SCMA104 Systems of Ordinary Differential Equations and Applications in Medical Science

Pairote Satiracoo

2024-08-18

Contents

Chapter 1

หลักการและความสำคัญของแคลคูลัสและระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

แคลคูลัสมีส่วนประกอบหลักที่สำคัญอยู่ 2 องค์ประกอบ คือ

1. การหาอนุพันธ์ (differentiation) และ
2. การหาปริพันธ์ (Integration)

การประยุกต์เรื่องการหาอนุพันธ์ในการแก้ปัญหาเบื้องต้นที่สำคัญในทางชีววิทยา หรือทางการแพทย์ ประกอบด้วย การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณของตัวแปรที่เราสนใจ และการใช้แคลคูลัสในการแก้ปัญหาการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของปัญหาหรือฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เราสนใจ

ตัวอย่างการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่สนใจ เช่น ขนาดของประชากร จำนวนของผู้ติดเชื้อจากโรคทางเดินหายใจ ระดับน้ำตาลในกระแสเลือด ปริมาณของยาที่มีอยู่ในกระแสเลือกหรือส่วนหนึ่งของร่างกาย โดยที่การเปลี่ยนแปลงดังกล่าวสามารถเปรียบเทียบได้กับเวลา ดังต่อไปนี้

- ประชากรในประเทศไทยปี พ.ศ. 2566 มีจำนวน 66.05 ล้านคน (ข้อมูลอ้างอิงจาก สำนักงานคณะกรรมการส่งเสริมการลงทุน)
- ข้อมูลจำนวนผู้รักษาตัวในโรงพยาบาลจากศูนย์ข้อมูล COVID-19 ระหว่างวันที่ 28 กรกฎาคม ถึงวันที่ 3 สิงหาคม พ.ศ. 2567 (ข้อมูลอ้างอิงจาก ศูนย์ข้อมูล Covid-19)
- การเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำตาลในเลือดระหว่างมืออาหารสามมือในหนึ่งวัน (รูปภาพอ้างอิงจาก Wikipedia: Blood Sugar Level)
- การเปลี่ยนแปลงของปริมาณยาในกระแสเลือดที่เวลาต่างๆ สำหรับการให้ยาโดยวิธีต่างๆ (รูปภาพอ้างอิงจาก บทความทางวิชาการในฐานข้อมูล MDPI)

Figure 1.1: ข้อมูลจำนวนผู้รักษาตัวในโรงพยาบาลจากศูนย์ข้อมูล COVID-19

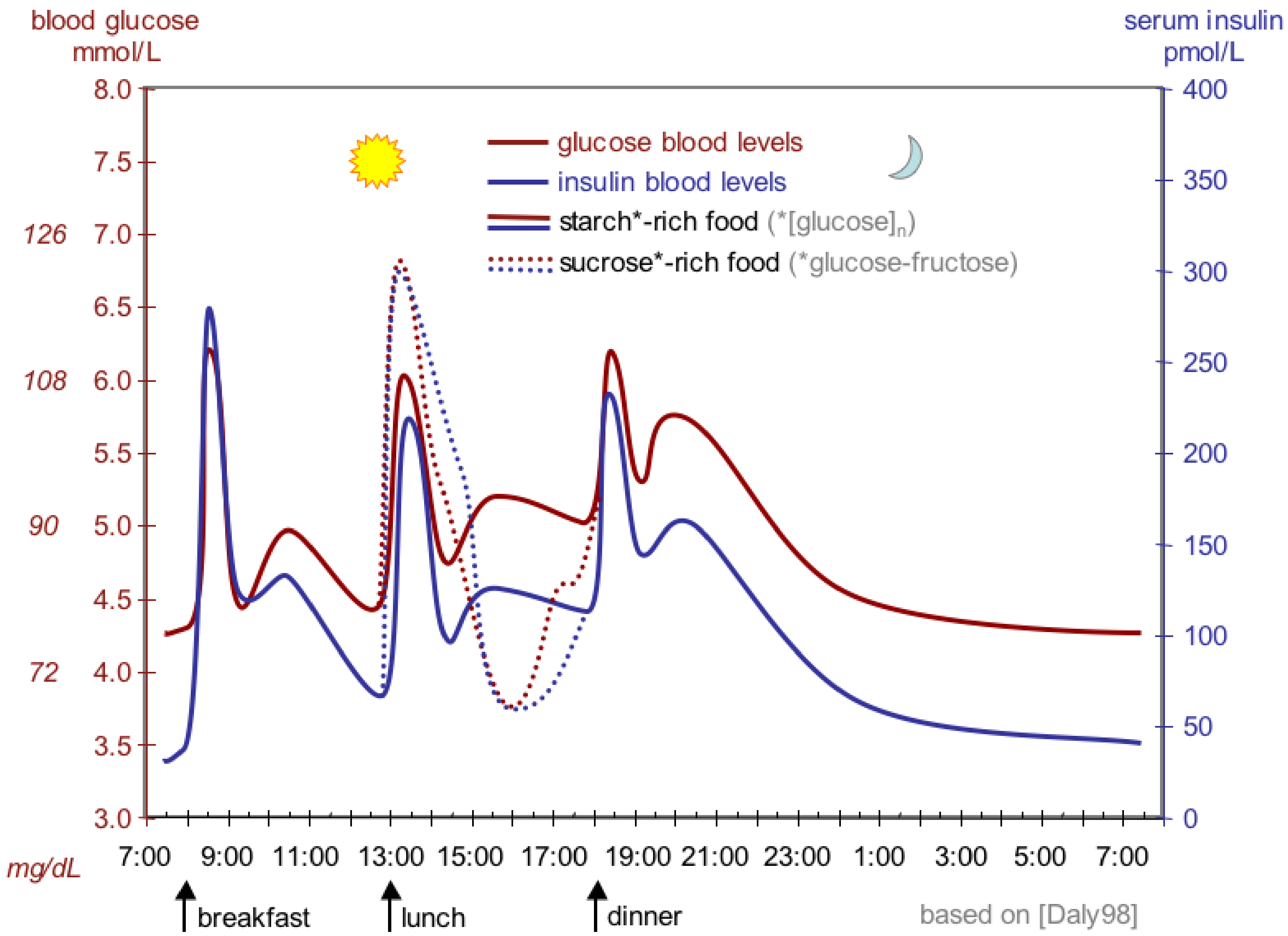

Figure 1.2: ความผันผวนของระดับน้ำตาลในเลือด (สีแดง) และฮอร์โมนอินซูลิน (สีน้ำเงิน) ในมนุษย์ระหว่างมื้ออาหารสามมื้อ

