

SCMA104 Systems of Ordinary Differential Equations and Applications in Medical Science

Pairote Satiracoo

2024-08-21

Contents

1	หลักการและความสำคัญของแคลคูลัสและระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ	1
2	ลิมิต (Limits)	17
2.1	ความต่อเนื่อง (Continuity)	42
3	อนุพันธ์ (Derivatives)	55
3.1	อนุพันธ์ (Derivatives)	55
3.2	การคำนวณหาอนุพันธ์	59
3.3	สูตรสำหรับหาอนุพันธ์	64
3.4	อนุพันธ์อันดับสูง (High Order Derivatives)	69

3.5	การตีความอนุพันธ์ (Interpretation of Derivatives)	71
3.6	กฎลูกโซ่ (The Chain Rule)	81
3.7	อนุพันธ์ของฟังก์ชันอินเวอร์ส (Derivatives of Inverse Functions)	91
3.8	Differentials, Implicit Differentiation and Related Rates	97
3.9	อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	126
4	การประยุกต์ของอนุพันธ์ (Applications of Differentiation)	143
4.1	Applications of derivatives related to students discipline	144
4.2	Sketching the graph of a function from the derivative	151
4.3	การประยุกต์ของ Monotonicity และ Concavity	174
4.4	การหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization)	179

Chapter 1

หลักการและความสำคัญของแคลคูลัส และระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

แคลคูลัสมีส่วนประกอบหลักที่สำคัญอยู่ 2 องค์ประกอบ คือ

1. การหาอนุพันธ์ (differentiation) และ
2. การหาปริพันธ์ (Integration)

การประยุกต์ เรื่อง การหาอนุพันธ์ ในการ แก้ปัญหาเบื้องต้นที่สำคัญในทางชีววิทยา หรือทางการแพทย์ ประกอบด้วย การหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณของตัวแปรที่เราสนใจ และการใช้แคลคูลัสในการแก้ ปัญหาการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของปัญหาหรือฟังก์ชันที่แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เราสนใจ

ตัวอย่างการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่สนใจ เช่น ขนาดของประชากร จำนวนของผู้ติดเชื้อจากโรคทางเดินหายใจ ระดับน้ำตาลในกระแสเลือด ปริมาณของยาที่มีอยู่ในกระแสเลือดหรือส่วนหนึ่งของร่างกาย โดยที่การเปลี่ยนแปลงดังกล่าวสามารถเปรียบเทียบได้กับเวลา ดังต่อไปนี้

- ประชากรในประเทศไทยปี พ.ศ. 2566 มีจำนวน 66.05 ล้านคน (ข้อมูลอ้างอิงจาก สำนักงานคณะกรรมการส่งเสริมการลงทุน)
- ข้อมูลจำนวนผู้รักษาตัวในโรงพยาบาลจากศูนย์ข้อมูล COVID-19 ระหว่างวันที่ 28 กรกฎาคม ถึงวันที่ 3 สิงหาคม พ.ศ. 2567 (ข้อมูลอ้างอิงจาก ศูนย์ข้อมูล Covid-19)
- การเปลี่ยนแปลงของระดับน้ำตาลในเลือดระหว่างมื้ออาหารสามมื้อในหนึ่งวัน (รูปภาพอ้างอิงจาก Wikipedia: Blood Sugar Level)
- การเปลี่ยนแปลงของปริมาณยาในกระแสเลือดที่เวลาต่างๆ สำหรับการให้ยาโดยวิธีต่างๆ (รูปภาพอ้างอิงจาก บทความทางวิชาการในฐานข้อมูล MDPI)



สถานการณ์ COVID-19 ในประเทศไทย

28 กรกฎาคม - 3 สิงหาคม 2567

จำนวนผู้ป่วยรักษาตัวในโรงพยาบาล (รายสัปดาห์)

+560

เฉลี่ยรายวัน จำนวน 80 ราย/วัน

จำนวนผู้เสียชีวิต (รายสัปดาห์)

