SCMA104 Systems of Ordinary Differential Equations and Applications in Medical Science

Pairote Satiracoo

2024-08-21

Contents

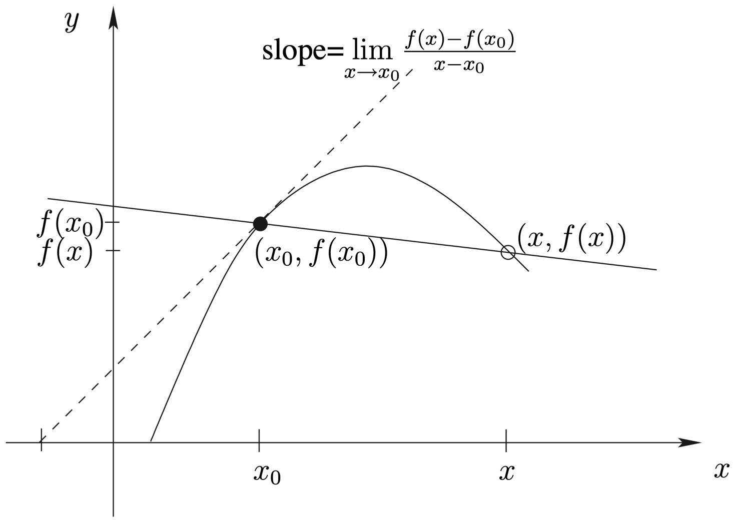
Chapter 3

อนุพันธ์ (Derivatives)

3.1 อนุพันธ์ (Derivatives)

จากตัวอย่าง 2.1 ในบทที่ 2 และเนื้อหาในเรื่อง limits เราจะเห็นว่า ความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ณ จุด $(x_0, f(x_0))$ บนกราฟ ก็คือ $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ นั่นเอง (ถ้า limit หาค่าได้)

ปริมาณนี้มีความสำคัญ เพราะนำไปประยุกต์ใช้ได้มากมาย เราจึงกำหนดสัญลักษณ์และมีชื่อเรียกดังต่อไปนี้

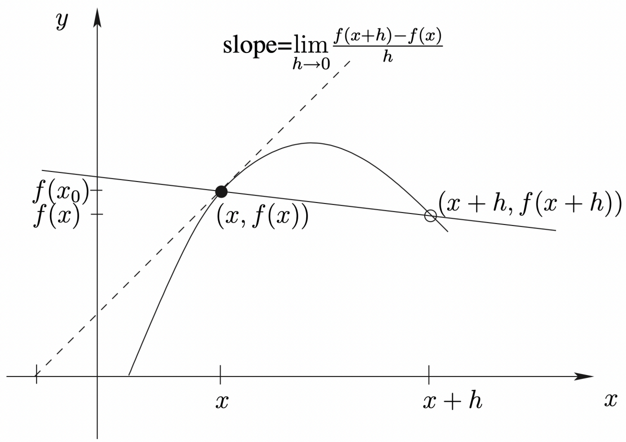


นิยาม 3.1. ถ้า $f : D_f \to \mathbb{R}$ โดยที่ $D_f \subseteq \mathbb{R}$ และถ้า $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ หาค่าได้แล้ว เรียกค่าของ limit นี้ว่า "อนุพันธ์ (derivative) ของ f ที่ x_0" และแทนด้วยสัญลักษณ์ $f'(x_0)$

เนื่องจากแต่ละ function g และแต่ละ x_0 จะมี $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ ได้ค่าเดียว ดังนั้น f' จึงเป็น function เรียกว่า "อนุพันธ์ (derivative)" ของ f

ในการเขียนนิยามของ $f'(x)$ เพื่อใช้เป็นสูตรทั่วไปสำหรับ function f' เราเปลี่ยนตัวแปรเสียใหม่ ดัง

แสดงในรูป



จะได้ว่า

ตัวอย่าง 3.1. จงหาสมการของเส้นสัมผัสกราฟ $y = -x^2 + 6x - 2$ ณ จุด $P_0(2, 6)$

วิธีทำ ให้ $f(x) = -x^2 + 6x - 2$ จะได้ค่าความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด $(x, f(x))$ คือ $f'(x)$ ซึ่งเท่ากับ

