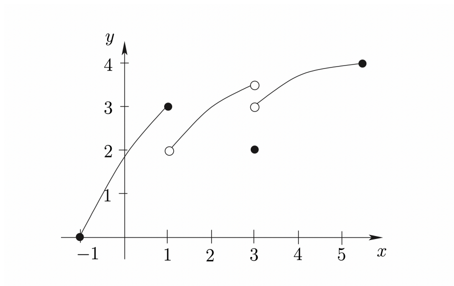


Figure 2.8: กราฟของฟังก์ชันในตัวอย่างrefexm:ex-cont-5

1. $f$ มีความต่อเนื่องที่ $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ หรือไม่

2. $f$ มีความต่อเนื่องบน $[-1, 0], [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5]$ หรือไม่

**วิธีทำ** ให้นักศึกษาทำเป็นแบบฝึกหัด

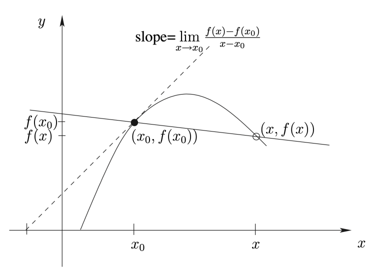
**ทฤษฎี 2.10.** *ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และฟังก์ชันลอการิทึม เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนโดเมนของมัน*

# Chapter 3

# อนุพันธ์ (Derivatives)

## 3.1 อนุพันธ์ (Derivatives)

จากตัวอย่าง 2.1 ในบทที่ 2 และเนื้อหาในเรื่อง limits เราจะเห็นว่า ความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ณ จุด $(x_0, f(x_0))$ บนกราฟ ก็คือ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ นั่นเอง (ถ้า limit หาค่าได้)

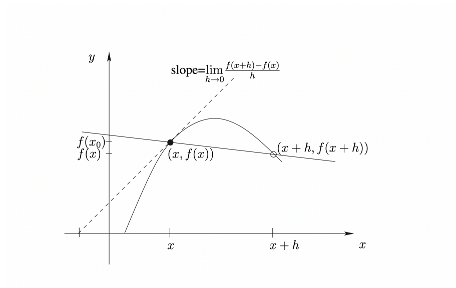



ปริมาณนี้มีความสำคัญ เพราะนำไปประยุกต์ใช้ได้มากมาย เราจึงกำหนดสัญลักษณ์และมีชื่อเรียกดังต่อไปนี้

**นิยาม 3.1.** ถ้า $f : D_f \to \mathbb{R}$ โดยที่ $D_f \subseteq \mathbb{R}$ และถ้า $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ หาค่าได้แล้ว เรียกค่าของ limit นี้ว่า "อนุพันธ์ (derivative) ของ $f$ ที่ $x_0$" และแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(x_0)$

เนื่องจากแต่ละ function $g$ และแต่ละ $x_0$ จะมี $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ ได้ค่าเดียว ดังนั้น $f'$ จึงเป็น function เรียกว่า "อนุพันธ์ (derivative)" ของ $f$

ในการเขียนนิยามของ $f'(x)$ เพื่อใช้เป็นสูตรทั่วไปสำหรับ function $f'$ เราเปลี่ยนตัวแปรเสียใหม่ ดังแสดงในรูป




จะได้ว่า

**ตัวอย่าง 3.1.** จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y = -x^2 + 6x - 2$ ณ จุด $P_0(2, 6)$

**วิธีทำ** ให้ $f(x) = -x^2 + 6x - 2$ จะได้ค่าความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด $(x, f(x))$ คือ $f'(x)$ ซึ่งเท่ากับ

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\left[-(x+h)^2+6(x+h)-2\right]-\left[-x^2+6x-2\right]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2+6h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(-2x-h+6) \leftarrow \boxed{\text{อย่าเขียน } \lim_{h\to 0} -2x-h+6} \\ &= -2x+6\end{aligned} \tag{3.1}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด $(2, 6)$ คือ $f'(2) = -2 \cdot 2 + 6 = 2$ เส้นสัมผัสจึงมีสมการเป็น $y - 6 = 2(x - 2)$

อัตราส่วน $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ คือ อัตราส่วนของค่า function ที่เปลี่ยนไป (จาก $f(x_0)$ กลายเป็น $f(x)$) ต่อค่าตัวแปรต้นที่เปลี่ยนไป (จาก $x_0$ กลายเป็น $x$) เรียกคำนี้ว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย (average rate of change) ของ $f(x)$ เทียบกับ $x$” คำว่าเฉลี่ยน แสดงถึงการคิดการเปลี่ยนแปลงบน ‘ช่วง’
แต่ $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ เป็นการหา “แนวโน้ม” ของอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย เมื่อ $x$ กับ $x_0$ อยู่ใกล้กันมากๆ จนแทบจะเป็นจุดเดียวกัน เราจึงเรียกค่านี้ว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง (instantaneous rate of change) ของ $f(x)$ เทียบกับ $x$”

สัญลักษณ์อื่นๆ สำหรับ derivatives ได้แก่

ถ้า $f'(x_0)$ หาค่าได้ เรากล่าวว่า function $f$ “หาอนุพันธ์ได้ (differentiable) ที่ $x_0$” ถ้า $f'(x_0)$ หาค่าได้สำหรับทุกๆ $x$ ในเซต $S$ เรากล่าวว่า function $f$ “หาอนุพันธ์บน $S$ (differentiable on $S$)” ถ้า $f'(x_0)$ หาค่าได้สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $x$ เรากล่าวว่า function $f$ “หาอนุพันธ์ได้ (differentiable)”

## 3.2 การคำนวณหาอนุพันธ์

**ตัวอย่าง 3.2.** จงหา derivative ต่อไปนี้

(1) $f'(x)$ เมื่อ $f(x) = x^2$

(2) $f'(2)$ เมื่อ $f(x) = \sqrt{x}$

(3) $\frac{ds(t)}{dt}|_{t=t_0}$ เมื่อ $s(t) = \frac{1}{t}$

**วิธีทำ** ใช้นิยามข้างต้นหา derivative ได้ดังนี้

(1) เมื่อ $f(x) = x^2$ จะได้

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x + h \\ &= 2x \end{aligned} \tag{3.2}$$

(2) เมื่อ $f(x) = \sqrt{x}$ จะได้

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h \cdot (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h) - 2}{h \cdot (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

(3) เมื่อ $s(x) = \frac{1}{t}$ จะได้

$$\begin{aligned} s'(t)|_{t=t_0} &= \lim_{h\to 0} \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{t_0+h}-\frac{1}{t_0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{t_0-(t_0+h)}{t_0(t_0+h)h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{t_0(t_0+h)h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{t_0(t_0+h)} \\ &= \frac{-1}{t_0^2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

**ตัวอย่าง 3.3.** จงหาเซต $S$ ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ function $f(x) = \sqrt{x}$ หาอนุพันธ์ได้บน $S$

**วิธีทำ** พิจารณาจำนวนจริง $x$ ที่ทำให้ $f'(x)$ หาค่าได้ เนื่องจาก

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ ถ้า } x > 0$$

ในกรณีที่ $x \leq 0$ จะได้ว่า $f(x)$ ไม่นิยาม จึงหาอนุพันธ์ที่ $x$ ไม่ได้ และในกรณีที่ $x = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{0+h}+\sqrt{0}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} \end{aligned} \tag{3.5}$$

ซึ่งหาค่าไม่ได้ ดังนั้นจึงได้ว่า เซตที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ function $f(x) = \sqrt{x}$ หาอนุพันธ์ได้บน $S$ คือช่วงเปิด $(0, \infty)$

## 3.3 สูตรสำหรับหาอนุพันธ์

**ทฤษฎี 3.1.** *ถ้า $c$ เป็นจำนวนจริง (real number) และ $n$ เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว function $f(x) = c$ เป็น function ที่ differentiable และ function $g(x) = x^n$ เป็น function ที่ differentiable บนช่วงเปิดในโดเมนของมัน และ*

1. $\frac{dc}{dx} = 0$
2. $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

**ทฤษฎี 3.2.** *ถ้า $f$ และ $g$ เป็น function ซึ่ง differentiable ที่ $x_0$ และ $c$ เป็นค่าคงที่จริง แล้ว*

1. $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
3. $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
4. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
5. $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

**ตัวอย่าง 3.4.** จงหา derivative ของแต่ละ function ต่อไปนี้ เทียบกับตัวแปรต้นของมัน

(1) $f(x) = 5x^4$

(2) $f(x) = 6x^{11} + 9$

(3) $s(t) = 3t^8 - 2t^5 + 6t + 1$

(4) $g(x) = \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right)\left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$

(5) $h(x) = \frac{x^2-1}{x^4+1}$

**วิธีทำ** ใช้สูตรในทฤษฎีบทข้างต้นหา derivative ได้ดังนี้

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^4 \\ f'(x) &= \frac{d}{dx}(5 \cdot x^4) \\ &= 5\frac{d}{dx}(x^4) = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3 \end{aligned} \tag{3.6}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x^{11} + 9 \\ f'(x) &= \frac{d}{dx}(6x^{11} + 9) \\ &= 5\frac{d}{dx}(6x^{11}) + \frac{d}{dx}9 \\ &= 66x^{10} \end{aligned} \tag{3.7}$$

(3)

$$\begin{aligned} s(t) &= 3t^8 - 2t^5 + 6t + 1 \\ s'(t) &= \frac{d}{dt}(3t^8 - 2t^5 + 6t + 1) \\ &= 24t^7 - 10t^4 + 6 \end{aligned} \tag{3.8}$$

(4)

$$\begin{aligned}
g(x) &= \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right)\left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) \\
g'(x) &= \frac{d}{dx}\left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right)\left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right)\frac{d}{dx}\left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) \\
&= \left(2x - \frac{1}{2}x^{-1}\right)\left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right)(2x - 2x^{-3})
\end{aligned} \tag{3.9}$$

(5)

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} \\
h'(x) &= \frac{(x^4+1)\frac{d}{dx}(x^2-1) - (x^2-1)\frac{d}{dx}(x^4+1)}{(x^4+1)^2} \\
&= \frac{(x^4+1)(2x) - (x^2-1)(4x^3)}{(x^4+1)^2}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

**ตัวอย่าง 3.5.** จงหา $f'(0)$ เมื่อ $f(x) = (x^6 - x^5 - x^4 - x^3)(x^5 - x^4 - x^3 - x^2)$

**วิธีทำ** จาก $f(x) = (x^6 - x^5 - x^4 - x^3)(x^5 - x^4 - x^3 - x^2)$ จะได้

$$f'(x) = (x^6-x^5-x^4-x^3)(5x^4-4x^3-3x^2-2x)+(x^5-x^4-x^3-x^2)(6x^5-5x^4-4x^3-3x^2)$$

ดังนั้น $f'(0) = 0$

## 3.4 อนุพันธ์อันดับสูง (High Order Derivatives)

ถ้า $f$ เป็น function ที่หา derivative ได้ และ $f'$ ก็เป็น function ที่หา derivative ได้อีก เราเรียก $(f')'$ ว่า "อนุพันธ์อันดับสอง (second derivative) ของ $f$" เขียนแทนด้วย $f''$ ในทำนองเดียวกันเราจะมี "อนุพันธ์อันดับสาม (third derivative) ของ $f$" เขียนแทนด้วย $f'''$ ฯลฯ สำหรับอนุพันธ์อันดับ $n$ ($n$th derivative) ของ $f$ โดยที่ $n \geq 4$ เราเขียนแทนด้วย $f^{(n)}$ นอกจากนี้เราใช้สัญลักษณ์ $\frac{d^n f(x)}{dx}$ แทน $n$th derivative ของ $f$ และ $\frac{d^n f(x)}{dx}|_{x=x_0}$ แทน $n$th derivative ของ $f$ ที่ $x_0$ (ซึ่งคือ $f^{(n)}(x_0)$ นั่นเอง)

ถ้าให้ $y = f(x)$ เราสามารถใช้สัญลักษณ์ $y', y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}$ หรือ $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ แทนอนุพันธ์อันดับที่ $1, 2, 3, 4, \ldots, n$ ตามลำดับ และแทนค่าอนุพันธ์ที่ $x_0$ ด้วย $\frac{d^ny}{dx^n}|_{x=x_0}$

ด้วยหลักการเดียวกัน "อนุพันธ์อันดับหนึ่ง (first derivative) ของ $f$" ก็คือ อนุพันธ์ของ $f$ นั่นเอง

**ตัวอย่าง 3.6.** จงหาอนุพันธ์ทั้งหมดของ $f(x) = x^n$ เมื่อ $n > 1$

**วิธีทำ** จาก $f(x) = x^n$ จะได้

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= nx^{n-1} \\
f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} \\
f'''(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\
f^{(4)}(x) &= n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= n! \\
f^{(k)}(x) &= 0 \text{ เมื่อ } k \geq n
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

## 3.5 การตีความอนุพันธ์ (Interpretation of Derivatives)

### 3.5.1 อนุพันธ์ในเชิงความชัน (Derivatives as Slopes)

ในกรณีที่เราลงจุดกราฟ (plot graph) ของฟังก์ชัน เราได้ทราบมาแล้วว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f$ ที่จุด $x$ ใดๆ ก็คือความชันของเส้นสัมผัสกราฟ (เรียกว่าความชันของกราฟ) ของฟังก์ชัน $f$ ที่จุด $(x, f(x))$ นั่นเอง ความจริงข้อนี้สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันได้

**ตัวอย่าง 3.7.** จงพิจารณาว่ามีเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ ที่ตั้งฉากกันหรือไม่

**วิธีทำ** เราทราบว่าเส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ $-1$ พิจารณาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ ที่จุด $(x, f(x))$ ใดๆ จะได้ว่า ความชันดังกล่าวมีค่าเท่ากับ $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ ฉะนั้น ความชันของเส้นสัมผัสกราฟนี้ที่จุดใดๆ จึงมีค่าเป็นบวกเสมอ จึงสรุปได้ว่า กราฟของฟังก์ชันนี้ไม่มีเส้นสัมผัสคู่ใดตั้งฉากกัน เพราะผลคูณของความชันของเส้นสัมผัสเป็นจำนวนจริงบวกเสมอ ไม่สามารถเป็น $-1$ ได้

**ตัวอย่าง 3.8.** ภูเขาจำลองในพิพิธภัณฑ์วิทยาศาสตร์แห่งหนึ่ง เกิดจากการหมุนของพาราโบลาคว่ำรอบแกนสมมาตรของมัน โดยที่ฐานของภูเขาจำลองเป็นรูปวงกลมรัศมี 5 เมตร และยอดเขาอยู่สูงจากฐานเป็นระยะทาง 8 เมตร บนยอดเขาติดตั้งโคมไฟ ณ ตำแหน่งสูงจากยอดเขาขึ้นไปอีก 0.5 เมตร เมื่อเปิดโคมไฟ แสงไฟจากโคมจะทำให้พื้นบริเวณรอบๆ ภูเขาจำลองที่ไม่ถูกภูเขาจำลองบัง สว่างขึ้น จงหาว่าบริเวณที่สว่างดังกล่าว เป็นบริเวณบนพื้นภายนอกวงกลมรัศมีเท่าใด

จากโจทย์จำลองรูปได้ดังภาพ 1.3 ในที่นี้สมมุติว่าแหล่งกำเนิดแสงเป็นจุด จะเห็นว่า แนวแบ่งส่วนมืดและส่วนสว่างจะผ่านจุดกำเนิดแสง และอยู่ในแนวเส้นสัมผัสผิวของพาราโบลาด้วย ให้จุดกึ่งกลางฐานของภูเขาจำลองเป็นจุดกำเนิด และสมมุติให้ $f(x) = a - kx^2$ เป็นสมการของรูปพาราโบลา จากเงื่อนไขความกว้างและความสูงของภูเขาจำลอง จะได้ว่า $f(0) = 8$ และ $f(5) = 0$ ซึ่งทำให้ $a = 8$ และ $k = 8/25$ ดังนั้น $f(x) = 8 - 8x^2/25$ ให้ $(x, f(x))$ เป็นจุดที่แนวแบ่งส่วนมืดและส่วนสว่างสัมผัสกับพาราโบลา จะได้ว่า ความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุดดังกล่าวเท่ากับ $f'(x) = -16x/25$ แต่เส้น

สัมผัสนี้ผ่านจุดกำเนิดแสง $(0, 8.5)$ และจุด $(x, f(x)) = (x, 8 - 8x^2/25)$ จึงได้ว่า มีความชันเป็น $\dfrac{8 - 8x^2/25 - 8.5}{x - 0}$ นั่นคือ $\dfrac{8 - 8x^2/25 - 8.5}{x - 0} = -16x/25$ หรือ $x = 5/4$ ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ $-16 \times (5/4)/25 = -4/5$ ถ้าบริเวณบนพื้นที่สว่าง เป็นบริเวณภายนอกวงกลมรัศมี $r$ จะได้ว่า เส้นสัมผัสข้างต้น ต้องผ่านจุด $(r, 0)$ ด้วย นั่นคือความชันจะเท่ากับ $\dfrac{0 - 8.5}{r - 0}$ ซึ่งทำให้ $\dfrac{0 - 8.5}{r - 0} = -4/5$ หรือ $r = 10.625$ นั่นคือ บริเวณที่สว่าง เป็นบริเวณบนพื้นภายนอกวงกลมรัศมี 10.625 เมตร

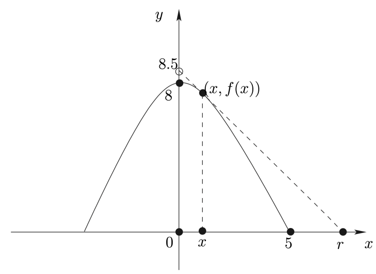



Figure 3.1: รูปภาพสำหรับตัวอย่างข้างต้น

### 3.5.2 อนุพันธ์ในเชิงอัตราเร็ว (Derivatives as Speeds)

ถ้าพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยให้ $f(t)$ เป็นระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ ณ เวลา $t$ เราจะได้ว่า $f'(t)$ ก็คืออัตราเร็ว ณ เวลา $t$ ซึ่งเรียกว่า อัตราเร็วชั่วขณะ (instantaneous speed) ในขณะที่ปริมาณ $\dfrac{f(s) - f(t)}{s - t}$ เรียกว่า อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุ ในช่วงเวลา ตั้งแต่ $s$ ถึง $t$

**ตัวอย่าง 3.9.** วัตถุเคลื่อนที่เป็นเวลานาน 1 นาที ตามสมการ $s = 0.5t + 0.1t^2$ เมื่อ $t$ คือเวลาเป็นวินาที และ $s$ คือระยะทางที่เคลื่อนที่ได้เป็นเมตร จงหา

(1) อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วง 10 วินาทีแรก และในช่วง 10 วินาทีถัดไป

(2) อัตราเร็วของวัตถุ ณ วินาทีที่ 10 และ ณ วินาทีที่ 20

**วิธีทำ**
(1) อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วง 10 วินาทีแรก เท่ากับ
$\dfrac{s(10) - s(0)}{10 - 0} = \dfrac{(0.5 \times 10 + 0.1 \times 10^2) - (0.5 \times 0 + 0.1 \times 0^2)}{10 - 0} = 1.5$ เมตรต่อวินาที
อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วง 10 วินาทีถัดไป เท่ากับ
$\dfrac{s(20) - s(10)}{20 - 10} = \dfrac{(0.5 \times 20 + 0.1 \times 20^2) - (0.5 \times 10 + 0.1 \times 10^2)}{20 - 10} = 3.5$ เมตรต่อวินาที

(2) เนื่องจาก $\dfrac{d}{dt}\left(0.5t + 0.1t^2\right) = 0.5 + 0.2t$
ดังนั้น อัตราเร็วของวัตถุ ณ วินาทีที่ 10 เท่ากับ
$\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=10} = \left.\dfrac{d}{dt}\left(0.5t + 0.1t^2\right)\right|_{t=10} = 0.5 + 0.2 \times 10 = 2.5$ เมตรต่อวินาที
และ อัตราเร็วของวัตถุ ณ วินาทีที่ 20 เท่ากับ
$\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=20} = \left.\dfrac{d}{dt}\left(0.5t + 0.1t^2\right)\right|_{t=20} = 0.5 + 0.2 \times 20 = 4.5$ เมตรต่อวินาที

### 3.5.3 อนุพันธ์ในเชิงอัตราการเปลี่ยนแปลง (Derivatives as Rates of Change)

เราจะเห็นได้ชัดจากนิยามของอนุพันธ์ว่า ในกรณีของฟังก์ชันทั่วๆ ไป อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ก็คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าฟังก์ชัน เทียบกับตัวแปรต้นของมันนั่นเอง

**ตัวอย่าง 3.10.** เมื่อใช้เครื่องสูบลม สูบลมเข้าไปในลูกโป่ง เราอาจประมาณได้ว่า ณ ขณะเวลาใดๆ ลูกโป่งมีรูปร่างเป็นรูปทรงกลม จงหาอัตราการเพิ่มขึ้นของปริมาตรของลูกโป่ง ต่อหนึ่งหน่วยรัศมีที่เพิ่มขึ้นของลูกโป่ง ขณะที่ลูกโป่งมีรัศมี 10 เซนติเมตร

**วิธีทำ** ให้ $r$ เป็นรัศมีของลูกโป่ง และ $V$ เป็นปริมาตรของลูกโป่ง จากข้อสมมุติว่าลูกโป่งเป็นทรงกลม จะได้ว่า $V = 4\pi r^3/3$ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของลูกโป่งเทียบกับรัศมีเท่ากับ $\dfrac{dV}{dr} = 12\pi r^2/3 = 4\pi r^2$ ลูกบาศก์หน่วยต่อหน่วย นั่นคือ ขณะที่ลูกโป่งมีรัศมี 10 เซนติเมตร มันจะมีปริมาตรเพิ่มขึ้นในอัตรา $4 \times \pi \times 10^2 \approx 1256$ ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อเซนติเมตร หรือประมาณ $1.256$ ลิตรต่อรัศมีที่เพิ่มขึ้น 1 เซนติเมตร

### 3.5.4 แบบฝึกหัด (Exercises)

1. จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้ ถ้าอนุพันธ์ดังกล่าวหาค่าได้ ในกรณีที่หาค่าไม่ได้ ให้ระบุว่าหาค่าไม่ได้

    1. $f'(x)$ เมื่อ $f(x) = g(x)h(x)k(x)$
    2. $f^{(n)}(0)$ เมื่อ $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x^i$ โดยที่ $k$ และ $n$ เป็นจำนวนนับ
    3. $\dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{1-t}$ และ $\dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{1}{1-t}$
    4. $\dfrac{d}{dt}\dfrac{f(t)}{t}$ เมื่อ $f$ เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\dfrac{d}{dt}f(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ สำหรับทุกๆ $t \neq 0$
    5. $f'(-1),\ f'(-\frac{2}{3}),\ f'(0),\ f'(1)$ เมื่อ $f(x) = x\sqrt{1+x}$
    6. $\left.\dfrac{d}{dx}\dfrac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}\right|_{x=0}$
    7. $\dfrac{dy}{dx}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0.25}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ เมื่อ $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$

8. $\dfrac{d}{dx}\left(x^2\sqrt{1+x}\right)$
9. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ เมื่อ $y = (1+x^2)\sqrt{1-2x}$ ( หาอนุพันธ์ของ $\sqrt{1-2x}$ และ $1/\sqrt{1-2x}$ ก่อน)
10. $\dfrac{d^{10}y}{dx^{10}}$ เมื่อ $y = \left(x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1\right)\left(x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2\right)$

2. จงตอบคำถามต่อไปนี้

   1. จงหาความชันของกราฟของสมการ $y = x^3 - 3x$ ณ ตำแหน่งซึ่ง $x = 2$
   2. จงหาจุดบนกราฟ $y = x^3 - 3x$ ซึ่งมีเส้นสัมผัสกราฟที่ขนานกับเส้นสัมผัส ณ จุดซึ่ง $x = a$ เมื่อ $a$ เป็นจำนวนจริงใดๆ
   3. จงหาจุดบนกราฟ $y = x^3 - 3x$ ซึ่งมีเส้นสัมผัสกราฟที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ณ จุดซึ่ง $x = a$ เมื่อ $a$ เป็นจำนวนจริงใดๆ

## 3.6 กฎลูกโซ่ (The Chain Rule)

การทราบข้อมูลของ derivative ของฟังก์ชัน $f$ และฟังก์ชัน $g$ ทำให้เราสามารถหา derivative ของผลบวก $f+g$ ผลคูณ $fg$ และผลหาร $f/g$ ของฟังก์ชัน ทั้งสองได้ ข้อมูลนี้ยังใช้หา derivative ของฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสมได้ เราเรียกวิธีการหา derivative ของฟังก์ชัน ประกอบว่า chain rule โดยมีแนวคิดสำคัญคือ การสร้างตัวแปรใหม่ขึ้นมาช่วย ในการคำนวณ ดังรายละเอียดในทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎี 3.3.** *ถ้าฟังก์ชัน $g$ หา derivative ได้ที่จุด $x$ และฟังก์ชัน $f$ หา derivative ได้ที่จุด $g(x)$ แล้ว ฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ หา derivative ได้ที่จุด $x$ ยิ่งกว่านั้น ถ้า*

$$y = f(g(x)) \quad \text{และ} \quad u = g(x)$$

*แล้ว $y = f(u)$ และ*

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงให้เห็นถึงการใช้ chain rule หา derivative ของฟังก์ชัน

**ตัวอย่าง 3.11.** พิจารณาฟังก์ชัน $y = \frac{1}{x^2+1}$ กำหนดให้ $u = x^2 + 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ** ในที่นี้ $y = \frac{1}{u}$ เราใช้ chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du}\left[\frac{1}{u}\right] \cdot \frac{d}{dx}[x^2+1] \\ &= \left(-\frac{1}{u^2}\right) \cdot (2x) \\ &= -\frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot (2x) \\ &= -\frac{2x}{(x^2+1)^2}\end{aligned} \tag{3.12}$$

นั่นคือ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

**ตัวอย่าง 3.12.** กำหนดให้ $y = u^{100}$ และ $u = x^3 + x^2 + x + 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ** ใช้ chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du}[u^{100}] \cdot \frac{d}{dx}[x^3+x^2+x+1] \\ &= (100u^{99}) \cdot (3x^2+2x+1) \\ &= 100(x^3+x^2+x+1)^{99}(3x^2+2x+1)\end{aligned} \tag{3.13}$$

นั่นคือ $\dfrac{dy}{dx} = 100(x^3+x^2+x+1)^{99}(3x^2+2x+1)$

**ข้อสังเกต** สูตรของกฎลูกโซ่สามารถเขียนได้ในอีกรูป ซึ่งสะดวกในการนำไปใช้ สังเกตว่า $y = f(u)$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(u)] \quad \text{และ} \quad \frac{dy}{du} = f'(u)$$

สูตรของ chain rule จึงเขียนได้ว่า

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\frac{du}{dx}}$$

ซึ่งเขียนได้อีกรูปคือ

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

**ตัวอย่าง 3.13.** จงหา derivative ของฟังก์ชัน $y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}$

**วิธีทำ** เราแนะนำตัวแปร $u = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ และใช้สูตร chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}\right] &= \frac{d}{dx}[\sqrt{u}] \\
&= \frac{d}{du}\sqrt{u}\cdot\frac{du}{dx} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{du}{dx} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right] \qquad (3.14) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}}\cdot(x+1) \\
&= \frac{x+1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}}
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}}$

**ตัวอย่าง 3.14.** จงหาค่าของ $f'(x^3 + x)$ เมื่อกำหนดให้

$$\frac{d}{dx}[f(x^3 + x)] = (3x^2 + 1)^2$$

**วิธีทำ** เราใช้ chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[f(x^3 + x)] &= f'(x^3 + x)\frac{d}{dx}[x^3 + x] \\
&= f'(x^3 + x)\cdot(3x^2 + 1)
\end{aligned} \qquad (3.15)$$

ดังนั้น

$$(3x^2 + 1)^2 = f'(x^3 + x)\cdot(3x^2 + 1)$$

หรือ

$$f'(x^3 + x) = 3x^2 + 1$$

สังเกตความแตกต่างระหว่าง $\dfrac{d}{dx}f(x^3 + x)$ และ $f'(x^3 + x)$

**ตัวอย่าง 3.15.** กำหนดให้ $f(x) = |x|$ จงหา derivative ของฟังก์ชัน $f$ ที่ $x \neq 0$

**วิธีทำ** ฟังก์ชัน $f$ เขียนได้ว่า

$$f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$$

ถ้า $x \neq 0$ แล้ว

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\sqrt{x^2} \\ &= \frac{d}{du}[\sqrt{u}] \cdot \frac{d}{dx}[x^2] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (2x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot x \\ &= \frac{x}{|x|} \end{aligned} \tag{3.16}$$

นั่นคือ เมื่อ $x \neq 0$ แล้ว $f'(x) = \dfrac{x}{|x|}$

### 3.6.1 แบบฝึกหัด

1. จงหา derivative ของฟังก์ชันต่อไปนี้
   1. $f(x) = \sqrt{1 - x + x^2}$
   2. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$
   3. $f(x) = (2x + 5)^3(3x - 7)^5$
   4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 + 1}$
2. จงหา derivative ของฟังก์ชัน
$$y = \sqrt{x + \sqrt[3]{3x + \sqrt[4]{4x}}}$$
3. กำหนดให้ $f$ เป็นฟังก์ชันหา derivative ได้ และ $g = f \circ f$ ถ้า $f(1) = 1,\ f(2) = 4$ และ $f'(4) = 8$ จงหาค่าของ $g'(1)$
4. พิจารณาตารางค่าของฟังก์ชัน $f, f',\ g, g'$ และ $h, h'$ โดยที่ $h = f \circ g$

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ | $h(x)$ | $f'(x)$ | $g'(x)$ | $h'(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 |
| 0 | 3 | -1 | ? | 1 | 1 | ? |
| 1 | ? | 0 | 0 | ? | ? | 3 |

   จงหาค่าของ $h(0),\ f(1),\ h'(0),\ f'(1)$ และ $g'(1)$

5. จาก chain rule
$$E : chain1$$
   , $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, จงหาสูตร ของ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

## 3.7 อนุพันธ์ของฟังก์ชันอินเวอร์ส (Derivatives of Inverse Functions)

**นิยาม 3.2.** ถ้าฟังก์ชัน $f$ และ $g$ สอดคล้องสมบัติ

1. $g(f(x)) = x$ สำหรับ $x$ ที่เป็นสมาชิกของโดเมนของ $f$
2. $f(g(y)) = y$ สำหรับ $y$ ที่เป็นสมาชิกของโดเมนของ $g$

เรากล่าวว่า $f$ และ $g$ เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส โดยที่ $f$ เป็น ฟังก์ชันอินเวอร์สของ $g$ และ $g$ เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส ของ $f$

ถ้าเขียน $f^{-1}$ แทน $g$ และใช้สัญกรณ์ $x$ แทนสมาชิกทั้งในโดเมนของ $f$ และ $f^{-1}$ สมมติว่าทั้งสองฟังก์ชันหา derivative ได้ ให้

$$y = f^{-1}(x)$$

เราสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$x = f(y)$$

หา derivative เทียบกับ $x$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x] &= \frac{d}{dx}[f(y)] \\ &= f'(y) \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned} \tag{3.17}$$

นั่นคือ

$$1 = f'(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

หรือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$$

เขียนใหม่ได้ว่า

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

**ตัวอย่าง 3.16.** กำหนดให้ $f(x) = x^3$ มี $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ จงหา $\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)]$

**วิธีทำ** คำนวณหา derivative ได้ว่า $f'(x) = 3x^2$ และ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^{1/3}] = \frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] &= \frac{1}{3[f^{-1}(x)]^2} \\ &= \frac{1}{3[x^{1/3}]^2} \\ &= \frac{1}{3x^{2/3}} \end{aligned} \tag{3.18}$$

ในการหา derivative ของฟังก์ชันอินเวอร์ส เราอาจจะไม่ใช้สูตรโดยตรง แต่ จะคำนวณหา derivative ตามขั้นตอนที่ได้แสดงข้างต้น ดังตัวอย่าง

**ตัวอย่าง 3.17.** พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + x + 2$ จงหา derivative ของ $f^{-1}(x)$

**วิธีทำ** เราเขียน $x = f(y) = y^3 + y + 2$ แล้วหา derivative เทียบกับ $x$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x] &= \frac{d}{dx}[y^3 + y + 2] \\ 1 &= (3y^2 + 1)\frac{dy}{dx} \end{aligned} \tag{3.19}$$

ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3y^2 + 1}$

**ตัวอย่าง 3.18.** กำหนดให้ $f$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอิสเวอร์ส ถ้า $f(1) = 2$ และ $f'(1) = 3$ แล้ว จงหาค่าของ $(f^{-1})'(2)$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $f(1) = 2$ แล้ว $f^{-1}(2) = 1$ และจากสูตร

$$E : inverse$$

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(2) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} \\ &= \frac{1}{f'(1)} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{3.20}$$

นั่นคือ $(f^{-1})'(2) = 1/3$

### 3.7.1 แบบฝึกหัด

1. จงหา $(f^{-1})'(x)$ เมื่อกำหนด
   1. $f(x) = 2x^3 - 1$
   2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$
   3. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$
   4. $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$

## 3.8 Differentials, Implicit Differentiation and Related Rates

### 3.8.1 Differentials

ที่ผ่านมา เราให้ความหมายของ $dy/dx$ ว่าเป็น derivative ของ $y$ เทียบกับ $x$ ในความหมายของตัวดำเนินการ $\frac{d}{dx}$ ที่กระทำ กับฟังก์ชัน $y$ หัวข้อนี้เราจะนิยาม $dy$ และ $dx$ แยกจากกัน และให้ความ

หมาย $dy/dx$ ว่าเป็นเศษส่วน

ผลต่างระหว่างค่าสองค่าของตัวแปร เราเรียกว่า increment เช่นในตัวแปร $x$ ผลต่างระหว่างค่า $x = x_0$ และ $x = x_1$ เราเขียน increment ใน $x$ นี้ ว่า $\Delta x = x_1 - x_0$

ให้ $y = f(x)$ และให้ $x$ มีการเปลี่ยนค่าจาก $x = x_0$ ไปยัง $x = x_1$ ก็จะมี การเปลี่ยนค่าใน $y$ จาก $y_0 = f(x_0)$ ไปยัง $y_1 = f(x_1)$ นั่นหมายความ ว่า increment $\Delta x$ ทำให้เกิด increment $\Delta y = y_1 - y_0$ โดยที่

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$$

หรือ

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ดังนั้น สำหรับค่า $x$ ทั่วไปแล้ว เราอาจเขียน

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

และนิยามของ derivative ก็เขียนได้อีกรูปว่า

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

เมื่อเราเห็นการเขียนสัญกรณ์ $\dfrac{dy}{dx}$ มีแนวโน้มที่จะ ทำให้เราคิดถึงผลหารของ $dy$ ด้วย $dx$ ซึ่งในขณะนี้ ทั้งสองปริมาณยังไม่มี ความหมายใด ๆ สังเกตว่าในสูตรของ chain rule ที่ว่า $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ ก็ให้ความรู้สึกแรกว่าน่าจะเป็นผลหารเช่นกัน ดังนั้นลำดับถัดไปเราจะให้ความหมายของ พจน์ $dx$, $dy$ และการตีความหมายในรูปเศษส่วน

เริ่มด้วยการตรึงค่า $x$ และนิยาม $dx$ ว่าเป็นตัวแปรต้น กำหนดให้ $y = f(x)$ และ $f$ เป็นฟังก์ชัน หา derivative ได้ เรานิยาม $dy$ ว่าเป็นตัวแปรตามดังนี้

$$\boxed{dy = f'(x)\,dx}$$

ถ้า $dx \neq 0$ เราเขียนใหม่ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

เราเรียก $dy$ ว่า differential ของ $y$ และ $dx$ ว่า differential ของ $x$

มีความแตกต่างระหว่าง ความหมายของ differential $dy$ และ increment $\Delta y = y_1 - y_0$ ถ้าเรากำหนดให้ differential $dx$ และ increment $\Delta x$ มีค่า เดียวกัน นั่นคือ $dx = \Delta x$ จะเห็นว่า $\Delta y$ แทนถึง ค่าผลต่างใน $y$ ของจุดเริ่มต้น $x$ และจุดปลาย $x + \Delta x$ ตามเส้นโค้ง $y = f(x)$ นั่นคือ $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ในขณะที่ $dy$ แทนถึงค่าผลต่างใน $y$ ของจุดเริ่มต้น $x$ และจุดปลาย $x + \Delta x$ ตามเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ผ่านจุด $(x, f(x))$ และ มีความชันเท่ากับ $f'(x)$

**ตัวอย่าง 3.19.** ถ้า $y = f(x) = x^2 + 1$ แล้ว $f'(x) = 2x$ กำหนดให้ $x = 3$ จงหาค่าของ $dy$ และ $\Delta y$ เมื่อ $dx = \Delta x = 0.1$

**วิธีทำ** ค่าของ $dy$ คือ

$$dy = f'(x)\,dx = 2x\,dx$$

กรณีตรึง $x = 3$ ได้ว่า

$$dy = 6\,dx$$

ถ้าให้ $dx = 0.1$ ค่าของ $dy = 0.6$ ถ้าเราพิจารณาค่า $dx = \Delta x = 0.1$ เราก็จะได้

$$\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = (3.1)^2 + 1 - 3^2 - 1 = 0.61$$

สังเกตว่า $dy = 0.6$ ในขณะที่ $\Delta y = 0.61$

มีข้อสังเกตว่า ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันหา derivative ได้ที่ค่า $x_0$ แล้วเส้นสัมผัส กับเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(x_0, f(x_0))$ จะใกล้เคียงกับกราฟของ $f$ สำหรับค่า $x$ ใกล้ ๆ กับค่า $x_0$ สมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งนี้ที่ผ่านจุด $(x_0, f(x_0))$ มี ความชัน $f'(x_0)$ คือ

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

เมื่อเรากล่าวว่า เส้นโค้ง $y = f(x)$ และเส้นสัมผัสกับเส้นใกล้เคียงกันหมายถึงถ้าเรา ให้ $x$ เข้าใกล้ $x_0$ ค่าของ $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ก็จะใกล้เคียงค่า $f(x)$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

เราเรียกสมการ

$$E : approx$$

ว่า local linear approximation ของ $f$ ที่ $x_0$ เรา อาจเขียนในอีกรูปว่า

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

**ตัวอย่าง 3.20.** จงหา local linear approximation ของฟังก์ชัน $f(x) = x^{1/3}$ ที่ $x_0 = 1$

**วิธีทำ** เรามี $f(x) = x^{1/3}$ และคำนวณหา derivative

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

local linear approximation ของ $f$ ที่ $x_0 = 1$ จึงเป็น

$$x^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}(x - 1) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

ถ้าเราต้องการประมาณค่าของ $(1.1)^{1/3}$ เราใช้ local linear approximation ของ $f$ ในการประมาณ โดยได้ค่าประมาณคือ $1 + \frac{1}{3}(1.1 - 1) = 1.03$

### 3.8.2 Implicit Differentiation

บางครั้งเราต้องการหา derivative ของฟังก์ชัน ซึ่งไม่สามารถเขียนได้ ในรูปฟอร์ม $y = f(x)$ เช่นในความสัมพันธ์

$$x^2 + y^3 - xy = 0$$

การหา derivative ของ $y$ เทียบกับ $x$ เราไม่จำเป็นต้องเขียนความสัมพันธ์ ให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ ก่อน หลักการสำคัญก็คือ เราคิดให้ $y$ เป็น ฟังก์ชันของ $x$ เช่นในตัวอย่างที่ยกมา ถ้าเราหา derivative ทั้งสองข้าง ของสมการเทียบกับ $x$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^2 + y^3 - xy] &= \frac{d}{dx}[0] \\ \frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[y^3] - \frac{d}{dx}[xy] &= 0 \\ 2x + 3y^2\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} - y &= 0 \end{aligned} \tag{3.21}$$

เขียนใหม่ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 3y^2}$$

**ตัวอย่าง 3.21.** กำหนดให้ $y^2 = x^3(2-x)$ สังเกตว่า $(x, y) = (1, 1)$ อยู่บน กราฟของความสัมพันธ์ จงหาว่าความชันของกราฟนี้ที่จุด $(1, 1)$

**วิธีทำ** หา derivative เทียบกับ $x$ ทั้งสองข้าง ของสมการ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[y^2] &= \frac{d}{dx}[x^3(2-x)] \\ \frac{d}{dy}[y^2]\cdot\frac{dy}{dx} &= x^3\frac{d}{dx}[2-x] + (2-x)\frac{d}{dx}[x^3] \\ (2y)\cdot\frac{dy}{dx} &= -x^3 + (2-x)(3x^2) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(2-x)(3x^2)}{2y} \end{aligned} \tag{3.22}$$

ดังนั้นที่จุด $(x, y) = (1, 1)$ เราจะได้ derivative ของ $y$ เทียบ กับ $x$ เป็น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2}$

**ตัวอย่าง 3.22.** จงหาสมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งของสมการ

$$xy^2 = 1$$

ที่จุด $(1, -1)$

**วิธีทำ** เริ่มด้วยการหาความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $(1, -1)$ เราหา derivative ของสมการเทียบกับ $x$

ได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[xy^2] &= \frac{d}{dx}[1] \\ x\frac{d}{dx}[y^2] + y^2\frac{d}{dx}[x] &= 0 \\ x(2y)\frac{dy}{dx} + y^2 &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{2x} \end{aligned} \tag{3.23}$$

ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $(1,-1)$ มีค่าเท่ากับ $1/2$ สมการเส้น สัมผัสของเส้นโค้งที่จุด $(1,-1)$ จึงเป็น

$$\begin{aligned} \frac{y-(-1)}{x-1} &= \frac{1}{2} \\ y+1 &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.24}$$

นั่นคือ $y = \dfrac{x-3}{2}$

**ตัวอย่าง 3.23.** พิจารณาสมการ

$$\frac{1}{3}x^3 + y^3 - xy^2 = 5$$

จงหาว่าที่จุดใดบนเส้นโค้งที่เส้นสัมผัสขนานแกน $x$

**วิธีทำ** เราเริ่มด้วยการหา derivative ของสมการ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[\frac{1}{3}x^3 + y^3 - xy^2] &= \frac{d}{dx}[5] \\ \frac{d}{dx}[\frac{1}{3}x^3] + \frac{d}{dx}[y^3] - \frac{d}{dx}[xy^2] &= 0 \\ x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - x\frac{d}{dx}[y^2] - y^2 &= 0 \\ x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - x(2y)\frac{dy}{dx} - y^2 &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y^2 - x^2}{3y^2 - 2xy} \end{aligned} \tag{3.25}$$

สังเกตว่าเส้นสัมผัสที่ขนานแกน $x$ จะมีความชันเป็น 0 ดังนั้นที่จุดบน เส้นโค้งซึ่งมีเส้นสัมผัสขนานแกน $x$ สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{aligned} y^2 - x^2 &= 0 \quad \text{และ} \\ \frac{1}{3}x^3 + y^3 - xy^2 &= 5 \end{aligned} \tag{3.26}$$

เนื่องจาก $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) = 0$

1. เมื่อ $y = x$ เราได้ว่า $x^3 = 15$ หรือ $x = y = \sqrt[3]{15}$

2. เมื่อ $y = -x$ เราได้ว่า $x^3 = -3$ หรือ $x = -y = \sqrt[3]{-3}$

เพราะฉะนั้นที่จุด $(\sqrt[3]{15}, \sqrt[3]{15})$ และ $(\sqrt[3]{-3}, -\sqrt[3]{-3})$ บนเส้นโค้ง เส้นสัมผัสมีความชันเป็น 0

### 3.8.3 Related Rates

เราศึกษาปัญหา related rates เราต้องการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ ปริมาณหนึ่งซึ่งมีความสัมพันธ์กับอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณอื่น ซึ่งเราทราบค่าแล้ว วิธีการทำได้ดังนี้

1. กำหนดปริมาณต่าง ๆ ด้วยตัวแปร
2. ระบุอัตราการเปลี่ยนของปริมาณที่รู้ค่า และอัตราการเปลี่ยนแปลง ของปริมาณที่ต้องการหาค่า
3. หาสมการซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณในข้อสอง
4. หา derivative ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับเวลา แก้สมการหาค่าของ อัตราการเปลี่ยนของปริมาณที่ไม่รู้ค่า
5. หาค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงที่จุดกำหนด

**ตัวอย่าง 3.24.** สมมติว่าเนื้องอกมีรูปร่างคล้ายทรงกลม ซึ่งสูตรการหาปริมาตรของทรงกลม คือ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ เมื่อ $r$ เป็นรัศมีของทรงกลม เนื่องจากเนื้องอกมีการขยายตัว ทำให้ $r$ มีขนาดยาวขึ้นด้วยอัตราคงที่ 1.25 มิลลิเมตรต่อเดือน อยากทราบว่าปริมาตรของเนื้องอกจะเพิ่มขึ้นมากน้อยเพียงใด เมื่อ $r = 10$ mm

กำหนดให้ $V$ เป็นปริมาตรของเนื้องอก (หน่วยคือ $mm^3$) $r$ เป็นรัศมีของเนื้องอก (หน่วยคือ mm) จากโจทย์ จะเห็นว่า เมื่อเวลาผ่านไป เนื้องอกมีการขยายตัวทำให้ $r$ มีขนาดยาวขึ้น และ $V$ เพิ่มขึ้นด้วย ดังนั้น $V$, $r$ ล้วนเป็นตัวแปรตาม ในขณะที่ $t$ เป็นตัวแปรต้น นอกจากนี้ โจทย์ยังบอกอีกด้วยว่า $r$ มีขนาดยาวขึ้นด้วยอัตรา 1.25 มิลลิเมตรต่อเดือน ดังนั้น $\frac{dr}{dt} = 1.25$ สิ่งที่โจทย์ถามก็คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของเนื้องอก นั่นคือ $\frac{dV}{dt}$ จากความสัมพันธ์ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ หาอนุพันธ์เทียบ $t$ ทั้ง 2 ข้าง $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ เมื่อ $r = 10$ mm

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(10)^2(1.25) = 500\pi > 0$$

ดังนั้น ปริมาตรของเนื้องอกจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา $500\pi$ ลูกบาศก์มิลลิเมตรต่อเดือน

**ตัวอย่าง 3.25.** วิธีการอย่างง่าย ในการกำจัดตะกอนที่แขวนลอยอยู่ในน้ำ เทน้ำลงในกรวยที่มี filter ไว้ สมมติว่ากรวยสูง 16 นิ้ว และมีรัศมีที่ฐานเท่ากับ 4 นิ้ว ถ้าน้ำไหลออกจากกรวยด้วยอัตราเร็ว 2 ลูกบาศก์นิ้วต่อนาที เมื่อระดับน้ำสูง 8 นิ้ว ความลึกของน้ำจะลดลงมากน้อยเพียงไร

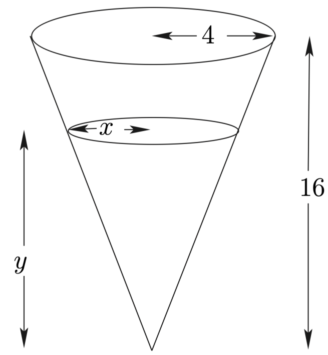



Figure 3.2: การไหลเวียนของอากาศในหลอดลม

กำหนดให้ $t$ เป็นเวลานับจากการเริ่มต้นการสังเกต (min) $V$ เป็นปริมาตรของน้ำในกรวย ณ เวลา $t$ (in$^3$) $y$ เป็นความลึกของน้ำในกรวย ณ เวลา $t$ (in) $x$ เป็นรัศมีของพื้นที่ผิวของน้ำ ณ เวลา $t$ (in) อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของน้ำ คือ $\dfrac{dV}{dt}$ และ อัตราการเปลี่ยนแปลงความลึกของน้ำ คือ $\dfrac{dy}{dt}$ โจทย์กล่าวว่าน้ำไหลออกจากกรวยด้วยอัตราเร็ว 2 in$^3$/min เมื่อระดับน้ำสูง 8 in แสดงว่า น้ำในกรวยมีปริมาตรลดลง

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{y=8} = -2$$

การระบุอัตราการเปลี่ยนแปลงแบบนี้ แสดงให้เห็นว่า ณ ความลึกของน้ำต่างกัน อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของน้ำก็จะแตกต่างกันไป ไม่ได้เปลี่ยนแปลงด้วยอัตราที่คงที่เหมือนตัวอย่างก่อนหน้านี้ โจทย์ต้องการทราบว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงความลึกของน้ำ เมื่อระดับน้ำสูง 8 นิ้ว นั่นคือ $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{y=8}$

จากสูตรการหาปริมาตรของกรวย

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

และจากคุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย $\dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{16}$ หรือ $x = \dfrac{y}{4}$ ทำให้ได้ $V = \dfrac{\pi}{48}y^3$ หาอนุพันธ์เทียบ $t$ ทั้ง 2 ข้าง จะได้ $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\pi}{48}(3y^2\dfrac{dy}{dt})$ หรือ $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{16}{\pi y^2}\dfrac{dV}{dt}$ ดังนั้น

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{y=8} = \frac{16(-2)}{\pi(8)^2} = \frac{-1}{2\pi} \text{ (in/min)}$$

สรุปว่า เมื่อระดับน้ำสูง 8 นิ้ว ความลึกของน้ำจะลดลงด้วยอัตรา $\dfrac{1}{2\pi}$ นิ้วต่อวินาที

**ตัวอย่าง 3.26.** เมื่อโยนก้อนหินลงในสระน้ำ จะเกิดคลื่นซึ่งรัศมีเพิ่มขึ้นด้วย อัตรา 0.9 เมตร/วินาที พื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่นหลังจาก ผ่านไป 10 วินาทีเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด?

**วิธีทำ** กำหนดให้

1. $t$ แทนเวลา (วินาที)
2. $r$ แทนรัศมีของคลื่น (เมตร)
3. $A$ แทนพื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่น (ตารางเมตร)

พื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่นเป็นไปตามสูตร

$$A = \pi r^2$$

เราหา derivative เทียบกับเวลา ได้ว่า

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

เรามีข้อมูลว่า $\frac{dr}{dt} = 0.9$ เมตร ในขณะที่วินาที ที่ $10$ รัศมีของคลื่นจึงมีค่าเท่ากับ $0.9 \cdot 10 = 9$ เมตร และดังนั้นพื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่นจึงเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา

$$\frac{dA}{dt} = (2\pi)(9)(0.9) = 50.89$$

ตารางเมตรต่อวินาที

**ตัวอย่าง 3.27.** เครื่องเททราย เททรายเป็นรูปกรวย ซึ่งความสูงของกองทรายมีค่าเท่ากับ เส้นผ่านศูนย์กลางที่ฐานของกองทรายเสมอ ถ้าความสูงเพิ่มขึ้นด้วยอัตราคงที่ 1.5 เมตร ต่อนาที จงหาว่าเครื่องเททรายเททรายด้วยอัตราเท่าใดเมื่อกองทรายมีความ สูงเท่ากับ 3 เมตร

**วิธีทำ** กำหนดให้

1. $t$ แทนเวลา (นาที)
2. $V$ แทนปริมาตรของกองทราย ณ เวลา $t$ (ลูกบาศก์เมตร)
3. $h$ แทนความสูงของกองทราย ณ เวลา $t$ (เมตร)
4. $r$ แทนรัศมีของพื้นกองทราย ณ เวลา $t$ (เมตร)

ในแต่ละเวลา $t$ อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรทรายคือ $dV/dt$ และอัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงของกองทรายคือ $dh/dt$ จากข้อมูล ที่ให้มา เรารู้ว่า

$$\frac{dh}{dt} = 1.5$$

เนื่องจากกองทรายมีลักษณะเป็นรูปกรวย ซึ่งมีสูตรว่า

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

เรายังทราบอีกว่า ที่แต่ละเวลา $t$ ความสูงของกองทราย มีค่าเท่ากับรัศมีของพื้นกองทราย $r = h$ เพราะฉะนั้น

$$V = \frac{1}{3}\pi h^3$$

หา derivative เทียบกับ $t$ ได้ว่า

$$\frac{dV}{dt} = \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

ดังนั้น

$$\frac{dV}{dt} = 1.5\pi h^2$$

เมื่อกองทรายสูง 3 เมตร อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรกองทรายจึงเป็น

$$\frac{dV}{dt} = 13.5\pi = 42.41$$

ลูกบาศก์เมตรต่อนาที

**ตัวอย่าง 3.28.** จุด P เคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งตามสมการ

$$y = \sqrt{x^2 + 16}$$

เมื่อ $P = (3, 5)$ แล้ว $y$ มีค่าเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2 หน่วย/วินาที ค่า $x$ มีการเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด

**วิธีทำ** กำหนดให้

1. $t$ แทนเวลา (วินาที)

เราหา derivative ของสมการที่กำหนดเทียบกับเวลา $t$ พบว่า

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} \frac{dx}{dt}$$

เรารู้ว่าที่จุด $P = (3, 5)$

$$\frac{dy}{dt} = 2$$

แทนค่าทั้งสองในสมการ

$$E : example$$

เราจะได้ว่า

$$2 = \frac{2}{\sqrt{9 + 16}} \frac{dx}{dt}$$

นั่นคือ

$$\frac{dx}{dt} = 5$$

นั่นคือ $x$ มีการเปลี่ยนแปลงด้วยอัตรา 5 หน่วยต่อวินาที

**ตัวอย่าง 3.29.** ท่าเรือหนึ่ง มีแท่งแขวนลูกรอกผูกเรืออยู่เหนือท่า มีเชือกผูกไว้กับ หัวเรือซึ่งอยู่ต่ำกว่าตัวรอกของแท่งแขวน 3 เมตร ถ้าเราดึงเชือกด้วยอัตราเร็ว 6 เมตร/นาที เรือถูกดึงเข้าหาท่าด้วยอัตราเร็วเท่าใดเมื่อเชือก จากหัวเรือถึงลูกรอกมีความยาว 40 เมตร

**วิธีทำ** กำหนดให้

1. $t$ แทนเวลา (นาที)
2. $x$ ระยะทางในแนวนอน (เมตร)
3. $y$ ระยะทางในแนวดิ่ง (เมตร)

จากข้อมูลของปัญหา เราสรุปได้ว่า อัตราการดึงเชือกแทนด้วยพจน์

$$\frac{dy}{dt} = 6$$

คำถามให้ $\frac{dx}{dt}$ เมื่อเชือกยาว 40 เมตรนับจากหัวเรือถึงลูกรอก โดยการใช้พิทาโกรัส เราจึงได้ความสัมพันธ์

$$x^2 + y^2 = 40^2$$

เราหา derivative เทียบกับ $t$ ทั้งสองข้างของสมการ

$$\begin{aligned} 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} &= 0 \\ x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

เนื่องจากลูกรอกอยู่สูงกว่าหัวเรือ 3 เมตร หรือ $y = 3$ ในขณะที่ การดึงเชือกด้วยอัตราเร็ว 6 เมตร หรือ $\frac{dy}{dt} = 6$ เพราะฉะนั้น เมื่อเชือกยาว 40 เมตร เรืออยู่ห่างออกไปเป็นระยะทาง

$$x^2 + 3^2 = 40^2$$

หรือ $x = \sqrt{1591}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sqrt{1591}\frac{dx}{dt} + 4(6) &= 0 \\ \frac{dx}{dt} &= -\frac{24}{\sqrt{1591}} = -0.60 \end{aligned} \tag{3.28}$$

ซึ่งหมายถึงเรือถูกดึงเข้าหาท่าด้วยอัตราเร็ว 0.6 เมตรต่อนาที

1. วาดภาพและกำหนดตัวแปรต่างๆ เช่น $x$, $y$ เป็นต้น
2. ระบุอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรทุกตัวที่โจทย์กำหนดให้ และที่โจทย์ต้องการให้หา เช่น $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$ เป็นต้น

3. หาสมการสมการหนึ่งที่แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่กำหนดขึ้นในขั้นตอนที่ 1 และเมื่อหาอนุพันธ์ของสมการนี้ จะมีเทอมที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ในขั้นตอนที่ 2

4. หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการในขั้นตอนที่ 3 เทียบกับเวลาและนำค่าของอนุพันธ์ที่ทราบลงไปในสมการ

5. หาค่าของอนุพันธ์ที่โจทย์ต้องการด้วยวิธีทางพีชคณิต

### 3.8.4 แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $y = \ln x$ จงหา $dy$ และ $\Delta y$ ที่ $x = 1$ โดย ที่ $dx = \Delta x = 0.5$

2. พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ แล้วหาสูตร $dy$ และ $\Delta y$
   1. $y = x\sqrt{x-1}$
   2. $y = xe^x$
   3. $y = x \sin x$
   4. $y = \tan(x^2)$

3. จงหา local linear approximation ของเส้นโค้งจากสมการ $xe^y = y$ ที่จุด $(0,0)$ และใช้สมการที่ได้ประมาณค่าของ $y$ เมื่อ $x = 0.1$

4. จงหา $\frac{dy}{dx}$ สำหรับความสัมพันธ์ต่อไปนี้
   1. $x^2 + y^2 = 25$
   2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$
   3. $x \sin y + y \sin x = 1$
   4. $e^{xy} + xy = 1$

5. หญิงคนหนึ่งสูง 1.55 เมตร เดินเข้าเสาไฟด้วยอัตราเร็ว 0.75 เมตร/วินาที เสาไฟติดดวงไฟสูง 5 เมตร
   1. เงาของหญิงคนนี้เปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด
   2. ปลายเงาของด้านศรีษะหญิงคนนี้เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่าใด

6. อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งอธิบายตามสมการ

$$\frac{x^2 y}{1+y^2} = \frac{2}{5}$$

   กำหนดให้พิกัดแกน $x$ ของอนุภาคเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 4 หน่วย/วินาที เมื่ออนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง $(1,2)$
   1. พิกัดแกน $y$ ของอนุภาคเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด เมื่ออนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง $(1,2)$

2. ณ ตำแหน่ง $(1,2)$ อนุภาคกำลังเคลื่อนสูงขึ้นหรือลดลงในพิกัด $xy$

7. ความเข้มของแสงที่ผ่านเข้าตาขึ้นอยู่กับรัศมีของ pupil ถ้า pupil มีขนาดมากขึ้น ปริมาณของแสงก็จะเข้าตามากขึ้น ดังสมการ $I = kr^2$ เมื่อ $I$ เป็นความเข้มของแสง $r$ เป็นรัศมีของ pupil และ $k$ เป็นค่าคงตัว ในช่วงเวลา 6 โมงเช้าถึงเที่ยง รัศมีของ pupil จะขยายตัวด้วยอัตราเร็วคงที่ 0.1 mm/min จงหาว่าในช่วงเวลาดังกล่าว ความเข้มของแสงที่ผ่านเข้าตา จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร เมื่อ $r = 0.5$ cm

8. การแพร่ระบาดของแมลงวันทอง เริ่มที่ใจกลางของหมู่บ้านเล็กๆ แห่งหนึ่งนอกเมือง พื้นที่การแพร่ระบาดมีลักษณะคล้ายวงกลมดังแสดงในรูป 1.5 รัศมีของพื้นที่การแพร่ระบาดขยายเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 1.5 ไมล์ต่อปี จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่การแพร่ระบาด เมื่อรัศมีของพื้นที่การแพร่บาดมีค่าเท่ากับ 4 ไมล์

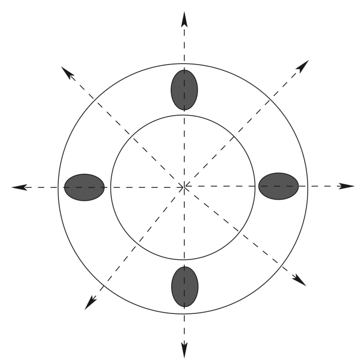


Figure 3.3: การแพร่ระบาดของแมลงวันทอง โดยที่วงรีสีเทาแทนแมลงวัน

## 3.9 อนุพันธ์ ของ ฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ และ อิน เวอร์ ส ของ ฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ

### 3.9.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เราจะใช้ความรู้เกี่ยวกับเอกลักษณ์ตรีโกณมิติและลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณ ช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยนิยามดังนี้

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} &= 1 \qquad \text{เมื่อ x มีหน่วยเป็นเรเดียน} \\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} &= 1 \qquad (3.29) \\ \sin A - \sin B &= 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

**ทฤษฎี 3.4.** *ถ้า* $f(x) = \sin x$ *แล้ว* $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} \\
&= 2\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2}).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{h} \\
&= 2\cos x\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\
&= 2(\cos x)\frac{1}{2} \\
&= \cos x
\end{aligned} \tag{3.30}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
\sin(x+h)-\sin x &= 2\cos\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{h}{2} \\
&= 2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

สำหรับการหาอนุพันธ์ของ cosine ก็ทำได้ในทำนองเดียวกันกับ sine ส่วนฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ หาได้โดยแปลงในรูป cosine หรือ sine เช่น

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ และ } \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

**ทฤษฎี 3.5.**

1. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
2. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
3. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
4. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x$
5. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\csc x\cot x$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sec x &= \frac{d}{dx}.\frac{1}{\cos x}\\ &= \frac{d}{dx}(\cos x)^{-1}\\ &= (-1)(\cos x)^{-2}\frac{d}{dx}\cos x\\ &= \frac{-1}{\cos^2 x}(-\sin x)\\ &= \frac{1}{\cos x}.\frac{\sin x}{\cos x}\\ &= \sec x\tan x\end{aligned} \tag{3.32}$$

**ตัวอย่าง 3.30.** กำหนดให้ $y = x^2\tan 3x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3\tan 3x)\\ &= x^2\frac{d}{dx}\tan 3x + \tan 3x\frac{d}{dx}x^2\\ &= x^2(\sec^2 3x)(3) + (\tan 3x)(2x)\\ &= 3x^2\sec^2 3x + 2x\tan 3x\end{aligned} \tag{3.33}$$

**ตัวอย่าง 3.31.** กำหนดให้ $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{1+\cos x})\\ &= \frac{(1+\cos x)\frac{d}{dx}\sin x - \sin x\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}\\ &= \frac{(1+\cos x)\cos x - (\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}\\ &= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\\ &= \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2}\\ &= \frac{1}{1+\cos x}\end{aligned} \tag{3.34}$$

**ตัวอย่าง 3.32.** กำหนดให้ $y = \sec^2(3x-1)$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\sec^2(3x-1) \\ &= 2\sec(3x-1)\frac{d}{dx}\sec(3x-1) \\ &= 2\sec(3x-1)\sec(3x-1)\tan(3x-1)\frac{d}{dx}(3x-1) \\ &= 3.2\sec^2(3x-1)\tan(3x-1) \\ &= 6\sec^2(3x-1)\tan(3x-1)\end{aligned} \tag{3.35}$$

**ตัวอย่าง 3.33.** ถ้า $x\cos y + y\cos x = 1$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$

**วิธีทำ** ใช้ implicit differentiation

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x\cos y + y\cos x) &= \frac{d}{dx}1 \\ \frac{d}{dx}(x\cos y) + \frac{d}{dx}(y\cos x) &= 0 \\ x\frac{d}{dx}\cos y + \cos y\frac{dx}{dy} + y\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{dy}{dx} &= 0 \\ x(-\sin y)\frac{dy}{dx} + \cos y + y(-\sin x) + \cos x\frac{dy}{dx} &= 0 \\ (-x\sin y + \cos x)\frac{dy}{dx} &= y\sin x - \cos y \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y\sin x - \cos y}{\cos x - x\sin y}\end{aligned} \tag{3.36}$$

**ตัวอย่าง 3.34.** จงหา $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ของฟังก์ชัน $y = x\cos x$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned}y &= x\cos x \\ y' &= \frac{d}{dx}(x\cos x) \\ &= \frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{dx}{dx} \\ &= -x\sin x + \cos x \\ y'' &= -(x\frac{d}{dx}\sin x + \sin x\frac{dx}{dx}) + \frac{d}{dx}\cos x \\ &= -(x\cos x + \sin x) - \sin x \\ &= -x\cos x - 2\sin x\end{aligned} \tag{3.37}$$

### 3.9.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จะเห็นว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งหมดคือ sine, cosine, tangent, cotangent, secant และ cosecant เป็นฟังก์ชันคาบซึ่งสมาชิกในโดเมน จะให้ค่าซ้ำกัน ดังนั้น ฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็น 1-1 ฟังก์ชัน แต่เราสามารถจำกัดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อทำให้ฟังก์ชันเหล่านี้ เป็น 1-1 ฟังก์ชัน ก็จะทำให้อินเวอร์สของฟังก์ชันเหล่านั้นเป็นฟังก์ชันด้วย เช่น

$$F = \{(x,y)|y = \sin x\} \text{ มีโดเมน } = \mathfrak{R} \text{ และเรนจ์ } = [-1,1]$$

ไม่เป็น1-1ฟังก์ชัน แต่

$$F = \{(x,y)|y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$$

เป็น 1-1 ฟังก์ชัน ดังนั้น

$$F^{-1} = \{(x,y)|x = \sin y, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], x \in [-1,1]\}$$

เป็น อินเวอร์สฟังก์ชันของ$F$เรียกว่า inverse sine function ใช้สัญลักษณ์ $\sin^{-1} x$ หรือ $\arcsin x$

ในทำนองเดียวกัน

**ทฤษฎี 3.6.**

1. $\dfrac{d}{dx} \arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}., |x| < 1$

2. $\dfrac{d}{dx} \arccos x = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}., |x| < 1$

3. $\dfrac{d}{dx} arccotx = \dfrac{-1}{1+x^2}.$

4. $\dfrac{d}{dx} arcsecx = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$

5. $\dfrac{d}{dx} arccosecx = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$

6. $\dfrac{d}{dx} \arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$

ให้ $y = \arcsin x, |x| < 1$

$$\begin{aligned} x &= \sin y, \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{dx}{dx} &= \frac{d}{dx} \sin y \\ 1 &= \cos y \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y}, |x| < 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned} \tag{3.38}$$

**ตัวอย่าง 3.35.** จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = \sin^{-1}(2x)$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} . \frac{d}{dx}(2x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}} \end{aligned} \tag{3.39}$$

**ตัวอย่าง 3.36.** จงหา $y'$ เมื่อ $y = arcsecx^2$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx} arcsecx^2 \\ &= \frac{1}{|x|^2 \sqrt{x^4 - 1}} . \frac{d}{dx}(x)^2 \\ &= \frac{2x}{x^2 \sqrt{x^4 - 1}} \\ &= \frac{2}{x \sqrt{x^4 - 1}} \end{aligned} \tag{3.40}$$

**ตัวอย่าง 3.37.** จงหา $y'$ เมื่อ $y = cot^{-1}(\dfrac{1}{x}) - \tan^{-1} x$

**วิธีทำ**

$$
\begin{aligned}
y &= \cot^{-1}(\frac{1}{x}) - \tan^{-1} \\
y' &= \frac{d}{dx}(\cot^{-1}(\frac{1}{x}) - \tan^{-1}) \\
&= \frac{d}{dx}\cot^{-1}(\frac{1}{x}) - \frac{d}{dx}\tan^{-1} x \\
&= \frac{-1}{1-\frac{1}{x^2}}(-\frac{1}{x^2}) - \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{2}{x^4-1}
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

## 3.10 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

ในบทที่ 1 เราอธิบายการขยายพันธ์แบคทีเรีย $N(t)$ ในรูปของเวลา $t$ ในรูปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยมีสมการดังต่อไปนี้

$$\frac{N(t+h)-N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \tag{3.42}$$

(3.43)

ในทางคณิตศาสตร์เราเรียกสมการดังกล่าวว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) และมีเนื้อหาในรายวิชานี้ที่จะเรียนในบทถัดๆ ไป ทั้งนี้ฟังก์ชัน $N(t)$ ที่ปรากฏในสมการเป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า (unknown function) และเราสามารถหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นโดยวิธีการหาปริพันธ์ (Integration) ได้คำตอบของสมการดังนี้

$$N(t) = N_0 e^{(b-m)t} \tag{3.44}$$

ดังนั้นในบทนี้ เราจะกล่าวถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม เราสามารถใช้นิยาม หรือสูตรต่อไปนี้ในการหาอนุพันธ์

**ทฤษฎี 3.7.**

1. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
2. $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$
3. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

4. $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$

**ตัวอย่าง 3.38.** จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = e^{x^2+1}$

**วิธีทำ**

เราสามารถใช้กฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ของ $f(x) = e^{x^2+1}$ ได้ดังต่อไปนี้
โดยการกำหนดให้ $u = x^2 + 1,$ แล้ว $f(x) = e^u$ และจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{du}e^u \cdot \frac{d}{dx}u$$

เนื่องจาก $\frac{d}{du}e^u = e^u$ และ $\frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x.$
ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}f(x) = e^u \cdot 2x$$

เมื่อแทนตัวแปร $u = x^2 + 1$ ลงในสมการข้างต้น เราจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}f(x) = e^{x^2+1} \cdot 2x$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $f(x) = e^{x^2+1}$ คือ

$$\boxed{\frac{d}{dx}f(x) = 2xe^{x^2+1}}$$

**ตัวอย่าง 3.39.** จงแสดงว่า $N(t) = \frac{K}{1+(K-1)e^{-rt}}$ เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

โดยที่ $r$ และ $K$ เป็นค่าคงตัวที่เป็นบวก สมการเชิงอนุพันธ์นี้มีชื่อเรียกว่า the logistic growth equation

**วิธีทำ**

1. **หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $N(t)$:**
   กำหนดให้ $N(t) = \frac{K}{1+(K-1)e^{-rt}}.$

   เราสามารถใช้กฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{K \cdot (K-1) \cdot (-r)e^{-rt}}{(1+(K-1)e^{-rt})^2}$$

2. **จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปอย่างง่าย**

$$\frac{dN}{dt} = \frac{rK(K-1)e^{-rt}}{(1+(K-1)e^{-rt})^2}$$

3. **แทน** $N(t)$ ลงใน the logistic equation:

   เนื่องจาก

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

   โดยการแทน $N(t) = \frac{K}{1+(K-1)e^{-rt}}$ ลงไปในสมการข้างต้น เราจะได้ว่า

$$rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = \frac{rK(K-1)e^{-rt}}{(1+(K-1)e^{-rt})^2}$$

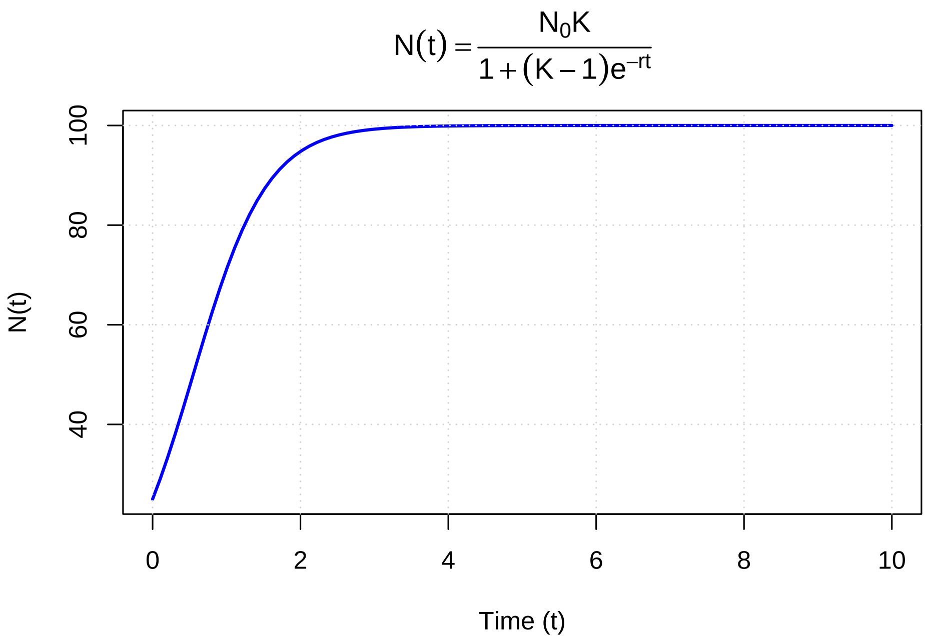
4. **ผลสรุปที่ได้จากการหาอนุพันธ์ และการแทนค่าฟังก์ชัน**

   เราจะเห็นว่าทั้ง 2 ข้างของสมการข้างต้นเท่ากัน แสดงว่า ฟังก์ชัน $N(t) = \frac{K}{1+(K-1)e^{-rt}}$ เป็นคำตอบของสมการ the logistic growth equation

**หมายเหตุ** จากตัวอย่างข้างต้นเราสมมติให้ $N(0) = 1$ ในกรณีที่กำหนดให้ $N(0) = N_0$ แล้วคำตอบของสมการ the logistic growth equation จะอยู่ในรูป

$$N(t) = \frac{N_0 \cdot K}{1+(K-1)e^{-rt}}$$

รูปต่อไปนี้แสดงกราฟของคำตอบของแบบจำลองการเติบโตแบบ logistic เมื่อกำหนดให้ $N_0 = 25$, $K = 4$ และ $r = 2$ กราฟจะมีลักษณะเป็นรูปตัว $S$ (ซิกมอยด์, sigmoidal) ซึ่งสะท้อนการเติบโตที่จำกัดเนื่องจากความจุที่รองรับได้ (carrying capacity) หรือค่า K ในตอนแรก ประชากรจะเติบโตแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล แต่เมื่อเข้าใกล้ $K$ อัตราการเติบโตจะช้าลงและกราฟจะแบนลง ซึ่งแตกต่างจากแบบจำลองการเติบโตแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลธรรมดา โดยประชากรจะเติบโตโดยไม่มีขอบเขต โดยเป็นไปตามกราฟที่เพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง ในโมเดลโลจิสติกส์ การเติบโตถูกจำกัดและจะคงตัวเมื่อจำนวนประชากรใกล้ถึงขีดจำกัดความจุ




**ตัวอย่าง 3.40.** จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน:

$$y = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

โดยใช้การลอการิทึมทั้งสองฝั่งก่อนทำการหาอนุพันธ์

**วิธีทำ**

1. **ลอการิทึมทั้งสองข้าง:**

$$\ln y = \ln\left(\frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

ใช้สมบัติลอการิทึม

$$\ln y = \ln(e^x) + \ln(x^2) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

ย่อ:

$$\ln y = x + 2\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

2. **หาอนุพันธ์ทั้งสองข้าง:**

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1}$$

ย่อ:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2+1}$$

3. **จัดรูปหา** $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = y\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)$$

4. **แทนค่า** $y = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $y = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ คือ:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)}$$

## Chapter 4

# การประยุกต์ของอนุพันธ์ (Applications of Differentiation)

## 4.1 Applications of derivatives related to students discipline

จากบทเรียนก่อนหน้านี้ เราทราบว่าถ้าตัวแปร $y$ สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันๆ หนึ่ง ที่ขึ้นกับตัวแปร $x$ นั่นคือ $f(x)$ เราจะสามารถวาดกราฟของ $y$ หรือฟังก์ชัน $f(x)$ ได้ และถ้าเราทราบว่า จุด $P(x_0, y_0)$ และจุด $Q(x_1, y_1)$ ต่างอยู่บนกราฟของ $y$ แสดงว่า $y_0 = f(x_0)$ และ $y_1 = f(x_1)$ นั่นเอง ความชันของเส้นตรงที่ลากผ่านจุด $P$ และจุด $Q$ มักใช้ $m$ เป็นสัญลักษณ์ มีสูตรการหาดังนี้

$$m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

ความชันของเส้นตรงที่กล่าวมาแล้วนี้ มีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $f(x)$ ตั้งแต่ $x = x_0$ จนถึง $x = x_1$ และ

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ ณ $x = x_0$ หรือการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ เทียบกับตัวแปร $x$ เมื่อ $x$ มีค่าเท่ากับ $x_0$ นั่นเอง

หลัก การ หา อนุพันธ์ สามารถ นำ ไป ประยุกต์ ใช้ได้ ใน หลาก หลาย สาขา วิชาชีพ ไม่ ว่า จะ เป็น ธุรกิจ เศรษฐศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ฟิสิกส์ เคมี หรือแม้กระทั่งชีววิทยา สำหรับบทนี้ ผู้เขียนจะขอกล่าวถึง การนำแนวคิดทางคณิตศาสตร์นี้ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาทางวิทยาศาสตร์ชีวภาพ เพื่อให้สอดคล้องกับความสนใจของผู้เรียน

**ตัวอย่าง 4.1.** AIDS ย่อมาจาก acquired immunodeficiency syndrome เป็นโรคติดต่อทางเพศสัมพันธ์และการให้เลือด ซึ่งพบการแพร่ระบาดมาตั้งแต่ปี พ.ศ. 2523 โดยผู้ป่วยที่เป็นโรค AIDS จะพบเชื้อไวรัส HIV ใน antibodies ซึ่งไวรัส HIV นี้มีระยะฟักตัวตั้งแต่ไม่กี่เดือน จนกระทั่งนานนับปี นักวิจัยคนหนึ่งนำเชื้อไวรัส HIV มาเพาะเลี้ยงในจานเพาะเชื้อ พบว่า ขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา $t$ , $N(t)$ สอดคล้องกับสมการ $N(t) = 1000 + 20t + t^2$ อยากทราบว่าไวรัสชุดนี้มีอัตราการเปลี่ยนแปลง ณ $t$ ใดๆ เป็นอย่างไร

กำหนดให้ $t$ แทน เวลา $N(t)$ แทน ขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา $t$ จากการทดลองพบว่า ขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา $t$ ใดๆ สอดคล้องกับสมการ

$$N(t) = 1000 + 20t + t^2$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา $t$ ใดๆ คือ

$$\frac{dN}{dt} = 20 + 2t$$

**ตัวอย่าง 4.2.** จากการสำรวจพบว่า จำนวนผู้ป่วยด้วยโรค AIDS, $P(t)$ มีความสัมพันธ์กับสมการ

$$P(t) = 100t^2 - 2t^3$$

เมื่อ $t$ เป็นเวลาที่ผ่านไปนับจากวันนี้ มีหน่วยเป็นวัน อยากทราบว่าเมื่อ 20 วันผ่านไป จะมีผู้ป่วยด้วยโรคนี้กี่คน และมีอัตราการเพิ่มจำนวนผู้ป่วยเป็นเท่าไหร่

กำหนดให้ $t$ แทน เวลา มีหน่วยเป็นวัน $P(t)$ แทน จำนวนผู้ป่วยด้วยโรค AIDS มีหน่วยเป็นคน จากการสำรวจพบว่า

$$P(t) = 100t^2 - 2t^3$$

เมื่อ 20 วันผ่านไป แสดงว่า $t = 20$ จะได้ว่า $P(20) = 100(20)^2 - 2(20)^3 = 24,000$ ดังนั้น เมื่อ 20 วันผ่านไป จะมีผู้ป่วยโรค AIDS 24,000 คน อัตราการเพิ่มจำนวนผู้ป่วยโรค AIDS ณ เวลา $t$ ใดๆ หาได้ดังนี้

$$\frac{dP}{dt} = 200t - 6t^2$$

ดังนั้น เมื่อ 20 วันผ่านไป อัตราการเพิ่มจำนวนผู้ป่วยจะมีค่าเท่ากับ $200(20) - 6(20)^2$ หรือ $1,600$ คนต่อวัน

**ตัวอย่าง 4.3.** จากการศึกษาทางสิ่งแวดล้อมระบุว่า $Q(t)$ ระดับ carbon monoxide (CO) เฉลี่ยในอากาศ (หน่วยเป็น ppm) จะมีค่าเป็นเท่าไร

$$Q(t) = 0.05t^2 + 0.1t + 3.4$$

เมื่อ $t$ เป็นเวลาที่นับจากนี้เป็นต้นไป มีหน่วยเป็นปี อยากทราบว่า ระดับ CO เฉลี่ยในอากาศจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร ในอีก 2 ปี ข้างหน้า

กำหนดให้ $t$ เป็นเวลาที่นับจากวันนี้ มีหน่วยเป็นปี $Q(t)$ เป็นระดับ CO เฉลี่ยในอากาศมีหน่วยเป็น ppm จากการศึกษาทางสิ่งแวดล้อมระบุว่า

$$Q(t) = 0.05t^2 + 0.1t + 3.4$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงระดับ CO เฉลี่ยในอากาศ ณ $t$ ใดๆ คือ

$$\frac{dQ}{dt} = 0.1t + 0.1$$

ในอีก 2 ปีข้างหน้า $t = 2$

$$\frac{dQ}{dt} = 0.1(2) + 0.1 = 0.3 > 0$$

ระดับ CO เฉลี่ยในอากาศจะเพิ่มขึ้น (เพราะ $\dfrac{dQ}{dt} > 0$) ด้วยอัตราเร็ว 0.3 ppm ต่อปี

**ตัวอย่าง 4.4.** Poiseuille's law กล่าวว่า ความเร็วของเลือด (หน่วย คือ เซนติเมตรต่อวินาที) ที่อยู่ห่างจากจุดกึ่งกลางของหลอดเลือด $r$ เซนติเมตร มีสูตรดังนี้ $S(r) = C(R^2 - r^2)$ เมื่อ $C$ เป็นค่าบวกใดๆ และ $R$ เป็นรัศมีของหลอดเลือด อยากทราบว่า ความเร็วของเลือดจะเปลี่ยนแปลงเป็นอย่างไร เมื่อเลือดอยู่บริเวณกึ่งกลางระหว่างจุดกึ่งกลางและผนังของหลอดเลือด

กำหนดให้ $r$ เป็นระยะห่างจากจุดกึ่งกลางของหลอดเลือด (หน่วยเป็นเซนติเมตร) $S(r)$ เป็นความเร็วของเลือด ณ $r$ ใดๆ (หน่วยเป็นเซนติเมตรต่อวินาที) จาก Poiseuille's law

$$S(r) = C(R^2 - r^2)$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วของเลือด ณ $r$ ใดๆ คือ

$$\frac{dS}{dr} = -2Cr$$

เลือดที่อยู่บริเวณกึ่งกลางระหว่างจุดกึ่งกลางและผนังของหลอดเลือดหมายถึง $r = \frac{R}{2}$ ดังนั้น

$$\left.\frac{ds}{dr}\right|_{r=R/2} = -CR < 0 \text{ เพราะว่า } C > 0, R > 0$$

แสดงว่าความเร็วของเลือดจะลดลง (เพราะ $\dfrac{dS}{dr} < 0$) ด้วยอัตรา $CR$ (cm/s)/cm

### 4.1.1 แบบฝึกหัด

1. ผลการทดลองแสดงให้เห็นว่า ความเข้มข้นของปริมาณ adrenaline ที่ฉีดเข้าไปในร่างกาย, $x$, มีความสัมพันธ์กับการตอบสนองของกล้ามเนื้อ, $y$, ด้วยสมการ $y = \frac{x}{a+bx}$ เมื่อ $a$ และ $b$ เป็นค่าคงตัว จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงการตอบสนองของกล้ามเนื้อ เมื่อเทียบกับความเข้มข้นของปริมาณ adrenaline ที่ฉีดเข้าไปในร่างกาย

2. กำหนดให้ $P(t) = \dfrac{1000t}{t+10}$ แสดงถึงขนาดของประชากรแบคทีเรีย เมื่อ $t$ เป็นเวลา จงหาอัตราการเจริญเติบโตของประชากร

3. Schuty - Borisoff laws กล่าวถึง ปริมาณ substrate, $y$, ที่ถูกเปลี่ยนรูปด้วยเอนไซม์ ในรูปของฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลา $t$ ดังนี้

$$y = k\sqrt{cat}$$

เมื่อ $k$, $a$, $c$ เป็นค่าคงตัว จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาณ substrate ที่ถูกเปลี่ยนรูปด้วยเอนไซม์ ณ เวลา $t$ ใดๆ

## 4.2 Sketching the graph of a function from the derivative

ในหัวข้อนี้เราใช้ประโยชน์จากเรื่อง derivative ในการวาดกราฟของฟังก์ชัน เมื่อนึกถึงกราฟของฟังก์ชัน เราสนใจลักษณะที่สำคัญ เช่นช่วงใดที่กราฟเพิ่ม ช่วงใดที่กราฟลด ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของกราฟอยู่ที่ใด กราฟมีลักษณะคว่ำในช่วงใด หรือมีลักษณะหงายในช่วงใด เป็นต้น

แนวคิดแรกคือเรื่องของการเพิ่มและลดของฟังก์ชัน เรามารู้จักนิยามก่อน

**นิยาม 4.1.** ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วง $I$ ให้ $x_1$ และ $x_2$ เป็น สมาชิกในช่วง $I$

- $f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $I$ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$
- $f$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $I$ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$
- $f$ เป็นฟังก์ชันคงตัวบนช่วง $I$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับค่า $x_1$ และ $x_2$ ใด ๆ แล้ว $f(x_1) = f(x_2)$

ประโยชน์ของ derivative ที่ใช้ในการตรวจสอบการเพิ่มและลดของฟังก์ชัน มาจาก ทฤษฎีบท :

**ทฤษฎี 4.1.** *ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหา derivative ได้ บนช่วงเปิด $(a, b)$*

1. *ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a, b)$ แล้ว $f$ เป็น ฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a, b]$*
2. *ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a, b)$ แล้ว $f$ เป็น ฟังก์ชันลดบนช่วง $[a, b]$*
3. *ถ้า $f'(x) = 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a, b)$ แล้ว $f$ เป็น ฟังก์ชันคงตัวบนช่วง $[a, b]$*

ทฤษฎีบทนี้สามารถขยายผลจากช่วง $[a, b]$ ไปได้ถึงช่วงในรูป $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ และ $(-\infty, \infty)$

**ตัวอย่าง 4.5.** พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

เราหา derivative ของฟังก์ชัน ได้ว่า $f'(x) = 2x - 3$ ซึ่งบอกเราว่า

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 \text{ สำหรับ } x < 3/2 \\ f'(x) > 0 \text{ สำหรับ } x > 3/2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

เนื่องจาก $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 3/2$ เราจึงบอกได้ว่า

$$\begin{aligned} f \text{ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง } (-\infty, 3/2] \\ f \text{ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง } [3/2, \infty) \end{aligned} \tag{4.2}$$

แนวคิดต่อไป เป็นเรื่องของลักษณะหงายหรือคว่ำของกราฟของฟังก์ชัน ถ้ากราฟของฟังก์ชันมีลักษณะหงาย เราเรียกว่าฟังก์ชัน concave up ในขณะที่ถ้ากราฟของฟังก์ชันมีลักษณะคว่ำ เราเรียกว่า ฟังก์ชัน concave down นิยามที่ชัดเจนของ concavity ของฟังก์ชันเป็นดังนี้

**นิยาม 4.2.** ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันซึ่งหา derivative ได้บนช่วงเปิด $I$

- $f$ concave up บนช่วง $I$ ถ้า $f'$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $I$
- $f$ concave down บนช่วง $I$ ถ้า $f'$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $I$

ลักษณะ concavity ของฟังก์ชัน สามารถตรวจสอบโดยใช้ derivative ดังนี้

**ทฤษฎี 4.2.** *ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันซึ่งหา derivative อันดับสองได้บนช่วง $I$*

1. *ถ้า $f''(x) > 0$ บนช่วง $I$ แล้ว $f$ concave up บนช่วง $I$*
2. *ถ้า $f''(x) < 0$ บนช่วง $I$ แล้ว $f$ concave down บนช่วง $I$*

**ตัวอย่าง 4.6.** พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ถ้าเราคำนวณ derivative อับดับสอง $f''(x) = 2$ ซึ่งจากทฤษฎีบท เราบอกได้ว่า $f$ concave up บนช่วง $(-\infty, \infty)$

การเปลี่ยนทิศทางของ concavity ของฟังก์ชัน ก็เป็นอีกที่หนึ่งของกราฟของ ฟังก์ชัน ซึ่งมีลักษณะเด่นที่จุดนี้กราฟอาจมีการเปลี่ยนจากลักษณะหงาย เป็นคว่ำ หรือจากลักษณะคว่ำเป็นหงาย

**นิยาม 4.3.** ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด $I$ ซึ่งมี $x_0$ เป็น สมาชิก และ $f$ เปลี่ยนทิศทางของ concavity ที่จุดนี้ แล้วเรากล่าว ว่า $f$ มี inflection point ที่ $x_0$ และเราเรียก $(x_0, f(x_0))$ ว่า inflection point ของ $f$

**ตัวอย่าง 4.7.** ฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ มี

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x$$

สังเกตว่า

- เมื่อ $x < 0,\ f''(x) < 0$
- เมื่อ $x > 0,\ f''(x) > 0$

ดังนั้น ที่จุด $x = 0,\ f$ มีการเปลี่ยนทิศทางของ concavity จาก concave down เมื่อ $x < 0$ เป็น concave up เมื่อ $x > 0$ เพราะฉะนั้น inflection point จึงเป็น $(0, 0)$ สังเกตอีก ว่า $f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดช่วง $(-\infty, \infty)$

ค่าสูงสุดและต่ำสุดในย่านหนึ่ง ๆ ของกราฟก็เป็นอีกลักษณะเด่น ที่เราสามารถ ตรวจสอบได้โดยใช้ derivative ของฟังก์ชัน

**นิยาม 4.4.**

1. ฟังก์ชัน $f$ มี relative maximum ที่ $x_0$ ถ้ามีช่วงเปิดที่มี $x_0$ เป็นสมาชิก และ $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x$ ที่เป็น สมาชิกในช่วงเปิดดังกล่าว
2. ฟังก์ชัน $f$ มี relative minimum ที่ $x_0$ ถ้ามีช่วงเปิดที่มี $x_0$ เป็นสมาชิก และ $f(x_0) \leq f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x$ ที่เป็น สมาชิกในช่วงเปิดดังกล่าว

3. ถ้า $f$ มี relative maximum หรือ relative minimum ที่ $x_0$ แล้ว เรากล่าวว่า $f$ มี relative extremum ที่ $x_0$

ฟังก์ชันหนึ่ง ๆ อาจมี relative maximum, relative minimum หลายที่ อาจมีที่เดียว หรืออาจไม่มีเลยก็ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 4.8.**

1. ฟังก์ชัน $f(x) = (x-1)^2$ มี relative minimum ที่ $x = 1$ แต่ไม่มี relative maximum
2. ฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ ไม่มี relative extremum
3. ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ มี relative maximum ที่ $x = 0$ และมี relative minimum ที่ $x = 1$
4. ฟังก์ชัน $f(x) = \sin x$ มี relative maxima ที่ $\pi/2 + 2n\pi$ และมี relative minima ที่ $3\pi/2 + 2n\pi$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม $n$ ใด ๆ

**ทฤษฎี 4.3.** *ถ้า $f$ มี relative extremum ที่จุด $x_0$ แล้ว $f'(x_0) = 0$ หรือ $f$ หา derivative ไม่ได้ที่ $x_0$*

**นิยาม 4.5.** เราเรียก $x_0$ ว่า critical point ของฟังก์ชัน $f$ ถ้า $f'(x_0) = 0$ หรือ $f$ หา derivative ไม่ได้ที่ $x_0$

**ตัวอย่าง 4.9.** ฟังก์ชัน $f(x) = |x^2 - x|$ มี critical point ที่จุด $x = 0, 1$ และฟังก์ชัน $g(x) = x^2 - x$ ก็มี critical point ที่จุด $x = 0, 1$ เช่นกัน สังเกตว่า ฟังก์ชัน $f$ หา derivative ไม่ได้ที่จุด $x = 0, 1$ ในขณะที่ฟังก์ชัน $g$ หา derivative ได้ ที่จุดดังกล่าว

การตรวจสอบหา relative extremum โดยใช้ derivative เราใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎี 4.4.** *ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ critical point $x_0$ และถ้า ค่าของ $f'$ เปลี่ยนเครื่องหมายที่ $x_0$ แล้ว $f$ มี relative minimum หรือ relative maximum ที่ $x_0$*

1. *ถ้า $f'$ มีค่าเป็นลบสำหรับค่าทางซ้ายของ $x_0$ และมีค่า เป็นบวกสำหรับค่าทางขวาของ $x_0$ แล้ว $f$ มี relative minimum ที่ $x_0$*
2. *ถ้า $f'$ มีค่าเป็นบวกสำหรับค่าทางซ้ายของ $x_0$ และมีค่า เป็นลบสำหรับค่าทางขวาของ $x_0$ แล้ว $f$ มี relative maximum ที่ $x_0$*

**ตัวอย่าง 4.10.** พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = |x^2 - x|$ จงหาค่า $x$ ที่ทำให้ $f$ มี relative extrema

**วิธีทำ** เรารู้ว่า $x = 0, 1$ เป็น critical point เขียนฟังก์ชัน $f$ ใหม่ว่า

$$f(x) = |x||x-1| = \begin{cases} x(x-1) & x \le 0 \\ -x(x-1) & 0 < x \le 1 \\ x(x-1) & x > 1 \end{cases}$$

นั่นคือ

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & x<0 \\ -2x+1 & 0<x<1 \\ 2x-1 & x>1 \end{cases}$$

ดังนั้นที่จุด $x$ ใกล้ ๆ $0$ และ $x<0$ เราพบว่า $f'(x)<0$ ในขณะที่ที่จุด $x$ ใกล้ ๆ $0$ และ $x>0$ เราพบว่า $f'(x)>0$ เราจึงสรุปว่า $f$ มี relative minimum ที่ $0$ ในทำนองเดียวกัน ที่จุด $x$ ใกล้ ๆ $1$ และ $x<1$ เราพบว่า $f'(x)<0$ ในขณะที่ที่จุด $x$ ใกล้ ๆ $1$ และ $x>1$ เราพบว่า $f'(x)>0$ เราจึงสรุปได้เช่นกันว่า $f$ มี relative minimum ที่ $1$

เมื่อเราพิจารณาฟังก์ชัน แล้วต้องการวาดกราฟของฟังก์ชัน เราคงจำได้ว่า มีข้อมูล บางประการที่เราสามารถตรวจสอบได้ก่อน เช่น $x$-intercepts $y$-intercepts ลักษณะ ของกราฟเมื่อ $x$ เข้าใกล้ค่าอนันต์ เป็นต้น ตัวอย่างต่อไปนี้ เราจะใช้ความรู้เหล่านี้ ประกอบกับเรื่องของ derivative ในการวาดกราฟของฟังก์ชัน

**ตัวอย่าง 4.11.** จงวาดกราฟของฟังก์ชัน

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$

**วิธีทำ**

- $x$-intercepts: ให้ $y=0$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2 &= 0 \\ (x+2)(x^2-2x+1) &= 0 \qquad (4.3) \\ (x+2)(x-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

  ดังนั้น $x=-2,1$

- $y$-intercepts: ให้ $x=0$ ได้ว่า $y=2$

- ลักษณะกราฟเมื่อ $x\to\infty$ และ $x\to-\infty$: สังเกตว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty}(x^3-2x+2) &= \infty \\ \lim_{x\to-\infty}(x^3-2x+2) &= -\infty \end{aligned} \qquad (4.4)$$

- ช่วงการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน เราหา derivative ของ $f$ ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

  ดังนั้น $f$ จึงเป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $x<-1$ เป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $-1<x<1$ และ เป็นฟังก์ชันเพิ่มอีกครั้งเมื่อ $x>1$

- ช่วงการ concave up และ concave down ของฟังก์ชัน $f$ เราหา derivative อันดับ สอง ของฟังก์ชัน $f$ ได้ว่า
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$
ดังนั้น $f$ จึง concave up เมื่อ $x > 0$ และ concave down เมื่อ $x < 0$ ฟังก์ชัน $f$ มี inflection point ที่ $0$

จากข้อมูลทั้งหมด เราเขียนกราฟคร่าว ๆ ดังรูปที่ 4.1

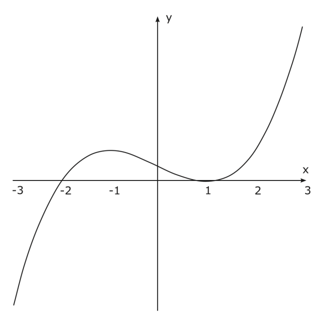



Figure 4.1: กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 3x + 2$

**ตัวอย่าง 4.12.** ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชัน และเรามีข้อมูลที่เกี่ยวกับ $f'$ ดังนี้

1. $f'(x) > 0$ และ $f'$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง $(-\infty, -1)$
2. $f'(x) > 0$ และ $f'$ เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $(-1, 1)$
3. $f'(1) = 0$
4. $f'(x) < 0$ และ $f'$ เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $(1, \infty)$

จงวาดกราฟที่เป็นไปได้ของฟังก์ชัน $f$

**วิธีทำ** จากข้อมูลที่ได้มา เราสรุปว่า

1. $f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ concave up ในช่วง $(-\infty, -1)$
2. $f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ concave down ในช่วง $(-1, 1)$
3. $f$ มี relative maximum ที่ $x = 1$
4. $f$ เป็นฟังก์ชันลด และ concave down ในช่วง $(1, \infty)$

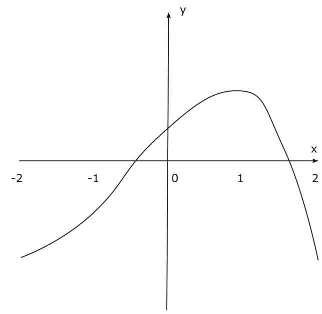



Figure 4.2: กราฟของฟังก์ชัน $f$ จากข้อมูลที่กำหนด

ตัวอย่างกราฟของฟังก์ชัน $f$ เช่นรูป 4.2

**ตัวอย่าง 4.13.** พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

**วิธีทำ**

- $x$-intercepts: ให้ $y = 0$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+1} &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

- $y$-intercepts: ให้ $x = 0$ ได้ว่า $y = 0$
- ลักษณะกราฟเมื่อ $x \to \infty$ และ $x \to -\infty$: สังเกตว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} &= 0 \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2+1} &= 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

- ช่วงการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน เราหา derivative ของ $f$ ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

  ดังนั้น $f$ จึงเป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $x < -1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $-1 < x < 1$ และ เป็นฟังก์ชันลดอีกครั้งเมื่อ $x > 1$

- ช่วงการ concave up และ concave down ของฟังก์ชัน $f$ เราหา derivative อันดับ สองของฟังก์ชัน $f$ ได้ว่า

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

ดังนั้น $f$ จึง concave up เมื่อ $x > \sqrt{3}$ หรือเมื่อ $-\sqrt{3} < x < 0$ ในขณะที่ $f$ concave down เมื่อ $x < -\sqrt{3}$ หรือเมื่อ $0 < x < \sqrt{3}$ ฟังก์ชัน $f$ มี inflection point ที่ $0, \pm\sqrt{3}$

จากข้อมูลทั้งหมด เราเขียนกราฟคร่าว ๆ ดังรูป 4.3

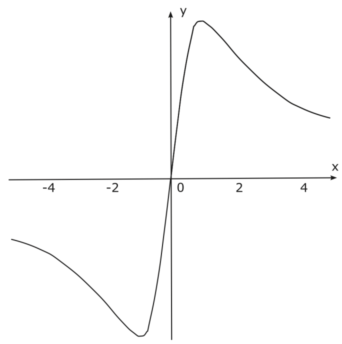



Figure 4.3: กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

**ตัวอย่าง 4.14.** พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \ln(x^3 + 1)$$

นิยามบนช่วง $(-1, \infty)$ จงวาดกราฟของฟังก์ชันนี้

**วิธีทำ**

- $x$-intercepts: ให้ $y = 0$ พบว่า $x = 0$
- $y$-intercepts: ให้ $x = 0$ พบว่า $y = 0$
- ลักษณะกราฟเมื่อ $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \ln(x^3 + 1) = \infty$$

- ลักษณะกราฟเมื่อ $x \to (-1)^+$:

$$\lim_{x\to(-1)^+} \ln(x^3 + 1) = -\infty$$

- ช่วงการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน เราหา derivative ของ $f$ ได้ว่า

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 1} > 0$$

สำหรับ $x > -1$ ดังนั้น $f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดโดเมน

- ช่วงการ concave up และ concave down ของฟังก์ชัน $f$ เราหา derivative อันดับ สอง ของฟังก์ชัน $f$ ได้ว่า

$$f''(x) = \frac{-3x^4 + 6x}{(x^3+1)^2} = \frac{-3x(x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})}{(x^3+1)^2}$$

ดังนั้น $f$ จึง concave up เมื่อ $0 < x < \sqrt[3]{2}$ และ $f$ concave down เมื่อ $x < 0$ หรือ เมื่อ $x > \sqrt[3]{2}$ ฟังก์ชัน $f$ มี inflection point ที่ $0, \sqrt[3]{2}$ ค่าของ $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$

จากข้อมูลทั้งหมด เราเขียนกราฟคร่าว ๆ ดังรูป 4.4

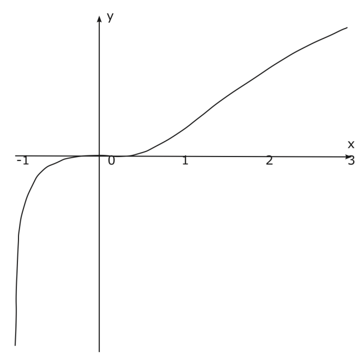



Figure 4.4: กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \ln(x^3+1)$ บนช่วง $(-1, \infty)$

**ตัวอย่าง 4.15.** พิจารณาฟังก์ชัน $f$ ซึ่งนิยามบนช่วง $(-3, 3)$ และหา derivative อันดับสองได้ ฟังก์ชัน $f$ มีกราฟดังรูป 4.5

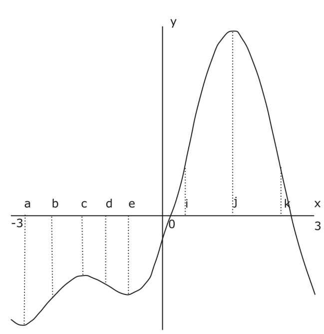



Figure 4.5: กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ บนช่วง $(-3, 3)$

ที่จุดใดที่ฟังก์ชัน $f'$ เปลี่ยนเครื่องหมาย และที่จุดใด $f'$ มี relative extrema

**วิธีทำ** จากรูป ที่จุดซึ่ง $f'$ เปลี่ยนเครื่องหมายคือจุด $x$ ที่ $f'(x) = 0$ ซึ่ง คือ $a, c, e$ และ $j$ ในขณะที่จุดซึ่ง $f'$ มี relative extrema เป็นจุดซึ่ง $f''$ เปลี่ยนเครื่องหมาย ในที่นี้คือจุดซึ่ง $f$ มี inflection point ซึ่งก็คือ $b, d, i$ และ $k$

### 4.2.1 แบบฝึกหัด

1. พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

    1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
    2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$
    3. $f(x) = x^{4/3} - x^{1/3}$
    4. $f(x) = \ln(1 + x^2)$ :::

    ในแต่ละฟังก์ชัน จงหา

    1. $x$-intercepts และ $y$-intercepts
    2. ช่วงเปิดซึ่ง $f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
    3. ช่วงเปิดซึ่ง $f$ เป็นฟังก์ชันลด
    4. ช่วงเปิดซึ่ง $f$ เป็นฟังก์ชัน concave up
    5. ช่วงเปิดซึ่ง $f$ เป็นฟังก์ชัน concave down
    6. ค่า $x$ ที่ทำให้ $f$ มี inflection point :::

2. จงหา relative extrema ของฟังก์ชันต่อไปนี้

    1. $f(x) = x^3 + 5x - 2$
    2. $f(x) = x(x-2)^2$
    3. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$
    4. $f(x) = |x^2 - 1|$ :::

3. จงสเก็ตกราฟของฟังก์ชัน

    1. $f(x) = x^3 - 3x + 3$
    2. $f(x) = -(x+1)x^2(x-1)$
    3. $f(x) = e^{1/x}$ :::

4. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ และ $a < b < c$ จากข้อมูลต่อไปนี้

    1. $f'(a) = f'(b) = 0$

2.

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{สำหรับ } x < a \\ > 0 & \text{สำหรับ } a < x < c \\ < 0 & \text{สำหรับ } x > c \end{cases} \tag{4.7}$$

3. $f''(a) = f"'(b) = 0$

4.

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{สำหรับ } x < a \\ > 0 & \text{สำหรับ } a < x < b \\ < 0 & \text{สำหรับ } x > b \end{cases} \tag{4.8}$$

5. กำหนดให้ฟังก์ชัน $f'$ เป็นดังรูป 4.6

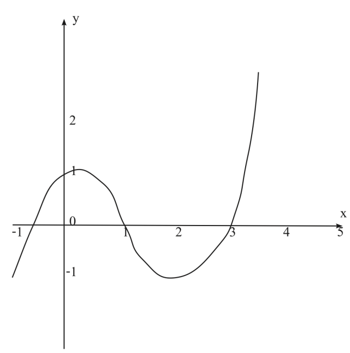



Figure 4.6: กราฟของฟังก์ชัน $f'(x)$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. ช่วงใดที่ $f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
2. ฟังก์ชัน $f$ มี relative maximum ที่ใด
3. ช่วงใดที่ $f$ concave up
4. ฟังก์ชัน $f$ มี inflection point ที่ใด

## 4.3 การประยุกต์ของ Monotonicity และ Concavity

จากที่ได้ศึกษามาแล้ว ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วงเปิด $(a, b)$ และ $x_1$, $x_2$ เป็นจุดที่อยู่ภายในช่วงดังกล่าว แล้ว

(1) $f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ เมื่อ $x_1 < x_2$ หรือ $f'(x) > 0$ สำหรับทุกค่า $x$ ที่อยู่ในช่วง $(a, b)$

(2) $f$ เป็นฟังก์ชันลด ถ้า $f(x_2) < f(x_1)$ เมื่อ $x_1 < x_2$ หรือ $f'(x) < 0$ สำหรับทุกค่า $x$ ที่อยู่ในช่วง $(a, b)$ นอกจากนี้แล้ว

(3) $f$ มีลักษณะแบบ concave up ในช่วง $(c, d)$ ถ้า $f'$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วงดังกล่าว หรือ $f''(x) > 0$ สำหรับทุกค่า $x$ ที่อยู่ในช่วง $(c, d)$

(4) $f$ มีลักษณะแบบ concave down ในช่วง $(c, d)$ ถ้า $f'$ เป็นฟังก์ชันลดในช่วงดังกล่าว หรือ $f''(x) < 0$ สำหรับทุกค่า $x$ ที่อยู่ในช่วง $(c, d)$

ซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาทางวิทยาศาสตร์ชีวภาพ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 4.16.** อัตราการเจริญเติบโตของพืชขึ้นอยู่กับธาตุอาหารที่ได้รับซึ่ง Monod ได้อธิบายไว้ดังสมการ

$$f(R) = \frac{aR}{K+R}, \quad R \geq 0$$

โดยที่ $f(R)$ เป็นอัตราการเจริญเติบโต, $R$ เป็นระดับธาตุอาหาร, $a$ และ $K$ เป็นค่าบวกใดๆ ขึ้นอยู่กับชนิดของพืช อยากทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตของพืชจะเพิ่มขึ้น หรือลดลงเมื่อไหร่

กำหนดให้ $R$ เป็นระดับธาตุอาหาร $f(R)$ เป็นอัตราการเจริญเติบโต เนื่องจาก

$$f(R) = \frac{aR}{K+R}, \quad R \geq 0$$

จะได้

$$f'(R) = \frac{aK}{(K+R)^2} > 0$$

เพราะ $a > 0$, $K > 0$ ดังนั้น อัตราการเจริญเติบโตของพืชจะเพิ่มขึ้นและจะไม่มีวันลดลง

**ตัวอย่าง 4.17.** จากตัวอย่างที่แล้ว เราทราบว่า อัตราการเจริญเติบโตของพืชเป็นฟังก์ชันเพิ่ม อยากทราบว่าอัตราการเพิ่มของอัตราการเจริญเติบโตของพืชจะเป็นอย่างไร

เนื่องจาก $f(R) = \dfrac{aR}{K+R}, \quad R \geq 0$ จะได้ $f'(R) = \dfrac{aK}{(K+R)^2} > 0$ นั่นคือ อัตราการเจริญเติบโตของพืชเป็นฟังก์ชันเพิ่ม โจทย์อยากทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตของพืชที่เพิ่มขึ้นนี้จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าไร นั่นคือการหาอนุพันธ์ของ $f'(R)$ จะได้ $f''(R) = \dfrac{-2aK}{(K+R)^3} < 0$ หมายความว่า อัตราการเจริญเติบโตของพืชนั้นเพิ่มขึ้น แต่อัตราการเพิ่มขึ้นนั้นจะลดลง ดังรูป 4.7

**ตัวอย่าง 4.18.** อัตราการเจริญเติบโตของประชากรสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ logistic

$$f(N) = rN(1 - \frac{N}{K})$$

เมื่อ $N$ เป็นจำนวนประชากร, $r$ และ $K$ เป็นค่าบวก อยากทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตของประชากรจะเพิ่มขึ้น หรือลดลงอย่างไร

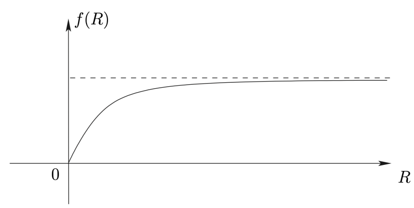



Figure 4.7: กราฟของฟังก์ชัน $f(R) = \frac{aR}{K+R}$

โจทย์ต้องการทราบว่า $f(N)$ จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไร นั่นคือ $f'(N) > 0$ หรือ $f'(N) < 0$ เมื่อ $N$ อยู่ในช่วงใด เนื่องจากอนุพันธ์ใช้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงแบบค่อยเป็นค่อยไป ดังนั้น $f'(N)$ จะเปลี่ยนจากค่าลบเป็นค่าบวก ย่อมต้องผ่านค่าศูนย์ก่อน การหาค่า $N^*$ ที่ทำให้ $f(N^*) = 0$ ย่อมเป็นหนทางหนึ่งที่สามารถใช้พิจารณาช่วงที่ทำให้ $f'(N) > 0$ และ $f'(N) < 0$ ได้ จาก $f(N) = rN(1-\dfrac{N}{K})$ จะได้

$$f'(N) = r - \frac{2rN}{K}$$

ซึ่ง $f'(N) = 0$ เมื่อ $N = \frac{K}{2}$

ถ้า $N > \dfrac{K}{2}$ $f'(N) < 0$ และถ้า $N < \dfrac{K}{2}$ $f'(N) > 0$ ดังนั้น อัตราการเจริญเติบโตของประชากรจะเพิ่มขึ้น เมื่อ $N < \dfrac{K}{2}$ และจะลดลง เมื่อ $N > \dfrac{K}{2}$ แสดงว่าประชากรยิ่งหนาแน่น อัตราการเพิ่มของประชากรก็จะยิ่งลดลง

### 4.3.1 แบบฝึกหัด

1. จากตัวอย่างที่ 9 จงวาดกราฟของ $f(N)$ และระบุช่วงที่ทำให้ $f$ มีลักษณะแบบ concave up และแบบ concave down

2. ค่า $pH$ ของสารละลายสัมพันธ์กับความเข้มข้นของไฮโดรเจนอิออน, $H^+$, ดังนี้

$$pH = -log(H^+)$$

จงพิจารณาว่าค่า $pH$ ของสารละลายจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไร

## 4.4 การหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization)

การหาค่าเหมาะที่สุด คือปัญหาที่ต้องการทราบค่าสูงสุด (absolute maximum) และค่าต่ำสุด (absolute minimum) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 4.19.** ผลผลิตของพืชผักสัมพันธ์กับปริมาณไนโตรเจนดังสมการ $Y(N) = \dfrac{N}{1+N^2}$ เมื่อ $Y(N)$ เป็นผลผลิตของพืชผัก และ $N$ เป็นปริมาณไนโตรเจน $(N \geq 0)$ จงหาปริมาณไนโตรเจนที่ทำให้ได้ผลผลิตของพืชผักมากที่สุด

กำหนดให้ $N$ เป็นปริมาณไนโตรเจน $Y(N)$ เป็นผลผลิตของพืชผัก จากความสัมพันธ์

$$Y(N) = \frac{N}{1+N^2}$$

หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการ

$$Y'(N) = \frac{(1+N^2) - N(2N)}{(1+N^2)^2} = \frac{1-N^2}{(1+N^2)^2}$$

กำหนดให้ $Y'(N) = 0$ เพื่อหา relative extrema $Y'(N) = 0$ เมื่อ $1 - N^2 = 0$ ดังนั้น $N = \pm 1$

เราจะพิจารณา $N$ ในช่วง $N \geq 0$ ดังนั้น $N = -1$ จึงอยู่นอกโดเมน จุดที่สนใจจึงเหลือเพียง $N = 1$ โดยพิจารณาเครื่องหมายของ $Y'(N)$ เราจะได้ว่า

$$Y'(N) > 0 \text{ เมื่อ } -1 < N < 1 \quad Y'(N) < 0 \text{ เมื่อ } N > 1$$

เนื่องจาก $Y(N)$ เปลี่ยนจากฟังก์ชันเพิ่ม เป็นฟังก์ชันลด ที่ $N = 1$ ดังนั้น ที่ $N = 1$ เกิดจากจุดสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) โดย $Y(1) = \frac{1}{2}$

เนื่องจากเราสนใจ absolute maximum จึงต้องตรวจสอบจุดปลายของโดเมน ($N \geq 0$ หรือ $N \in [0, \infty)$) นั่นคือ $N = 0$ และ $N \to \infty$ ด้วย ว่าทำให้ $Y$ มีค่ามากกว่า $Y(1) = \frac{1}{2}$ หรือไม่

$$Y(0) = 0, \qquad \lim_{N\to\infty} Y(N) = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{1+N^2} = 0$$

ดังนั้นที่ $N = 1$ จะเกิดจุดสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) ซึ่งเป็นปริมาณไนโตรเจนที่ทำให้พืชผักมีผลผลิตมากที่สุด คือ $Y(1) = \frac{1}{2}$ (ดูกราฟ 4.8)

**ตัวอย่าง 4.20.** เรือบรรทุกน้ำมันของบริษัทแห่งหนึ่งอับปางลงบริเวณอ่าวไทย ทำให้น้ำมันไหลรั่วซึมลงสู่ทะเล กระทบต่อระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ และสิ่งมีชีวิตที่อาศัยอยู่ในบริเวณดังกล่าว สมมติว่าระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ หลังเหตุการณ์เรือล่ม มีการเปลี่ยนแปลงดังสมการ

$$P(t) = 500[1 - \frac{4}{t+4} + \frac{16}{(t+4)^2}]$$

เมื่อ $P(t)$ เป็นระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ หลังเหตุการณ์เรือล่มผ่านพ้นไป $t$ เดือน อยากทราบว่าเมื่อไหร่ออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำบริเวณดังกล่าวจะอยู่ในระดับที่ต่ำที่สุด

กำหนดให้ $t$ เป็นเวลาหลังเหตุการณ์เรือล่ม $P(t)$ เป็นระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ บริเวณที่เกิดเหตุ

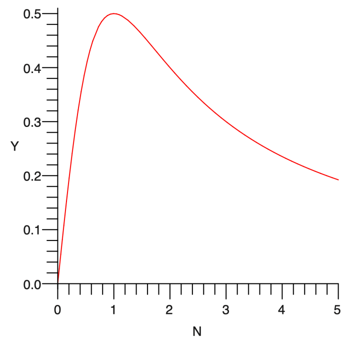



Figure 4.8: กราฟของฟังก์ชัน $Y(N) = \frac{N}{1+N^2}$

จาก $P(t) = 500[1 - \frac{4}{t+4} + \frac{16}{(t+4)^2}]$ หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการ

$$\begin{aligned} P'(t) &= \frac{2000}{(t+4)^2} - \frac{16000}{(t+4)^3} \\ &= \frac{2000(t+4) - 16000}{(t+4)^3} \\ &= \frac{2000t - 8000}{(t+4)^3} \end{aligned} \tag{4.9}$$

กำหนดให้ $P'(t) = \dfrac{2000t - 8000}{(t+4)^3} = 0$ จะได้ $t = 4$ เครื่องหมายของ $P'(t) > 0$ เมื่อ $t > 4$ และ $P'(t) 0$ เมื่อ $t < 4$ ดังนั้น $P(t)$ เปลี่ยนจากฟังก์ชันลดเป็นฟังก์ชันเพิ่มที่ $t = 4$ ดังนั้น ที่ $t = 4$ เกิดจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) โดย $P(4) = 375$

เนื่องจากเราสนใจ absolute minimum จึงต้องตรวจสอบค่า $P(t)$ ที่จุดปลายของโดเมน $t$ ด้วย นั่นคือ $t = 0$ และ $t \to \infty$ $P(0) = 500$ และ $\lim_{t\to\infty} P(t) = 500$ ดังนั้น ที่ $t = 4$ เกิดจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum) ระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ บริเวณดังกล่าวต่ำสุด หลังเหตุการณ์เรืออับปางผ่านพ้นไป 4 เดือน

**ตัวอย่าง 4.21.** นักชีววิทยาต้องการออกแบบพื้นที่ทดลองให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เขามีรั้วยาว 1600 ฟุต เขาจะใช้รั้วนี้อย่างไร จึงจะทำให้ได้พื้นที่ทดลองที่กว้างใหญ่ที่สุด

กำหนดให้

$x$ เป็นความกว้างของพื้นที่ทดลอง
$y$ เป็นความยาวของพื้นที่ทดลอง
$A$ เป็นพื้นที่ของพื้นที่ทดลอง
$P$ เป็นความยาวรอบรูปของพื้นที่ทดลอง

เนื่องจาก $A = xy$ และ $P = 2x + 2y$ จากโจทย์ $P = 2x + 2y = 1600$ ดังนั้น $x + y = 800$ หรือ $y = 800 - x$ แทน $y$ ลงใน $A = xy$ จะได้

$$\begin{aligned} A(x) &= x(800 - x), \quad 0 \le x \le 800 \\ &= 800x - x^2 \end{aligned} \tag{4.10}$$

โจทย์ต้องการหาพื้นที่กว้างใหญ่ที่สุด เราจึงต้องหาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้าง

$$A'(x) = 800 - 2x$$

กำหนดให้ $A'(x) = 800 - 2x = 0$ จะได้ $x = 400$ และ $A(400) = 1600$ ตามลำดับ ทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง $A''(x) = -2 < 0$ พบว่า $x = 400$ ทำให้เกิดจุดสูงสุดสัมบูรณ์ เพราะ $A(x)$ มีลักษณะแบบ concave down ดังนั้นนักชีววิทยาควรกั้นรั้วเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกว้าง 400 ฟุต จึงจะได้พื้นที่ทดลองที่กว้างใหญ่ที่สุด

1. วาดภาพและกำหนดตัวแปรต่างๆ เช่น $x$, $y$ เป็นต้น
2. หาสูตรหรือสมการของปริมาณที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด
3. ใช้เงื่อนไขที่โจทย์ระบุให้ในการตัดทอนตัวแปร เพื่อทำให้สมการในขั้นตอนที่ 2 อยู่ในรูปฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรเพียงตัวเดียว
4. หาช่วงที่เป็นไปได้ของตัวแปร โดยให้สอดคล้องกับความหมายของโจทย์
5. ใช้เทคนิคการหาค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ ไม่ว่าจะเป็นทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง หรือทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับสอง
6. ตรวจสอบจุดปลายของโดเมนของตัวแปร เพื่อยืนยันการเกิดค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมบูรณ์

### 4.4.1 แบบฝึกหัด

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงของการสังเคราะห์แสงขึ้นกับความเข้มของแสง $x$, ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $R(x) = 270x - 90x^2$ จงหาความเข้มของแสง ที่ทำให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของการสังเคราะห์แสงมากที่สุด
2. การตอบสนองต่อยาชนิดหนึ่งขึ้นกับปริมาณของยา, $x$, ดังสมการ $S = 1000x - x^2$ จงหาปริมาณยาที่ทำให้มีการตอบสนองต่อยาชนิดนี้มากที่สุด
3. นักวิจัยพบว่าขณะไอ ปริมาณอากาศที่ไหลผ่านทางหลอดลมสัมพันธ์กับสมการ $F = SA$ เมื่อ $S$ คือความเร็วของอากาศ และ $A$ คือพื้นที่ตัดขวางของหลอดลม ดังรูป 4.9 ถ้าความเร็วของอากาศมีสูตรเป็น $S = c - r$ โดย $r$ คือรัศมีของหลอดลมขณะไอ และ $c$ คือรัศมีของหลอดลมในสภาวะปกติ จงหารัศมีที่ทำให้ปริมาณอากาศที่ไหลผ่านหลอดลมมีมากที่สุด ขณะที่ไอ
4. เภสัชกรต้องการสร้างกล่องไร้ฝาอย่างง่ายเพื่อขนย้ายยา เขามีกระดาษแข็งกว้าง 16 นิ้ว ยาว 30 นิ้ว เขาตั้งใจจะตัดมุมของกระดาษแข็งทั้ง 4 ออก ตามรูป 4.10 แล้วทำการพับตามรอยปะและเชื่อมรอยต่อด้วยเทปกาว จงหาความยาว $x$ ที่ตัดตามมุม เพื่อให้ได้กล่องที่มีปริมาตรมากที่สุด

5. คราวนี้นักชีววิทยาคนเดิม ต้องการพื้นที่ทดลองแบบสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 320 ตารางเมตร ด้านที่ขนานกันคู่หนึ่งใช้รั้วราคา 100 บาทต่อเมตร ส่วนด้านคู่ที่เหลือใช้รั้วราคา 200 บาทต่อเมตร จงหาความกว้างและความยาวของพื้นที่ทดลองแห่งนี้ เมื่อใช้งบประมาณน้อยที่สุด

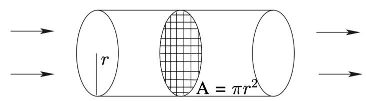



Figure 4.9: การไหลเวียนของอากาศในหลอดลม

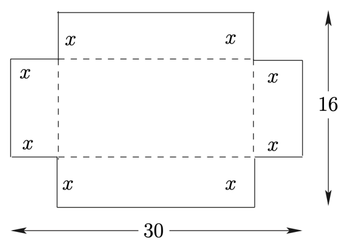



Figure 4.10: กล่องไร้ฝาสำหรับขนส่งยา

## 4.5 รูปแบบไม่กำหนด (Indeterminate form) และกฎของโลปิตาล (L'Hopital Rule)

**นิยาม 4.6.** ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ เราจะกล่าวว่า $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$ อาจแทน $x \to a$ ด้วย $x \to a^+$ , $x \to a^-$ , $x \to \infty$ , $x \to -\infty$

ในการหาค่าลิมิตของรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\dfrac{0}{0}$ นั้น เราจะนำกฎของโลปิตาลมาประยุกต์ใช้

**ทฤษฎี 4.5.** *(กฎของโลปิตาล)*

1. *ถ้า* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *และ* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *แล้ว* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *จะอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด* $\frac{0}{0}$ *และได้ว่า* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

2. *ถ้า* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *และ* $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ *แล้ว* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *จะอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด* $\frac{\infty}{\infty}$ *และได้ว่า* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

**ตัวอย่าง 4.22.** จงหาค่าของ $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$

**วิธีทำ** เพราะว่า $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25} = \lim_{x\to 5} \frac{1}{(2\sqrt{x-1})(2x)} = \frac{1}{40}$$

กฎของโลปิตาลยังคงเป็นจริงในกรณีที่ $x \to a^+$ , $x \to a^-$ , $x \to \infty$ , $x \to -\infty$

**ตัวอย่าง 4.23.** จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

**วิธีทำ** เพราะว่า $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

กฎของโลปิตาลใช้กับลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ เท่านั้น หากลิมิตไม่ได้อยู่ในรูปแบบดังกล่าว เราจะต้องจัดให้อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ เสียก่อนแล้วจึงนำกฎของโลปิตาลมาใช้

### 4.5.1 การหาลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $0 \cdot \infty$ หรือ $\infty - \infty$

การหาลิมิตในรูปแบบไม่กำหนด $0 \cdot \infty$ หรือ $\infty - \infty$ สามารถทำได้โดยจัดให้ลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ก่อนแล้วจึงนำกฎของโลปิตาลมาใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 4.24.** จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$

**วิธีทำ** เพราะว่า $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

**ตัวอย่าง 4.25.** จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x})$

**วิธีทำ** เพราะว่า $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x})=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{(\frac{1}{x}-1)}{(\frac{x-1}{x})+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x-1+x\ln x}$$

ซึ่งยังอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x-1+x\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{1+1+\ln x}=\frac{-1}{2}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x})=-\frac{1}{2}$

### 4.5.2 การหาลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $0^0, 1^\infty, \infty^0$

ในการหาค่าลิมิตทั้ง 3 แบบนี้ เราสามารถจัดให้ลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ โดยอาศัยฟังก์ชันลอการิทึมเข้าช่วย แล้วจึงนำกฎของโลปิตาลมาใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 4.26.** จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

**วิธีทำ** ให้ $y=x^x$ ดังนั้น $\ln y=x\ln x$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y=\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y=0$

เพราะว่า $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y=\ln(\lim\limits_{x\to 0^+}y)$ ดังนั้น $\ln(\lim\limits_{x\to 0^+}y)=0$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 0^+}y=e^0=1$

หรือ $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$

**ตัวอย่าง 4.27.** จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1}x^{1/(x-1)}$

**วิธีทำ** ให้ $y=x^{1/(x-1)}$ ดังนั้น $\ln y=\frac{\ln x}{x-1}$

และ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 1} \ln y = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x} = 1$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1} \ln y = 1$

เพราะว่า $\lim\limits_{x\to 1} \ln y = \ln(\lim\limits_{x\to 1} y)$ ดังนั้น $\ln(\lim\limits_{x\to 1} y) = 1$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 1} y = e^1 = e$

หรือ $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(x-1)} = e$

**ตัวอย่าง 4.28.** จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$

**วิธีทำ** ให้ $y = x^{1/x}$ ดังนั้น $\ln y = \dfrac{\ln x}{x}$

และ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{\infty}{\infty}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \ln y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} \ln y = 0$

เพราะว่า $\lim\limits_{x\to\infty} \ln y = \ln(\lim\limits_{x\to\infty} y)$ ดังนั้น $\ln(\lim\limits_{x\to\infty} y) = 0$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to\infty} y = e^0 = 1$

หรือ $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$

# Chapter 5

# การหาปริพันธ์ (Integrations)

## 5.1 ปฏิยานุพันธ์ (Antiderivatives)

จากเรื่องการหาอนุพันธ์ ถ้าวัตถุชนิดหนึ่งมีสมการการเคลื่อนที่ คือ $s = t^3$ โดยที่วัตถุนี้เคลื่อนที่ได้ระยะทาง $s$ เมตร เมื่อเวลาผ่านไป $t$ วินาที แล้วเราสามารถบอกได้ว่าวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $v = 3t^2$ เมตร/วินาที แต่เรารู้ว่า $v = \dfrac{ds}{dt}$ ดังนั้น $\dfrac{ds}{dt} = 3t$ ในทางกลับกันถ้าเรารู้ว่าสมการความเร็วของวัตถุชนิดหนึ่ง ถ้า $v = 3t^2$ แสดงว่า $\dfrac{ds}{dt} = 3t^2$ แล้วลองนึกย้อนกลับว่าสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดนี้ คือ สมการใด จะเห็นว่าสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้อาจจะอยู่ในรูป

$$
\begin{aligned}
s &= t^3 \\
s &= t^3 - 2 \\
\text{หรือ } s &= t^3 + 5
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

ซึ่งทั้งสามสมการนี้มี $\dfrac{ds}{dt} = 3t^2$ แต่เราก็ยังไม่แน่ใจว่าเป็นสมการใดกันแน่หรืออาจไม่ใช่ทั้งสามสมการนี้ก็ได้ แต่เราสามารถคาดคะเนได้ว่าสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้ควรจะอยู่ในรูป

$$s = t^3 + c$$

โดยที่ $c$ เป็นค่าคงตัว สมการการเคลื่อนที่ทั้งสี่สมการดังกล่าวนี้เป็นตัวอย่างของ “ปฏิยานุพันธ์” ของ $v = 3t^2$

ในกรณีทั่วไป เราจะนิยามปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันดังต่อไปนี้

**นิยาม 5.1.** ฟังก์ชัน $F$ เป็นปฏิยานุพันธ์ (antiderivative) ของฟังก์ชัน $f$ บนช่วง $I$ ถ้า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ $x$ ในช่วง $I$

**ตัวอย่าง 5.1.** จงแสดงว่า $F(x) = x^2 - 2x - 3$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 2x - 2$ บนช่วง $(-\infty, \infty)$

**วิธีทำ** จาก $F(x) = x^2 - 2x - 3$ จะได้ $F'(x) = 2x - 2$ นั่นคือ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x$ ในช่วง $(-\infty, \infty)$

**ตัวอย่าง 5.2.** ให้ $f(x) = 2x^{3/2}$ จงหาปฏิยานุพันธ์ของ $f$ บนช่วง $(0, \infty)$

**วิธีทำ** ให้ $F_1(x) = \dfrac{4}{5}x^{5/2}$ จะได้ $F_1'(x) = 2x^{3/2}$ สำหรับ $x > 0$

และให้ $F_2(x) = \dfrac{4}{5}x^{5/2} + 2$ จะได้ $F_2'(x) = 2x^{3/2}$ สำหรับ $x > 0$

และให้ $F_3(x) = \dfrac{4}{5}x^{5/2} - 5$ จะได้ $F_3'(x) = 2x^{3/2}$ สำหรับ $x > 0$

ดังนั้น $F_1, F_2$ และ $F_3$ ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 2x^{3/2}$ บนช่วง $(0, \infty)$ และแต่ละค่าคงตัว $C$ ถ้าให้ $F(x) = (4/5)x^{5/2} + C$ จะทำให้ $F'(x) = 2x^{3/2}$ สำหรับทุก $x \in (0, \infty)$

ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่าฟังก์ชัน $F$ ใด ๆ ที่

$$F(x) = \frac{4}{5}x^{5/2} + C \tag{5.2}$$

เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 2x^{3/2}$ บนช่วง $(0, \infty)$ เมื่อ $C$ เป็นค่าคงตัว

จากตัวอย่างนี้ฟังก์ชัน $F$ ที่นิยาม โดย (5.2) เป็นรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 2x^{3/2}$ บน $(0, \infty)$ และให้สังเกตว่าช่วง $(0, \infty)$ เป็นโดเมนของ $f$

**ข้อสังเกต**

1. ถ้า $f$ และ $g$ เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f^{'}(x) = g^{'}(x)$ สำหรับทุก ๆ $x$ ในช่วง $I$ แล้วจะมีค่าคงที่ $K$ ที่ทำให้ $f(x) = g(x) + K$
2. ถ้า $F$ เป็นปฏิยานุพันธ์เฉพาะของ $f$ บนช่วง $I$ แล้วแต่ละปฏิยานุพันธ์ของ $f$ บนช่วง สามารถถูกเขียนได้ในรูป $F(x) + C$ เมื่อ $C$ เป็นค่าคงตัว

### 5.1.1 แบบฝึกหัด (Antiderivatives)

จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

1. $f(x) = 0$
2. $f(x) = 4x$
3. $f(x) = 3x^2$
4. $f(x) = x^3$
5. $f(x) = \sqrt{x}$

6. $f(x) = e^x$

7. $f(x) = \sin x$

8. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

**เฉลยแบบฝึกหัด** 5.1.1 กำหนดให้ $C$ แทนค่าคงตัวใด ๆ

1. $C$

2. $2x^2 + C$

3. $x^3 + C$

4. $\dfrac{x^4}{4} + c$

5. $\dfrac{2x^{3/2}}{3} + C$

6. $e^x + C$

7. $-\cos x + C$

8. $\tan^{-1} x + C$

## 5.2 ปริพันธ์จำกัดเขต (The Definite Integral)

### 5.2.1 Integration คืออะไร

Integration Calculus เป็นวิชาที่เกี่ยวกับการคำนวณหา พื้นที่และปริมาตรของรูปทรงต่างๆโดยอาศัยหลัก การที่ว่า รูปทรงใดๆเกิดจากการ ประกอบกันของชิ้นส่วนเล็กๆจำนวนมากมาย (infinity) ในบทนี้เราจะศึกษา เกี่ยวกับ

- การประมาณค่าพื้นที่
- The definite integral
- ทฤษฎีเบื้องต้น และทฤษฎีพื้นฐานของแคลคูลัส

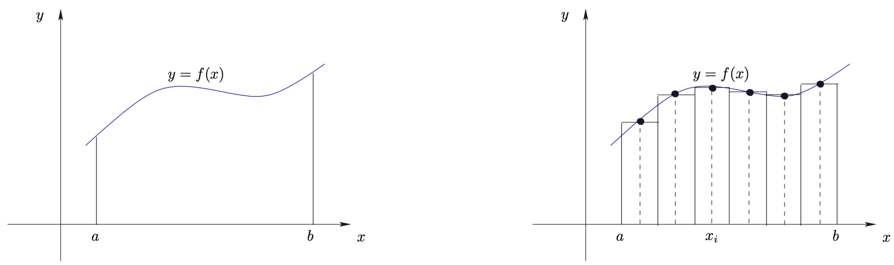



Figure 5.1: การประมาณค่าพื้นที่

### 5.2.2 การประมาณค่าพื้นที่และปริพันธ์จำกัดเขต

พิจารณาฟังก์ชัน $y = f(x) \geq 0$ บนช่วงเปิด $[a, b]$ ถ้าเราต้องการประมาณค่าพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยส่วนโค้ง $y = f(x)$ แกน $x$ และเส้นตรง $x = a$ , $x = b$

วิธีการหนึ่งที่ทำได้ก็คือ การหาผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มาประกอบกันคุมพื้นที่ดังรูป ยิ่งขนาดของรูปสี่เหลี่ยม ผืนผ้าเล็กมากๆ ความถูกต้องของการประมาณค่าจะยิ่งใกล้เคียงค่าจริงยิ่งขึ้น แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณค่าโดยอาศัยรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านั้นเป็นวิธีการพื้นฐานที่ใช้ในการคำนวณหาพื้นที่ใต้ส่วนโค้ง การหาพื้นที่ $A$ ที่ล้อมรอบด้วย ส่วนโค้ง $y = f(x)$ แกน $x$ และเส้นตรง $x = a$ , $x = b$ เราต้องแบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น $n$ ช่วงเล็กๆขนาด เท่ากันคือ $\frac{b-a}{n}$ สำหรับ $I = 0, 1, 2, ..., n-1$ ลากเส้นตรงแนวดิ่งตัวส่วนโค้งและสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทางด้านขวาของ เส้นตรงแนวดิ่งนี้ จะได้ว่าความสูงของสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปที่ $I$ คือ $f(x_i)$ และ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปที่ $I$ คือ $\frac{b-a}{n} \times f(x_i)$ ดังนั้น พ.ท.ทั้งหมดของสี่เหลี่ยมผืนผ้า $n$ รูป คือ

$$A(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-1}{n} f(x_i)$$

โดยที่ $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$

ขณะที่จำนวนของช่วงย่อยต่างๆเพิ่มขึ้น ขนาดของช่วงย่อยเหล่านี้คือ $\frac{b-a}{n}$ จะลดลง และพื้นที่ $A(n)$ จะเข้าใกล้ พื้นที่ $A$ ที่เราต้องการคำนวณ ดังนั้นพื้นที่ $A$ สามารถหาค่าได้จากสมการข้างล่างนี้

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_i)$$

ถ้าเรากำหนดให้ $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ นิยามของการ integrate คือ $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_a^b f(x_i)\Delta x$ โดยที่ $a$ และ $b$ เป็นลิมิตของการอินทิเกรท และสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)dx$ เป็นจำนวน ไม่ใช่ฟังก์ชัน และเรียกสัญลักษณ์นี้ว่า definite integral

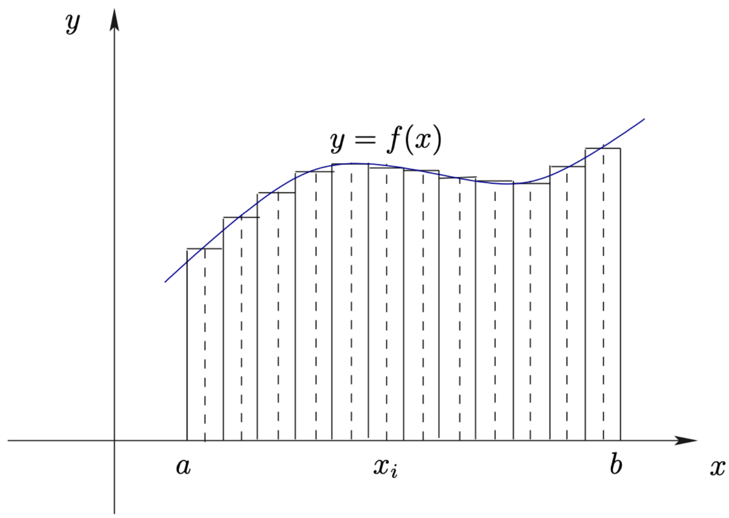



Figure 5.2: การประมาณค่าพื้นที่ใต้เส้นโค้งโดยอาศัยการสร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้า

**ตัวอย่าง 5.3.** จงคำนวณหาพื้นที่ ที่ล้อมรอบด้วยส่วนโค้ง $y = x^2$ เส้นตรง $x = 0, x = 4$ และแกน $x$

**วิธีทำ** สูตรสำหรับประมาณค่าพื้นที่ คือ $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_i)$

**กรณีที่ 1** : ใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 4 รูป

เรามี $f(x) = x^2$ , $a = 0$ , $b = 4$ , $n = 4$ และ

$x_0 = 0$ , $x_1 = 1$ , $x_2 = 2$ , $x_3 = 3$ จะได้ว่า
พื้นที่โดยประมาณคือ

$[1 \times (0)^2] + [1 \times (1)^2] + [1 \times (1)^2] + [1 \times (3)^2]$

$= [0] + [1] + [4] + [9] = 14$

**กรณีที่ 2** : ใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 8 รูป
พื้นที่โดยประมาณคือ

$[1 \times (0)^2] + [0.5 \times (0.5)^2] + [0.5 \times (1)^2] + [0.5 \times (1.5)^2] + [0.5 \times (2)^2] + [0.5 \times (2.5)^2] + [0.5 \times (3)^2] = [0.5 \times (3.5)^2]$
$= [0] + [0.125] + [0.5] + [1.125] + [2] + [3.125] + [4.5] + [6.125] = 17.5$

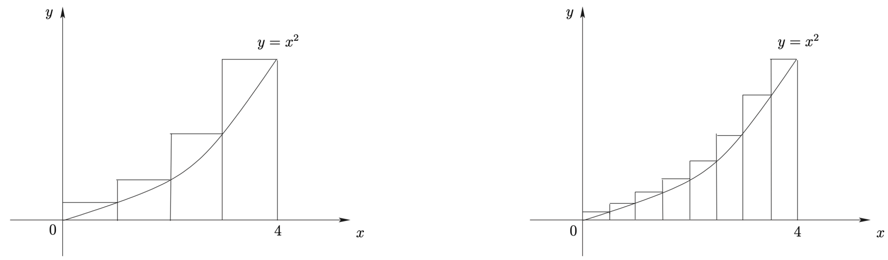



Figure 5.3: การประมาณค่าพื้นที่ใต้เส้นโค้ง ระหว่าง $x = 0$ และ $x = 4$ และอยู่เหนือแกน $x$

## 5.3 ทฤษฎีพื้นฐานของแคลคูลัส (The fundamental Theorem of Calculus)

วิชาแคลคูลัสแบ่งออกเป็น 2 สาขา คือ แคลคูลัสที่เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ ซึ่งถือกำเนิดมาจากความต้องการที่จะหาความชันของฟังก์ชัน และแคลคูลัส ที่เกี่ยวกับการอินทิเกรท ซึ่งถือกำเนิดมาจากความต้องการที่จะหาพื้นที่ใต้กราฟ

ทฤษฎีพื้นฐานของแคลคูลัสเป็นทฤษฎีที่เป็นตัวเชื่อมระหว่าง 2 สาขาทางแคลคูลัส และใช้แสดงความเกี่ยวเนื่องของการหา antiderivative ของฟังก์ชันหนึ่งกับการคำนวณหา definite integral ของฟังก์ชันนั้น

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_a^b f(x_i)\Delta x$$

เราใช้สัญลักษณ์ $\int f(x)dx$ แทน antiderivative ของฟังก์ชัน $f(x)$ และเรียกสัญลักษณ์นี้ว่า indefinite integral

**ทฤษฎี 5.1.** *(ทฤษฎีพื้นฐานของแคลคูลัส) ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $[a, b]$ แล้ว*

1. *ถ้า* $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ *แล้ว* $g'(x) = f(x)$

2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$ *เมื่อ $F$ คือ antiderivative ของ $f$*

**ข้อสังเกต** ข้อสรุป 1. ในทฤษฎีข้างต้นสามารถเขียนในรูป

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\ dt\right) = f(x)$$

**ตัวอย่าง 5.4.** จงหาอนุพันธ์ของ $g(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^4}\ dt$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $f(t) = \sqrt{1+t^4}$ เป็นฟังก์ต่อเนื่อง

ดังนั้น จากทฤษฎีพื้นฐานของแคลคูลัส $\dfrac{d}{dx}(g(x)) = \sqrt{1+x^4}$

**ตัวอย่าง 5.5.** จงหา $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2} \sin t \ dt$

**วิธีทำ** ให้ $U = x^2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sin t \ dt &= \frac{d}{dx}\int_0^{U} \sin t \ dt \\
&= \frac{d}{dU}\left(\int_0^{U} \sin t \ dt\right)\frac{dU}{dx} \qquad \text{(โดยกฎลูกโซ่)} \\
&= \sin U \frac{dU}{dx} \qquad \text{(โดยทฤษฎีพื้นฐานทางแคลคูลัส)} \\
&= \sin x^2 \cdot 2x \\
&= 2x \cdot \sin x^2
\end{aligned}$$

**ตัวอย่าง 5.6.** จงหา $\displaystyle\int_0^{2} e^x \ dx$ โดยใช้ทฤษฎีพื้นฐานทางแคลคูลัส

**วิธีทำ** เนื่องจาก $F(x) = e^x$ เป็น antiderivative ของ $f(x) = e^x$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ต่อเนื่องในช่วง $[0, 2]$

ดังนั้น $\displaystyle\int_0^{2} e^x \ dx = F(2) - F(0) = e^2 - e^0 = e^2 - 1$

### 5.3.1 สูตรพื้นฐานของการอินทิเกรท (Basic Integration Rules)

จากทฤษฎีพื้นฐานทางแคลคูลัส (The fundamental Theorem of Calculus) เราทราบว่า ถ้า $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t) \ dt$ แล้ว $g'(x) = f(x)$ และจากนิยามของ antiderivative เราสรุปได้ว่า $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t) \ dt$ เป็น antiderivative ของ $f(x)$ ซึ่งเรามักจะเขียน $\displaystyle\int f(x) \ dx$ แทน antiderivative ของ $f(x)$

นั่นคือ

จากเนื้อหาเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเราทราบว่า $\dfrac{d}{dx}(\ln|x| + C) = \dfrac{1}{x}$ , เมื่อ $C$ เป็นค่าคงที่

ดังนั้นจากคำอธิบายในข้างต้น เราสรุปได้ว่า

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + C$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถใช้ความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์สร้างสูตรพื้นฐานของการอินทิเกรทได้ดังนี้

1. $\int Cf(x)\ dx = C\int f(x)\ dx$ เมื่อ $C$ เป็นค่าคงที่
2. $\int [f(x)+g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$
3. $\int k\ dx = kx + C$ เมื่อ $k, C$ เป็นค่าคงที่
4. $\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ เมื่อ $n \neq -1$
5. $\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + C$
6. $\int e^x\ dx = e^x + C$
7. $\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ เมื่อ $a$ เป็นจำนวนบวก และ $a \neq 1$
8. $\int \sin x\ dx = -\cos x + C$
9. $\int \cos x\ dx = \sin x + C$
10. $\int \sec^2 x\ dx = \tan x + C$
11. $\int \csc^2 x\ dx = -\cot x + C$
12. $\int \sec x \tan x\ dx = \sec x + C$
13. $\int \csc x \cot x\ dx = -\csc x + C$
14. $\int \frac{1}{x^2+1}\ dx = \arctan x + C$
15. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arcsin x + C$

**ตัวอย่าง 5.7.** จงหา $\displaystyle\int (9x^5 - 4\csc^2 x)\ dx$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned}\int (9x^5 - 4\csc^2 x)\ dx &= 9\int x^5\ dx - 4\int \csc^2 x\ dx \quad (\text{สูตร } 1 \text{ และ } 2)\\ &= \frac{9}{6}x^6 - 4(-\cot x) + C \quad (\text{สูตร } 4 \text{ และ } 11)\\ &= \frac{3}{2}x^6 + 4\cot x + C\end{aligned}$$

**ตัวอย่าง 5.8.** จงหา $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\ d\theta$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\ d\theta &= \int \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\ d\theta\\ &= \int \csc\theta\cot\theta\ d\theta\\ &= -\csc\theta + C \quad (\text{สูตร } 13)\end{aligned}$$

**ตัวอย่าง 5.9.** จงหา $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2\sqrt{x} - 3}{x^{\frac{3}{2}}}\ dx$

**วิธีทำ** จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}\frac{x^3 + 2\sqrt{x} - 3}{x^{\frac{3}{2}}} &= \frac{x^3}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}}\\ &= x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-1} - 3x^{-\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 + 2\sqrt{x} - 3}{x^{\frac{3}{2}}}\ dx &= \int x^{\frac{3}{2}}\ dx + 2\int x^{-1}\ dx - 3\int x^{-\frac{3}{2}}\ dx\\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 2\ln|x| - \frac{3x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C\\ &= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2\ln|x| - \frac{3x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C\\ &= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2\ln|x| + \frac{6}{\sqrt{x}} + C\end{aligned}$$

**ตัวอย่าง 5.10.** จงหา $\displaystyle\int_0^1 \left(x^4 - \frac{2}{1+x^2}\right)\ dx$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(x^4 - \frac{2}{1+x^2}\right)\ dx &= \int_0^1 x^4\ dx - 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\ dx \\
&= \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 - 2 \left.\arctan x\right|_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{5} - 0\right) - 2\left(\arctan 1 - \arctan 0\right) \\
&= \frac{1}{5} - 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) \\
&= \frac{1}{5} - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

# Chapter 6

# เทคนิคของการหาปริพันธ์ (Techniques of Integration)

ในบทนี้เราจะศึกษาวิธีต่างๆ ที่สำคัญในการช่วยหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่างๆ เทคนิคแรก คือ การเปลี่ยนตัวแปร (the substitution rule) ซึ่งวิธีนี้มีการประยุกต์มาจากกฎลูกโซ่ เทคนิคถัดมา คือ integration by part ซึ่งประยุกต์มาจากการหาอนุพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชัน และเทคนิคสุดท้าย คือ integration by partial fraction โดยการเลือกใช้เทคนิคต่างๆ จะขึ้นอยู่กับ integrand

## 6.1 การหาปริพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร (Integration by Substitution)

พิจารณา indefinite integral ที่อยู่ในรูปของ

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

ถ้ากำหนดให้ $F(x)$ เป็น antiderivative ของ $f(x)$, นั่นคือ $F'(x) = f(x)$ แล้วโดยการใช้กฎลูกโซ่ เราจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x)$$

หรือ

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \tag{6.1}$$

และถ้ากำหนดให้ $u = g(x)$ และพิจารณาสมการที่ (6.1) เราจะได้ว่า

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)du$$

หรือ

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

สรุป แล้ว เมื่อ เรา ทำการ เปลี่ยน ตัวแปร $u = g(x)$ เรา จะ ได้ ว่า $du = g'(x)dx$ ดัง นั้น $\int f(g(x))g'(x)dx$ สามารถถูกเขียนให้อยู่ในรูปของ $\int f(u)du$ ซึ่งทำให้สามารถหาปริพันธ์ได้นั่นเอง

**ทฤษฎี 6.1.** *ถ้า* $u = g(x)$ *แล้ว*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

**ตัวอย่าง 6.1.** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้ $\int x^2(x^3+1)^5dx$

**วิธีทำ** โดยการเปลี่ยนตัวแปร $u = x^3+1$ เราจะได้ว่า $du = 3x^2dx$ ดังนั้นเราสามารถเขียน integral ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\int x^2(x^3+1)^5dx &= \int u^5\frac{1}{3}du \\ &= \frac{1}{3}\int u^5du \\ &= \frac{1}{3}\frac{u^6}{6}+C \\ &= \frac{1}{18}(x^3+1)^6+C\end{aligned}$$

**ตัวอย่าง 6.2.** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้ $\int \sqrt{2x+3}dx$

**วิธีทำ** โดยการเปลี่ยนตัวแปร $u = 2x+3$ เราจะได้ว่า $du = 2dx$ ดังนั้นเราสามารถเขียน integral ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+3}dx &= \int \sqrt{u}\frac{1}{2}du \\ &= \frac{1}{2}\int u^{1/2}du \\ &= \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2}+C \\ &= \frac{1}{3}(2x+3)^{3/2}+C\end{aligned} \tag{6.2}$$

**ตัวอย่าง 6.3.** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้ $\int \frac{1}{x}(1+\ln x)^2dx$

**วิธีทำ** โดยการเปลี่ยนตัวแปร $u = 1+\ln x$ เราจะได้ว่า $du = \frac{dx}{x}$ ดังนั้นเราสามารถเขียน integral ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}(1+\ln x)^2 dx &= \int u^2 du \\ &= \frac{u^3}{3} + C \\ &= \frac{1}{3}(1+\ln x)^3 + C\end{aligned} \tag{6.3}$$

### 6.1.1 แบบฝึกหัด (Integrals)

จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int \sqrt{x+1}dx$
2. $\int (x^2-2x)\sqrt{x^3-3x^2+1}dx$
3. $\int \sin x e^{\cos x} dx$
4. $\int \tan \sec^2 x dx$
5. $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

### 6.1.2 การหาปริพันธ์โดยการแทนด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Substitutions)

เราสามารถใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปรเพื่อหาปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูปแบบต่อไปนี้

1. $\int \sin^m x \cos^n x dx$
2. $\int \tan^m x \sec^n x dx$
3. $\int \cot^m x \csc^n x dx$

โดยในบทนี้จะยกตัวอย่างเฉพาะในกรณีแรกเท่านั้น ส่วนกรณีที่เหลือสามารถใช้หลักการเดียวกัน พิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 6.4.** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้ $\int \sin^3 x \cos x dx$

**วิธีทำ** โดยการเปลี่ยนตัวแปร $u = \sin x$ เราจะได้ว่า $du = \cos x dx$ ดังนั้น

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$$

ในกรณีของ integral แบบแรก $\int \sin^m x \cos^n x dx$ เราจะแบ่งการพิจารณาเป็น 2 กรณี ดังนี้

**กรณีที่ 1** ถ้า $m$ หรือ $n$ อย่างน้อยหนึ่งตัวที่เป็นจำนวนบวกคี่ สมมติให้ $m$ เป็นจำนวนบวกคี่ ดังนั้นเราสามารถที่จะเขียน $m = 2k+1$ เราจะแยก $\sin x$ ออกมาจาก $\sin^{2k} x$ และจะใช้เอกลักษณ์ $\sin^2 x = (1-\cos^2 x)$ ในการจัดรูป integral ดังนี้

$$\begin{aligned}\int \sin^m x \cos^n x dx &= \int (\sin^2 x)^k \cos^n x \sin x dx \\ &= \int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x \sin x dx \\ &= -\int (1-u^2)^k u^n du\end{aligned} \tag{6.4}$$

โดยเรากำหนดให้ $u = \cos x$ สังเกตว่า integral สุดท้ายจะง่ายต่อการหาอนุพันธ์

**ตัวอย่าง 6.5.** จงหาปริพันธ์ของ $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$

**กรณีที่ 2** ถ้า $m$ และ $n$ เป็นจำนวนบวกคู่ ในกรณีนี้เราสามารถที่จะใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติต่อไปนี้ในการทำให้ integral อยู่ในรูปที่ง่ายต่อการหาค่าปริพันธ์

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

โดยพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 6.6.** จงหาปริพันธ์ของ $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

## 6.2 การหาปริพันธ์โดยแยกส่วน (Integration by Parts)

ในบทนี้เราจะใช้การแปลง (transformation) ในการเปลี่ยนรูปของ integral บางประเภทให้อยู่ในรูปที่ง่ายต่อการหา โดยเริ่มต้นจากการพิจารณาอนุพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชัน ต่อไปนี้

$$\frac{d}{dx}(uv) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

หรือ เขียนให้อยู่ในรูปของ

$$u(x)v'(x) = \frac{d}{dx}(u(x)v(x)) - v(x)u'(x)$$

โดยการหาปริพันธ์เทียบกับ $x$ เราจะได้ว่า

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

หรือ

$$\int udv = uv - \int vdu$$

สูตรการหาปริพันธ์นี้ เรียกว่า integration by parts

ในการใช้สูตรดังกล่าว เราจำเป็นที่จะต้องแบ่ง integrand ออกเป็น 2 ส่วนด้วยกัน คือ ส่วนของ u และ dv โดยอาศัยหลักการต่อไปนี้

1. ส่วน $dv$ ต้องเป็นส่วนที่ง่ายต่อการหาปริพันธ์
2. ในพจน์ของ $\int vdu$ จะต้องง่ายต่อการหา

**ตัวอย่าง 6.7.** จงหาปริพันธ์ของ $\int xe^x dx$

**ตัวอย่าง 6.8.** จงหาปริพันธ์ของ $\int x \sin x dx$

**ตัวอย่าง 6.9.** จงหาปริพันธ์ของ $\int e^x \sin 2x dx$

**ตัวอย่าง 6.10.** จงหาปริพันธ์ของ $\int \ln x dx$

**ตัวอย่าง 6.11.** จงหาปริพันธ์ของ $\int x\sqrt{x+1} dx$

## 6.3 การหาปริพันธ์โดยเศษส่วนย่อย (Integration by Partial Fractions)

เราจะศึกษาวิธีการหาปริพันธ์ของ rational ฟังก์ชัน หรือฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของ

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

โดยที่ $P(x), Q(x)$ คือพหุนามใดๆ ซึ่งจะเรียกวิธีต่อไปนี้ว่า partial fractions หลักการอยู่ที่การแยกเศษส่วน $R(x)$ ให้อยู่ในรูปของผลรวมต่อไปนี้

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + F_1(x) + F_2(x) + ... + F_m(x) \tag{6.5}$$

โดยที่ $p(x)$ คือ พหุนามที่ได้จากการหาร และ $F_k(x)$ จะเป็นเศษส่วนที่ง่ายต่อการหาปริพันธ์

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \frac{-1+x^2+x^3+x^4}{x+x^3} &= 1 + x - \frac{x+1}{x+x^3} \\ &= 1 + x - \frac{1}{x} + \frac{x-1}{1+x^2} \end{aligned} \tag{6.6}$$

หลังการแยกเศษส่วนเราสามารถที่จะหาปริพันธ์ได้ง่ายขึ้น

$$\begin{aligned}\int \frac{-1+x^2+x^3+x^4}{x+x^3}dx &= \int \left(1+x-\frac{1}{x}+\frac{x}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx \\ &= x+\frac{1}{2}x^2-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\tan^{-1}x+C\end{aligned} \tag{6.7}$$

ในการแยกเศษส่วน $R(x)$ ในสมการ (6.5) ผลลัพธ์ที่ได้จะมีเศษส่วน $F_k(x)$ เพิ่มขึ้นมา โดยเศษส่วน $F_k(x)$ นี้จะอยู่ในรูปของ

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \text{ หรือ } \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} \tag{6.8}$$

อย่างใดอย่างหนึ่ง (ซึ่งมีการพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์ขั้นสูง) และเราจะเรียกเศษส่วนนี้ว่า partial fraction หรือเศษส่วนย่อย ตัวอย่างในสมการ (6.6) เศษส่วนย่อย คือ $-\frac{1}{x}$ และ $\frac{x-1}{1+x^2}$

โดยทั่วไปเราสามารถจำแนก rational function ได้เป็น 2 ประเภท

1. proper rational function ซึ่งเป็นกรณีที่ดีกรีของ $P(x)$ น้อยกว่าดีกรีของ $Q(x)$
2. improper rational function ในกรณีนี้ดีกรีของ $P(x)$ มากกว่าหรือเท่ากับดีกรีของ $Q(x)$

ในสมการ (6.6) rational function นี้เป็นแบบ improper ดังนั้นเมื่อทำการตั้งหารยาวผลลัพท์ที่ได้จะเป็นผลบวกของพหุนาม $1+x$ และ proper rational function $-\frac{x+1}{x+x^3}$ ดังนั้นเราสามารถที่จะสมมติ ให้ rational function ของเราที่จะศึกษาต่อไปในบทนี้เป็น proper และเราจะหาวิธี ในการแยก proper rational function ให้อยู่ในรูปผลรวมของเศษส่วนย่อยให้ได้ โดยเราจะเริ่มต้นจากกรณีที่ตัวประกอบของตัวหารเป็น linear factors แล้วจึงพิจารณาในกรณีที่เป็น quadratic factors

**Linear Factors** สมมติให้ rational function $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ เป็น proper และถ้าทำการแยกตัวประกอบของ $Q(x)$ แล้วมีเทอม $ax+b$ ซ้ำกันทั้งหมด $n$ เทอม (นั่นคือ $(ax+b)^n$ เป็นตัวประกอบของ $Q(x)$) แล้วการแยก $R(x)$ เพื่อทำให้เป็นเศษส่วนย่อยจะต้องประกอบด้วย $n$ เทอมต่อไปนี้

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

โดยที่ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นค่าคงตัว

**ตัวอย่าง 6.12. Distinct Linear Factors** จงหา $\int \frac{1}{x(x+1)}dx$

**วิธีทำ** โดยการแยกหาเศษย่อย เราจะได้ว่า

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

**ตัวอย่าง 6.13. Repeated Linear Factors** จงหา $\int \frac{1}{x^2(x+1)}dx$

**วิธีทำ** โดยการแยกหาเศษย่อย เราจะได้ว่า

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

**ตัวอย่าง 6.14.** จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int \frac{x}{x^2+1} dx$
2. $\int \frac{x^2+1}{x} dx$
3. $\int \frac{1}{x(x+1)^2} dx$
4. $\int \frac{1}{x^2(x+1)^2} dx$

**วิธีทำ** เนื่องจาก

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

และ

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

**Quadratic Factors** ในกรณีที่ rational function $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ เป็น proper และ $(ax^2 + bx + c)^n$ เป็นตัวประกอบของ $Q(x)$ แล้วการแยก $R(x)$ เพื่อทำให้เป็นเศษส่วนย่อยจะต้องประกอบด้วย $n$ เทอมต่อไปนี้

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

## 6.4 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (Improper Integrals)

ในการนิยาม definite integral $\int_a^b f(x)dx$ เราจะสมมติให้ฟังก์ชัน $f(x)$ นี้นิยามบนช่วงปิด $[a,b]$ อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติเราอาจจะสนใจในกรณีต่อไปนี้

1. กรณีที่ช่วงที่ใช้ในการหาปริพันธ์นั้นไม่ใช่ช่วงปิด เช่น

$$[a,\infty), (-\infty,b] \text{ หรือ } (-\infty,\infty)$$

2. ตัว integrand $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุดใดจุดหนึ่งบนช่วงของการหาปริพันธ์

และเราจะเรียก integral ใน 2 กรณีนี้ว่า improper integral ในการหาปริพันธ์นี้เราจำเป็นที่จะต้องใช้เทคนิคพิเศษที่ช่วย โดยเราจะเริ่มต้นจากการพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 6.15.** พิจารณา $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$

**วิธีทำ** ค่าของปริพันธ์นี้ควรจะเป็นพื้นที่ที่อยู่ระหว่างกราฟ $y = 1/x^2$ แกน $x$ และเส้นตรง $x = 1$ ถ้าเราพิจารณาช่วงปิด $[1, t]$ เราจะสามารถหาค่าของ

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

ถ้าสมมติให้ $t \to \infty$ เราจะสามารถหาลิมิตของ $A(t)$ ได้ในกรณีซึ่งเท่ากับ 1 ดังนั้น เราจะนิยามให้พื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วย $y = 1/x^2$ สำหรับ $x \in [1, \infty)$ เท่ากับค่าของลิมิตดังกล่าว และ

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}(1 - \frac{1}{t}) = 1$$

โดยที่ลิมิตนี้หาค่าได้

จากตัวอย่างข้างต้น ทำให้เราสามารถสร้างนิยามได้ดังต่อไปนี้

**นิยาม 6.1.** (Infinite Limits of Integration)

1. ถ้า $\int_a^t f(x)dx$ หาค่าได้สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $t \geq a$ แล้ว

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้

2. ถ้า $\int_t^b f(x)dx$ หาค่าได้สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $t \leq b$ แล้ว

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้

ถ้าลิมิตในข้อ 1 และ 2 หาค่าได้ เราจะเรียก improper integral นี้ว่า convergent แต่ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ว่า divergent เราจะเรียก integral นี้ว่า divergent

3. ถ้า improper integrals $\int_a^\infty f(x)dx$ และ $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ convergent แล้ว

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$$

**ตัวอย่าง 6.16.** จงหา $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

**วิธีทำ** โดยการใช้ integration by part เราสามารถแสดงว่า

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} xe^x dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^x dx \\ &= \lim_{t\to-\infty}(-te^t - 1 + e^t) = -1\end{aligned} \tag{6.9}$$

สำหรับกรณีที่ตัว integrand $f(x)$ ไม่ต่อเนื่อง อาจจะไม่ต่อเนื่องที่จุด $c$ โดยที่ $c$ อาจจะเป็นจุดภายในช่วงปิด $[a,b]$ หรืออาจจะเป็นที่ขอบของช่วงปิดก็ได้ ในกรณีเราสามารถหาค่าของ improper integral ได้ดังต่อไปนี้

**นิยาม 6.2.** (Infinite Integrands)

1. ถ้า $f$ ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b)$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่จุด $b$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้

2. ถ้า $f$ ต่อเนื่องบนช่วง $(a,b]$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่จุด $a$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้

ถ้าลิมิตในข้อ 1 และ 2 หาค่าได้ เราจะเรียก improper integral นี้ว่า convergent แต่ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ว่า divergent เราจะเรียก integral นี้ว่า divergent

3. ถ้า $f$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $c$ โดยที่ $a < c < b$ และ $\int_a^c f(x)dx$ และ $\int_c^b f(x)dx$ convergent แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

**ตัวอย่าง 6.17.** จงหา $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$

**วิธีทำ** เราสามารถใช้นิยาม 6.2 ในการหาค่าปริพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx &= \lim_{t\to 1^+}\int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx \\ &= \lim_{t\to 1^+} 2\sqrt{x-1}|_t^5 \\ &= \lim_{t\to 1^+}(4-2\sqrt{t-1}) = 4\end{aligned} \tag{6.10}$$

ดังนั้น improper integral นี้จะ converge เข้าสู่ค่า 4

**ตัวอย่าง 6.18.** จงหา $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx$

**วิธีทำ** เนื่องจาก $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด 0 ดังนั้นเราสามารถใช้นิยาม 6.2 ในการหาค่าปริพันธ์ดังกล่าว

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx &= \lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^t \frac{1}{x^2}dx + \lim_{s\to 0^+}\int_s^1 \frac{1}{x^2}dx \\ &= \lim_{t\to 0^-}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^t + \lim_{s\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_s^1 \\ &= \lim_{t\to 0^-}(-\frac{1}{t}-1) + \lim_{s\to 0^+}(-1+\frac{1}{s})\end{aligned} \tag{6.11}$$

แต่เนื่องจากลิมิตในบรรทัดสุดท้ายนี้หาค่าไม่ได้ เราจึงสรุปว่า $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx$ เป็น divergent

หมายเหตุถ้าเราไม่ใช่วิธีเบื้องต้น โดยเลือกที่จะคำนวณโดยตรงโดยไม่สนใจจุดที่ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง เราจะได้ว่า

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = -1+-1 = -2$$

ซึ่งไม่ใช่ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง (เพราะว่ากราฟ $y = \frac{1}{x^2}$ อยู่เหนือแกน $x$ ดังนั้น $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx$ จะต้องมีค่าที่เป็นบวก)

## 6.5 แบบฝึกหัด (Improper Integrals)

จงหา improper integrals ต่อไปนี้

1. $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$ divergent
2. $\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)^{3/2}}dx = \sqrt{2}$
3. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(2x+1)^2}dx = \frac{1}{2}$

4. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx = 0$
5. $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = 1$
6. $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = 2$
7. $\int_{0}^{1} \frac{x}{x^2-1} dx$ divergent
8. $\int_{0}^{1/2} \frac{x}{x^2-1} dx = -\frac{1}{2} \ln(\frac{4}{3})$

# Chapter 7

# เฉลยของแบบฝึกหัด

1. จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้ ถ้าอนุพันธ์ดังกล่าวหาค่าได้ ในกรณีที่หาค่าไม่ได้ ให้ระบุว่าหาค่าไม่ได้

    1. $f'(x)$ เมื่อ $f(x) = g(x)h(x)k(x)$
    2. $f^{(n)}(0)$ เมื่อ $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} x^i$ โดยที่ $k$ และ $n$ เป็นจำนวนนับ
    3. $\dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{1-t}$ และ $\dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{1}{1-t}$
    4. $\dfrac{d}{dt}\dfrac{f(t)}{t}$ เมื่อ $f$ เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\dfrac{d}{dt}f(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ สำหรับทุกๆ $t \neq 0$
    5. $f'(-1),\ f'(-\frac{2}{3}),\ f'(0),\ f'(1)$ เมื่อ $f(x) = x\sqrt{1+x}$
    6. $\dfrac{d}{dx}\left.\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right|_{x=0}$
    7. $\dfrac{dy}{dx}$ , $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0.25}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ เมื่อ $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$
    8. $\dfrac{d}{dx}\left(x^2\sqrt{1+x}\right)$
    9. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ เมื่อ $y = (1+x^2)\sqrt{1-2x}$ ( หาอนุพันธ์ของ $\sqrt{1-2x}$ และ $1/\sqrt{1-2x}$ ก่อน)
    10. $\dfrac{d^{10}y}{dx^{10}}$ เมื่อ $y = \left(x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1\right)\left(x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2\right)$

### 7.0.1 Solution:

1. Given the function $f(x) = g(x)h(x)k(x)$, we apply the product rule for differentiation.

The product rule for three functions $g(x), h(x), k(x)$ is:

$$f'(x) = g'(x)h(x)k(x) + g(x)h'(x)k(x) + g(x)h(x)k'(x)$$

Therefore, the derivative of $f(x) = g(x)h(x)k(x)$ is:

$$f'(x) = g'(x)h(x)k(x) + g(x)h'(x)k(x) + g(x)h(x)k'(x)$$

2. Given $f(x) = \sum_{i=1}^{k} x^i = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k$, we aim to find $f^{(n)}(0)$.

The general form of the function is a sum of powers of $x$. The derivative of each term $x^i$ is:

$$\frac{d}{dx}x^i = ix^{i-1}$$

Now, for the $n$-th derivative $f^{(n)}(x)$:

- If $n \leq k$, $f^{(n)}(x)$ will be non-zero.
- If $n > k$, all terms become zero because derivatives of powers of $x$ vanish after the $k$-th derivative.

Evaluating at $x = 0$:

- If $n > 1$, $f^{(n)}(0) = 0$ for all terms except the $n$-th power, where $i = n$, leading to:

$$f^{(n)}(0) = n! \text{ (if } n \leq k\text{)}$$

$$f^{(n)}(0) = 0 \text{ (if } n > k\text{)}$$

3. The solution is given as follows:

- First derivative $\frac{d}{dt}\frac{1}{1-t}$

Let $f(t) = \frac{1}{1-t}$.

We use the chain rule for differentiation:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{1-t} = \frac{d}{dt}(1-t)^{-1}$$

Using the power rule:

$$= -1(1-t)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-t)^2}$$

- Second derivative $\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{1-t}$

To find the second derivative, differentiate $\frac{1}{(1-t)^2}$ again:

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{1-t} = \frac{d}{dt}\frac{1}{(1-t)^2}$$

Using the chain rule:

$$= 2(1-t)^{-3} \cdot (-1) = \frac{2}{(1-t)^3}$$

4. We are asked to find $\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{t}\right)$, where it is given that $\frac{d}{dt}f(t) = \frac{f(t)}{t}$ for all $t \neq 0$.

We use the quotient rule for differentiation:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \frac{t \cdot \frac{d}{dt}f(t) - f(t) \cdot \frac{d}{dt}t}{t^2}$$

Now, substitute $\frac{d}{dt}f(t) = \frac{f(t)}{t}$:

$$= \frac{t \cdot \frac{f(t)}{t} - f(t) \cdot 1}{t^2}$$

Simplify the expression:

$$= \frac{f(t) - f(t)}{t^2} = 0$$

Therefore,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = 0 \quad \text{for all } t \neq 0$$

5. Given $f(x) = x\sqrt{1+x}$, we want to find the derivatives at specific points $f'(-1)$, $f'(-\frac{2}{3})$, $f'(0)$, and $f'(1)$.

**Step 1: Find the derivative of $f(x)$**

We use the product rule for $f(x) = x \cdot \sqrt{1+x}$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x) \cdot \sqrt{1+x} + x \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x}\right)$$

The derivative of $\sqrt{1+x}$ is $\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, so:

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{1+x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+x} + \frac{x}{2\sqrt{1+x}}$$

**Step 2: Evaluate at specific points**

- **At** $x = -1$:

$$f'(-1) = \sqrt{1+(-1)} + \frac{-1}{2\sqrt{1+(-1)}} = \sqrt{0} + \frac{-1}{2\sqrt{0}} (\text{ undefined term due to division by 0})$$

- **At** $x = -\frac{2}{3}$:

$$f'\left(-\frac{2}{3}\right) = \sqrt{1-\frac{2}{3}} + \frac{-\frac{2}{3}}{2\sqrt{1-\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{-\frac{2}{3}}{2\sqrt{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{-\frac{2}{3}}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{2\sqrt{3}} = 0$$

- **At** $x = 0$:

$$f'(0) = \sqrt{1+0} + \frac{0}{2\sqrt{1+0}} = \sqrt{1} + 0 = 1$$

- **At** $x = 1$:

$$f'(1) = \sqrt{1+1} + \frac{1}{2\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

**Step 3: Final Results**:

$$f'(-1) = \text{undefined}, \quad f'\left(-\frac{2}{3}\right) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f'(1) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

6. We are asked to find the derivative of $\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$ at $x=0$.

**Step 1: Differentiate $f(x)$:**

Let $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$. To differentiate, we use the quotient rule:

$$f'(x)=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\cdot 1-x\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}$$

This can be simplified to:

$$f'(x)=\frac{x\sqrt{1-x}+x\sqrt{x+1}+2\sqrt{1-x}-2\sqrt{x+1}}{4\left(x^2+\sqrt{1-x}\sqrt{x+1}-1\right)}$$

We want to find $f'(0)$ using the expression:

$$f'(x)=\frac{x\sqrt{1-x}+x\sqrt{x+1}+2\sqrt{1-x}-2\sqrt{x+1}}{4\left(x^2+\sqrt{1-x}\sqrt{x+1}-1\right)}$$

**Step 2: Evaluate the Limit at $x=0$**

- **Evaluate the numerator**:
  - At $x=0$:

    $$0\cdot\sqrt{1-0}+0\cdot\sqrt{0+1}+2\sqrt{1-0}-2\sqrt{0+1}=0+0+2-2=0$$

  - The numerator equals $0$.
- **Evaluate the denominator**:
  - At $x=0$:

    $$4\left(0^2+\sqrt{1-0}\sqrt{0+1}-1\right)=4(0+1-1)=0$$

  - The denominator also equals $0$.

  Since the limit is of the indeterminate form $\frac{0}{0}$, we apply **L'Hospital's Rule**.

**Step 3: Differentiate the Numerator and Denominator**

- **Differentiate the numerator**: The derivative of the numerator, using the product and chain rules:

  $$\text{Numerator}'=\left(x\sqrt{1-x}\right)'+\left(x\sqrt{x+1}\right)'+\left(2\sqrt{1-x}\right)'-\left(2\sqrt{x+1}\right)'$$

  Simplifying:

$$\text{Numerator}' = \sqrt{1-x} - \frac{x}{2\sqrt{1-x}} + \sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

The simplified form of the derivative is:

$$\text{Numerator}' = \frac{3x}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right).$$

- **Differentiate the denominator**: The derivative of the denominator is:

  $$\text{Denominator}' = 4\left(2x + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)$$

  Simplifying:

  $$\text{Denominator}' = 8x$$

We substitute $x = 0$ into the simplified expressions:

- **Numerator at $x = 0$**:

  $$\text{Numerator}'(0) = \frac{3 \cdot 0}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{0+1}} - \frac{1}{\sqrt{1-0}}\right) = 0.$$

- **Denominator at $x = 0$**:

  $$\text{Denominator}'(0) = 8 \cdot 0 = 0.$$

Since we again encounter the indeterminate form $\frac{0}{0}$, we need to apply **L'Hospital's Rule** a second time.

**Step 4: Differentiate Again**

- **Second Derivative of the Numerator**:

  We differentiate the numerator:

  $$\text{Numerator}'' = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) + \frac{3x}{2}\left(-\frac{1}{2(1+x)^{3/2}} - \frac{1}{2(1-x)^{3/2}}\right).$$

- **Second Derivative of the Denominator**:

  The second derivative of the denominator is:

  $$\text{Denominator}'' = 8.$$

**Step 5: Evaluate the Limit Again**

Now, the limit becomes:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\text{Numerator}''(x)}{\text{Denominator}''(x)}.$$

Evaluating the second derivative of the numerator at $x = 0$:

- **Numerator at $x = 0$:**

$$\text{Numerator}''(0) = \frac{3}{2}(1-1) + \frac{3 \cdot 0}{2}\left(-\frac{1}{2(1)^{3/2}} - \frac{1}{2(1)^{3/2}}\right) = 0.$$

- **Denominator at $x = 0$:**

$$\text{Denominator}''(0) = 8.$$

Since this results in a $\frac{0}{8}$ form, we can directly conclude:

$$f'(0) = \frac{0}{8} = 0.$$

Thus, the value of $f'(0)$ is:

$$f'(0) = 0.$$

**Step 6: Final Evaluation**

With the second derivative of the numerator evaluated to zero, we can conclude:

$$f'(0) = \frac{0}{8} = 0.$$

Thus, the value of $f'(0)$ is:

$$f'(0) = 0.$$

**Step 7: Conclusion**

By applying L'Hospital's Rule twice and differentiating the numerator and denominator, we confirm that $f'(0) = 0$.

7. We need to compute the derivative $\frac{dy}{dx}$ for the function

$$y = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$$

and evaluate it at the points $x = 0$, $x = 0.25$, and $x = 1$.

**Step 1: Differentiate $y$:**

We will use the quotient rule for differentiation, which states:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

where $u = 1 - \sqrt{x}$ and $v = \sqrt{1-x}$.

- Find $u'$:
$$u' = \frac{d}{dx}(1-\sqrt{x}) = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
- Find $v'$:
$$v' = \frac{d}{dx}(\sqrt{1-x}) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

Using the quotient rule:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\sqrt{1-x} - (1-\sqrt{x})\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)}{1-x}$$

This simplifies to:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x}} + \frac{(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{1-x}}}{1-x}$$

**Step 2: Evaluate $\frac{dy}{dx}$ at specified points:**

- **At $x = 0$:**

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \text{undefined} \quad (\text{since } \sqrt{0} \text{ in denominator})$$

- **At $x = 0.25$:**

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0.25} = \text{Calculate using the derived expression.}$$

Plugging $x = 0.25$ into the expression:

$$= \frac{-\frac{\sqrt{1-0.25}}{2\sqrt{0.25}} + \frac{(1-\sqrt{0.25})}{2\sqrt{1-0.25}}}{1-0.25}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{0.75}}{2\cdot 0.5} + \frac{(1-0.5)}{2\sqrt{0.75}}}{0.75}$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{0.75}}{1} + \frac{0.5}{2\sqrt{0.75}}}{0.75}$$

$$= \frac{-\sqrt{0.75} + \frac{0.25}{\sqrt{0.75}}}{0.75}$$

- **At** $x = 1$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \text{undefined} \quad (\text{since } \sqrt{1-1} \text{ in denominator})$$

**Step 3: Conclusion**

The derivatives evaluated at the points are: - $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ : undefined - $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0.25}$ : evaluate using the derived expression - $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ : undefined

8. Differentiate the function

$$y = x^2\sqrt{1+x}$$

Using the product rule:

- Let $u = x^2$ and $v = \sqrt{1+x}$.
  - $u' = 2x$
  - $v' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

- Apply the product rule:

$$\frac{dy}{dx} = u'v + uv' = (2x)\sqrt{1+x} + x^2\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)$$

- Combine over a common denominator:

$$= \frac{2x(1+x) + \frac{x^2}{2}}{\sqrt{1+x}} = \frac{2x + \frac{5x^2}{2}}{\sqrt{1+x}}$$

**Conclusion**

The derivative is

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + \frac{5x^2}{2}}{\sqrt{1+x}}$$

9. We need to find the second derivative

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

for the function

$$y = (1+x^2)\sqrt{1-2x}$$

**Solution**

- **Differentiate** $\sqrt{1-2x}$:

  Using the chain rule:

$$v = \sqrt{1-2x} \implies v' = \frac{1}{2\sqrt{1-2x}} \cdot (-2) = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$$

- **Differentiate** $\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$:

  Using the quotient rule:

$$w = (1-2x)^{-1/2} \implies w' = -\frac{1}{2}(1-2x)^{-3/2} \cdot (-2) = \frac{1}{(1-2x)^{3/2}}$$

- **Differentiate** $y$ using the product rule:

  Let $u = 1 + x^2$ and $v = \sqrt{1-2x}$.

- $u' = 2x$
- $v' = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$

Applying the product rule:

$$\frac{dy}{dx} = u'v + uv' = (2x)\sqrt{1-2x} + (1+x^2)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\right)$$

Simplifying:

$$= 2x\sqrt{1-2x} - \frac{1+x^2}{\sqrt{1-2x}} = \frac{2x(1-2x)-(1+x^2)}{\sqrt{1-2x}}$$

Further simplifying:

$$= \frac{2x-4x^2-1-x^2}{\sqrt{1-2x}} = \frac{-5x^2+2x-1}{\sqrt{1-2x}}$$

- **Differentiate $\frac{dy}{dx}$ to find $\frac{d^2y}{dx^2}$:**
  Let $p = -5x^2 + 2x - 1$ and $q = \sqrt{1-2x}$.
  Using the quotient rule:
  $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p'q - pq'}{q^2}$$
  - Find $p'$:
  $$p' = -10x + 2$$
  - Find $q'$ (already computed):
  $$q' = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$$

  Now substituting:

  $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-10x+2)\sqrt{1-2x} - (-5x^2+2x-1)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\right)}{1-2x}$$

  Simplifying:
  $$= \frac{(-10x+2)(1-2x) + (5x^2-2x+1)}{(1-2x)^{3/2}}$$

- **Conclusion**

Thus, the second derivative is

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-10x+2)(1-2x) + (5x^2-2x+1)}{(1-2x)^{3/2}}$$

10. We need to find the tenth derivative

$$\frac{d^{10}y}{dx^{10}}$$

for the function

$$y = (x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)(x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2).$$

**Solution**

- **Identify the degree of $y$**:

  Each polynomial is of degree 5. The product of two degree 5 polynomials results in a polynomial of degree

  $$5 + 5 = 10.$$

- **Differentiate $y$**:

  Since $y$ is a polynomial of degree 10, the tenth derivative will be a constant if the leading term is not zero. The leading term of $y$ is obtained by multiplying the leading terms of the two polynomials:

  $$(x^5)(x^5) = x^{10}.$$

- **Compute the tenth derivative**:

  The $n$-th derivative of $x^n$ is given by:

  $$\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!.$$

  Therefore,

  $$\frac{d^{10}}{dx^{10}}(x^{10}) = 10!.$$

- **Conclusion**

The tenth derivative is

$$\frac{d^{10}y}{dx^{10}} = 10!.$$

Thus,

$$\frac{d^{10}y}{dx^{10}} = 3628800.$$