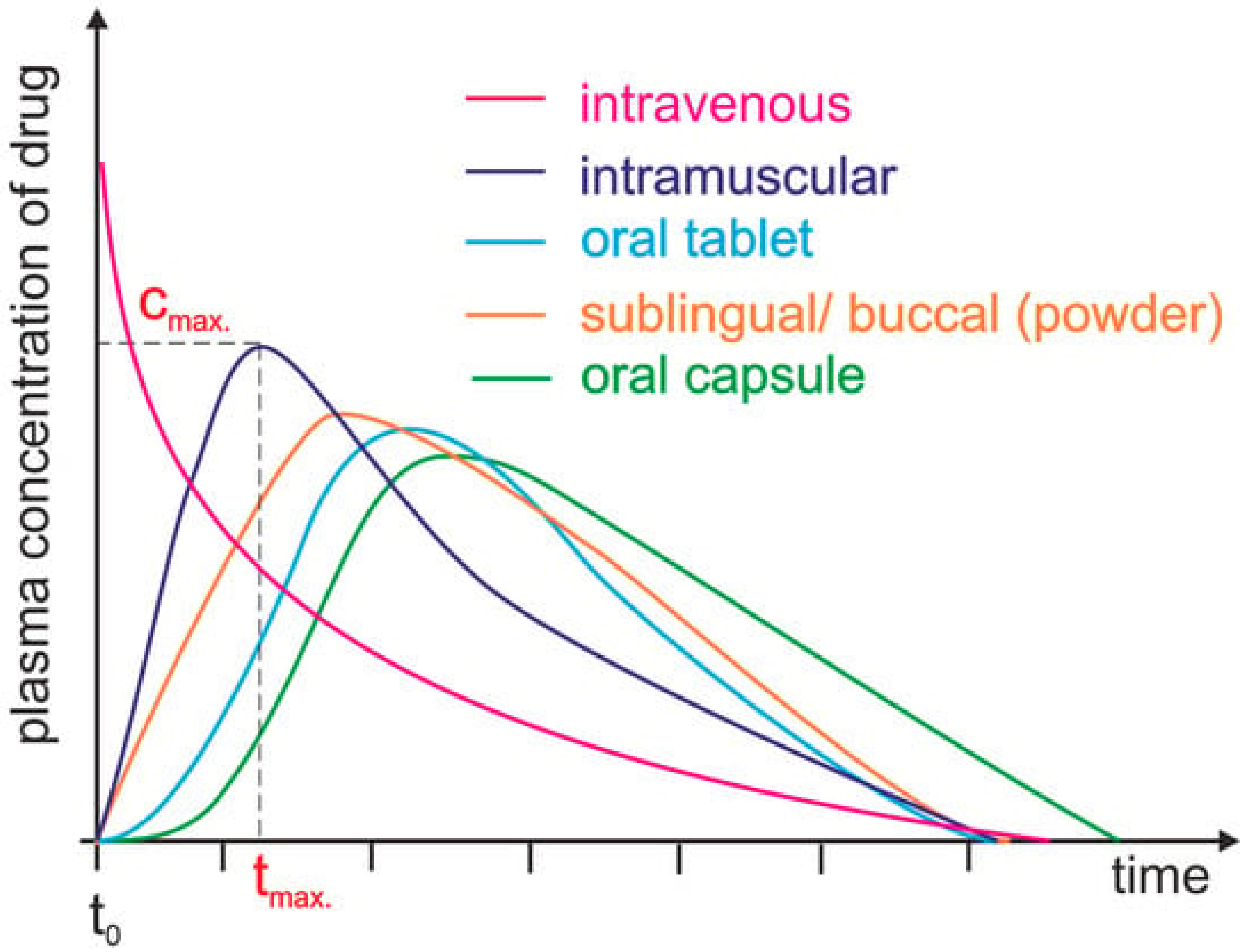

Figure 1.3: ความเข้มข้นของยาในกระแสเลือดที่เวลาต่างๆ

ในการทำความเข้าใจการเปลี่ยนแปลงของปริมาณข้างต้นเทียบกับเวลา เราสามารถประยุกต์ใช้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อมาใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงของปริมาณต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการอธิบายปัญหาหรือ ปรากฎการต่างๆ ที่เกิดขึ้นในธรรมชาติ โดยปกติแล้วจะอยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้จะช่วยให้อธิบายสิ่งต่างๆ ที่เกิดขึ้นในปัญหาหรือปรากฏที่สนใจ

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงถึงแนวคิดในการประยุกต์ของแคลคูลัสที่เกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของ

Table 1.1: จำนวนของแบคทีเรียที่เวลา t ใดๆ

เวลา (10 นาที)	0	1	2	3	4	5	6
จำนวนแบคทีเรีย	1	2	4	8	16	32	64

ตัวอย่าง 1.1. ในการทดลองหนึ่ง นักวิจัยต้องการศึกษาการขยายพันธ์ของแบคทีเรียที่มีการการแบ่งตัวที่เรียกว่า binary fission (การแบ่งตัวแบบทวิภาค) ซึ่งแบคทีเรียจะมีการแบ่งจากหนึ่งเป็นสองเซลเท่าๆ กัน และได้ผลการทำลองดังต่อไปนี้

(รูปอ้างอิงจาก BYJU’s Learning Website)

ตาราง 1.1 และรูปที่ 1.5 แสดงการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียที่เวลาใดๆ ในตัวอย่างนี้การเปลี่ยนแปลงของจำนวนของแบคทีเรียที่เวลา t สามารถเขียนในรูปฟังก์ชัน $N(t)$ ถ้าให้ N_0 แทนจำนวนของแบคทีเรียตอนเริ่มการทดลอง แล้วแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการเพิ่มของจำนวนแบคทีเรียจะสามารถเขียนในรูปของสมการ