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \\ \\ &= \\ \\ &= \\ \\ &= \end{aligned} \tag{3.1}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด $(2, 6)$ คือ $f'(2) = -2 \cdot 2 + 6 = 2$ เส้นสัมผัสจึงมีสมการเป็น $y - 6 = 2(x - 2)$

อัตราส่วน $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ คือ อัตราส่วนของค่า function ที่เปลี่ยนไป (จาก $f(x_0)$ กลายเป็น $f(x)$) ต่อค่าตัวแปรต้นที่เปลี่ยนไป (จาก x_0 กลายเป็น x) เรียกคำนี้ว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย (average rate of change) ของ $f(x)$ เทียบกับ x” คำว่าเฉลี่ยน แสดงถึงการคิดการเปลี่ยนแปลงบน ‘ช่วง’

แต่ $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ เป็นการหา”แนวโน้ม” ของอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย เมื่อ x กับ x_0 อยู่ใกล้กันมากๆ จนแทบจะเป็นจุดเดียวกัน เราจึงเรียกค่านี้ว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง (instantaneous rate of change) ของ $f(x)$ เทียบกับ x”

สัญลักษณ์อื่นๆ สำหรับ derivatives ได้แก่

ถ้า $f'(x_0)$ หาค่าได้ เรากล่าวว่า function f “หาอนุพันธ์ได้ (differentiable) ที่ x_0” ถ้า $f'(x_0)$ หาค่าได้สำหรับทุกๆ x ในเซต S เรากล่าวว่า function f”หาอนุพันธ์บน S (differentiable on S)” ถ้า $f'(x_0)$ หาค่าได้สำหรับทุกๆ จำนวนจริง x เรากล่าวว่า function f “หาอนุพันธ์ได้ (differentiable)”

3.2 การคำนวณหาอนุพันธ์

ตัวอย่าง 3.2. จงหา derivative ต่อไปนี้

(1) $f'(x)$ เมื่อ $f(x) = x^2$

(2) $f'(2)$ เมื่อ $f(x) = \sqrt{x}$

(3) $\frac{ds(t)}{dt}\big|_{t=t_0}$ เมื่อ $s(t) = \frac{1}{t}$

วิธีทำ ใช้นิยามข้างต้นหา derivative ได้ดังนี้

(1) เมื่อ $f(x) = x^2$ จะได้

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \\
&= \\
&= \qquad (3.2) \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
$$

(2) เมื่อ $f(x) = \sqrt{x}$ จะได้

$$
\begin{aligned}
f'(2) &= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

(3) เมื่อ $s(x) = \frac{1}{t}$ จะได้

$$
\begin{aligned}
s'(t)|_{t=t_0} &= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

ตัวอย่าง 3.3. จงหาเซต S ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ function $f(x)=\sqrt{x}$ หาอนุพันธ์ได้บน S

วิธีทำ พิจารณาจำนวนจริง x ที่ทำให้ $f'(x)$ หาค่าได้ เนื่องจาก

$$f'(x) = \qquad\qquad\qquad)$$

ในกรณีที่ $x \leq 0$ จะได้ว่า $f(x)$ ไม่นิยาม จึงหาอนุพันธ์ที่ x ไม่ได้ และในกรณีที่ $x=0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} &= \\ &= \end{aligned} \tag{3.5}$$

ซึ่งหาค่าไม่ได้ ดังนั้นจึงได้ว่า เซตที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ function $f(x)=\sqrt{x}$ หาอนุพันธ์ได้บน S คือ ช่วงเปิด $(0,\infty)$

3.3 สูตรสำหรับหาอนุพันธ์

ทฤษฎี 3.1. *ถ้า c เป็นจำนวนจริง (real number) และ n เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว function $f(x)=c$ เป็น function ที่ differentiable และ function $g(x)=x^n$ เป็น function ที่ differentiable บนช่วง*

