SCMA104 Systems of Ordinary Differential Equations and Applications in Medical Science

Pairote Satiracoo

2024-08-07

Contents

หลักการและความสำคัญของแคลคูลัส และระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

แคลคูลัสมีส่วนประกอบหลักที่สำคัญอยู่ 2 องค์ประกอบ คือ

1. การหาอนุพันธ์ (differentiation) และ
2. การหาปริพันธ์ (Integration)

การประยุกต์เรื่องการหาอนุพันธ์ในการแก้ปัญหาเบื้องต้นที่สำคัญในทางชีววิทยา หรือทางการแพทย์ ประกอบด้วย การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณของตัวแปรที่เราสนใจ และการใช้แคลคูลัสในการแก้ปัญหาการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของปัญหาหรือฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เราสนใจ

ตัวอย่างการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่สนใจ เช่น ขนาดของประชากร จำนวนของผู้ติดเชื้อจากโรคทางเดินหายใจ ระดับน้ำตาลในกระแสเลือด ปริมาณของยาที่มีอยู่ในกระแสเลือกหรือส่วนหนึ่งของร่างกาย โดยที่การเปลี่ยนแปลงดังกล่าวสามารถเปรียบเทียบได้กับเวลา ดังต่อไปนี้

- ประชากรในประเทศไทยปี พ.ศ. 2566 มีจำนวน 66.05 ล้านคน (ข้อมูลอ้างอิงจาก สำนักงานคณะกรรมการส่งเสริมการลงทุน)
- ข้อมูลจำนวนผู้รักษาตัวในโรงพยาบาลจากศูนย์ข้อมูล COVID-19 ระหว่างวันที่ 28 กรกฎาคม ถึงวันที่ 3 สิงหาคม พ.ศ. 2567 (ข้อมูลอ้างอิงจาก ศูนย์ข้อมูล Covid-19)
- การเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำตาลในเลือดระหว่างมืออาหารสามมือในหนึ่งวัน (รูปภาพอ้างอิงจาก Wikipedia: Blood Sugar Level)
- การเปลี่ยนแปลงของปริมาณยาในกระแสเลือดที่เวลาต่างๆ สำหรับการให้ยาโดยวิธีต่างๆ (รูปภาพอ้างอิงจาก บทความทางวิชาการในฐานข้อมูล MDPI)

ในการทำความเข้าใจการเปลี่ยนแปลงของปริมาณข้างต้นเทียบกับเวลา เราสามารถประยุกต์ใช้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อมาใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงของปริมาณต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