$$N(t) = N_0 \cdot 2^t, \qquad t = 0, 1, 2, ... \tag{1.1}$$

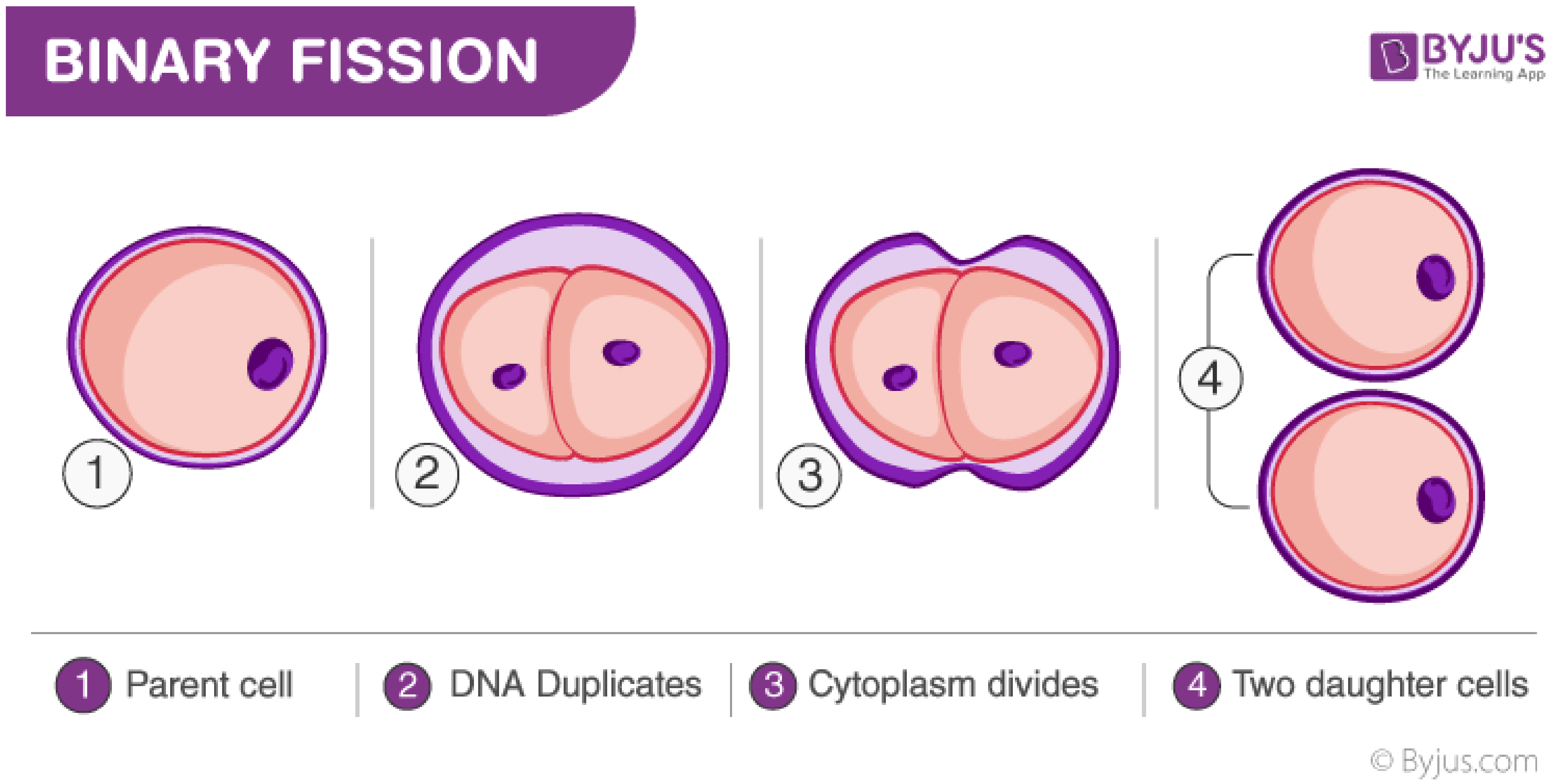

Figure 1.4: กระบวนการแบ่งตัวแบบทวิภาคของแบคทีเรีย

ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้การเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียที่เวลา t ใดๆ เพิ่มขึ้นในลักษณะที่เรียกว่า เอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Population Growth)

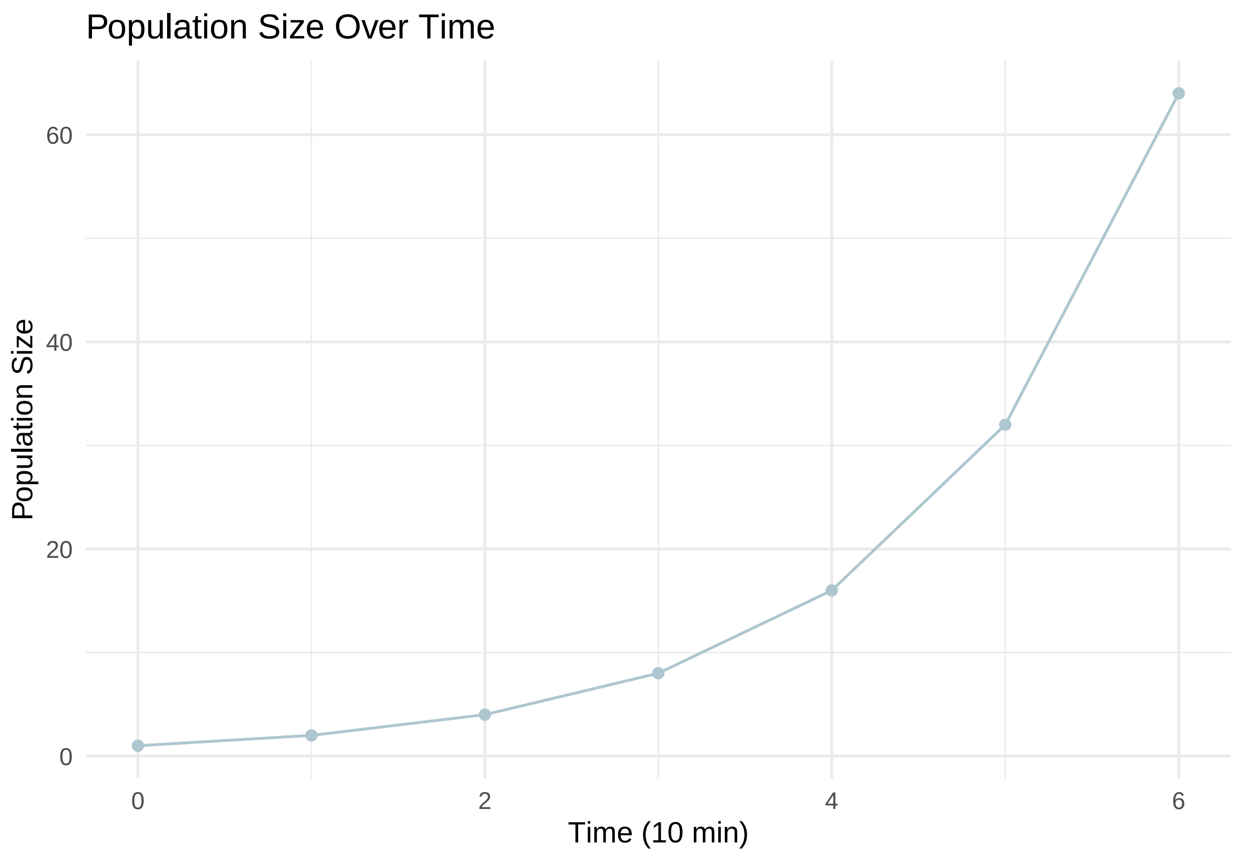

Figure 1.5: Population Size Over Time

ตัวอย่าง 1.2. ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ในตัวอย่างของการขยายพันธ์แบคทีเรีย หรือในปัญหาอื่นๆ แทนที่เราจะพยายามหาความสัมพันธ์ หรือฟังก์ชัน $N(t)$ ในรูปของเวลา t โดยตรง ถ้าเราทราบกระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร $N(t)$ นั้น เราสามารถนำมาใช้ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ได้ดังต่อนี้ กระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรีย (การเพิ่มหรือลดลงของแบคทีเรีย) ที่เกิดขึ้นในระหว่างเวลา t และเวลา $t+h$ เกิดจากจำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้น (เกิดขึ้นมาใหม่) ในช่วงเวลาดังกล่าว และลดลงจากจำนวนแบคทีเรียที่ลดลง (ตายไป) ในช่วงเวลาดังกล่าวเช่นกัน ซึ่งเราสามารถเขียนในรูปของสมการได้ดังต่อไปนี้

$$N(t+h) = N(t) \tag{1.2}$$

$$+ \text{ จำนวนแบคทีเรียที่เกิดขึ้นใหม่ระหว่าง } t \text{ และ } t+h \tag{1.3}$$

$$- \text{ จำนวนแบคทีเรียที่ตายไประหว่าง } t \text{ และ } t+h \tag{1.4}$$

ในที่นี้ “**การเกิด**” เราหมายถึงการเพิ่มจำนวนของแบคทีเรียจากหนึ่งเป็นสอง และเราจะกำหนดให้ h เป็นช่วงเวลาสั้นๆ (ซึ่งเราสามารถใช้ความรู้แคลคูลัสในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation)) ในสมการ (1.4) ถ้าเราสมมติว่า การเพิ่มของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่ในขณะนั้น หรือเขียนในรูปของสมการได้ดังนี้

$$\text{จำนวนแบคทีเรียที่เกิดใหม่ระหว่าง } t \text{ และ } t+h \approx b \cdot N \cdot h$$

$$\text{จำนวนแบคทีเรียที่ตายไประหว่าง } t \text{ และ } t+h \approx m \cdot N \cdot h$$

โดยที่ค่าคงตัว b และ m ในสมการข้างต้น คือ อัตราการเกิด (birth rate) และอัตราการตาย (mortality rate)

เมื่อแทนจำนวนแบคทีเรียที่เกิดใหม่ และตายไประหว่างช่วงเวลาที่กำหนดลงในสมการ (1.4) จะได้สมการ

$$N(t+h) - N(t) = b \cdot N(t) \cdot h - m \cdot N(t) \cdot h \tag{1.5}$$

เราสามารถจัดรูปสมการ (1.5) ได้ใหม่ในรูปของ**อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย**ของจำนวนแบคทีเรียในช่วงเวลาดังกล่าว ดังนี้