เปิดในโดเมนของมัน และ

1. $\frac{dc}{dx} = 0$
2. $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

ทฤษฎี 3.2. *ถ้า f และ g เป็น function ซึ่ง differentiable ที่ x_0 และ c เป็นค่าคงที่จริง แล้ว*

1. $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
3. $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
4. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
5. $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

ตัวอย่าง 3.4. จงหา derivative ของแต่ละ function ต่อไปนี้ เทียบกับตัวแปรต้นของมัน

(1) $f(x) = 5x^4$

(2) $f(x) = 6x^{11} + 9$

(3) $s(t) = 3t^8 - 2t^5 + 6t + 1$

(4) $g(x) = \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2x}\right)\left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$

(5) $h(x) = \frac{x^2-1}{x^4+1}$

วิธีทำ ใช้สูตรในทฤษฎีบทข้างต้นหา derivative ได้ดังนี้

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \\ f'(x) &= \\ &= \end{aligned} \tag{3.6}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \\
f'(x) &= \\
&= \\
&=
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \\
s'(t) &= \\
&=
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \\
g'(x) &= \\
&=
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \\
h'(x) &= \\
&=
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

ตัวอย่าง 3.5. จงหา $f'(0)$ เมื่อ $f(x) = (x^6 - x^5 - x^4 - x^3)(x^5 - x^4 - x^3 - x^2)$

วิธีทำ จาก $f(x) = (x^6 - x^5 - x^4 - x^3)(x^5 - x^4 - x^3 - x^2)$ จะได้

$f'(x) = (x^6 - x^5 - x^4 - x^3)(5x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 2x) + (x^5 - x^4 - x^3 - x^2)(6x^5 - 5x^4 - 4x^3 - 3x^2)$

ดังนั้น $f'(0) = 0$

3.4 อนุพันธ์อันดับสูง (High Order Derivatives)

ถ้า f เป็น function ที่หา derivative ได้ และ f' ก็เป็น function ที่หา derivative ได้อีก เราเรียก $(f')'$ ว่า "อนุพันธ์อันดับสอง (second derivative) ของ f" เขียนแทนด้วย f'' ในทำนองเดียวกัน เราจะมี"อนุพันธ์อันดับสาม (third derivative) ของ f" เขียนแทนด้วย f''' ฯลฯ สำหรับอนุพันธ์อันดับ n (nth derivative) ของ f โดยที่ $n \geq 4$ เราเขียนแทนด้วย $f^{(n)}$ นอกจากนี้เราใช้สัญลักษณ์ $\frac{d^n f(x)}{dx}$ แทน nth derivative ของ f และ $\frac{d^n f(x)}{dx}|_{x=x_0}$ แทน nth derivative ของ f ที่ x_0 (ซึ่งคือ $f^{(n)}(x_0)$ นั่นเอง)

ถ้าให้ $y = f(x)$ เราสามารถใช้สัญลักษณ์ $y', y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}$ หรือ $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ แทนอนุพันธ์อันดับที่ $1, 2, 3, 4, \ldots, n$ ตามลำดับ และแทนค่าอนุพันธ์ที่ x_0 ด้วย $\frac{d^ny}{dx^n}|_{x=x_0}$

ด้วยหลักการเดียวกัน “อนุพันธ์อันดับหนึ่ง (first derivative) ของ f” ก็คือ อนุพันธ์ของ f นั่นเอง

ตัวอย่าง 3.6. จงหาอนุพันธ์ทั้งหมดของ $f(x) = x^n$ เมื่อ $n > 1$

วิธีทำ จาก $f(x) = x^n$ จะได้

$$\begin{aligned} f'(x) &= \\ f''(x) &= \\ f'''(x) &= \\ f^{(4)}(x) &= \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \\ f^{(k)}(x) &= \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.5 การตีความอนุพันธ์ (Interpretation of Derivatives)

3.5.1 อนุพันธ์ในเชิงความชัน (Derivatives as Slopes)