+1

เฉลี่ยรายวัน จำนวน 1 ราย/วัน

ป่วยสะสม ตั้งแต่ 1 มกราคม 2567

36,141

ตั้งแต่ 1 มกราคม 2567 เสียชีวิตสะสม

194

f ศูนย์ข้อมูล COVID-19

สรุปสถานการณ์ ศูนย์ข้อมูล COVID-19

Figure 1.1: ข้อมูลจำนวนผู้รักษาตัวในโรงพยาบาลจากศูนย์ข้อมูล COVID-19

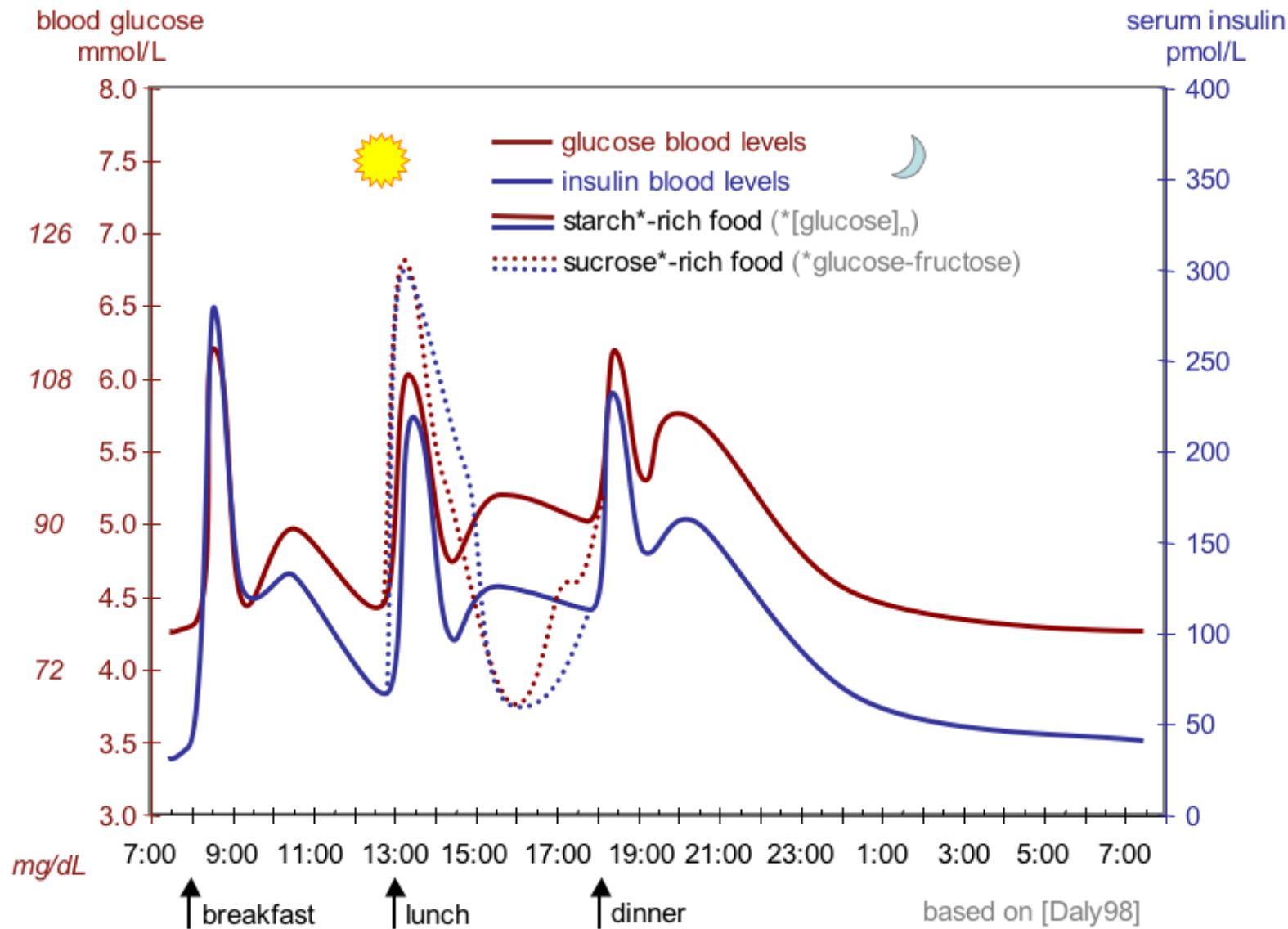


Figure 1.2: ความผันผวนของระดับน้ำตาลในเลือด (สีแดง) และฮอร์โมนอินซูลิน (สีน้ำเงิน) ในมนุษย์ ระหว่างมื้ออาหารสามมื้อ