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \tag{1.6}$$

(1.7)

ดังนั้น ถ้าเราให้ h เข้าใกล้ 0 ผ่านการหาค่าลิมิต เราจะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง (instantaneous rate of change) และเขียนได้ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ ดังนี้

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \tag{1.8}$$

$$\tag{1.9}$$

ทั้งนี้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (1.9) เพื่อให้ได้คำตอบที่แสดงจำนวนแบคทีเรีย $N(t)$ ในรูปของฟังก์ชันของ t เราจะต้องกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องกับจำนวนแบคทีเรีย $N(t)$ ที่เวลา t หนึ่ง โดยทั่วไปเราจะกำหนดค่าเริ่มต้นของจำนวนแบคทีเรียที่ $t = 0$ ดังนั้น ถ้าเรากำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition)

$$N(0) = N_0 \tag{1.10}$$

เราสามารถหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นโดยวิธีการหาปริพันธ์ (Integration) ได้คำตอบของสมการดังนี้

$$N(t) = N_0 e^{(b-m)t} \tag{1.11}$$

ตัวอย่าง 1.3. ในการทดลองเลี้ยงยีสต์ในขวดทดลองที่มีอาหารเลี้ยงยีสต์ในปริมาณที่เหมาะสม ผู้ทำการทดลองสนใจที่จะประมาณค่าของยีสต์โดยอาศัยแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงของประชากรที่อธิบายด้วยสมการ (1.11) กำหนดให้

- ภายใต้สภาวะของการทดลองที่เหมาะสม ยีสต์จะแบ่งตัวทุกๆ 90 นาที
- ยีสต์มีครึ่งชีวิตเท่ากับ 1 สัปดาห์

จากข้อมูลดังกล่าว จงแสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบจากคำถามต่อไปนี้

1. จงประมาณค่าของอัตราการเกิด b (1/ชั่วโมง) และอัตราการตาย m (1/ชั่วโมง)
2. เขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้ค่า b และ m ที่ประมาณค่าได้ (สมการ (1.11))
3. ใช้เครื่องมือที่นักศึกษามีอยู่ในการวาดกราฟแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนยีสต์ที่เวลาต่างๆ
4. เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับรูปภาพแสดงการเปลี่ยนแปลงของยีสต์จากการทดลองในห้องปฏิการ ตามรูปที่ 1.6 (รูปภาพอ้างอิงจาก https://homework.study.com/)

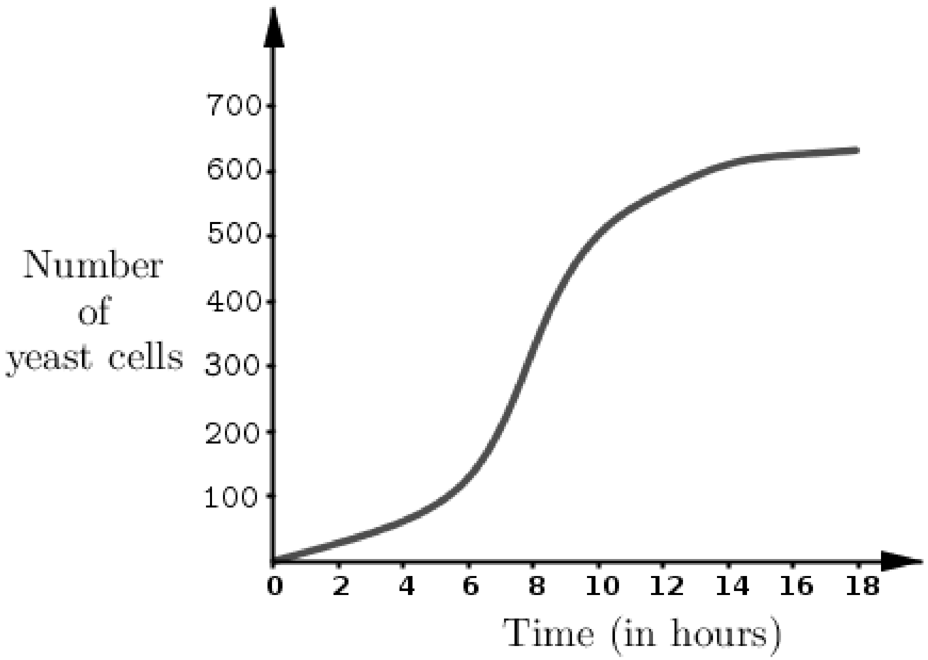

Figure 1.6: กราฟการเจริญเติบโตของเซลล์ยีสต์

ตัวอย่าง 1.4. จงใช้อินเทอร์เน็ตเพื่อค้นหาตัวอย่างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายโดยสมการเชิงอนุพันธ์หรือระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ข้อมูลที่ต้องการประกอบด้วย

1. ค้นหาหน้าเว็บที่ให้ข้อมูลเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในปัญหาที่นักศึกษาสนใจ

2. จดบันทึก URL ของหน้าเว็บ

3. เขียนสรุปสั้นๆ ว่าโมเดลนี้ใช้เพื่ออะไร

โดยสรุป แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์เป็นเครื่องมือสำคัญในการทำความเข้าใจว่าสิ่งต่างๆ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไรและ แคลคูลัสช่วยให้เราวิเคราะห์อัตราการเปลี่ยนแปลงและพื้นที่ใต้เส้นโค้ง ในขณะที่สมการเชิงอนุพันธ์ช่วยให้เราสร้างแบบจำลองระบบที่ซับซ้อนในสาขาต่างๆ เช่น ฟิสิกส์ วิศวกรรม เศรษฐศาสตร์ และชีววิทยา แนวคิดทางคณิตศาสตร์เหล่านี้มีความสำคัญต่อการแก้ปัญหาในโลกแห่งความเป็นจริง เมื่อโลกของเราก้าวหน้ามากขึ้น ความสำคัญของแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ก็จะเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง ซึ่งสนับสนุนความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

Chapter 2

ลิมิต (Limits)

อาจกล่าวได้ว่า วิชาแคลคูลัส ถือกำเนิดขึ้นมาจากความพยายามในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตบนระนาบ 2 ปัญหาหลักๆ คือ

- การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งที่กำหนดให้

  กำหนดฟังก์ชัน (function) f และกำหนดจุด $P(x_0, y_0)$ บนกราฟ $y = f(x)$ จงหาสมการของเส้นตรงที่สัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด P

- การหาพื้นที่ของบริเวณที่กำหนดให้

  กำหนด function f และช่วง $[a,b]$ ในโดเมนของ f จงหาพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมด้วยแกน X และกราฟ $y=f(x)$ สำหรับ $x \in [a,b]$

แนวความคิดในการแก้ปัญหาทั้งสอง นำไปสู่การศึกษาเรื่อง ลิมิต (Limits) ซึ่งเป็นพื้นฐานของวิชาแคลคูลัส นั่นเอง

แต่ในปัจจุบันเราพบว่าวิชาแคลคูลัสมีประโยชน์ในการช่วยแก้ปัญหาในสาขาวิชาต่าง ๆ มากมาย เช่น เราจะพบในการศึกษาวิชานี้ว่า แคลคูลัสมีบทบาทในการแก้ปัญหาต่อไปนี้

- โดยทั่วไป ยาชนิดฉีดจะต้องใช้เวลาระยะหนึ่งหลังจากฉีดเข้าสู่ร่างกาย ในการที่จะไหลเวียนในกระแสโลหิต จนกระทั่งมีความเข้มข้นสูงสุด สมมุติว่า ยาฉีดชนิดหนึ่งหลังจากฉีดเข้าสู่ร่างกายนาน t ชั่วโมง จะมีความเข้มข้นเป็น $C(t) = 0.15(e^{-0.18t} - e^{-1.2t})$ มิลลิกรัมต่อมิลลิลิตร จงหาว่า นานเท่าใดหลังจากฉีดยา จึงจะมีความเข้มข้นของยา ในกระแสโลหิตสูงที่สุด