ในกรณีที่เราลงจุดกราฟ (plot graph) ของฟังก์ชัน เราได้ทราบมาแล้วว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x ใดๆ ก็คือความชันของเส้นสัมผัสกราฟ (เรียกว่าความชันของกราฟ) ของฟังก์ชัน f ที่จุด $(x, f(x))$

นั่นเอง ความจริงข้อนี้สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันได้

ตัวอย่าง 3.7. จงพิจารณาว่ามีเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ ที่ตั้งฉากกันหรือไม่

วิธีทำ เราทราบว่าเส้นตรงสองเส้นตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ -1 พิจารณาความชันของเส้นสัมผัสกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ ที่จุด $(x, f(x))$ ใดๆ จะได้ว่า ความชันดังกล่าวมีค่าเท่ากับ $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ ฉะนั้น ความชันของเส้นสัมผัสกราฟนี้ที่จุดใดๆ จึงมีค่าเป็นบวกเสมอ จึงสรุปได้ว่า กราฟของฟังก์ชันนี้ไม่มีเส้นสัมผัสคู่ใดตั้งฉากกัน เพราะผลคูณของความชันของเส้นสัมผัสเป็นจำนวนจริงบวกเสมอ ไม่สามารถเป็น -1 ได้

ตัวอย่าง 3.8. ภูเขาจำลองในพิพิธภัณฑ์วิทยาศาสตร์แห่งหนึ่ง เกิดจากการหมุนของพาราโบลาคว่ำรอบแกนสมมาตรของมัน โดยที่ฐานของภูเขาจำลองเป็นรูปวงกลมรัศมี 5 เมตร และยอดเขาอยู่สูงจากฐานเป็นระยะทาง 8 เมตร บนยอดเขาติดตั้งโคมไฟ ณ ตำแหน่งสูงจากยอดเขาขึ้นไปอีก 0.5 เมตร เมื่อเปิดโคมไฟ แสงไฟจากโคมจะทำให้พื้นบริเวณรอบๆ ภูเขาจำลองที่ไม่ถูกภูเขาจำลองบัง สว่างขึ้น จงหาว่าบริเวณที่สว่างดังกล่าว เป็นบริเวณบนพื้นภายนอกวงกลมรัศมีเท่าใด

จากโจทย์จำลองรูปได้ดังภาพ 1.3 ในที่นี้สมมุติว่าแหล่งกำเนิดแสงเป็นจุด จะเห็นว่า แนวแบ่งส่วนมืดและส่วนสว่างจะผ่านจุดกำเนิดแสง และอยู่ในแนวเส้นสัมผัสผิวของพาราโบลาด้วย ให้จุดกึ่งกลางฐานของภูเขาจำลองเป็นจุดกำเนิด และสมมุติให้ $f(x) = a - kx^2$ เป็นสมการของรูปพาราโบลา จากเงื่อนไขความกว้างและความสูงของภูเขาจำลอง จะได้ว่า $f(0) = 8$ และ $f(5) = 0$ ซึ่งทำให้ $a = 8$ และ $k = 8/25$ ดังนั้น $f(x) = 8 - 8x^2/25$ ให้ $(x, f(x))$ เป็นจุดที่แนวแบ่งส่วนมืดและส่วนสว่างสัมผัสกับพาราโบลา จะได้ว่า ความชันของเส้นสัมผัสกราฟที่จุดดังกล่าวเท่ากับ $f'(x) = -16x/25$ แต่เส้นสัมผัสนี้ผ่านจุดกำเนิดแสง $(0, 8.5)$ และจุด $(x, f(x)) = (x, 8 - 8x^2/25)$ จึงได้ว่า มีความชันเป็น $\dfrac{8 - 8x^2/25 - 8.5}{x - 0}$ นั่นคือ $\dfrac{8 - 8x^2/25 - 8.5}{x - 0} = -16x/25$ หรือ $x = 5/4$ ดังนั้นความชันของเส้นสัมผัสเท่ากับ $-16 \times (5/4)/25 = -4/5$ ถ้าบริเวณบนพื้นที่สว่าง เป็นบริเวณภายนอกวงกลมรัศมี r จะได้ว่า เส้นสัมผัสข้างต้น ต้องผ่านจุด $(r, 0)$ ด้วย นั่นคือความชันจะเท่ากับ $\dfrac{0 - 8.5}{r - 0}$ ซึ่งทำให้