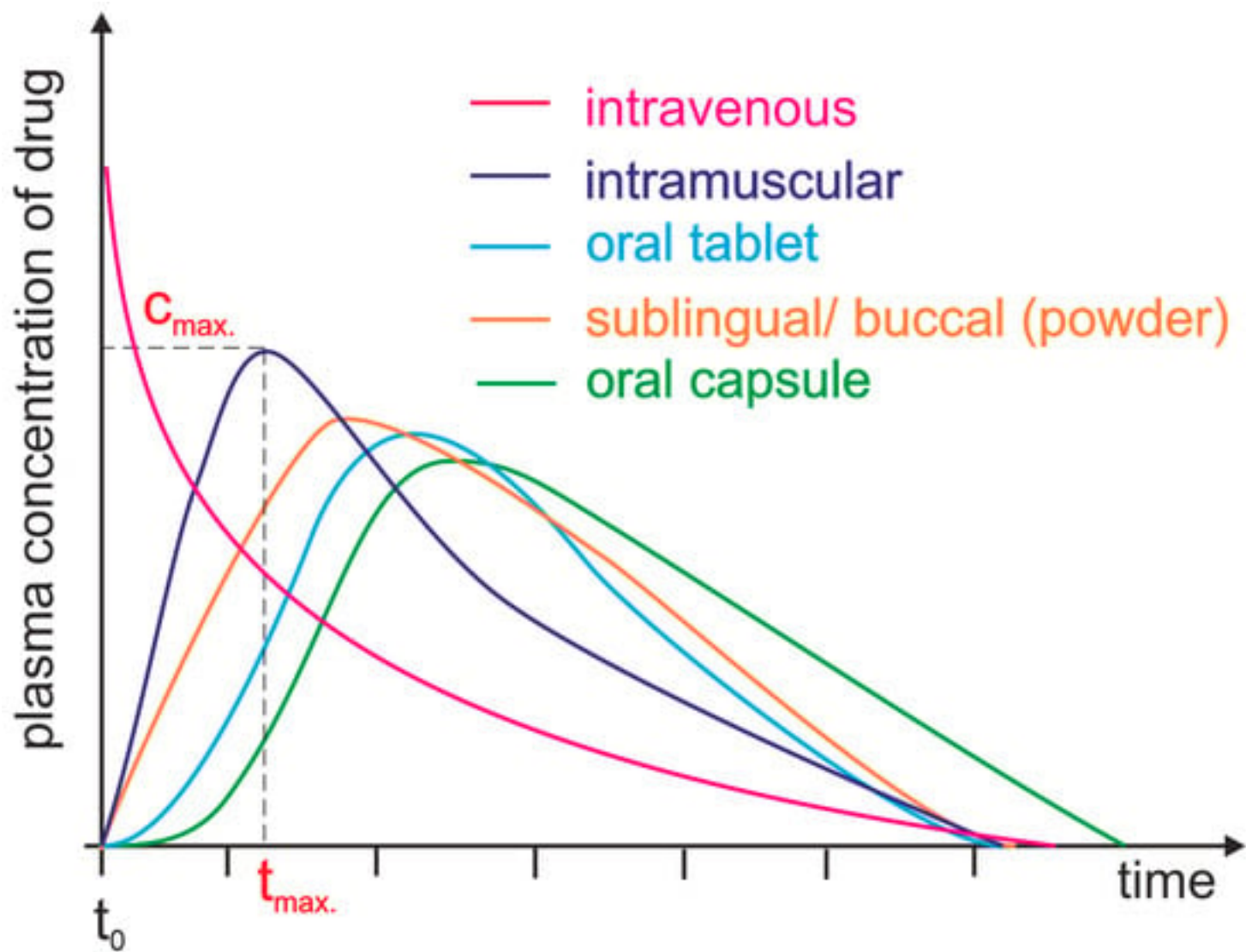


Figure 1.3: ความเข้มข้นของยาในกระแสเลือดที่เวลาต่างๆ

ในการทำความเข้าใจการเปลี่ยนแปลงของปริมาณข้างต้นเทียบกับเวลา เราสามารถประยุกต์ใช้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อมาใช้อธิบายการเปลี่ยนแปลงของปริมาณต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการอธิบายปัญหาหรือ ปรากฏการณ์ต่างๆ ที่เกิดขึ้นในธรรมชาติ โดยปกติแล้วจะอยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้จะช่วยให้อธิบายสิ่งต่างๆ ที่เกิดขึ้นในปัญหาหรือปรากฏการณ์ที่สนใจ