Figure 1: ข้อมูลจำนวนผู้รักษาตัวในโรงพยาบาลจากศูนย์ข้อมูล COVID-19

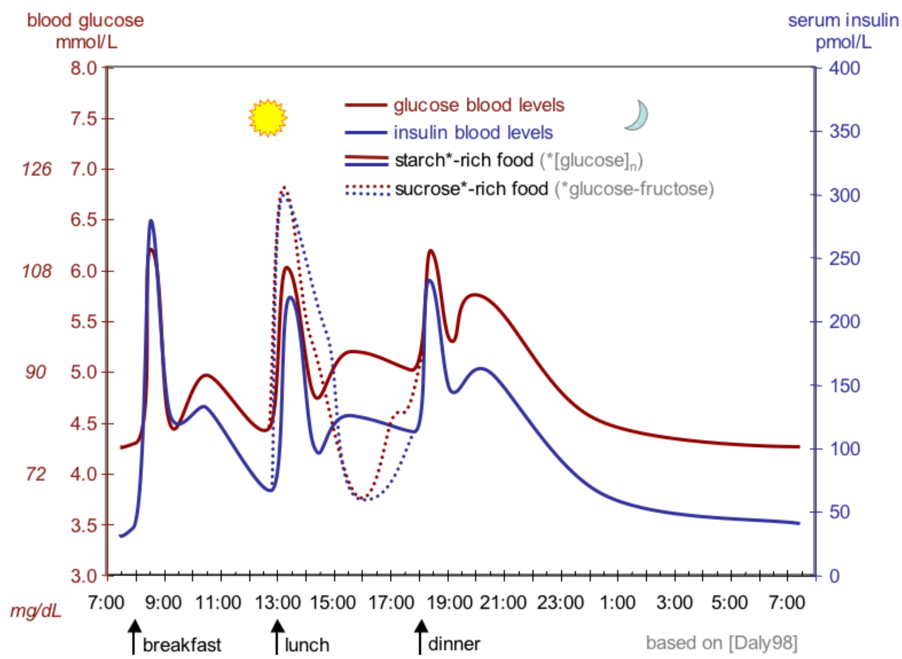

Figure 2: ความผันผวนของระดับน้ำตาลในเลือด (สีแดง) และฮอร์โมนอินซูลิน (สีน้ำเงิน) ในมนุษย์ระหว่างมื้ออาหารสามมื้อ

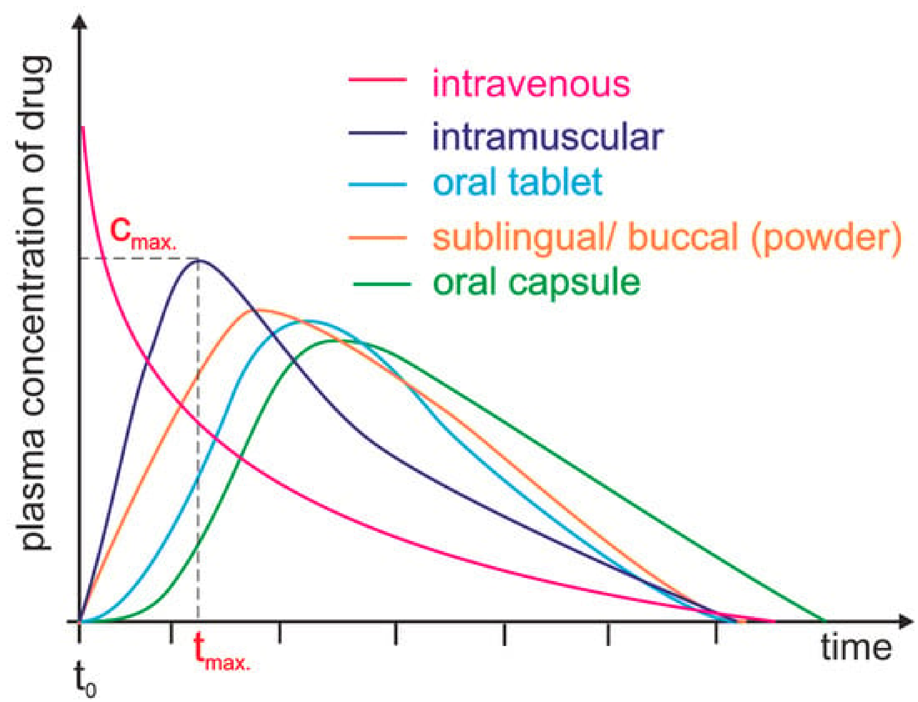

Figure 3: ความเข้มข้นของยาในกระแสเลือดที่เวลาต่างๆ

> **การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์** เป็นกระบวนการอธิบายปัญหาหรือ ปรากฏการต่างๆ ที่เกิดขึ้นในธรรมชาติ โดยปกติแล้วจะอยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้จะช่วยให้อธิบายสิ่งต่างๆ ที่เกิดขึ้นในปัญหาหรือปรากฏที่สนใจ

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงถึงแนวคิดในการประยุกต์ของแคลคูลัสที่เกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของ

ในการทดลองหนึ่ง นักวิจัยต้องการศึกษาการขยายพันธ์ของแบคทีเรียที่มีการการแบ่งตัวที่เรียกว่า binary fission (การแบ่งตัวแบบทวิภาค) ซึ่งแบคทีเรียจะมีการแบ่งจากหนึ่งเป็นสองเซลเท่าๆ กัน และได้ผลการทำลองดังต่อไปนี้