$\frac{0-8.5}{r-0} = -4/5$ หรือ $r = 10.625$ นั่นคือ บริเวณที่สว่าง เป็นบริเวณบนพื้นภายนอกวงกลมรัศมี 10.625 เมตร

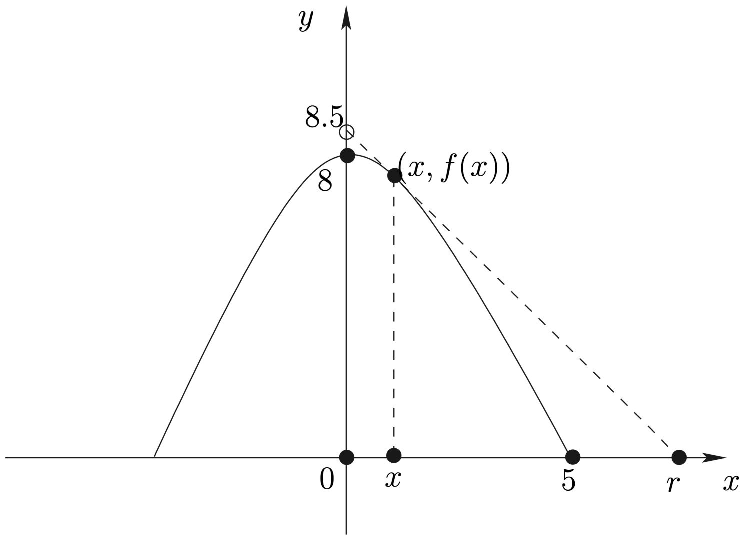


Figure 3.1: รูปภาพสำหรับตัวอย่างข้างต้น

3.5.2 อนุพันธ์ในเชิงอัตราเร็ว (Derivatives as Speeds)

ถ้าพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยให้ $f(t)$ เป็นระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ ณ เวลา t เราจะได้ว่า $f'(t)$ ก็คืออัตราเร็ว ณ เวลา t ซึ่งเรียกว่า อัตราเร็วชั่วขณะ (instantaneous speed) ในขณะที่ปริมาณ $\dfrac{f(s)-f(t)}{s-t}$ เรียกว่า อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุ ในช่วงเวลา ตั้งแต่ s ถึง t

ตัวอย่าง 3.9. วัตถุเคลื่อนที่เป็นเวลานาน 1 นาที ตามสมการ $s = 0.5t + 0.1t^2$ เมื่อ t คือเวลาเป็นวินาที และ s คือระยะทางที่เคลื่อนที่ได้เป็นเมตร จงหา

(1) อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วง 10 วินาทีแรก และในช่วง 10 วินาทีถัดไป

(2) อัตราเร็วของวัตถุ ณ วินาทีที่ 10 และ ณ วินาทีที่ 20

วิธีทำ
(1) อัตราเร็วเฉลี่ยของวัตถุในช่วง 10 วินาทีแรก เท่ากับ

(2) เนื่องจาก $\dfrac{d}{dt}\left(0.5t + 0.1t^2\right) = 0.5 + 0.2t$
ดังนั้น อัตราเร็วของวัตถุ ณ วินาทีที่ 10 เท่ากับ
$\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=10} =$
และ อัตราเร็วของวัตถุ ณ วินาทีที่ 20 เท่ากับ

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=20} =$$

3.5.3 อนุพันธ์ในเชิงอัตราการเปลี่ยนแปลง (Derivatives as Rates of Change)

เราจะเห็นได้ชัดจากนิยามของอนุพันธ์ว่า ในกรณีของฟังก์ชันทั่วๆ ไป อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ก็คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าฟังก์ชัน เทียบกับตัวแปรต้นของมันนั่นเอง

ตัวอย่าง 3.10. เมื่อใช้เครื่องสูบลม สูบลมเข้าไปในลูกโป่ง เราอาจประมาณได้ว่า ณ ขณะเวลาใดๆ ลูกโป่งมีรูปร่างเป็นรูปทรงกลม จงหาอัตราการเพิ่มขึ้นของปริมาตรของลูกโป่ง ต่อหนึ่งหน่วยรัศมีที่เพิ่มขึ้นของลูกโป่งขณะที่ลูกโป่งมีรัศมี 10 เซนติเมตร

วิธีทำ ให้ r เป็นรัศมีของลูกโป่ง และ V เป็นปริมาตรของลูกโป่ง จากข้อสมมุติว่าลูกโป่งเป็นทรงกลม จะได้ว่า $V = 4\pi r^3/3$ ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของลูกโป่งเทียบกับรัศมีเท่ากับ $\dfrac{dV}{dr} = 12\pi r^2/3 = 4\pi r^2$ ลูกบาศก์หน่วยต่อหน่วย นั่นคือ ขณะที่ลูกโป่งมีรัศมี 10 เซนติเมตร มันจะมีปริมาตรเพิ่มขึ้นในอัตรา $4 \times \pi \times 10^2 \approx 1256$ ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อเซนติเมตร หรือประมาณ 1.256 ลิตรต่อรัศมีที่เพิ่มขึ้น 1 เซนติเมตร

3.5.4 แบบฝึกหัด (Exercises)

1. จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้ ถ้าอนุพันธ์ดังกล่าวหาค่าได้ ในกรณีที่หาค่าไม่ได้ ให้ระบุว่าหาค่าไม่ได้

    1. $f'(x)$ เมื่อ $f(x) = g(x)h(x)k(x)$

    2. $f^{(n)}(0)$ เมื่อ $f(x) = \sum_{i=1}^{k} x^i$ โดยที่ k และ n เป็นจำนวนนับ

3. $\dfrac{d}{dt}\dfrac{1}{1-t}$ และ $\dfrac{d^2}{dt^2}\dfrac{1}{1-t}$

4. $\dfrac{d}{dt}\dfrac{f(t)}{t}$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $\dfrac{d}{dt}f(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ สำหรับทุกๆ $t \neq 0$

5. $f'(-1),\ f'(-\frac{2}{3}),\ f'(0),\ f'(1)$ เมื่อ $f(x) = x\sqrt{1+x}$

6. $\dfrac{d}{dx}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\Bigg|_{x=0}$

7. $\dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{dy}{dx}\Bigg|_{x=0},\ \dfrac{dy}{dx}\Bigg|_{x=0.25},\ \dfrac{dy}{dx}\Bigg|_{x=1}$ เมื่อ $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$

8. $\dfrac{d}{dx}\left(x^2\sqrt{1+x}\right)$

9. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ เมื่อ $y = (1+x^2)\sqrt{1-2x}$ (หาอนุพันธ์ของ $\sqrt{1-2x}$ และ $1/\sqrt{1-2x}$ ก่อน)

10. $\dfrac{d^{10}y}{dx^{10}}$ เมื่อ $y = \left(x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1\right)\left(x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2\right)$

2. จงตอบคำถามต่อไปนี้

   1. จงหาความชันของกราฟของสมการ $y = x^3 - 3x$ ณ ตำแหน่งซึ่ง $x = 2$
   2. จงหาจุดบนกราฟ $y = x^3 - 3x$ ซึ่งมีเส้นสัมผัสกราฟที่ขนานกับเส้นสัมผัส ณ จุดซึ่ง $x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ
   3. จงหาจุดบนกราฟ $y = x^3 - 3x$ ซึ่งมีเส้นสัมผัสกราฟที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ณ จุดซึ่ง $x = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

3.6 กฎลูกโซ่ (The Chain Rule)

การทราบข้อมูลของ derivative ของฟังก์ชัน f และฟังก์ชัน g ทำให้เราสามารถหา derivative ของผลบวก $f+g$ ผลคูณ fg และผลหาร f/g ของฟังก์ชัน ทั้งสองได้ ข้อมูลนี้ยังใช้หา derivative ของฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสมได้ เราเรียกวิธีการหา derivative ของฟังก์ชัน ประกอบว่า chain rule โดยมีแนวคิดสำคัญคือ การสร้างตัวแปรใหม่ขึ้นมาช่วย ในการคำนวณ ดังรายละเอียดในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎี 3.3. *ถ้าฟังก์ชัน g หา derivative ได้ที่จุด x และฟังก์ชัน f หา derivative ได้ที่จุด $g(x)$ แล้ว*

ฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ *หา derivative ได้ที่จุด* x *ยิ่งกว่านั้น ถ้า*

$$y = f(g(x)) \quad \text{และ} \quad u = g(x)$$

แล้ว $y = f(u)$ *และ*

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงให้เห็นถึงการใช้ chain rule หา derivative ของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 3.11. พิจารณาฟังก์ชัน $y = \frac{1}{x^2+1}$ กำหนดให้ $u = x^2 + 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ในที่นี้ $y = \frac{1}{u}$ เราใช้ chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned} \tag{3.12}$$

นั่นคือ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

ตัวอย่าง 3.12. กำหนดให้ $y = u^{100}$ และ $u = x^3 + x^2 + x + 1$ จงหา $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ ใช้ chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned} \tag{3.13}$$

นั่นคือ $\dfrac{dy}{dx} = 100(x^3 + x^2 + x + 1)^{99}(3x^2 + 2x + 1)$

สูตร

$$E : chain1$$

สามารถเขียนได้ในอีกรูป ซึ่งสะดวกในการนำไปใช้ สังเกตว่า $y = f(u)$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(u)] \quad \text{และ} \quad \frac{dy}{du} = f'(u)$$

สูตรของ chain rule จึงเขียนได้ว่า

$$\boxed{\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\frac{du}{dx}}$$

ซึ่งเขียนได้อีกรูปคือ

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ตัวอย่าง 3.13. จงหา derivative ของฟังก์ชัน $y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + x + 1}$

วิธีทำ เราแนะนำตัวแปร $u = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ และใช้สูตร chain rule

$E : chain2$

ได้ว่า

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{1}{2}x^2+x+1}\right] =$$

$$=$$

$$=$$

$$= \tag{3.14}$$

$$=$$

$$=$$

นั่นคือ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+1}{2\sqrt{\frac{1}{2}x^2+x+1}}$

ตัวอย่าง 3.14. จงหาค่าของ $f'(x^3+x)$ เมื่อกำหนดให้

$$\frac{d}{dx}[f(x^3+x)] = (3x^2+1)^2$$

วิธีทำ เราใช้ chain rule ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x^3+x)] &= \\ &= \end{aligned} \tag{3.15}$$

ตัวอย่าง 3.15. กำหนดให้ $f(x) = |x|$ จงหา derivative ของฟังก์ชัน f ที่ $x \neq 0$

วิธีทำ ฟังก์ชัน f เขียนได้ว่า

$$f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$$

ถ้า $x \neq 0$ แล้ว

$$\begin{aligned} f'(x) &= \\ &= \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned} \tag{3.16}$$

นั่นคือ เมื่อ $x \neq 0$ แล้ว $f'(x) = \dfrac{x}{|x|}$

3.6.1 แบบฝึกหัด

1. จงหา derivative ของฟังก์ชันต่อไปนี้

    1. $f(x) = \sqrt{1 - x + x^2}$
    2. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$
    3. $f(x) = (2x + 5)^3(3x - 7)^5$
    4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 + 1}$

2. จงหา derivative ของฟังก์ชัน

$$y = \sqrt{x + \sqrt[3]{3x + \sqrt[4]{4x}}}$$

3. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันหา derivative ได้ และ $g = f \circ f$ ถ้า $f(1) = 1,\ f(2) = 4$ และ $f'(4) = 8$ จงหาค่าของ $g'(1)$

4. พิจารณาตารางค่าของฟังก์ชัน $f, f',\ g, g'$ และ h, h' โดยที่ $h = f \circ g$