- เราอาจประมาณได้อย่างมีเหตุผลว่า artery มีรูปร่างที่เป็นผลมาจากการหมุนรอบแกน ของเส้นโค้งในระนาบ โดยในสภาวะนิ่ง รัศมีของ artery มีค่าคงที่เท่ากับ 1 หน่วย (รูปทรงกระบอก) แต่ในขณะที่หัวใจสูบฉีดโลหิตผ่าน artery artery จะพองตัวออก ทำให้รัศมีเปลี่ยนไปตามสมการ $R(x) = 1 + 0.4x - 0.04x^2$ หน่วย เมื่อ $0 \le x \le 10$ เป็นตำแหน่งบนแนวยาวของ artery จงหาว่า

ปริมาณโลหิตที่อยู่ใน artery ขณะที่หัวใจสูบฉีดโลหิตผ่านเข้ามาเป็นกี่เท่าของความจุโลหิตในสภาวะนิ่ง

- ความก้าวหน้าในทางการแพทย์ และเทคโนโลยีปัจจุบัน ทำให้มีการประดิษฐ์อุปกรณ์ช่วยในการรักษาโรคเบาหวานชิ้นหนึ่งขึ้น อุปกรณ์นี้มีลักษณะเป็นแคปซูล ซึ่งเมื่อฝังอุปกรณ์นี้ภายในร่างกายแล้ว มันจะหลั่งสารอินซูลินที่บรรจุอยู่ภายใน ออกสู่กระแสโลหิต โดยมีอัตราการหลั่งเป็น $f(t) = 0.5te^{-0.09t}$ ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวัน เมื่อ t คือ เวลาเป็นวัน นับจากอุปกรณ์เริ่มทำงาน จงหาว่า แพทย์จะต้องสั่งให้บรรจุอินซูลินในแคปซูลเป็นปริมาณเท่าใด เพื่อให้อุปกรณ์นี้สามารถให้อินซูลินแก่ผู้ป่วยได้นาน 3 เดือน

- การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด $P_0(x_0, y_0)$

ขั้นตอนสรุปการหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง

1. เลือกจุดอื่นบนกราฟ เรียกจุดนี้ว่า $P(x, y)$
2. ลากเส้นผ่าน PP_0
3. ทำซ้ำโดยเลือกจุด P ให้ใกล้ P_0 มากขึ้น
4. เส้น PP_0 ที่ได้จะ "เข้าใกล้" เส้นสัมผัสมากขึ้นทุกที

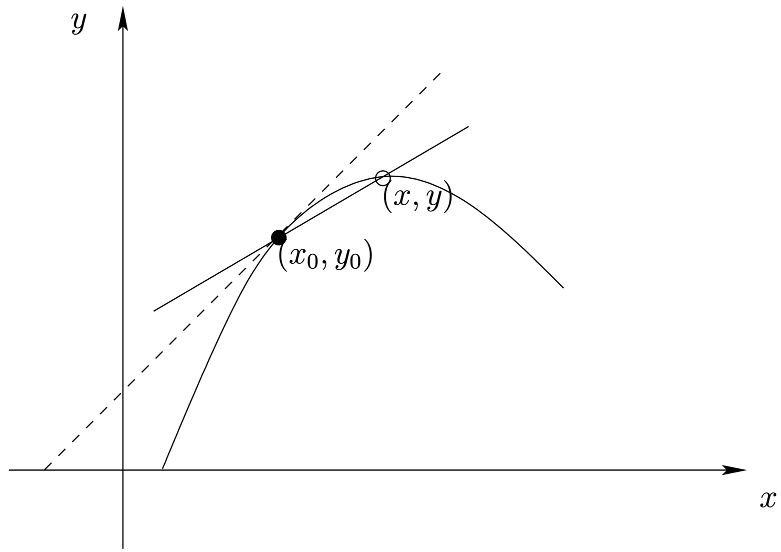

Figure 2.1: การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง

- การหาพื้นที่ “ใต้กราฟ” ระหว่าง x = a กับ x = b

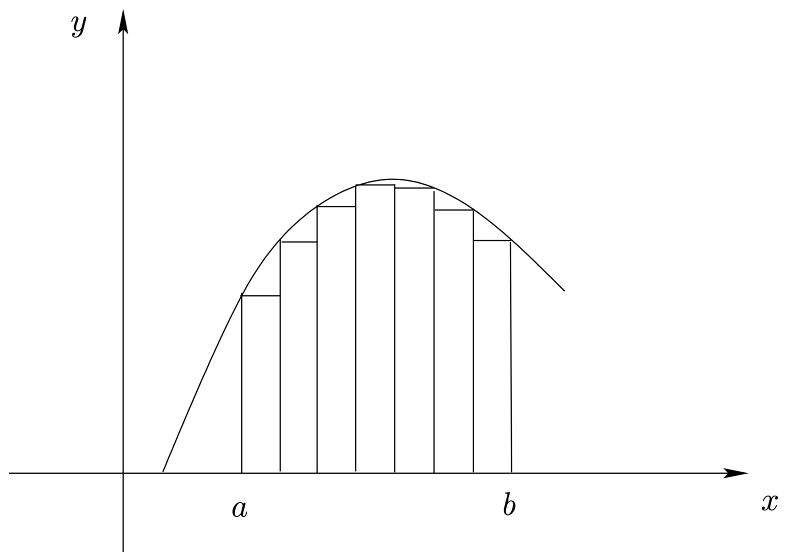

Figure 2.2: การหาพื้นที่ใต้กราฟ

ขั้นตอนเบื้องต้นสำหรับการหาพื้นที่ใต้กราฟ

1. แบ่ง $[a, b]$ เป็นช่วงเล็กๆ
2. หาพื้นที่รวมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหมด
3. ทำซ้ำๆ โดยแบ่งช่วงให้เล็กมากขึ้น

4. พื้นที่ที่ได้จะ “เข้าใกล้” พื้นที่ที่ต้องการมากขึ้นทุกที

ตัวอย่าง 2.1. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y=-x^2+6x-2$ ณ จุด $P_0(2,6)$

วิธีทำ เลือกจุด $P(x,y)$ โดยที่ $x\neq 2$ และลากเส้น PP_0 จะได้ว่า ความชันของ PP_0 เท่ากับ

$$\begin{aligned}\frac{y-6}{x-2}&=\frac{-x^2+6x-8}{x-2}\\&=-\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}\\&=4-x\end{aligned}$$

ถ้า P อยู่ใกล้ P_0 มากขึ้น ค่า x ย่อมเกือบเป็น 2 ดังนั้น ความชันของ PP_0 จึงเข้าใกล้ 4-2 = 2 มากขึ้นเรื่อย ๆ เส้นสัมผัสจึงควรมีความชันเป็น 2 และสมการเส้นสัมผัส คือ $y-6=2(x-2)$

จะเห็นว่า ในตัวอย่าง 2.1 นี้ เราสนใจพฤติกรรมของ function

$\frac{-x^2+6x-8}{x-2}$ เมื่อ $x\neq 2$ แต่มีค่าใกล้ 2 มาก ๆ นี่คือ ที่มาของเรื่อง

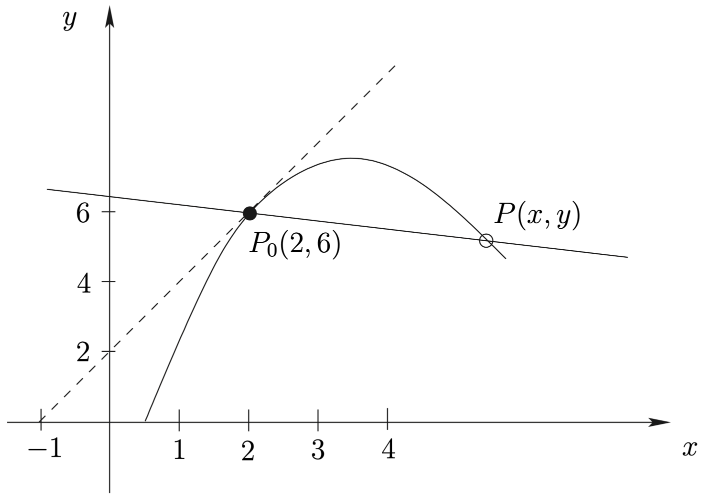

Figure 2.3: การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = -x^2 + 6x - 2$

นิยาม 2.1. ให้ $f : D_f \to R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และให้ $a \in R$ โดยที่มีช่วง (a,b) บางช่วงที่ $(a,b) \subseteq D_f \, (b > a)$

เรากล่าวว่า ”ลิมิต (limit) ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา หาค่าได้และมีค่าเท่ากับจำนวนจริง L” ถ้า ”ไม่ว่าเราจะกำหนดบริเวณรอบ ๆ L ไว้แคบเพียงใด เมื่อเราพิจารณาค่าของ $f(x)$ สำหรับค่า x ที่มากกว่า a โดยที่ให้ค่า ของ x ลดลงเรื่อย ๆ จนถึงจุดหนึ่ง ค่าของ $f(x)$ จะอยู่ในบริเวณรอบ ๆ L ที่เรากำหนดไว้นั้น และยังคงเป็นเช่นนี้สำหรับ x อื่น ๆ ที่น้อยกว่านั้น (แต่มากกว่า a) ทั้งหมดด้วย”

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราพิจารณาพฤติกรรมของ function สำหรับ x ที่น้อยกว่า a จะได้ limit ทางซ้าย ดังนี้ ให้ $f : D_f \to R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และให้ $a \in R$ โดยที่มีช่วง (b,a) บางช่วงที่ $(b,a) \subseteq D_f \, (b < a)$

เรากล่าวว่า ”limit ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับจำนวนจริง L” ถ้า ”ไม่ว่าเราจะกำหนดบริเวณรอบ ๆ L ไว้แคบเพียงใด

เมื่อเราพิจารณาค่าของ $f(x)$ สำหรับค่า x ที่น้อยกว่า a โดยที่ให้ค่า ของ x เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนถึงจุดหนึ่ง ค่าของ $f(x)$ จะอยู่ในบริเวณรอบ ๆ L ที่เรากำหนดไว้นั้น และยังคงเป็นเช่นนี้สำหรับ x อื่น ๆ ที่มากกว่านั้น (แต่น้อยกว่า a) ทั้งหมดด้วย”

เราใช้สัญลักษณ์ $\lim_{x \to a^+} f(x)$ แทนข้อความ "limit ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา" และใช้สัญลักษณ์ $\lim_{x \to a^-} f(x)$ แทนข้อความ "limit ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย

นิยาม 2.2. ในกรณีที่ทั้ง $\lim_{x\to a^+} f(x)$ และ $\lim_{x\to a^-} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากัน เรากล่าวว่า $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับค่านั้น

ตัวอย่าง 2.2. function f ที่ $\lim_{x \to a^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น

$\lim_{x \to a} f(x)$ จึงหาค่าไม่ได้ด้วย

วิธีทำ จากรูปต่อไปนี้

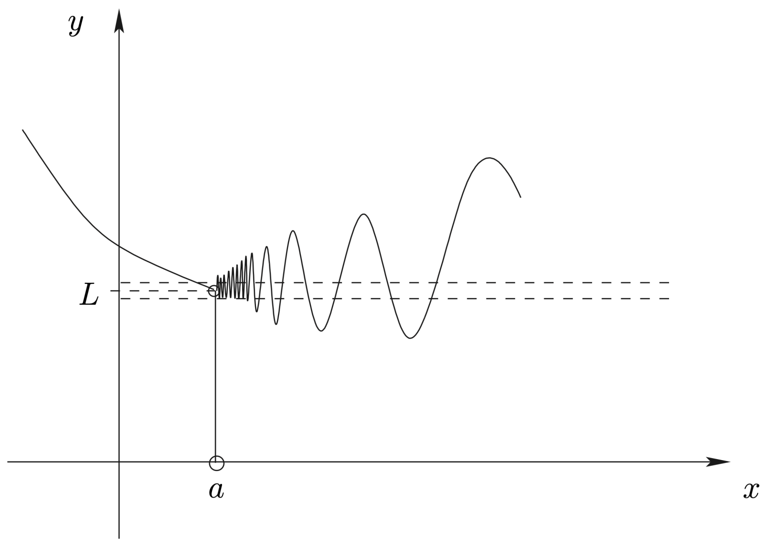

Figure 2.4: กราฟของฟังก์ชันที่หาลิมิตไม่ได้

ในกรณีนี้ จะเห็นว่า ไม่ว่าจะเลือก L เป็นค่าใด ก็ไม่สามารถสรุปได้ว่า $\lim_{x \to 0^+} f(x) = L$ เพราะไม่ใช่ทุกครั้ง

ที่เรากำหนดบริเวณรอบ ๆ L แล้ว function จะสอดคล้องตามนิยามเสมอไป จึงสรุปว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ หาค่าไม่ได้ด้วย

ทฤษฎี 2.1.

1. $\lim\limits_{x\to c} c = c$ *ถ้า* c *เป็นจำนวนจริง*
2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$

ทฤษฎี 2.2. *ถ้า* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *และ* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ *หาค่าได้แล้ว จะได้*

1. $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to a} (f-g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a} (f\cdot g)(x) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$
4. $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ *ถ้า* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

หมายเหตุ ทฤษฎีบททั้งสองนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย

ทฤษฎี 2.3. *ถ้า* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *หาค่าได้ และ* $\sqrt[n]{f(x)}$ *หาค่าได้ สำหรับทุก ๆ* x *ในช่วงเปิดบางช่วงที่มี* a *อยู่ด้วย แล้ว* $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

หมายเหตุ ทฤษฎีบทนี้เป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย โดยเปลี่ยนเงื่อนไข "ทุก ๆ x" เป็น "ทุก ๆ $x < a$" และ "ทุก ๆ $x > a$" ตามลำดับ

ทฤษฎี 2.4. *ถ้า* f *และ* g *เป็น function ซึ่ง* $f(x) = g(x)$ *สำหรับทุก ๆ* x *ยกเว้นบาง* x *ซึ่งมีอยู่เพียงจำนวนจำกัด แล้ว* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ *ถ้า limit อันใดอันหนึ่งหาค่าได้*

หมายเหตุ ทฤษฎีบทนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย

ตัวอย่าง 2.3. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 2} \frac{-x^2+6x-8}{x-2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} \frac{-x^2+6x-8}{x-2} &= \lim_{x \to 2} -\frac{(x-2)(x-4)}{x-2} \\
&= \lim_{x \to 2} -(x-4) \\
&= \lim_{x \to 2} (4-x) \\
&= \lim_{x \to 2} 4 - \lim_{x \to 2} x \\
&= 4-2 \\
&= 2
\end{aligned} \tag{2.1}$$

ตัวอย่าง 2.4. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ **วิธีทำ**

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} &= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)} \\
&= \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \\
&= \frac{\lim_{x\to 3} 1}{\lim_{x\to 3}\sqrt{x}+\lim_{x\to 3}\sqrt{3}} \\
&= \frac{\lim_{x\to 3} 1}{\sqrt{\lim_{x\to 3} x}+\lim_{x\to 3}\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}}
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

ตัวอย่าง 2.5. จงหา limits ต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

2. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

วิธีทำ

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \frac{0-\sqrt{3}}{x-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2. เนื่องจาก function $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ ไม่ใช่ function ที่หาค่าได้บนช่วงเปิด $(b,0)$ ใด ๆ เลย ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ จึงหาค่าไม่ได้

3. เนื่องจาก $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ จึงหาค่าไม่ได้

ข้อสังเกต ในกรณีที่ function ที่มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีขอบเขต เมื่อตัวแปรต้นเข้าใกล้ a (ทางซ้ายหรือขวาหรือทั้งสองทาง) บางตำรากล่าวว่า limit ของ function มีค่าเป็น $+\infty$ และถ้า function มีค่าลดลงโดย

ไม่มีขอบเขต จะกล่าวว่า limit ของ function มีค่าเป็น $-\infty$ ในวิชานี้เราจะถือตามนิยามที่ให้ไว้ ดังนั้น ในกรณีข้างต้น จะกล่าวว่า limit ดังกล่าวหาค่าไม่ได้ (เว้นแต่จะระบุให้พิจารณาค่า $\pm\infty$ ด้วย)

ตัวอย่าง 2.6. จงหา limit ของ function $f(x) = \frac{1}{x}$

1. เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย
2. เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางขวา
3. เมื่อ x เข้าใกล้ 0

วิธีทำ

1. $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้ (หรือเท่ากับ $-\infty$)
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้ (หรือเท่ากับ $+\infty$)
3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้

ในบางครั้ง เราสนใจพฤติกรรมของ function f เมื่อค่าตัวแปรต้นมีค่ามากขึ้นโดยไม่มีขอบเขต หรือน้อยลงโดยไม่มีขอบเขต ในกรณีเช่นนี้ เราใช้สัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ตามลำดับ แทนที่จะใช้ $\lim\limits_{x \to \infty^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to \infty^+} f(x)$ (โปรดอ่านนิยามในเอกสารอ้างอิง) ทฤษฎีบทเกี่ยวกับ limit ที่กล่าวมาข้างต้นทั้งหมด เป็นจริงในกรณีนี้ด้วย นอกจากนี้ เรายังมี ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎี 2.5.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

3. *ถ้า* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ *แล้ว* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ *ซึ่งเป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย ในที่นี้* $a \in R$ *หรือ a เป็น* $+\infty$ *หรือ* $-\infty$

ตัวอย่าง 2.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+12}{x^3-5}=?$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+12}{x^3-5} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x^2+12\right)/x^3}{\left(x^3-5\right)/x^3} \\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{12}{x^3}}{1-\frac{5}{x^3}} = \frac{0+0}{1-0} = 0\end{aligned} \tag{2.3}$$

ตัวอย่าง 2.8. $\lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{2}{3}} = ?$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{2}{3}} &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\
&= \sqrt[3]{\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\right)^2} = 0
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

ตัวอย่าง 2.9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{5}}+5x^{\frac{1}{7}}}{3x^{\frac{1}{3}}+5x^{\frac{1}{5}}+7x^{\frac{1}{7}}} = ?$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{5}}+5x^{\frac{1}{7}}}{3x^{\frac{1}{3}}+5x^{\frac{1}{5}}+7x^{\frac{1}{7}}} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}\left(1+3x^{-\frac{2}{15}}+5x^{-\frac{4}{21}}\right)}{x^{\frac{1}{3}}\left(3+5x^{-\frac{2}{15}}+7x^{-\frac{4}{21}}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+3x^{-\frac{2}{15}}+5x^{-\frac{4}{21}}}{3+5x^{-\frac{2}{15}}+7x^{-\frac{4}{21}}} = \frac{1}{3}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

ข้อสังเกต ตัวแปร x ในสัญลักษณ์ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ เรียกว่า “ตัวแปรหุ่น” (dummy variable) เพราะไม่ได้กล่าวถึงตัวแปร x แต่เราใช้มันเพื่อเขียนสัญลักษณ์แทนจำนวนจริงจำนวนหนึ่งที่ค่าของ function f ใกล้เข้าไปหา ในยามที่ตัวแปรต้นของมันมีค่าใกล้ a เข้าไปทุกที เราอาจเขียน $\lim\limits_{t\to a} f(t)$ แทนจำนวนจำนวนนี้ก็ได้ เป็นต้น ตัวอย่างของ dummy variable อื่น ๆ เช่น ตัวแปร n ในสัญลักษณ์ $\sum\limits_{n=1}^{4} n^2$ ซึ่งอาจเขียนใหม่เป็น $\sum\limits_{k=1}^{4} k^2$ ก็ได้ ทั้งสองสัญลักษณ์นี้แทนจำนวน $1^2+2^2+3^3+4^4$

ตัวอย่าง 2.10. จงหา $\lim_{x \to 3} f(x)$ เมื่อ $f(x) = x^2 - 5$ ถ้า $x \leq 3 = \sqrt{x+13}$ ถ้า $x > 3$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3^-} f(x) &= \lim_{x \to 3^-} x^2 - 5 \leftarrow \boxed{f(x) = x^2 - 5 \text{ เมื่อ } x \text{ อยู่ทางซ้ายของ 3}} \\ &= 4 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3^+} f(x) &= \lim_{x \to 3^+} \sqrt{x+13} \leftarrow \boxed{f(x) = \sqrt{x+13} \text{ เมื่อ } x \text{ อยู่ทางขวาของ 3}} \\ &= 4 \end{aligned} \tag{2.7}$$

เนื่องจาก $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$ ดังนั้น $\lim_{x \to 3} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ 4

ตัวอย่าง 2.11. จงหา $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)$ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{ถ้า } x \leq 3 \\ \sqrt{x+13} & \text{ถ้า } x > 3 \end{cases}$$

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} (x^2 - 5) = -5$

2.1 ความต่อเนื่อง (Continuity)

ในวิชาฟิสิกส์ เราสามารถเขียนตำแหน่งของวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่ในรูป function ของเวลาได้ (วัตถุย่อมอยู่ในที่ใดที่หนึ่งเพียงที่เดียว ณ เวลาหนึ่ง ๆ)

คำถาม : function ใด ๆ เป็น function ที่แสดงตำแหน่งของวัตถุใดวัตถุหนึ่งได้เสมอหรือไม่

ลองอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ ถ้า function ที่แสดงตำแหน่งของมัน คือ

1. $s_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } t < 3 \\ 1 & \text{ถ้า } t > 3 \end{cases}$

2. $s_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } t \leq 3 \\ 1 & \text{ถ้า } t > 3 \end{cases}$

3. $s_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } t \neq 3 \\ 0 & \text{ถ้า } t = 3 \end{cases}$

กราฟของ s_1, s_2 และ s_3 เป็นดังนี้

ข้อสังเกต:

1. $s_1(3)$ หาค่าไม่ได้
2. $s_2(3)$ หาค่าได้ แต่ $\lim_{t \to 3} s_2(t)$ หาค่าไม่ได้
3. $s_3(3)$ หาค่าได้ $\lim_{t \to 3} s_3(t)$ หาค่าได้ แต่ $s_3(3) \neq \lim_{t \to 3} s_3(t)$

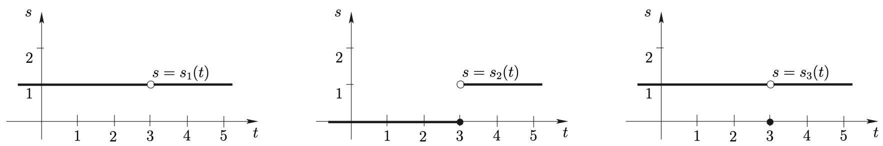

Figure 2.5: กราฟของฟังก์ชัน s_1, s_2 และ s_3

นิยาม 2.3. ให้ $f : D_f \to R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และ $a \in R$ เรากล่าวว่า f ต่อเนื่อง (cotinuous) ที่ a ถ้า

1. $f\left(a\right)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้
3. $f\left(a\right) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

นิยาม 2.4. ให้ f เป็น function และ S เป็นเซต (set) เรากล่าวว่า f ต่อเนื่องบน S (continuous on S) ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ สมาชิกของ S เรียก function ที่ continuous on R ว่า "ฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function)"

ข้อสังเกต จะเห็นว่า function ที่แสดงตำแหน่งของวัตถุต้องเป็น continuous function บนช่วงที่สนใจ

ทฤษฎี 2.6. *ถ้า* f *และ* g *เป็น function ที่ต่อเนื่องที่* a *แล้ว*

1. $f + g$ *ต่อเนื่องที่* a
2. $f - g$ *ต่อเนื่องที่* a
3. $f \cdot g$ *ต่อเนื่องที่* a
4. $\frac{f}{g}$ *ต่อเนื่องที่* a *ถ้า* $g\left(a\right) \neq 0$

ตัวอย่าง 2.12. function f ซึ่งนิยามโดย $f(x) = |x|$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่

วิธีทำ ในที่นี้

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ -x & \text{ถ้า } x > 0 \end{cases}$$

เราต้องพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ $a \in R$ หรือไม่

- ถ้า $a > 0$ จะได้ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} x = a = f(a)$
- ถ้า $a < 0$ จะได้ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (-x) = -a = f(a)$
- ถ้า $a = 0$จะได้ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x) = 0 = f(0)$
  และ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 = f(0)$
  ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ $a \in R$ จึงสรุปว่า f เป็น continuous function

ทฤษฎี 2.7. *ฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) เป็น function ที่ต่อเนื่องบน domain ของมัน*

หมายเหตุ: rational function คือ function ที่เป็นเศษส่วนของพหุนาม (polynomial) domain ของ rational function ได้แก่เซตของจำนวนจริงซึ่งไม่ทำให้ส่วนของมันเป็นศูนย์

ทฤษฎี 2.8. *ถ้า* f *และ* g *เป็น function และ* $a \in R$ *โดยที่* $\lim_{x \to a} g(x) = L$ *และ* f *ต่อเนื่องที่* L *แล้ว* $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(L)$

ตัวอย่าง 2.13. $\lim\limits_{x\to 1}\left|\frac{x^4-x^2+1}{x^4+x^2+1}\right| = ?$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left|\frac{x^4-x^2+1}{x^4+x^2+1}\right| &= \left|\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^2+1}{x^4+x^2+1}\right| \\ &= \left|\frac{1^4-1^2+1}{1^4+1^2+1}\right| \\ &= \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}\end{aligned} \tag{2.8}$$

ทฤษฎี 2.9. *ถ้า* f *ต่อเนื่องที่* a *และ* g *ต่อเนื่องที่* $f(a)$ *แล้ว* $g \circ f$ *ต่อเนื่องที่* a

จงพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้น

ตัวอย่าง 2.14. function f ซึ่งนิยามโดย $f(x) = \left|\frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}\right|$ เป็น continuous function หรือไม่

วิธีทำ f เป็น continuous function เพราะ $f = g \circ h$ โดยที่ $g(x) = |x|$ และ $h(x) = \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$ ซึ่งเป็น continuous function ทั้งคู่

นิยาม 2.5. เรานิยาม "ภาวะต่อเนื่องทางซ้าย" และ "ภาวะต่อเนื่องทางขวา" ได้โดยแทนที่ $\lim\limits_{x \to a}$ ในเงื่อนไขของนิยาม ด้วย $\lim\limits_{x \to a^-}$ และ $\lim\limits_{x \to a^+}$ ตามลำดับ นั่นคือ

ให้ $f : D_f \to R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และ $a \in R$ เรากล่าวว่า f "ต่อเนื่องทางซ้าย (left-continuous) ที่ a" ถ้า

1. $f\left(a\right)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ หาค่าได้
3. $f\left(a\right) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

และกล่าวว่า f "ต่อเนื่องทางขวา (right-continuous) ที่ a" ถ้า

1. f(a) หาค่าได้
2. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ หาค่าได้
3. f$(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

นิยาม 2.6. ให้ $f : [a, b] \to R$ เรากล่าวว่า f ต่อเนื่องบน $[a, b]$ (continuous on $[a, b]$) ถ้า

1. f ต่อเนื่องบน (a, b)
2. f ต่อเนื่องทางขวาที่ a
3. f ต่อเนื่องทางซ้ายที่ b

ตัวอย่าง 2.15. function f ที่นิยามโดย $f\left(x\right)=\sqrt{4-x^{2}}$ เป็น continuous function บน $\left[-2,2\right]$ หรือไม่

วิธีทำ เราตรวจสอบได้ว่า f เป็น continuous function บน $\left[-2,2\right]$ เพราะ
1. f เป็น continuous function บน $\left(-2,2\right)$
2. f ต่อเนื่องทางขวาที่ -2 เพราะ $$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2^{+}}f(x) &= \lim_{x\to-2^{+}}\sqrt{4-x^{2}} \\ &= 0=f\left(-2\right)\end{aligned} \tag{2.9}$$

3. f ต่อเนื่องทางซ้าย ที่ 2 เพราะ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2^{-}}f(x) &= \lim_{x\to-2^{-}}\sqrt{4-x^{2}} \\ &= 0=f\left(2\right)\end{aligned} \tag{2.10}$$

ตัวอย่าง 2.16. พิจารณา function f ซึ่งมีกราฟดังต่อไปนี้

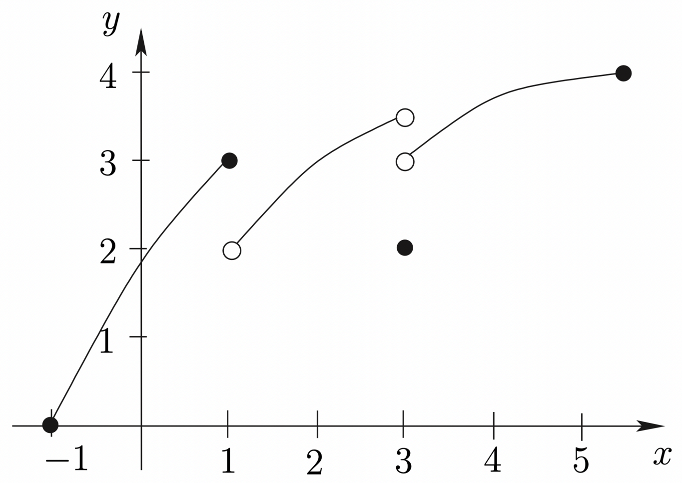

Figure 2.6: กราฟของฟังก์ชันในตัวอย่างrefexm:ex-cont-5

1. f มีความต่อเนื่องที่ $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ หรือไม่

2. f มีความต่อเนื่องบน $[-1, 0], [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5]$ หรือไม่

วิธีทำ ให้นักศึกษาทำเป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎี 2.10. *ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และฟังก์ชันลอการิทึม เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนโดเมนของมัน*