

SCMA104 Systems of Ordinary Differential  
Equations and Applications in Medical Science

Pairote Satiracoo

2024-08-24



# Contents

<b>1</b>	<b>หลักการและความสำคัญของแคลคูลัสและระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>ลิมิต (Limits)</b>	<b>15</b>
2.1	ความต่อเนื่อง (Continuity) . . . . .	23
<b>3</b>	<b>อนุพันธ์ (Derivatives)</b>	<b>29</b>
3.1	อนุพันธ์ (Derivatives) . . . . .	29
3.2	การคำนวณหาอนุพันธ์ . . . . .	31
3.3	สูตรสำหรับหาอนุพันธ์ . . . . .	32
3.4	อนุพันธ์อันดับสูง (High Order Derivatives) . . . . .	34
3.5	การตีความอนุพันธ์ (Interpretation of Derivatives) . . . . .	35
3.6	กฎลูกโซ่ (The Chain Rule) . . . . .	38
3.7	อนุพันธ์ของฟังก์ชันอินเวอร์ส (Derivatives of Inverse Functions) . . . . .	42
3.8	Differentials, Implicit Differentiation and Related Rates . . . . .	43
3.9	อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ . . . . .	54
<b>4</b>	<b>การประยุกต์ของอนุพันธ์ (Applications of Differentiation)</b>	<b>61</b>
4.1	Applications of derivatives related to students discipline . . . . .	61
4.2	Sketching the graph of a function from the derivative . . . . .	64
4.3	การประยุกต์ของ Monotonicity และ Concavity . . . . .	72
4.4	การหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization) . . . . .	74



## Chapter 1

# หลักการและความสำคัญของแคลคูลัส และระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

แคลคูลัสมีส่วนประกอบหลักที่สำคัญอยู่ 2 องค์ประกอบ คือ

1. การหาอนุพันธ์ (differentiation) และ
2. การหาปริพันธ์ (Integration)

การประยุกต์เรื่อง การหาอนุพันธ์ ในการแก้ปัญหาเบื้องต้นที่สำคัญในทางชีววิทยา หรือทางการแพทย์ ประกอบด้วย การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณของตัวแปรที่เราสนใจ และการใช้แคลคูลัสในการแก้ปัญหาการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของปัญหาหรือฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เราสนใจ

ตัวอย่างการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่สนใจ เช่น ขนาดของประชากร จำนวนของผู้ติดเชื้อจากโรคทางเดินหายใจ ระดับน้ำตาลในกระแสเลือด ปริมาณของยาที่มีอยู่ในกระแสเลือดหรือส่วนหนึ่งของร่างกาย โดยที่การเปลี่ยนแปลงดังกล่าวสามารถเปรียบเทียบได้กับเวลา ดังต่อไปนี้

- ประชากรในประเทศไทยปี พ.ศ. 2566 มีจำนวน 66.05 ล้านคน (ข้อมูลอ้างอิงจาก สำนักงานคณะกรรมการส่งเสริมการลงทุน)
- ข้อมูลจำนวนผู้รักษาตัวในโรงพยาบาลจากศูนย์ข้อมูล COVID-19 ระหว่างวันที่ 28 กรกฎาคม ถึงวันที่ 3 สิงหาคม พ.ศ. 2567 (ข้อมูลอ้างอิงจาก ศูนย์ข้อมูล Covid-19)
- การเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำตาลในเลือดระหว่างมื้ออาหารสามมื้อในหนึ่งวัน (รูปภาพอ้างอิงจาก Wikipedia: Blood Sugar Level)



Figure 1.1: ข้อมูลจำนวนผู้รักษาตัวในโรงพยาบาลจากศูนย์ข้อมูล COVID-19

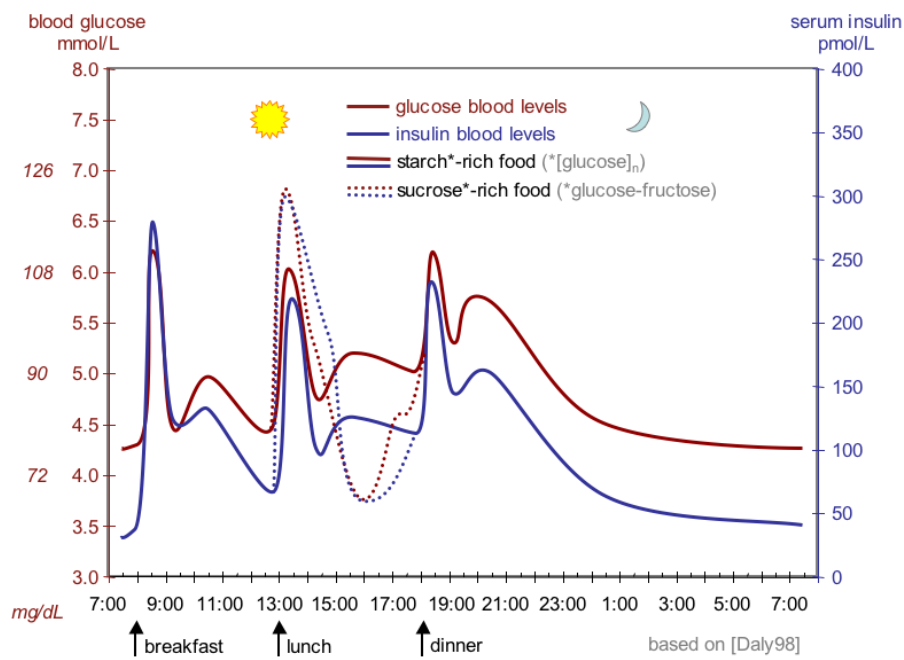


Figure 1.2: ความผันผวนของระดับน้ำตาลในเลือด (สีแดง) และฮอร์โมนอินซูลิน (สีน้ำเงิน) ในมนุษย์ ระหว่างมื้ออาหารสามมื้อ

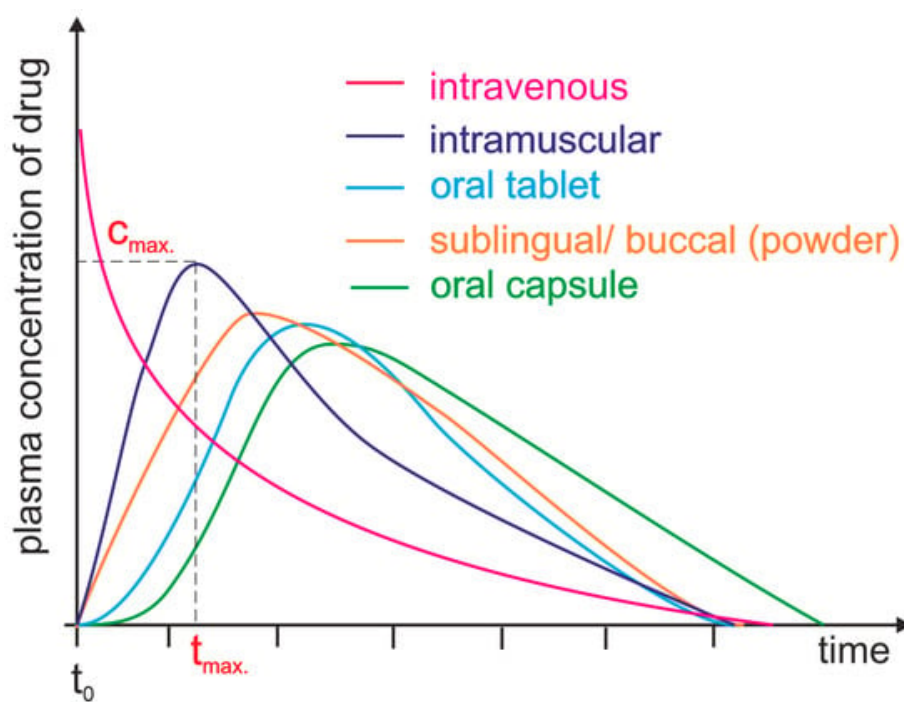


Figure 1.3: ความเข้มข้นของยาในกระแสเลือดที่เวลาต่างๆ



Table 1.1: จำนวนของแบคทีเรียที่เวลา  $t$  ใดๆ

เวลา (10 นาที)	0	1	2	3	4	5	6
จำนวนแบคทีเรีย	1	2	4	8	16	32	64

- การเปลี่ยนแปลงของปริมาณยาในกระแสเลือดที่เวลาต่างๆ สำหรับการให้ยาโดยวิธีต่างๆ (รูปภาพอ้างอิงจาก บทความทางวิชาการในฐานข้อมูล MDPI)

ในการทำความเข้าใจการเปลี่ยนแปลงของปริมาณข้างต้นเทียบกับเวลา เราสามารถประยุกต์ใช้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อมาใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงของปริมาณต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

**การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์** เป็นกระบวนการอธิบายปัญหาหรือ ปรากฏการณ์ต่างๆ ที่เกิดขึ้นในธรรมชาติ โดยปกติแล้วจะอยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้จะช่วยให้อธิบายสิ่งต่างๆ ที่เกิดขึ้นในปัญหาหรือปรากฏที่สนใจ

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงถึงแนวคิดในการประยุกต์ของแคลคูลัสที่เกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของ

**ตัวอย่าง 1.1.** ในการทดลองหนึ่ง นักวิจัยต้องการศึกษาการขยายพันธุ์ของแบคทีเรียที่มีการการแบ่งตัวที่เรียกว่า binary fission (การแบ่งตัวแบบทวิภาค) ซึ่งแบคทีเรียจะมีการแบ่งจากหนึ่งเป็นสองเซลล์เท่าๆ กัน และได้ผลการทดลองดังต่อไปนี้

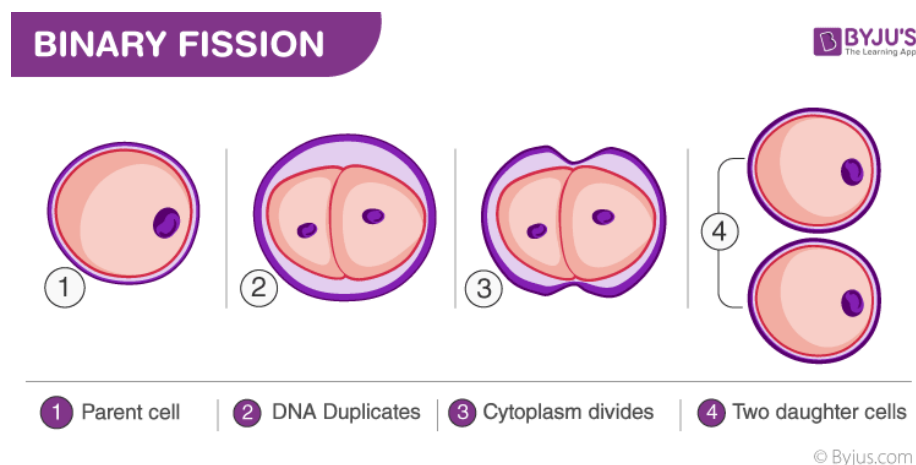


Figure 1.4: กระบวนการแบ่งตัวแบบทวิภาคของแบคทีเรีย

(รูปอ้างอิงจาก BYJU'S Learning Website )

ตาราง 1.1 และรูปที่ 1.5 แสดงการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียที่เวลาใดๆ ในตัวอย่างนี้ การเปลี่ยนแปลงของจำนวนของแบคทีเรียที่เวลา  $t$  สามารถเขียนในรูปฟังก์ชัน  $N(t)$  ถ้าให้  $N_0$  แทนจำนวน

ของแบคทีเรียตอนเริ่มการทดลอง แล้วแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการเพิ่มของจำนวนแบคทีเรียจะสามารถเขียนในรูปของสมการ

$$N(t) = N_0 \cdot 2^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้การเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียที่เวลา  $t$  ใดๆ เพิ่มขึ้นในลักษณะที่เรียกว่า เอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Population Growth)

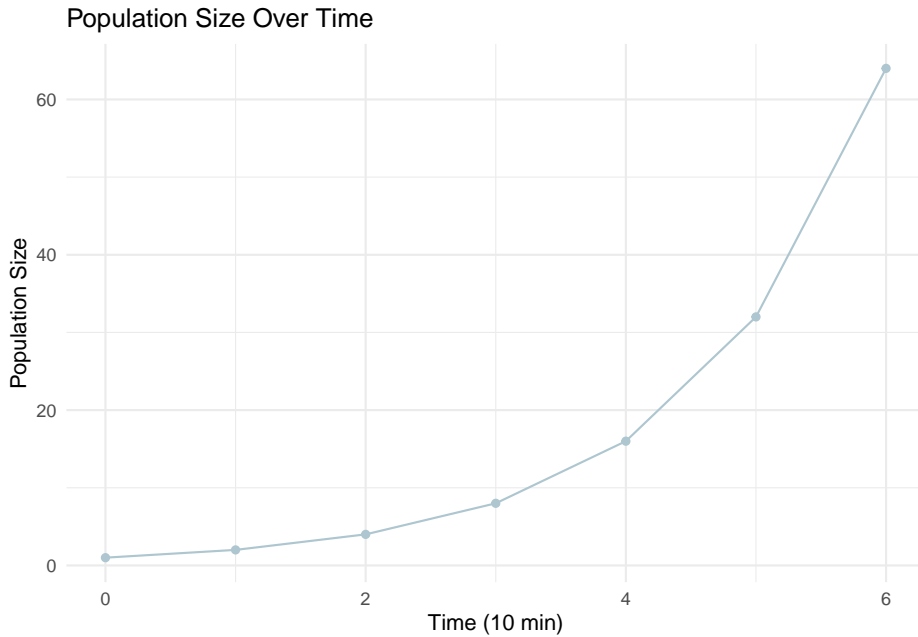


Figure 1.5: Population Size Over Time

**ตัวอย่าง 1.2.** ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ในตัวอย่างของการขยายพันธุ์แบคทีเรีย หรือในปัญหาอื่นๆ แทนที่เราจะพยายามหาความสัมพันธ์ หรือฟังก์ชัน  $N(t)$  ในรูปของเวลา  $t$  โดยตรง ถ้าเราทราบกระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร  $N(t)$  นั้น เราสามารถนำมาใช้ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ได้ดังต่อไปนี้ กระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรีย (การเพิ่มหรือลดลงของแบคทีเรีย) ที่เกิดขึ้นในระหว่างเวลา  $t$  และเวลา  $t + h$  เกิดจากจำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้น (เกิดขึ้นมาใหม่) ในช่วงเวลาดังกล่าว และลดลงจากจำนวนแบคทีเรียที่ลดลง (ตายไป) ในช่วงเวลาดังกล่าวเช่นกัน ซึ่งเราสามารถเขียนในรูปของสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} N(t+h) &= N(t) \\ &+ \text{จำนวนแบคทีเรียที่เกิดขึ้นใหม่ระหว่าง } t \text{ และ } t+h \\ &- \text{จำนวนแบคทีเรียที่ตายไประหว่าง } t \text{ และ } t+h \end{aligned} \quad (1.2)$$

ในที่นี้ “การเกิด” เราหมายถึงการเพิ่มจำนวนของแบคทีเรียจากหนึ่งเป็นสอง และเราจะกำหนดให้  $h$  เป็นช่วงเวลาสั้นๆ (ซึ่งเราสามารถใช้ความรู้แคลคูลัสในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation)) ในสมการ (1.2) ถ้าเราสมมติว่า การเพิ่มของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่ในขณะนั้น หรือเขียนในรูปของสมการได้ดังนี้

$$\text{จำนวนแบคทีเรียที่เกิดใหม่ระหว่าง } t \text{ และ } t + h \approx b \cdot N \cdot h$$

$$\text{จำนวนแบคทีเรียที่ตายไประหว่าง } t \text{ และ } t + h \approx m \cdot N \cdot h$$

โดยที่ค่าคงตัว  $b$  และ  $m$  ในสมการข้างต้น คือ อัตราการเกิด (birth rate) และอัตราการตาย (mortality rate)

เมื่อแทนจำนวนแบคทีเรียที่เกิดใหม่ และตายไประหว่างช่วงเวลาที่กำหนดลงในสมการ (1.2) จะได้สมการ

$$N(t + h) - N(t) = b \cdot N(t) \cdot h - m \cdot N(t) \cdot h \quad (1.3)$$

เราสามารถจัดรูปสมการ (1.3) ได้ใหม่ในรูปของอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของจำนวนแบคทีเรียในช่วงเวลาดังกล่าว ดังนี้

$$\frac{N(t + h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \quad (1.4)$$

$$(1.5)$$

ดังนั้น ถ้าเราให้  $h$  เข้าใกล้ 0 ผ่านการหาลิมิต เราจะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง (instantaneous rate of change) และเขียนได้ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ ดังนี้

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(t + h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \quad (1.6)$$

$$(1.7)$$

ทั้งนี้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (1.7) เพื่อให้ได้คำตอบที่แสดงจำนวนแบคทีเรีย  $N(t)$  ในรูปของฟังก์ชันของ  $t$  เราจะต้องกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องกับจำนวนแบคทีเรีย  $N(t)$  ที่เวลา  $t$  หนึ่ง โดยทั่วไปเราจะกำหนดค่าเริ่มต้นของจำนวนแบคทีเรียที่  $t = 0$  ดังนั้น ถ้าเรากำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition)

$$N(0) = N_0 \quad (1.8)$$

เราสามารถหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นโดยวิธีการหาปริพันธ์ (Integration) ได้คำตอบของสมการดังนี้

$$N(t) = N_0 e^{(b-m)t} \quad (1.9)$$

**ตัวอย่าง 1.3.** ในการทดลองเลี้ยงยีสต์ในขวดทดลองที่มีอาหารเลี้ยงยีสต์ในปริมาณที่เหมาะสม ผู้ทำการทดลองสนใจที่จะประมาณค่าของยีสต์โดยอาศัยแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงของประชากรที่อธิบายด้วยสมการ (1.9) กำหนดให้

- ภายใต้สภาวะของการทดลองที่เหมาะสม ยีสต์จะแบ่งตัวทุกๆ 90 นาที
- ยีสต์มีครึ่งชีวิตเท่ากับ 1 สัปดาห์

จากข้อมูลดังกล่าว จงแสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบจากคำถามต่อไปนี้

1. จงประมาณค่าของอัตราการเกิด  $b$  (1/ชั่วโมง) และอัตราการตาย  $m$  (1/ชั่วโมง)
2. เขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้ค่า  $b$  และ  $m$  ที่ประมาณค่าได้ (สมการ (1.9))
3. ใช้เครื่องมือที่นักศึกษาถือใช้ในการวาดกราฟแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนยีสต์ที่เวลาต่างๆ
4. เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับรูปภาพแสดงการเปลี่ยนแปลงของยีสต์จากการทดลองในห้องปฏิบัติการตามรูปที่ 1.6 (รูปภาพอ้างอิงจาก <https://homework.study.com/>)

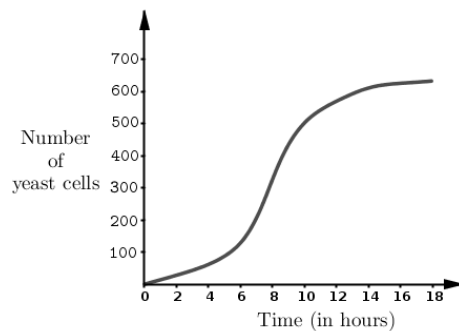


Figure 1.6: กราฟการเจริญเติบโตของเซลล์ยีสต์

**ตัวอย่าง 1.4.** จงใช้อินเทอร์เน็ตเพื่อค้นหาตัวอย่างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายโดยสมการเชิงอนุพันธ์หรือระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ข้อมูลที่ต้องการประกอบด้วย

1. ค้นหาเว็บไซต์ที่ให้ข้อมูลเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในปัญหาที่นักศึกษาสนใจ
2. จดบันทึก URL ของเว็บไซต์
3. เขียนสรุปสั้นๆ ว่าโมเดลนี้ใช้เพื่ออะไร

### วิธีทำ

ตัวอย่างของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากการสืบค้นข้อมูลอินเทอร์เน็ตจาก

- CALCULUS IN MEDICINE (<https://sites.northwestern.edu/recalculated/2019/05/05/calculus-in-medicine/>)
- เกสซ์ จลนศาสตร์ (Pharmacokinetics) และ เกสซ์ พลศาสตร์ (Pharmacodynamics) ([https://ns.mahidol.ac.th/english/th/departments/MN/th/doc/km54/เกสซ์จลนศาสตร์%20\(Pharmacokinetics\).pdf](https://ns.mahidol.ac.th/english/th/departments/MN/th/doc/km54/เกสซ์จลนศาสตร์%20(Pharmacokinetics).pdf))

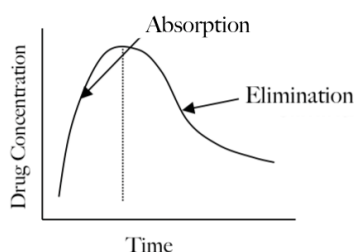
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จำลองการเปลี่ยนแปลงของความเข้มข้นของยา  $c$  ณ เวลา  $t$  โดยที่กำหนดขนาดยา (drug dosage) เท่ากับ  $d$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{k_a}{k_a - k_e} [k_a \cdot d \cdot b \cdot e^{-at} - k_e \cdot c \cdot v]$$

โดยที่

- $k_a$  คือ ค่าคงตัวของการดูดซึมยา
- $k_e$  คือ ค่าคงตัวของการกำจัดยา
- $v$  แทน ปริมาตรของยาในร่างกาย
- $b$  แทน สัดส่วนของปริมาณยาที่ถูกดูดซึมเข้าไปในร่างกายเทียบกับขนาดของยา

ตามหลักเภสัชจลนศาสตร์ เมื่อได้รับยาเข้าสู่ร่างกาย จะมีกระบวนการดูดซึมยา การกระจายตัวของยา การเปลี่ยนแปลงยา และการขจัดถ่ายยาออกจากร่างกาย



Created by N. Dzafic

Figure 1.7: การเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของยาในระหว่างการดูดซึม และการกำจัดออกจากร่างกาย

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะมีประโยชน์ที่สำคัญที่ทำให้ผู้เชี่ยวชาญด้านยาสามารถกำหนดขนาดของยาที่เหมาะสม อย่างต่อเนื่องเป็นระยะเวลาที่เพียงพอกับการรักษา เพื่อให้ได้ผลการรักษาที่ดีที่สุด

โดยสรุป แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์เป็นเครื่องมือสำคัญในการทำความเข้าใจว่าสิ่งต่างๆ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไรและ แคลคูลัสช่วยให้เราวิเคราะห์อัตราการเปลี่ยนแปลงและพื้นที่ใต้เส้นโค้ง ในขณะที่สมการ

เชิงอนุพันธ์ช่วยให้เราสร้างแบบจำลองระบบที่ซับซ้อนในสาขาต่างๆ เช่น ฟิสิกส์ วิศวกรรม เศรษฐศาสตร์ และชีววิทยา แนวคิดทางคณิตศาสตร์เหล่านี้มีความสำคัญต่อการแก้ปัญหาในโลกแห่งความเป็นจริง เมื่อโลกของเราก้าวหน้ามากขึ้น ความสำคัญของแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ก็จะเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง ซึ่งสนับสนุนความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

## Chapter 2

# ลิมิต (Limits)

อาจกล่าวได้ว่า วิชาแคลคูลัส ถือกำเนิดขึ้นมาจากความพยายามในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตบนระนาบ 2 ปัญหาหลักๆ คือ

- การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งที่กำหนดให้  
กำหนดฟังก์ชัน (function)  $f$  และกำหนดจุด  $P(x_0, y_0)$  บนกราฟ  $y = f(x)$  จงหาสมการของเส้นตรงที่สัมผัสกราฟ  $y = f(x)$  ที่จุด  $P$
- การหาพื้นที่ของบริเวณที่กำหนดให้  
กำหนด function  $f$  และช่วง  $[a, b]$  ในโดเมนของ  $f$  จงหาพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมด้วยแกน  $X$  และกราฟ  $y = f(x)$  สำหรับ  $x \in [a, b]$

แนวความคิดในการแก้ปัญหาทั้งสอง นำไปสู่การศึกษาเรื่อง ลิมิต (Limits) ซึ่งเป็นพื้นฐานของวิชาแคลคูลัสนั่นเอง

แต่ในปัจจุบันเราพบว่าวิชาแคลคูลัสมีประโยชน์ในการช่วยแก้ปัญหาในสาขาวิชาต่าง ๆ มากมาย เช่น เราจะพบในการศึกษาวิชานี้ว่า แคลคูลัสมีบทบาทในการแก้ปัญหาดังต่อไปนี้

- โดยทั่วไป ยาชนิดฉีดจะต้องใช้เวลาระยะหนึ่งหลังจากฉีดเข้าสู่ร่างกาย ในการที่จะไหลเวียนในกระแสโลหิต จนกระทั่งมีความเข้มข้นสูงสุด สมมติว่า ยาชนิดหนึ่งหลังจากฉีดเข้าสู่ร่างกายนาน  $t$  ชั่วโมง จะมีความเข้มข้นเป็น  $C(t) = 0.15(e^{-0.18t} - e^{-1.2t})$  มิลลิกรัมต่อมิลลิลิตร จงหาว่า นานเท่าใดหลังจากฉีดยา จึงจะมีความเข้มข้นของยา ในกระแสโลหิตสูงที่สุด
- เราอาจประมาณได้อย่างมีเหตุผลว่า artery มีรูปร่างที่เป็นผลมาจากการหมุนรอบแกน ของเส้นโค้งในระนาบ โดยในสถานะนิ่ง รัศมีของ artery มีค่าคงที่เท่ากับ 1 หน่วย (รูปทรงกระบอก) แต่ในขณะที่หัวใจสูบฉีดโลหิตผ่าน artery artery จะพองตัวออก ทำให้รัศมีเปลี่ยนไปตามสมการ  $R(x) = 1 + 0.4x - 0.04x^2$  หน่วย เมื่อ  $0 \leq x \leq 10$  เป็นตำแหน่งบนแนวยาวของ artery จงหาว่า ปริมาณโลหิตที่อยู่ใน artery ขณะที่หัวใจสูบฉีดโลหิตผ่านเข้ามาเป็นกี่เท่าของความจุโลหิตในสถานะนิ่ง

- ความก้าวหน้าในทางการแพทย์ และเทคโนโลยีปัจจุบัน ทำให้มีการประดิษฐ์อุปกรณ์ช่วยในการรักษาโรคเบาหวานขึ้นหนึ่งขึ้น อุปกรณ์นี้มีลักษณะเป็นแคปซูล ซึ่งเมื่อฝังอุปกรณ์นี้ภายในร่างกายแล้ว มันจะหลั่งสารอินซูลินที่บรรจุอยู่ภายใน ออกสู่กระแสโลหิต โดยมีอัตราการหลั่งเป็น  $f(t) = 0.5te^{-0.09t}$  ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวัน เมื่อ  $t$  คือ เวลาเป็นวัน นับจากอุปกรณ์เริ่มทำงาน จงหาว่า แพทย์จะต้องสั่งให้บรรจุอินซูลินในแคปซูลเป็นปริมาณเท่าใด เพื่อให้อุปกรณ์นี้สามารถให้อินซูลินแก่ผู้ป่วยได้นาน 3 เดือน
- การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง  $y = f(x)$  ณ จุด  $P_0(x_0, y_0)$

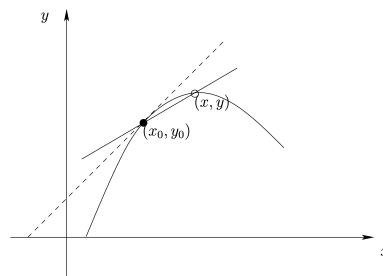


Figure 2.1: การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง

ขั้นตอนสรุปการหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง 2.1

1. เลือกจุดอื่นบนกราฟ เรียกจุดนี้ว่า  $P(x, y)$
  2. ลากเส้นผ่าน  $PP_0$
  3. ทำซ้ำโดยเลือกจุด  $P$  ให้ใกล้  $P_0$  มากขึ้น
  4. เส้น  $PP_0$  ที่ได้จะ “เข้าใกล้” เส้นสัมผัสมากขึ้นทุกที
- การหาพื้นที่ “ใต้กราฟ” ระหว่าง  $x = a$  กับ  $x = b$

ขั้นตอนเบื้องต้นสำหรับการหาพื้นที่ใต้กราฟ

1. แบ่ง  $[a, b]$  เป็นช่วงเล็กๆ
2. หาพื้นที่รวมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหมด
3. ทำซ้ำๆ โดยแบ่งช่วงให้เล็กมากขึ้น
4. พื้นที่ที่ได้จะ “เข้าใกล้” พื้นที่ที่ต้องการมากขึ้นทุกที

ตัวอย่าง 2.1. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟ  $y = -x^2 + 6x - 2$  ณ จุด  $P_0(2, 6)$



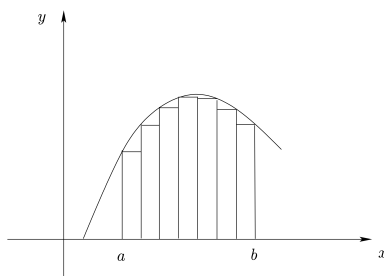
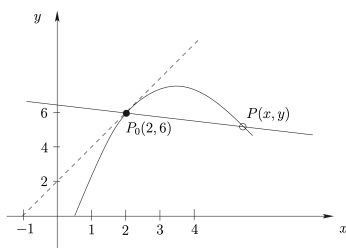


Figure 2.2: การหาพื้นที่ใต้กราฟ

**วิธีทำ** เลือกจุด  $P(x, y)$  โดยที่  $x \neq 2$  และลากเส้น  $PP_0$  จะได้ว่า ความชันของ  $PP_0$  เท่ากับ

$$\begin{aligned} \frac{y-6}{x-2} &= \frac{-x^2+6x-8}{x-2} \\ &= -\frac{(x-2)(x-4)}{x-2} \\ &= 4-x \end{aligned} \quad (2.1)$$

ถ้า  $P$  อยู่ใกล้  $P_0$  มากขึ้น ค่า  $x$  ย่อมเกือบเป็น 2 ดังนั้น ความชันของ  $PP_0$  จึงเข้าใกล้  $4-2=2$  มากขึ้นเรื่อย ๆ เส้นสัมผัสจึงควรมีความชันเป็น 2 และสมการเส้นสัมผัส คือ  $y-6=2(x-2)$

Figure 2.3: การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง  $y = -x^2 + 6x - 2$ 

จะเห็นว่า ในตัวอย่าง 2.1 นี้ เราสนใจพฤติกรรมของ function

$\frac{-x^2+6x-8}{x-2}$  เมื่อ  $x \neq 2$  แต่มีค่าใกล้ 2 มาก ๆ นั่นคือ ที่มาของเรื่อง

**นิยาม 2.1.** ให้  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  โดยที่  $D_f \subseteq \mathbb{R}$  และให้  $a \in \mathbb{R}$  โดยมีช่วง  $(a, b)$  บางช่วงที่  $(a, b) \subseteq D_f$  ( $b > a$ )

เรากล่าวว่า “ลิมิต (limit) ของ  $f(x)$  เมื่อ  $x$  เข้าใกล้  $a$  ทางขวา หาค่าได้และมีค่าเท่ากับจำนวนจริง  $L$ ” ถ้า “ไม่ว่าเราจะกำหนดบริเวณรอบ ๆ  $L$  ไว้แคบเพียงใด เมื่อเราพิจารณาค่าของ  $f(x)$  สำหรับค่า  $x$

ที่มากกว่า  $a$  โดยที่ให้ค่า ของ  $x$  ลดลงเรื่อย ๆ จนถึงจุดหนึ่ง ค่าของ  $f(x)$  จะอยู่ในบริเวณรอบ ๆ  $L$  ที่เรากำหนดไว้นั้น และยังคงเป็นเช่นนั้นสำหรับ  $x$  อื่น ๆ ที่น้อยกว่านั้น (แต่มากกว่า  $a$ ) ทั้งหมดด้วย”

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราพิจารณาพฤติกรรมของ function สำหรับ  $x$  ที่น้อยกว่า  $a$  จะได้ limit ทางซ้าย ดังนี้ ให้  $f : D_f \rightarrow R$  โดยที่  $D_f \subseteq R$  และให้  $a \in R$  โดยที่มีช่วง  $(b, a)$  บางช่วงที่  $(b, a) \subseteq D_f$  ( $b < a$ )

เรากล่าวว่า “limit ของ  $f(x)$  เมื่อ  $x$  เข้าใกล้  $a$  ทางซ้าย หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับจำนวนจริง  $L$ ” ถ้า “ไม่ว่าเราจะกำหนดบริเวณรอบ ๆ  $L$  ใดแคบเพียงใด

เมื่อเราพิจารณาค่าของ  $f(x)$  สำหรับค่า  $x$  ที่น้อยกว่า  $a$  โดยที่ให้ค่า ของ  $x$  เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนถึงจุดหนึ่ง ค่าของ  $f(x)$  จะอยู่ในบริเวณรอบ ๆ  $L$  ที่เรากำหนดไว้นั้น และยังคงเป็นเช่นนั้นสำหรับ  $x$  อื่น ๆ ที่มากกว่านั้น (แต่น้อยกว่า  $a$ ) ทั้งหมดด้วย”

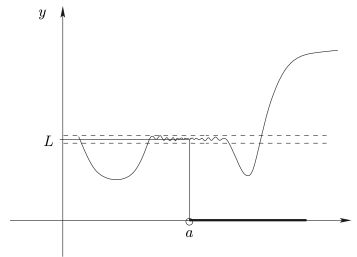


Figure 2.4: ลิมิตทางขวา

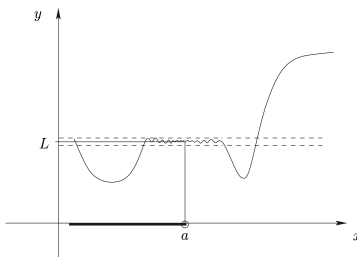


Figure 2.5: ลิมิตทางซ้าย

เราใช้สัญลักษณ์  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  แทนข้อความ “limit ของ  $f(x)$  เมื่อ  $x$  เข้าใกล้  $a$  ทางขวา” และใช้สัญลักษณ์  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  แทนข้อความ “limit ของ  $f(x)$  เมื่อ  $x$  เข้าใกล้  $a$  ทางซ้าย

**นิยาม 2.2.** ในกรณีที่ทั้ง  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  และ  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  หาค่าได้ และมีค่าเท่ากัน

เรากล่าวว่า  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับค่านี้

ตัวอย่าง 2.2. function  $f$  ที่  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  หาค่าไม่ได้ ดังนั้น

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  จึงหาค่าไม่ได้ด้วย

วิธีทำ จากรูปต่อไปนี้

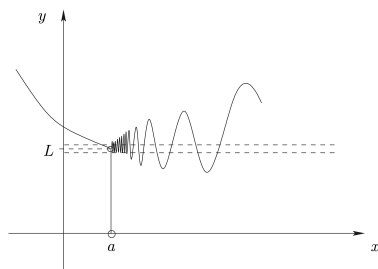


Figure 2.6: กราฟของฟังก์ชันที่หาขีดจำกัดไม่ได้

ในกรณีนี้ จะเห็นว่า ไม่ว่าจะเลือก  $L$  เป็นค่าใด ก็ไม่สามารถสรุปได้ว่า  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L$  เพราะ

ไม่ใช่ทุกครั้งที่เรากำหนดบริเวณรอบ ๆ  $L$  แล้ว function จะสอดคล้องตามนิยามเสมอไป จึงสรุปว่า  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  หาค่าไม่ได้ด้วย

ทฤษฎี 2.1.

1.  $\lim_{x \rightarrow c} c = c$  ถ้า  $c$  เป็นจำนวนจริง
2.  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

ทฤษฎี 2.2. ถ้า  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  และ  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  หาค่าได้แล้ว จะได้

1.  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$
4.  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  ถ้า  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

หมายเหตุ ทฤษฎีบททั้งสองนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย

ทฤษฎี 2.3. ถ้า  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  หาค่าได้ และ  $\sqrt[n]{f(x)}$  หาค่าได้ สำหรับทุก ๆ  $x$  ในช่วงเปิดบางช่วงที่มี  $a$  อยู่ด้วย แล้ว  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$

หมายเหตุ ทฤษฎีบทนี้เป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย โดยเปลี่ยนเงื่อนไข “ทุก ๆ  $x$ ” เป็น “ทุก ๆ  $x < a$ ” และ “ทุก ๆ  $x > a$ ” ตามลำดับ

ทฤษฎี 2.4. ถ้า  $f$  และ  $g$  เป็น function ซึ่ง  $f(x) = g(x)$  สำหรับทุก ๆ  $x$  ยกเว้นบาง  $x$  ซึ่งมีอยู่เพียงจำนวนจำกัด แล้ว  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  ถ้า limit อันใดอันหนึ่งหาค่าได้

หมายเหตุ ทฤษฎีบทนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย

ตัวอย่าง 2.3. จงหาค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 6x - 8}{x - 2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 6x - 8}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} -\frac{(x - 2)(x - 4)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} -(x - 4) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (4 - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} 4 - \lim_{x \rightarrow 2} x \\ &= 4 - 2 \\ &= 2 \end{aligned} \tag{2.2}$$

ตัวอย่าง 2.4. จงหาค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$  วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 1}{\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 1}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} x} + \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{2.3}$$

ตัวอย่าง 2.5. จงหา limits ต่อไปนี้

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$$

### วิธีทำ

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \frac{0-\sqrt{3}}{0-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$2. \text{เนื่องจาก function } \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} \text{ ไม่ใช่ function ที่หาค่าได้บนช่วงเปิด } (b, 0) \text{ ใด ๆ เลย ดังนั้น}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} \text{ จึงหาค่าไม่ได้}$$

$$3. \text{เนื่องจาก } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} \text{ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} \text{ จึงหาค่าไม่ได้}$$

**ข้อสังเกต** ในกรณีที่ function ที่มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีขอบเขต เมื่อตัวแปรต้นเข้าใกล้  $a$  (ทางซ้ายหรือขวา หรือทั้งสองทาง) บางตำรากล่าวว่า limit ของ function มีค่าเป็น  $+\infty$  และถ้า function มีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขต จะกล่าวว่า limit ของ function มีค่าเป็น  $-\infty$  ในวิชานี้เราจะถือตามนิยามที่ให้ไว้ ดังนั้นในกรณีข้างต้น จะกล่าวว่า limit ดังกล่าวหาค่าไม่ได้ (เว้นแต่จะระบุให้พิจารณาว่า  $\pm\infty$  ด้วย)

**ตัวอย่าง 2.6.** จงหา limit ของ function  $f(x) = \frac{1}{x}$

1. เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย
2. เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 0 ทางขวา
3. เมื่อ  $x$  เข้าใกล้ 0

### วิธีทำ

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \text{ หาค่าไม่ได้ (หรือเท่ากับ } -\infty)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \text{ หาค่าไม่ได้ (หรือเท่ากับ } +\infty)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ หาค่าไม่ได้}$$

ในบางครั้ง เราสนใจพฤติกรรมของ function  $f$  เมื่อค่าตัวแปรต้นมีค่ามากขึ้นโดยไม่มีขอบเขต หรือน้อยลงโดยไม่มีขอบเขต ในกรณีเช่นนี้ เราใช้สัญลักษณ์  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  และ  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ตามลำดับ แทนที่จะใช้  $\lim_{x \rightarrow \infty^-} f(x)$  และ  $\lim_{x \rightarrow \infty^+} f(x)$  (โปรดอ่านนิยามในเอกสารอ้างอิง) ทฤษฎีบทเกี่ยวกับ limit ที่กล่าวมาข้างต้นทั้งหมด เป็นจริงในกรณีนี้ด้วย นอกจากนี้ เรายังมี ทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎี 2.5.**

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$
3. ถ้า  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  แล้ว  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  ซึ่งเป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย ในที่นี้  $a \in R$  หรือ  $a$  เป็น  $+\infty$  หรือ  $-\infty$

ตัวอย่าง 2.7.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+12}{x^3-5} = ?$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+12}{x^3-5} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2+12)/x^3}{(x^3-5)/x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{12}{x^3}}{1 - \frac{5}{x^3}} = \frac{0+0}{1-0} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

ตัวอย่าง 2.8.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{2}{3}} = ?$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{2}{3}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \sqrt[3]{\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}\right)^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

ตัวอย่าง 2.9.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{5}}+5x^{\frac{1}{7}}}{3x^{\frac{1}{3}}+5x^{\frac{1}{5}}+7x^{\frac{1}{7}}} = ?$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{5}}+5x^{\frac{1}{7}}}{3x^{\frac{1}{3}}+5x^{\frac{1}{5}}+7x^{\frac{1}{7}}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}(1+3x^{-\frac{2}{15}}+5x^{-\frac{4}{21}})}{x^{\frac{1}{3}}(3+5x^{-\frac{2}{15}}+7x^{-\frac{4}{21}})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+3x^{-\frac{2}{15}}+5x^{-\frac{4}{21}}}{3+5x^{-\frac{2}{15}}+7x^{-\frac{4}{21}}} = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (2.6)$$

**ข้อสังเกต** ตัวแปร  $x$  ในสัญลักษณ์  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  เรียกว่า “ตัวแปรหุ่น” (dummy variable) เพราะไม่ได้กล่าวถึงตัวแปร  $x$  แต่เราใช้มันเพื่อเขียนสัญลักษณ์แทนจำนวนจริงจำนวนหนึ่งที่ค่าของ function  $f$  ใกล้เข้าไปหา ในยามที่ตัวแปรต้นของมันมีค่าใกล้  $a$  เข้าไปทุกที เราอาจเขียน  $\lim_{t \rightarrow a} f(t)$  แทนจำนวนจำนวน

นี้ได้ เป็นต้น ตัวอย่างของ dummy variable อื่น ๆ เช่น ตัวแปร  $n$  ในสัญลักษณ์  $\sum_{n=1}^4 n^2$  ซึ่งอาจ

เขียนใหม่เป็น  $\sum_{k=1}^4 k^2$  ก็ได้ ทั้งสองสัญลักษณ์นี้แทนจำนวน  $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

ตัวอย่าง 2.10. จงหา  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  เมื่อ  $f(x) = x^2 - 5$  ถ้า  $x \leq 3$   $= \sqrt{x+13}$  ถ้า  $x > 3$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 5 \leftarrow \boxed{f(x) = x^2 - 5 \text{ เมื่อ } x \text{ อยู่ทางซ้ายของ } 3} \\ &= 4 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x+13} \leftarrow \boxed{f(x) = \sqrt{x+13} \text{ เมื่อ } x \text{ อยู่ทางขวาของ } 3} \\ &= 4 \end{aligned} \quad (2.8)$$

เนื่องจาก  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4$  ดังนั้น  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ 4

ตัวอย่าง 2.11. จงหา  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{ถ้า } x \leq 3 \\ \sqrt{x+13} & \text{ถ้า } x > 3 \end{cases}$$

วิธีทำ  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 5) = -5$

## 2.1 ความต่อเนื่อง (Continuity)

ในวิชาฟิสิกส์ เราสามารถเขียนตำแหน่งของวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่ในรูป function ของเวลาได้ (วัตถุย่อมอยู่ในที่ใดที่หนึ่งเพียงที่เดียว ณ เวลาหนึ่ง ๆ)

คำถาม : function ใด ๆ เป็น function ที่แสดงตำแหน่งของวัตถุใดวัตถุหนึ่งได้เสมอหรือไม่

ลองอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ ถ้า function ที่แสดงตำแหน่งของมัน คือ

$$1. s_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } t < 3 \\ 1 & \text{ถ้า } t > 3 \end{cases}$$

$$2. s_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } t \leq 3 \\ 1 & \text{ถ้า } t > 3 \end{cases}$$

$$3. s_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } t \neq 3 \\ 0 & \text{ถ้า } t = 3 \end{cases}$$

กราฟของ  $s_1, s_2$  และ  $s_3$  เป็นดังนี้

ข้อสังเกต:

1.  $s_1(3)$  หาค่าไม่ได้
2.  $s_2(3)$  หาค่าได้ แต่  $\lim_{t \rightarrow 3} s_2(t)$  หาค่าไม่ได้
3.  $s_3(3)$  หาค่าได้  $\lim_{t \rightarrow 3} s_3(t)$  หาค่าได้ แต่  $s_3(3) \neq \lim_{t \rightarrow 3} s_3(t)$

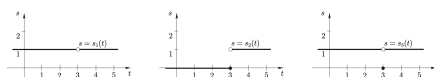


Figure 2.7: กราฟของฟังก์ชัน  $s_1, s_2$  และ  $s_3$

**นิยาม 2.3.** ให้  $f : D_f \rightarrow R$  โดยที่  $D_f \subseteq R$  และ  $a \in R$  เรากล่าวว่า  $f$  ต่อเนื่อง (continuous) ที่  $a$  ถ้า

1.  $f(a)$  หาค่าได้
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  หาค่าได้
3.  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

**นิยาม 2.4.** ให้  $f$  เป็น function และ  $S$  เป็นเซต (set) เรากล่าวว่า  $f$  ต่อเนื่องบน  $S$  (continuous on  $S$ ) ถ้า  $f$  ต่อเนื่องที่ทุก ๆ สมาชิกของ  $S$  เรียก function ที่ continuous on  $R$  ว่า “ฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function)”

**ข้อสังเกต** จะเห็นว่า function ที่แสดงตำแหน่งของวัตถุต้องเป็น continuous function บนช่วงที่สนใจ

**ทฤษฎี 2.6.** ถ้า  $f$  และ  $g$  เป็น function ที่ต่อเนื่องที่  $a$  แล้ว

1.  $f + g$  ต่อเนื่องที่  $a$
2.  $f - g$  ต่อเนื่องที่  $a$
3.  $f \cdot g$  ต่อเนื่องที่  $a$
4.  $\frac{f}{g}$  ต่อเนื่องที่  $a$  ถ้า  $g(a) \neq 0$

**ตัวอย่าง 2.12.** function  $f$  ซึ่งนิยามโดย  $f(x) = |x|$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่



วิธีทำ ในที่นี้

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

เราต้องพิจารณาว่า  $f$  ต่อเนื่องที่ทุก ๆ  $a \in R$  หรือไม่

- ถ้า  $a > 0$  จะได้  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a = f(a)$
- ถ้า  $a < 0$  จะได้  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (-x) = -a = f(a)$
- ถ้า  $a = 0$  จะได้  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 = f(0)$   
และ  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = f(0)$   
ดังนั้น  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$

ดังนั้น  $f$  ต่อเนื่องที่ทุก ๆ  $a \in R$  จึงสรุปว่า  $f$  เป็น continuous function

**ทฤษฎี 2.7.** ฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) เป็น function ที่ต่อเนื่องบน domain ของมัน

**หมายเหตุ:** rational function คือ function ที่เป็นเศษส่วนของพหุนาม (polynomial) domain ของ rational function ได้แก่เซตของจำนวนจริงซึ่งไม่ทำให้ส่วนของมันเป็นศูนย์

**ทฤษฎี 2.8.** ถ้า  $f$  และ  $g$  เป็น function และ  $a \in R$  โดยที่  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$  และ  $f$  ต่อเนื่องที่  $L$  แล้ว  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(L)$

**ตัวอย่าง 2.13.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} \right| = ?$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} \right| &= \left| \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} \right| \\ &= \left| \frac{1^4 - 1^2 + 1}{1^4 + 1^2 + 1} \right| \\ &= \left| \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (2.9)$$

**ทฤษฎี 2.9.** ถ้า  $f$  ต่อเนื่องที่  $a$  และ  $g$  ต่อเนื่องที่  $f(a)$  แล้ว  $g \circ f$  ต่อเนื่องที่  $a$

จงพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้น

**ตัวอย่าง 2.14.** function  $f$  ซึ่งนิยามโดย  $f(x) = \left| \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} \right|$  เป็น continuous function หรือไม่

**วิธีทำ**  $f$  เป็น continuous function เพราะ  $f = g \circ h$  โดยที่  $g(x) = |x|$  และ  $h(x) = \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$  ซึ่งเป็น continuous function ทั้งคู่

**นิยาม 2.5.** เรานิยาม “ภาวะต่อเนื่องทางซ้าย” และ “ภาวะต่อเนื่องทางขวา” ได้โดยแทนที่  $\lim_{x \rightarrow a}$  ในเงื่อนไขของนิยาม ด้วย  $\lim_{x \rightarrow a^-}$  และ  $\lim_{x \rightarrow a^+}$  ตามลำดับ นั่นคือ

ให้  $f : D_f \rightarrow R$  โดยที่  $D_f \subseteq R$  และ  $a \in R$  เรากล่าวว่า  $f$  “ต่อเนื่องทางซ้าย (left-continuous) ที่  $a$ ” ถ้า

1.  $f(a)$  หาค่าได้
2.  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  หาค่าได้
3.  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

และกล่าวว่า  $f$  “ต่อเนื่องทางขวา (right-continuous) ที่  $a$ ” ถ้า

1.  $f(a)$  หาค่าได้
2.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  หาค่าได้
3.  $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

**นิยาม 2.6.** ให้  $f : [a, b] \rightarrow R$  เรากล่าวว่า  $f$  ต่อเนื่องบน  $[a, b]$  (continuous on  $[a, b]$ ) ถ้า

1.  $f$  ต่อเนื่องบน  $(a, b)$
2.  $f$  ต่อเนื่องทางขวาที่  $a$
3.  $f$  ต่อเนื่องทางซ้ายที่  $b$

**ตัวอย่าง 2.15.** function  $f$  ที่นิยามโดย  $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$  เป็น continuous function บน  $[-2, 2]$  หรือไม่

**วิธีทำ** เราตรวจสอบได้ว่า  $f$  เป็น continuous function บน  $[-2, 2]$  เพราะ

1.  $f$  เป็น continuous function บน  $(-2, 2)$
2.  $f$  ต่อเนื่องทางขวาที่  $-2$  เพราะ §§

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4 - x^2} \\ &= 0 = f(-2) \end{aligned} \tag{2.10}$$

3.  $f$  ต่อเนื่องทางซ้าย ที่  $2$  เพราะ

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{4 - x^2} \\ &= 0 = f(2)\end{aligned}\tag{2.11}$$

ตัวอย่าง 2.16. พิจารณา function  $f$  ซึ่งมีกราฟดังต่อไปนี้

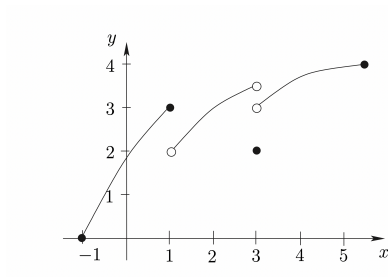


Figure 2.8: กราฟของฟังก์ชันในตัวอย่างrefexm:ex-cont-5

1.  $f$  มีความต่อเนื่องที่  $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$  หรือไม่
2.  $f$  มีความต่อเนื่องบน  $[-1, 0], [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5]$  หรือไม่

**วิธีทำ** ให้นักศึกษาทำเป็นแบบฝึกหัด

**ทฤษฎี 2.10.** ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และฟังก์ชันลอการิทึม เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนโดเมนของมัน

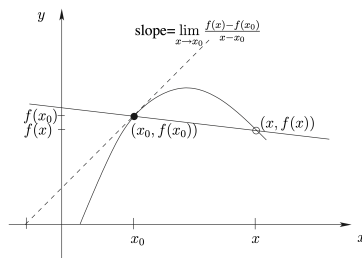


## Chapter 3

# อนุพันธ์ (Derivatives)

### 3.1 อนุพันธ์ (Derivatives)

จากตัวอย่าง 2.1 ในบทที่ 2 และเนื้อหาในเรื่อง limits เราจะเห็นว่า ความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน  $y = f(x)$  ณ จุด  $(x_0, f(x_0))$  บนกราฟ ก็คือ  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  นั่นเอง (ถ้า limit หาค่าได้)

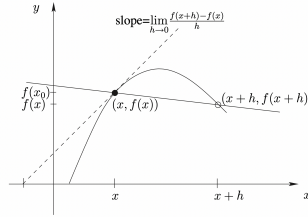


ปริมาณนี้มีความสำคัญ เพราะนำไปประยุกต์ใช้ได้มากมาย เราจึงกำหนดสัญลักษณ์และมีชื่อเรียกดังต่อไปนี้

**นิยาม 3.1.** ถ้า  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  โดยที่  $D_f \subseteq \mathbb{R}$  และถ้า  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  หาค่าได้แล้ว เรียกค่าของ limit นี้ว่า “อนุพันธ์ (derivative) ของ  $f$  ที่  $x_0$ ” และแทนด้วยสัญลักษณ์  $f'(x_0)$

เนื่องจากแต่ละ function  $g$  และแต่ละ  $x_0$  จะมี  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  ได้ค่าเดียว ดังนั้น  $f'$  จึงเป็น function เรียกว่า “อนุพันธ์ (derivative)” ของ  $f$

ในการเขียนนิยามของ  $f'(x)$  เพื่อใช้เป็นสูตรทั่วไปสำหรับ function  $f'$  เราเปลี่ยนตัวแปรเสียใหม่ ดังแสดงในรูป



จะได้ว่า

**ตัวอย่าง 3.1.** จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟ  $y = -x^2 + 6x - 2$  ณ จุด  $P_0(2, 6)$

**วิธีทำ** ให้  $f(x) = -x^2 + 6x - 2$  จะได้ค่าความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด  $(x, f(x))$  คือ  $f'(x)$  ซึ่งเท่ากับ

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[-(x+h)^2 + 6(x+h) - 2] - [-x^2 + 6x - 2]}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h^2 + 6h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} (-2x - h + 6) \leftarrow \boxed{\text{อย่าเขียน } \lim_{h \rightarrow 0} -2x - h + 6} \\
 &= -2x + 6
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด  $(2, 6)$  คือ  $f'(2) = -2 \cdot 2 + 6 = 2$  เส้นสัมผัสจึงมีสมการเป็น  $y - 6 = 2(x - 2)$

อัตราส่วน  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  คือ อัตราส่วนของค่า function ที่เปลี่ยนไป (จาก  $f(x_0)$  กลายเป็น  $f(x)$ ) ต่อค่าตัวแปรต้นที่เปลี่ยนไป (จาก  $x_0$  กลายเป็น  $x$ ) เรียกค่านี้นว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย (average rate of change) ของ  $f(x)$  เทียบกับ  $x$ ” คำว่าเฉลี่ยนี้ แสดงถึงการคิดการเปลี่ยนแปลงบน ‘ช่วง’

แต่  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  เป็นการหา “แนวโน้ม” ของอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย เมื่อ  $x$  กับ  $x_0$  อยู่

ใกล้กันมากๆ จนแทบจะเป็นจุดเดียวกัน เราจึงเรียกค่านี้นว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง (instantaneous rate of change) ของ  $f(x)$  เทียบกับ  $x$ ”

สัญลักษณ์อื่นๆ สำหรับ derivatives ได้แก่

ถ้า  $f'(x_0)$  หาได้ เรากล่าวว่า function  $f$  “หาอนุพันธ์ได้ (differentiable) ที่  $x_0$ ” ถ้า  $f'(x_0)$  หาได้สำหรับทุกๆ  $x$  ในเซต  $S$  เรากล่าวว่า function  $f$  “หาอนุพันธ์บน  $S$  (differentiable on  $S$ )” ถ้า  $f'(x_0)$  หาได้สำหรับทุกๆ จำนวนจริง  $x$  เรากล่าวว่า function  $f$  “หาอนุพันธ์ได้ (differentiable)”

## 3.2 การคำนวณหาอนุพันธ์

ตัวอย่าง 3.2. จงหา derivative ต่อไปนี้

(1)  $f'(x)$  เมื่อ  $f(x) = x^2$

(2)  $f'(2)$  เมื่อ  $f(x) = \sqrt{x}$

(3)  $\frac{ds(t)}{dt}|_{t=t_0}$  เมื่อ  $s(t) = \frac{1}{t}$

วิธีทำ ใช้นิยามข้างต้นหา derivative ได้ดังนี้

(1) เมื่อ  $f(x) = x^2$  จะได้

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h \\ &= 2x \end{aligned} \tag{3.2}$$

(2) เมื่อ  $f(x) = \sqrt{x}$  จะได้

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h \cdot (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h) - 2}{h \cdot (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

(3) เมื่อ  $s(x) = \frac{1}{t}$  จะได้

$$\begin{aligned}
 s'(t)|_{t=t_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t_0+h} - \frac{1}{t_0}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_0 - (t_0 + h)}{t_0(t_0 + h)h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{t_0(t_0 + h)h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{t_0(t_0 + h)} \\
 &= \frac{-1}{t_0^2}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

ตัวอย่าง 3.3. จงหาเซต  $S$  ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ function  $f(x) = \sqrt{x}$  หาอนุพันธ์ได้บน  $S$

วิธีทำ พิจารณาจำนวนจริง  $x$  ที่ทำให้  $f'(x)$  หาค่าได้ เนื่องจาก

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ถ้า } x > 0$$

ในกรณีที่  $x \leq 0$  จะได้ว่า  $f(x)$  ไม่นิยาม จึงหาอนุพันธ์ที่  $x$  ไม่ได้ และในกรณีที่  $x = 0$  จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{0+h} + \sqrt{0}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

ซึ่งหาค่าไม่ได้ ดังนั้นจึงได้ว่า เซตที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ function  $f(x) = \sqrt{x}$  หาอนุพันธ์ได้บน  $S$  คือ ช่วงเปิด  $(0, \infty)$

### 3.3 สูตรสำหรับหาอนุพันธ์

ทฤษฎี 3.1. ถ้า  $c$  เป็นจำนวนจริง (real number) และ  $n$  เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว function  $f(x) = c$  เป็น function ที่ differentiable และ function  $g(x) = x^n$  เป็น function ที่ differentiable บน ช่วงเปิดในโดเมนของมัน และ

1.  $\frac{dc}{dx} = 0$
2.  $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

ทฤษฎี 3.2. ถ้า  $f$  และ  $g$  เป็น function ซึ่ง differentiable ที่  $x_0$  และ  $c$  เป็นค่าคงที่จริง แล้ว



1.  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2.  $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
3.  $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
4.  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
5.  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

**ตัวอย่าง 3.4.** จงหา derivative ของแต่ละ function ต่อไปนี้ เทียบกับตัวแปรต้นของมัน

- (1)  $f(x) = 5x^4$
- (2)  $f(x) = 6x^{11} + 9$
- (3)  $s(t) = 3t^8 - 2t^5 + 6t + 1$
- (4)  $g(x) = \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right) \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$
- (5)  $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1}$

**วิธีทำ** ใช้สูตรในทฤษฎีบทข้างต้นหา derivative ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & f(x) = 5x^4 \\
 & f'(x) = \frac{d}{dx}(5 \cdot x^4) \\
 & = 5 \frac{d}{dx}(x^4) = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & f(x) = 6x^{11} + 9 \\
 & f'(x) = \frac{d}{dx}(6x^{11} + 9) \\
 & = 5 \frac{d}{dx}(6x^{11}) + \frac{d}{dx}9 \\
 & = 66x^{10}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & s(t) = 3t^8 - 2t^5 + 6t + 1 \\
 & s'(t) = \frac{d}{dt}(3t^8 - 2t^5 + 6t + 1) \\
 & = 24t^7 - 10t^4 + 6
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right) \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) \\
 g'(x) &= \frac{d}{dx} \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right) \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right) \frac{d}{dx} \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) \\
 &= \left(2x - \frac{1}{2}x^{-1}\right) \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right) (2x - 2x^{-3})
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

(5)

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} \\
 h'(x) &= \frac{(x^4 + 1) \frac{d}{dx}(x^2 - 1) - (x^2 - 1) \frac{d}{dx}(x^4 + 1)}{(x^4 + 1)^2} \\
 &= \frac{(x^4 + 1)(2x) - (x^2 - 1)(4x^3)}{(x^4 + 1)^2}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

**ตัวอย่าง 3.5.** จงหา  $f'(0)$  เมื่อ  $f(x) = (x^6 - x^5 - x^4 - x^3)(x^5 - x^4 - x^3 - x^2)$

**วิธีทำ** จาก  $f(x) = (x^6 - x^5 - x^4 - x^3)(x^5 - x^4 - x^3 - x^2)$  จะได้

$$f'(x) = (x^6 - x^5 - x^4 - x^3)(5x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x) + (x^5 - x^4 - x^3 - x^2)(6x^5 - 5x^4 - 4x^3 - 3x^2)$$

$$\text{ดังนั้น } f'(0) = 0$$

### 3.4 อนุพันธ์อันดับสูง (High Order Derivatives)

ถ้า  $f$  เป็น function ที่หา derivative ได้ และ  $f'$  ก็เป็น function ที่หา derivative ได้อีก เราเรียก  $(f')'$  ว่า “อนุพันธ์อันดับสอง (second derivative) ของ  $f$ ” เขียนแทนด้วย  $f''$  ในทำนองเดียวกัน เราจะมี “อนุพันธ์อันดับสาม (third derivative) ของ  $f$ ” เขียนแทนด้วย  $f'''$  ฯลฯ สำหรับอนุพันธ์อันดับ  $n$  ( $n$ th derivative) ของ  $f$  โดยที่  $n \geq 4$  เราเขียนแทนด้วย  $f^{(n)}$  นอกจากนี้เราใช้สัญลักษณ์  $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$  แทน  $n$ th derivative ของ  $f$  และ  $\frac{d^n f(x)}{dx^n} \Big|_{x=x_0}$  แทน  $n$ th derivative ของ  $f$  ที่  $x_0$  (ซึ่งคือ  $f^{(n)}(x_0)$  นั่นเอง)

ถ้าให้  $y = f(x)$  เราสามารถใช้สัญลักษณ์  $y', y'', y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)}$  หรือ  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^4 y}{dx^4}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$  แทนอนุพันธ์อันดับที่  $1, 2, 3, 4, \dots, n$  ตามลำดับ และแทนค่าอนุพันธ์ที่  $x_0$  ด้วย  $\frac{d^n y}{dx^n} \Big|_{x=x_0}$

ด้วยหลักการเดียวกัน “อนุพันธ์อันดับหนึ่ง (first derivative) ของ  $f$ ” ก็คือ อนุพันธ์ของ  $f$  นั่นเอง

**ตัวอย่าง 3.6.** จงหาอนุพันธ์ทั้งหมดของ  $f(x) = x^n$  เมื่อ  $n > 1$

**วิธีทำ** จาก  $f(x) = x^n$  จะได้

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1} \\ f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} \\ f'''(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ f^{(4)}(x) &= n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= n! \\ f^{(k)}(x) &= 0 \text{ เมื่อ } k \geq n \end{aligned} \quad (3.11)$$

### 3.5 การตีความอนุพันธ์ (Interpretation of Derivatives)

#### 3.5.1 อนุพันธ์ในเชิงความชัน (Derivatives as Slopes)

ในกรณีที่เราลงจุดกราฟ (plot graph) ของฟังก์ชัน เราได้ทราบมาแล้วว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f$  ที่จุด  $x$  ใดๆ ก็คือความชันของเส้นสัมผัสกราฟ (เรียกว่าความชันของกราฟ) ของฟังก์ชัน  $f$  ที่จุด  $(x, f(x))$  นั่นเอง ความจริงข้อนี้สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันได้

**ตัวอย่าง 3.7.** จงพิจารณาว่ามีเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  ที่ตั้งฉากกันหรือไม่

**วิธีทำ** เราทราบว่าเส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ  $-1$  พิจารณาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  ที่จุด  $(x, f(x))$  ใดๆ จะได้ว่าความชันดังกล่าวมีค่าเท่ากับ  $f'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{x+1} \right) = \frac{1}{(x+1)^2}$  ฉะนั้น ความชันของเส้นสัมผัสกราฟนี้ที่จุดใดๆ จึงมีค่าเป็นบวกเสมอ จึงสรุปได้ว่า กราฟของฟังก์ชันนี้ไม่มีเส้นสัมผัสคู่ใดที่ตั้งฉากกัน เพราะผลคูณของความชันของเส้นสัมผัสเป็นจำนวนจริงบวกเสมอ ไม่สามารถเป็น  $-1$  ได้

**ตัวอย่าง 3.8.** ภูเขาจำลองในพิพิธภัณฑสถานแห่งชาติแห่งหนึ่ง เกิดจากการหมุนของพาราโบลาคว่ำรอบแกนสมมาตรของมัน โดยที่ฐานของภูเขาจำลองเป็นรูปวงกลมรัศมี 5 เมตร และยอดเขาอยู่สูงจากฐานเป็นระยะทาง 8 เมตร บนยอดเขาติดตั้งโคมไฟ ณ ตำแหน่งสูงจากยอดเขาขึ้นไปอีก 0.5 เมตร เมื่อเปิดโคมไฟ แสงไฟจากโคมจะทำให้พื้นบริเวณรอบๆ ภูเขาจำลองที่ไม่ถูกภูเขาจำลองบัง สว่างขึ้น จงหาว่าบริเวณที่สว่างดังกล่าว เป็นบริเวณบนพื้นภายนอกวงกลมรัศมีเท่าใด

จากโจทย์จำลองรูปได้ดังภาพ 1.3 ในที่นี้สมมุติว่าแหล่งกำเนิดแสงเป็นจุด จะเห็นว่า แนวแบ่งส่วนมืดและส่วนสว่างจะผ่านจุดกำเนิดแสง และอยู่ในแนวเส้นสัมผัสผิวของพาราโบลาด้วย ให้จุดกึ่งกลางฐานของภูเขาจำลองเป็นจุดกำเนิด และสมมติให้  $f(x) = a - kx^2$  เป็นสมการของรูปพาราโบลา จากเงื่อนไขความกว้างและความสูงของภูเขาจำลอง จะได้ว่า  $f(0) = 8$  และ  $f(5) = 0$  ซึ่งทำให้  $a = 8$  และ  $k = 8/25$  ดังนั้น  $f(x) = 8 - 8x^2/25$  ให้  $(x, f(x))$  เป็นจุดที่แนวแบ่งส่วนมืดและส่วนสว่างสัมผัสกับพาราโบลา จะได้ว่า ความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุดดังกล่าวเท่ากับ  $f'(x) = -16x/25$  แต่เส้น

สัมผัสนี้ผ่านจุดกำเนิดแสง  $(0, 8.5)$  และจุด  $(x, f(x)) = (x, 8 - 8x^2/25)$  จึงได้ว่า มีความชันเป็น  $\frac{8 - 8x^2/25 - 8.5}{x - 0}$  นั่นคือ  $\frac{8 - 8x^2/25 - 8.5}{x - 0} = -16x/25$  หรือ  $x = 5/4$  ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ  $-16 \times (5/4)/25 = -4/5$  ถ้าบริเวณบนพื้นที่สว่าง เป็นบริเวณภายนอกวงกลมรัศมี  $r$  จะได้ว่า เส้นสัมผัสข้างต้น ต้องผ่านจุด  $(r, 0)$  ด้วย นั่นคือความชันจะเท่ากับ  $\frac{0 - 8.5}{r - 0}$  ซึ่งทำให้  $\frac{0 - 8.5}{r - 0} = -4/5$  หรือ  $r = 10.625$  นั่นคือ บริเวณที่สว่าง เป็นบริเวณบนพื้นภายนอกวงกลมรัศมี 10.625 เมตร

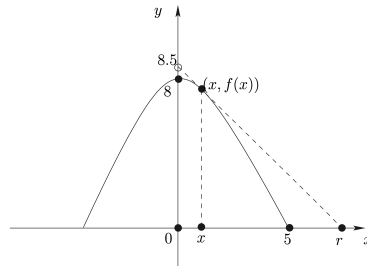


Figure 3.1: รูปภาพสำหรับตัวอย่างข้างต้น

### 3.5.2 อนุพันธ์ในเชิงอัตราเร็ว (Derivatives as Speeds)

ถ้าพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยให้  $f(t)$  เป็นระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ ณ เวลา  $t$  เราจะได้ว่า  $f'(t)$  ก็คืออัตราเร็ว ณ เวลา  $t$  ซึ่งเรียกว่า อัตราเร็วชั่วขณะ (instantaneous speed) ในขณะที่ปริมาณ  $\frac{f(s) - f(t)}{s - t}$  เรียกว่า อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุ ในช่วงเวลา ตั้งแต่  $s$  ถึง  $t$

**ตัวอย่าง 3.9.** วัตถุเคลื่อนที่เป็นเวลานาน 1 นาที ตามสมการ  $s = 0.5t + 0.1t^2$  เมื่อ  $t$  คือเวลาเป็นวินาที และ  $s$  คือระยะทางที่เคลื่อนที่ได้เป็นเมตร จงหา

- (1) อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วง 10 วินาทีแรก และในช่วง 10 วินาทีถัดไป
- (2) อัตราเร็วของวัตถุ ณ วินาทีที่ 10 และ ณ วินาทีที่ 20

**วิธีทำ**

(1) อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วง 10 วินาทีแรก เท่ากับ

$$\frac{s(10) - s(0)}{10 - 0} = \frac{(0.5 \times 10 + 0.1 \times 10^2) - (0.5 \times 0 + 0.1 \times 0^2)}{10 - 0} = 1.5 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วง 10 วินาทีถัดไป เท่ากับ

$$\frac{s(20) - s(10)}{20 - 10} = \frac{(0.5 \times 20 + 0.1 \times 20^2) - (0.5 \times 10 + 0.1 \times 10^2)}{20 - 10} = 3.5 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

$$(2) \text{ เนื่องจาก } \frac{d}{dt} (0.5t + 0.1t^2) = 0.5 + 0.2t$$

ดังนั้น อัตราเร็วของวัตถุ ณ วินาทีที่ 10 เท่ากับ

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=10} = \left. \frac{d}{dt} (0.5t + 0.1t^2) \right|_{t=10} = 0.5 + 0.2 \times 10 = 2.5 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

และ อัตราเร็วของวัตถุ ณ วินาทีที่ 20 เท่ากับ

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=20} = \left. \frac{d}{dt} (0.5t + 0.1t^2) \right|_{t=20} = 0.5 + 0.2 \times 20 = 4.5 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

### 3.5.3 อนุพันธ์ในเชิงอัตราการเปลี่ยนแปลง (Derivatives as Rates of Change)

เราจะเห็นได้ชัดจากนิยามของอนุพันธ์ว่า ในกรณีของฟังก์ชันต่างๆ ไป อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ก็คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าฟังก์ชัน เทียบกับตัวแปรต้นของมันนั่นเอง

**ตัวอย่าง 3.10.** เมื่อใช้เครื่องสูบลม สูบลมเข้าไปในลูกโป่ง เราอาจประมาณได้ว่า ณ ขณะเวลาใดๆ ลูกโป่งมีรูปร่างเป็นรูปทรงกลม จงหาอัตราการเพิ่มขึ้นของปริมาตรของลูกโป่ง ต่อหนึ่งหน่วยรัศมีที่เพิ่มขึ้นของลูกโป่ง ขณะที่ลูกโป่งมีรัศมี 10 เซนติเมตร

**วิธีทำ** ให้  $r$  เป็นรัศมีของลูกโป่ง และ  $V$  เป็นปริมาตรของลูกโป่ง จากข้อสมมุติว่าลูกโป่งเป็นทรงกลม จะได้ว่า  $V = 4\pi r^3/3$  ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของลูกโป่งเทียบกับรัศมีเท่ากับ  $\frac{dV}{dr} = 12\pi r^2/3 = 4\pi r^2$  ลูกบาศก์หน่วยต่อหน่วย นั่นคือ ขณะที่ลูกโป่งมีรัศมี 10 เซนติเมตร มันจะมีปริมาตรเพิ่มขึ้นในอัตรา  $4 \times \pi \times 10^2 \approx 1256$  ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อเซนติเมตร หรือประมาณ 1.256 ลิตรต่อรัศมีที่เพิ่มขึ้น 1 เซนติเมตร

### 3.5.4 แบบฝึกหัด (Exercises)

1. จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้ ถ้าอนุพันธ์ดังกล่าวหาค่าได้ ในกรณีที่หาค่าไม่ได้ ให้ระบุว่าหาค่าไม่ได้

1.  $f'(x)$  เมื่อ  $f(x) = g(x)h(x)k(x)$

2.  $f^{(n)}(0)$  เมื่อ  $f(x) = \sum_{i=1}^k x^i$  โดยที่  $k$  และ  $n$  เป็นจำนวนนับ

3.  $\frac{d}{dt} \frac{1}{1-t}$  และ  $\frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{1-t}$

4.  $\frac{d}{dt} \frac{f(t)}{t}$  เมื่อ  $f$  เป็นฟังก์ชันซึ่ง  $\frac{d}{dt} f(t) = \frac{f(t)}{t}$  สำหรับทุกๆ  $t \neq 0$

5.  $f'(-1)$ ,  $f'(-\frac{2}{3})$ ,  $f'(0)$ ,  $f'(1)$  เมื่อ  $f(x) = x\sqrt{1+x}$

6.  $\left. \frac{d}{dx} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \right|_{x=0}$

7.  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ ,  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0.25}$ ,  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1}$  เมื่อ  $y = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$

8.  $\frac{d}{dx} (x^2 \sqrt{1+x})$
9.  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  เมื่อ  $y = (1+x^2)\sqrt{1-2x}$  (หาอนุพันธ์ของ  $\sqrt{1-2x}$  และ  $1/\sqrt{1-2x}$  ก่อน)
10.  $\frac{d^{10} y}{dx^{10}}$  เมื่อ  $y = (x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)(x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2)$

2. จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงหาความชันของกราฟของสมการ  $y = x^3 - 3x$  ณ ตำแหน่งซึ่ง  $x = 2$
2. จงหาจุดบนกราฟ  $y = x^3 - 3x$  ซึ่งมีเส้นสัมผัสกราฟที่ขนานกับเส้นสัมผัส ณ จุดซึ่ง  $x = a$  เมื่อ  $a$  เป็นจำนวนจริงใดๆ
3. จงหาจุดบนกราฟ  $y = x^3 - 3x$  ซึ่งมีเส้นสัมผัสกราฟที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ณ จุดซึ่ง  $x = a$  เมื่อ  $a$  เป็นจำนวนจริงใดๆ

### 3.6 กฎลูกโซ่ (The Chain Rule)

การทราบข้อมูลของ derivative ของฟังก์ชัน  $f$  และฟังก์ชัน  $g$  ทำให้เราสามารถหา derivative ของผลบวก  $f + g$  ผลคูณ  $fg$  และผลหาร  $f/g$  ของฟังก์ชัน ทั้งสองได้ ข้อมูลนี้ยังใช้หา derivative ของฟังก์ชันประกอบ  $f \circ g$  ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสมได้ เราเรียกวิธีการหา derivative ของฟังก์ชัน ประกอบว่า chain rule โดยมีแนวคิดสำคัญคือ การสร้างตัวแปรใหม่ขึ้นมาช่วย ในการคำนวณ ดังรายละเอียดในทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎี 3.3.** ถ้าฟังก์ชัน  $g$  หา derivative ได้ที่จุด  $x$  และฟังก์ชัน  $f$  หา derivative ได้ที่จุด  $g(x)$  แล้วฟังก์ชันประกอบ  $f \circ g$  หา derivative ได้ที่จุด  $x$  ยิ่งกว่านั้น ถ้า

$$y = f(g(x)) \quad \text{และ} \quad u = g(x)$$

แล้ว  $y = f(u)$  และ

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงให้เห็นถึงการใช้อยู่ chain rule หา derivative ของฟังก์ชัน

**ตัวอย่าง 3.11.** พิจารณาฟังก์ชัน  $y = \frac{1}{x^2+1}$  กำหนดให้  $u = x^2 + 1$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ** ในที่นี้  $y = \frac{1}{u}$  เราใช้ chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du} \left[ \frac{1}{u} \right] \cdot \frac{d}{dx} [x^2 + 1] \\ &= \left( -\frac{1}{u^2} \right) \cdot (2x) \\ &= -\frac{1}{(x^2 + 1)^2} \cdot (2x) \\ &= -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}\end{aligned}\tag{3.12}$$

นั่นคือ  $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

**ตัวอย่าง 3.12.** กำหนดให้  $y = u^{100}$  และ  $u = x^3 + x^2 + x + 1$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ** ใช้ chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du} [u^{100}] \cdot \frac{d}{dx} [x^3 + x^2 + x + 1] \\ &= (100u^{99}) \cdot (3x^2 + 2x + 1) \\ &= 100(x^3 + x^2 + x + 1)^{99} (3x^2 + 2x + 1)\end{aligned}\tag{3.13}$$

นั่นคือ  $\frac{dy}{dx} = 100(x^3 + x^2 + x + 1)^{99} (3x^2 + 2x + 1)$

สูตร

$E : chain1$

สามารถเขียนได้อีกกรุป ซึ่งสะดวกในการนำไปใช้ สังเกตว่า  $y = f(u)$  ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} [f(u)] \quad \text{และ} \quad \frac{dy}{du} = f'(u)$$

สูตรของ chain rule จึงเขียนได้ว่า

$$\boxed{\frac{d}{dx} [f(u)] = f'(u) \frac{du}{dx}}$$

ซึ่งเขียนได้อีกกรุปคือ

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

**ตัวอย่าง 3.13.** จงหา derivative ของฟังก์ชัน  $y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}$

**วิธีทำ** เราแนะนำตัวแปร  $u = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$  และใช้สูตร chain rule

$E : chain2$

ได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1} \right] &= \frac{d}{dx} [\sqrt{u}] \\ &= \frac{d}{du} \sqrt{u} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}} \cdot (x + 1) \\ &= \frac{x + 1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

นั่นคือ  $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}}$

**ตัวอย่าง 3.14.** จงหาค่าของ  $f'(x^3 + x)$  เมื่อกำหนดให้

$$\frac{d}{dx}[f(x^3 + x)] = (3x^2 + 1)^2$$

**วิธีทำ** เราใช้ chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x^3 + x)] &= f'(x^3 + x) \frac{d}{dx}[x^3 + x] \\ &= f'(x^3 + x) \cdot (3x^2 + 1) \end{aligned} \quad (3.15)$$

ดังนั้น

$$(3x^2 + 1)^2 = f'(x^3 + x) \cdot (3x^2 + 1)$$

หรือ

$$f'(x^3 + x) = 3x^2 + 1$$

สังเกตความแตกต่างระหว่าง  $\frac{d}{dx}f(x^3 + x)$  และ  $f'(x^3 + x)$

**ตัวอย่าง 3.15.** กำหนดให้  $f(x) = |x|$  จงหา derivative ของฟังก์ชัน  $f$  ที่  $x \neq 0$

**วิธีทำ** ฟังก์ชัน  $f$  เขียนได้ว่า

$$f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$$



ถ้า  $x \neq 0$  แล้ว

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{d}{dx} \sqrt{x^2} \\
 &= \frac{d}{du} [\sqrt{u}] \cdot \frac{d}{dx} [x^2] \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (2x) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot x \\
 &= \frac{x}{|x|}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

นั่นคือ เมื่อ  $x \neq 0$  แล้ว  $f'(x) = \frac{x}{|x|}$

### 3.6.1 แบบฝึกหัด

1. จงหา derivative ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.  $f(x) = \sqrt{1-x+x^2}$
2.  $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$
3.  $f(x) = (2x+5)^3(3x-7)^5$
4.  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3+x^2+1}$

2. จงหา derivative ของฟังก์ชัน

$$y = \sqrt{x + \sqrt[3]{3x + \sqrt[4]{4x}}}$$

3. กำหนดให้  $f$  เป็นฟังก์ชันหา derivative ได้ และ  $g = f \circ f$  ถ้า  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 4$  และ  $f'(4) = 8$  จงหาค่าของ  $g'(1)$

4. พิจารณตารางค่าของฟังก์ชัน  $f, f', g, g'$  และ  $h, h'$  โดยที่  $h = f \circ g$

$x$	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$	$h'(x)$
-1	0	1	2	2	0	2
0	3	-1	?	1	1	?
1	?	0	0	?	?	3

จงหาค่าของ  $h(0)$ ,  $f(1)$ ,  $h'(0)$ ,  $f'(1)$  และ  $g'(1)$

5. จาก chain rule

$E : chain1$

$$, \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \text{ จงหาสูตร ของ } \frac{d^2y}{dx^2}$$

### 3.7 อนุพันธ์ของฟังก์ชันอินเวอร์ส (Derivatives of Inverse Functions)

นิยาม 3.2. ถ้าฟังก์ชัน  $f$  และ  $g$  สอดคล้องสมบัติ

1.  $g(f(x)) = x$  สำหรับ  $x$  ที่เป็นสมาชิกของโดเมนของ  $f$
2.  $f(g(y)) = y$  สำหรับ  $y$  ที่เป็นสมาชิกของโดเมนของ  $g$

เรากล่าวว่า  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส โดยที่  $f$  เป็น ฟังก์ชันอินเวอร์สของ  $g$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส ของ  $f$

ถ้าเขียน  $f^{-1}$  แทน  $g$  และใช้สัญกรณ์  $x$  แทนสมาชิกทั้งในโดเมนของ  $f$  และ  $f^{-1}$  สมมติว่าทั้งสองฟังก์ชันหา derivative ได้ ให้

$$y = f^{-1}(x)$$

เราสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$x = f(y)$$

หา derivative เทียบกับ  $x$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x] &= \frac{d}{dx}[f(y)] \\ &= f'(y) \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned} \tag{3.17}$$

นั่นคือ

$$1 = f'(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

หรือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$$

เขียนใหม่ได้ว่า

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

ตัวอย่าง 3.16. กำหนดให้  $f(x) = x^3$  มี  $f^{-1}(x) = x^{1/3}$  จงหา  $\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)]$

วิธีทำ คำนวณหา derivative ได้ว่า  $f'(x) = 3x^2$  และ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^{1/3}] &= \frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{3[f^{-1}(x)]^2} \\ &= \frac{1}{3[x^{1/3}]^2} \\ &= \frac{1}{3x^{2/3}} \end{aligned} \tag{3.18}$$

ในการหา derivative ของฟังก์ชันอินเวอร์ส เราอาจจะไม่ใช้สูตรโดยตรง แต่ จะคำนวณหา derivative ตามขั้นตอนที่ได้แสดงข้างต้น ดังตัวอย่าง

**ตัวอย่าง 3.17.** พิจารณาฟังก์ชัน  $f(x) = x^3 + x + 2$  จงหา derivative ของ  $f^{-1}(x)$

**วิธีทำ** เราเขียน  $x = f(y) = y^3 + y + 2$  แล้วหา derivative เทียบกับ  $x$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x] &= \frac{d}{dx}[y^3 + y + 2] \\ 1 &= (3y^2 + 1)\frac{dy}{dx}\end{aligned}\tag{3.19}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2 + 1}$$

**ตัวอย่าง 3.18.** กำหนดให้  $f$  เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอินเวอร์ส ถ้า  $f(1) = 2$  และ  $f'(1) = 3$  แล้ว จงหาค่าของ  $(f^{-1})'(2)$

**วิธีทำ** เนื่องจาก  $f(1) = 2$  แล้ว  $f^{-1}(2) = 1$  และจากสูตร

$$E : \text{inverse}$$

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(2) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} \\ &= \frac{1}{f'(1)} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}\tag{3.20}$$

นั่นคือ  $(f^{-1})'(2) = 1/3$

### 3.7.1 แบบฝึกหัด

1. จงหา  $(f^{-1})'(x)$  เมื่อกำหนด

1.  $f(x) = 2x^3 - 1$

2.  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

3.  $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$

4.  $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$

## 3.8 Differentials, Implicit Differentiation and Related Rates

### 3.8.1 Differentials

ที่ผ่านมา เราให้ความหมายของ  $dy/dx$  ว่าเป็น derivative ของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ในความหมายของตัวดำเนินการ  $\frac{d}{dx}$  ที่กระทำ กับฟังก์ชัน  $y$  หัวข้อนี้เราจะนิยาม  $dy$  และ  $dx$  แยกจากกัน และให้ความ

หมาย  $dy/dx$  ว่าเป็นเศษส่วน

ผลต่างระหว่างค่าสองค่าของตัวแปร เราเรียกว่า increment เช่นในตัวแปร  $x$  ผลต่างระหว่างค่า  $x = x_0$  และ  $x = x_1$  เราเขียน increment ใน  $x$  นี้ ว่า  $\Delta x = x_1 - x_0$

ให้  $y = f(x)$  และให้  $x$  มีการเปลี่ยนค่าจาก  $x = x_0$  ไปยัง  $x = x_1$  ก็จะมี การเปลี่ยนค่าใน  $y$  จาก  $y_0 = f(x_0)$  ไปยัง  $y_1 = f(x_1)$  นั้นหมายความว่า increment  $\Delta x$  ทำให้เกิด increment  $\Delta y = y_1 - y_0$  โดยที่

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$$

หรือ

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ดังนั้น สำหรับค่า  $x$  ทั่วไปแล้ว เราอาจเขียน

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

และนิยามของ derivative ก็เขียนได้อีกรูปว่า

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

เมื่อเราเห็นการเขียนสัญลักษณ์  $\frac{dy}{dx}$  มีแนวโน้มที่จะ ทำให้เราคิดถึงผลหารของ  $dy$  ด้วย  $dx$  ซึ่งในขณะนี้ทั้งสองปริมาณยังไม่มี ความหมายใด ๆ สังเกตว่าในสูตรของ chain rule ที่ว่า  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$  ก็ให้ความรู้สึกแรกว่าน่าจะเป็นผลหารเช่นกัน ดังนั้นลำดับถัดไปเราจะให้ความหมายของ พจน์  $dx$ ,  $dy$  และการตีความหมายในรูปเศษส่วน

เริ่มด้วยการตรึงค่า  $x$  และนิยาม  $dx$  ว่าเป็นตัวแปรต้น กำหนดให้  $y = f(x)$  และ  $f$  เป็นฟังก์ชัน หา derivative ได้ เรานิยาม  $dy$  ว่าเป็นตัวแปรตามดังนี้

$$\boxed{dy = f'(x) dx}$$

ถ้า  $dx \neq 0$  เราเขียนใหม่ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

เราเรียก  $dy$  ว่า differential ของ  $y$  และ  $dx$  ว่า differential ของ  $x$

มีความแตกต่างระหว่าง ความหมายของ differential  $dy$  และ increment  $\Delta y = y_1 - y_0$  ถ้าเรา กำหนดให้ differential  $dx$  และ increment  $\Delta x$  มีค่า เดียวกัน นั่นคือ  $dx = \Delta x$  จะเห็นว่า  $\Delta y$  แทนถึง ค่าผลต่างใน  $y$  ของจุดเริ่มต้น  $x$  และจุดปลาย  $x + \Delta x$  ตามเส้นโค้ง  $y = f(x)$  นั่นคือ  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  ในขณะที่  $dy$  แทนถึงค่าผลต่างใน  $y$  ของจุดเริ่มต้น  $x$  และจุดปลาย  $x + \Delta x$  ตามเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง  $y = f(x)$  ที่ผ่านจุด  $(x, f(x))$  และ มีความชันเท่ากับ  $f'(x)$

**ตัวอย่าง 3.19.** ถ้า  $y = f(x) = x^2 + 1$  แล้ว  $f'(x) = 2x$  กำหนดให้  $x = 3$  จงหาค่าของ  $dy$  และ  $\Delta y$  เมื่อ  $dx = \Delta x = 0.1$

**วิธีทำ** ค่าของ  $dy$  คือ

$$dy = f'(x) dx = 2x dx$$

กรณีนี้จริง  $x = 3$  ได้ว่า

$$dy = 6 dx$$

ถ้าให้  $dx = 0.1$  ค่าของ  $dy = 0.6$  ถ้าเราพิจารณาค่า  $dx = \Delta x = 0.1$  เราก็จะได้

$$\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = (3.1)^2 + 1 - 3^2 - 1 = 0.61$$

สังเกตว่า  $dy = 0.6$  ในขณะที่  $\Delta y = 0.61$

มีข้อสังเกตว่า ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันหา derivative ได้ที่ค่า  $x_0$  แล้วเส้นสัมผัส กับเส้นโค้ง  $y = f(x)$  ที่จุด  $(x_0, f(x_0))$  จะใกล้เคียงกับกราฟของ  $f$  สำหรับค่า  $x$  ใกล้ ๆ กับค่า  $x_0$  สมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งนี้ที่ผ่านจุด  $(x_0, f(x_0))$  มีความชัน  $f'(x_0)$  คือ

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

เมื่อเรากล่าวว่า เส้นโค้ง  $y = f(x)$  และเส้นสัมผัสกับเส้นใกล้เคียงกันหมายถึงถ้าเรา ให้  $x$  เข้าใกล้  $x_0$  ค่าของ  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  ก็จะใกล้เคียงค่า  $f(x)$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

เราเรียกสมการ

$$E : approx$$

ว่า local linear approximation ของ  $f$  ที่  $x_0$  เรา อาจเขียนในอีกรูปว่า

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

**ตัวอย่าง 3.20.** จงหา local linear approximation ของฟังก์ชัน  $f(x) = x^{1/3}$  ที่  $x_0 = 1$

**วิธีทำ** เรามี  $f(x) = x^{1/3}$  และคำนวณหา derivative

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

local linear approximation ของ  $f$  ที่  $x_0 = 1$  จึงเป็น

$$x^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}(x - 1) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

ถ้าเราต้องการประมาณค่าของ  $(1.1)^{1/3}$  เราใช้ local linear approximation ของ  $f$  ในการประมาณ โดยได้ค่าประมาณคือ  $1 + \frac{1}{3}(1.1 - 1) = 1.03$

### 3.8.2 Implicit Differentiation

บางครั้งเราต้องการหา derivative ของฟังก์ชัน ซึ่งไม่สามารถเขียนได้ ในรูปฟอร์ม  $y = f(x)$  เช่นในความสัมพันธ์

$$x^2 + y^3 - xy = 0$$

การหา derivative ของ  $y$  เทียบกับ  $x$  เราไม่จำเป็นต้องเขียนความสัมพันธ์ ให้อยู่ในรูป  $y = f(x)$  ก่อน หลักการสำคัญก็คือ เราคิดให้  $y$  เป็น ฟังก์ชันของ  $x$  เช่นในตัวอย่างที่ยกมา ถ้าเราหา derivative ทั้งสองข้าง ของสมการเทียบกับ  $x$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^2 + y^3 - xy] &= \frac{d}{dx}[0] \\ \frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[y^3] - \frac{d}{dx}[xy] &= 0 \\ 2x + 3y^2 \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx} - y &= 0\end{aligned}\tag{3.21}$$

เขียนใหม่ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 3y^2}$$

**ตัวอย่าง 3.21.** กำหนดให้  $y^2 = x^3(2 - x)$  สังเกตว่า  $(x, y) = (1, 1)$  อยู่บน กราฟของความสัมพันธ์ จงหาว่าความชันของกราฟนี้ที่จุด  $(1, 1)$

**วิธีทำ** หา derivative เทียบกับ  $x$  ทั้งสองข้าง ของสมการ

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[y^2] &= \frac{d}{dx}[x^3(2 - x)] \\ \frac{d}{dy}[y^2] \cdot \frac{dy}{dx} &= x^3 \frac{d}{dx}[2 - x] + (2 - x) \frac{d}{dx}[x^3] \\ (2y) \cdot \frac{dy}{dx} &= -x^3 + (2 - x)(3x^2) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(2 - x)(3x^2)}{2y}\end{aligned}\tag{3.22}$$

ดังนั้นที่จุด  $(x, y) = (1, 1)$  เราจะได้ derivative ของ  $y$  เทียบ กับ  $x$  เป็น  $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}$

**ตัวอย่าง 3.22.** จงหาสมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งของสมการ

$$xy^2 = 1$$

ที่จุด  $(1, -1)$

**วิธีทำ** เริ่มด้วยการหาความชันของเส้นสัมผัสที่จุด  $(1, -1)$  เราหา derivative ของสมการเทียบกับ  $x$

ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[xy^2] &= \frac{d}{dx}[1] \\ x \frac{d}{dx}[y^2] + y^2 \frac{d}{dx}[x] &= 0 \\ x(2y) \frac{dy}{dx} + y^2 &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{2x}\end{aligned}\tag{3.23}$$

ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสที่จุด  $(1, -1)$  มีค่าเท่ากับ  $1/2$  สมการเส้นสัมผัสของเส้นโค้งที่จุด  $(1, -1)$  จึงเป็น

$$\begin{aligned}\frac{y - (-1)}{x - 1} &= \frac{1}{2} \\ y + 1 &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\end{aligned}\tag{3.24}$$

นั่นคือ  $y = \frac{x-3}{2}$

**ตัวอย่าง 3.23.** พิจารณาสมการ

$$\frac{1}{3}x^3 + y^3 - xy^2 = 5$$

จงหาว่าที่จุดใดบนเส้นโค้งที่เส้นสัมผัสขนานแกน  $x$

**วิธีทำ** เราเริ่มด้วยการหา derivative ของสมการ

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3 + y^3 - xy^2\right] &= \frac{d}{dx}[5] \\ \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3\right] + \frac{d}{dx}[y^3] - \frac{d}{dx}[xy^2] &= 0 \\ x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - x \frac{d}{dx}[y^2] - y^2 &= 0 \\ x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - x(2y) \frac{dy}{dx} - y^2 &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y^2 - x^2}{3y^2 - 2xy}\end{aligned}\tag{3.25}$$

สังเกตว่าเส้นสัมผัสที่ขนานแกน  $x$  จะมีความชันเป็น 0 ดังนั้นที่จุดบนเส้นโค้งซึ่งมีเส้นสัมผัสขนานแกน  $x$  สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{aligned}y^2 - x^2 &= 0 \quad \text{และ} \\ \frac{1}{3}x^3 + y^3 - xy^2 &= 5\end{aligned}\tag{3.26}$$

เนื่องจาก  $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) = 0$

- เมื่อ  $y = x$  เราได้ว่า  $x^3 = 15$  หรือ  $x = y = \sqrt[3]{15}$

2. เมื่อ  $y = -x$  เราได้ว่า  $x^3 = -3$  หรือ  $x = -y = \sqrt[3]{-3}$

เพราะฉะนั้นที่จุด  $(\sqrt[3]{15}, \sqrt[3]{15})$  และ  $(\sqrt[3]{-3}, -\sqrt[3]{-3})$  บนเส้นโค้ง เส้นสัมผัสมีความชันเป็น 0

### 3.8.3 Related Rates

เราศึกษาปัญหา related rates เราต้องการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ ปริมาณหนึ่งซึ่งมีความสัมพันธ์ กับอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณอื่น ซึ่งเราทราบค่าแล้ว วิธีการทำได้ดังนี้

1. กำหนดปริมาณต่าง ๆ ด้วยตัวแปร
2. ระบุอัตราการเปลี่ยนของปริมาณที่รู้ค่า และอัตราการเปลี่ยนแปลง ของปริมาณที่ต้องการหาค่า
3. หาสมการซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณในข้อสอง
4. หา derivative ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับเวลา แก่สมการหาค่าของ อัตราการเปลี่ยนของ ปริมาณที่ไม่รู้ค่า
5. หาค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงที่จุดกำหนด

**ตัวอย่าง 3.24.** สมมติว่าเนื้องอกมีรูปร่างคล้ายทรงกลม ซึ่งสูตรการหาปริมาตรของทรงกลม คือ  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  เมื่อ  $r$  เป็นรัศมีของทรงกลม เนื่องจากเนื้องอกมีการขยายตัว ทำให้  $r$  มีขนาดยาวขึ้นด้วย อัตราคงที่ 1.25 มิลลิเมตรต่อเดือน อยากทราบว่าปริมาตรของเนื้องอกจะเพิ่มขึ้นมากน้อยเพียงใด เมื่อ  $r = 10$  mm

กำหนดให้  $V$  เป็นปริมาตรของเนื้องอก (หน่วยคือ  $mm^3$ )  $r$  เป็นรัศมีของเนื้องอก (หน่วยคือ mm) จากโจทย์ จะเห็นว่า เมื่อเวลาผ่านไป เนื้องอกมีการขยายตัวทำให้  $r$  มีขนาดยาวขึ้น และ  $V$  เพิ่มขึ้น ด้วย ดังนั้น  $V, r$  ล้วนเป็นตัวแปรตาม ในขณะที่  $t$  เป็นตัวแปรต้น นอกจากนี้ โจทย์ยังบอกอีกด้วยว่า  $r$  มีขนาดยาวขึ้นด้วยอัตรา 1.25 มิลลิเมตรต่อเดือน ดังนั้น  $\frac{dr}{dt} = 1.25$  สิ่งที่เราต้องการคือ อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของเนื้องอก นั่นคือ  $\frac{dV}{dt}$  จากความสัมพันธ์  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  หาอนุพันธ์เทียบกับ  $t$  ทั้ง 2 ข้าง  $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$  เมื่อ  $r = 10$  mm

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(10)^2(1.25) = 500\pi > 0$$

ดังนั้น ปริมาตรของเนื้องอกจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา  $500\pi$  ลูกบาศก์มิลลิเมตรต่อเดือน

**ตัวอย่าง 3.25.** วิธีการอย่างง่าย ในการกำจัดตะกอนที่แขวนลอยอยู่ในน้ำ เติมน้ำลงในกรวยที่มี filter ไว้ สมมติว่ากรวยสูง 16 นิ้ว และมีรัศมีที่ฐานเท่ากับ 4 นิ้ว ถ้าน้ำไหลออกจากกรวยด้วยอัตราเร็ว 2 ลูกบาศก์ นิ้วต่อนาที เมื่อระดับน้ำสูง 8 นิ้ว ความลึกของน้ำจะลดลงมากน้อยเพียงไร



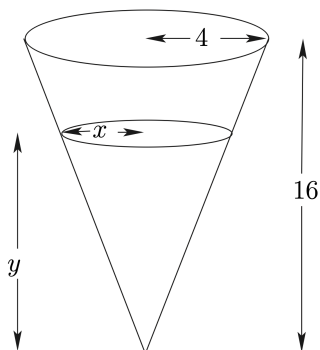


Figure 3.2: การไหลเวียนของอากาศในหลอดลม

กำหนดให้  $t$  เป็นเวลานับจากการเริ่มต้นการสังเกต (min)  $V$  เป็นปริมาตรของน้ำในกรวย ณ เวลา  $t$  ( $\text{in}^3$ )  $y$  เป็นความลึกของน้ำในกรวย ณ เวลา  $t$  (in)  $x$  เป็นรัศมีของพื้นที่ผิวของน้ำ ณ เวลา  $t$  (in) อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของน้ำ คือ  $\frac{dV}{dt}$  และ อัตราการเปลี่ยนแปลงความลึกของน้ำ คือ  $\frac{dy}{dt}$  โจทย์กล่าวว่าน้ำไหลออกจากกรวยด้วยอัตราเร็ว  $2 \text{ in}^3/\text{min}$  เมื่อระดับน้ำสูง 8 in แสดงว่า น้ำในกรวยมีปริมาตรลดลง

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{y=8} = -2$$

การระบุอัตราการเปลี่ยนแปลงแบบนี้ แสดงให้เห็นว่า ณ ความลึกของน้ำต่างกัน อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของน้ำก็จะแตกต่างกันไป ไม่ได้เปลี่ยนแปลงด้วยอัตราที่คงที่เหมือนตัวอย่างก่อนหน้านี้ โจทย์ต้องการทราบว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงความลึกของน้ำ เมื่อระดับน้ำสูง 8 นิ้ว นั่นคือ  $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=8}$

จากสูตรการหาปริมาตรของกรวย

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

และจากคุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย  $\frac{x}{y} = \frac{4}{16}$  หรือ  $x = \frac{y}{4}$  ทำให้ได้  $V = \frac{\pi}{48}y^3$  หาอนุพันธ์

เทียบกับ  $t$  ทั้ง 2 ข้าง จะได้  $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{48}(3y^2 \frac{dy}{dt})$  หรือ  $\frac{dy}{dt} = \frac{16}{\pi y^2} \frac{dV}{dt}$  ดังนั้น

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=8} = \frac{16(-2)}{\pi(8)^2} = \frac{-1}{2\pi} \text{ (in/min)}$$

สรุปว่า เมื่อระดับน้ำสูง 8 นิ้ว ความลึกของน้ำจะลดลงด้วยอัตรา  $\frac{1}{2\pi}$  นิ้วต่อวินาที

**ตัวอย่าง 3.26.** เมื่อโยนก้อนหินลงในสระน้ำ จะเกิดคลื่นซึ่งรัศมีเพิ่มขึ้นด้วย อัตรา 0.9 เมตร/วินาที พื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่นหลังจาก ผ่านไป 10 วินาทีเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด?

**วิธีทำ** กำหนดให้

1.  $t$  แทนเวลา (วินาที)
2.  $r$  แทนรัศมีของคลื่น (เมตร)
3.  $A$  แทนพื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่น (ตารางเมตร)

พื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่นเป็นไปตามสูตร

$$A = \pi r^2$$

เราหา derivative เทียบกับเวลา ได้ว่า

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

เรามีข้อมูลว่า  $\frac{dr}{dt} = 0.9$  เมตร ในขณะทีวินาที ที่ 10 รัศมีของคลื่นจึงมีค่าเท่ากับ  $0.9 \cdot 10 = 9$  เมตร และดังนั้นพื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่นจึงเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา

$$\frac{dA}{dt} = (2\pi)(9)(0.9) = 50.89$$

ตารางเมตรต่อวินาที

**ตัวอย่าง 3.27.** เครื่องเททราย เททรายเป็นรูปกรวย ซึ่งความสูงของกองทรายมีค่าเท่ากับ เส้นผ่านศูนย์กลางที่ฐานของกองทรายเสมอ ถ้าความสูงเพิ่มขึ้นด้วยอัตราคงที่ 1.5 เมตร ต่อนาที จงหาว่าเครื่องเททรายเททรายด้วยอัตราเท่าใดเมื่อกองทรายมีความ สูงเท่ากับ 3 เมตร

**วิธีทำ** กำหนดให้

1.  $t$  แทนเวลา (นาที)
2.  $V$  แทนปริมาตรของกองทราย ณ เวลา  $t$  (ลูกบาศก์เมตร)
3.  $h$  แทนความสูงของกองทราย ณ เวลา  $t$  (เมตร)
4.  $r$  แทนรัศมีของพื้นกองทราย ณ เวลา  $t$  (เมตร)

ในแต่ละเวลา  $t$  อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรทรายคือ  $dV/dt$  และอัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงของกองทรายคือ  $dh/dt$  จากข้อมูล ที่ให้มา เราได้ว่า

$$\frac{dh}{dt} = 1.5$$

เนื่องจากกองทรายมีลักษณะเป็นรูปกรวย ซึ่งมีสูตรว่า

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

เรายังทราบอีกว่า ที่แต่ละเวลา  $t$  ความสูงของกองทราย มีค่าเท่ากับรัศมีของพื้นกองทราย  $r = h$  เพราะฉะนั้น

$$V = \frac{1}{3}\pi h^3$$

หา derivative เทียบกับ  $t$  ได้ว่า

$$\frac{dV}{dt} = \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

ดังนั้น

$$\frac{dV}{dt} = 1.5\pi h^2$$

เมื่อกองทรายสูง 3 เมตร อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรกองทรายจึงเป็น

$$\frac{dV}{dt} = 13.5\pi = 42.41$$

ลูกบาศก์เมตรต่อวินาที

**ตัวอย่าง 3.28.** จุด  $P$  เคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งตามสมการ

$$y = \sqrt{x^2 + 16}$$

เมื่อ  $P = (3, 5)$  แล้ว  $y$  มีค่าเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2 หน่วย/วินาที ค่า  $x$  มีการเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด

**วิธีทำ** กำหนดให้

1.  $t$  แทนเวลา (วินาที)

เราหา derivative ของสมการที่กำหนดเทียบกับเวลา  $t$  พบว่า

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} \frac{dx}{dt}$$

เรารู้ว่าที่จุด  $P = (3, 5)$

$$\frac{dy}{dt} = 2$$

แทนค่าทั้งสองในสมการ

$$E : \text{example}$$

เราจะได้ว่า

$$2 = \frac{2}{\sqrt{9 + 16}} \frac{dx}{dt}$$

นั่นคือ

$$\frac{dx}{dt} = 5$$

นั่นคือ  $x$  มีการเปลี่ยนแปลงด้วยอัตรา 5 หน่วยต่อวินาที

**ตัวอย่าง 3.29.** ทำเรือหนึ่ง มีแท่งแขวนลูกรอกผูกเรืออยู่เหนือท่า มีเชือกผูกไว้กับ หัวเรือซึ่งอยู่ต่ำกว่าตัวรอกของแท่งแขวน 3 เมตร ถ้าเราดึงเชือกด้วยอัตราเร็ว 6 เมตร/นาที เรือถูกดึงเข้าหาท่าด้วยอัตราเร็วเท่าใดเมื่อเชือก จากหัวเรือถึงลูกรอกมีความยาว 40 เมตร

**วิธีทำ** กำหนดให้

1.  $t$  แทนเวลา (นาที)
2.  $x$  ระยะทางในแนวนอน (เมตร)
3.  $y$  ระยะทางในแนวตั้ง (เมตร)

จากข้อมูลของปัญหา เราสรุปได้ว่า อัตราการดึงเชือกแทนด้วยพจน์

$$\frac{dy}{dt} = 6$$

คำถามให้  $\frac{dx}{dt}$  เมื่อเชือกยาว 40 เมตรนับจากหัวเรือถึงลูกรอก โดยการใช้พีทาโกรัส เราจึงได้ความสัมพันธ์

$$x^2 + y^2 = 40^2$$

เราหา derivative เทียบกับ  $t$  ทั้งสองข้างของสมการ

$$\begin{aligned} 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} &= 0 \\ x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

เนื่องจากลูกรอกอยู่สูงกว่าหัวเรือ 3 เมตร หรือ  $y = 3$  ในขณะที่ การดึงเชือกด้วยอัตราเร็ว 6 เมตร หรือ  $\frac{dy}{dt} = 6$  เพราะฉะนั้น เมื่อเชือกยาว 40 เมตร เรืออยู่ห่างออกไปเป็นระยะทาง

$$x^2 + 3^2 = 40^2$$

หรือ  $x = \sqrt{1591}$  ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sqrt{1591} \frac{dx}{dt} + 4(6) &= 0 \\ \frac{dx}{dt} &= -\frac{24}{\sqrt{1591}} = -0.60 \end{aligned} \tag{3.28}$$

ซึ่งหมายถึงเรือถูกดึงเข้าหาท่าด้วยอัตราเร็ว 0.6 เมตรต่อนาที

1. วาดภาพและกำหนดตัวแปรต่างๆ เช่น  $x, y$  เป็นต้น
2. ระบุอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรทุกตัวที่โจทย์กำหนดให้ และที่โจทย์ต้องการให้หา เช่น  $\frac{dx}{dt}$ ,  $\frac{dy}{dt}$  เป็นต้น

3. หาสมการสมการหนึ่งๆที่แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่กำหนดขึ้นในขั้นตอนที่ 1 และเมื่อหาอนุพันธ์ของสมการนี้ จะมีเทอมที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ในขั้นตอนที่ 2
4. หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการในขั้นตอนที่ 3 เทียบกับเวลาและนำค่าของอนุพันธ์ที่ทราบลงไป  
ในสมการ
5. หาค่าของอนุพันธ์ที่โจทย์ต้องการด้วยวิธีทางพีชคณิต

### 3.8.4 แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้  $y = \ln x$  จงหา  $dy$  และ  $\Delta y$  ที่  $x = 1$  โดย ที่  $dx = \Delta x = 0.5$
2. พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ แล้วหาสูตร  $dy$  และ  $\Delta y$ 
  1.  $y = x\sqrt{x-1}$
  2.  $y = xe^x$
  3.  $y = x \sin x$
  4.  $y = \tan(x^2)$
3. จงหา local linear approximation ของเส้นโค้งจากสมการ  $xe^y = y$  ที่จุด  $(0, 0)$  และใช้  
สมการที่ได้ประมาณค่าของ  $y$  เมื่อ  $x = 0.1$
4. จงหา  $\frac{dy}{dx}$  สำหรับความสัมพันธ์ต่อไปนี้
  1.  $x^2 + y^2 = 25$
  2.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$
  3.  $x \sin y + y \sin x = 1$
  4.  $e^{xy} + xy = 1$
5. หญิงคนหนึ่งสูง 1.55 เมตร เดินเข้าเสาไฟด้วยอัตราเร็ว 0.75 เมตร/วินาที เสาไฟติดดวงไฟสูง 5  
เมตร
  1. เงามองหญิงคนนี้เปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด
  2. ปลายเงาของด้านศีรษะหญิงคนนี้เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่าใด
6. อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งอธิบายตามสมการ
$$\frac{x^2 y}{1 + y^2} = \frac{2}{5}$$

กำหนดให้พิกัดแกน  $x$  ของอนุภาคเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 4 หน่วย/วินาที เมื่ออนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง  
(1, 2)

  1. พิกัดแกน  $y$  ของอนุภาคเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด เมื่ออนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง (1, 2)

2. ณ ตำแหน่ง  $(1, 2)$  อนุภาคกำลังเคลื่อนสูงขึ้นหรือลดลงในพิกัด  $xy$
7. ความเข้มของแสงที่ผ่านเข้าตาขึ้นอยู่กับรัศมีของ pupil ถ้า pupil มีขนาดมากขึ้น ปริมาณของแสงก็จะเข้าตามากขึ้น ดังสมการ  $I = kr^2$  เมื่อ  $I$  เป็นความเข้มของแสง  $r$  เป็นรัศมีของ pupil และ  $k$  เป็นค่าคงตัว ในช่วงเวลา 6 โมงเช้าถึงเที่ยง รัศมีของ pupil จะขยายตัวด้วยอัตราเร็วคงที่  $0.1 \text{ mm/min}$  จงหาว่าในช่วงเวลาดังกล่าว ความเข้มของแสงที่ผ่านเข้าตา จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร เมื่อ  $r = 0.5 \text{ cm}$
8. การแพร่ระบาดของแมลงวันทอง เริ่มที่ใจกลางของหมู่บ้านเล็กๆ แห่งหนึ่งนอกเมือง พื้นที่การแพร่ระบาดมีลักษณะคล้ายวงกลมดังแสดงในรูป 1.5 รัศมีของพื้นที่การแพร่ระบาดขยายเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา  $1.5$  ไมล์ต่อปี จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่การแพร่ระบาด เมื่อรัศมีของพื้นที่การแพร่ระบาดมีค่าเท่ากับ  $4$  ไมล์

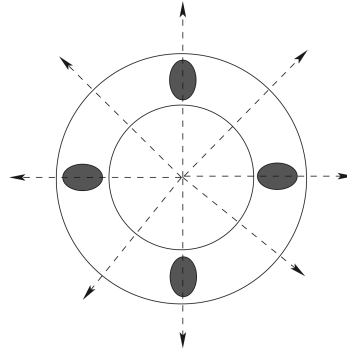


Figure 3.3: การแพร่ระบาดของแมลงวันทอง โดยที่วงรีสีเทาแทนแมลงวัน

### 3.9 อนุพันธ์ ของ ฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ และ อิน เวอร์ ส ของ ฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ

#### 3.9.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เรา จะ ใช้ ความ รู้ เกี่ยว กับ เอก ลั ก ษ ณ ตรีโกณมิติ และ ลิ มิ ต ของ ฟังก์ชัน ตรีโกณ ช่วย ในการ หา อนุพันธ์ ของ ฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ โดย นิยาม ดัง นี้

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \quad \text{เมื่อ } x \text{ มีหน่วยเป็นเรเดียน} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= 0 \\ \sin A - \sin B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{aligned} \tag{3.29}$$

**ทฤษฎี 3.4.** ถ้า  $f(x) = \sin x$  แล้ว  $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \sin x &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{h} \\
 &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{h} \\
 &= 2 \cos x \lim_{\frac{h}{2} \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\
 &= 2(\cos x) \frac{1}{2} \\
 &= \cos x
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
 \sin(x+h) - \sin x &= 2 \cos \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{h}{2} \\
 &= 2 \cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

สำหรับการหาอนุพันธ์ของ cosine ก็ทำได้ในทำนองเดียวกันกับ sine ส่วนฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ หาได้โดยแปลงในรูป cosine หรือ sine เช่น

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ และ } \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

**ทฤษฎี 3.5.**

1.  $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
2.  $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$
3.  $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$
4.  $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$
5.  $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \sec x &= \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{\cos x} \\
&= \frac{d}{dx} (\cos x)^{-1} \\
&= (-1)(\cos x)^{-2} \frac{d}{dx} \cos x \\
&= \frac{-1}{\cos^2 x} (-\sin x) \\
&= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \sec x \tan x
\end{aligned} \tag{3.32}$$

ตัวอย่าง 3.30. กำหนดให้  $y = x^2 \tan 3x$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (x^2 \tan 3x) \\
&= x^2 \frac{d}{dx} \tan 3x + \tan 3x \frac{d}{dx} x^2 \\
&= x^2 (\sec^2 3x)(3) + (\tan 3x)(2x) \\
&= 3x^2 \sec^2 3x + 2x \tan 3x
\end{aligned} \tag{3.33}$$

ตัวอย่าง 3.31. กำหนดให้  $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) \\
&= \frac{(1 + \cos x) \frac{d}{dx} \sin x - \sin x \frac{d}{dx} (1 + \cos x)}{(1 + \cos x)^2} \\
&= \frac{(1 + \cos x) \cos x - (\sin x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} \\
&= \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} \\
&= \frac{1}{1 + \cos x}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

ตัวอย่าง 3.32. กำหนดให้  $y = \sec^2(3x - 1)$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$



วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \sec^2(3x-1) \\
&= 2 \sec(3x-1) \frac{d}{dx} \sec(3x-1) \\
&= 2 \sec(3x-1) \sec(3x-1) \tan(3x-1) \frac{d}{dx} (3x-1) \\
&= 3.2 \sec^2(3x-1) \tan(3x-1) \\
&= 6 \sec^2(3x-1) \tan(3x-1)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

ตัวอย่าง 3.33. ถ้า  $x \cos y + y \cos x = 1$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ใช้ implicit differentiation

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} (x \cos y + y \cos x) &= \frac{d}{dx} 1 \\
\frac{d}{dx} (x \cos y) + \frac{d}{dx} (y \cos x) &= 0 \\
x \frac{d}{dx} \cos y + \cos y \frac{dx}{dy} + y \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \frac{dy}{dx} &= 0 \\
x(-\sin y) \frac{dy}{dx} + \cos y + y(-\sin x) + \cos x \frac{dy}{dx} &= 0 \\
(-x \sin y + \cos x) \frac{dy}{dx} &= y \sin x - \cos y \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y \sin x - \cos y}{\cos x - x \sin y}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

ตัวอย่าง 3.34. จงหา  $\frac{d^2y}{dx^2}$  ของฟังก์ชัน  $y = x \cos x$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
y &= x \cos x \\
y' &= \frac{d}{dx} (x \cos x) \\
&= \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \frac{dx}{dx} \\
&= -x \sin x + \cos x \\
y'' &= -(x \frac{d}{dx} \sin x + \sin x \frac{dx}{dx}) + \frac{d}{dx} \cos x \\
&= -(x \cos x + \sin x) - \sin x \\
&= -x \cos x - 2 \sin x
\end{aligned} \tag{3.37}$$

### 3.9.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จะเห็นว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งหมดคือ sine, cosine, tangent, cotangent, secant และ cosecant เป็นฟังก์ชันคาบซึ่งสมาชิกในโดเมน จะให้ค่าซ้ำกัน ดังนั้น ฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็น 1-1 ฟังก์ชัน แต่เราสามารถจำกัดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อให้ฟังก์ชันเหล่านี้ เป็น 1-1 ฟังก์ชัน ก็จะทำให้อินเวอร์สของฟังก์ชันเหล่านั้นเป็นฟังก์ชันด้วย เช่น

$$F = \{(x, y) | y = \sin x\} \text{ มีโดเมน } = \mathfrak{R} \text{ และเรนจ์ } = [-1, 1]$$

ไม่เป็น 1-1 ฟังก์ชัน แต่

$$F = \{(x, y) | y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$$

เป็น 1-1 ฟังก์ชัน ดังนั้น

$$F^{-1} = \{(x, y) | x = \sin y, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], x \in [-1, 1]\}$$

เป็น อินเวอร์สฟังก์ชันของ  $F$  เรียกว่า inverse sine function ใช้สัญลักษณ์  $\sin^{-1} x$  หรือ  $\arcsin x$

ในทำนองเดียวกัน

**ทฤษฎี 3.6.**

1.  $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$
2.  $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$
3.  $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = \frac{-1}{1+x^2}.$
4.  $\frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$
5.  $\frac{d}{dx} \operatorname{arccosec} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$
6.  $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

ให้  $y = \arcsin x, |x| < 1$

$$\begin{aligned}
x &= \sin y, \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\
\frac{dx}{dy} &= \frac{d}{dy} \sin y \\
1 &= \cos y \frac{dy}{dx} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y}, |x| < 1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

ตัวอย่าง 3.35. จงหา  $\frac{dy}{dx}$  เมื่อ  $y = \sin^{-1}(2x)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(2x) \\
&= \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

ตัวอย่าง 3.36. จงหา  $y'$  เมื่อ  $y = \operatorname{arcsec} x^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x^2 \\
&= \frac{1}{|x|^2 \sqrt{x^4 - 1}} \cdot \frac{d}{dx}(x)^2 \\
&= \frac{2x}{x^2 \sqrt{x^4 - 1}} \\
&= \frac{2}{x \sqrt{x^4 - 1}}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

ตัวอย่าง 3.37. จงหา  $y'$  เมื่อ  $y = \cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \tan^{-1} x$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}y &= \cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \tan^{-1} \\y' &= \frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \tan^{-1}\right) \\&= \frac{d}{dx} \cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{d}{dx} \tan^{-1} x \\&= \frac{-1}{1 - \frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{1 + x^2} \\&= \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{1 + x^2} \\&= \frac{2}{x^4 - 1}\end{aligned} \tag{3.41}$$

## Chapter 4

# การประยุกต์ของอนุพันธ์ (Applications of Differentiation)

### 4.1 Applications of derivatives related to students discipline

จากบทเรียนก่อนหน้านี้ เราทราบว่าถ้าตัวแปร  $y$  สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันๆ หนึ่ง ที่ขึ้นกับตัวแปร  $x$  นั่นคือ  $f(x)$  เราจะสามารถวาดกราฟของ  $y$  หรือฟังก์ชัน  $f(x)$  ได้ และถ้าเราทราบว่า จุด  $P(x_0, y_0)$  และจุด  $Q(x_1, y_1)$  ต่างอยู่บนกราฟของ  $y$  แสดงว่า  $y_0 = f(x_0)$  และ  $y_1 = f(x_1)$  นั่นเอง ความชันของเส้นตรงที่ลากผ่านจุด  $P$  และจุด  $Q$  มักใช้  $m$  เป็นสัญลักษณ์ มีสูตรการหาดังนี้

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

ความชันของเส้นตรงที่กล่าวมาแล้วนี้ มีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ  $f(x)$  ตั้งแต่  $x = x_0$  จนถึง  $x = x_1$  และ

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $f(x)$  ณ  $x = x_0$  หรือการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f(x)$  เทียบกับตัวแปร  $x$  เมื่อ  $x$  มีค่าเท่ากับ  $x_0$  นั่นเอง

หลัก การ หา อนุพันธ์ สามารถ นำ ไป ประยุกต์ ใช้ได้ ใน หลาก หลาย สาขา วิชาชีพ ไม่ว่าจะเป็น ธุรกิจ เศรษฐศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ฟิสิกส์ เคมี หรือแม้กระทั่งชีววิทยา สำหรับบทนี้ ผู้เขียนจะขอกล่าวถึง การนำแนวคิดทางคณิตศาสตร์นี้ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาทางวิทยาศาสตร์ชีวภาพ เพื่อให้สอดคล้องกับความสนใจของผู้เรียน

**ตัวอย่าง 4.1.** AIDS ย่อมาจาก acquired immunodeficiency syndrome เป็นโรคติดต่อทางเพศสัมพันธ์และการให้เลือด ซึ่งพบการแพร่ระบาดมาตั้งแต่ปี พ.ศ. 2523 โดยผู้ป่วยที่เป็นโรค AIDS จะพบเชื้อไวรัส HIV ใน antibodies ซึ่งไวรัส HIV นี้มีระยะฟักตัวตั้งแต่ไม่กี่เดือน จนกระทั่งนานนับปี นักวิจัยคนหนึ่งนำเชื้อไวรัส HIV มาเพาะเลี้ยงในจานเพาะเชื้อ พบว่า ขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา  $t$ ,  $N(t)$  สอดคล้องกับสมการ  $N(t) = 1000 + 20t + t^2$  อยากทราบว่าไวรัสชุดนี้มีอัตราการเปลี่ยนแปลง ณ  $t$  ใดๆ เป็นอย่างไร

กำหนดให้  $t$  แทน เวลา  $N(t)$  แทน ขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา  $t$  จากการทดลองพบว่า ขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา  $t$  ใดๆ สอดคล้องกับสมการ

$$N(t) = 1000 + 20t + t^2$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา  $t$  ใดๆ คือ

$$\frac{dN}{dt} = 20 + 2t$$

**ตัวอย่าง 4.2.** จากการสำรวจพบว่า จำนวนผู้ป่วยด้วยโรค AIDS,  $P(t)$  มีความสัมพันธ์กับสมการ

$$P(t) = 100t^2 - 2t^3$$

เมื่อ  $t$  เป็นเวลาที่ผ่านไปนับจากวันนี้ มีหน่วยเป็นวัน อยากทราบว่าเมื่อ 20 วันผ่านไป จะมีผู้ป่วยด้วยโรคนี้กี่คน และมีอัตราการเพิ่มจำนวนผู้ป่วยเป็นเท่าไร

กำหนดให้  $t$  แทน เวลา มีหน่วยเป็นวัน  $P(t)$  แทน จำนวนผู้ป่วยด้วยโรค AIDS มีหน่วยเป็นคน จากการสำรวจพบว่า

$$P(t) = 100t^2 - 2t^3$$

เมื่อ 20 วันผ่านไป แสดงว่า  $t = 20$  จะได้ว่า  $P(20) = 100(20)^2 - 2(20)^3 = 24,000$  ดังนั้น เมื่อ 20 วันผ่านไป จะมีผู้ป่วยโรค AIDS 24,000 คน อัตราการเพิ่มจำนวนผู้ป่วยโรค AIDS ณ เวลา  $t$  ใดๆ หาได้ดังนี้

$$\frac{dP}{dt} = 200t - 6t^2$$

ดังนั้น เมื่อ 20 วันผ่านไป อัตราการเพิ่มจำนวนผู้ป่วยจะมีค่าเท่ากับ  $200(20) - 6(20)^2$  หรือ 1,600 คนต่อวัน

**ตัวอย่าง 4.3.** จากการศึกษาดังสิ่งแวดล้อมระบุว่า  $Q(t)$  ระดับ carbon monoxide (CO) เฉลี่ยในอากาศ (หน่วยเป็น ppm) จะมีค่าเป็นเท่าไร

$$Q(t) = 0.05t^2 + 0.1t + 3.4$$

เมื่อ  $t$  เป็นเวลาที่นับจากนี้เป็นต้นไป มีหน่วยเป็นปี อยากทราบว่า ระดับ CO เฉลี่ยในอากาศจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร ในอีก 2 ปี ข้างหน้า

กำหนดให้  $t$  เป็นเวลาที่นับจากวันนี้ มีหน่วยเป็นปี  $Q(t)$  เป็นระดับ CO เฉลี่ยในอากาศมีหน่วยเป็น ppm จากการศึกษาดังสิ่งแวดล้อมระบุว่า

$$Q(t) = 0.05t^2 + 0.1t + 3.4$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงระดับ CO เฉลี่ยในอากาศ ณ  $t$  ใดๆ คือ

$$\frac{dQ}{dt} = 0.1t + 0.1$$

ในอีก 2 ปีข้างหน้า  $t = 2$

$$\frac{dQ}{dt} = 0.1(2) + 0.1 = 0.3 > 0$$

ระดับ CO เฉลี่ยในอากาศจะเพิ่มขึ้น (เพราะ  $\frac{dQ}{dt} > 0$ ) ด้วยอัตราเร็ว 0.3 ppm ต่อปี

**ตัวอย่าง 4.4.** Poiseuille's law กล่าวว่า ความเร็วของเลือด (หน่วย คือ เซนติเมตรต่อวินาที) ที่อยู่ห่างจากจุดกึ่งกลางของหลอดเลือด  $r$  เซนติเมตร มีสูตรดังนี้  $S(r) = C(R^2 - r^2)$  เมื่อ  $C$  เป็นค่าบวกใดๆ และ  $R$  เป็นรัศมีของหลอดเลือด อยากทราบว่า ความเร็วของเลือดจะเปลี่ยนแปลงเป็นอย่างไร เมื่อเลือดอยู่บริเวณกึ่งกลางระหว่างจุดกึ่งกลางและผนังของหลอดเลือด

กำหนดให้  $r$  เป็นระยะห่างจากจุดกึ่งกลางของหลอดเลือด (หน่วยเป็นเซนติเมตร)  $S(r)$  เป็นความเร็วของเลือด ณ  $r$  ใดๆ (หน่วยเป็นเซนติเมตรต่อวินาที) จาก Poiseuille's law

$$S(r) = C(R^2 - r^2)$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วของเลือด ณ  $r$  ใดๆ คือ

$$\frac{dS}{dr} = -2Cr$$

เลือดที่อยู่บริเวณกึ่งกลางระหว่างจุดกึ่งกลางและผนังของหลอดเลือดหมายถึง  $r = \frac{R}{2}$  ดังนั้น

$$\left. \frac{dS}{dr} \right|_{r=R/2} = -CR < 0 \text{ เพราะว่า } C > 0, R > 0$$

แสดงว่าความเร็วของเลือดจะลดลง (เพราะ  $\frac{dS}{dr} < 0$ ) ด้วยอัตรา  $CR$  (cm/s)/cm

#### 4.1.1 แบบฝึกหัด

- ผลการทดลองแสดงให้เห็นว่า ความเข้มข้นของปริมาณ adrenaline ที่ฉีดเข้าไปในร่างกาย,  $x$ , มีความสัมพันธ์กับการตอบสนองของกล้ามเนื้อ,  $y$ , ด้วยสมการ  $y = \frac{x}{a+bx}$  เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นค่าคงตัว จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงการตอบสนองของกล้ามเนื้อ เมื่อเทียบกับความเข้มข้นของปริมาณ adrenaline ที่ฉีดเข้าไปในร่างกาย
- กำหนดให้  $P(t) = \frac{1000t}{t+10}$  แสดงถึงขนาดของประชากรแบคทีเรีย เมื่อ  $t$  เป็นเวลา จงหาอัตราการเจริญเติบโตของประชากร
- Schutty - Borisoff laws กล่าวถึง ปริมาณ substrate,  $y$ , ที่ถูกเปลี่ยนรูปด้วยเอนไซม์ ในรูปของฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลา  $t$  ดังนี้

$$y = k\sqrt{cat}$$

เมื่อ  $k$ ,  $a$ ,  $c$  เป็นค่าคงตัว จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาณ substrate ที่ถูกเปลี่ยนรูปด้วยเอนไซม์ ณ เวลา  $t$  ใดๆ

## 4.2 Sketching the graph of a function from the derivative

ในหัวข้อนี้เราใช้ประโยชน์จากเรื่อง derivative ในการวาดกราฟของฟังก์ชัน เมื่อนึกถึงกราฟของฟังก์ชัน เราสนใจลักษณะที่สำคัญ เช่น ช่วงใดที่กราฟเพิ่ม ช่วงใดที่กราฟลด ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของกราฟอยู่ที่ใด กราฟมีลักษณะคว่ำในช่วงใด หรือมีลักษณะหงายในช่วงใด เป็นต้น

แนวคิดแรกคือเรื่องของการเพิ่มและลดของฟังก์ชัน เรามารู้จักนิยามก่อน

**นิยาม 4.1.** ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วง  $I$  ให้  $x_1$  และ  $x_2$  เป็น สมาชิกในช่วง  $I$

- $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง  $I$  ก็ต่อเมื่อ ถ้า  $x_1 < x_2$  แล้ว  $f(x_1) < f(x_2)$
- $f$  เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง  $I$  ก็ต่อเมื่อ ถ้า  $x_1 < x_2$  แล้ว  $f(x_1) > f(x_2)$
- $f$  เป็นฟังก์ชันคงตัวบนช่วง  $I$  ก็ต่อเมื่อ สำหรับค่า  $x_1$  และ  $x_2$  ใด ๆ แล้ว  $f(x_1) = f(x_2)$

ประโยชน์ของ derivative ที่ใช้ในการตรวจสอบการเพิ่มและลดของฟังก์ชัน มาจาก ทฤษฎีบท :

**ทฤษฎี 4.1.** ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด  $[a, b]$  และหา derivative ได้ บนช่วงเปิด  $(a, b)$

1. ถ้า  $f'(x) > 0$  สำหรับทุก ๆ  $x \in (a, b)$  แล้ว  $f$  เป็น ฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง  $[a, b]$
2. ถ้า  $f'(x) < 0$  สำหรับทุก ๆ  $x \in (a, b)$  แล้ว  $f$  เป็น ฟังก์ชันลดบนช่วง  $[a, b]$
3. ถ้า  $f'(x) = 0$  สำหรับทุก ๆ  $x \in (a, b)$  แล้ว  $f$  เป็น ฟังก์ชันคงตัวบนช่วง  $[a, b]$

ทฤษฎีบทนี้สามารถขยายผลจากช่วง  $[a, b]$  ไปได้ถึงช่วงในรูป  $[a, \infty)$ ,  $(-\infty, b]$  และ  $(-\infty, \infty)$

**ตัวอย่าง 4.5.** พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

เราหา derivative ของฟังก์ชัน ได้ว่า  $f'(x) = 2x - 3$  ซึ่งบอกเราว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \text{ สำหรับ } x < 3/2 \\ f'(x) &> 0 \text{ สำหรับ } x > 3/2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

เนื่องจาก  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่  $x = 3/2$  เราจึงบอกได้ว่า

$$\begin{aligned} f &\text{ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง } (-\infty, 3/2] \\ f &\text{ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง } [3/2, \infty) \end{aligned} \tag{4.2}$$

แนวคิดต่อไป เป็นเรื่องของลักษณะหงายหรือคว่ำของกราฟของฟังก์ชัน ถ้ากราฟของฟังก์ชันมีลักษณะหงาย เราเรียกว่าฟังก์ชัน concave up ในขณะที่ถ้ากราฟของฟังก์ชันมีลักษณะคว่ำ เราเรียกว่า ฟังก์ชัน concave down นิยามที่ชัดเจนของ concavity ของฟังก์ชันเป็นดังนี้

**นิยาม 4.2.** ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันซึ่งหา derivative ได้บนช่วงเปิด  $I$



- $f$  concave up บนช่วง  $I$  ถ้า  $f'$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง  $I$
- $f$  concave down บนช่วง  $I$  ถ้า  $f'$  เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง  $I$

ลักษณะ concavity ของฟังก์ชัน สามารถตรวจสอบโดยใช้ derivative ดังนี้

**ทฤษฎี 4.2.** ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันซึ่งหา derivative อันดับสองได้บนช่วง  $I$

1. ถ้า  $f''(x) > 0$  บนช่วง  $I$  แล้ว  $f$  concave up บนช่วง  $I$
2. ถ้า  $f''(x) < 0$  บนช่วง  $I$  แล้ว  $f$  concave down บนช่วง  $I$

**ตัวอย่าง 4.6.** พิจารณาฟังก์ชัน  $f(x) = x^2 - 3x + 2$  ถ้าเราคำนวณ derivative อันดับสอง  $f''(x) = 2$  ซึ่งจากทฤษฎีบท เรากล่าวได้ว่า  $f$  concave up บนช่วง  $(-\infty, \infty)$

การเปลี่ยนทิศทางของ concavity ของฟังก์ชัน ก็เป็นอีกที่หนึ่งของกราฟของ ฟังก์ชัน ซึ่งมีลักษณะเด่นที่จุดนี้กราฟอาจมีการเปลี่ยนจากลักษณะหงาย เป็นคว่ำ หรือจากลักษณะคว่ำเป็นหงาย

**นิยาม 4.3.** ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด  $I$  ซึ่งมี  $x_0$  เป็น สมาชิก และ  $f$  เปลี่ยนทิศทางของ concavity ที่จุดนี้ แล้วเรากล่าวว่า  $f$  มี inflection point ที่  $x_0$  และเราเรียก  $(x_0, f(x_0))$  ว่า inflection point ของ  $f$

**ตัวอย่าง 4.7.** ฟังก์ชัน  $f(x) = x^3$  มี

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x$$

สังเกตว่า

- เมื่อ  $x < 0$ ,  $f''(x) < 0$
- เมื่อ  $x > 0$ ,  $f''(x) > 0$

ดังนั้น ที่จุด  $x = 0$ ,  $f$  มีการเปลี่ยนทิศทางของ concavity จาก concave down เมื่อ  $x < 0$  เป็น concave up เมื่อ  $x > 0$  เพราะฉะนั้น inflection point จึงเป็น  $(0, 0)$  สังเกตอีก ว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดช่วง  $(-\infty, \infty)$

ค่าสูงสุดและต่ำสุดในย่านหนึ่ง ๆ ของกราฟก็เป็นอีกลักษณะเด่น ที่เราสามารถ ตรวจสอบได้โดยใช้ derivative ของฟังก์ชัน

**นิยาม 4.4.**

1. ฟังก์ชัน  $f$  มี relative maximum ที่  $x_0$  ถ้ามีช่วงเปิดที่มี  $x_0$  เป็นสมาชิก และ  $f(x_0) \geq f(x)$  สำหรับทุก ๆ  $x$  ที่เป็น สมาชิกในช่วงเปิดดังกล่าว
2. ฟังก์ชัน  $f$  มี relative minimum ที่  $x_0$  ถ้ามีช่วงเปิดที่มี  $x_0$  เป็นสมาชิก และ  $f(x_0) \leq f(x)$  สำหรับทุก ๆ  $x$  ที่เป็น สมาชิกในช่วงเปิดดังกล่าว

3. ถ้า  $f$  มี relative maximum หรือ relative minimum ที่  $x_0$  แล้ว เรากล่าวว่า  $f$  มี relative extremum ที่  $x_0$

ฟังก์ชันหนึ่ง ๆ อาจมี relative maximum, relative minimum หลายที่ อาจมีที่เดียว หรืออาจไม่มีเลยก็ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 4.8.**

- ฟังก์ชัน  $f(x) = (x-1)^2$  มี relative minimum ที่  $x = 1$  แต่ไม่มี relative maximum
- ฟังก์ชัน  $f(x) = x^3$  ไม่มี relative extremum
- ฟังก์ชัน  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$  มี relative maximum ที่  $x = 0$  และมี relative minimum ที่  $x = 1$
- ฟังก์ชัน  $f(x) = \sin x$  มี relative maxima ที่  $\pi/2 + 2n\pi$  และมี relative minima ที่  $3\pi/2 + 2n\pi$  สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม  $n$  ใด ๆ

**ทฤษฎี 4.3.** ถ้า  $f$  มี relative extremum ที่จุด  $x_0$  แล้ว  $f'(x_0) = 0$  หรือ  $f$  หา derivative ไม่ได้ที่  $x_0$

**นิยาม 4.5.** เราเรียก  $x_0$  ว่า critical point ของฟังก์ชัน  $f$  ถ้า  $f'(x_0) = 0$  หรือ  $f$  หา derivative ไม่ได้ที่  $x_0$

**ตัวอย่าง 4.9.** ฟังก์ชัน  $f(x) = |x^2 - x|$  มี critical point ที่จุด  $x = 0, 1$  และฟังก์ชัน  $g(x) = x^2 - x$  ก็มี critical point ที่จุด  $x = 0, 1$  เช่นกัน สังเกตว่า ฟังก์ชัน  $f$  หา derivative ไม่ได้ที่จุด  $x = 0, 1$  ในขณะที่ฟังก์ชัน  $g$  หา derivative ได้ ที่จุดดังกล่าว

การตรวจสอบหา relative extremum โดยใช้ derivative เราใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎี 4.4.** ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ critical point  $x_0$  และถ้า ค่าของ  $f'$  เปลี่ยนเครื่องหมายที่  $x_0$  แล้ว  $f$  มี relative minimum หรือ relative maximum ที่  $x_0$

- ถ้า  $f'$  มีค่าเป็นลบสำหรับค่าทางซ้ายของ  $x_0$  และมีค่า เป็นบวกสำหรับค่าทางขวาของ  $x_0$  แล้ว  $f$  มี relative minimum ที่  $x_0$
- ถ้า  $f'$  มีค่าเป็นบวกสำหรับค่าทางซ้ายของ  $x_0$  และมีค่า เป็นลบสำหรับค่าทางขวาของ  $x_0$  แล้ว  $f$  มี relative maximum ที่  $x_0$

**ตัวอย่าง 4.10.** พิจารณาฟังก์ชัน  $f(x) = |x^2 - x|$  จงหาค่า  $x$  ที่ทำให้  $f$  มี relative extrema

**วิธีทำ** เรารู้ว่า  $x = 0, 1$  เป็น critical point เขียนฟังก์ชัน  $f$  ใหม่ว่า

$$f(x) = |x||x-1| = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 0 \\ -x(x-1) & 0 < x \leq 1 \\ x(x-1) & x > 1 \end{cases}$$

นั่นคือ

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 0 \\ -2x + 1 & 0 < x < 1 \\ 2x - 1 & x > 1 \end{cases}$$

ดังนั้นที่จุด  $x$  ใกล้ ๆ 0 และ  $x < 0$  เราพบว่า  $f'(x) < 0$  ในขณะที่ที่จุด  $x$  ใกล้ ๆ 0 และ  $x > 0$  เราพบว่า  $f'(x) > 0$  เราจึงสรุปว่า  $f$  มี relative minimum ที่ 0 ในทำนองเดียวกัน ที่จุด  $x$  ใกล้ ๆ 1 และ  $x < 1$  เราพบว่า  $f'(x) < 0$  ในขณะที่ที่จุด  $x$  ใกล้ ๆ 1 และ  $x > 1$  เราพบว่า  $f'(x) > 0$  เราจึงสรุปได้เช่นกันว่า  $f$  มี relative minimum ที่ 1

เมื่อเราพิจารณาฟังก์ชัน แล้วต้องการวาดกราฟของฟังก์ชัน เราคงจำได้ว่า มีข้อมูล บางประการที่เราสามารถตรวจสอบได้ก่อน เช่น  $x$ -intercepts  $y$ -intercepts ลักษณะ ของกราฟเมื่อ  $x$  เข้าใกล้ค่าอนันต์ เป็นต้น ตัวอย่างต่อไปนี้ เราจะใช้ความรู้เหล่านี้ ประกอบกับเรื่องของ derivative ในการวาดกราฟของฟังก์ชัน

**ตัวอย่าง 4.11.** จงวาดกราฟของฟังก์ชัน

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$

**วิธีทำ**

- $x$ -intercepts: ให้  $y = 0$  ได้ว่า

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 2 &= 0 \\ (x + 2)(x^2 - 2x + 1) &= 0 \\ (x + 2)(x - 1)^2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

ดังนั้น  $x = -2, 1$

- $y$ -intercepts: ให้  $x = 0$  ได้ว่า  $y = 2$
- ลักษณะกราฟเมื่อ  $x \rightarrow \infty$  และ  $x \rightarrow -\infty$ : สังเกตว่า

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 2x + 2) &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x + 2) &= -\infty \end{aligned} \tag{4.4}$$

- ช่วงการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน เราหา derivative ของ  $f$  ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$

ดังนั้น  $f$  จึงเป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ  $x < -1$  เป็นฟังก์ชันลดเมื่อ  $-1 < x < 1$  และ เป็นฟังก์ชันเพิ่มอีกครั้งเมื่อ  $x > 1$

- ช่วงการ concave up และ concave down ของฟังก์ชัน  $f$  เราหา derivative อันดับ สอง ของฟังก์ชัน  $f$  ได้ว่า

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

ดังนั้น  $f$  จึง concave up เมื่อ  $x > 0$  และ concave down เมื่อ  $x < 0$  ฟังก์ชัน  $f$  มี inflection point ที่ 0

จากข้อมูลทั้งหมด เราเขียนกราฟคร่าว ๆ ดังรูปที่

*Fig : graph1*

กราฟของฟังก์ชัน  $f(x) = x^3 - 3x + 2$

**ตัวอย่าง 4.12.** ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชัน และเรามีข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับ  $f'$  ดังนี้

1.  $f'(x) > 0$  และ  $f'$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง  $(-\infty, -1)$
2.  $f'(x) > 0$  และ  $f'$  เป็นฟังก์ชันลดในช่วง  $(-1, 1)$
3.  $f'(1) = 0$
4.  $f'(x) < 0$  และ  $f'$  เป็นฟังก์ชันลดในช่วง  $(1, \infty)$

จงวาดกราฟที่เป็นไปได้ของฟังก์ชัน  $f$

**วิธีทำ** จากข้อมูลที่ได้มา เราสรุปว่า

1.  $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ concave up ในช่วง  $(-\infty, -1)$
2.  $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ concave down ในช่วง  $(-1, 1)$
3.  $f$  มี relative maximum ที่  $x = 1$
4.  $f$  เป็นฟังก์ชันลด และ concave down ในช่วง  $(1, \infty)$

ตัวอย่างกราฟของฟังก์ชัน  $f$  เช่นรูป

*Fig : graph2*

กราฟของฟังก์ชัน  $f$  จากข้อมูลที่กำหนด

**ตัวอย่าง 4.13.** พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

**วิธีทำ**

- $x$ -intercepts: ให้  $y = 0$  ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2 + 1} &= 0 \\ x &= 0\end{aligned}\tag{4.5}$$

- $y$ -intercepts: ให้  $x = 0$  ได้ว่า  $y = 0$

- ลักษณะกราฟเมื่อ  $x \rightarrow \infty$  และ  $x \rightarrow -\infty$ : สังเกตว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} &= 0\end{aligned}\tag{4.6}$$

- ช่วงการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน เราหา derivative ของ  $f$  ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + 1)^2}$$

ดังนั้น  $f$  จึงเป็นฟังก์ชันลดเมื่อ  $x < -1$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ  $-1 < x < 1$  และ เป็นฟังก์ชันลดอีกครั้งเมื่อ  $x > 1$

- ช่วงการ concave up และ concave down ของฟังก์ชัน  $f$  เราหา derivative อันดับ สองของฟังก์ชัน  $f$  ได้ว่า

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x^2 + 1)^3}$$

ดังนั้น  $f$  จึง concave up เมื่อ  $x > \sqrt{3}$  หรือเมื่อ  $-\sqrt{3} < x < 0$  ในขณะที่  $f$  concave down เมื่อ  $x < -\sqrt{3}$  หรือเมื่อ  $0 < x < \sqrt{3}$  ฟังก์ชัน  $f$  มี inflection point ที่  $0, \pm\sqrt{3}$

จากข้อมูลทั้งหมด เราเขียนกราฟคร่าว ๆ ดังรูป

*Fig : graph3*

กราฟของฟังก์ชัน  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

**ตัวอย่าง 4.14.** พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \ln(x^3 + 1)$$

นิยามบนช่วง  $(-1, \infty)$  จงวาดกราฟของฟังก์ชันนี้

**วิธีทำ**

- $x$ -intercepts: ให้  $y = 0$  พบว่า  $x = 0$
- $y$ -intercepts: ให้  $x = 0$  พบว่า  $y = 0$

- ลักษณะกราฟเมื่อ  $x \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^3 + 1) = \infty$$

- ลักษณะกราฟเมื่อ  $x \rightarrow (-1)^+$ :

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \ln(x^3 + 1) = -\infty$$

- ช่วงการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน เราหา derivative ของ  $f$  ได้ว่า

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 1} > 0$$

สำหรับ  $x > -1$  ดังนั้น  $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดโดเมน

- ช่วงการ concave up และ concave down ของฟังก์ชัน  $f$  เราหา derivative อันดับสองของฟังก์ชัน  $f$  ได้ว่า

$$f''(x) = \frac{-3x^4 + 6x}{(x^3 + 1)^2} = \frac{-3x(x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})}{(x^3 + 1)^2}$$

ดังนั้น  $f$  จึง concave up เมื่อ  $0 < x < \sqrt[3]{2}$  และ  $f$  concave down เมื่อ  $x < 0$  หรือเมื่อ  $x > \sqrt[3]{2}$  ฟังก์ชัน  $f$  มี inflection point ที่  $0, \sqrt[3]{2}$  ค่าของ  $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$

จากข้อมูลทั้งหมด เราเขียนกราฟคร่าว ๆ ดังรูป

*Fig : graph4*

กราฟของฟังก์ชัน  $f(x) = \ln(x^3 + 1)$  บนช่วง  $(-1, \infty)$

**ตัวอย่าง 4.15.** พิจารณาฟังก์ชัน  $f$  ซึ่งนิยามบนช่วง  $(-3, 3)$  และหา derivative อันดับสองได้ ฟังก์ชัน  $f$  มีกราฟดังรูป

*Fig : graph5*

กราฟของฟังก์ชัน  $f$  บนช่วง  $(-3, 3)$

ที่จุดใดที่ฟังก์ชัน  $f'$  เปลี่ยนเครื่องหมาย และที่จุดใด  $f'$  มี relative extrema

**วิธีทำ** จากรูป ที่จุดซึ่ง  $f'$  เปลี่ยนเครื่องหมายคือจุด  $x$  ที่  $f'(x) = 0$  ซึ่ง คือ  $a, c, e$  และ  $j$  ในขณะที่จุดซึ่ง  $f'$  มี relative extrema เป็นจุดซึ่ง  $f''$  เปลี่ยนเครื่องหมาย ในที่นี้คือจุดซึ่ง  $f$  มี inflection point ซึ่งก็คือ  $b, d, i$  และ  $k$

## 4.2.1 แบบฝึกหัด

1. พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

2

1.  $f(x) = x^2 - 3x + 2$

2.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

3.  $f(x) = x^{4/3} - x^{1/3}$

4.  $f(x) = \ln(1 + x^2)$

ในแต่ละฟังก์ชัน จงหา

2

1.  $x$ -intercepts และ  $y$ -intercepts
2. ช่วงเปิดซึ่ง  $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
3. ช่วงเปิดซึ่ง  $f$  เป็นฟังก์ชันลด
4. ช่วงเปิดซึ่ง  $f$  เป็นฟังก์ชัน concave up
5. ช่วงเปิดซึ่ง  $f$  เป็นฟังก์ชัน concave down
6. ค่า  $x$  ที่ทำให้  $f$  มี inflection point

2. จงหา relative extrema ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2

1.  $f(x) = x^3 + 5x - 2$

2.  $f(x) = x(x - 2)^2$

3.  $f(x) = \frac{x}{x - 1}$

4.  $f(x) = |x^2 - 1|$

3. จงสเก็ตกราฟของฟังก์ชัน

2

1.  $f(x) = x^3 - 3x + 3$

2.  $f(x) = -(x + 1)x^2(x - 1)$

3.  $f(x) = e^{1/x}$

4. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน
- $y = f(x)$
- และ
- $a < b < c$
- จากข้อมูลต่อไปนี้

1.  $f'(a) = f'(b) = 0$

2.

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{สำหรับ } x < a \\ > 0 & \text{สำหรับ } a < x < c \\ < 0 & \text{สำหรับ } x > c \end{cases} \quad (4.7)$$

$$3. f''(a) = f''(b) = 0$$

4.

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{สำหรับ } x < a \\ > 0 & \text{สำหรับ } a < x < b \\ < 0 & \text{สำหรับ } x > b \end{cases} \quad (4.8)$$

5. กำหนดให้ฟังก์ชัน  $f'$  เป็นดังรูป

Fig : graph6

กราฟของฟังก์ชัน  $f$ 

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. ช่วงใดที่  $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
2. ฟังก์ชัน  $f$  มี relative maximum ที่ใด
3. ช่วงใดที่  $f$  concave up
4. ฟังก์ชัน  $f$  มี inflection point ที่ใด

### 4.3 การประยุกต์ของ Monotonicity และ Concavity

จากที่ได้ศึกษามาแล้ว ถ้า  $f$  เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วงเปิด  $(a, b)$  และ  $x_1, x_2$  เป็นจุดที่อยู่ภายในช่วงดังกล่าว แล้ว

- (1)  $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ถ้า  $f(x_1) < f(x_2)$  เมื่อ  $x_1 < x_2$  หรือ  $f'(x) > 0$  สำหรับทุกค่า  $x$  ที่อยู่ในช่วง  $(a, b)$
- (2)  $f$  เป็นฟังก์ชันลด ถ้า  $f(x_2) < f(x_1)$  เมื่อ  $x_1 < x_2$  หรือ  $f'(x) < 0$  สำหรับทุกค่า  $x$  ที่อยู่ในช่วง  $(a, b)$  นอกจากนั้นแล้ว
- (3)  $f$  มีลักษณะแบบ concave up ในช่วง  $(c, d)$  ถ้า  $f'$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วงดังกล่าว หรือ  $f''(x) > 0$  สำหรับทุกค่า  $x$  ที่อยู่ในช่วง  $(c, d)$
- (4)  $f$  มีลักษณะแบบ concave down ในช่วง  $(c, d)$  ถ้า  $f'$  เป็นฟังก์ชันลดในช่วงดังกล่าว หรือ  $f''(x) < 0$  สำหรับทุกค่า  $x$  ที่อยู่ในช่วง  $(c, d)$

ซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาทางวิทยาศาสตร์ชีวภาพ ดังตัวอย่างต่อไปนี้



**ตัวอย่าง 4.16.** อัตราการเจริญเติบโตของพืชขึ้นอยู่กับธาตุอาหารที่ได้รับซึ่ง Monod ได้อธิบายไว้ดังสมการ

$$f(R) = \frac{aR}{K + R}, \quad R \geq 0$$

โดยที่  $f(R)$  เป็นอัตราการเจริญเติบโต,  $R$  เป็นระดับธาตุอาหาร,  $a$  และ  $K$  เป็นค่าบวกใดๆ ขึ้นอยู่กับชนิดของพืช อยากทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตของพืชจะเพิ่มขึ้น หรือลดลงเมื่อไหร่

กำหนดให้  $R$  เป็นระดับธาตุอาหาร  $f(R)$  เป็นอัตราการเจริญเติบโต เนื่องจาก

$$f(R) = \frac{aR}{K + R}, \quad R \geq 0$$

จะได้

$$f'(R) = \frac{aK}{(K + R)^2} > 0$$

เพราะ  $a > 0$ ,  $K > 0$  ดังนั้น อัตราการเจริญเติบโตของพืชจะเพิ่มขึ้นและจะไม่วันลดลง

**ตัวอย่าง 4.17.** จากตัวอย่างที่แล้ว เราทราบว่า อัตราการเจริญเติบโตของพืชเป็นฟังก์ชันเพิ่ม อยากทราบว่าอัตราการเพิ่มของอัตราการเจริญเติบโตของพืชจะเป็นอย่างไร

เนื่องจาก  $f(R) = \frac{aR}{K + R}$ ,  $R \geq 0$  จะได้  $f'(R) = \frac{aK}{(K + R)^2} > 0$  นั่นคือ อัตราการเจริญเติบโตของพืชเป็นฟังก์ชันเพิ่ม โจทย์อยากทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตของพืชที่เพิ่มขึ้นนี้จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าไร นั่นคือการหาอนุพันธ์ของ  $f'(R)$  จะได้  $f''(R) = \frac{-2aK}{(K + R)^3} < 0$  หมายความว่าอัตราการเจริญเติบโตของพืชนั้นเพิ่มขึ้น แต่อัตราการเพิ่มพืชนั้นจะลดลง ดังรูป 2.7

กราฟของฟังก์ชัน  $f(R) = \frac{aR}{K + R}$

**ตัวอย่าง 4.18.** อัตราการเจริญเติบโตของประชากรสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ logistic

$$f(N) = rN(1 - \frac{N}{K})$$

เมื่อ  $N$  เป็นจำนวนประชากร,  $r$  และ  $K$  เป็นค่าบวก อยากทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตของประชากรจะเพิ่มขึ้น หรือลดลงอย่างไร

โจทย์ต้องการทราบว่า  $f(N)$  จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไร นั่นคือ  $f'(N) > 0$  หรือ  $f'(N) < 0$  เมื่อ  $N$  อยู่ในช่วงใด เนื่องจากอนุพันธ์ใช้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงแบบค่อยเป็นค่อยไป ดังนั้น  $f'(N)$  จะเปลี่ยนจากค่าลบเป็นค่าบวก ย่อมต้องผ่านค่าศูนย์ก่อน การหาค่า  $N^*$  ที่ทำให้  $f(N^*) = 0$  ย่อมเป็นหนทางหนึ่งที่สามารถใช้พิจารณาช่วงที่ทำให้  $f'(N) > 0$  และ  $f'(N) < 0$  ได้ จาก  $f(N) = rN(1 - \frac{N}{K})$  จะได้

$$f'(N) = r - \frac{2rN}{K}$$

ซึ่ง  $f'(N) = 0$  เมื่อ  $N = \frac{K}{2}$

ถ้า  $N > \frac{K}{2}$   $f'(N) < 0$  และถ้า  $N < \frac{K}{2}$   $f'(N) > 0$  ดังนั้น อัตราการเจริญเติบโตของประชากรจะเพิ่มขึ้น เมื่อ  $N < \frac{K}{2}$  และจะลดลง เมื่อ  $N > \frac{K}{2}$  แสดงว่าประชากรยิ่งหนาแน่น อัตราการเพิ่มของประชากรก็จะยิ่งลดลง

### 4.3.1 แบบฝึกหัด

- จากตัวอย่างที่ 9 จงวาดกราฟของ  $f(N)$  และระบุช่วงที่ทำให้  $f$  มีลักษณะแบบ concave up และแบบ concave down
- ค่า  $pH$  ของสารละลายสัมพันธ์กับความเข้มข้นของไฮโดรเจนไอออน,  $H^+$ , ดังนี้

$$pH = -\log(H^+)$$

จงพิจารณาว่าค่า  $pH$  ของสารละลายจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไร

## 4.4 การหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization)

การหาค่าเหมาะที่สุด คือปัญหาที่ต้องการหาค่าสูงสุด (absolute maximum) และค่าต่ำสุด (absolute minimum) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 4.19.** ผลผลิตของพืชผักสัมพันธ์กับปริมาณไนโตรเจนดังสมการ  $Y(N) = \frac{N}{1+N^2}$  เมื่อ  $Y(N)$  เป็นผลผลิตของพืชผัก และ  $N$  เป็นปริมาณไนโตรเจน ( $N \geq 0$ ) จงหาปริมาณไนโตรเจนที่ทำให้ได้ผลผลิตของพืชผักมากที่สุด

กำหนดให้  $N$  เป็นปริมาณไนโตรเจน  $Y(N)$  เป็นผลผลิตของพืชผัก จากความสัมพันธ์

$$Y(N) = \frac{N}{1+N^2}$$

หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการ

$$Y'(N) = \frac{(1+N^2) - N(2N)}{(1+N^2)^2} = \frac{1-N^2}{(1+N^2)^2}$$

กำหนดให้  $Y'(N) = 0$  เพื่อหา relative extrema  $Y'(N) = 0$  เมื่อ  $1 - N^2 = 0$  ดังนั้น  $N = \pm 1$

เราจะพิจารณา  $N$  ในช่วง  $N \geq 0$  ดังนั้น  $N = -1$  จึงอยู่นอกโดเมน จุดที่สนใจจึงเหลือเพียง  $N = 1$  โดยพิจารณาเครื่องหมายของ  $Y'(N)$  เราจะได้ว่า

$$Y'(N) > 0 \text{ เมื่อ } -1 < N < 1 \quad Y'(N) < 0 \text{ เมื่อ } N > 1$$

เนื่องจาก  $Y(N)$  เปลี่ยนจากฟังก์ชันเพิ่ม เป็นฟังก์ชันลด ที่  $N = 1$  ดังนั้น ที่  $N = 1$  เกิดจากจุดสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) โดย  $Y(1) = \frac{1}{2}$

เนื่องจากเราสนใจ absolute maximum จึงต้องตรวจสอบจุดปลายของโดเมน ( $N \geq 0$  หรือ  $N \in [0, \infty)$ ) นั่นคือ  $N = 0$  และ  $N \rightarrow \infty$  ด้วย ว่าทำให้  $Y$  มีค่ามากกว่า  $Y(1) = \frac{1}{2}$  หรือไม่

$$Y(0) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} Y(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{1 + N^2} = 0$$

ดังนั้นที่  $N = 1$  จะเกิดจุดสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) ซึ่งเป็นปริมาณไนโตรเจนที่ทำให้พืชผักมีผลผลิตมากที่สุด คือ  $Y(1) = \frac{1}{2}$  (ดูกราฟ 2.8)

**ตัวอย่าง 4.20.** เรือบรรทุกน้ำมันของบริษัทแห่งหนึ่งอับปางลงบริเวณอ่าวไทย ทำให้น้ำมันไหลรั่วซึมลงสู่ทะเล กระทบต่อระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ และสิ่งมีชีวิตที่อาศัยอยู่ในบริเวณดังกล่าว สมมติว่าระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ หลังเหตุการณ์เรือล่ม มีการเปลี่ยนแปลงดังสมการ

$$P(t) = 500\left[1 - \frac{4}{t+4} + \frac{16}{(t+4)^2}\right]$$

เมื่อ  $P(t)$  เป็นระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ หลังเหตุการณ์เรือล่มผ่านพ้นไป  $t$  เดือน อยากทราบว่าเมื่อไหร่ออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำบริเวณดังกล่าวจะอยู่ในระดับที่ต่ำที่สุด

กำหนดให้  $t$  เป็นเวลาหลังเหตุการณ์เรือล่ม  $P(t)$  เป็นระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ บริเวณที่เกิดเหตุ จาก  $P(t) = 500\left[1 - \frac{4}{t+4} + \frac{16}{(t+4)^2}\right]$  หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการ

$$\begin{aligned} P'(t) &= \frac{2000}{(t+4)^2} - \frac{16000}{(t+4)^3} \\ &= \frac{2000(t+4) - 16000}{(t+4)^3} \\ &= \frac{2000t - 8000}{(t+4)^3} \end{aligned} \quad (4.9)$$

กำหนดให้  $P'(t) = \frac{2000t - 8000}{(t+4)^3} = 0$  จะได้  $t = 4$  เครื่องหมายของ  $P'(t) > 0$  เมื่อ  $t > 4$

และ  $P'(t) < 0$  เมื่อ  $t < 4$  ดังนั้น  $P(t)$  เปลี่ยนจากฟังก์ชันลดเป็นฟังก์ชันเพิ่มที่  $t = 4$  ดังนั้น ที่  $t = 4$  เกิดจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) โดย  $P(4) = 375$

เนื่องจากเราสนใจ absolute minimum จึงต้องตรวจสอบค่า  $P(t)$  ที่จุดปลายของโดเมน  $t$  ด้วย นั่นคือ  $t = 0$  และ  $t \rightarrow \infty$   $P(0) = 500$  และ  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 500$  ดังนั้น ที่  $t = 4$  เกิดจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum) ระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ บริเวณดังกล่าวต่ำสุด หลังเหตุการณ์เรืออับปางผ่านพ้นไป 4 เดือน

**ตัวอย่าง 4.21.** นักชีววิทยาต้องการออกแบบพื้นที่ทดลองให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เขามีรั้วยาว 1600 ฟุต เขาจะใช้รั้วนี้อย่างไร จึงจะทำให้ได้พื้นที่ทดลองที่กว้างใหญ่ที่สุด

กำหนดให้

$x$  เป็นความกว้างของพื้นที่ทดลอง

$y$  เป็นความยาวของพื้นที่ทดลอง

$A$  เป็นพื้นที่ของพื้นที่ทดลอง

$P$  เป็นความยาวรอบรูปของพื้นที่ทดลอง

เนื่องจาก  $A = xy$  และ  $P = 2x + 2y$  จากโจทย์  $P = 2x + 2y = 1600$  ดังนั้น  $x + y = 800$  หรือ  $y = 800 - x$  แทน  $y$  ลงใน  $A = xy$  จะได้

$$\begin{aligned} A(x) &= x(800 - x), \quad 0 \leq x \leq 800 \\ &= 800x - x^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

โจทย์ต้องการหาพื้นที่ที่กว้างใหญ่ที่สุด เราจึงต้องหาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้าง

$$A'(x) = 800 - 2x$$

กำหนดให้  $A'(x) = 800 - 2x = 0$  จะได้  $x = 400$  และ  $A(400) = 1600$  ตามลำดับ ทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง  $A''(x) = -2 < 0$  พบว่า  $x = 400$  ทำให้เกิดจุดสูงสุดสัมบูรณ์ เพราะ  $A(x)$  มีลักษณะแบบ concave down ดังนั้นนักชีววิทยาควรกันรั้วเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกว้าง 400 ฟุต จึงจะได้พื้นที่ทดลองที่กว้างใหญ่ที่สุด

1. วาดภาพและกำหนดตัวแปรต่างๆ เช่น  $x, y$  เป็นต้น
2. หาสูตรหรือสมการของปริมาณที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด
3. ใช้เงื่อนไขที่โจทย์ระบุให้ในการตัดทอนตัวแปร เพื่อให้สมการในขั้นตอนที่ 2 อยู่ในรูปฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรเพียงตัวเดียว
4. หาช่วงที่เป็นไปได้ของตัวแปร โดยให้สอดคล้องกับความหมายของโจทย์
5. ใช้เทคนิคการหาค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ ไม่ว่าจะเป็นทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง หรือทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับสอง
6. ตรวจสอบจุดปลายของโดเมนของตัวแปร เพื่อยืนยันการเกิดค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมบูรณ์

#### 4.4.1 แบบฝึกหัด

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงของการสังเคราะห์แสงขึ้นกับความเข้มของแสง  $x$ , ซึ่งสอดคล้องกับสมการ  $R(x) = 270x - 90x^2$  จงหาความเข้มของแสง ที่ทำให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของการสังเคราะห์แสงมากที่สุด
2. การตอบสนองต่อยาชนิดหนึ่งขึ้นกับปริมาณของยา,  $x$ , ดังสมการ  $S = 1000x - x^2$  จงหาปริมาณยาที่ทำให้มีการตอบสนองต่อยาชนิดนี้มากที่สุด

3. นักวิจัยพบว่าขณะไอ ปริมาณอากาศที่ไหลผ่านทางหลอดลมสัมพันธ์กับสมการ  $F = SA$  เมื่อ  $S$  คือความเร็วของอากาศ และ  $A$  คือพื้นที่ตัดขวางของหลอดลม ดังรูป 2.9 ถ้าความเร็วของอากาศมีสูตรเป็น  $S = c - r$  โดย  $r$  คือรัศมีของหลอดลมขณะไอ และ  $c$  คือรัศมีของหลอดลมในสภาวะปกติ จงหารัศมีที่ทำให้ปริมาณอากาศที่ไหลผ่านหลอดลมมีมากที่สุด ขณะไอ
4. เกสเซอร์ต้องการสร้างกล่องรีฟ่ายอย่างง่ายเพื่อขนย้ายยา เขามีกระดาษแข็งกว้าง 16 นิ้ว ยาว 30 นิ้ว เขาตั้งใจจะตัดมุมของกระดาษแข็งทั้ง 4 ออก ตามรูป 2.10 แล้วทำการพับตามรอยปะและเชื่อมรอยต่อด้วยเทปกาว จงหาความยาว  $x$  ที่ตัดตามมุม เพื่อให้ได้กล่องที่มีปริมาตรมากที่สุด
5. คราวนี้นักชีววิทยาคนเดิม ต้องการพื้นที่ทดลองแบบสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 320 ตารางเมตร ด้านที่ขนานกันคู่หนึ่งใช้รั้วราคา 100 บาทต่อเมตร ส่วนด้านคูที่เหลือใช้รั้วราคา 200 บาทต่อเมตร จงหาความกว้างและความยาวของพื้นที่ทดลองแห่งนี้ เมื่อใช้งบประมาณน้อยที่สุด

การไหลเวียนของอากาศในหลอดลม

กล่องรีฟ่ายสำหรับขนย้ายยา