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงถึงแนวคิดในการประยุกต์ของแคลคูลัสที่เกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของ

Table 1.1: จำนวนของแบคทีเรียที่เวลา t ใดๆ

เวลา (10 นาที)	0	1	2	3	4	5	6
จำนวนแบคทีเรีย	1	2	4	8	16	32	64

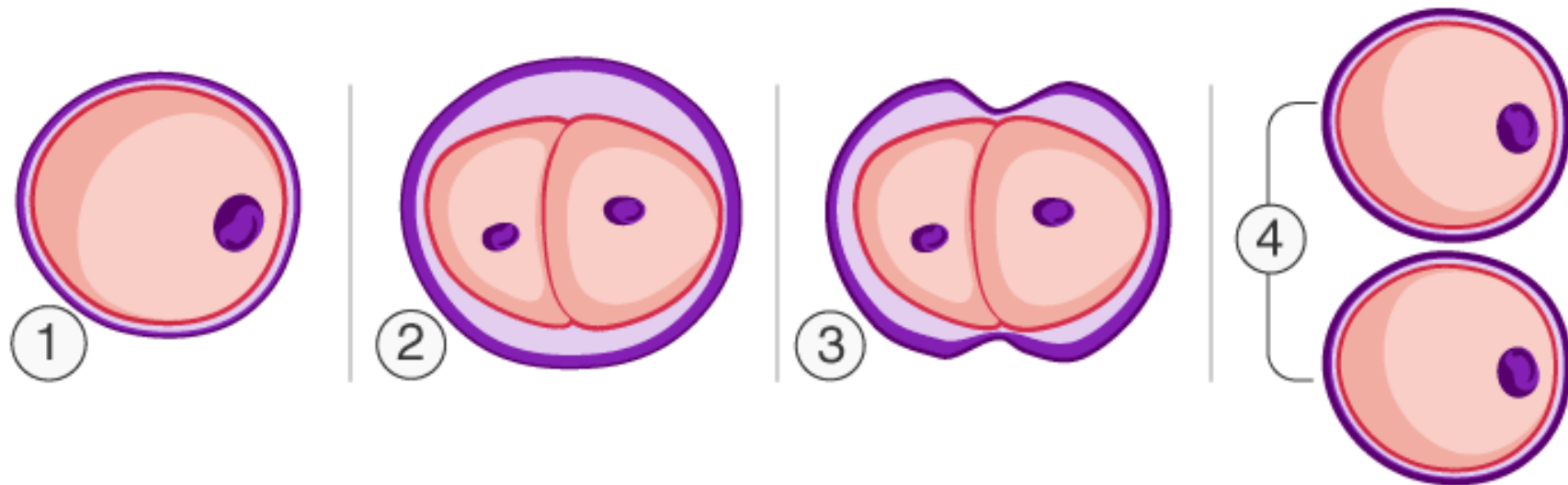
ตัวอย่าง 1.1. ในการทดลองหนึ่ง นักวิจัยต้องการศึกษาการขยายพันธุ์ของแบคทีเรียที่มีการการแบ่งตัวที่เรียกว่า binary fission (การแบ่งตัวแบบทวิภาค) ซึ่งแบคทีเรียจะมีการแบ่งจากหนึ่งเป็นสองเซลล์เท่าๆ กัน และได้ผลการทดลองดังต่อไปนี้

(รูปอ้างอิงจาก BYJU's Learning Website)

ตาราง 1.1 และรูปที่ 1.5 แสดงการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียที่เวลาใดๆ ในตัวอย่างนี้การเปลี่ยนแปลงของจำนวนของแบคทีเรียที่เวลา t สามารถเขียนในรูปฟังก์ชัน $N(t)$ ถ้าให้ N_0 แทนจำนวนของแบคทีเรียตอนเริ่มการทดลอง แล้วแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการเพิ่มของจำนวนแบคทีเรียจะสามารถเขียนในรูปของสมการ

$$N(t) = N_0 \cdot 2^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

BINARY FISSION



- 1 Parent cell | 2 DNA Duplicates | 3 Cytoplasm divides | 4 Two daughter cells

© Byjus.com

Figure 1.4: กระบวนการแบ่งตัวแบบทวิภาคของแบคทีเรีย

ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้การเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรียที่เวลา t ใดๆ เพิ่มขึ้นในลักษณะที่เรียกว่า เอกซ์โพเนนเชียล (Exponential Population Growth)

