

SCMA104 Systems of Ordinary Differential Equations and Applications in Medical Science

Pairote Satiracoo

2024-08-21

Contents

| | | |
|-----|---|----|
| 1 | หลักการและความสำคัญของแคลคูลัสและระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ | 1 |
| 2 | ลิมิต (Limits) | 17 |
| 2.1 | ความต่อเนื่อง (Continuity) | 42 |
| 3 | อนุพันธ์ (Derivatives) | 55 |
| 3.1 | อนุพันธ์ (Derivatives) | 55 |
| 3.2 | การคำนวณหาอนุพันธ์ | 59 |
| 3.3 | สูตรสำหรับหาอนุพันธ์ | 64 |
| 3.4 | อนุพันธ์อันดับสูง (High Order Derivatives) | 69 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.5 | การตีความอนุพันธ์ (Interpretation of Derivatives) | 71 |
| 3.6 | กฎลูกโซ่ (The Chain Rule) | 81 |
| 3.7 | อนุพันธ์ของฟังก์ชันอินเวอร์ส (Derivatives of Inverse Functions) | 91 |
| 3.8 | Differentials, Implicit Differentiation and Related Rates | 97 |
| 3.9 | อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ | 126 |
| 3.10 | อนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม | 142 |
| 4 | การประยุกต์ของอนุพันธ์ (Applications of Differentiation) | 153 |
| 4.1 | Applications of derivatives related to students discipline | 154 |
| 4.2 | Sketching the graph of a function from the derivative | 161 |
| 4.3 | การประยุกต์ของ Monotonicity และ Concavity | 184 |
| 4.4 | การหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization) | 189 |
| 4.5 | รูปแบบไม่กำหนด (Indeterminate form) และกฎของโลปีตาล (L'Hopital Rule) | 197 |
| 5 | การหาปริพันธ์ (Integrations) | 207 |
| 5.1 | ปฏิยานุพันธ์ (Antiderivatives) | 207 |
| 5.2 | ปริพันธ์จำกัดเขต (The Definite Integral) | 213 |
| 5.3 | ทฤษฎีพื้นฐานของแคลคูลัส (The fundamental Theorem of Calculus) . . . | 217 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 6 | เทคนิคของการหาปริพันธ์ (Techniques of Integration) | 229 |
| 6.1 | การหาปริพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร (Integration by Substitution) | 230 |
| 6.2 | การหาปริพันธ์โดยแยกส่วน (Integration by Parts) | 239 |
| 6.3 | การหาปริพันธ์โดยเศษส่วนย่อย (Integration by Partial Fractions) | 245 |
| 6.4 | ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (Improper Integrals) | 252 |
| 6.5 | แบบฝึกหัด | 261 |

Chapter 1

หลักการและความสำคัญของแคลคูลัส และระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

แคลคูลัสมีส่วนประกอบหลักที่สำคัญอยู่ 2 องค์ประกอบ คือ

1. การหาอนุพันธ์ (differentiation) และ
2. การหาปริพันธ์ (Integration)

การประยุกต์ เรื่อง การหาอนุพันธ์ ในการ แก้ปัญหาเบื้องต้นที่สำคัญในทางชีววิทยา หรือทางการแพทย์ ประกอบด้วย การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณของตัวแปรที่เราสนใจ และการใช้แคลคูลัสในการแก้ ปัญหาการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของปัญหาหรือฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เราสนใจ

ตัวอย่างการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่สนใจ เช่น ขนาดของประชากร จำนวนของผู้ติดเชื้อจากโรคทางเดินหายใจ ระดับน้ำตาลในกระแสเลือด ปริมาณของยาที่มีอยู่ในกระแสเลือดหรือส่วนหนึ่งของร่างกาย โดยที่การเปลี่ยนแปลงดังกล่าวสามารถเปรียบเทียบได้กับเวลา ดังต่อไปนี้

- ประชากรในประเทศไทยปี พ.ศ. 2566 มีจำนวน 66.05 ล้านคน (ข้อมูลอ้างอิงจาก สำนักงานคณะกรรมการส่งเสริมการลงทุน)
- ข้อมูลจำนวนผู้รักษาตัวในโรงพยาบาลจากศูนย์ข้อมูล COVID-19 ระหว่างวันที่ 28 กรกฎาคม ถึงวันที่ 3 สิงหาคม พ.ศ. 2567 (ข้อมูลอ้างอิงจาก ศูนย์ข้อมูล Covid-19)
- การเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำตาลในเลือดระหว่างมื้ออาหารสามมื้อในหนึ่งวัน (รูปภาพอ้างอิงจาก Wikipedia: Blood Sugar Level)
- การเปลี่ยนแปลงของปริมาณยาในกระแสเลือดที่เวลาต่างๆ สำหรับการให้ยาโดยวิธีต่างๆ (รูปภาพอ้างอิงจาก บทความทางวิชาการในฐานข้อมูล MDPI)



สถานการณ์ COVID-19 ในประเทศไทย

28 กรกฎาคม - 3 สิงหาคม 2567

จำนวนผู้ป่วยรักษาตัวในโรงพยาบาล (รายสัปดาห์)

+560

เฉลี่ยรายวัน จำนวน 80 ราย/วัน

จำนวนผู้เสียชีวิต (รายสัปดาห์)

+1

เฉลี่ยรายวัน จำนวน 1 ราย/วัน

ป่วยสะสม ตั้งแต่ 1 มกราคม 2567

36,141

ตั้งแต่ 1 มกราคม 2567 เสียชีวิตสะสม

194

f ศูนย์ข้อมูล COVID-19

สรุปสถานการณ์ ศูนย์ข้อมูล COVID-19

Figure 1.1: ข้อมูลจำนวนผู้รักษาตัวในโรงพยาบาลจากศูนย์ข้อมูล COVID-19

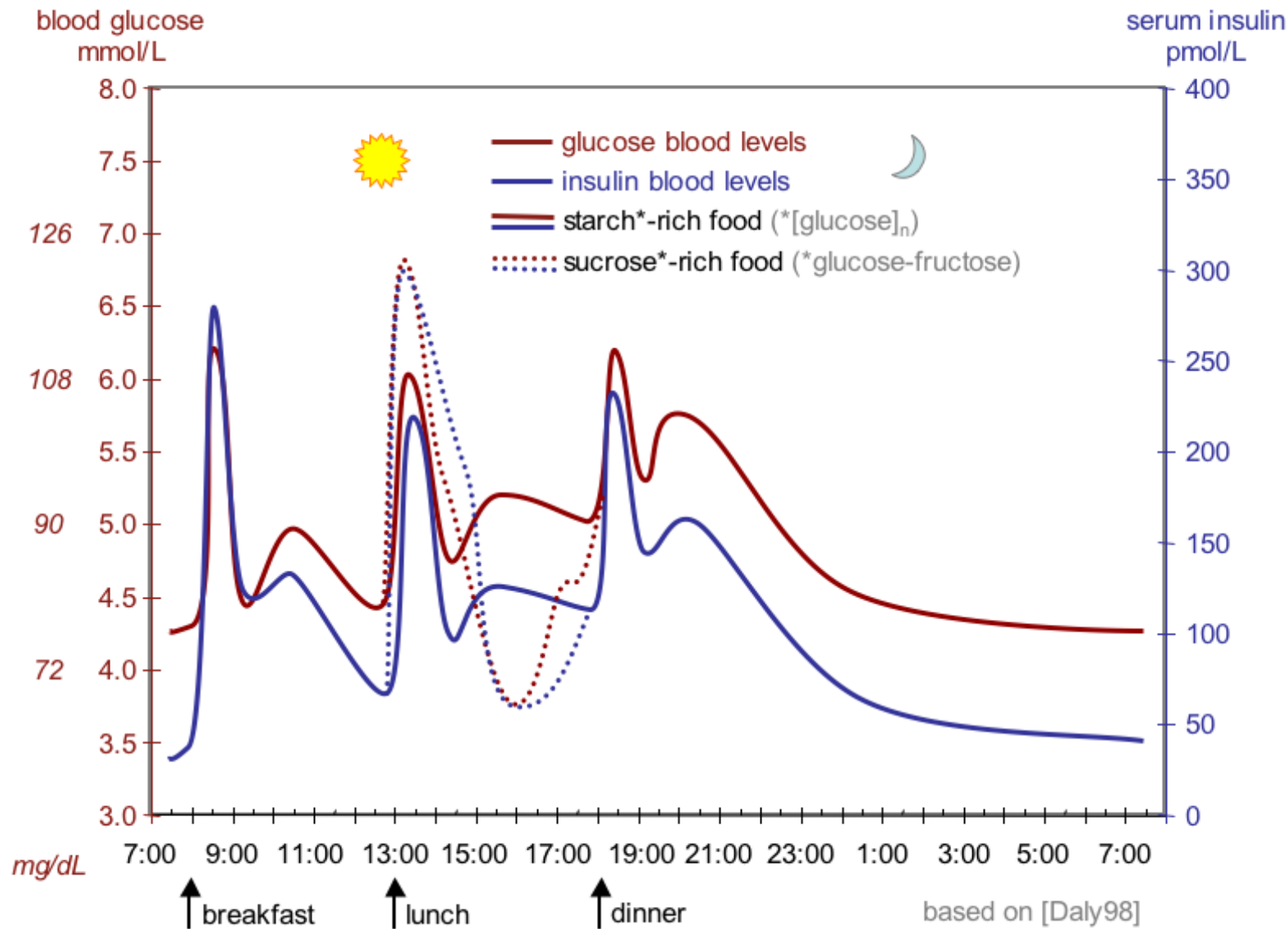


Figure 1.2: ความผันผวนของระดับน้ำตาลในเลือด (สีแดง) และฮอร์โมนอินซูลิน (สีน้ำเงิน) ในมนุษย์ ระหว่างมื้ออาหารสามมื้อ

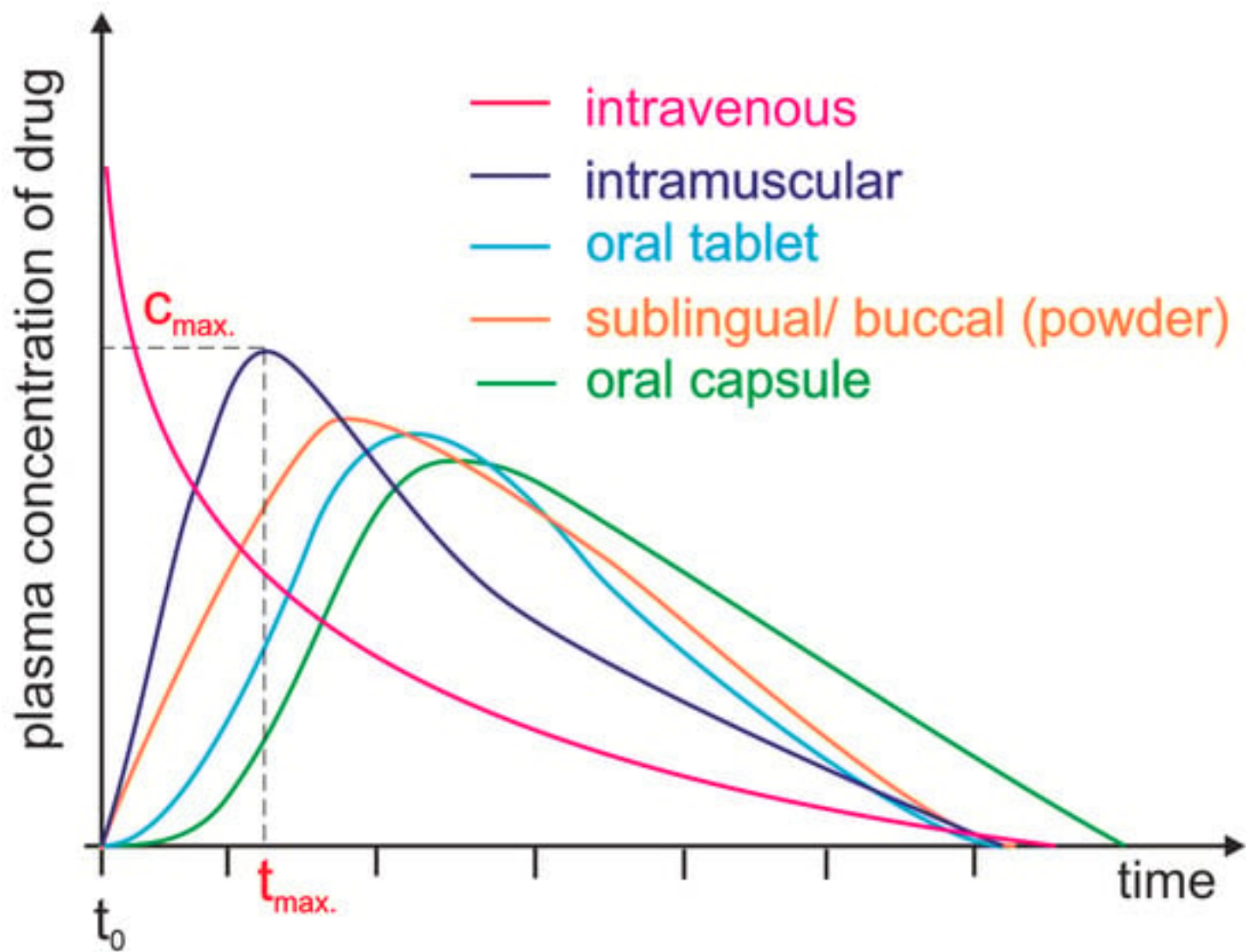


Figure 1.3: ความเข้มข้นของยาในกระแสเลือดที่เวลาต่างๆ

ในการทำความเข้าใจการเปลี่ยนแปลงของปริมาณข้างต้นเทียบกับเวลา เราสามารถประยุกต์ใช้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อมาใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงของปริมาณต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการอธิบายปัญหาหรือ ปรากฏการณ์ต่างๆ ที่เกิดขึ้นในธรรมชาติ โดยปกติแล้วจะอยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้จะช่วยให้อธิบายสิ่งต่างๆ ที่เกิดขึ้นในปัญหาหรือปรากฏการณ์ที่สนใจ

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงถึงแนวคิดในการประยุกต์ของแคลคูลัสที่เกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของ

Table 1.1: จำนวนของแบคทีเรียที่เวลา t ใดๆ

| เวลา (10 นาที) | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----------------|---|---|---|---|----|----|----|
| จำนวนแบคทีเรีย | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |

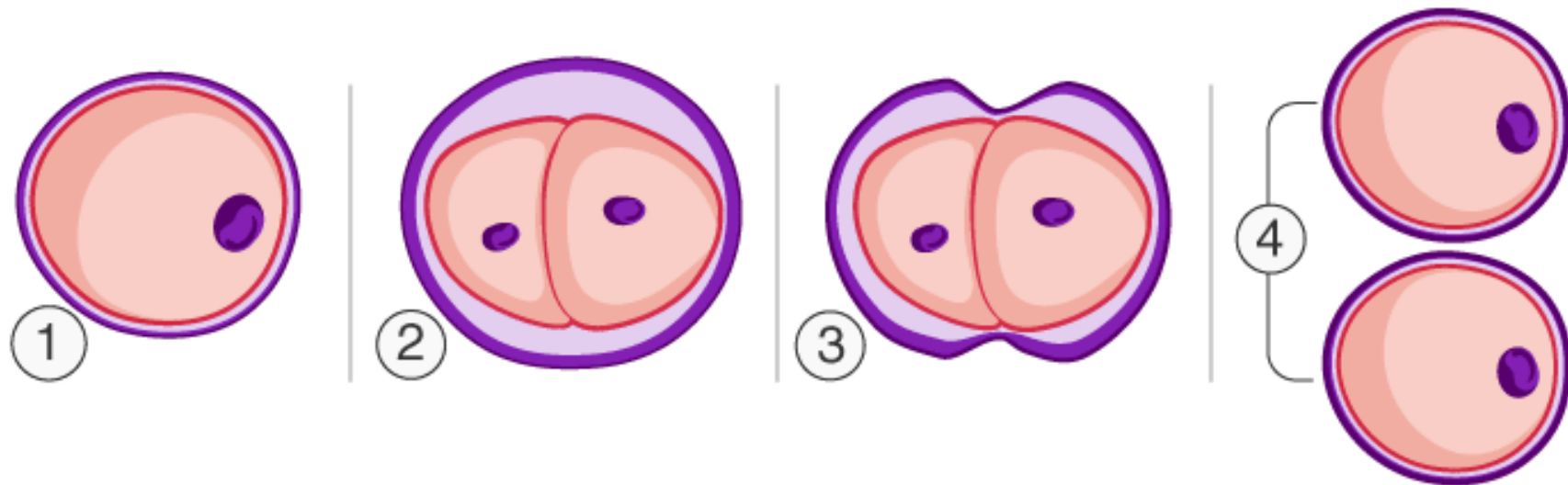
ตัวอย่าง 1.1. ในการทดลองหนึ่ง นักวิจัยต้องการศึกษาการขยายพันธุ์ของแบคทีเรียที่มีการการแบ่งตัวที่เรียกว่า binary fission (การแบ่งตัวแบบทวิภาค) ซึ่งแบคทีเรียจะมีการแบ่งจากหนึ่งเป็นสองเซลล์เท่าๆ กัน และได้ผลการทดลองดังต่อไปนี้

(รูปอ้างอิงจาก BYJU's Learning Website)

ตาราง 1.1 และรูปที่ 1.5 แสดงการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียที่เวลาใดๆ ในตัวอย่างนี้การเปลี่ยนแปลงของจำนวนของแบคทีเรียที่เวลา t สามารถเขียนในรูปฟังก์ชัน $N(t)$ ถ้าให้ N_0 แทนจำนวนของแบคทีเรียตอนเริ่มการทดลอง แล้วแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการเพิ่มของจำนวนแบคทีเรียจะสามารถเขียนในรูปของสมการ

$$N(t) = N_0 \cdot 2^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

BINARY FISSION



- 1 Parent cell | 2 DNA Duplicates | 3 Cytoplasm divides | 4 Two daughter cells

© Byjus.com

Figure 1.4: กระบวนการแบ่งตัวแบบทวิภาคของแบคทีเรีย

ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้การเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียที่เวลา t ใดๆ เพิ่มขึ้นในลักษณะที่เรียกว่า เอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Population Growth)

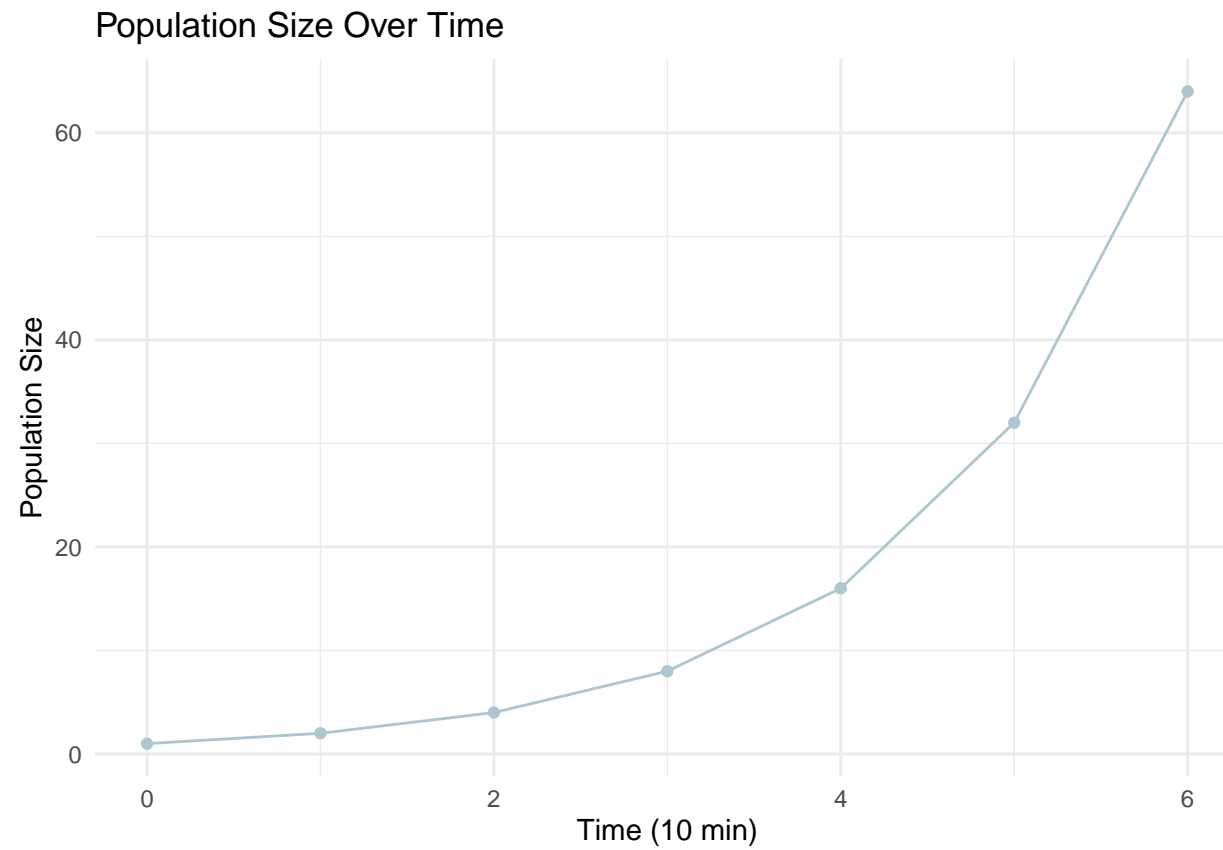


Figure 1.5: Population Size Over Time

ตัวอย่าง 1.2. ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ในตัวอย่างของการขยายพันธุ์แบคทีเรีย หรือในปัญหาอื่นๆ แทนที่เราจะพยายามหาความสัมพันธ์ หรือฟังก์ชัน $N(t)$ ในรูปของเวลา t โดยตรง ถ้าเราทราบกระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร $N(t)$ นั้น เราสามารถนำมาใช้ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ได้ดังต่อไปนี้ กระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรีย (การเพิ่มหรือลดลงของแบคทีเรีย) ที่เกิดขึ้นในระหว่างเวลา t และเวลา $t + h$ เกิดจากจำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้น (เกิดขึ้นมาใหม่) ในช่วงเวลาดังกล่าว และลดลงจากจำนวนแบคทีเรียที่ลดลง (ตายไป) ในช่วงเวลาดังกล่าวเช่นกัน ซึ่งเราสามารถเขียนในรูปของสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 N(t + h) &= N(t) \\
 &+ \text{จำนวนแบคทีเรียที่เกิดขึ้นใหม่ระหว่าง } t \text{ และ } t + h \\
 &- \text{จำนวนแบคทีเรียที่ตายไประหว่าง } t \text{ และ } t + h
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

ในที่นี้ “การเกิด” เราหมายถึงการเพิ่มจำนวนของแบคทีเรียจากหนึ่งเป็นสอง และเราจะกำหนดให้ h เป็นช่วงเวลาสั้นๆ (ซึ่งเราสามารถใช้ความรู้แคลคูลัสในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation)) ในสมการ (1.2) ถ้าเราสมมติว่า การเพิ่มของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่ในขณะนั้น หรือเขียนในรูปของสมการได้ดังนี้

จำนวนแบคทีเรียที่เกิดขึ้นใหม่ระหว่าง t และ $t + h \approx b \cdot N \cdot h$

จำนวนแบคทีเรียที่ตายไประหว่าง t และ $t + h \approx m \cdot N \cdot h$

โดยที่ค่าคงตัว b และ m ในสมการข้างต้น คือ อัตราการเกิด (birth rate) และอัตราการตาย (mortality rate)

เมื่อแทนจำนวนแบคทีเรียที่เกิดขึ้นใหม่ และตายไประหว่างช่วงเวลาที่กำหนดลงในสมการ (1.2) จะได้สมการ

$$N(t + h) - N(t) = b \cdot N(t) \cdot h - m \cdot N(t) \cdot h \quad (1.3)$$

เราสามารถจัดรูปสมการ (1.3) ได้ใหม่ในรูปของอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของจำนวนแบคทีเรียในช่วงเวลาดังกล่าว ดังนี้

$$\frac{N(t + h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \quad (1.4)$$

$$(1.5)$$

ดังนั้น ถ้าเราให้ h เข้าใกล้ 0 ผ่านการหาลำดับ เราจะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง (instantaneous rate of change) และเขียนได้ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ ดังนี้

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \quad (1.6)$$

$$(1.7)$$

ทั้งนี้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (1.7) เพื่อให้ได้คำตอบที่แสดงจำนวนแบคทีเรีย $N(t)$ ในรูปของฟังก์ชันของ t เราจะต้องกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องกับจำนวนแบคทีเรีย $N(t)$ ที่เวลา t หนึ่ง โดยทั่วไปเราจะกำหนดค่าเริ่มต้นของจำนวนแบคทีเรียที่ $t = 0$ ดังนั้น ถ้าเรากำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition)

$$N(0) = N_0 \quad (1.8)$$

เราสามารถหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นโดยวิธีการหาปริพันธ์ (Integration) ได้คำตอบของสมการดังนี้

$$N(t) = N_0 e^{(b-m)t} \quad (1.9)$$

ตัวอย่าง 1.3. ในการทดลองเลี้ยงยีสต์ในขวดทดลองที่มีอาหารเลี้ยงยีสต์ในปริมาณที่เหมาะสม ผู้ทำการทดลองสนใจที่จะประมาณค่าของยีสต์โดยอาศัยแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงของประชากรที่อธิบายด้วยสมการ (1.9) กำหนดให้

- ภายใต้สภาวะของการทดลองที่เหมาะสม ยีสต์จะแบ่งตัวทุกๆ 90 นาที
- ยีสต์มีครึ่งชีวิตเท่ากับ 1 สัปดาห์

จากข้อมูลดังกล่าว จงแสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบจากคำถามต่อไปนี้

1. จงประมาณค่าของอัตราการเกิด b (1/ชั่วโมง) และอัตราการตาย m (1/ชั่วโมง)
2. เขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้ค่า b และ m ที่ประมาณค่าได้ (สมการ (1.9))
3. ใช้เครื่องมือที่นักศึกษามีอยู่ในการวาดกราฟแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนยีสต์ที่เวลาต่างๆ
4. เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับรูปภาพแสดงการเปลี่ยนแปลงของยีสต์จากการทดลองในห้องปฏิบัติการ ตามรูปที่ 1.6 (รูปภาพอ้างอิงจาก <https://homework.study.com/>)

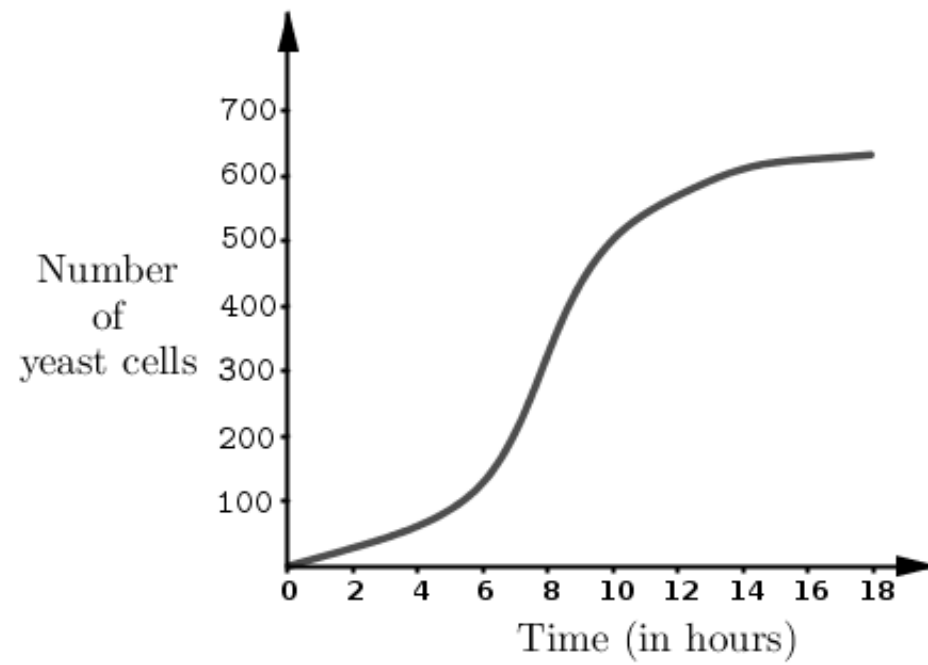


Figure 1.6: กราฟการเจริญเติบโตของเซลล์ยีสต์

ตัวอย่าง 1.4. จงใช้อินเทอร์เน็ตเพื่อค้นหาตัวอย่างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายโดยสมการเชิงอนุพันธ์หรือระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ข้อมูลที่ต้องการประกอบด้วย

1. ค้นหาเว็บไซต์ที่ให้ข้อมูลเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในปัญหาที่นักศึกษาสนใจ
2. จดบันทึก URL ของเว็บไซต์
3. เขียนสรุปสั้นๆ ว่าโมเดลนี้ใช้เพื่ออะไร

โดยสรุป แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์เป็นเครื่องมือสำคัญในการทำความเข้าใจว่าสิ่งต่างๆ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไรและ แคลคูลัสช่วยให้เราวิเคราะห์อัตราการเปลี่ยนแปลงและพื้นที่ใต้เส้นโค้ง ในขณะที่สมการเชิงอนุพันธ์ช่วยให้เราสร้างแบบจำลองระบบที่ซับซ้อนในสาขาต่างๆ เช่น ฟิสิกส์ วิศวกรรม เศรษฐศาสตร์ และชีววิทยา แนวคิดทางคณิตศาสตร์เหล่านี้มีความสำคัญต่อการแก้ปัญหาในโลกแห่งความเป็นจริง เมื่อโลกของเราก้าวหน้ามากขึ้น ความสำคัญของแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ก็จะเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง ซึ่งสนับสนุนความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

Chapter 2

ลิมิต (Limits)

อาจกล่าวได้ว่า วิชาแคลคูลัส ถือกำเนิดขึ้นมาจากความพยายามในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิตบนระนาบ 2 ปัญหาหลักๆ คือ

- การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้งที่กำหนดให้

กำหนดฟังก์ชัน (function) f และกำหนดจุด $P(x_0, y_0)$ บนกราฟ $y = f(x)$ จงหาสมการของเส้นตรงที่สัมผัสกราฟ $y = f(x)$ ที่จุด P

- การหาพื้นที่ของบริเวณที่กำหนดให้

กำหนด function f และช่วง $[a, b]$ ในโดเมนของ f จงหาพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมด้วยแกน X และกราฟ $y = f(x)$ สำหรับ $x \in [a, b]$

แนวความคิดในการแก้ปัญหาทั้งสอง นำไปสู่การศึกษาเรื่อง ลิมิต (Limits) ซึ่งเป็นพื้นฐานของวิชาแคลคูลัสนั่นเอง

แต่ในปัจจุบันเราพบว่าวิชาแคลคูลัสมีประโยชน์ในการช่วยแก้ปัญหาในสาขาวิชาต่าง ๆ มากมาย เช่น เราจะพบในการศึกษาวิชานี้ว่า แคลคูลัสมีบทบาทในการแก้ปัญหาต่อไปนี้

- โดยทั่วไป ยาชนิดฉีดจะต้องใช้เวลาระยะหนึ่งหลังจากฉีดเข้าสู่ร่างกาย ในการที่จะไหลเวียนในกระแสโลหิต จนกระทั่งมีความเข้มข้นสูงสุด สมมติว่า ยาชนิดหนึ่งหลังจากฉีดเข้าสู่ร่างกายนาน t ชั่วโมง จะมีความเข้มข้นเป็น $C(t) = 0.15(e^{-0.18t} - e^{-1.2t})$ มิลลิกรัมต่อมิลลิลิตร จงหาว่า นานเท่าใดหลังจากฉีดยา จึงจะมีความเข้มข้นของยา ในกระแสโลหิตสูงที่สุด
- เราอาจประมาณได้อย่างมีเหตุผลว่า artery มีรูปร่างที่เป็นผลมาจากการหมุนรอบแกน ของเส้นโค้งในระนาบ โดยในสถานะนิ่ง รัศมีของ artery มีค่าคงที่เท่ากับ 1 หน่วย (รูปทรงกระบอก) แต่ในขณะที่หัวใจสูบฉีดโลหิตผ่าน artery artery จะพองตัวออก ทำให้รัศมีเปลี่ยนไปตามสมการ $R(x) = 1 + 0.4x - 0.04x^2$ หน่วย เมื่อ $0 \leq x \leq 10$ เป็นตำแหน่งบนแนวยาวของ artery จงหาว่า

ปริมาณโลหิตที่อยู่ใน artery ขณะที่หัวใจสูบฉีดโลหิตผ่านเข้ามาเป็นก่เท่าของความจุโลหิตในสถานะนิ่ง

- ความก้าวหน้าในทางการแพทย์ และเทคโนโลยีปัจจุบัน ทำให้มีการประดิษฐ์อุปกรณ์ช่วยในการรักษาโรคเบาหวานขึ้นหนึ่งขึ้น อุปกรณ์นี้มีลักษณะเป็นแคปซูล ซึ่งเมื่อฝังอุปกรณ์นี้ภายในร่างกายแล้ว มันจะหลั่งสารอินซูลินที่บรรจุอยู่ภายใน ออกสู่กระแสโลหิต โดยมีอัตราการหลั่งเป็น $f(t) = 0.5te^{-0.09t}$ ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวัน เมื่อ t คือ เวลาเป็นวัน นับจากอุปกรณ์เริ่มทำงาน จงหาว่า แพทย์จะต้องสั่งให้บรรจุอินซูลินในแคปซูลเป็นปริมาณเท่าใด เพื่อให้อุปกรณ์นี้สามารถให้อินซูลินแก่ผู้ป่วยได้นาน 3 เดือน
- การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด $P_0(x_0, y_0)$

ขั้นตอนสรุปการหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง 2.1

1. เลือกจุดอื่นบนกราฟ เรียกจุดนี้ว่า $P(x, y)$
2. ลากเส้นผ่าน PP_0
3. ทำซ้ำโดยเลือกจุด P ให้ใกล้ P_0 มากขึ้น
4. เส้น PP_0 ที่ได้จะ “เข้าใกล้” เส้นสัมผัสมากขึ้นทุกที

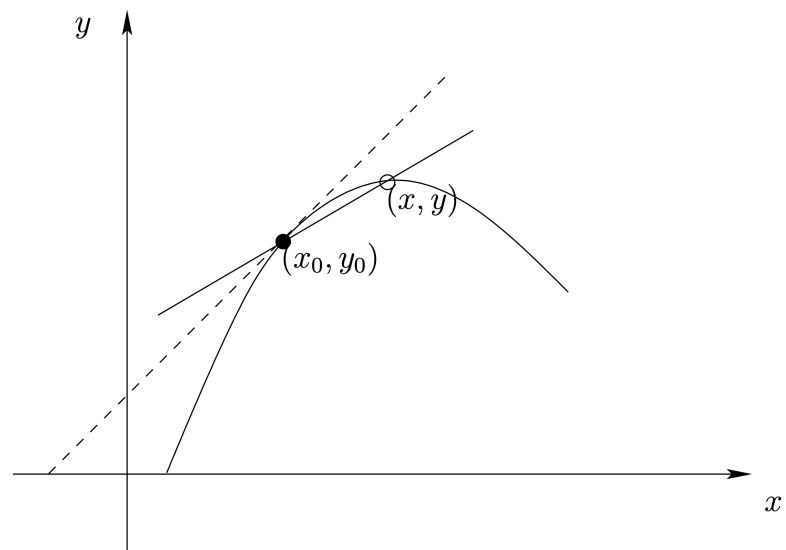


Figure 2.1: การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง

- การหาพื้นที่ “ใต้กราฟ” ระหว่าง $x = a$ กับ $x = b$

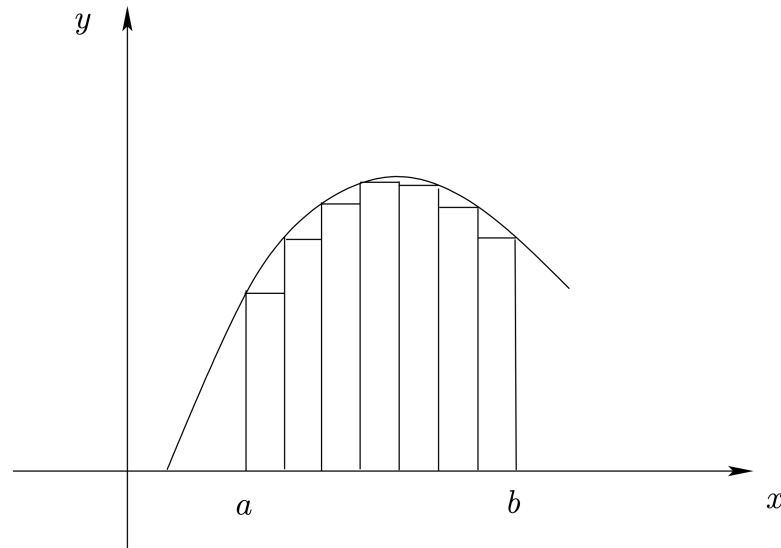


Figure 2.2: การหาพื้นที่ใต้กราฟ

ขั้นตอนเบื้องต้นสำหรับการหาพื้นที่ใต้กราฟ

1. แบ่ง $[a, b]$ เป็นช่วงเล็กๆ
2. หาพื้นที่รวมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหมด
3. ทำซ้ำๆ โดยแบ่งช่วงให้เล็กมากขึ้น

4. พื้นที่ที่ได้จะ “เข้าใกล้” พื้นที่ที่ต้องการมากขึ้นทุกที

ตัวอย่าง 2.1. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y = -x^2 + 6x - 2$ ณ จุด $P_0(2, 6)$

วิธีทำ เลือกจุด $P(x, y)$ โดยที่ $x \neq 2$ และลากเส้น PP_0 จะได้ว่า ความชันของ PP_0 เท่ากับ

$$\begin{aligned}\frac{y-6}{x-2} &= \frac{-x^2+6x-8}{x-2} \\ &= -\frac{(x-2)(x-4)}{x-2} \\ &= 4-x\end{aligned}\tag{2.1}$$

ถ้า P อยู่ใกล้ P_0 มากขึ้น ค่า x ย่อมเกือบเป็น 2 ดังนั้น ความชันของ PP_0 จึงเข้าใกล้ $4-2=2$ มากขึ้นเรื่อย ๆ เส้นสัมผัสจึงควรมีความชันเป็น 2 และสมการเส้นสัมผัส คือ $y-6=2(x-2)$

จะเห็นว่า ในตัวอย่าง 2.1 นี้ เราสนใจพฤติกรรมของ function

$\frac{-x^2+6x-8}{x-2}$ เมื่อ $x \neq 2$ แต่มีค่าใกล้ 2 มาก ๆ นี่คือ ที่มาของเรื่อง

นิยาม 2.1. ให้ $f : D_f \rightarrow R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และให้ $a \in R$ โดยที่มีช่วง (a, b) บางช่วงที่ $(a, b) \subseteq D_f$ ($b > a$)

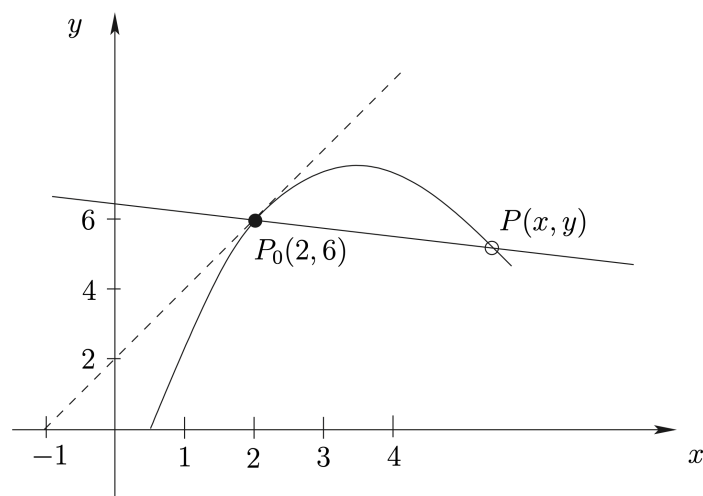


Figure 2.3: การหาเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = -x^2 + 6x - 2$

เราล่าวว่า “ลิมิต (limit) ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา หาค่าได้และมีค่าเท่ากับจำนวนจริง L ” ถ้า “ไม่ว่าเราจะกำหนดบริเวณรอบ ๆ L ไว้แคบเพียงใด เมื่อเราพิจารณาค่าของ $f(x)$ สำหรับค่า x ที่มากกว่า a โดยที่ให้ค่า ของ x ลดลงเรื่อย ๆ จนถึงจุดหนึ่ง ค่าของ $f(x)$ จะอยู่ในบริเวณรอบ ๆ L ที่เรากำหนดไว้นั้น และยังคงเป็นเช่นนี้สำหรับ x อื่น ๆ ที่น้อยกว่านั้น (แต่มากกว่า a) ทั้งหมดด้วย”

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราพิจารณาพฤติกรรมของ function สำหรับ x ที่น้อยกว่า a จะได้ limit ทางซ้าย ดังนี้ ให้ $f : D_f \rightarrow R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และให้ $a \in R$ โดยที่มีช่วง (b, a) บางช่วงที่ $(b, a) \subseteq D_f$ ($b < a$)

เราล่าวว่า “limit ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับจำนวนจริง L ” ถ้า “ไม่ว่าเราจะกำหนดบริเวณรอบ ๆ L ไว้แคบเพียงใด

เมื่อเราพิจารณาค่าของ $f(x)$ สำหรับค่า x ที่น้อยกว่า a โดยที่ให้ค่า ของ x เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนถึงจุดหนึ่ง ค่าของ $f(x)$ จะอยู่ในบริเวณรอบ ๆ L ที่เรากำหนดไว้นั้น และยังคงเป็นเช่นนี้สำหรับ x อื่น ๆ ที่มากกว่านั้น (แต่น้อยกว่า a) ทั้งหมดด้วย”

เราใช้สัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ แทนข้อความ “limit ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางขวา” และใช้สัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ แทนข้อความ “limit ของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย

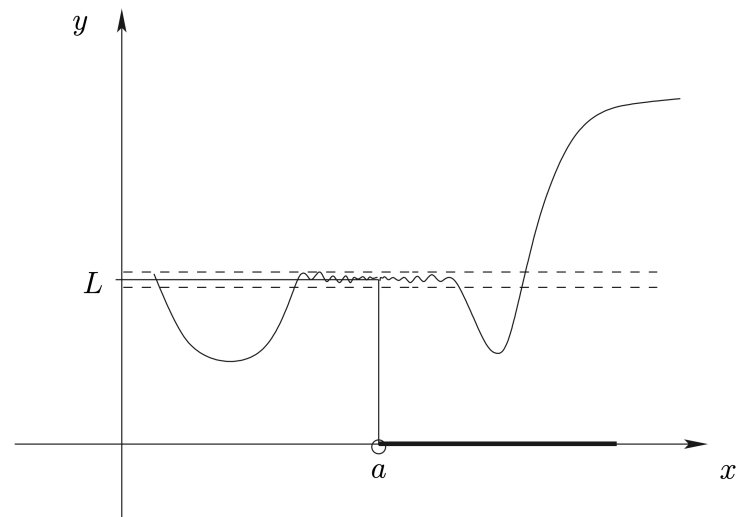


Figure 2.4: ลิมิตทางขวา

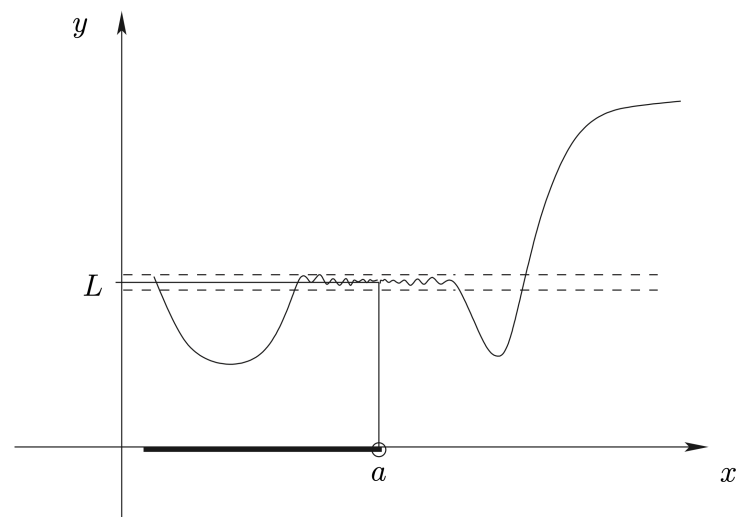


Figure 2.5: ลิมิตทางซ้าย

นิยาม 2.2. ในกรณีที่ทั้ง $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากัน

เรากล่าวว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับค่านั้น

ตัวอย่าง 2.2. function f ที่ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ จึงหาค่าไม่ได้ด้วย

วิธีทำ จากรูปต่อไปนี้

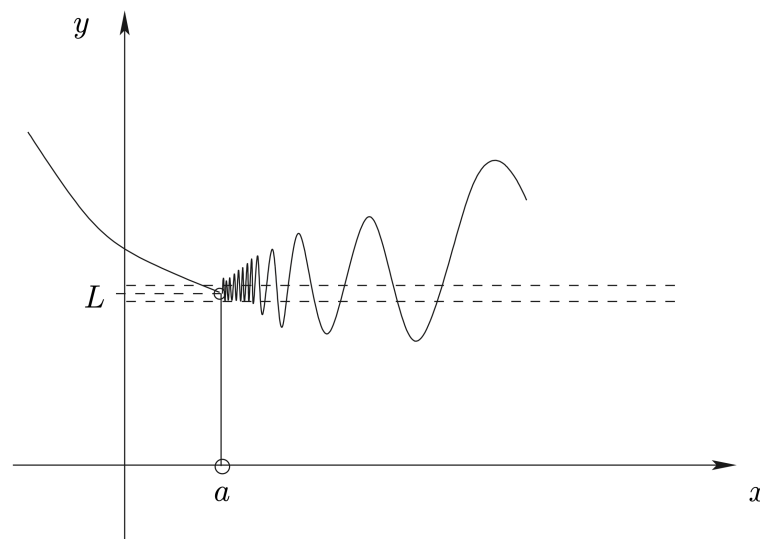


Figure 2.6: กราฟของฟังก์ชันที่หาขีดจำกัดไม่ได้

ในกรณีนี้ จะเห็นว่า ไม่ว่าจะเลือก L เป็นค่าใด ก็ไม่สามารถสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L$ เพราะไม่ใช่ทุกครั้ง

ที่เรากำหนดบริเวณรอบ ๆ L แล้ว function จะสอดคล้องตามนิยามเสมอไป จึงสรุปว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ หาค่าไม่ได้ด้วย

ทฤษฎี 2.1.

1. $\lim_{x \rightarrow c} c = c$ ถ้า c เป็นจำนวนจริง
2. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

ทฤษฎี 2.2. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ หาค่าได้แล้ว จะได้

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)$
4. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

หมายเหตุ ทฤษฎีบททั้งสองนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย

ทฤษฎี 2.3. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้ และ $\sqrt[n]{f(x)}$ หาค่าได้ สำหรับทุก ๆ x ในช่วงเปิดบางช่วงที่มี a อยู่ด้วย แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$

หมายเหตุ ทฤษฎีบทนี้เป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย โดยเปลี่ยนเงื่อนไข “ทุก ๆ x ” เป็น “ทุก ๆ $x < a$ ” และ “ทุก ๆ $x > a$ ” ตามลำดับ

ทฤษฎี 2.4. ถ้า f และ g เป็น function ซึ่ง $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก ๆ x ยกเว้นบาง x ซึ่งมีอยู่เพียงจำนวนจำกัด แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ถ้า limit อันใดอันหนึ่งหาค่าได้

หมายเหตุ ทฤษฎีบทนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวาด้วย

ตัวอย่าง 2.3. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 6x - 8}{x - 2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 6x - 8}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} -\frac{(x - 2)(x - 4)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} -(x - 4) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (4 - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} 4 - \lim_{x \rightarrow 2} x \\ &= 4 - 2 \\ &= 2\end{aligned}\tag{2.2}$$

ตัวอย่าง 2.4. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \\&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})} \\&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} \\&= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 1}{\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3}} \\&= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} 1}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 3} x} + \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3}} \\&= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} \\&= \frac{1}{2\sqrt{3}}\end{aligned}\tag{2.3}$$

ตัวอย่าง 2.5. จงหา limits ต่อไปนี้

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

วิธีทำ

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \frac{0-\sqrt{3}}{0-3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2. เนื่องจาก function $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ ไม่ใช่ function ที่หาค่าได้บนช่วงเปิด $(b, 0)$ ใด ๆ เลย ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ จึงหาค่าไม่ได้

3. เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$ จึงหาค่าไม่ได้

ข้อสังเกต ในกรณีที่ function ที่มีค่ามากขึ้นโดยไม่มีขอบเขต เมื่อตัวแปรต้นเข้าใกล้ a (ทางซ้ายหรือขวา หรือทั้งสองทาง) บางตำรากล่าวว่า limit ของ function มีค่าเป็น $+\infty$ และถ้า function มีค่าลดลงโดย

ไม่มีขอบเขต จะกล่าวว่า limit ของ function มีค่าเป็น $-\infty$ ในวิชานี้เราจะถือตามนิยามที่ให้ไว้ ดังนั้น
ในกรณีข้างต้น จะกล่าวว่า limit ดังกล่าวหาค่าไม่ได้ (เว้นแต่จะระบุให้พิจารณาค่า $\pm\infty$ ด้วย)

ตัวอย่าง 2.6. จงหา limit ของ function $f(x) = \frac{1}{x}$

1. เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย
2. เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางขวา
3. เมื่อ x เข้าใกล้ 0

วิธีทำ

1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้ (หรือเท่ากับ $-\infty$)
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้ (หรือเท่ากับ $+\infty$)
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้

ในบางครั้ง เราสนใจพฤติกรรมของ function f เมื่อค่าตัวแปรต้นมีค่ามากขึ้นโดยไม่มีขอบเขต หรือน้อยลงโดยไม่มีขอบเขต ในกรณีเช่นนี้ เราใช้สัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ตามลำดับ แทนที่จะใช้ $\lim_{x \rightarrow \infty^-} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow \infty^+} f(x)$ (โปรดอ่านนิยามในเอกสารอ้างอิง) ทฤษฎีบทเกี่ยวกับ limit ที่กล่าวมาข้างต้นทั้งหมด เป็นจริงในกรณีนี้ด้วย นอกจากนี้ เรายังมี ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎี 2.5.

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

3. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ซึ่งเป็นจริงสำหรับ limit ทางซ้าย และ limit ทางขวา ด้วย ในที่นี้ $a \in R$ หรือ a เป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$

ตัวอย่าง 2.7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+12}{x^3-5} = ?$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 12}{x^3 - 5} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 12) / x^3}{(x^3 - 5) / x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{12}{x^3}}{1 - \frac{5}{x^3}} = \frac{0 + 0}{1 - 0} = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

ตัวอย่าง 2.8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{2}{3}} = ?$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-\frac{2}{3}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \sqrt[3]{\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}\right)^2} = 0\end{aligned}\tag{2.5}$$

ตัวอย่าง 2.9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{5}} + 5x^{\frac{1}{7}}}{3x^{\frac{1}{3}} + 5x^{\frac{1}{5}} + 7x^{\frac{1}{7}}} = ?$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{5}} + 5x^{\frac{1}{7}}}{3x^{\frac{1}{3}} + 5x^{\frac{1}{5}} + 7x^{\frac{1}{7}}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} \left(1 + 3x^{-\frac{2}{15}} + 5x^{-\frac{4}{21}}\right)}{x^{\frac{1}{3}} \left(3 + 5x^{-\frac{2}{15}} + 7x^{-\frac{4}{21}}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3x^{-\frac{2}{15}} + 5x^{-\frac{4}{21}}}{3 + 5x^{-\frac{2}{15}} + 7x^{-\frac{4}{21}}} = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (2.6)$$

ข้อสังเกต ตัวแปร x ในสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ เรียกว่า “ตัวแปรหุ่น” (dummy variable) เพราะไม่ได้กล่าวถึงตัวแปร x แต่เราใช้มันเพื่อเขียนสัญลักษณ์แทนจำนวนจริงจำนวนหนึ่งที่ค่าของ function f ใกล้เข้าไปหา ในยามที่ตัวแปรต้นของมันมีค่าใกล้ a เข้าไปทุกที เราอาจเขียน $\lim_{t \rightarrow a} f(t)$ แทนจำนวนจำนวนนี้

ก็ได้ เป็นต้น ตัวอย่างของ dummy variable อื่น ๆ เช่น ตัวแปร n ในสัญลักษณ์ $\sum_{n=1}^4 n^2$ ซึ่งอาจเขียน

ใหม่เป็น $\sum_{k=1}^4 k^2$ ก็ได้ ทั้งสองสัญลักษณ์นี้แทนจำนวน $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

ตัวอย่าง 2.10. จงหา $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ เมื่อ $f(x) = x^2 - 5$ ถ้า $x \leq 3$ $= \sqrt{x + 13}$ ถ้า $x > 3$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 5 \leftarrow \boxed{f(x) = x^2 - 5 \text{ เมื่อ } x \text{ อยู่ทางซ้ายของ } 3} \\ &= 4 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x + 13} \leftarrow \boxed{f(x) = \sqrt{x + 13} \text{ เมื่อ } x \text{ อยู่ทางขวาของ } 3} \\ &= 4 \end{aligned} \quad (2.8)$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 4$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ 4

ตัวอย่าง 2.11. จงหา $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{ถ้า } x \leq 3 \\ \sqrt{x + 13} & \text{ถ้า } x > 3 \end{cases}$$

วิธีทำ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 5) = -5$

2.1 ความต่อเนื่อง (Continuity)

ในวิชาฟิสิกส์ เราสามารถเขียนตำแหน่งของวัตถุที่กำลังเคลื่อนที่ในรูป function ของเวลาได้ (วัตถุย่อมอยู่ในที่ใดที่หนึ่งเพียงที่เดียว ณ เวลาหนึ่ง ๆ)

คำถาม : function ใด ๆ เป็น function ที่แสดงตำแหน่งของวัตถุใดวัตถุหนึ่งได้เสมอหรือไม่

ลองอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ ถ้า function ที่แสดงตำแหน่งของมัน คือ

$$1. s_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } t < 3 \\ 1 & \text{ถ้า } t > 3 \end{cases}$$

$$2. s_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } t \leq 3 \\ 1 & \text{ถ้า } t > 3 \end{cases}$$

$$3. s_3(t) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } t \neq 3 \\ 0 & \text{ถ้า } t = 3 \end{cases}$$

กราฟของ s_1, s_2 และ s_3 เป็นดังนี้

ข้อสังเกต:

1. $s_1(3)$ หาค่าไม่ได้

2. $s_2(3)$ หาค่าได้ แต่ $\lim_{t \rightarrow 3} s_2(t)$ หาค่าไม่ได้

3. $s_3(3)$ หาค่าได้ $\lim_{t \rightarrow 3} s_3(t)$ หาค่าได้ แต่ $s_3(3) \neq \lim_{t \rightarrow 3} s_3(t)$

นิยาม 2.3. ให้ $f : D_f \rightarrow R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และ $a \in R$ เรากล่าวว่า f ต่อเนื่อง (continuous) ที่ a ถ้า

1. $f(a)$ หาค่าได้

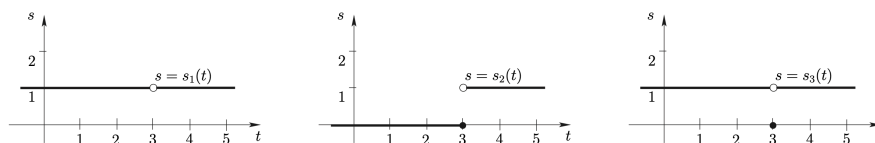


Figure 2.7: กราฟของฟังก์ชัน s_1 , s_2 และ s_3

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ หาค่าได้

3. $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

นิยาม 2.4. ให้ f เป็น function และ S เป็นเซต (set) เรากล่าวว่า f ต่อเนื่องบน S (continuous on S) ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ สมาชิกของ S เรียก function ที่ continuous on R ว่า “ฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function)”

ข้อสังเกต จะเห็นว่า function ที่แสดงตำแหน่งของวัตถุต้องเป็น continuous function บนช่วงที่สนใจ

ทฤษฎี 2.6. ถ้า f และ g เป็น function ที่ต่อเนื่องที่ a แล้ว

1. $f + g$ ต่อเนื่องที่ a

2. $f - g$ ต่อเนื่องที่ a

3. $f \cdot g$ ต่อเนื่องที่ a

4. $\frac{f}{g}$ ต่อเนื่องที่ a ถ้า $g(a) \neq 0$

ตัวอย่าง 2.12. function f ซึ่งนิยามโดย $f(x) = |x|$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่

วิธีทำ ในที่นี้

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

เราต้องพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ $a \in R$ หรือไม่

- ถ้า $a > 0$ จะได้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a = f(a)$
- ถ้า $a < 0$ จะได้ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (-x) = -a = f(a)$
- ถ้า $a = 0$ จะได้ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 = f(0)$
และ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 = f(0)$
ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$

ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ $a \in R$ จึงสรุปว่า f เป็น continuous function

ทฤษฎี 2.7. ฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) เป็น function ที่ต่อเนื่องบน domain ของมัน

หมายเหตุ: rational function คือ function ที่เป็นเศษส่วนของพหุนาม (polynomial) domain ของ rational function ได้แก่เซตของจำนวนจริงซึ่งไม่ทำให้ส่วนของมันเป็นศูนย์

ทฤษฎี 2.8. ถ้า f และ g เป็น function และ $a \in R$ โดยที่ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ และ f ต่อเนื่องที่ L แล้ว

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(L)$$

ตัวอย่าง 2.13. $\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} \right| = ?$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} \right| &= \left| \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} \right| \\ &= \left| \frac{1^4 - 1^2 + 1}{1^4 + 1^2 + 1} \right| \\ &= \left| \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{2.9}$$

ทฤษฎี 2.9. ถ้า f ต่อเนื่องที่ a และ g ต่อเนื่องที่ $f(a)$ แล้ว $g \circ f$ ต่อเนื่องที่ a

จงพิสูจน์ทฤษฎีบทข้างต้น

ตัวอย่าง 2.14. function f ซึ่งนิยามโดย $f(x) = \left| \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} \right|$ เป็น continuous function หรือไม่

วิธีทำ f เป็น continuous function เพราะ $f = g \circ h$ โดยที่ $g(x) = |x|$ และ $h(x) = \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$ ซึ่งเป็น continuous function ทั้งคู่

นิยาม 2.5. เรานิยาม “ภาวะต่อเนื่องทางซ้าย” และ “ภาวะต่อเนื่องทางขวา” ได้โดยแทนที่ $\lim_{x \rightarrow a}$ ในเงื่อนไขของนิยาม ด้วย $\lim_{x \rightarrow a^-}$ และ $\lim_{x \rightarrow a^+}$ ตามลำดับ นั่นคือ

ให้ $f : D_f \rightarrow R$ โดยที่ $D_f \subseteq R$ และ $a \in R$ เรากล่าวว่า f “ต่อเนื่องทางซ้าย (left-continuous) ที่ a ” ถ้า

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ หาค่าได้
3. $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

และกล่าวว่า f “ต่อเนื่องทางขวา (right-continuous) ที่ a ” ถ้า

1. $f(a)$ หาค่าได้

2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ หาค่าได้

3. $f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

นิยาม 2.6. ให้ $f : [a, b] \rightarrow R$ เรากล่าวว่า f ต่อเนื่องบน $[a, b]$ (continuous on $[a, b]$) ถ้า

1. f ต่อเนื่องบน (a, b)
2. f ต่อเนื่องทางขวาที่ a
3. f ต่อเนื่องทางซ้ายที่ b

ตัวอย่าง 2.15. function f ที่นิยามโดย $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ เป็น continuous function บน $[-2, 2]$ หรือไม่

วิธีทำ เราตรวจสอบได้ว่า f เป็น continuous function บน $[-2, 2]$ เพราะ

1. f เป็น continuous function บน $(-2, 2)$
2. f ต่อเนื่องทางขวาที่ -2 เพราะ

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4 - x^2} \\ &= 0 = f(-2)\end{aligned}\tag{2.10}$$

3. f ต่อเนื่องทางซ้าย ที่ 2 เพราะ

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \sqrt{4 - x^2} \\ &= 0 = f(2)\end{aligned}\tag{2.11}$$

ตัวอย่าง 2.16. พิจารณา function f ซึ่งมีกราฟดังต่อไปนี้

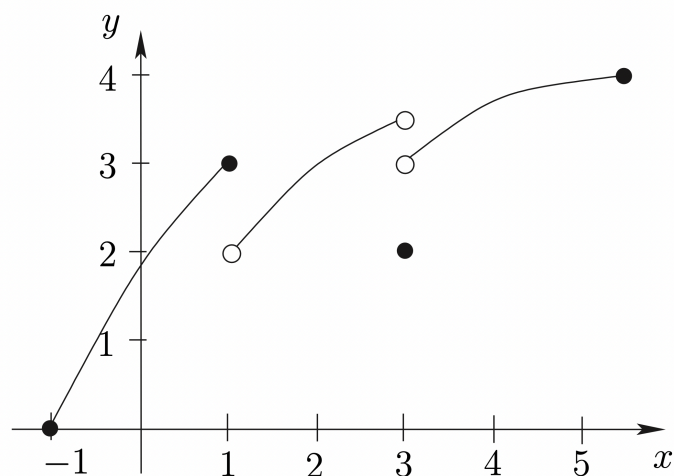


Figure 2.8: กราฟของฟังก์ชันในตัวอย่างrefexm:ex-cont-5

1. f มีความต่อเนื่องที่ $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ หรือไม่
2. f มีความต่อเนื่องบน $[-1, 0], [0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5]$ หรือไม่

วิธีทำ ให้นักศึกษาทำเป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎี 2.10. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และฟังก์ชันลอการิทึม เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนโดเมนของมัน

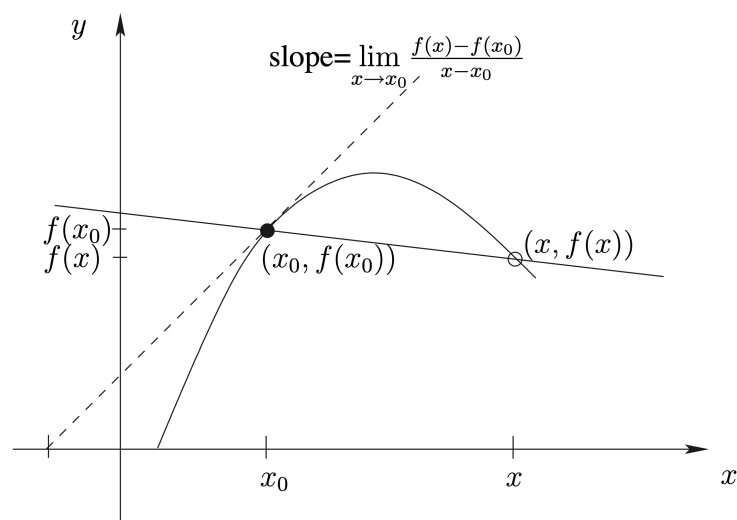
Chapter 3

อนุพันธ์ (Derivatives)

3.1 อนุพันธ์ (Derivatives)

จากตัวอย่าง 2.1 ในบทที่ 2 และเนื้อหาในเรื่อง limits เราจะเห็นว่า ความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ณ จุด $(x_0, f(x_0))$ บนกราฟ ก็คือ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ นั่นเอง (ถ้า limit หาค่าได้)

ปริมาณนี้มีความสำคัญ เพราะนำไปประยุกต์ใช้ได้มากมาย เราจึงกำหนดสัญลักษณ์และมีชื่อเรียกดังต่อไปนี้

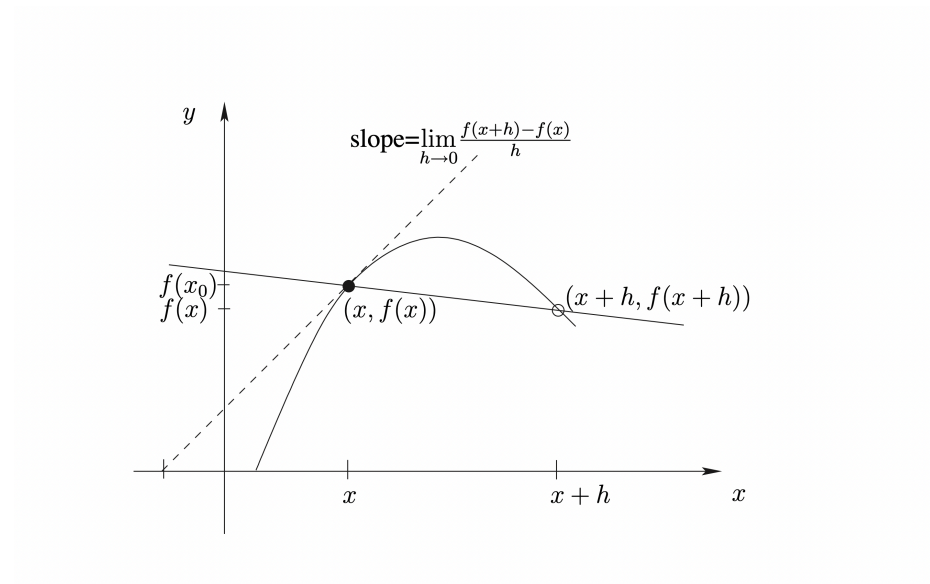


นิยาม 3.1. ถ้า $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่ $D_f \subseteq \mathbb{R}$ และถ้า $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ หาค่าได้แล้ว เรียกค่าของ limit นี้ว่า “อนุพันธ์ (derivative) ของ f ที่ x_0 ” และแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(x_0)$

เนื่องจากแต่ละ function g และแต่ละ x_0 จะมี $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ ได้ค่าเดียว ดังนั้น f' จึงเป็น function เรียกว่า “อนุพันธ์ (derivative)” ของ f

ในการเขียนนิยามของ $f'(x)$ เพื่อใช้เป็นสูตรทั่วไปสำหรับ function f' เราเปลี่ยนตัวแปรเสียใหม่ ดัง

แสดงในรูป



จะได้ว่า

ตัวอย่าง 3.1. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y = -x^2 + 6x - 2$ ณ จุด $P_0(2, 6)$

วิธีทำ ให้ $f(x) = -x^2 + 6x - 2$ จะได้ค่าความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด $(x, f(x))$ คือ $f'(x)$ ซึ่งเท่ากับ

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[-(x+h)^2 + 6(x+h) - 2] - [-x^2 + 6x - 2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2xh - h^2 + 6h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-2x - h + 6) \leftarrow \boxed{\text{อย่าเขียน } \lim_{h \rightarrow 0} -2x - h + 6} \\ &= -2x + 6 \end{aligned} \tag{3.1}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด $(2, 6)$ คือ $f'(2) = -2 \cdot 2 + 6 = 2$ เส้นสัมผัสจึงมีสมการเป็น $y - 6 = 2(x - 2)$

อัตราส่วน $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ คือ อัตราส่วนของค่า function ที่เปลี่ยนไป (จาก $f(x_0)$ กลายเป็น $f(x)$) ต่อค่าตัวแปรต้นที่เปลี่ยนไป (จาก x_0 กลายเป็น x) เรียกคำนี้ว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย (average rate of change) ของ $f(x)$ เทียบกับ x ” คำว่าเฉลี่ย แสดงถึงการคิดการเปลี่ยนแปลงบน ‘ช่วง’

แต่ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ เป็นการหา “แนวโน้ม” ของอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย เมื่อ x กับ x_0 อยู่ใกล้กันมากๆ จนแทบจะเป็นจุดเดียวกัน เราจึงเรียกค่านี้ว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง (instantaneous rate of change) ของ $f(x)$ เทียบกับ x ”

สัญลักษณ์อื่นๆ สำหรับ derivatives ได้แก่

ถ้า $f'(x_0)$ หาค่าได้ เรากล่าวว่า function f “หาอนุพันธ์ได้ (differentiable) ที่ x_0 ” ถ้า $f'(x_0)$ หาค่าได้สำหรับทุกๆ x ในเซต S เรากล่าวว่า function f “หาอนุพันธ์บน S (differentiable on S)” ถ้า $f'(x_0)$ หาค่าได้สำหรับทุกๆ จำนวนจริง x เรากล่าวว่า function f “หาอนุพันธ์ได้ (differentiable)”

3.2 การคำนวณหาอนุพันธ์

ตัวอย่าง 3.2. จงหา derivative ต่อไปนี้

(1) $f'(x)$ เมื่อ $f(x) = x^2$

(2) $f'(2)$ เมื่อ $f(x) = \sqrt{x}$

(3) $\frac{ds(t)}{dt}|_{t=t_0}$ เมื่อ $s(t) = \frac{1}{t}$

วิธีทำ ใช้นิยามข้างต้นหา derivative ได้ดังนี้

(1) เมื่อ $f(x) = x^2$ จะได้

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h \\ &= 2x \end{aligned} \tag{3.2}$$

(2) เมื่อ $f(x) = \sqrt{x}$ จะได้

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h \cdot (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h) - 2}{h \cdot (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

(3) เมื่อ $s(x) = \frac{1}{x}$ จะได้

$$\begin{aligned} s'(t)|_{t=t_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t_0+h} - \frac{1}{t_0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t_0 - (t_0 + h)}{t_0(t_0 + h)h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{t_0(t_0 + h)h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{t_0(t_0 + h)} \\ &= \frac{-1}{t_0^2} \end{aligned} \tag{3.4}$$

ตัวอย่าง 3.3. จงหาเซต S ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ function $f(x) = \sqrt{x}$ หาอนุพันธ์ได้บน S

วิธีทำ พิจารณาจำนวนจริง x ที่ทำให้ $f'(x)$ หาค่าได้ เนื่องจาก

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ ถ้า } x > 0$$

ในกรณีที่ $x \leq 0$ จะได้ว่า $f(x)$ ไม่นิยาม จึงหาอนุพันธ์ที่ x ไม่ได้ และในกรณีที่ $x = 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{0+h} + \sqrt{0}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

ซึ่งหาค่าไม่ได้ ดังนั้นจึงได้ว่า เซตที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ function $f(x) = \sqrt{x}$ หาอนุพันธ์ได้บน S คือ ช่วงเปิด $(0, \infty)$

3.3 สูตรสำหรับหาอนุพันธ์

ทฤษฎี 3.1. ถ้า c เป็นจำนวนจริง (real number) และ n เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว function $f(x) = c$ เป็น function ที่ differentiable และ function $g(x) = x^n$ เป็น function ที่ differentiable บนช่วง

เปิดในโดเมนของมัน และ

$$1. \frac{dc}{dx} = 0$$

$$2. \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

ทฤษฎี 3.2. ถ้า f และ g เป็น function ซึ่ง differentiable ที่ x_0 และ c เป็นค่าคงที่จริง แล้ว

$$1. (f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$2. (cf)'(x_0) = cf'(x_0)$$

$$3. (f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

$$4. (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$5. \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

ตัวอย่าง 3.4. จงหา derivative ของแต่ละ function ต่อไปนี้ เทียบกับตัวแปรต้นของมัน

$$(1) f(x) = 5x^4$$

$$(2) f(x) = 6x^{11} + 9$$

$$(3) s(t) = 3t^8 - 2t^5 + 6t + 1$$

$$(4) g(x) = \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right) \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$(5) h(x) = \frac{x^2-1}{x^4+1}$$

วิธีทำ ใช้สูตรในทฤษฎีบทข้างต้นหา derivative ได้ดังนี้

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^4 \\ f'(x) &= \frac{d}{dx}(5 \cdot x^4) \\ &= 5 \frac{d}{dx}(x^4) = 5 \cdot 4x^3 = 20x^3 \end{aligned} \tag{3.6}$$

(2)

$$\begin{aligned}f(x) &= 6x^{11} + 9 \\f'(x) &= \frac{d}{dx}(6x^{11} + 9) \\&= 5\frac{d}{dx}(6x^{11}) + \frac{d}{dx}9 \\&= 66x^{10}\end{aligned}\tag{3.7}$$

(3)

$$\begin{aligned}s(t) &= 3t^8 - 2t^5 + 6t + 1 \\s'(t) &= \frac{d}{dt}(3t^8 - 2t^5 + 6t + 1) \\&= 24t^7 - 10t^4 + 6\end{aligned}\tag{3.8}$$

(4)

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right) \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ g'(x) &= \frac{d}{dx} \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right) \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right) \frac{d}{dx} \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left(2x - \frac{1}{2}x^{-1}\right) \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right) (2x - 2x^{-3}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

(5)

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} \\ h'(x) &= \frac{(x^4 + 1) \frac{d}{dx}(x^2 - 1) - (x^2 - 1) \frac{d}{dx}(x^4 + 1)}{(x^4 + 1)^2} \\ &= \frac{(x^4 + 1)(2x) - (x^2 - 1)(4x^3)}{(x^4 + 1)^2} \end{aligned} \tag{3.10}$$

ตัวอย่าง 3.5. จงหา $f'(0)$ เมื่อ $f(x) = (x^6 - x^5 - x^4 - x^3)(x^5 - x^4 - x^3 - x^2)$

วิธีทำ จาก $f(x) = (x^6 - x^5 - x^4 - x^3)(x^5 - x^4 - x^3 - x^2)$ จะได้

$$f'(x) = (x^6 - x^5 - x^4 - x^3)(5x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x) + (x^5 - x^4 - x^3 - x^2)(6x^5 - 5x^4 - 4x^3 - 3x^2)$$

$$\text{ดังนั้น } f'(0) = 0$$

3.4 อนุพันธ์อันดับสูง (High Order Derivatives)

ถ้า f เป็น function ที่หา derivative ได้ และ f' ก็เป็น function ที่หา derivative ได้อีก เราเรียก $(f')'$ ว่า “อนุพันธ์อันดับสอง (second derivative) ของ f ” เขียนแทนด้วย f'' ในทำนองเดียวกัน เราจะมี “อนุพันธ์อันดับสาม (third derivative) ของ f ” เขียนแทนด้วย f''' ฯลฯ สำหรับอนุพันธ์อันดับ n (n th derivative) ของ f โดยที่ $n \geq 4$ เราเขียนแทนด้วย $f^{(n)}$ นอกจากนี้เราใช้สัญลักษณ์ $\frac{d^n f(x)}{dx}$ แทน n th derivative ของ f และ $\frac{d^n f(x)}{dx}|_{x=x_0}$ แทน n th derivative ของ f ที่ x_0 (ซึ่งคือ $f^{(n)}(x_0)$ นั่นเอง)

ถ้าให้ $y = f(x)$ เราสามารถใช้สัญลักษณ์ $y', y'', y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)}$ หรือ $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^4 y}{dx^4}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}$ แทนอนุพันธ์อันดับที่ $1, 2, 3, 4, \dots, n$ ตามลำดับ และแทนค่าอนุพันธ์ที่ x_0 ด้วย $\frac{d^n y}{dx^n}|_{x=x_0}$

ด้วยหลักการเดียวกัน “อนุพันธ์อันดับหนึ่ง (first derivative) ของ f ” ก็คือ อนุพันธ์ของ f นั้นเอง

ตัวอย่าง 3.6. จงหาอนุพันธ์ทั้งหมดของ $f(x) = x^n$ เมื่อ $n > 1$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^n$ จะได้

$$\begin{aligned}f'(x) &= nx^{n-1} \\f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} \\f'''(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\f^{(4)}(x) &= n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} \\&\vdots \\f^{(n)}(x) &= n! \\f^{(k)}(x) &= 0 \text{ เมื่อ } k \geq n\end{aligned}\tag{3.11}$$

3.5 การตีความอนุพันธ์ (Interpretation of Derivatives)

3.5.1 อนุพันธ์ในเชิงความชัน (Derivatives as Slopes)

ในกรณีที่เราลงจุดกราฟ (plot graph) ของฟังก์ชัน เราได้ทราบมาแล้วว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x ใดๆ ก็คือความชันของเส้นสัมผัสกราฟ (เรียกว่าความชันของกราฟ) ของฟังก์ชัน f ที่จุด $(x, f(x))$

นั่นเอง ความจริงข้อนี้สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันได้

ตัวอย่าง 3.7. จงพิจารณาว่ามีเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ที่ตั้งฉากกันหรือไม่

วิธีทำ เราทราบว่าเส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ -1 พิจารณาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ที่จุด $(x, f(x))$ ใดๆ จะได้ว่า ความชันดังกล่าวมีค่าเท่ากับ $f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x+1} \right) = \frac{1}{(x+1)^2}$ ฉะนั้น ความชันของเส้นสัมผัสกราฟนี้ที่จุดใดๆ จึงมีค่าเป็นบวกเสมอ จึงสรุปได้ว่า กราฟของฟังก์ชันนี้ไม่มีเส้นสัมผัสคู่ใดที่ตั้งฉากกัน เพราะผลคูณของความชันของเส้นสัมผัสเป็นจำนวนจริงบวกเสมอ ไม่สามารถเป็น -1 ได้

ตัวอย่าง 3.8. ภูเขาจำลองในพิพิธภัณฑ์วิทยาศาสตร์แห่งหนึ่ง เกิดจากการหมุนของพาราโบลาคว่ำรอบแกนสมมาตรของมัน โดยที่ฐานของภูเขาจำลองเป็นรูปวงกลมรัศมี 5 เมตร และยอดเขาอยู่สูงจากฐานเป็นระยะทาง 8 เมตร บนยอดเขาติดตั้งโคมไฟ ณ ตำแหน่งสูงจากยอดเขาขึ้นไปอีก 0.5 เมตร เมื่อเปิดโคมไฟ แสงไฟจากโคมจะทำให้พื้นบริเวณรอบๆ ภูเขาจำลองที่ไม่ถูกภูเขาจำลองบัง สว่างขึ้น จงหาว่าบริเวณที่สว่างดังกล่าว เป็นบริเวณบนพื้นภายนอกวงกลมรัศมีเท่าใด

จากโจทย์จำลองรูปได้ดังภาพ 1.3 ในที่นี้สมมติว่าแหล่งกำเนิดแสงเป็นจุด จะเห็นว่า แนวแบ่งส่วนมืดและส่วนสว่างจะผ่านจุดกำเนิดแสง และอยู่ในแนวเส้นสัมผัสผิวของพาราโบลาด้วย ให้จุดกึ่งกลางฐานของภูเขาจำลองเป็นจุดกำเนิด และสมมติให้ $f(x) = a - kx^2$ เป็นสมการของรูปพาราโบลา จากเงื่อนไขความกว้างและความสูงของภูเขาจำลอง จะได้ว่า $f(0) = 8$ และ $f(5) = 0$ ซึ่งทำให้ $a = 8$ และ $k = 8/25$ ดังนั้น $f(x) = 8 - 8x^2/25$ ให้ $(x, f(x))$ เป็นจุดที่แนวแบ่งส่วนมืดและส่วนสว่างสัมผัสกับพาราโบลา จะได้ว่า ความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุดดังกล่าวเท่ากับ $f'(x) = -16x/25$ แต่เส้นสัมผัสนี้ผ่านจุดกำเนิดแสง $(0, 8.5)$ และจุด $(x, f(x)) = (x, 8 - 8x^2/25)$ จึงได้ว่า มีความชันเป็น $\frac{8 - 8x^2/25 - 8.5}{x - 0}$ นั่นคือ $\frac{8 - 8x^2/25 - 8.5}{x - 0} = -16x/25$ หรือ $x = 5/4$ ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ $-16 \times (5/4)/25 = -4/5$ ถ้าบริเวณบนพื้นที่สว่าง เป็นบริเวณภายนอกวงกลมรัศมี r จะได้ว่า เส้นสัมผัสข้างต้น ต้องผ่านจุด $(r, 0)$ ด้วย นั่นคือความชันจะเท่ากับ $\frac{0 - 8.5}{r - 0}$ ซึ่งทำให้

$\frac{0 - 8.5}{\frac{r - 0}{10.625}} = -4/5$ หรือ $r = 10.625$ นั่นคือ บริเวณที่สว่าง เป็นบริเวณบนพื้นภายนอกวงกลมรัศมี 10.625 เมตร

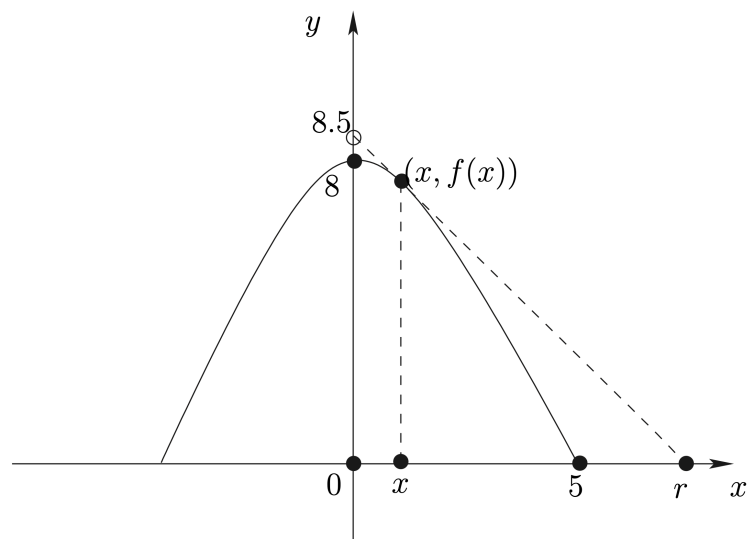


Figure 3.1: รูปภาพสำหรับตัวอย่างข้างต้น

3.5.2 อนุพันธ์ในเชิงอัตราเร็ว (Derivatives as Speeds)

ถ้าพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยให้ $f(t)$ เป็นระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ ณ เวลา t เราจะได้ว่า $f'(t)$ ก็คืออัตราเร็ว ณ เวลา t ซึ่งเรียกว่า อัตราเร็วชั่วขณะ (instantaneous speed) ในขณะที่ปริมาณ $\frac{f(s) - f(t)}{s - t}$ เรียกว่า อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุ ในช่วงเวลา ตั้งแต่ s ถึง t

ตัวอย่าง 3.9. วัตถุเคลื่อนที่เป็นเวลานาน 1 นาที ตามสมการ $s = 0.5t + 0.1t^2$ เมื่อ t คือเวลาเป็นวินาที และ s คือระยะทางที่เคลื่อนที่ได้เป็นเมตร จงหา

(1) อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วง 10 วินาทีแรก และในช่วง 10 วินาทีถัดไป

(2) อัตราเร็วของวัตถุ ณ วินาทีที่ 10 และ ณ วินาทีที่ 20

วิธีทำ

(1) อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วง 10 วินาทีแรก เท่ากับ

$$\frac{s(10) - s(0)}{10 - 0} = \frac{(0.5 \times 10 + 0.1 \times 10^2) - (0.5 \times 0 + 0.1 \times 0^2)}{10 - 0} = 1.5 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วง 10 วินาทีถัดไป เท่ากับ

$$\frac{s(20) - s(10)}{20 - 10} = \frac{(0.5 \times 20 + 0.1 \times 20^2) - (0.5 \times 10 + 0.1 \times 10^2)}{20 - 10} = 3.5 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

(2) เนื่องจาก $\frac{d}{dt}(0.5t + 0.1t^2) = 0.5 + 0.2t$

ดังนั้น อัตราเร็วของวัตถุ ณ วินาทีที่ 10 เท่ากับ

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=10} = \left. \frac{d}{dt}(0.5t + 0.1t^2) \right|_{t=10} = 0.5 + 0.2 \times 10 = 2.5 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

และ อัตราเร็วของวัตถุ ณ วินาทีที่ 20 เท่ากับ

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=20} = \left. \frac{d}{dt} (0.5t + 0.1t^2) \right|_{t=20} = 0.5 + 0.2 \times 20 = 4.5 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

3.5.3 อนุพันธ์ในเชิงอัตราการเปลี่ยนแปลง (Derivatives as Rates of Change)

เราจะเห็นได้ชัดจากนิยามของอนุพันธ์ว่า ในกรณีของฟังก์ชันต่างๆ ไป อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ก็คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าฟังก์ชัน เทียบกับตัวแปรต้นของมันนั่นเอง

ตัวอย่าง 3.10. เมื่อใช้เครื่องสูบลม สูบลมเข้าไปในลูกโป่ง เราอาจประมาณได้ว่า ณ เวลาใดๆ ลูกโป่งมีรูปร่างเป็นรูปทรงกลม จงหาอัตราการเพิ่มขึ้นของปริมาตรของลูกโป่ง ต่อหนึ่งหน่วยรัศมีที่เพิ่มขึ้นของลูกโป่ง ขณะที่ลูกโป่งมีรัศมี 10 เซนติเมตร

วิธีทำ ให้ r เป็นรัศมีของลูกโป่ง และ V เป็นปริมาตรของลูกโป่ง จากข้อสมมุติว่าลูกโป่งเป็นทรงกลม จะได้ว่า $V = 4\pi r^3/3$ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของลูกโป่งเทียบกับรัศมีเท่ากับ $\frac{dV}{dr} = 12\pi r^2/3 = 4\pi r^2$ ลูกบาศก์หน่วยต่อหน่วย นั่นคือ ขณะที่ลูกโป่งมีรัศมี 10 เซนติเมตร มันจะมีปริมาตรเพิ่มขึ้นในอัตรา $4 \times \pi \times 10^2 \approx 1256$ ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อเซนติเมตร หรือประมาณ 1.256 ลิตรต่อรัศมีที่เพิ่มขึ้น 1 เซนติเมตร

3.5.4 แบบฝึกหัด (Exercises)

1. จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้ ถ้าอนุพันธ์ดังกล่าวหาค่าได้ ในกรณีที่หาค่าไม่ได้ ให้ระบุว่าหาค่าไม่ได้

1. $f'(x)$ เมื่อ $f(x) = g(x)h(x)k(x)$

2. $f^{(n)}(0)$ เมื่อ $f(x) = \sum_{i=1}^k x^i$ โดยที่ k และ n เป็นจำนวนนับ

3. $\frac{d}{dt} \frac{1}{1-t}$ และ $\frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{1-t}$
4. $\frac{d}{dt} \frac{f(t)}{t}$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\frac{d}{dt} f(t) = \frac{f(t)}{t}$ สำหรับทุกๆ $t \neq 0$
5. $f'(-1), f'(-\frac{2}{3}), f'(0), f'(1)$ เมื่อ $f(x) = x\sqrt{1+x}$
6. $\left. \frac{d}{dx} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \right|_{x=0}$
7. $\frac{dy}{dx}, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0.25}, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1}$ เมื่อ $y = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$
8. $\frac{d}{dx} (x^2\sqrt{1+x})$
9. $\frac{d^2y}{dx^2}$ เมื่อ $y = (1+x^2)\sqrt{1-2x}$ (หาอนุพันธ์ของ $\sqrt{1-2x}$ และ $1/\sqrt{1-2x}$ ก่อน)
10. $\frac{d^{10}y}{dx^{10}}$ เมื่อ $y = (x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1)(x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2)$

2. จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงหาความชันของกราฟของสมการ $y = x^3 - 3x$ ณ ตำแหน่งซึ่ง $x = 2$
2. จงหาจุดบนกราฟ $y = x^3 - 3x$ ซึ่งมีเส้นสัมผัสกราฟที่ขนานกับเส้นสัมผัส ณ จุดซึ่ง $x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ
3. จงหาจุดบนกราฟ $y = x^3 - 3x$ ซึ่งมีเส้นสัมผัสกราฟที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ณ จุดซึ่ง $x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

3.6 กฎลูกโซ่ (The Chain Rule)

การทราบข้อมูลของ derivative ของฟังก์ชัน f และฟังก์ชัน g ทำให้เราสามารถหา derivative ของผลบวก $f + g$ ผลคูณ fg และผลหาร f/g ของฟังก์ชัน ทั้งสองได้ ข้อมูลนี้ยังใช้หา derivative ของฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสมได้ เราเรียกวิธีการหา derivative ของฟังก์ชัน ประกอบว่า chain rule โดยมีแนวคิดสำคัญคือ การสร้างตัวแปรใหม่ขึ้นมาช่วย ในการคำนวณ ดังรายละเอียดในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎี 3.3. ถ้าฟังก์ชัน g หา derivative ได้ที่จุด x และฟังก์ชัน f หา derivative ได้ที่จุด $g(x)$ แล้ว

ฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ หา derivative ได้ที่จุด x ยิ่งกว่านั้น ถ้า

$$y = f(g(x)) \quad \text{และ} \quad u = g(x)$$

แล้ว $y = f(u)$ และ

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงให้เห็นถึงการใช chain rule หา derivative ของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 3.11. พิจารณาฟังก์ชัน $y = \frac{1}{x^2+1}$ กำหนดให้ $u = x^2 + 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ในที่นี้ $y = \frac{1}{u}$ เราใช้ chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du} \left[\frac{1}{u} \right] \cdot \frac{d}{dx} [x^2 + 1] \\ &= \left(-\frac{1}{u^2} \right) \cdot (2x) \\ &= -\frac{1}{(x^2 + 1)^2} \cdot (2x) \\ &= -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}\end{aligned}\tag{3.12}$$

นั่นคือ $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

ตัวอย่าง 3.12. กำหนดให้ $y = u^{100}$ และ $u = x^3 + x^2 + x + 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ใช้ chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{d}{du}[u^{100}] \cdot \frac{d}{dx}[x^3 + x^2 + x + 1] \\ &= (100u^{99}) \cdot (3x^2 + 2x + 1) \\ &= 100(x^3 + x^2 + x + 1)^{99}(3x^2 + 2x + 1)\end{aligned}\tag{3.13}$$

นั่นคือ $\frac{dy}{dx} = 100(x^3 + x^2 + x + 1)^{99}(3x^2 + 2x + 1)$

สูตร

$$E : chain1$$

สามารถเขียนได้ในอีกรูป ซึ่งสะดวกในการนำไปใช้ สังเกตว่า $y = f(u)$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(u)] \quad \text{และ} \quad \frac{dy}{du} = f'(u)$$

สูตรของ chain rule จึงเขียนได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u) \frac{du}{dx}$$

ซึ่งเขียนได้อีกรูปคือ

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ตัวอย่าง 3.13. จงหา derivative ของฟังก์ชัน $y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}$

วิธีทำ เราแนะนำตัวแปร $u = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ และใช้สูตร chain rule

E : chain2

ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1} \right] &= \frac{d}{dx} [\sqrt{u}] \\ &= \frac{d}{du} \sqrt{u} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2}x^2 + x + 1 \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}} \cdot (x + 1) \\ &= \frac{x + 1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}}\end{aligned}\tag{3.14}$$

นั่นคือ $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}}$

ตัวอย่าง 3.14. จงหาค่าของ $f'(x^3 + x)$ เมื่อกำหนดให้

$$\frac{d}{dx}[f(x^3 + x)] = (3x^2 + 1)^2$$

วิธีทำ เราใช้ chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x^3 + x)] &= f'(x^3 + x) \frac{d}{dx}[x^3 + x] \\ &= f'(x^3 + x) \cdot (3x^2 + 1)\end{aligned}\tag{3.15}$$

ดังนั้น

$$(3x^2 + 1)^2 = f'(x^3 + x) \cdot (3x^2 + 1)$$

หรือ

$$f'(x^3 + x) = 3x^2 + 1$$

สังเกตความแตกต่างระหว่าง $\frac{d}{dx}f(x^3 + x)$ และ $f'(x^3 + x)$

ตัวอย่าง 3.15. กำหนดให้ $f(x) = |x|$ จงหา derivative ของฟังก์ชัน f ที่ $x \neq 0$

วิธีทำ ฟังก์ชัน f เขียนได้ว่า

$$f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$$

ถ้า $x \neq 0$ แล้ว

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \sqrt{x^2} \\ &= \frac{d}{du} [\sqrt{u}] \cdot \frac{d}{dx} [x^2] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (2x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot x \\ &= \frac{x}{|x|} \end{aligned} \tag{3.16}$$

นั่นคือ เมื่อ $x \neq 0$ แล้ว $f'(x) = \frac{x}{|x|}$

3.6.1 แบบฝึกหัด

1. จงหา derivative ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = \sqrt{1 - x + x^2}$

2. $f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}$

3. $f(x) = (2x + 5)^3(3x - 7)^5$

4. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 + 1}$

2. จงหา derivative ของฟังก์ชัน

$$y = \sqrt{x + \sqrt[3]{3x + \sqrt[4]{4x}}}$$

3. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันหา derivative ได้ และ $g = f \circ f$ ถ้า $f(1) = 1$, $f(2) = 4$ และ $f'(4) = 8$ จงหาค่าของ $g'(1)$

4. พิจารณатарารางค่าของฟังก์ชัน f, f', g, g' และ h, h' โดยที่ $h = f \circ g$

| x | $f(x)$ | $g(x)$ | $h(x)$ | $f'(x)$ | $g'(x)$ | $h'(x)$ |
|-----|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
| -1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 0 | 2 |
| 0 | 3 | -1 | ? | 1 | 1 | ? |
| 1 | ? | 0 | 0 | ? | ? | 3 |

จงหาค่าของ $h(0)$, $f(1)$, $h'(0)$, $f'(1)$ และ $g'(1)$

5. จาก chain rule

$E : chain1$

$$, \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \text{ จงหาสูตร ของ } \frac{d^2y}{dx^2}$$

3.7 อนุพันธ์ของฟังก์ชันอินเวอร์ส (Derivatives of Inverse Functions)

นิยาม 3.2. ถ้าฟังก์ชัน f และ g สอดคล้องสมบัติ

1. $g(f(x)) = x$ สำหรับ x ที่เป็นสมาชิกของโดเมนของ f

2. $f(g(y)) = y$ สำหรับ y ที่เป็นสมาชิกของโดเมนของ g

เรากล่าวว่า f และ g เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส โดยที่ f เป็น ฟังก์ชันอินเวอร์สของ g และ g เป็นฟังก์ชันอินเวอร์ส ของ f

ถ้าเขียน f^{-1} แทน g และใช้สัญลักษณ์ x แทนสมาชิกทั้งในโดเมนของ f และ f^{-1} สมมติว่าทั้งสองฟังก์ชันหา derivative ได้ ให้

$$y = f^{-1}(x)$$

เราสามารถเขียนใหม่ได้ว่า

$$x = f(y)$$

หา derivative เทียบกับ x

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x] &= \frac{d}{dx}[f(y)] \\ &= f'(y) \cdot \frac{dy}{dx}\end{aligned}\tag{3.17}$$

นั่นคือ

$$1 = f'(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

หรือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$$

เขียนใหม่ได้ว่า

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

ตัวอย่าง 3.16. กำหนดให้ $f(x) = x^3$ มี $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ จงหา $\frac{d}{dx}[f^{-1}(x)]$

วิธีทำ คำนวณหา derivative ได้ว่า $f'(x) = 3x^2$ และ

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^{1/3}] &= \frac{d}{dx}[f^{-1}(x)] = \frac{1}{3[f^{-1}(x)]^2} \\ &= \frac{1}{3[x^{1/3}]^2} \\ &= \frac{1}{3x^{2/3}}\end{aligned}\tag{3.18}$$

ในการหา derivative ของฟังก์ชันอินเวอร์ส เราอาจจะไม่ใช่สูตรโดยตรง แต่ จะคำนวณหา derivative ตามขั้นตอนที่ได้แสดงข้างต้น ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 3.17. พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^3 + x + 2$ จงหา derivative ของ $f^{-1}(x)$

วิธีทำ เราเขียน $x = f(y) = y^3 + y + 2$ แล้วหา derivative เทียบกับ x

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x] &= \frac{d}{dx}[y^3 + y + 2] \\ 1 &= (3y^2 + 1)\frac{dy}{dx}\end{aligned}\tag{3.19}$$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2 + 1}$

ตัวอย่าง 3.18. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอินเวอร์ส ถ้า $f(1) = 2$ และ $f'(1) = 3$ แล้ว จงหาค่าของ $(f^{-1})'(2)$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(1) = 2$ แล้ว $f^{-1}(2) = 1$ และจากสูตร

E : inverse

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(2) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} \\ &= \frac{1}{f'(1)} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}\tag{3.20}$$

นั่นคือ $(f^{-1})'(2) = 1/3$

3.7.1 แบบฝึกหัด

1. จงหา $(f^{-1})'(x)$ เมื่อกำหนด

$$1. f(x) = 2x^3 - 1$$

$$2. f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$3. f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+1}$$

$$4. f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$$

3.8 Differentials, Implicit Differentiation and Related Rates

3.8.1 Differentials

ที่ผ่านมา เราให้ความหมายของ dy/dx ว่าเป็น derivative ของ y เทียบกับ x ในความหมายของตัวดำเนินการ $\frac{d}{dx}$ ที่กระทำ กับฟังก์ชัน y หัวข้อนี้เราจะนิยาม dy และ dx แยกจากกัน และให้ความหมาย dy/dx ว่าเป็นเศษส่วน

ผลต่างระหว่างค่าสองค่าของตัวแปร เราเรียกว่า increment เช่นในตัวแปร x ผลต่างระหว่างค่า $x = x_0$

และ $x = x_1$ เราเขียน increment ใน x นี้ ว่า $\Delta x = x_1 - x_0$

ให้ $y = f(x)$ และให้ x มีการเปลี่ยนค่าจาก $x = x_0$ ไปยัง $x = x_1$ ก็จะมี การเปลี่ยนค่าใน y จาก $y_0 = f(x_0)$ ไปยัง $y_1 = f(x_1)$ นั้นหมายความว่า increment Δx ทำให้เกิด increment $\Delta y = y_1 - y_0$ โดยที่

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$$

หรือ

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ดังนั้น สำหรับค่า x ทั่วไปแล้ว เราอาจเขียน

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

และนิยามของ derivative ก็เขียนได้อีกรูปว่า

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

เมื่อเราเห็นการเขียนสัญกรณ์ $\frac{dy}{dx}$ มีแนวโน้มที่จะ ทำให้เราคิดถึงผลหารของ dy ด้วย dx ซึ่งในขณะนี้

ทั้งสองปริมาณยังไม่มี ความหมายใด ๆ สังเกตว่าในสูตรของ chain rule ที่ว่า $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ ก็ให้ความรู้สึกแรกว่าน่าจะเป็นผลหารเช่นกัน ดังนั้นลำดับถัดไปเราจะให้ความหมายของ พจน์ dx , dy และการตีความหมายในรูปเศษส่วน

เริ่มด้วยการตรึงค่า x และนิยาม dx ว่าเป็นตัวแปรต้น กำหนดให้ $y = f(x)$ และ f เป็นฟังก์ชัน หา derivative ได้ เรานิยาม dy ว่าเป็นตัวแปรตามดังนี้

$$dy = f'(x) dx$$

ถ้า $dx \neq 0$ เราเขียนใหม่ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

เราเรียก dy ว่า differential ของ y และ dx ว่า differential ของ x

มีความแตกต่างระหว่าง ความหมายของ differential dy และ increment $\Delta y = y_1 - y_0$ ถ้าเรา กำหนดให้ differential dx และ increment Δx มีค่า เดียวกัน นั่นคือ $dx = \Delta x$ จะเห็นว่า Δy แทนถึง ค่าผลต่างใน y ของจุดเริ่มต้น x และจุดปลาย $x + \Delta x$ ตามเส้นโค้ง $y = f(x)$ นั่นคือ

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ในขณะที่ dy แทนถึงค่าผลต่างใน y ของจุดเริ่มต้น x และจุดปลาย $x + \Delta x$ ตามเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ผ่านจุด $(x, f(x))$ และ มีความชันเท่ากับ $f'(x)$

ตัวอย่าง 3.19. ถ้า $y = f(x) = x^2 + 1$ แล้ว $f'(x) = 2x$ กำหนดให้ $x = 3$ จงหาค่าของ dy และ Δy เมื่อ $dx = \Delta x = 0.1$

วิธีทำ ค่าของ dy คือ

$$dy = f'(x) dx = 2x dx$$

กรณีจริง $x = 3$ ได้ว่า

$$dy = 6 dx$$

ถ้าให้ $dx = 0.1$ ค่าของ $dy = 0.6$ ถ้าเราพิจารณาค่า $dx = \Delta x = 0.1$ เราก็จะได้

$$\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = (3.1)^2 + 1 - 3^2 - 1 = 0.61$$

สังเกตว่า $dy = 0.6$ ในขณะที่ $\Delta y = 0.61$

มีข้อสังเกตว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันหา derivative ได้ที่ค่า x_0 แล้วเส้นสัมผัส กับเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(x_0, f(x_0))$ จะใกล้เคียงกับกราฟของ f สำหรับค่า x ใกล้ ๆ กับค่า x_0 สมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งนี้ ที่ผ่านจุด $(x_0, f(x_0))$ มี ความชัน $f'(x_0)$ คือ

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

เมื่อเราบอกว่า เส้นโค้ง $y = f(x)$ และเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งเดียวกันหมายถึงถ้าเรา ให้ x เข้าใกล้ x_0 ค่าของ $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ก็จะใกล้เคียงค่า $f(x)$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

เราเรียกสมการ

$$E : approx$$

ว่า local linear approximation ของ f ที่ x_0 เรา อาจเขียนในอีกรูปว่า

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

ตัวอย่าง 3.20. จงหา local linear approximation ของฟังก์ชัน $f(x) = x^{1/3}$ ที่ $x_0 = 1$

วิธีทำ เรามี $f(x) = x^{1/3}$ และคำนวณหา derivative

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

local linear approximation ของ f ที่ $x_0 = 1$ จึงเป็น

$$x^{1/3} \approx 1 + \frac{1}{3}(x - 1) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

ถ้าเราต้องการประมาณค่าของ $(1.1)^{1/3}$ เราใช้ local linear approximation ของ f ในการประมาณ โดยได้ค่าประมาณคือ $1 + \frac{1}{3}(1.1 - 1) = 1.03$

3.8.2 Implicit Differentiation

บางครั้งเราต้องการหา derivative ของฟังก์ชัน ซึ่งไม่สามารถเขียนได้ ในรูปฟอร์ม $y = f(x)$ เช่นใน ความสัมพันธ์

$$x^2 + y^3 - xy = 0$$

การหา derivative ของ y เทียบกับ x เราไม่จำเป็นต้องเขียนความสัมพันธ์ ให้อยู่ในรูป $y = f(x)$ ก่อน หลักการสำคัญก็คือ เราคิดให้ y เป็น ฟังก์ชันของ x เช่นในตัวอย่างที่ยกมา ถ้าเราหา derivative ทั้งสองข้าง ของสมการเทียบกับ x

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^2 + y^3 - xy] &= \frac{d}{dx}[0] \\ \frac{d}{dx}[x^2] + \frac{d}{dx}[y^3] - \frac{d}{dx}[xy] &= 0 \\ 2x + 3y^2 \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx} - y &= 0\end{aligned}\tag{3.21}$$

เขียนใหม่ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 3y^2}$$

ตัวอย่าง 3.21. กำหนดให้ $y^2 = x^3(2 - x)$ สังเกตว่า $(x, y) = (1, 1)$ อยู่บน กราฟของความสัมพันธ์ จงหาว่าความชันของกราฟนี้ที่จุด $(1, 1)$

วิธีทำ หา derivative เทียบกับ x ทั้งสองข้าง ของสมการ

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[y^2] &= \frac{d}{dx}[x^3(2 - x)] \\ \frac{d}{dy}[y^2] \cdot \frac{dy}{dx} &= x^3 \frac{d}{dx}[2 - x] + (2 - x) \frac{d}{dx}[x^3] \\ (2y) \cdot \frac{dy}{dx} &= -x^3 + (2 - x)(3x^2) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(2 - x)(3x^2)}{2y}\end{aligned}\tag{3.22}$$

ดังนั้นที่จุด $(x, y) = (1, 1)$ เราจะได้ derivative ของ y เทียบ กับ x เป็น $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}$

ตัวอย่าง 3.22. จงหาสมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งของสมการ

$$xy^2 = 1$$

ที่จุด $(1, -1)$

วิธีทำ เริ่มด้วยการหาความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $(1, -1)$ เราหา derivative ของสมการเทียบกับ x ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[xy^2] &= \frac{d}{dx}[1] \\ x\frac{d}{dx}[y^2] + y^2\frac{d}{dx}[x] &= 0 \\ x(2y)\frac{dy}{dx} + y^2 &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{2x}\end{aligned}\tag{3.23}$$

ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสที่จุด $(1, -1)$ มีค่าเท่ากับ $1/2$ สมการเส้น สัมผัสของเส้นโค้งที่จุด $(1, -1)$

จึงเป็น

$$\begin{aligned}\frac{y - (-1)}{x - 1} &= \frac{1}{2} \\ y + 1 &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\end{aligned}\tag{3.24}$$

นั่นคือ $y = \frac{x - 3}{2}$

ตัวอย่าง 3.23. พิจารณาสมการ

$$\frac{1}{3}x^3 + y^3 - xy^2 = 5$$

จงหาว่าที่จุดใดบนเส้นโค้งที่เส้นสัมผัสขนานแกน x

วิธีทำ เราเริ่มด้วยการหา derivative ของสมการ

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3 + y^3 - xy^2\right] &= \frac{d}{dx}[5] \\ \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}x^3\right] + \frac{d}{dx}[y^3] - \frac{d}{dx}[xy^2] &= 0 \\ x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - x\frac{d}{dx}[y^2] - y^2 &= 0 \\ x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - x(2y)\frac{dy}{dx} - y^2 &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y^2 - x^2}{3y^2 - 2xy}\end{aligned}\tag{3.25}$$

สังเกตว่าเส้นสัมผัสที่ขนานแกน x จะมีความชันเป็น 0 ดังนั้นที่จุดบน เส้นโค้งซึ่งมีเส้นสัมผัสขนานแกน x

สอดคล้องกับสมการ

$$\begin{aligned} y^2 - x^2 &= 0 \quad \text{และ} \\ \frac{1}{3}x^3 + y^3 - xy^2 &= 5 \end{aligned} \tag{3.26}$$

เนื่องจาก $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) = 0$

1. เมื่อ $y = x$ เราได้ว่า $x^3 = 15$ หรือ $x = y = \sqrt[3]{15}$
2. เมื่อ $y = -x$ เราได้ว่า $x^3 = -3$ หรือ $x = -y = \sqrt[3]{-3}$

เพราะฉะนั้นที่จุด $(\sqrt[3]{15}, \sqrt[3]{15})$ และ $(\sqrt[3]{-3}, -\sqrt[3]{-3})$ บนเส้นโค้ง เส้นสัมผัสมีความชันเป็น 0

3.8.3 Related Rates

เราศึกษาปัญหา related rates เราต้องการหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ ปริมาณหนึ่งซึ่งมีความสัมพันธ์กับอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณอื่น ซึ่งเราทราบค่าแล้ว วิธีการทำได้ดังนี้

1. กำหนดปริมาณต่าง ๆ ด้วยตัวแปร
2. ระบุอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่รู้ค่า และอัตราการเปลี่ยนแปลง ของปริมาณที่ต้องการหาค่า

3. หาสมการซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณในข้อสอง
4. หา derivative ทั้งสองข้างของสมการเทียบกับเวลา แก้สมการหาค่าของ อัตราการเปลี่ยนของปริมาณที่ไม่รู้ค่า
5. หาค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงที่จุดกำหนด

ตัวอย่าง 3.24. สมมติว่าเนื้องอกมีรูปร่างคล้ายทรงกลม ซึ่งสูตรการหาปริมาตรของทรงกลม คือ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ เมื่อ r เป็นรัศมีของทรงกลม เนื่องจากเนื้องอกมีการขยายตัว ทำให้ r มีขนาดยาวขึ้นด้วยอัตราคงที่ 1.25 มิลลิเมตรต่อเดือน อยากทราบว่าปริมาตรของเนื้องอกจะเพิ่มขึ้นมากน้อยเพียงใด เมื่อ $r = 10$ mm

กำหนดให้ V เป็นปริมาตรของเนื้องอก (หน่วยคือ mm^3) r เป็นรัศมีของเนื้องอก (หน่วยคือ mm) จากโจทย์ จะเห็นว่า เมื่อเวลาผ่านไป เนื้องอกมีการขยายตัวทำให้ r มีขนาดยาวขึ้น และ V เพิ่มขึ้นด้วย ดังนั้น V, r ล้วนเป็นตัวแปรตาม ในขณะที่ t เป็นตัวแปรต้น นอกจากนี้ โจทย์ยังบอกอีกด้วยว่า r มีขนาดยาวขึ้นด้วยอัตรา 1.25 มิลลิเมตรต่อเดือน ดังนั้น $\frac{dr}{dt} = 1.25$ สิ่งที่โจทย์ถามก็คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของเนื้องอก นั่นคือ $\frac{dV}{dt}$ จากความสัมพันธ์ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ หาอนุพันธ์เทียบกับ t ทั้ง 2 ข้าง $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ เมื่อ $r = 10$ mm

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi(10)^2(1.25) = 500\pi > 0$$

ดังนั้น ปริมาตรของเนื้องอกจะเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 500π ลูกบาศก์มิลลิเมตรต่อเดือน

ตัวอย่าง 3.25. วิธีการอย่างง่าย ในการกำจัดตะกอนที่แขวนลอยอยู่ในน้ำ เหน้ล่างในกรวยที่มี filter ไว้ สมมติว่ากรวยสูง 16 นิ้ว และมีรัศมีที่ฐานเท่ากับ 4 นิ้ว ถ้าน้ำไหลออกจากกรวยด้วยอัตราเร็ว 2 ลูกบาศก์ นิ้วต่อนาที เมื่อระดับน้ำสูง 8 นิ้ว ความลึกของน้ำจะลดลงมากน้อยเพียงไร

กำหนดให้ t เป็นเวลานับจากการเริ่มต้นการสังเกต (min) V เป็นปริมาตรของน้ำในกรวย ณ เวลา t (in^3) y เป็นความลึกของน้ำในกรวย ณ เวลา t (in) x เป็นรัศมีของพื้นที่ผิวของน้ำ ณ เวลา t (in) อัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของน้ำ คือ $\frac{dV}{dt}$ และ อัตราการเปลี่ยนแปลงความลึกของน้ำ คือ $\frac{dy}{dt}$ โจทย์กล่าวว่า น้ำไหลออกจากกรวยด้วยอัตราเร็ว $2 \text{ in}^3/\text{min}$ เมื่อระดับน้ำสูง 8 in แสดงว่า น้ำในกรวยมีปริมาตรลดลง

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{y=8} = -2$$

การระบุอัตราการเปลี่ยนแปลงแบบนี้ แสดงให้เห็นว่า ณ ความลึกของน้ำต่างกัน อัตราการเปลี่ยนแปลง ปริมาตรของน้ำก็จะแตกต่างกันไป ไม่ได้เปลี่ยนแปลงด้วยอัตราที่คงที่เหมือนตัวอย่างก่อนหน้านี้ โจทย์ ต้องการทราบว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงความลึกของน้ำ เมื่อระดับน้ำสูง 8 นิ้ว นั่นคือ $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=8}$

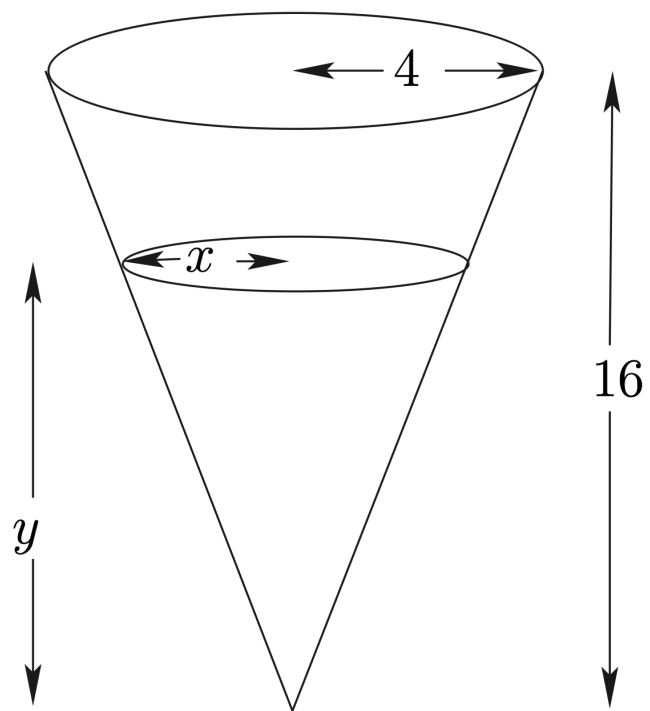


Figure 3.2: การไหลเวียนของอากาศในหลอดลม

จากสูตรการหาปริมาตรของกรวย

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

และจากคุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย $\frac{x}{y} = \frac{4}{16}$ หรือ $x = \frac{y}{4}$ ทำให้ได้ $V = \frac{\pi}{48}y^3$ หาอนุพันธ์เทียบกับ

t ทั้ง 2 ข้าง จะได้ $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{48}(3y^2 \frac{dy}{dt})$ หรือ $\frac{dy}{dt} = \frac{16}{\pi y^2} \frac{dV}{dt}$ ดังนั้น

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y=8} = \frac{16(-2)}{\pi(8)^2} = \frac{-1}{2\pi} \text{ (in/min)}$$

สรุปว่า เมื่อระดับน้ำสูง 8 นิ้ว ความลึกของน้ำจะลดลงด้วยอัตรา $\frac{1}{2\pi}$ นิ้วต่อวินาที

ตัวอย่าง 3.26. เมื่อโยนก้อนหินลงในสระน้ำ จะเกิดคลื่นซึ่งรัศมีเพิ่มขึ้นด้วย อัตรา 0.9 เมตร/วินาที พื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่นหลังจาก ผ่านไป 10 วินาทีเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าใด?

วิธีทำ กำหนดให้

1. t แทนเวลา (วินาที)
2. r แทนรัศมีของคลื่น (เมตร)
3. A แทนพื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่น (ตารางเมตร)

พื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่นเป็นไปตามสูตร

$$A = \pi r^2$$

เราหา derivative เทียบกับเวลา ได้ว่า

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

เรามีข้อมูลว่า $\frac{dr}{dt} = 0.9$ เมตร ในขณะทีวินาที ที่ 10 รัศมีของคลื่นจึงมีค่าเท่ากับ $0.9 \cdot 10 = 9$ เมตร และดังนั้นพื้นที่ที่ล้อมรอบไปด้วยคลื่นจึงเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา

$$\frac{dA}{dt} = (2\pi)(9)(0.9) = 50.89$$

ตารางเมตรต่อวินาที

ตัวอย่าง 3.27. เครื่องเททราย เททรายเป็นรูปกรวย ซึ่งความสูงของกองทรายมีค่าเท่ากับ เส้นผ่านศูนย์กลาง ที่ฐานของกองทรายเสมอ ถ้าความสูงเพิ่มขึ้นด้วยอัตราคงที่ 1.5 เมตร ต่อนาที จงหาว่าเครื่องเททรายเท ทรายด้วยอัตราเท่าใดเมื่อกองทรายมีความ สูงเท่ากับ 3 เมตร

วิธีทำ กำหนดให้

1. t แทนเวลา (นาที่)
2. V แทนปริมาตรของกองทราย ณ เวลา t (ลูกบาศก์เมตร)
3. h แทนความสูงของกองทราย ณ เวลา t (เมตร)
4. r แทนรัศมีของพื้นกองทราย ณ เวลา t (เมตร)

ในแต่ละเวลา t อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรทรายคือ dV/dt และอัตราการเปลี่ยนแปลงของความสูงของกองทรายคือ dh/dt จากข้อมูล ที่ให้มา เรารู้ว่า

$$\frac{dh}{dt} = 1.5$$

เนื่องจากกองทรายมีลักษณะเป็นรูปกรวย ซึ่งมีสูตรว่า

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

เรายังทราบอีกว่า ที่แต่ละเวลา t ความสูงของกองทราย มีค่าเท่ากับรัศมีของพื้นกองทราย $r = h$ เพราะฉะนั้น

$$V = \frac{1}{3}\pi h^3$$

หา derivative เทียบกับ t ได้ว่า

$$\frac{dV}{dt} = \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

ดังนั้น

$$\frac{dV}{dt} = 1.5\pi h^2$$

เมื่อกองทรายสูง 3 เมตร อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรกองทรายจึงเป็น

$$\frac{dV}{dt} = 13.5\pi = 42.41$$

ลูกบาศก์เมตรต่อนาที

ตัวอย่าง 3.28. จุด P เคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งตามสมการ

$$y = \sqrt{x^2 + 16}$$

เมื่อ $P = (3, 5)$ แล้ว y มีค่าเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2 หน่วย/วินาที ค่า x มีการเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด

วิธีทำ กำหนดให้

1. t แทนเวลา (วินาที)

เราหา derivative ของสมการที่กำหนดเทียบกับเวลา t พบว่า

$$\frac{dy}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} \frac{dx}{dt}$$

เรารู้ว่าที่จุด $P = (3, 5)$

$$\frac{dy}{dt} = 2$$

แทนค่าทั้งสองในสมการ

$E : example$

เราจะได้ว่า

$$2 = \frac{2}{\sqrt{9 + 16}} \frac{dx}{dt}$$

นั่นคือ

$$\frac{dx}{dt} = 5$$

นั่นคือ x มีการเปลี่ยนแปลงด้วยอัตรา 5 หน่วยต่อวินาที

ตัวอย่าง 3.29. ท่าเรือหนึ่ง มีแท่งแขวนลูกรอกผูกเรืออยู่เหนือท่า มีเชือกผูกไว้กับ หัวเรือซึ่งอยู่ต่ำกว่าตัวรอกของแท่งแขวน 3 เมตร ถ้าเราดึงเชือกด้วยอัตราเร็ว 6 เมตร/นาที เรือถูกดึงเข้าหาท่าด้วยอัตราเร็วเท่าใดเมื่อเชือก จากหัวเรือถึงลูกรอกมีความยาว 40 เมตร

วิธีทำ กำหนดให้

1. t แทนเวลา (นาที)
2. x ระยะทางในแนวนอน (เมตร)
3. y ระยะทางในแนวตั้ง (เมตร)

จากข้อมูลของปัญหา เราสรุปได้ว่า อัตราการดึงเชือกแทนด้วยพจน์

$$\frac{dy}{dt} = 6$$

คำถามให้ $\frac{dx}{dt}$ เมื่อเชือกยาว 40 เมตรนับจากหัวเรือถึงลูกรอก โดยการใช้พีทาโกรัส เราจึงได้ความสัมพันธ์

$$x^2 + y^2 = 40^2$$

เราหา derivative เทียบกับ t ทั้งสองข้างของสมการ

$$\begin{aligned} 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} &= 0 \\ x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{3.27}$$

เนื่องจากลูกรอกอยู่สูงกว่าหัวเรือ 3 เมตร หรือ $y = 3$ ในขณะที่ การดึงเชือกด้วยอัตราเร็ว 6 เมตร หรือ $\frac{dy}{dt} = 6$ เพราะฉะนั้น เมื่อเชือกยาว 40 เมตร เรืออยู่ห่างออกไปเป็นระยะทาง

$$x^2 + 3^2 = 40^2$$

หรือ $x = \sqrt{1591}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sqrt{1591} \frac{dx}{dt} + 4(6) &= 0 \\ \frac{dx}{dt} &= -\frac{24}{\sqrt{1591}} = -0.60 \end{aligned} \tag{3.28}$$

ซึ่งหมายถึงเรือถูกดึงเข้าหาท่าด้วยอัตราเร็ว 0.6 เมตรต่อวินาที

1. วาดภาพและกำหนดตัวแปรต่างๆ เช่น x, y เป็นต้น

2. ระบุอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรทุกตัวที่โจทย์กำหนดให้ และที่โจทย์ต้องการให้หา เช่น $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ เป็นต้น
3. หาสมการสมการหนึ่งที่แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่กำหนดขึ้นในขั้นตอนที่ 1 และเมื่อหาอนุพันธ์ของสมการนี้ จะมีเทอมที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ในขั้นตอนที่ 2
4. หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการในขั้นตอนที่ 3 เทียบกับเวลาและนำค่าของอนุพันธ์ที่ทราบลงไปในสมการ
5. หาค่าของอนุพันธ์ที่โจทย์ต้องการด้วยวิธีทางพีชคณิต

3.8.4 แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $y = \ln x$ จงหา dy และ Δy ที่ $x = 1$ โดย ที่ $dx = \Delta x = 0.5$
2. พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ แล้วหาสูตร dy และ Δy
 1. $y = x\sqrt{x-1}$
 2. $y = xe^x$

3. $y = x \sin x$

4. $y = \tan(x^2)$

3. จงหา local linear approximation ของเส้นโค้งจากสมการ $xe^y = y$ ที่จุด $(0, 0)$ และใช้สมการที่ได้ประมาณค่าของ y เมื่อ $x = 0.1$

4. จงหา $\frac{dy}{dx}$ สำหรับความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $x^2 + y^2 = 25$

2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

3. $x \sin y + y \sin x = 1$

4. $e^{xy} + xy = 1$

5. หญิงคนหนึ่งสูง 1.55 เมตร เดินเข้าเสาไฟด้วยอัตราเร็ว 0.75 เมตร/วินาที เสาไฟติดดวงไฟสูง 5 เมตร

1. เงามของหญิงคนนี้เปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด

2. ปลายเงาของด้านศีรษะหญิงคนนี้เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่าใด

6. อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ไปตามเส้นโค้งอธิบายตามสมการ

$$\frac{x^2y}{1+y^2} = \frac{2}{5}$$

กำหนดให้พิกัดแกน x ของอนุภาคเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 4 หน่วย/วินาที เมื่ออนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง $(1, 2)$

1. พิกัดแกน y ของอนุภาคเปลี่ยนแปลงด้วยอัตราเท่าใด เมื่ออนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง $(1, 2)$

2. ณ ตำแหน่ง $(1, 2)$ อนุภาคกำลังเคลื่อนสูงขึ้นหรือลดลงในพิกัด xy

7. ความเข้มของแสงที่ผ่านเข้าตาขึ้นอยู่กับรัศมีของ pupil ถ้า pupil มีขนาดมากขึ้น ปริมาณของแสงก็จะเข้าตามากขึ้น ดังสมการ $I = kr^2$ เมื่อ I เป็นความเข้มของแสง r เป็นรัศมีของ pupil และ k เป็นค่าคงตัว ในช่วงเวลา 6 โมงเช้าถึงเที่ยง รัศมีของ pupil จะขยายตัวด้วยอัตราเร็วคงที่ 0.1 mm/min จงหาว่าในช่วงเวลาดังกล่าว ความเข้มของแสงที่ผ่านเข้าตา จะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างไร เมื่อ $r = 0.5$ cm

8. การแพร่ระบาดของแมลงวันทอง เริ่มที่ใจกลางของหมู่บ้านเล็กๆ แห่งหนึ่งนอกเมือง พื้นที่การแพร่ระบาดมีลักษณะคล้ายวงกลมดังแสดงในรูป 1.5 รัศมีของพื้นที่การแพร่ระบาดขยายเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 1.5 ไมล์ต่อปี จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่การแพร่ระบาด เมื่อรัศมีของพื้นที่การแพร่ระบาดมีค่าเท่ากับ 4 ไมล์

3.9 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

3.9.1 อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เราจะใช้ความรู้เกี่ยวกับเอกลักษณ์ตรีโกณมิติและลิมิตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ช่วยในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยนิยามดังนี้

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \quad \text{เมื่อ } x \text{ มีหน่วยเป็นเรเดียน} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= 0 \\ \sin A - \sin B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}\end{aligned} \tag{3.29}$$

ทฤษฎี 3.4. ถ้า $f(x) = \sin x$ แล้ว $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

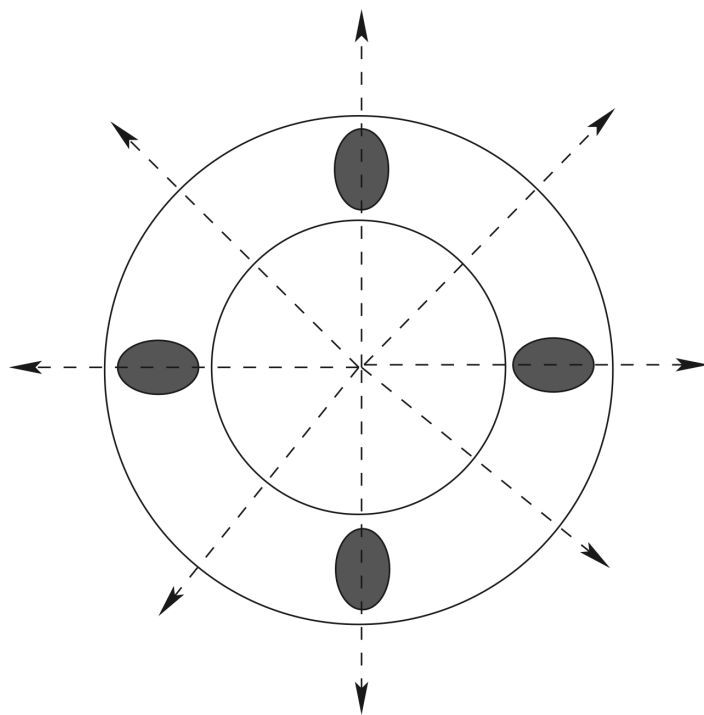


Figure 3.3: การแพร่ระบาดของแมลงวันทอง โดยที่วงรีสีเทาแทนแมลงวัน

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \sin x &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{h} \\
&= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \cos(x + \frac{h}{2}) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{h} \\
&= 2 \cos x \lim_{\frac{h}{2} \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\
&= 2(\cos x) \frac{1}{2} \\
&= \cos x
\end{aligned} \tag{3.30}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
\sin(x+h) - \sin x &= 2 \cos \frac{x+h+x}{2} \sin \frac{h}{2} \\
&= 2 \cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

สำหรับการหาอนุพันธ์ของ cosine ก็ทำได้ในทำนองเดียวกันกับ sine ส่วนฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ หาได้โดยแปลงในรูป cosine หรือ sine เช่น

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ และ } \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

ทฤษฎี 3.5.

$$1. \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$2. \frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

$$3. \frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$$

$$4. \frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$$

$$5. \frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \sec x &= \frac{d}{dx} \cdot \frac{1}{\cos x} \\
&= \frac{d}{dx} (\cos x)^{-1} \\
&= (-1)(\cos x)^{-2} \frac{d}{dx} \cos x \\
&= \frac{-1}{\cos^2 x} (-\sin x) \\
&= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \sec x \tan x
\end{aligned}
\tag{3.32}$$

ตัวอย่าง 3.30. กำหนดให้ $y = x^2 \tan 3x$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^2 \tan 3x) \\ &= x^2 \frac{d}{dx} \tan 3x + \tan 3x \frac{d}{dx} x^2 \\ &= x^2 (\sec^2 3x)(3) + (\tan 3x)(2x) \\ &= 3x^2 \sec^2 3x + 2x \tan 3x\end{aligned}\tag{3.33}$$

ตัวอย่าง 3.31. กำหนดให้ $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) \\&= \frac{(1 + \cos x) \frac{d}{dx} \sin x - \sin x \frac{d}{dx} (1 + \cos x)}{(1 + \cos x)^2} \\&= \frac{(1 + \cos x) \cos x - (\sin x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} \\&= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} \\&= \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} \\&= \frac{1}{1 + \cos x}\end{aligned} \tag{3.34}$$

ตัวอย่าง 3.32. กำหนดให้ $y = \sec^2(3x - 1)$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \sec^2(3x - 1) \\ &= 2 \sec(3x - 1) \frac{d}{dx} \sec(3x - 1) \\ &= 2 \sec(3x - 1) \sec(3x - 1) \tan(3x - 1) \frac{d}{dx} (3x - 1) \\ &= 3.2 \sec^2(3x - 1) \tan(3x - 1) \\ &= 6 \sec^2(3x - 1) \tan(3x - 1)\end{aligned}\tag{3.35}$$

ตัวอย่าง 3.33. ถ้า $x \cos y + y \cos x = 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ใช้ implicit differentiation

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x \cos y + y \cos x) &= \frac{d}{dx}1 \\ \frac{d}{dx}(x \cos y) + \frac{d}{dx}(y \cos x) &= 0 \\ x \frac{d}{dx} \cos y + \cos y \frac{dx}{dy} + y \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \frac{dy}{dx} &= 0 \\ x(-\sin y) \frac{dy}{dx} + \cos y + y(-\sin x) + \cos x \frac{dy}{dx} &= 0 \\ (-x \sin y + \cos x) \frac{dy}{dx} &= y \sin x - \cos y \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y \sin x - \cos y}{\cos x - x \sin y}\end{aligned}\tag{3.36}$$

ตัวอย่าง 3.34. จงหา $\frac{d^2y}{dx^2}$ ของฟังก์ชัน $y = x \cos x$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}y &= x \cos x \\y' &= \frac{d}{dx}(x \cos x) \\&= \frac{d}{dx} \cos x + \cos x \frac{dx}{dx} \\&= -x \sin x + \cos x \\y'' &= -\left(x \frac{d}{dx} \sin x + \sin x \frac{dx}{dx}\right) + \frac{d}{dx} \cos x \\&= -(x \cos x + \sin x) - \sin x \\&= -x \cos x - 2 \sin x\end{aligned} \tag{3.37}$$

3.9.2 อนุพันธ์ของฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จะเห็นว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้งหมดคือ sine, cosine, tangent, cotangent, secant และ cosecant เป็นฟังก์ชันคาบซึ่งสมาชิกในโดเมน จะให้ค่าซ้ำกัน ดังนั้น ฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็น 1-1 ฟังก์ชัน แต่เรา

สามารถจำกัดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อให้ฟังก์ชันเหล่านี้ เป็น 1-1 ฟังก์ชัน ก็จะให้อินเวอร์สของฟังก์ชันเหล่านั้นเป็นฟังก์ชันด้วย เช่น

$$F = \{(x, y) | y = \sin x\} \text{ มีโดเมน } = \mathfrak{R} \text{ และเรนจ์ } = [-1, 1]$$

ไม่เป็น 1-1 ฟังก์ชัน แต่

$$F = \{(x, y) | y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$$

เป็น 1-1 ฟังก์ชัน ดังนั้น

$$F^{-1} = \{(x, y) | x = \sin y, y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], x \in [-1, 1]\}$$

เป็น อินเวอร์สฟังก์ชันของ F เรียกว่า inverse sine function ใช้สัญลักษณ์ $\sin^{-1} x$ หรือ $\arcsin x$

ในทำนองเดียวกัน

ทฤษฎี 3.6.

$$1. \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$$

$$2. \frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1$$

$$3. \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x = \frac{-1}{1+x^2}.$$

$$4. \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$$

$$5. \frac{d}{dx} \operatorname{arccosec} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$$

$$6. \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{¶ } y = \arcsin x, |x| < 1$$

$$\begin{aligned}
x &= \sin y, \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\
\frac{dx}{dy} &= \frac{d}{dy} \sin y \\
1 &= \cos y \frac{dy}{dx} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y}, |x| < 1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

ตัวอย่าง 3.35. จงหา $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = \sin^{-1}(2x)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(2x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}\end{aligned}\tag{3.39}$$

ตัวอย่าง 3.36. จงหา y' เมื่อ $y = \operatorname{arcsec} x^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} x^2 \\ &= \frac{1}{|x|^2 \sqrt{x^4 - 1}} \cdot \frac{d}{dx} (x)^2 \\ &= \frac{2x}{x^2 \sqrt{x^4 - 1}} \\ &= \frac{2}{x \sqrt{x^4 - 1}} \end{aligned} \tag{3.40}$$

ตัวอย่าง 3.37. จงหา y' เมื่อ $y = \cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \tan^{-1} x$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} y &= \cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \tan^{-1} x \\ y' &= \frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \tan^{-1} x\right) \\ &= \frac{d}{dx} \cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{d}{dx} \tan^{-1} x \\ &= \frac{-1}{1 - \frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{1 + x^2} \\ &= \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{1 + x^2} \\ &= \frac{2}{x^4 - 1} \end{aligned} \tag{3.41}$$

3.10 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

ในบทที่ 1 เราอธิบายการขยายพันธุ์แบคทีเรีย $N(t)$ ในรูปของเวลา t ในรูปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยมีสมการดังต่อไปนี้

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \quad (3.42)$$

$$(3.43)$$

ในทางคณิตศาสตร์เราเรียกสมการดังกล่าวว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) และมีเนื้อหาในรายวิชานี้ที่จะเรียนในบทถัดๆ ไป ทั้งนี้ฟังก์ชัน $N(t)$ ที่ปรากฏในสมการเป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า (unknown function) และเราสามารถหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นโดยวิธีการหาปริพันธ์ (Integration) ได้คำตอบของสมการดังนี้

$$N(t) = N_0 e^{(b-m)t} \quad (3.44)$$

ดังนั้นในบทนี้ เราจะกล่าวถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม เราสามารถใช้
นิยาม หรือสูตรต่อไปนี้ในการหาอนุพันธ์

ทฤษฎี 3.7.

$$1. \frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$2. \frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$3. \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

$$4. \frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$$

ตัวอย่าง 3.38. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = e^{x^2+1}$

วิธีทำ

เราสามารถใช้กฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ของ $f(x) = e^{x^2+1}$ ได้ดังต่อไปนี้

โดยการกำหนดให้ $u = x^2 + 1$, แล้ว $f(x) = e^u$ และจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{du}e^u \cdot \frac{d}{dx}u$$

เนื่องจาก $\frac{d}{du}e^u = e^u$ และ $\frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x$.

ดังนั้น

$$\frac{d}{dx}f(x) = e^u \cdot 2x$$

เมื่อแทนตัวแปร $u = x^2 + 1$ ลงในสมการข้างต้น เราจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}f(x) = e^{x^2+1} \cdot 2x$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $f(x) = e^{x^2+1}$ คือ

$$\boxed{\frac{d}{dx}f(x) = 2xe^{x^2+1}}$$

ตัวอย่าง 3.39. จงแสดงว่า $N(t) = \frac{K}{1+(K-1)e^{-rt}}$ เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

โดยที่ r และ K เป็นค่าคงตัวที่เป็นบวก สมการเชิงอนุพันธ์นี้มีชื่อเรียกว่า the logistic growth equation
วิธีทำ

1. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $N(t)$:

$$\text{กำหนดให้ } N(t) = \frac{K}{1+(K-1)e^{-rt}}.$$

เราสามารถใช้อนุโลมในการหาอนุพันธ์ได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{K \cdot (K-1) \cdot (-r)e^{-rt}}{(1+(K-1)e^{-rt})^2}$$

2. จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\frac{dN}{dt} = \frac{rK(K-1)e^{-rt}}{(1+(K-1)e^{-rt})^2}$$

3. แทน $N(t)$ ลงใน the logistic equation:

เนื่องจาก

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

โดยการแทน $N(t) = \frac{K}{1+(K-1)e^{-rt}}$ ลงไปในสมการข้างต้น เราจะได้ว่า

$$rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) = \frac{rK(K-1)e^{-rt}}{(1+(K-1)e^{-rt})^2}$$

4. ผลสรุปที่ได้จากการหาอนุพันธ์ และการแทนค่าฟังก์ชัน

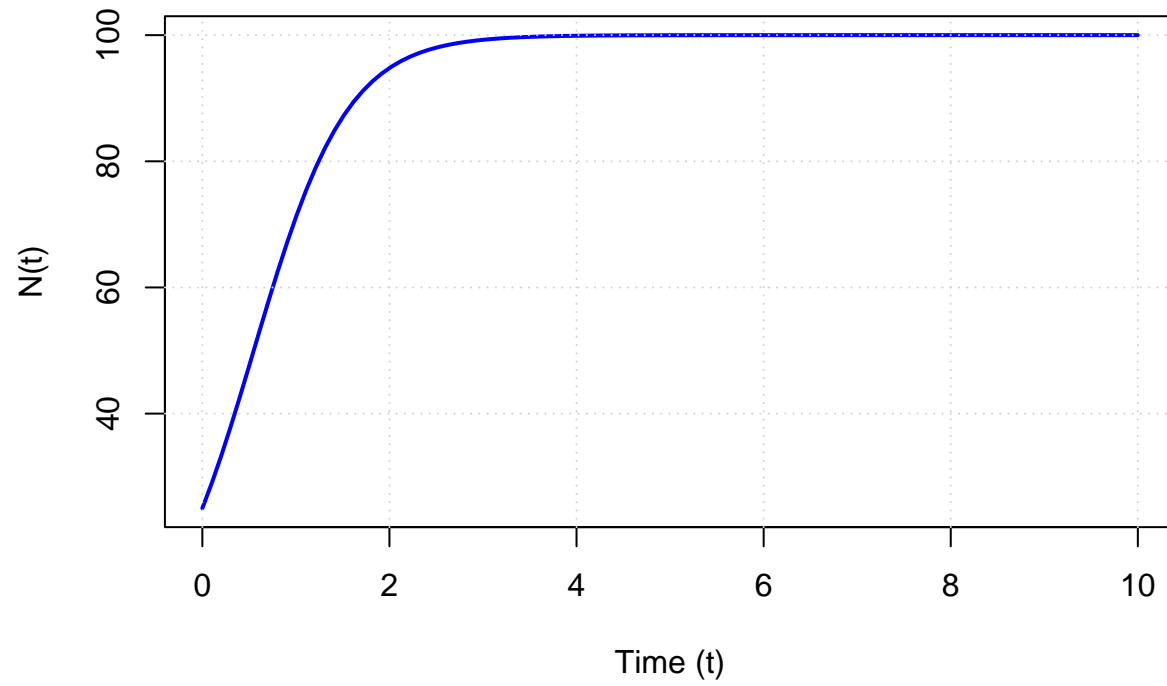
เราจะเห็นว่าทั้ง 2 ข้างของสมการข้างต้นเท่ากัน แสดงว่า ฟังก์ชัน $N(t) = \frac{K}{1+(K-1)e^{-rt}}$ เป็นคำตอบของสมการ the logistic growth equation

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้นเราสมมติให้ $N(0) = 1$ ในกรณีที่กำหนดให้ $N(0) = N_0$ แล้วคำตอบของสมการ the logistic growth equation จะอยู่ในรูป

$$N(t) = \frac{N_0 \cdot K}{1 + (K - 1)e^{-rt}}$$

รูปต่อไปนี้จะแสดงกราฟของคำตอบของแบบจำลองการเติบโตแบบ logistic เมื่อกำหนดให้ $N_0 = 25$, $K = 4$ และ $r = 2$ กราฟจะมีลักษณะเป็นรูปตัว S (ซิกมอยด์, sigmoidal) ซึ่งสะท้อนการเติบโตที่จำกัดเนื่องจากความจุที่รองรับได้ (carrying capacity) หรือค่า K ในตอนแรก ประชากรจะเติบโตแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล แต่เมื่อเข้าใกล้ K อัตราการเติบโตจะช้าลงและกราฟจะแบนลง ซึ่งแตกต่างจากแบบจำลองการเติบโตแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลธรรมดา โดยประชากรจะเติบโตโดยไม่มีขอบเขต โดยเป็นไปตามกราฟที่เพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง ในโมเดลโลจิสติกส์ การเติบโตถูกจำกัดและจะคงตัวเมื่อจำนวนประชากรใกล้ถึงขีดจำกัดความจุ

$$N(t) = \frac{N_0 K}{1 + (K - 1)e^{-rt}}$$



ตัวอย่าง 3.40. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน:

$$y = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

โดยใช้การลอการิทึมทั้งสองฝั่งก่อนทำการหาอนุพันธ์

วิธีทำ

1. ลอการิทึมทั้งสองข้าง:

$$\ln y = \ln \left(\frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$$

ใช้สมบัติลอการิทึม

$$\ln y = \ln(e^x) + \ln(x^2) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

ย่อ:

$$\ln y = x + 2 \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

2. หาอนุพันธ์ทั้งสองข้าง:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1}$$

ย่อ:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}$$

3. จัดรูปหา $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = y \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} \right)$$

4. แทนค่า $y = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right)$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $y = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ คือ:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right)}$$

Chapter 4

การประยุกต์ของอนุพันธ์ (Applications of Differentiation)

4.1 Applications of derivatives related to students discipline

จากบทเรียนก่อนหน้านี้ เราทราบว่าถ้าตัวแปร y สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันๆ หนึ่ง ที่ขึ้นกับตัวแปร x นั่นคือ $f(x)$ เราจะสามารถวาดกราฟของ y หรือฟังก์ชัน $f(x)$ ได้ และถ้าเราทราบว่า จุด $P(x_0, y_0)$

และจุด $Q(x_1, y_1)$ ต่างอยู่บนกราฟของ y แสดงว่า $y_0 = f(x_0)$ และ $y_1 = f(x_1)$ นั่นเอง ความชันของเส้นตรงที่ลากผ่านจุด P และจุด Q มักใช้ m เป็นสัญลักษณ์ มีสูตรการหาดังนี้

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

ความชันของเส้นตรงที่กล่าวมาแล้วนี้ มีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $f(x)$ ตั้งแต่ $x = x_0$ จนถึง $x = x_1$ และ

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ ณ $x = x_0$ หรือการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ เทียบกับตัวแปร x เมื่อ x มีค่าเท่ากับ x_0 นั่นเอง

หลักการหาอนุพันธ์สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้หลากหลายสาขาวิชาชีพ ไม่ว่าจะเป็นธุรกิจ เศรษฐศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ฟิสิกส์ เคมี หรือแม้กระทั่งชีววิทยา สำหรับบทนี้ ผู้เขียนจะขอกล่าวถึง การนำแนวคิดทางคณิตศาสตร์นี้ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาทางวิทยาศาสตร์ชีวภาพ เพื่อให้สอดคล้องกับความสนใจของผู้เรียน

ตัวอย่าง 4.1. AIDS ย่อมาจาก acquired immunodeficiency syndrome เป็นโรคติดต่อทางเพศสัมพันธ์ และการให้เลือด ซึ่งพบการแพร่ระบาดมาตั้งแต่ปี พ.ศ. 2523 โดยผู้ป่วยที่เป็นโรค AIDS จะพบเชื้อไวรัส HIV ใน antibodies ซึ่งไวรัส HIV นี้มีระยะฟักตัวตั้งแต่ไม่กี่เดือน จนกระทั่งนานนับปี นักวิจัยคนหนึ่งนำเชื้อไวรัส HIV มาเพาะเลี้ยงในจานเพาะเชื้อ พบว่า ขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา t , $N(t)$ สอดคล้องกับสมการ $N(t) = 1000 + 20t + t^2$ อยากทราบว่าไวรัสชุดนี้มีอัตราการเปลี่ยนแปลง ณ t ใดๆ เป็นอย่างไร

กำหนดให้ t แทน เวลา $N(t)$ แทน ขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา t จากการทดลองพบว่า ขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา t ใดๆ สอดคล้องกับสมการ

$$N(t) = 1000 + 20t + t^2$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา t ใดๆ คือ

$$\frac{dN}{dt} = 20 + 2t$$

ตัวอย่าง 4.2. จากการสำรวจพบว่า จำนวนผู้ป่วยด้วยโรค AIDS, $P(t)$ มีความสัมพันธ์กับสมการ

$$P(t) = 100t^2 - 2t^3$$

เมื่อ t เป็นเวลาที่ผ่านไปนับจากวันนี้ มีหน่วยเป็นวัน อยากทราบว่าเมื่อ 20 วันผ่านไป จะมีผู้ป่วยด้วยโรคนี้กี่คน และมีอัตราการเพิ่มจำนวนผู้ป่วยเป็นเท่าไร

กำหนดให้ t แทน เวลา มีหน่วยเป็นวัน $P(t)$ แทน จำนวนผู้ป่วยด้วยโรค AIDS มีหน่วยเป็นคน จากการสำรวจพบว่า

$$P(t) = 100t^2 - 2t^3$$

เมื่อ 20 วันผ่านไป แสดงว่า $t = 20$ จะได้ว่า $P(20) = 100(20)^2 - 2(20)^3 = 24,000$ ดังนั้นเมื่อ 20 วันผ่านไป จะมีผู้ป่วยโรค AIDS 24,000 คน อัตราการเพิ่มจำนวนผู้ป่วยโรค AIDS ณ เวลา t ใดๆ หาได้ดังนี้

$$\frac{dP}{dt} = 200t - 6t^2$$

ดังนั้น เมื่อ 20 วันผ่านไป อัตราการเพิ่มจำนวนผู้ป่วยจะมีค่าเท่ากับ $200(20) - 6(20)^2$ หรือ 1,600 คนต่อวัน

ตัวอย่าง 4.3. จากการศึกษาทงสิ่งแวดล้อมระบุว่า $Q(t)$ ระดับ carbon monoxide (CO) เฉลี่ยในอากาศ (หน่วยเป็น ppm) จะมีค่าเป็นเท่าไร

$$Q(t) = 0.05t^2 + 0.1t + 3.4$$

เมื่อ t เป็นเวลาที่นับจากนี้เป็นต้นไป มีหน่วยเป็นปี อยากทราบว่า ระดับ CO เฉลี่ยในอากาศจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร ในอีก 2 ปี ข้างหน้า

กำหนดให้ t เป็นเวลาที่นับจากวันนี้ มีหน่วยเป็นปี $Q(t)$ เป็นระดับ CO เฉลี่ยในอากาศมีหน่วยเป็น ppm จากการศึกษาทงสิ่งแวดล้อมระบุว่า

$$Q(t) = 0.05t^2 + 0.1t + 3.4$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงระดับ CO เฉลี่ยในอากาศ ณ t ใดๆ คือ

$$\frac{dQ}{dt} = 0.1t + 0.1$$

ในอีก 2 ปีข้างหน้า $t = 2$

$$\frac{dQ}{dt} = 0.1(2) + 0.1 = 0.3 > 0$$

ระดับ CO เฉลี่ยในอากาศจะเพิ่มขึ้น (เพราะ $\frac{dQ}{dt} > 0$) ด้วยอัตราเร็ว 0.3 ppm ต่อปี

ตัวอย่าง 4.4. Poiseuille's law กล่าวว่า ความเร็วของเลือด (หน่วย คือ เซนติเมตรต่อวินาที) ที่อยู่ห่างจากจุดกึ่งกลางของหลอดเลือด r เซนติเมตร มีสูตรดังนี้ $S(r) = C(R^2 - r^2)$ เมื่อ C เป็นค่าบวกใดๆ และ R เป็นรัศมีของหลอดเลือด อยากทราบว่า ความเร็วของเลือดจะเปลี่ยนแปลงเป็นอย่างไร เมื่อเลือดอยู่บริเวณกึ่งกลางระหว่างจุดกึ่งกลางและผนังของหลอดเลือด

กำหนดให้ r เป็นระยะห่างจากจุดกึ่งกลางของหลอดเลือด (หน่วยเป็นเซนติเมตร) $S(r)$ เป็นความเร็วของเลือด ณ r ใดๆ (หน่วยเป็นเซนติเมตรต่อวินาที) จาก Poiseuille's law

$$S(r) = C(R^2 - r^2)$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วของเลือด ณ r ใดๆ คือ

$$\frac{dS}{dr} = -2Cr$$

เลือดที่อยู่บริเวณกึ่งกลางระหว่างจุดกึ่งกลางและผนังของหลอดเลือดหมายถึง $r = \frac{R}{2}$ ดังนั้น

$$\left. \frac{dS}{dr} \right|_{r=R/2} = -CR < 0 \text{ เพราะว่า } C > 0, R > 0$$

แสดงว่าความเร็วของเลือดจะลดลง (เพราะ $\frac{dS}{dr} < 0$) ด้วยอัตรา CR (cm/s)/cm

4.1.1 แบบฝึกหัด

1. ผลการทดลองแสดงให้เห็นว่า ความเข้มข้นของปริมาณ adrenaline ที่ฉีดเข้าไปในร่างกาย, x , มีความสัมพันธ์กับการตอบสนองของกล้ามเนื้อ, y , ด้วยสมการ $y = \frac{x}{a+bx}$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงการตอบสนองของกล้ามเนื้อ เมื่อเทียบกับความเข้มข้นของปริมาณ adrenaline ที่ฉีดเข้าไปในร่างกาย
2. กำหนดให้ $P(t) = \frac{1000t}{t+10}$ แสดงถึงขนาดของประชากรแบคทีเรีย เมื่อ t เป็นเวลา จงหาอัตราการเจริญเติบโตของประชากร
3. Schuty - Borisoff laws กล่าวถึง ปริมาณ substrate, y , ที่ถูกเปลี่ยนรูปด้วยเอนไซม์ ในรูปของฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลา t ดังนี้

$$y = k\sqrt{cat}$$

เมื่อ k, a, c เป็นค่าคงตัว จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาณ substrate ที่ถูกเปลี่ยนรูปด้วยเอนไซม์ ณ เวลา t ใดๆ

4.2 Sketching the graph of a function from the derivative

ในหัวข้อนี้เราใช้ประโยชน์จากเรื่อง derivative ในการวาดกราฟของฟังก์ชัน เมื่อนึกถึงกราฟของฟังก์ชัน เราสนใจลักษณะที่สำคัญ เช่น ช่วงใดที่กราฟเพิ่ม ช่วงใดที่กราฟลด ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของกราฟอยู่ที่ใด กราฟมีลักษณะคว่ำในช่วงใด หรือมีลักษณะหงายในช่วงใด เป็นต้น

แนวคิดแรกคือเรื่องของการเพิ่มและลดของฟังก์ชัน เรามารู้จักนิยามก่อน

นิยาม 4.1. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วง I ให้ x_1 และ x_2 เป็น สมาชิกในช่วง I

- f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง I ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$
- f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง I ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$
- f เป็นฟังก์ชันคงตัวบนช่วง I ก็ต่อเมื่อ สำหรับค่า x_1 และ x_2 ใด ๆ แล้ว $f(x_1) = f(x_2)$

ประโยชน์ของ derivative ที่ใช้ในการตรวจสอบการเพิ่มและลดของฟังก์ชัน มาจาก ทฤษฎีบท :

ทฤษฎี 4.1. ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหา derivative ได้ บนช่วงเปิด (a, b)

1. ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็น ฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a, b]$

2. ถ้า $f'(x) < 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็น ฟังก์ชันลดบนช่วง $[a, b]$

3. ถ้า $f'(x) = 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็น ฟังก์ชันคงตัวบนช่วง $[a, b]$

ทฤษฎีบทนี้สามารถขยายผลจากช่วง $[a, b]$ ไปได้ถึงช่วงในรูป $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ และ $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่าง 4.5. พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

เราหา derivative ของฟังก์ชัน ได้ว่า $f'(x) = 2x - 3$ ซึ่งบอกเราว่า

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \text{ สำหรับ } x < 3/2 \\ f'(x) &> 0 \text{ สำหรับ } x > 3/2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 3/2$ เราจึงบอกได้ว่า

$$\begin{aligned} f &\text{ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง } (-\infty, 3/2] \\ f &\text{ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง } [3/2, \infty) \end{aligned} \tag{4.2}$$

แนวคิดต่อไป เป็นเรื่องของลักษณะหงายหรือคว่ำของกราฟของฟังก์ชัน ถ้ากราฟของฟังก์ชันมีลักษณะหงาย เราเรียกว่าฟังก์ชัน concave up ในขณะที่ถ้ากราฟของฟังก์ชันมีลักษณะคว่ำ เราเรียกว่า ฟังก์ชัน concave down นิยามที่ชัดเจนของ concavity ของฟังก์ชันเป็นดังนี้

นิยาม 4.2. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหา derivative ได้บนช่วงเปิด I

- f concave up บนช่วง I ถ้า f' เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง I

- f concave down บนช่วง I ถ้า f' เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง I

ลักษณะ concavity ของฟังก์ชัน สามารถตรวจสอบโดยใช้ derivative ดังนี้

ทฤษฎี 4.2. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหา derivative อันดับสองได้บนช่วง I

1. ถ้า $f''(x) > 0$ บนช่วง I แล้ว f concave up บนช่วง I
2. ถ้า $f''(x) < 0$ บนช่วง I แล้ว f concave down บนช่วง I

ตัวอย่าง 4.6. พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ถ้าเราคำนวณ derivative อันดับสอง $f''(x) = 2$ ซึ่งจากทฤษฎีบท เรากล่าวได้ว่า f concave up บนช่วง $(-\infty, \infty)$

การเปลี่ยนทิศทางของ concavity ของฟังก์ชัน ก็เป็นอีกที่หนึ่งของกราฟของ ฟังก์ชัน ซึ่งมีลักษณะเด่น ที่จุดนี้กราฟอาจมีการเปลี่ยนจากลักษณะหงาย เป็นคว่ำ หรือจากลักษณะคว่ำเป็นหงาย

นิยาม 4.3. ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด I ซึ่งมี x_0 เป็น สมาชิก และ f เปลี่ยนทิศทางของ concavity ที่จุดนี้ แล้วเรากล่าว ว่า f มี inflection point ที่ x_0 และเราเรียก $(x_0, f(x_0))$ ว่า inflection point ของ f

ตัวอย่าง 4.7. ฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ มี

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x$$

สังเกตว่า

- เมื่อ $x < 0$, $f''(x) < 0$
- เมื่อ $x > 0$, $f''(x) > 0$

ดังนั้น ที่จุด $x = 0$, f มีการเปลี่ยนทิศทางของ concavity จาก concave down เมื่อ $x < 0$ เป็น concave up เมื่อ $x > 0$ เพราะฉะนั้น inflection point จึงเป็น $(0, 0)$ สังเกตอีก ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดช่วง $(-\infty, \infty)$

ค่าสูงสุดและต่ำสุดในย่านหนึ่ง ๆ ของกราฟก็เป็นอีกลักษณะเด่น ที่เราสามารถ ตรวจสอบได้โดยใช้ derivative ของฟังก์ชัน

นิยาม 4.4.

1. ฟังก์ชัน f มี relative maximum ที่ x_0 ถ้ามีช่วงเปิดที่มี x_0 เป็นสมาชิก และ $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุก ๆ x ที่เป็น สมาชิกในช่วงเปิดดังกล่าว

2. ฟังก์ชัน f มี relative minimum ที่ x_0 ถ้ามีช่วงเปิดที่มี x_0 เป็นสมาชิก และ $f(x_0) \leq f(x)$ สำหรับทุก ๆ x ที่เป็น สมาชิกในช่วงเปิดดังกล่าว

3. ถ้า f มี relative maximum หรือ relative minimum ที่ x_0 แล้ว เรากล่าวว่า f มี relative extremum ที่ x_0

ฟังก์ชันหนึ่ง ๆ อาจมี relative maximum, relative minimum หลายที่ อาจมีที่เดียว หรืออาจไม่มีเลยก็ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.8.

1. ฟังก์ชัน $f(x) = (x - 1)^2$ มี relative minimum ที่ $x = 1$ แต่ไม่มี relative maximum
2. ฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ ไม่มี relative extremum
3. ฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ มี relative maximum ที่ $x = 0$ และมี relative minimum ที่ $x = 1$
4. ฟังก์ชัน $f(x) = \sin x$ มี relative maxima ที่ $\pi/2 + 2n\pi$ และมี relative minima ที่ $3\pi/2 + 2n\pi$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม n ใด ๆ

ทฤษฎี 4.3. ถ้า f มี relative extremum ที่จุด x_0 แล้ว $f'(x_0) = 0$ หรือ f หา derivative ไม่ได้ที่ x_0

นิยาม 4.5. เราเรียก x_0 ว่า critical point ของฟังก์ชัน f ถ้า $f'(x_0) = 0$ หรือ f หา derivative ไม่ได้ที่ x_0

ตัวอย่าง 4.9. ฟังก์ชัน $f(x) = |x^2 - x|$ มี critical point ที่จุด $x = 0, 1$ และฟังก์ชัน $g(x) = x^2 - x$ ก็มี critical point ที่จุด $x = 0, 1$ เช่นกัน สังเกตว่า ฟังก์ชัน f หา derivative ไม่ได้ที่จุด $x = 0, 1$ ในขณะที่ฟังก์ชัน g หา derivative ได้ ที่จุดดังกล่าว

การตรวจสอบหา relative extremum โดยใช้ derivative เราใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎี 4.4. ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ critical point x_0 และถ้า ค่าของ f' เปลี่ยนเครื่องหมายที่ x_0 แล้ว f มี relative minimum หรือ relative maximum ที่ x_0

1. ถ้า f' มีค่าเป็นลบสำหรับค่าทางซ้ายของ x_0 และมีค่า เป็นบวกสำหรับค่าทางขวาของ x_0 แล้ว f มี relative minimum ที่ x_0
2. ถ้า f' มีค่าเป็นบวกสำหรับค่าทางซ้ายของ x_0 และมีค่า เป็นลบสำหรับค่าทางขวาของ x_0 แล้ว f มี relative maximum ที่ x_0

ตัวอย่าง 4.10. พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = |x^2 - x|$ จงหาค่า x ที่ทำให้ f มี relative extrema

วิธีทำ เรารู้ว่า $x = 0, 1$ เป็น critical point เขียนฟังก์ชัน f ใหม่ว่า

$$f(x) = |x||x - 1| = \begin{cases} x(x - 1) & x \leq 0 \\ -x(x - 1) & 0 < x \leq 1 \\ x(x - 1) & x > 1 \end{cases}$$

นั่นคือ

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 0 \\ -2x + 1 & 0 < x < 1 \\ 2x - 1 & x > 1 \end{cases}$$

ดังนั้นที่จุด x ใกล้ ๆ 0 และ $x < 0$ เราพบว่า $f'(x) < 0$ ในขณะที่ที่จุด x ใกล้ ๆ 0 และ $x > 0$ เราพบว่า $f'(x) > 0$ เราจึงสรุปว่า f มี relative minimum ที่ 0 ในทำนองเดียวกัน ที่จุด x ใกล้ ๆ 1 และ $x < 1$ เราพบว่า $f'(x) < 0$ ในขณะที่ที่จุด x ใกล้ ๆ 1 และ $x > 1$ เราพบว่า $f'(x) > 0$ เราจึงสรุปได้เช่นกันว่า f มี relative minimum ที่ 1

เมื่อเราพิจารณาฟังก์ชัน แล้วต้องการวาดกราฟของฟังก์ชัน เราคงจำได้ว่า มีข้อมูล บางประการที่เราสามารถ

ตรวจสอบได้ก่อน เช่น x -intercepts y -intercepts ลักษณะ ของกราฟเมื่อ x เข้าใกล้ค่าอนันต์ เป็นต้น ตัวอย่างต่อไปนี้จะใช้ความรู้เหล่านี้ ประกอบกับเรื่องของ derivative ในการวาดกราฟของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 4.11. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$

วิธีทำ

- x -intercepts: ให้ $y = 0$ ได้ว่า

$$\begin{aligned}x^3 - 3x + 2 &= 0 \\(x + 2)(x^2 - 2x + 1) &= 0 \\(x + 2)(x - 1)^2 &= 0\end{aligned}\tag{4.3}$$

ดังนั้น $x = -2, 1$

- y -intercepts: ให้ $x = 0$ ได้ว่า $y = 2$
- ลักษณะกราฟเมื่อ $x \rightarrow \infty$ และ $x \rightarrow -\infty$: สังเกตว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 2x + 2) &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x + 2) &= -\infty\end{aligned}\tag{4.4}$$

- ช่วงการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน เราหา derivative ของ f ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$$

ดังนั้น f จึงเป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $x < -1$ เป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $-1 < x < 1$ และ เป็นฟังก์ชันเพิ่มอีกครั้งเมื่อ $x > 1$

- ช่วงการ concave up และ concave down ของฟังก์ชัน f เราหา derivative อันดับ สองของฟังก์ชัน f ได้ว่า

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

ดังนั้น f จึง concave up เมื่อ $x > 0$ และ concave down เมื่อ $x < 0$ ฟังก์ชัน f มี inflection point ที่ 0

จากข้อมูลทั้งหมด เราเขียนกราฟคร่าว ๆ ดังรูปที่

Fig : graph1

กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 3x + 2$

ตัวอย่าง 4.12. ถ้า f เป็นฟังก์ชัน และเรามีข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับ f' ดังนี้

1. $f'(x) > 0$ และ f' เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง $(-\infty, -1)$
2. $f'(x) > 0$ และ f' เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $(-1, 1)$
3. $f'(1) = 0$
4. $f'(x) < 0$ และ f' เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $(1, \infty)$

จงวาดกราฟที่เป็นไปได้ของฟังก์ชัน f

วิธีทำ จากข้อมูลที่ได้มา เราสรุปว่า

1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ concave up ในช่วง $(-\infty, -1)$
2. f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ concave down ในช่วง $(-1, 1)$
3. f มี relative maximum ที่ $x = 1$
4. f เป็นฟังก์ชันลด และ concave down ในช่วง $(1, \infty)$

ตัวอย่างกราฟของฟังก์ชัน f เช่นรูป

Fig : graph2

กราฟของฟังก์ชัน f จากข้อมูลที่กำหนด

ตัวอย่าง 4.13. พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

วิธีทำ

- x -intercepts: ให้ $y = 0$ ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2 + 1} &= 0 \\ x &= 0\end{aligned}\tag{4.5}$$

- y -intercepts: ให้ $x = 0$ ได้ว่า $y = 0$

- ลักษณะกราฟเมื่อ $x \rightarrow \infty$ และ $x \rightarrow -\infty$: สังเกตว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} &= 0\end{aligned}\tag{4.6}$$

- ช่วงการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน เราหา derivative ของ f ได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + 1)^2}$$

ดังนั้น f จึงเป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $x < -1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $-1 < x < 1$ และ เป็นฟังก์ชันลดอีกครั้งเมื่อ $x > 1$

- ช่วงการ concave up และ concave down ของฟังก์ชัน f เราหา derivative อันดับ สองของฟังก์ชัน f ได้ว่า

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x^2 + 1)^3}$$

ดังนั้น f จึง concave up เมื่อ $x > \sqrt{3}$ หรือเมื่อ $-\sqrt{3} < x < 0$ ในขณะที่ f concave down เมื่อ $x < -\sqrt{3}$ หรือเมื่อ $0 < x < \sqrt{3}$ ฟังก์ชัน f มี inflection point ที่ $0, \pm\sqrt{3}$

จากข้อมูลทั้งหมด เราเขียนกราฟคร่าว ๆ ดังรูป

Fig : graph3

กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

ตัวอย่าง 4.14. พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \ln(x^3 + 1)$$

นิยามบนช่วง $(-1, \infty)$ จงวาดกราฟของฟังก์ชันนี้

วิธีทำ

- x -intercepts: ให้ $y = 0$ พบว่า $x = 0$
- y -intercepts: ให้ $x = 0$ พบว่า $y = 0$
- ลักษณะกราฟเมื่อ $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^3 + 1) = \infty$$

- ลักษณะกราฟเมื่อ $x \rightarrow (-1)^+$:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \ln(x^3 + 1) = -\infty$$

- ช่วงการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน เราหา derivative ของ f ได้ว่า

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 1} > 0$$

สำหรับ $x > -1$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดโดเมน

- ช่วงการ concave up และ concave down ของฟังก์ชัน f เราหา derivative อันดับ สองของฟังก์ชัน f ได้ว่า

$$f''(x) = \frac{-3x^4 + 6x}{(x^3 + 1)^2} = \frac{-3x(x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})}{(x^3 + 1)^2}$$

ดังนั้น f จึง concave up เมื่อ $0 < x < \sqrt[3]{2}$ และ f concave down เมื่อ $x < 0$ หรือเมื่อ $x > \sqrt[3]{2}$ ฟังก์ชัน f มี inflection point ที่ $0, \sqrt[3]{2}$ ค่าของ $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$

จากข้อมูลทั้งหมด เราเขียนกราฟคร่าว ๆ ดังรูป

Fig : graph4

กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \ln(x^3+1)$ บนช่วง $(-1, \infty)$

ตัวอย่าง 4.15. พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามบนช่วง $(-3, 3)$ และหา derivative อันดับสองได้ ฟังก์ชัน f มีกราฟดังรูป

Fig : graph5

กราฟของฟังก์ชัน f บนช่วง $(-3, 3)$

ที่จุดใดที่ฟังก์ชัน f' เปลี่ยนเครื่องหมาย และที่จุดใด f' มี relative extrema

วิธีทำ จากรูป ที่จุดซึ่ง f' เปลี่ยนเครื่องหมายคือจุด x ที่ $f'(x) = 0$ ซึ่ง คือ a, c, e และ j ในขณะที่จุดซึ่ง f' มี relative extrema เป็นจุดซึ่ง f'' เปลี่ยนเครื่องหมาย ในที่นี้คือจุดซึ่ง f มี inflection point ซึ่งก็คือ b, d, i และ k

4.2.1 แบบฝึกหัด

1. พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

2

1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$$2. f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$3. f(x) = x^{4/3} - x^{1/3}$$

$$4. f(x) = \ln(1 + x^2)$$

ในแต่ละฟังก์ชัน จงหา

2

1. x -intercepts และ y -intercepts

2. ช่วงเปิดซึ่ง f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

3. ช่วงเปิดซึ่ง f เป็นฟังก์ชันลด

4. ช่วงเปิดซึ่ง f เป็นฟังก์ชัน concave up

5. ช่วงเปิดซึ่ง f เป็นฟังก์ชัน concave down

6. ค่า x ที่ทำให้ f มี inflection point

2. จงหา relative extrema ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2

1. $f(x) = x^3 + 5x - 2$

2. $f(x) = x(x - 2)^2$

3. $f(x) = \frac{x}{x - 1}$

4. $f(x) = |x^2 - 1|$

3. จงสเก็ตกราฟของฟังก์ชัน

2

1. $f(x) = x^3 - 3x + 3$

2. $f(x) = -(x + 1)x^2(x - 1)$

3. $f(x) = e^{1/x}$

4. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ และ $a < b < c$ จากข้อมูลต่อไปนี้

1. $f'(a) = f'(b) = 0$

2.

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{สำหรับ } x < a \\ > 0 & \text{สำหรับ } a < x < c \\ < 0 & \text{สำหรับ } x > c \end{cases} \quad (4.7)$$

3. $f''(a) = f''(b) = 0$

4.

$$f''(x) \begin{cases} < 0 & \text{สำหรับ } x < a \\ > 0 & \text{สำหรับ } a < x < b \\ < 0 & \text{สำหรับ } x > b \end{cases} \quad (4.8)$$

5. กำหนดให้ฟังก์ชัน f' เป็นดังรูป

Fig : graph6

กราฟของฟังก์ชัน f'

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. ช่วงใดที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

2. ฟังก์ชัน f มี relative maximum ที่ใด
3. ช่วงใดที่ f concave up
4. ฟังก์ชัน f มี inflection point ที่ใด

4.3 การประยุกต์ของ Monotonicity และ Concavity

จากที่ได้ศึกษามาแล้ว ถ้า f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วงเปิด (a, b) และ x_1, x_2 เป็นจุดที่อยู่ภายในช่วงดังกล่าว แล้ว

- (1) f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ เมื่อ $x_1 < x_2$ หรือ $f'(x) > 0$ สำหรับทุกค่า x ที่อยู่ในช่วง (a, b)
- (2) f เป็นฟังก์ชันลด ถ้า $f(x_2) < f(x_1)$ เมื่อ $x_1 < x_2$ หรือ $f'(x) < 0$ สำหรับทุกค่า x ที่อยู่ในช่วง (a, b) นอกจากนี้อีกแล้ว
- (3) f มีลักษณะแบบ concave up ในช่วง (c, d) ถ้า f' เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วงดังกล่าว หรือ $f''(x) > 0$ สำหรับทุกค่า x ที่อยู่ในช่วง (c, d)

(4) f มีลักษณะแบบ concave down ในช่วง (c, d) ถ้า f' เป็นฟังก์ชันลดในช่วงดังกล่าว หรือ $f''(x) < 0$ สำหรับทุกค่า x ที่อยู่ในช่วง (c, d)

ซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาทางวิทยาศาสตร์ชีวภาพ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.16. อัตราการเจริญเติบโตของพืชขึ้นอยู่กับธาตุอาหารที่ได้รับซึ่ง Monod ได้อธิบายไว้ดังสมการ

$$f(R) = \frac{aR}{K + R}, \quad R \geq 0$$

โดยที่ $f(R)$ เป็นอัตราการเจริญเติบโต, R เป็นระดับธาตุอาหาร, a และ K เป็นค่าบวกใดๆ ขึ้นอยู่กับชนิดของพืช อยากทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตของพืชจะเพิ่มขึ้น หรือลดลงเมื่อไหร่

กำหนดให้ R เป็นระดับธาตุอาหาร $f(R)$ เป็นอัตราการเจริญเติบโต เนื่องจาก

$$f(R) = \frac{aR}{K + R}, \quad R \geq 0$$

จะได้

$$f'(R) = \frac{aK}{(K + R)^2} > 0$$

เพราะ $a > 0$, $K > 0$ ดังนั้น อัตราการเจริญเติบโตของพืชจะเพิ่มขึ้นและจะไม่มีวันลดลง

ตัวอย่าง 4.17. จากตัวอย่างที่แล้ว เราทราบว่า อัตราการเจริญเติบโตของพืชเป็นฟังก์ชันเพิ่ม อยากทราบว่าอัตราการเพิ่มของอัตราการเจริญเติบโตของพืชจะเป็นอย่างไร

เนื่องจาก $f(R) = \frac{aR}{K+R}$, $R \geq 0$ จะได้ $f'(R) = \frac{aK}{(K+R)^2} > 0$ นั่นคือ อัตราการเจริญเติบโตของพืชเป็นฟังก์ชันเพิ่ม โจทย์อยากทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตของพืชที่เพิ่มขึ้นนี้จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าไร นั่นคือการหาอนุพันธ์ของ $f'(R)$ จะได้ $f''(R) = \frac{-2aK}{(K+R)^3} < 0$ หมายความว่า อัตราการเจริญเติบโตของพืชนั้นเพิ่มขึ้น แต่อัตราการเพิ่มขึ้นนั้นจะลดลง ดังรูป 2.7

กราฟของฟังก์ชัน $f(R) = \frac{aR}{K+R}$

ตัวอย่าง 4.18. อัตราการเจริญเติบโตของประชากรสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ logistic

$$f(N) = rN(1 - \frac{N}{K})$$

เมื่อ N เป็นจำนวนประชากร, r และ K เป็นค่าบวก อยากทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตของประชากรจะเพิ่มขึ้น หรือลดลงอย่างไร

โจทย์ต้องการทราบว่า $f(N)$ จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไร นั่นคือ $f'(N) > 0$ หรือ $f'(N) < 0$ เมื่อ N อยู่ในช่วงใด เนื่องจากอนุพันธ์ใช้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงแบบค่อยเป็นค่อยไป ดังนั้น $f'(N)$ จะเปลี่ยนจากค่าลบเป็นค่าบวก ย่อมต้องผ่านค่าศูนย์ก่อน การหาค่า N^* ที่ทำให้ $f(N^*) = 0$ ย่อมเป็นหนทางหนึ่งที่สามารถใช้พิจารณาช่วงที่ทำให้ $f'(N) > 0$ และ $f'(N) < 0$ ได้ จาก $f(N) = rN(1 - \frac{N}{K})$ จะได้

$$f'(N) = r - \frac{2rN}{K}$$

ซึ่ง $f'(N) = 0$ เมื่อ $N = \frac{K}{2}$

ถ้า $N > \frac{K}{2}$ $f'(N) < 0$ และถ้า $N < \frac{K}{2}$ $f'(N) > 0$ ดังนั้น อัตราการเจริญเติบโตของประชากร

จะเพิ่มขึ้น เมื่อ $N < \frac{K}{2}$ และจะลดลง เมื่อ $N > \frac{K}{2}$ แสดงว่าประชากรยิ่งหนาแน่น อัตราการเพิ่มของประชากรก็จะยิ่งลดลง

4.3.1 แบบฝึกหัด

1. จากตัวอย่างที่ 9 จงวาดกราฟของ $f(N)$ และระบุช่วงที่ทำให้ f มีลักษณะแบบ concave up และแบบ concave down
2. ค่า pH ของสารละลายสัมพันธ์กับความเข้มข้นของไฮโดรเจนไอออน, H^+ , ดังนี้

$$pH = -\log(H^+)$$

จงพิจารณาว่าค่า pH ของสารละลายจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไร

4.4 การหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization)

การหาค่าเหมาะที่สุด คือปัญหาที่ต้องการหาค่าสูงสุด (absolute maximum) และค่าต่ำสุด (absolute minimum) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.19. ผลผลิตของพืชผักสัมพันธ์กับปริมาณไนโตรเจนดังสมการ $Y(N) = \frac{N}{1 + N^2}$ เมื่อ $Y(N)$ เป็นผลผลิตของพืชผัก และ N เป็นปริมาณไนโตรเจน ($N \geq 0$) จงหาปริมาณไนโตรเจนที่ทำให้ได้ผลผลิตของพืชผักมากที่สุด

กำหนดให้ N เป็นปริมาณไนโตรเจน $Y(N)$ เป็นผลผลิตของพืชผัก จากความสัมพันธ์

$$Y(N) = \frac{N}{1 + N^2}$$

หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการ

$$Y'(N) = \frac{(1 + N^2) - N(2N)}{(1 + N^2)^2} = \frac{1 - N^2}{(1 + N^2)^2}$$

กำหนดให้ $Y'(N) = 0$ เพื่อหา relative extrema $Y'(N) = 0$ เมื่อ $1 - N^2 = 0$ ดังนั้น $N = \pm 1$

เราจะพิจารณา N ในช่วง $N \geq 0$ ดังนั้น $N = -1$ จึงอยู่นอกโดเมน จุดที่สนใจจึงเหลือเพียง $N = 1$ โดยพิจารณาเครื่องหมายของ $Y'(N)$ เราจะได้ว่า

$$Y'(N) > 0 \text{ เมื่อ } -1 < N < 1 \quad Y'(N) < 0 \text{ เมื่อ } N > 1$$

เนื่องจาก $Y(N)$ เปลี่ยนจากฟังก์ชันเพิ่ม เป็นฟังก์ชันลด ที่ $N = 1$ ดังนั้น ที่ $N = 1$ เกิดจากจุดสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) โดย $Y(1) = \frac{1}{2}$

เนื่องจากเราสนใจ absolute maximum จึงต้องตรวจสอบจุดปลายของโดเมน ($N \geq 0$ หรือ $N \in [0, \infty)$) นั่นคือ $N = 0$ และ $N \rightarrow \infty$ ด้วย ว่าทำให้ Y มีค่ามากกว่า $Y(1) = \frac{1}{2}$ หรือไม่

$$Y(0) = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} Y(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{1 + N^2} = 0$$

ดังนั้นที่ $N = 1$ จะเกิดจุดสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) ซึ่งเป็นปริมาณไนโตรเจนที่ทำให้พืชผักมีผลผลิตมากที่สุด คือ $Y(1) = \frac{1}{2}$ (ดูกราฟ 2.8)

ตัวอย่าง 4.20. เรือบรรทุกน้ำมันของบริษัทแห่งหนึ่งอัปปางลงบริเวณอ่าวไทย ทำให้น้ำมันไหลรั่วซึมลงสู่ทะเล กระทบต่อระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ และสิ่งมีชีวิตที่อาศัยอยู่ในบริเวณดังกล่าว สมมติว่าระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ หลังเหตุการณ์เรือล่ม มีการเปลี่ยนแปลงดังสมการ

$$P(t) = 500\left[1 - \frac{4}{t+4} + \frac{16}{(t+4)^2}\right]$$

เมื่อ $P(t)$ เป็นระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ หลังเหตุการณ์เรือล่มผ่านพ้นไป t เดือน อยากทราบว่าเมื่อไหร่ออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำบริเวณดังกล่าวจะอยู่ในระดับที่ต่ำที่สุด

กำหนดให้ t เป็นเวลาหลังเหตุการณ์เรือล่ม $P(t)$ เป็นระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ บริเวณที่เกิดเหตุ

จาก $P(t) = 500\left[1 - \frac{4}{t+4} + \frac{16}{(t+4)^2}\right]$ หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการ

$$\begin{aligned} P'(t) &= \frac{2000}{(t+4)^2} - \frac{16000}{(t+4)^3} \\ &= \frac{2000(t+4) - 16000}{(t+4)^3} \\ &= \frac{2000t - 8000}{(t+4)^3} \end{aligned} \tag{4.9}$$

กำหนดให้ $P'(t) = \frac{2000t - 8000}{(t + 4)^3} = 0$ จะได้ $t = 4$ เครื่องหมายของ $P'(t) > 0$ เมื่อ $t > 4$

และ $P'(t) < 0$ เมื่อ $t < 4$ ดังนั้น $P(t)$ เปลี่ยนจากฟังก์ชันลดเป็นฟังก์ชันเพิ่มที่ $t = 4$ ดังนั้น ที่ $t = 4$ เกิดจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) โดย $P(4) = 375$

เนื่องจากเราสนใจ absolute minimum จึงต้องตรวจสอบค่า $P(t)$ ที่จุดปลายของโดเมน t ด้วย นั่นคือ $t = 0$ และ $t \rightarrow \infty$ $P(0) = 500$ และ $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = 500$ ดังนั้น ที่ $t = 4$ เกิดจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum) ระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ บริเวณดังกล่าวต่ำสุด หลังเหตุการณ์เรืออัปปางผ่านพ้นไป 4 เดือน

ตัวอย่าง 4.21. นักชีววิทยาต้องการออกแบบพื้นที่ทดลองให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เขามีรั้วยาว 1600 ฟุต เขาจะใช้รั้วนี้อย่างไร จึงจะทำให้ได้พื้นที่ทดลองที่กว้างใหญ่ที่สุด

กำหนดให้

x เป็นความกว้างของพื้นที่ทดลอง

y เป็นความยาวของพื้นที่ทดลอง

A เป็นพื้นที่ของพื้นที่ทดลอง

P เป็นความยาวรอบรูปของพื้นที่ทดลอง

เนื่องจาก $A = xy$ และ $P = 2x + 2y$ จากโจทย์ $P = 2x + 2y = 1600$ ดังนั้น $x + y = 800$ หรือ $y = 800 - x$ แทน y ลงใน $A = xy$ จะได้

$$\begin{aligned} A(x) &= x(800 - x), \quad 0 \leq x \leq 800 \\ &= 800x - x^2 \end{aligned} \tag{4.10}$$

โจทย์ต้องการหาพื้นที่ที่กว้างใหญ่ที่สุด เราจึงต้องหาค่าอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้าง

$$A'(x) = 800 - 2x$$

กำหนดให้ $A'(x) = 800 - 2x = 0$ จะได้ $x = 400$ และ $A(400) = 1600$ ตามลำดับ ทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง $A''(x) = -2 < 0$ พบว่า $x = 400$ ทำให้เกิดจุดสูงสุดสัมบูรณ์ เพราะ $A(x)$

มีลักษณะแบบ concave down ดังนั้นนักชีววิทยาควรกันรั้วเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกว้าง 400 ฟุต จึงจะได้พื้นที่ทดลองที่กว้างใหญ่ที่สุด

1. วาดภาพและกำหนดตัวแปรต่างๆ เช่น x , y เป็นต้น
2. หาสูตรหรือสมการของปริมาณที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด
3. ใช้เงื่อนไขที่โจทย์ระบุให้ในการตัดทอนตัวแปร เพื่อให้สมการในขั้นตอนที่ 2 อยู่ในรูปฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่ กับตัวแปรเพียงตัวเดียว
4. หาช่วงที่เป็นไปได้ของตัวแปร โดยให้สอดคล้องกับความหมายของโจทย์
5. ใช้เทคนิคการหาค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ ไม่ว่าจะเป็นทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง หรือทดสอบด้วย อนุพันธ์อันดับสอง
6. ตรวจสอบจุดปลายของโดเมนของตัวแปร เพื่อยืนยันการเกิดค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมบูรณ์

4.4.1 แบบฝึกหัด

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงของการสังเคราะห์แสงขึ้นกับความเข้มของแสง x , ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $R(x) = 270x - 90x^2$ จงหาความเข้มของแสง ที่ทำให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของการสังเคราะห์

แสงมากที่สุด

2. การตอบสนองต่อยาชนิดหนึ่งขึ้นกับปริมาณของยา, x , ดังสมการ $S = 1000x - x^2$ จงหาปริมาณยาที่ทำให้มีการตอบสนองต่อยาชนิดนี้มากที่สุด
3. นักวิจัยพบว่าขณะไถ ปริมาณอากาศที่ไหลผ่านทางหลอดลมสัมพันธ์กับสมการ $F = SA$ เมื่อ S คือความเร็วของอากาศ และ A คือพื้นที่ตัดขวางของหลอดลม ดังรูป 2.9 ถ้าความเร็วของอากาศมีสูตรเป็น $S = c - r$ โดย r คือรัศมีของหลอดลมขณะไถ และ c คือรัศมีของหลอดลมในสภาวะปกติ จงหารัศมีที่ทำให้ปริมาณอากาศที่ไหลผ่านทางหลอดลมมีมากที่สุด ขณะไถ
4. เกษัชกรต้องการสร้างกล่องไร้ฝาย่างง่ายเพื่อขนย้ายยา เขามีกระดาษแข็งกว้าง 16 นิ้ว ยาว 30 นิ้ว เขาตั้งใจจะตัดมุมของกระดาษแข็งทั้ง 4 ออก ตามรูป 2.10 แล้วทำการพับตามรอยปะและเชื่อมรอยต่อด้วยเทปกาว จงหาความยาว x ที่ตัดตามมุม เพื่อให้ได้กล่องที่มีปริมาตรมากที่สุด
5. คราวนี้นักชีววิทยาคนเดิม ต้องการพื้นที่ทดลองแบบสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 320 ตารางเมตร ด้านที่ขนานกันคู่หนึ่งใช้รั้วราคา 100 บาทต่อเมตร ส่วนด้านคู่ที่เหลือใช้รั้วราคา 200 บาทต่อเมตร จงหาความกว้างและความยาวของพื้นที่ทดลองแห่งนี้ เมื่อใช้งบประมาณน้อยที่สุด

การไหลเวียนของอากาศในหลอดลม

กล่องไฟฟ้าสำหรับขนย้ายยา

4.5 รูปแบบไม่กำหนด (Indeterminate form) และกฎของโลปีตาล (L'Hopital Rule)

นิยาม 4.6. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ เราจะกล่าวว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ อาจแทน $x \rightarrow a$ ด้วย $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$

ในการหาค่าลิมิตของรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\frac{0}{0}$ นั้น เราจะนำกฎของโลปีตาลมาประยุกต์ใช้

ทฤษฎี 4.5. (กฎของโลปีตาล)

1. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ จะอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ และได้ว่า
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ จะอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$ และ

ได้ว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

ตัวอย่าง 4.22. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(2\sqrt{x-1})(2x)} = \frac{1}{40}$$

กฎของโลปีตาลยังคงเป็นจริงในกรณีที่ $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$

ตัวอย่าง 4.23. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1/2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

กฎของโลปีตาลใช้กับลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ เท่านั้น หากลิมิตไม่ได้อยู่ในรูปแบบดังกล่าว เราจะต้องจัดให้อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ เสียก่อนแล้วจึงนำกฎของโลปีตาลมาใช้

4.5.1 การหาลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $0 \cdot \infty$ หรือ $\infty - \infty$

การหาลิมิตในรูปแบบไม่กำหนด $0 \cdot \infty$ หรือ $\infty - \infty$ สามารถทำได้โดยจัดให้ลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ก่อนแล้วจึงนำกฎของโลปีตาลมาใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.24. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

ตัวอย่าง 4.25. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{\left(\frac{x-1}{x}\right) + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x-1+x \ln x}$$

ซึ่งยังอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{x-1+x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{1+1+\ln x} = \frac{-1}{2}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = -\frac{1}{2}$

4.5.2 การหาขีดจำกัดที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $0^0, 1^\infty, \infty^0$

ในการหาค่าขีดจำกัดทั้ง 3 แบบนี้ เราสามารถจัดให้ขีดจำกัดอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ โดยอาศัยฟังก์ชันลอการิทึมเข้ามาช่วย แล้วจึงนำกฎของโลปีตาลมาใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.26. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

วิธีทำ ให้ $y = x^x$ ดังนั้น $\ln y = x \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \text{ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 0$$

$$\text{เพราะว่า } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \ln\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} y\right) \text{ ดังนั้น } \ln\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} y\right) = 0$$

$$\text{นั่นคือ } \lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^0 = 1$$

$$\text{หรือ } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$$

ตัวอย่าง 4.27. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)}$

วิธีทำ ให้ $y = x^{1/(x-1)}$ ดังนั้น $\ln y = \frac{\ln x}{x-1}$

และ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 1} \ln y = 1$$

เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow 1} \ln y = \ln(\lim_{x \rightarrow 1} y)$ ดังนั้น $\ln(\lim_{x \rightarrow 1} y) = 1$

$$\text{นั่นคือ } \lim_{x \rightarrow 1} y = e^1 = e$$

$$\text{หรือ } \lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)} = e$$

ตัวอย่าง 4.28. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$

วิธีทำ ให้ $y = x^{1/x}$ ดังนั้น $\ln y = \frac{\ln x}{x}$

และ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = 0$$

$$\text{เพราะว่า } \lim_{x \rightarrow \infty} \ln y = \ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} y\right) \text{ ดังนั้น } \ln\left(\lim_{x \rightarrow \infty} y\right) = 0$$

$$\text{นั่นคือ } \lim_{x \rightarrow \infty} y = e^0 = 1$$

$$\text{หรือ } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = 1$$

Chapter 5

การหาปริพันธ์ (Integrations)

5.1 ปฏิยานุพันธ์ (Antiderivatives)

จากเรื่องการหาอนุพันธ์ ถ้าวัตถุชนิดหนึ่งมีสมการการเคลื่อนที่ คือ $s = t^3$ โดยที่วัตถุนี้เคลื่อนที่ได้ระยะทาง s เมตร เมื่อเวลาผ่านไป t วินาที แล้วเราสามารถบอกได้ว่าวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $v = 3t^2$ เมตร/วินาที แต่เรารู้ว่า $v = \frac{ds}{dt}$ ดังนั้น $\frac{ds}{dt} = 3t$ ในทางกลับกันถ้าเรารู้ว่าสมการความเร็วของวัตถุชนิด

หนึ่ง ถ้า $v = 3t^2$ แสดงว่า $\frac{ds}{dt} = 3t^2$ แล้วลองนึกย้อนกลับว่าสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดนี้ คือสมการใด จะเห็นว่าสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้อาจจะอยู่ในรูป

$$s = t^3$$

$$s = t^3 - 2$$

$$\text{หรือ } s = t^3 + 5$$

ซึ่งทั้งสามสมการนี้มี $\frac{ds}{dt} = 3t^2$ แต่เรายังไม่แน่ใจว่าเป็นสมการใดกันแน่หรืออาจไม่ใช่ทั้งสามสมการนี้ก็ได้ แต่เราสามารถคาดคะเนได้ว่าสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้ควรจะอยู่ในรูป

$$s = t^3 + c$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัว สมการการเคลื่อนที่ทั้งสี่สมการดังกล่าวนี้เป็นตัวอย่างของ “ปฏิยานุพันธ์” ของ $v = 3t^2$

ในกรณีทั่วไป เราจะนิยามปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันดังต่อไปนี้

นิยาม 5.1. ฟังก์ชัน F เป็นปฏิยานุพันธ์ (antiderivative) ของฟังก์ชัน f บนช่วง I ถ้า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x ในช่วง I

ตัวอย่าง 5.1. จงแสดงว่า $F(x) = x^2 - 2x - 3$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 2x - 2$ บนช่วง $(-\infty, \infty)$

วิธีทำ จาก $F(x) = x^2 - 2x - 3$ จะได้ $F'(x) = 2x - 2$ นั่นคือ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ x ในช่วง $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่าง 5.2. ให้ $f(x) = 2x^{3/2}$ จงหาปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วง $(0, \infty)$

วิธีทำ ให้ $F_1(x) = \frac{4}{5}x^{5/2}$ จะได้ $F_1'(x) = 2x^{3/2}$ สำหรับ $x > 0$

และให้ $F_2(x) = \frac{4}{5}x^{5/2} + 2$ จะได้ $F_2'(x) = 2x^{3/2}$ สำหรับ $x > 0$

และให้ $F_3(x) = \frac{4}{5}x^{5/2} - 5$ จะได้ $F_3'(x) = 2x^{3/2}$ สำหรับ $x > 0$

ดังนั้น F_1, F_2 และ F_3 ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 2x^{3/2}$ บนช่วง $(0, \infty)$ และแต่ละค่าคงตัว C ถ้าให้ $F(x) = (4/5)x^{5/2} + C$ จะทำให้ $F'(x) = 2x^{3/2}$ สำหรับทุก $x \in (0, \infty)$

ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่าฟังก์ชัน F ใด ๆ ที่

$$F(x) = \frac{4}{5}x^{5/2} + C$$

เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 2x^{3/2}$ บนช่วง $(0, \infty)$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

จากตัวอย่างนี้ฟังก์ชัน F ที่นิยาม โดย (

eq111

) เป็นรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 2x^{3/2}$ บน $(0, \infty)$ และให้สังเกตว่าช่วง $(0, \infty)$ เป็นโดเมนของ f

ข้อสังเกต

1. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f'(x) = g'(x)$ สำหรับทุก ๆ x ในช่วง I แล้วจะมีค่าคงที่ K ที่ทำให้ $f(x) = g(x) + K$
2. ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์เฉพาะของ f บนช่วง I แล้วแต่ละปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วง สามารถถูกเขียนได้ในรูป $F(x) + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

5.1.1 แบบฝึกหัด

จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

$$2$$

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = 4x$$

$$f(x) = 3x^2$$

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = e^x$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

เฉลยแบบฝึกหัด 1.1.1 กำหนดให้ C แทนค่าคงตัวใด ๆ

2

1. C

2. $2x^2 + C$

3. $x^3 + C$

4. $\frac{x^4}{4} + c$

$$5. \frac{2x^{3/2}}{3} + C$$

$$6. e^x + C$$

$$7. -\cos x + C$$

$$8. \tan^{-1} x + C$$

5.2 ปริพันธ์จำกัดเขต (The Definite Integral)

5.2.1 Integration คืออะไร

Integration Calculus เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณหา พื้นที่และปริมาตรของรูปทรงต่างๆโดยอาศัยหลักการที่ว่า รูปทรงใดๆเกิดจากการ ประกอบกันของชิ้นส่วนเล็กๆจำนวนมากมาย (infinity) ในบทนี้เราจะศึกษา เกี่ยวกับ

- การประมาณค่าพื้นที่
- The definite integral

- ทฤษฎีเบื้องต้น และทฤษฎีพื้นฐานของแคลคูลัส

5.2.2 การประมาณค่าพื้นที่และปริพันธ์จำกัดเขต

พิจารณาฟังก์ชัน $y = f(x) \geq 0$ บนช่วงเปิด $[a, b]$ ถ้าเราต้องการประมาณค่าพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยส่วนโค้ง $y = f(x)$ แกน x และเส้นตรง $x = a$, $x = b$

การประมาณค่าพื้นที่

วิธีการหนึ่งที่ทำได้อีกคือ การหาผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มาประกอบกันคลุมพื้นที่ดังรูป ยิ่งขนาดของรูปสี่เหลี่ยม ผืนผ้าเล็กมากๆ ความถูกต้องของการประมาณค่าจะยิ่งใกล้เคียงค่าจริงยิ่งขึ้น แนวคิดเกี่ยวกับการประมาณค่าโดยอาศัยรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้เป็นวิธีการพื้นฐานที่ใช้ในการคำนวณหาพื้นที่ใต้ส่วนโค้ง การหาพื้นที่ A ที่ล้อมรอบด้วย ส่วนโค้ง $y = f(x)$ แกน x และเส้นตรง $x = a$, $x = b$ เราต้องแบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น n ช่วงเล็กๆขนาด เท่ากันคือ $\frac{b-a}{n}$ สำหรับ $I = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ลากเส้นตรงแนวดิ่งตัวส่วนโค้งและสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทางด้านขวาของ เส้นตรงแนวดิ่งนี้ จะได้ว่าความสูงของสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปที่ I คือ $f(x_i)$ และ พื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปที่ I คือ $\frac{b-a}{n} \times f(x_i)$ ดังนั้น

พ.ท.ทั้งหมดของสี่เหลี่ยมผืนผ้า n รูป คือ

$$A(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_i)$$

โดยที่ $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$

ขณะที่จำนวนของช่วงย่อยต่างๆเพิ่มขึ้น ขนาดของช่วงย่อยเหล่านี้คือ $\frac{b-a}{n}$ จะลดลง และพื้นที่ $A(n)$ จะเข้าใกล้ พื้นที่ A ที่เราต้องการคำนวณ ดังนั้นพื้นที่ A สามารถหาค่าได้จากสมการข้างล่างนี้

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_i)$$

ถ้าเรากำหนดให้ $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ นิยามของการ integrate คือ $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_a^b f(x_i)\Delta x$

โดยที่ a และ b เป็นลิมิตของการอินทิเกรต และสัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)dx$ เป็นจำนวน ไม่ใช่ฟังก์ชัน และเรียกสัญลักษณ์นี้ว่า definite integral

ตัวอย่าง 5.3. จงคำนวณหาพื้นที่ ที่ล้อมรอบด้วยส่วนโค้ง $y = x^2$ เส้นตรง $x = 0, x = 4$ และแกน x

วิธีทำ สูตรสำหรับประมาณค่าพื้นที่ คือ $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_i)$

กรณีที่ 1 : ใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 4 รูป

เรามี $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 4$, $n = 4$ และ

$x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ จะได้ว่า
พื้นที่โดยประมาณคือ

$$\begin{aligned} & [1 \times (0)^2] + [1 \times (1)^2] + [1 \times (2)^2] + [1 \times (3)^2] \\ &= [0] + [1] + [4] + [9] = 14 \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 : ใช้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 8 รูป
พื้นที่โดยประมาณคือ

$$\begin{aligned} & [1 \times (0)^2] + [0.5 \times (0.5)^2] + [0.5 \times (1)^2] + [0.5 \times (1.5)^2] + [0.5 \times (2)^2] + [0.5 \times (2.5)^2] + \\ & [0.5 \times (3)^2] = [0.5 \times (3.5)^2] \\ &= [0] + [0.125] + [0.5] + [1.125] + [2] + [3.125] + [4.5] + [6.125] = 17.5 \end{aligned}$$

การประมาณค่าพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยส่วนโค้ง $y = x^2$ เส้นตรง $x = 0, x = 4$ และแกน x

5.3 ทฤษฎีพื้นฐานของแคลคูลัส (The fundamental Theorem of Calculus)

วิชาแคลคูลัสแบ่งออกเป็น 2 สาขา คือ แคลคูลัสที่เกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ ซึ่งถือกำเนิดมาจากความต้องการที่จะหาความชันของฟังก์ชัน และแคลคูลัส ที่เกี่ยวกับการอินทิเกรต ซึ่งถือกำเนิดมาจากความต้องการที่จะหาพื้นที่ใต้กราฟ

ทฤษฎีพื้นฐานของแคลคูลัสเป็นทฤษฎีที่เป็นตัวเชื่อมระหว่าง 2 สาขาทางแคลคูลัส และใช้แสดงความเกี่ยวเนื่องของการหา antiderivative ของฟังก์ชันหนึ่งกับการคำนวณหา definite integral ของฟังก์ชันนั้น

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_a^b f(x_i)\Delta x$$

เราใช้สัญลักษณ์ $\int f(x)dx$ แทน antiderivative ของฟังก์ชัน $f(x)$ และเรียกสัญลักษณ์นี้ว่า indefinite integral

ทฤษฎี 5.1. (ทฤษฎีพื้นฐานของแคลคูลัส) ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $[a, b]$ แล้ว

$$1. \text{ ถ้า } g(x) = \int_a^x f(t) \, dt \text{ แล้ว } g'(x) = f(x)$$

$$2. \int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a) \text{ เมื่อ } F \text{ คือ antiderivative ของ } f$$

ข้อสังเกต ข้อสรุป 1. ในทฤษฎีข้างต้นสามารถเขียนในรูป

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) \, dt \right) = f(x)$$

ตัวอย่าง 5.4. จงหาอนุพันธ์ของ $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^4} \, dt$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(t) = \sqrt{1+t^4}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ดังนั้น จากทฤษฎีพื้นฐานของแคลคูลัส $\frac{d}{dx}(g(x)) = \sqrt{1+x^4}$

ตัวอย่าง 5.5. จงหา $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sin t \, dt$

วิธีทำ ให้ $U = x^2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sin t \, dt &= \frac{d}{dx} \int_0^U \sin t \, dt \\ &= \frac{d}{dU} \left(\int_0^U \sin t \, dt \right) \frac{dU}{dx} \quad (\text{โดยกฎลูกโซ่}) \\ &= \sin U \frac{dU}{dx} \quad (\text{โดยทฤษฎีพื้นฐานทางแคลคูลัส}) \\ &= \sin x^2 \cdot 2x \\ &= 2x \cdot \sin x^2 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.6. จงหา $\int_0^2 e^x dx$ โดยใช้ทฤษฎีพื้นฐานทางแคลคูลัส

วิธีทำ เนื่องจาก $F(x) = e^x$ เป็น antiderivative ของ $f(x) = e^x$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ในช่วง $[0, 2]$

$$\text{ดังนั้น } \int_0^2 e^x dx = F(2) - F(0) = e^2 - e^0 = e^2 - 1$$

5.3.1 สูตรพื้นฐานของการอินทิเกรต (Basic Integration Rules)

จากทฤษฎีพื้นฐานทางแคลคูลัส (The fundamental Theorem of Calculus) เราทราบว่า ถ้า $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ แล้ว $g'(x) = f(x)$ และจากนิยามของ antiderivative เราสรุปได้ว่า $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ เป็น antiderivative ของ $f(x)$ ซึ่งเรามักจะเขียน $\int f(x) dx$ แทน antiderivative ของ $f(x)$

นั่นคือ

จากเนื้อหาเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเราทราบว่า $\frac{d}{dx} (\ln |x| + C) = \frac{1}{x}$, เมื่อ C เป็นค่าคงที่
ดังนั้นจากคำอธิบายในข้างต้น เราสรุปได้ว่า

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถใช้ความรู้เรื่องการหาอนุพันธ์สร้างสูตรพื้นฐานของการอินทิเกรตได้ดังนี้

1. $\int C f(x) dx = C \int f(x) dx$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่

2. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

3. $\int k dx = kx + C$ เมื่อ k, C เป็นค่าคงที่

4. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ เมื่อ $n \neq -1$

$$5. \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$6. \int e^x dx = e^x + C$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad \text{เมื่อ } a \text{ เป็นจำนวนบวก และ } a \neq 1$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$10. \int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$11. \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$12. \int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$13. \int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

$$14. \int \frac{1}{x^2 + 1} \, dx = \arctan x + C$$

$$15. \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \arcsin x + C$$

ตัวอย่าง 5.7. จงหา $\int (9x^5 - 4 \csc^2 x) \, dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \int (9x^5 - 4 \csc^2 x) \, dx &= 9 \int x^5 \, dx - 4 \int \csc^2 x \, dx \quad (\text{สูตร 1 และ 2}) \\ &= \frac{9}{6}x^6 - 4(-\cot x) + C \quad (\text{สูตร 4 และ 11}) \\ &= \frac{3}{2}x^6 + 4 \cot x + C \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.8. จงหา $\int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta &= \int \left(\frac{1}{\sin \theta} \right) \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) d\theta \\ &= \int \csc \theta \cot \theta d\theta \\ &= -\csc \theta + C \quad (\text{สูตร 13})\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.9. จงหา $\int \frac{x^3 + 2\sqrt{x} - 3}{x^{\frac{3}{2}}} dx$

วิธีทำ จะเห็นว่า $\frac{x^3 + 2\sqrt{x} - 3}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}}$

$$= x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-1} - 3x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\int \frac{x^3 + 2\sqrt{x} - 3}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx + 2 \int x^{-1} dx - 3 \int x^{-\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 2 \ln |x| - \frac{3x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 2 \ln |x| - \frac{3x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2 \ln |x| + \frac{6}{\sqrt{x}} + C$$

ตัวอย่าง 5.10. จงหา $\int_0^1 \left(x^4 - \frac{2}{1+x^2} \right) dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(x^4 - \frac{2}{1+x^2} \right) dx &= \int_0^1 x^4 dx - 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 - 2 \arctan x \Big|_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{5} - 0 \right) - 2 (\arctan 1 - \arctan 0) \\ &= \frac{1}{5} - 2 \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) \\ &= \frac{1}{5} - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Chapter 6

เทคนิคของการหาปริพันธ์ (Techniques of Integration)

ในบทนี้เราจะศึกษาวิธีต่างๆ ที่สำคัญในการช่วยหาปริพันธ์ของฟังก์ชันต่างๆ เทคนิคแรก คือ การเปลี่ยนตัวแปร (the substitution rule) ซึ่งวิธีนี้มีการประยุกต์มาจากกฎลูกโซ่ เทคนิคถัดมา คือ integration by part ซึ่งประยุกต์มาจากการหาอนุพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชัน และเทคนิคสุดท้าย คือ integration by partial fraction โดยการเลือกใช้เทคนิคต่างๆ จะขึ้นอยู่กับ integrand

6.1 การหาปริพันธ์โดยการเปลี่ยนตัวแปร (Integration by Substitution)

พิจารณา indefinite integral ที่อยู่ในรูปของ

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

ถ้ากำหนดให้ $F(x)$ เป็น antiderivative ของ $f(x)$, นั่นคือ $F'(x) = f(x)$ แล้วโดยการใช้กฎลูกโซ่ เราจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x)$$

หรือ

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

และถ้ากำหนดให้ $u = g(x)$ และพิจารณาสมการที่

eqn – sub

เราจะได้ว่า

$$\int F'(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)du$$

หรือ

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

สรุปแล้วเมื่อเราทำการเปลี่ยนตัวแปร $u = g(x)$ เราจะได้ว่า $du = g'(x)dx$ ดังนั้น $\int f(g(x))g'(x)dx$ สามารถถูกเขียนให้อยู่ในรูปของ $\int f(u)du$ ซึ่งทำให้สามารถหาปริพันธ์ได้นั่นเอง

ทฤษฎี 6.1. ถ้า $u = g(x)$ แล้ว

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

ตัวอย่าง 6.1. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้ $\int x^2(x^3 + 1)^5 dx$

วิธีทำ โดยการเปลี่ยนตัวแปร $u = x^3 + 1$ เราจะได้ว่า $du = 3x^2 dx$ ดังนั้นเราสามารถเขียน integral ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\int x^2(x^3 + 1)^5 dx &= \int u^5 \frac{1}{3} du \\ &= \frac{1}{3} \int u^5 du \\ &= \frac{1}{3} \frac{u^6}{6} + C \\ &= \frac{1}{18} (x^3 + 1)^6 + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.2. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้ $\int \sqrt{2x+3} dx$

วิธีทำ โดยการเปลี่ยนตัวแปร $u = 2x + 3$ เราจะได้ว่า $du = 2dx$ ดังนั้นเราสามารถเขียน integral ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+3} dx &= \int \sqrt{u} \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int u^{1/2} du \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} + C \\ &= \frac{1}{3} (2x+3)^{3/2} + C\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.3. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้ $\int \frac{1}{x}(1 + \ln x)^2 dx$

วิธีทำ โดยการเปลี่ยนตัวแปร $u = 1 + \ln x$ เราจะได้ว่า $du = \frac{dx}{x}$ ดังนั้นเราสามารถเขียน integral ใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}(1 + \ln x)^2 dx &= \int u^2 du \\ &= \frac{u^3}{3} + C \\ &= \frac{1}{3}(1 + \ln x)^3 + C\end{aligned}$$

6.1.1 แบบฝึกหัด

จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int \sqrt{x+1} dx$

2. $\int (x^2 - 2x)\sqrt{x^3 - 3x^2 + 1} dx$

$$3. \int \sin x e^{\cos x} dx$$

$$4. \int \tan \sec^2 x dx$$

$$5. \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

6.1.2 การหาปริพันธ์โดยการแทนด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Substitutions)

เราสามารถใช่วิธีการเปลี่ยนตัวแปรเพื่อหาปริพันธ์ของฟังก์ชันในรูปแบบต่อไปนี้

$$1. \int \sin^m x \cos^n x dx$$

$$2. \int \tan^m x \sec^n x dx$$

$$3. \int \cot^m x \csc^n x dx$$

โดยในบทนี้จะยกตัวอย่างเฉพาะในกรณีแรกเท่านั้น ส่วนกรณีที่เหลือสามารถใช้หลักการเดียวกันพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.4. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้ $\int \sin^3 x \cos x dx$

วิธีทำ โดยการเปลี่ยนตัวแปร $u = \sin x$ เราจะได้ว่า $du = \cos x dx$ ดังนั้น

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$$

ในกรณีของ integral แบบแรก $\int \sin^m x \cos^n x dx$ เราจะแบ่งการพิจารณาเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้า m หรือ n อย่างน้อยหนึ่งตัวที่เป็นจำนวนบวกคี่ สมมติให้ m เป็นจำนวนบวกคี่ ดังนั้นเราสามารถที่จะเขียน $m = 2k + 1$ เราจะแยก $\sin x$ ออกจาก $\sin^{2k} x$ และจะใช้เอกลักษณ์ $\sin^2 x = (1 - \cos^2 x)$ ในการจัดรูป integral ดังนี้

$$\begin{aligned}\int \sin^m x \cos^n x dx &= \int (\sin^2 x)^k \cos^n x \sin x dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \sin x dx \\ &= - \int (1 - u^2)^k u^n du\end{aligned}$$

โดยเรากำหนดให้ $u = \cos x$ สังเกตว่า integral สุดท้ายจะง่ายต่อการหาอนุพันธ์

ตัวอย่าง 6.5. จงหาปริพันธ์ของ $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$

กรณีที่ 2 ถ้า m และ n เป็นจำนวนบวกคู่ ในกรณีนี้เราสามารถที่จะใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติต่อไปนี้ในการทำให้ integral อยู่ในรูปที่ง่ายต่อการหาค่าปริพันธ์

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

โดยพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.6. จงหาปริพันธ์ของ $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

6.2 การหาปริพันธ์โดยแยกส่วน (Integration by Parts)

ในบทนี้เราจะใช้การแปลง (transformation) ในการเปลี่ยนรูปของ integral บางประเภทให้อยู่ในรูปที่ง่ายต่อการหา โดยเริ่มต้นจากการพิจารณาอนุพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชัน ต่อไปนี้

$$\frac{d}{dx}(uv) = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$$

หรือ เขียนให้อยู่ในรูปของ

$$u(x)v'(x) = \frac{d}{dx}(u(x)v(x)) - v(x)u'(x)$$

โดยการหาปริพันธ์เทียบกับ x เราจะได้ว่า

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$$

หรือ

$$\int u dv = uv - \int v du$$

สูตรการหาปริพันธ์นี้ เรียกว่า integration by parts

ในการใช้สูตรดังกล่าว เราจำเป็นที่จะต้องแบ่ง integrand ออกเป็น 2 ส่วนด้วยกัน คือ ส่วนของ u และ dv โดยอาศัยหลักการต่อไปนี้

1. ส่วน dv ต้องเป็นส่วนที่ง่ายต่อการหาปริพันธ์
2. ในพจน์ของ $\int v du$ จะต้องง่ายต่อการหา

ตัวอย่าง 6.7. จงหาปริพันธ์ของ $\int xe^x dx$

ตัวอย่าง 6.8. จงหาปริพันธ์ของ $\int x \sin x dx$

ตัวอย่าง 6.9. จงหาปริพันธ์ของ $\int e^x \sin 2x dx$

ตัวอย่าง 6.10. จงหาปริพันธ์ของ $\int \ln x dx$

ตัวอย่าง 6.11. จงหาปริพันธ์ของ $\int x\sqrt{x+1}dx$

6.3 การหาปริพันธ์โดยเศษส่วนย่อย (Integration by Partial Fractions)

เราจะศึกษาวิธีการหาปริพันธ์ของ rational ฟังก์ชัน หรือฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของ

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

โดยที่ $P(x), Q(x)$ คือพหุนามใดๆ ซึ่งจะเรียกวิธีต่อไปนี้ว่า partial fractions หลักการอยู่ที่การแยกเศษส่วน $R(x)$ ให้อยู่ในรูปของผลรวมต่อไปนี

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = p(x) + F_1(x) + F_2(x) + \dots + F_m(x)$$

โดยที่ $p(x)$ คือ พหุนามที่ได้จากการหาร และ $F_k(x)$ จะเป็นเศษส่วนที่ง่ายต่อการหาปริพันธ์

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\frac{-1 + x^2 + x^3 + x^4}{x + x^3} &= 1 + x - \frac{x + 1}{x + x^3} \\ &= 1 + x - \frac{1}{x} + \frac{x - 1}{1 + x^2}\end{aligned}$$

หลังการแยกเศษส่วน เราสามารถที่จะหาปริพันธ์ได้ง่ายขึ้น

$$\begin{aligned}\int \frac{-1 + x^2 + x^3 + x^4}{x + x^3} dx &= \int \left(1 + x - \frac{1}{x} + \frac{x}{1 + x^2} - \frac{1}{1 + x^2} \right) dx \\ &= x + \frac{1}{2}x^2 - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) - \tan^{-1}x + C\end{aligned}$$

ในการแยกเศษส่วน $R(x)$ ในสมการ

partial – frac

ผลลัพธ์ที่ได้จะมีเศษส่วน $F_k(x)$ เพิ่มขึ้นมา โดยเศษส่วน $F_k(x)$ นี้จะอยู่ในรูปของ

$$\frac{A}{(ax + b)^n} \quad \text{หรือ} \quad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

อย่างใดอย่างหนึ่ง (ซึ่งมีการพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูง) และเราจะเรียกเศษส่วนนี้ว่า partial fraction หรือเศษส่วนย่อย ตัวอย่างในสมการ

$$\text{exa} - \text{partial} - \text{frac}$$

เศษส่วนย่อย คือ $-\frac{1}{x}$ และ $\frac{x-1}{1+x^2}$

โดยทั่วไปเราสามารถจำแนก rational function ได้เป็น 2 ประเภท

1. proper rational function ซึ่งเป็นกรณีที่ดีกรีของ $P(x)$ น้อยกว่าดีกรีของ $Q(x)$
2. improper rational function ในกรณีนี้ดีกรีของ $P(x)$ มากกว่าหรือเท่ากับดีกรีของ $Q(x)$

ในสมการ

$$\text{exa} - \text{partial} - \text{frac}$$

rational function นี้เป็นแบบ improper ดังนั้นเมื่อทำการตั้งหารยาวผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นผลบวกของพหุนาม $1 + x$ และ proper rational function $-\frac{x+1}{x+x^3}$ ดังนั้นเราสามารถที่จะสมมติให้ rational function ของเราที่จะศึกษาต่อไปในบทนี้เป็น proper และเราจะหาวิธี ในการแยก proper rational function ให้อยู่ในรูปผลรวมของเศษส่วนย่อยให้ได้ โดยเราจะเริ่มต้นจากกรณีที่ตัวประกอบของตัวหารเป็น linear factors แล้วจึงพิจารณาในกรณีที่ เป็น quadratic factors

Linear Factors สมมติให้ rational function $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ เป็น proper และถ้าทำการแยกตัวประกอบของ $Q(x)$ แล้วมีเทอม $ax + b$ ซ้ำกันทั้งหมด n เทอม (นั่นคือ $(ax + b)^n$ เป็นตัวประกอบของ $Q(x)$) แล้วการแยก $R(x)$ เพื่อให้เป็นเศษส่วนย่อยจะต้องประกอบด้วย n เทอมต่อไปนี้

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax + b)^n}$$

โดยที่ A_1, A_2, \dots, A_n เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 6.12. Distinct Linear Factors จงหา $\int \frac{1}{x(x+1)} dx$

วิธีทำ โดยการแยกหาเศษย่อย เราจะได้ว่า

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

ตัวอย่าง 6.13. Repeated Linear Factors จงหา $\int \frac{1}{x^2(x+1)} dx$

วิธีทำ โดยการแยกหาเศษย่อย เราจะได้ว่า

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

ตัวอย่าง 6.14. จงหาปริพันธ์ต่อไปนี้

1. $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

2. $\int \frac{x^2+1}{x} dx$

3. $\int \frac{1}{x(x+1)^2} dx$

4. $\int \frac{1}{x^2(x+1)^2} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

และ

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(1+x)^2}$$

Quadratic Factors ในกรณีที่ rational function $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ เป็น proper และ $(ax^2+bx+c)^n$ เป็นตัวประกอบของ $Q(x)$ แล้วการแยก $R(x)$ เพื่อให้เป็นเศษส่วนย่อยจะต้องประกอบด้วย n เทอม

ต่อไปนี้เป็น

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

6.4 ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ (Improper Integrals)

ในการนิยาม definite integral $\int_a^b f(x)dx$ เราจะสมมติให้ฟังก์ชัน $f(x)$ นี้นิยามบนช่วงปิด $[a, b]$ อย่างไรก็ตามในทางปฏิบัติเราอาจจะสนใจในกรณีต่อไปนี้

1. กรณีที่ช่วงที่ใช้ในการหาปริพันธ์นั้นไม่ใช่ช่วงปิด เช่น

$$[a, \infty), (-\infty, b] \text{ หรือ } (-\infty, \infty)$$

2. ตัว integrand $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุดใดจุดหนึ่งบนช่วงของการหาปริพันธ์

และเราจะเรียก integral ใน 2 กรณีนี้ว่า improper integral ในการหาปริพันธ์นี้เราจำเป็นที่จะต้องใช้เทคนิคพิเศษที่ช่วย โดยเราจะเริ่มต้นจากการพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.15. พิจารณา $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$

วิธีทำ ค่าของปริพันธ์นี้ควรจะเป็นพื้นที่ที่อยู่ระหว่างกราฟ $y = 1/x^2$ แกน x และเส้นตรง $x = 1$ ถ้าเราพิจารณาช่วงปิด $[1, t]$ เราจะสามารถหาค่าของ

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

ถ้าสมมติให้ $t \rightarrow \infty$ เราจะสามารถหาลิมิตของ $A(t)$ ได้ในกรณีซึ่งเท่ากับ 1 ดังนั้น เราจะนิยามให้พื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วย $y = 1/x^2$ สำหรับ $x \in [1, \infty)$ เท่ากับค่าของลิมิตดังกล่าว และ

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right) = 1$$

โดยที่ลิมิตนี้หาค่าได้

จากตัวอย่างข้างต้น ทำให้เราสามารถสร้างนิยามได้ดังต่อไปนี้

นิยาม 6.1. (Infinite Limits of Integration)

1. ถ้า $\int_a^t f(x)dx$ หาค่าได้สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $t \geq a$ แล้ว

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้

2. ถ้า $\int_t^b f(x)dx$ หาค่าได้สำหรับทุกๆ จำนวนจริง $t \leq b$ แล้ว

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x)dx$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้

ถ้าลิมิตในข้อ

improper1

และ

improper2

หาค่าได้ เราจะเรียก improper integral นี้ว่า convergent แต่ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ว่า divergent เราจะเรียก integral นี้ว่า divergent

3. ถ้า improper integrals $\int_a^\infty f(x)dx$ และ $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ convergent แล้ว

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$$

ตัวอย่าง 6.16. จงหา $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

วิธีทำ โดยการใช integration by part เราสามารถแสดงว่า

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 xe^x dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 xe^x dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (-te^t - 1 + e^t) = -1\end{aligned}$$

สำหรับกรณีที่ตัว integrand $f(x)$ ไม่ต่อเนื่อง อาจจะไม่ต่อเนื่องที่จุด c โดยที่ c อาจจะเป็นจุดภายในช่วงปิด $[a, b]$ หรืออาจจะเป็นที่ขอบของช่วงปิดก็ได้ ในกรณีเราสามารถหาค่าของ improper integral ได้ดังต่อไปนี้

นิยาม 6.2. (Infinite Integrands)

1. ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b)$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่จุด b แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้

2. ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $(a, b]$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่จุด a แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx$$

ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้

ถ้าลิมิตในข้อ

improper3

และ

improper4

หาค่าได้ เราจะเรียก improper integral นี้ว่า convergent แต่ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ว่า divergent เราจะเรียก integral นี้ว่า divergent

3. ถ้า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด c โดยที่ $a < c < b$ และ $\int_a^c f(x)dx$ และ $\int_c^b f(x)dx$ convergent แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ตัวอย่าง 6.17. จงหา $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

วิธีทำ เราสามารถใช้นิยาม

def – improper

ในการหาค่าปริพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^+} 2\sqrt{x-1} \Big|_t^5 \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^+} (4 - 2\sqrt{t-1}) = 4\end{aligned}$$

ดังนั้น improper integral นี้จะ converge เข้าสู่ค่า 4

ตัวอย่าง 6.18. จงหา $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด 0 ดังนั้นเราสามารถใช้นิยาม

def – improper

ในการหาค่าปริพันธ์ดังกล่าว

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t \frac{1}{x^2} dx + \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^1 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^t + \lim_{s \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_s^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{t} - 1 \right) + \lim_{s \rightarrow 0^+} \left(-1 + \frac{1}{s} \right)\end{aligned}$$

แต่เนื่องจากลิมิตในบรรทัดสุดท้ายนี้หาค่าไม่ได้ เราจึงสรุปว่า $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ เป็น divergent

หมายเหตุถ้าเราไม่ใช่วิธีเป็องตัน โดยเลือกที่จะคำนวณโดยตรงโดยไม่สนใจจุดที่ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง เราจะได้

ว่า

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -1 + -1 = -2$$

ซึ่งไม่ใช่ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง (เพราะว่ากราฟ $y = \frac{1}{x^2}$ อยู่เหนือแกน x ดังนั้น $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$ จะต้องมามีค่าที่เป็นบวก)

6.5 แบบฝึกหัด

ตอนที่ 1 ตอนที่ 2 จงหา improper integrals ต่อไปนี้

2

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx \text{ divergent}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)^{3/2}} dx = \sqrt{2}$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(2x+1)^2} dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = 0$$

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx = 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = 2$$

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2-1} dx \text{ divergent}$$

$$\int_0^{1/2} \frac{x}{x^2-1} dx = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$