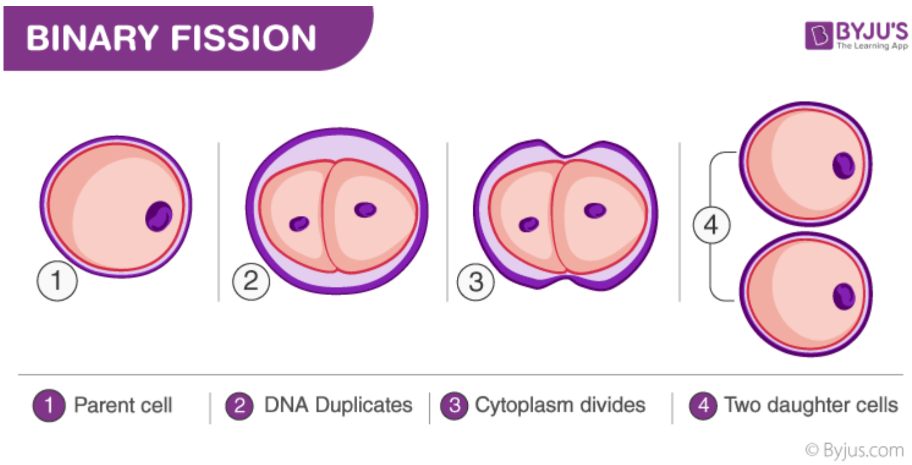

Figure 4: กระบวนการแบ่งตัวแบบทวิภาคของแบคทีเรีย

(รูปอ้างอิงจาก BYJU's Learning Website)

Table 1: จำนวนของแบคทีเรียที่เวลา t ใดๆ

เวลา (10 นาที)	0	1	2	3	4	5	6
จำนวนแบคทีเรีย	1	2	4	8	16	32	64

ตาราง @ref(tab:bacteria-table) และรูปที่ @ref(fig:population-plot) แสดงการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียที่เวลาใดๆ ในตัวอย่างนี้การเปลี่ยนแปลงของจำนวนของแบคทีเรียที่เวลา t สามารถเขียนในรูปฟังก์ชัน $N(t)$ ถ้าให้ N_0 แทนจำนวนของแบคทีเรียตอนเริ่มการทดลอง แล้วแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการเพิ่มของจำนวนแบคทีเรียจะสามารถเขียนในรูปของสมการ

$$N(t) = N_0 \cdot 2^t, \quad t = 0, 1, 2, ... (\#eq : population - growth) \tag{1}$$

ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้การเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียที่เวลา t ใดๆ เพิ่มขึ้นในลักษณะที่เรียกว่า เอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Population Growth)

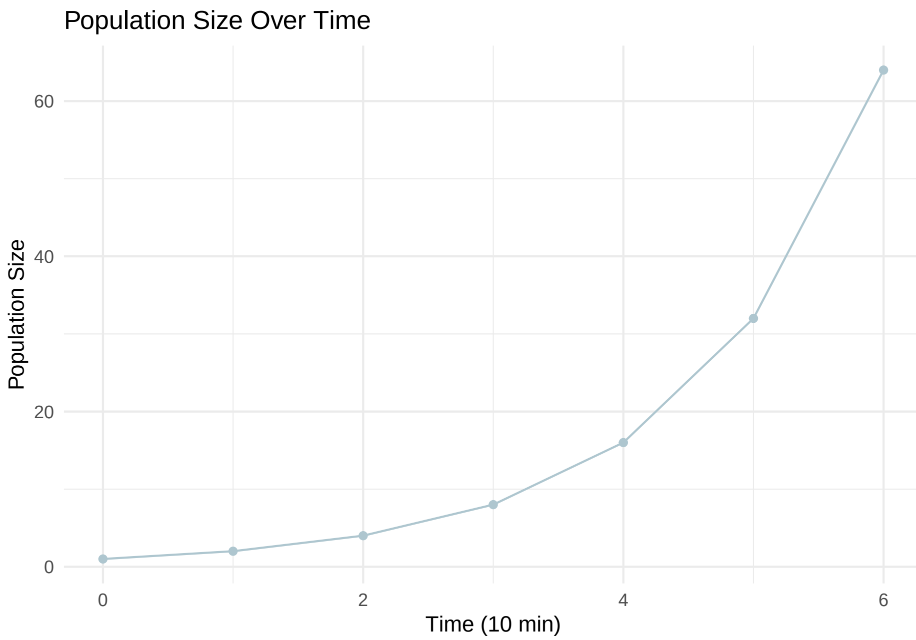

Figure 5: Population Size Over Time

ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ในตัวอย่างของการขยายพันธ์แบคทีเรีย หรือในปัญหาอื่นๆ แทนที่เราจะพยายามหาความสัมพันธ์ หรือฟังก์ชัน $N(t)$ ในรูปของเวลา t โดยตรง ถ้าเราทราบกระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร $N(t)$ นั้น เราสามารถนำมาใช้ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ได้ดังต่อนี้ กระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรีย (การเพิ่มหรือลดลงของแบคทีเรีย) ที่เกิดขึ้นในระหว่างเวลา t และเวลา $t+h$ เกิดจากจำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้น (เกิดขึ้นมาใหม่) ในช่วงเวลาดังกล่าว และลดลงจากจำนวนแบคทีเรียที่ลดลง (ตายไป) ในช่วงเวลาดังกล่าวเช่นกัน ซึ่งเราสามารถเขียนในรูปของสมการได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
N(t+h) &= N(t) && (2)\\
&\quad + \text{จำนวนแบคทีเรียที่เกิดขึ้นใหม่ระหว่าง } t \text{ และ } t+h && (3)\\
&\quad - \text{จำนวนแบคทีเรียที่ตายไประหว่าง } t \text{ และ } t+h (\#eq:population-growth-2) && (4)
\end{aligned}
$$

ในที่นี้ "**การเกิด**" เราหมายถึงการเพิ่มจำนวนของแบคทีเรียจากหนึ่งเป็นสอง และเราจะกำหนดให้ h เป็นช่วงเวลาสั้นๆ (ซึ่งเราสามารถใช้ความรู้แคลคูลัสในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation)) ในสมการ @ref(eq:population-growth-2) ถ้าเราสมมติว่า การเพิ่มของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่ในขณะนั้น หรือเขียนในรูปของสมการได้ดังนี้

$$\text{จำนวนแบคทีเรียที่เกิดใหม่ระหว่าง } t \text{ และ } t+h \approx b \cdot N \cdot h$$

จำนวนแบคทีเรียที่ตายไประหว่าง t และ $t+h \approx m \cdot N \cdot h$

โดยที่ค่าคงตัว b และ m ในสมการข้างต้น คือ อัตราการเกิด (birth rate) และอัตราการตาย (mortality rate)

เมื่อแทนจำนวนแบคทีเรียที่เกิดใหม่ และตายไประหว่างช่วงเวลาที่กำหนดลงในสมการ @ref(eq:population-growth-2) จะได้สมการ

$$N(t+h) - N(t) = b \cdot N(t) \cdot h - m \cdot N(t) \cdot h (\#eq:population-growth-3) \quad (5)$$

เรา สามารถ จัด รูป สมการ @ref(eq:population-growth-3) ได้ ใหม ใน รูป ของ**อัตรา การ เปลี่ยนแปลง เฉลี่ย**ของจำนวนแบคทีเรียในช่วงเวลาดังกล่าว ดังนี้

$$\frac{N(t+h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \quad (6)$$

$$(\#eq:population-growth-4) \quad (7)$$

ดังนั้น ถ้าเราให้ h เข้าใกล้ 0 ผ่านการหาค่าลิมิต เราจะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง (instantaneous rate of change) และเขียนได้ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ ดังนี้

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \quad (8)$$

$$(\#eq:population-growth-5) \quad (9)$$

ทั้งนี้ใน การ แก้สมการ เชิง อนุพันธ์ @ref(eq:population-growth-5) เพื่อให้ได้ คำ ตอบ ที่ แสดง จำนวน แบคทีเรีย $N(t)$ ในรูปของฟังก์ชันของ t เราจะต้องกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องกับจำนวนแบคทีเรีย $N(t)$ ที่เวลา t หนึ่ง โดยทั่วไปเราจะกำหนดค่าเริ่มต้นของจำนวนแบคทีเรียที่ $t = 0$ ดังนั้น ถ้าเรากำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition)

$$N(0) = N_0 (\#eq:population-growth-6) \quad (10)$$

เราสามารถหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นโดยวิธีการหาปริพันธ์ (Integration) ได้คำตอบของสมการดังนี้

$$N(t) = N_0 e^{(b-m)t} (\#eq:population-growth-7) \quad (11)$$

ในการทดลองเลี้ยงยีสต์ในขวดทดลองที่มีอาหารเลี้ยงยีสต์ในปริมาณที่เหมาะสม ผู้ทำการทดลองสนใจ ที่ จะ ประมาณ ค่า ของ ยีสต์ โดย อาศัย แบบ จำลอง การ เปลี่ยนแปลง ของ ประชากร ที่ อธิบาย ด้วย สมการ @ref(eq:population-growth-7) กำหนดให้

- ภายใต้สภาวะของการทดลองที่เหมาะสม ยีสต์จะแบ่งตัวทุกๆ 90 นาที
- ยีสต์มีครึ่งชีวิตเท่ากับ 1 สัปดาห์

จากข้อมูลดังกล่าว จงแสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบจากคำถามต่อไปนี้

1. จงประมาณค่าของอัตราการเกิด b (1/ชั่วโมง) และอัตราการตาย m (1/ชั่วโมง)
2. เขียน แบบ จำลอง ทาง คณิตศาสตร์ โดย ใช้ ค่า b และ m ที่ ประมาณ ค่า ได้ (สมการ @ref(eq:population-growth-7))
3. ใช้เครื่องมือที่นักศึกษามีอยู่ในการวาดกราฟแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนยีสต์ที่เวลาต่างๆ
4. เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับรูปภาพแสดงการเปลี่ยนแปลงของยีสต์จากการทดลองในห้องปฏิการตามรูปที่ @ref(fig:fig-yeast-cells) (รูปภาพอ้างอิงจาก https://homework.study.com/)

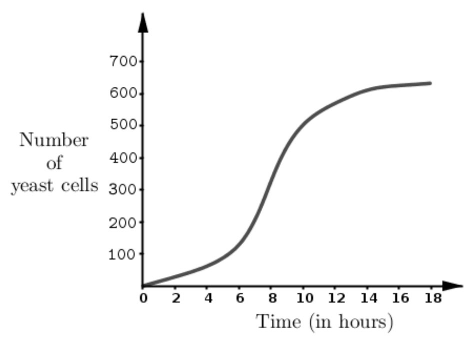

Figure 6: กราฟการเจริญเติบโตของเซลล์ยีสต์

จงใช้อินเทอร์เน็ตเพื่อค้นหาตัวอย่างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายโดยสมการเชิงอนุพันธ์หรือระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ข้อมูลที่ต้องการประกอบด้วย

1. ค้นหาหน้าเว็บที่ให้ข้อมูลเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในปัญหาที่นักศึกษาสนใจ
2. จดบันทึก URL ของหน้าเว็บ
3. เขียนสรุปสั้นๆ ว่าโมเดลนี้ใช้เพื่ออะไร

โดยสรุป แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์เป็นเครื่องมือสำคัญในการทำความเข้าใจว่าสิ่งต่างๆ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไรและ แคลคูลัสช่วยให้เราวิเคราะห์อัตราการเปลี่ยนแปลงและพื้นที่ใต้เส้นโค้ง ในขณะที่สมการเชิงอนุพันธ์ช่วยให้เราสร้างแบบจำลองระบบที่ซับซ้อนในสาขาต่างๆ เช่น ฟิสิกส์ วิศวกรรม เศรษฐศาสตร์และชีววิทยา แนวคิดทางคณิตศาสตร์เหล่านี้มีความสำคัญต่อการแก้ปัญหาในโลกแห่งความเป็นจริง เมื่อโลกของเราก้าวหน้ามากขึ้น ความสำคัญของแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ก็จะเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง ซึ่งสนับสนุนความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

The pool of tears

Custom block for latex

My nice heading

This is another **tcolorbox**.

Here, you see the lower part of the box.

This is a **tcolorbox**. This is a **tcolorbox**. This is a **tcolorbox**. This is a **tcolorbox**. This is a **tcolorbox**. This is a **tcolorbox**. This is a **tcolorbox**. This is a **tcolorbox**.

custom block for html

ทฤษฎีบท

An example of an admonition with a title.

A caucus-race and a long tale

My nice heading

This is another **tcolorbox**.

Here, you see the lower part of the box.