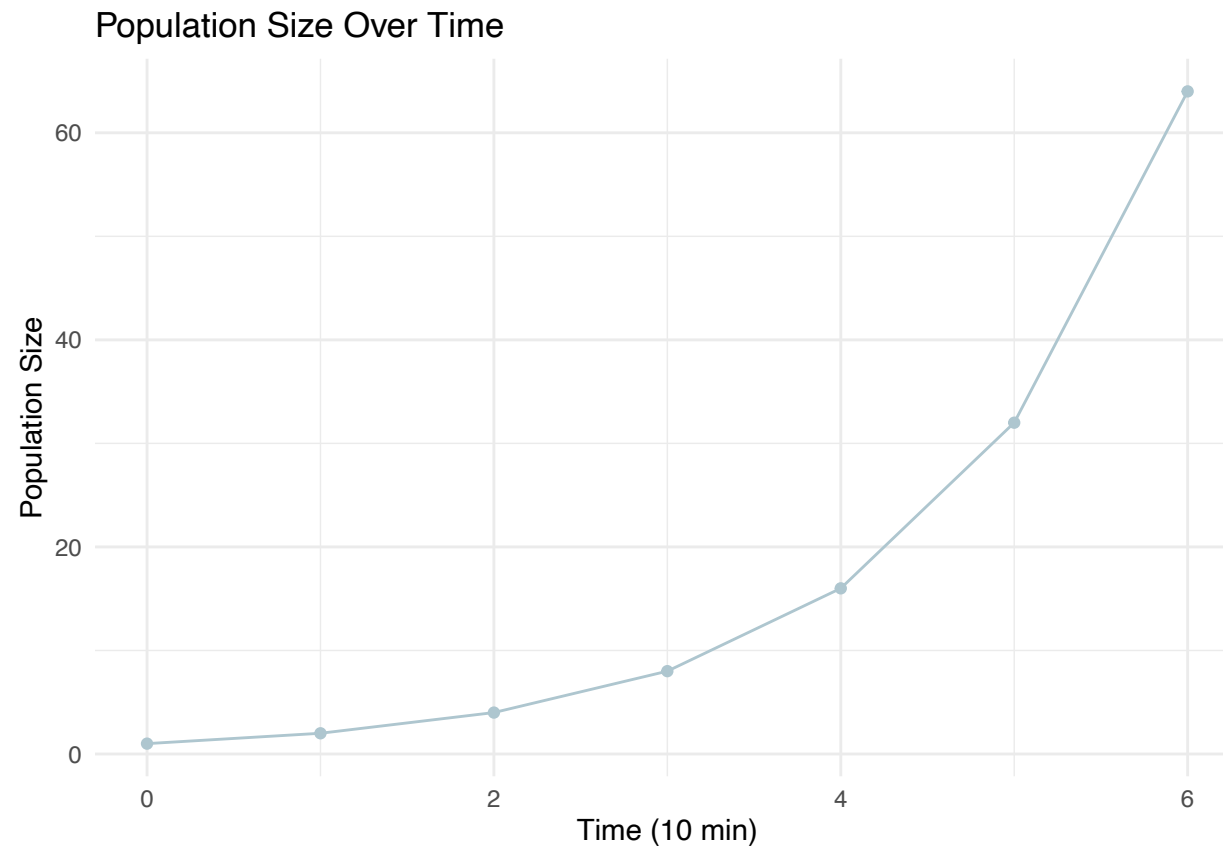


Figure 1.5: Population Size Over Time

ตัวอย่าง 1.2. ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ในตัวอย่างของการขยายพันธุ์แบคทีเรีย หรือในปัญหาอื่นๆ แทนที่เราจะพยายามหาความสัมพันธ์ หรือฟังก์ชัน $N(t)$ ในรูปของเวลา t โดยตรง ถ้าเราทราบกระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปร $N(t)$ นั้น เราสามารถนำมาใช้ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ได้ดังต่อไปนี้ กระบวนการที่เกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลงของจำนวนแบคทีเรีย (การเพิ่มหรือลดลงของแบคทีเรีย) ที่เกิดขึ้นในระหว่างเวลา t และเวลา $t + h$ เกิดจากจำนวนแบคทีเรียที่เพิ่มขึ้น (เกิดขึ้นมาใหม่) ในช่วงเวลาดังกล่าว และลดลงจากจำนวนแบคทีเรียที่ลดลง (ตายไป) ในช่วงเวลาดังกล่าวเช่นกัน ซึ่งเราสามารถเขียนในรูปของสมการได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} N(t + h) &= N(t) \\ &+ \text{จำนวนแบคทีเรียที่เกิดขึ้นใหม่ระหว่าง } t \text{ และ } t + h \\ &- \text{จำนวนแบคทีเรียที่ตายไประหว่าง } t \text{ และ } t + h \end{aligned} \quad (1.2)$$

ในที่นี้ “การเกิด” เราหมายถึงการเพิ่มจำนวนของแบคทีเรียจากหนึ่งเป็นสอง และเราจะกำหนดให้ h เป็นช่วงเวลาสั้นๆ (ซึ่งเราสามารถใช้ความรู้แคลคูลัสในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation)) ในสมการ (1.2) ถ้าเราสมมติว่า การเพิ่มของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่ในขณะนั้น หรือเขียนในรูปของสมการได้ดังนี้

จำนวนแบคทีเรียที่เกิดขึ้นใหม่ระหว่าง t และ $t + h \approx b \cdot N \cdot h$

จำนวนแบคทีเรียที่ตายไประหว่าง t และ $t + h \approx m \cdot N \cdot h$

โดยที่ค่าคงตัว b และ m ในสมการข้างต้น คือ อัตราการเกิด (birth rate) และอัตราการตาย (mortality rate)

เมื่อแทนจำนวนแบคทีเรียที่เกิดขึ้นใหม่ และตายไประหว่างช่วงเวลาที่กำหนดลงในสมการ (1.2) จะได้สมการ

$$N(t + h) - N(t) = b \cdot N(t) \cdot h - m \cdot N(t) \cdot h \quad (1.3)$$

เราสามารถจัดรูปสมการ (1.3) ได้ใหม่ในรูปของอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของจำนวนแบคทีเรียในช่วงเวลาดังกล่าว ดังนี้

$$\frac{N(t + h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \quad (1.4)$$

$$(1.5)$$

ดังนั้น ถ้าเราให้ h เข้าใกล้ 0 ผ่านการหาลิมิต เราจะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง (instantaneous rate of change) และเขียนได้ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ ดังนี้

$$\frac{dN}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \quad (1.6)$$

$$(1.7)$$

ทั้งนี้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ (1.7) เพื่อให้ได้คำตอบที่แสดงจำนวนแบคทีเรีย $N(t)$ ในรูปของฟังก์ชันของ t เราจะต้องกำหนดเงื่อนไขเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องกับจำนวนแบคทีเรีย $N(t)$ ที่เวลา t หนึ่ง โดยทั่วไปเราจะกำหนดค่าเริ่มต้นของจำนวนแบคทีเรียที่ $t = 0$ ดังนั้น ถ้าเรากำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition)

$$N(0) = N_0 \quad (1.8)$$

เราสามารถหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นโดยวิธีการหาปริพันธ์ (Integration) ได้คำตอบของสมการดังนี้

$$N(t) = N_0 e^{(b-m)t} \quad (1.9)$$

ตัวอย่าง 1.3. ในการทดลองเลี้ยงยีสต์ในขวดทดลองที่มีอาหารเลี้ยงยีสต์ในปริมาณที่เหมาะสม ผู้ทำการทดลองสนใจที่จะประมาณค่าของยีสต์โดยอาศัยแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงของประชากรที่อธิบายด้วยสมการ (1.9) กำหนดให้

- ภายใต้สภาวะของการทดลองที่เหมาะสม ยีสต์จะแบ่งตัวทุกๆ 90 นาที
- ยีสต์มีครึ่งชีวิตเท่ากับ 1 สัปดาห์

จากข้อมูลดังกล่าว จงแสดงวิธีทำเพื่อหาคำตอบจากคำถามต่อไปนี้

1. จงประมาณค่าของอัตราการเกิด b (1/ชั่วโมง) และอัตราการตาย m (1/ชั่วโมง)
2. เขียนแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้ค่า b และ m ที่ประมาณค่าได้ (สมการ (1.9))
3. ใช้เครื่องมือที่นักศึกษามีอยู่ในการวาดกราฟแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนยีสต์ที่เวลาต่างๆ
4. เปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับรูปภาพแสดงการเปลี่ยนแปลงของยีสต์จากการทดลองในห้องปฏิบัติการ ตามรูปที่ 1.6 (รูปภาพอ้างอิงจาก <https://homework.study.com/>)

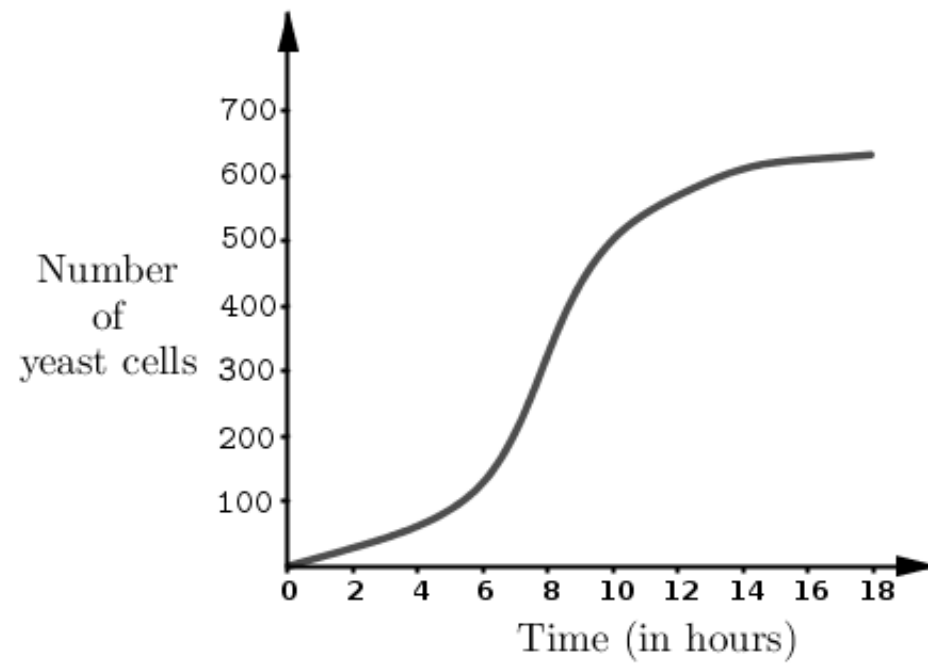


Figure 1.6: กราฟการเจริญเติบโตของเซลล์ยีสต์

ตัวอย่าง 1.4. จงใช้อินเทอร์เน็ตเพื่อ ค้นหาตัวอย่าง แบบจำลองทาง คณิตศาสตร์ที่ อธิบายโดย สมการเชิงอนุพันธ์หรือระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ข้อมูลที่ต้องการประกอบด้วย

1. ค้นหาเว็บไซต์ที่ให้ข้อมูลเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในปัญหาที่นักศึกษาสนใจ
2. จดบันทึก URL ของเว็บไซต์
3. เขียนสรุปสั้นๆ ว่าโมเดลนี้ใช้เพื่ออะไร

โดยสรุป แคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์เป็นเครื่องมือสำคัญในการทำทำความเข้าใจว่าสิ่งต่างๆ เปลี่ยนแปลงไปอย่างไรและ แคลคูลัสช่วยให้เราวิเคราะห์อัตราการเปลี่ยนแปลงและพื้นที่ใต้เส้นโค้ง ในขณะที่สมการเชิงอนุพันธ์ช่วยให้เราสร้างแบบจำลองระบบที่ซับซ้อนในสาขาต่างๆ เช่น ฟิสิกส์ วิศวกรรม เศรษฐศาสตร์ และชีววิทยา แนวคิดทางคณิตศาสตร์เหล่านี้มีความสำคัญต่อการแก้ปัญหาในโลกแห่งความเป็นจริง เมื่อโลกของเราก้าวหน้ามากขึ้น ความสำคัญของแคลคูลัสและสมการเชิงอนุพันธ์ก็จะเพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง ซึ่งสนับสนุนความก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี