SCMA104 Systems of Ordinary Differential Equations and Applications in Medical Science

Pairote Satiracoo

2024-08-21

Contents

Chapter 4

การประยุกต์ของอนุพันธ์ (Applications of Differentiation)

4.1 Applications of derivatives related to students discipline

จากบทเรียนก่อนหน้านี้ เราทราบว่าถ้าตัวแปร y สามารถเขียนอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันๆ หนึ่ง ที่ขึ้นกับตัวแปร x นั่นคือ $f(x)$ เราจะสามารถวาดกราฟของ y หรือฟังก์ชัน $f(x)$ ได้ และถ้าเราทราบว่า จุด $P(x_0, y_0)$

และจุด $Q(x_1, y_1)$ ต่างอยู่บนกราฟของ y แสดงว่า $y_0 = f(x_0)$ และ $y_1 = f(x_1)$ นั่นเอง ความชันของเส้นตรงที่ลากผ่านจุด P และจุด Q มักใช้ m เป็นสัญลักษณ์ มีสูตรการหาดังนี้

$$m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

ความชันของเส้นตรงที่กล่าวมาแล้วนี้ มีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $f(x)$ ตั้งแต่ $x = x_0$ จนถึง $x = x_1$ และ

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ ณ $x = x_0$ หรือการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ เทียบกับตัวแปร x เมื่อ x มีค่าเท่ากับ x_0 นั่นเอง

หลักการหาอนุพันธ์สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ในหลากหลายสาขาวิชาชีพ ไม่ว่าจะเป็นธุรกิจ เศรษฐศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ฟิสิกส์ เคมี หรือแม้กระทั่งชีววิทยา สำหรับบทนี้ ผู้เขียนจะขอกล่าวถึง การนำแนวคิดทางคณิตศาสตร์นี้ไปประยุกต์ใช้กับปัญหาทางวิทยาศาสตร์ชีวภาพ เพื่อให้สอดคล้องกับความสนใจของผู้เรียน

ตัวอย่าง 4.1. AIDS ย่อมาจาก acquired immunodeficiency syndrome เป็นโรคติดต่อทางเพศสัมพันธ์และการให้เลือด ซึ่งพบการแพร่ระบาดมาตั้งแต่ปี พ.ศ. 2523 โดยผู้ป่วยที่เป็นโรค AIDS จะพบเชื้อไวรัส HIV ใน antibodies ซึ่งไวรัส HIV นี้มีระยะฟักตัวตั้งแต่ไม่กี่เดือน จนกระทั่งนานนับปี นักวิจัยคนหนึ่งนำเชื้อไวรัส HIV มาเพาะเลี้ยงในจานเพาะเชื้อ พบว่า ขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา t , $N(t)$ สอดคล้องกับสมการ $N(t) = 1000 + 20t + t^2$ อยากทราบว่าไวรัสชุดนี้มีอัตราการเปลี่ยนแปลง ณ t ใดๆ เป็นอย่างไร

กำหนดให้ t แทน เวลา $N(t)$ แทน ขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา t จากการทดลองพบว่า ขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา t ใดๆ สอดคล้องกับสมการ

$$N(t) = 1000 + 20t + t^2$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงของขนาดของประชากรไวรัส ณ เวลา t ใดๆ คือ

ตัวอย่าง 4.2. จากการสำรวจพบว่า จำนวนผู้ป่วยด้วยโรค AIDS, $P(t)$ มีความสัมพันธ์กับสมการ

$$P(t) = 100t^2 - 2t^3$$

เมื่อ t เป็นเวลาที่ผ่านไปนับจากวันนี้ มีหน่วยเป็นวัน อยากทราบว่าเมื่อ 20 วันผ่านไป จะมีผู้ป่วยด้วยโรคนี้กี่คน และมีอัตราการเพิ่มจำนวนผู้ป่วยเป็นเท่าไหร่

กำหนดให้ t แทน เวลา มีหน่วยเป็นวัน $P(t)$ แทน จำนวนผู้ป่วยด้วยโรค AIDS มีหน่วยเป็นคน จากการสำรวจพบว่า

$$P(t) = 100t^2 - 2t^3$$

เมื่อ 20 วันผ่านไป แสดงว่า $t = 20$ จะได้ว่า $P(20) = 100(20)^2 - 2(20)^3 = 24,000$ ดังนั้น เมื่อ 20 วันผ่านไป จะมีผู้ป่วยโรค AIDS 24,000 คน อัตราการเพิ่มจำนวนผู้ป่วยโรค AIDS ณ เวลา t ใดๆ หาได้ดังนี้

ดังนั้น เมื่อ 20 วันผ่านไป อัตราการเพิ่มจำนวนผู้ป่วยจะมีค่าเท่ากับ
คนต่อวัน

ตัวอย่าง 4.3. จากการศึกษาทางสิ่งแวดล้อมระบุว่า $Q(t)$ ระดับ carbon monoxide (CO) เฉลี่ยในอากาศ (หน่วยเป็น ppm) จะมีค่าเป็นเท่าไร

$$Q(t) = 0.05t^2 + 0.1t + 3.4$$

เมื่อ t เป็นเวลาที่นับจากนี้เป็นต้นไป มีหน่วยเป็นปี อยากทราบว่า ระดับ CO เฉลี่ยในอากาศจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร ในอีก 2 ปี ข้างหน้า

กำหนดให้ t เป็นเวลาที่นับจากวันนี้ มีหน่วยเป็นปี $Q(t)$ เป็นระดับ CO เฉลี่ยในอากาศมีหน่วยเป็น ppm จากการศึกษาทางสิ่งแวดล้อมระบุว่า

$$Q(t) = 0.05t^2 + 0.1t + 3.4$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงระดับ CO เฉลี่ยในอากาศ ณ t ใดๆ คือ

ในอีก 2 ปีข้างหน้า $t = 2$

ระดับ CO เฉลี่ยในอากาศจะเพิ่มขึ้น (เพราะ $\dfrac{dQ}{dt} > 0$) ด้วยอัตราเร็ว 0.3 ppm ต่อปี

ตัวอย่าง 4.4. Poiseuille's law กล่าวว่า ความเร็วของเลือด (หน่วย คือ เซนติเมตรต่อวินาที) ที่อยู่ห่างจากจุดกึ่งกลางของหลอดเลือด r เซนติเมตร มีสูตรดังนี้ $S(r) = C(R^2 - r^2)$ เมื่อ C เป็นค่าบวกใดๆ และ R เป็นรัศมีของหลอดเลือด อยากทราบว่า ความเร็วของเลือดจะเปลี่ยนแปลงเป็นอย่างไร เมื่อเลือดอยู่บริเวณกึ่งกลางระหว่างจุดกึ่งกลางและผนังของหลอดเลือด

กำหนดให้ r เป็นระยะห่างจากจุดกึ่งกลางของหลอดเลือด (หน่วยเป็นเซนติเมตร) $S(r)$ เป็นความเร็วของเลือด ณ r ใดๆ (หน่วยเป็นเซนติเมตรต่อวินาที) จาก Poiseuille's law

$$S(r) = C(R^2 - r^2)$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วของเลือด ณ r ใดๆ คือ

เลือดที่อยู่บริเวณกึ่งกลางระหว่างจุดกึ่งกลางและผนังของหลอดเลือดหมายถึง $r = \frac{R}{2}$ ดังนั้น

แสดงว่าความเร็วของเลือดจะลดลง (เพราะ $\dfrac{dS}{dr} < 0$) ด้วยอัตรา CR (cm/s)/cm

4.1.1 แบบฝึกหัด

1. ผลการทดลองแสดงให้เห็นว่า ความเข้มข้นของปริมาณ adrenaline ที่ฉีดเข้าไปในร่างกาย, x, มีความสัมพันธ์กับการตอบสนองของกล้ามเนื้อ, y, ด้วยสมการ $y = \frac{x}{a+bx}$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงการตอบสนองของกล้ามเนื้อ เมื่อเทียบกับความเข้มข้นของปริมาณ adrenaline ที่ฉีดเข้าไปในร่างกาย

2. กำหนดให้ $P(t) = \dfrac{1000t}{t+10}$ แสดงถึงขนาดของประชากรแบคทีเรีย เมื่อ t เป็นเวลา จงหาอัตราการเจริญเติบโตของประชากร

3. Schuty - Borisoff laws กล่าวถึง ปริมาณ substrate, y, ที่ถูกเปลี่ยนรูปด้วยเอนไซม์ ในรูปของฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลา t ดังนี้

$$y = k\sqrt{cat}$$

เมื่อ k, a, c เป็นค่าคงตัว จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาณ substrate ที่ถูกเปลี่ยนรูปด้วยเอนไซม์ ณ เวลา t ใดๆ

4.2 Sketching the graph of a function from the derivative

ในหัวข้อนี้เราใช้ประโยชน์จากเรื่อง derivative ในการวาดกราฟของฟังก์ชัน เมื่อนึกถึงกราฟของฟังก์ชัน เราสนใจลักษณะที่สำคัญ เช่นช่วงใดที่กราฟเพิ่ม ช่วงใดที่กราฟลด ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของกราฟอยู่ที่ใด กราฟมีลักษณะคว่ำในช่วงใด หรือมีลักษณะหงายในช่วงใด เป็นต้น

แนวคิดแรกคือเรื่องของการเพิ่มและลดของฟังก์ชัน เรามารู้จักนิยามก่อน

นิยาม 4.1. ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วง I ให้ x_1 และ x_2 เป็น สมาชิกในช่วง I

- f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง I ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$
- f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง I ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$
- f เป็นฟังก์ชันคงตัวบนช่วง I ก็ต่อเมื่อ สำหรับค่า x_1 และ x_2 ใด ๆ แล้ว $f(x_1) = f(x_2)$

ประโยชน์ของ derivative ที่ใช้ในการตรวจสอบการเพิ่มและลดของฟังก์ชัน มาจาก ทฤษฎีบท :

ทฤษฎี 4.1. *ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหา derivative ได้ บนช่วงเปิด (a, b)*

1. *ถ้า $f'(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็น ฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a, b]$*

2. ถ้า $f'(x) < 0$ *สำหรับทุก ๆ* $x \in (a, b)$ *แล้ว* f *เป็น ฟังก์ชันลดบนช่วง* $[a, b]$

3. ถ้า $f'(x) = 0$ *สำหรับทุก ๆ* $x \in (a, b)$ *แล้ว* f *เป็น ฟังก์ชันคงตัวบนช่วง* $[a, b]$

ทฤษฎีบทนี้สามารถขยายผลจากช่วง $[a, b]$ ไปได้ถึงช่วงในรูป $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ และ $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่าง 4.5. พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

เราหา derivative ของฟังก์ชัน ได้ว่า $f'(x) = 2x - 3$ ซึ่งบอกเราว่า

(4.1)

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 3/2$ เราจึงบอกได้ว่า

(4.2)

แนวคิดต่อไป เป็นเรื่องของลักษณะหงายหรือคว่ำของกราฟของฟังก์ชัน ถ้ากราฟของฟังก์ชันมีลักษณะหงาย เราเรียกว่าฟังก์ชัน concave up ในขณะที่ถ้ากราฟของฟังก์ชันมีลักษณะคว่ำ เราเรียกว่า ฟังก์ชัน concave down นิยามที่ชัดเจนของ concavity ของฟังก์ชันเป็นดังนี้

นิยาม 4.2. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหา derivative ได้บนช่วงเปิด I

- f concave up บนช่วง I ถ้า f' เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง I

- f concave down บนช่วง I ถ้า f' เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง I

ลักษณะ concavity ของฟังก์ชัน สามารถตรวจสอบโดยใช้ derivative ดังนี้

ทฤษฎี 4.2. *ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหา derivative อันดับสองได้บนช่วง I*

1. *ถ้า $f''(x) > 0$ บนช่วง I แล้ว f concave up บนช่วง I*
2. *ถ้า $f''(x) < 0$ บนช่วง I แล้ว f concave down บนช่วง I*

ตัวอย่าง 4.6. พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ถ้าเราคำนวณ derivative อันดับสอง $f''(x) = 2$ ซึ่งจากทฤษฎีบท เราบอกได้ว่า f concave up บนช่วง $(-\infty, \infty)$

การเปลี่ยนทิศทางของ concavity ของฟังก์ชัน ก็เป็นอีกที่หนึ่งของกราฟของ ฟังก์ชัน ซึ่งมีลักษณะเด่น ที่จุดนี้กราฟอาจมีการเปลี่ยนจากลักษณะหงาย เป็นคว่ำ หรือจากลักษณะคว่ำเป็นหงาย

นิยาม 4.3. ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด I ซึ่งมี x_0 เป็น สมาชิก และ f เปลี่ยนทิศทางของ concavity ที่จุดนี้ แล้วเรากล่าว ว่า f มี inflection point ที่ x_0 และเราเรียก $(x_0, f(x_0))$ ว่า inflection point ของ f

ตัวอย่าง 4.7. ฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ มี

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x$$

สังเกตว่า

- เมื่อ $x < 0,\ f''(x) < 0$
- เมื่อ $x > 0,\ f''(x) > 0$

ดังนั้น ที่จุด $x = 0,\ f$ มีการเปลี่ยนทิศทางของ concavity จาก concave down เมื่อ $x < 0$ เป็น concave up เมื่อ $x > 0$ เพราะฉะนั้น inflection point จึงเป็น $(0, 0)$ สังเกตอีก ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดช่วง $(-\infty, \infty)$

ค่าสูงสุดและต่ำสุดในย่านหนึ่ง ๆ ของกราฟก็เป็นอีกลักษณะเด่น ที่เราสามารถ ตรวจสอบได้โดยใช้ derivative ของฟังก์ชัน

นิยาม 4.4.

1. ฟังก์ชัน f มี relative maximum ที่ x_0 ถ้ามีช่วงเปิดที่มี x_0 เป็นสมาชิก และ $f(x_0) \geq f(x)$ สำหรับทุก ๆ x ที่เป็น สมาชิกในช่วงเปิดดังกล่าว

2. ฟังก์ชัน f มี relative minimum ที่ x_0 ถ้ามีช่วงเปิดที่มี x_0 เป็นสมาชิก และ $f(x_0) \leq f(x)$ สำหรับทุก ๆ x ที่เป็น สมาชิกในช่วงเปิดดังกล่าว
3. ถ้า f มี relative maximum หรือ relative minimum ที่ x_0 แล้ว เรากล่าวว่า f มี relative extremum ที่ x_0

ฟังก์ชันหนึ่ง ๆ อาจมี relative maximum, relative minimum หลายที่ อาจมีที่เดียว หรืออาจไม่มีเลยก็ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.8.

1. ฟังก์ชัน $f(x)=(x-1)^2$ มี relative minimum ที่ $x=1$ แต่ไม่มี relative maximum
2. ฟังก์ชัน $f(x)=x^3$ ไม่มี relative extremum
3. ฟังก์ชัน $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$ มี relative maximum ที่ $x=0$ และมี relative minimum ที่ $x=1$
4. ฟังก์ชัน $f(x)=\sin x$ มี relative maxima ที่ $\pi/2+2n\pi$ และมี relative minima ที่ $3\pi/2+2n\pi$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม n ใด ๆ

ทฤษฎี 4.3. *ถ้า f มี relative extremum ที่จุด x_0 แล้ว $f'(x_0)=0$ หรือ f หา derivative ไม่ได้ที่ x_0*

นิยาม 4.5. เราเรียก x_0 ว่า critical point ของฟังก์ชัน f ถ้า $f'(x_0)=0$ หรือ f หา derivative ไม่ได้ที่ x_0

ตัวอย่าง 4.9. ฟังก์ชัน $f(x) = |x^2 - x|$ มี critical point ที่จุด $x = 0, 1$ และฟังก์ชัน $g(x) = x^2 - x$ ก็มี critical point ที่จุด $x = 0, 1$ เช่นกัน สังเกตว่า ฟังก์ชัน f หา derivative ไม่ได้ที่จุด $x = 0, 1$ ในขณะที่ฟังก์ชัน g หา derivative ได้ ที่จุดดังกล่าว

การตรวจสอบหา relative extremum โดยใช้ derivative เราใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎี 4.4. *ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ critical point x_0 และถ้า ค่าของ f' เปลี่ยนเครื่องหมายที่ x_0 แล้ว f มี relative minimum หรือ relative maximum ที่ x_0*

1. *ถ้า f' มีค่าเป็นลบสำหรับค่าทางซ้ายของ x_0 และมีค่า เป็นบวกสำหรับค่าทางขวาของ x_0 แล้ว f มี relative minimum ที่ x_0*
2. *ถ้า f' มีค่าเป็นบวกสำหรับค่าทางซ้ายของ x_0 และมีค่า เป็นลบสำหรับค่าทางขวาของ x_0 แล้ว f มี relative maximum ที่ x_0*

ตัวอย่าง 4.10. พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = |x^2 - x|$ จงหาค่า x ที่ทำให้ f มี relative extrema

วิธีทำ เรารู้ว่า $x = 0, 1$ เป็น critical point เขียนฟังก์ชัน f ใหม่ว่า

นั่นคือ

ดังนั้นที่จุด x ใกล้ ๆ 0 และ $x < 0$ เราพบว่า $f'(x) < 0$ ในขณะที่ที่จุด x ใกล้ ๆ 0 และ $x > 0$ เราพบว่า $f'(x) > 0$ เราจึงสรุปว่า f มี relative minimum ที่ 0 ในทำนองเดียวกัน ที่จุด x ใกล้ ๆ 1 และ $x < 1$ เราพบว่า $f'(x) < 0$ ในขณะที่ที่จุด x ใกล้ ๆ 1 และ $x > 1$ เราพบว่า $f'(x) > 0$ เราจึงสรุปได้เช่นกันว่า f มี relative minimum ที่ 1

เมื่อเราพิจารณาฟังก์ชัน แล้วต้องการวาดกราฟของฟังก์ชัน เราคงจำได้ว่า มีข้อมูล บางประการที่เราสามารถ

ตรวจสอบได้ก่อน เช่น x-intercepts y-intercepts ลักษณะ ของกราฟเมื่อ x เข้าใกล้ค่าอนันต์ เป็นต้น ตัวอย่างต่อไปนี้ เราจะใช้ความรู้เหล่านี้ ประกอบกับเรื่องของ derivative ในการวาดกราฟของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 4.11. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$

วิธีทำ

- x-intercepts: ให้ $y = 0$ ได้ว่า

(4.3)

  ดังนั้น $x = -2, 1$

- y-intercepts: ให้ $x = 0$ ได้ว่า $y = 2$

- ลักษณะกราฟเมื่อ $x \to \infty$ และ $x \to -\infty$: สังเกตว่า

(4.4)

- ช่วงการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน เราหา derivative ของ f ได้ว่า

  ดังนั้น f จึงเป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $x < -1$ เป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $-1 < x < 1$ และ เป็นฟังก์ชันเพิ่มอีกครั้งเมื่อ $x > 1$

- ช่วงการ concave up และ concave down ของฟังก์ชัน f เราหา derivative อันดับ สองของฟังก์ชัน f ได้ว่า

  ดังนั้น f จึง concave up เมื่อ $x > 0$ และ concave down เมื่อ $x < 0$ ฟังก์ชัน f มี inflection point ที่ 0

จากข้อมูลทั้งหมด เราเขียนกราฟคร่าว ๆ ดังรูปที่

$$Fig : graph1$$

กราฟของฟังก์ชัน f(x) = x3 – 3x + 2

ตัวอย่าง 4.12. ถ้า f เป็นฟังก์ชัน และเรามีข้อมูลที่เกี่ยวกับ f' ดังนี้

1. $f'(x) > 0$ และ f' เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง $(-\infty, -1)$
2. $f'(x) > 0$ และ f' เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $(-1, 1)$
3. $f'(1) = 0$
4. $f'(x) < 0$ และ f' เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $(1, \infty)$

จงวาดกราฟที่เป็นไปได้ของฟังก์ชัน f

วิธีทำ จากข้อมูลที่ได้มา เราสรุปว่า

1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ concave up ในช่วง $(-\infty, -1)$
2. f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ concave down ในช่วง $(-1, 1)$
3. f มี relative maximum ที่ $x = 1$
4. f เป็นฟังก์ชันลด และ concave down ในช่วง $(1, \infty)$

ตัวอย่างกราฟของฟังก์ชัน f เช่นรูป

$$Fig : graph2$$

กราฟของฟังก์ชัน f จากข้อมูลที่กำหนด

ตัวอย่าง 4.13. พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

วิธีทำ

- x-intercepts: ให้ $y = 0$ ได้ว่า

$$\tag{4.5}$$

- y-intercepts: ให้ $x = 0$ ได้ว่า $y = 0$
- ลักษณะกราฟเมื่อ $x \to \infty$ และ $x \to -\infty$: สังเกตว่า

$$\tag{4.6}$$

- ช่วงการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน เราหา derivative ของ f ได้ว่า

  ดังนั้น f จึงเป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $x < -1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $-1 < x < 1$ และ เป็นฟังก์ชันลดอีกครั้งเมื่อ $x > 1$

- ช่วงการ concave up และ concave down ของฟังก์ชัน f เราหา derivative อันดับ สองของฟังก์ชัน f ได้ว่า

  ดังนั้น f จึง concave up เมื่อ $x > \sqrt{3}$ หรือเมื่อ $-\sqrt{3} < x < 0$ ในขณะที่ f concave down เมื่อ $x < -\sqrt{3}$ หรือเมื่อ $0 < x < \sqrt{3}$ ฟังก์ชัน f มี inflection point ที่ $0, \pm\sqrt{3}$

จากข้อมูลทั้งหมด เราเขียนกราฟคร่าว ๆ ดังรูป

$$Fig : graph3$$

กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

ตัวอย่าง 4.14. พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \ln(x^3 + 1)$$

นิยามบนช่วง $(-1, \infty)$ จงวาดกราฟของฟังก์ชันนี้

วิธีทำ

- x-intercepts: ให้ $y = 0$ พบว่า $x = 0$
- y-intercepts: ให้ $x = 0$ พบว่า $y = 0$
- ลักษณะกราฟเมื่อ $x \to \infty$:

- ลักษณะกราฟเมื่อ $x \to (-1)^+$:

- ช่วงการเพิ่มและการลดของฟังก์ชัน เราหา derivative ของ f ได้ว่า

สำหรับ $x > -1$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดโดเมน

- ช่วงการ concave up และ concave down ของฟังก์ชัน f เราหา derivative อันดับ สองของฟังก์ชัน f ได้ว่า

ดังนั้น f จึง concave up เมื่อ $0 < x < \sqrt[3]{2}$ และ f concave down เมื่อ $x < 0$ หรือเมื่อ $x > \sqrt[3]{2}$ ฟังก์ชัน f มี inflection point ที่ $0, \sqrt[3]{2}$ ค่าของ $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$

จากข้อมูลทั้งหมด เราเขียนกราฟคร่าว ๆ ดังรูป

$$Fig : graph4$$

กราฟของฟังก์ชัน f(x) = ln (x3+1) บนช่วง (−1,∞)

ตัวอย่าง 4.15. พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามบนช่วง $(-3,3)$ และหา derivative อันดับสองได้ ฟังก์ชัน f มีกราฟดังรูป

$$Fig : graph5$$

กราฟของฟังก์ชัน f บนช่วง (–3,3)

ที่จุดใดที่ฟังก์ชัน f' เปลี่ยนเครื่องหมาย และที่จุดใด f' มี relative extrema

วิธีทำ จากรูป ที่จุดซึ่ง f' เปลี่ยนเครื่องหมายคือจุด x ที่ $f'(x) = 0$ ซึ่ง คือ a, c, e และ j ในขณะที่จุดซึ่ง f' มี relative extrema เป็นจุดซึ่ง f'' เปลี่ยนเครื่องหมาย ในที่นี้คือจุดซึ่ง f มี inflection point ซึ่งก็คือ b, d, i และ k

4.2.1 แบบฝึกหัด

1. พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้

   2

   1. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

3. $f(x) = x^{4/3} - x^{1/3}$

4. $f(x) = \ln(1+x^2)$

ในแต่ละฟังก์ชัน จงหา

2

1. x-intercepts และ y-intercepts
2. ช่วงเปิดซึ่ง f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
3. ช่วงเปิดซึ่ง f เป็นฟังก์ชันลด
4. ช่วงเปิดซึ่ง f เป็นฟังก์ชัน concave up
5. ช่วงเปิดซึ่ง f เป็นฟังก์ชัน concave down
6. ค่า x ที่ทำให้ f มี inflection point

2. จงหา relative extrema ของฟังก์ชันต่อไปนี้

2

1. $f(x) = x^3 + 5x - 2$
2. $f(x) = x(x-2)^2$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$
4. $f(x) = |x^2 - 1|$

3. จงสเก็ตกราฟของฟังก์ชัน

2

1. $f(x) = x^3 - 3x + 3$
2. $f(x) = -(x+1)x^2(x-1)$
3. $f(x) = e^{1/x}$

4. จงวาดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ และ $a < b < c$ จากข้อมูลต่อไปนี้

1. $f'(a) = f'(b) = 0$

2.

$$f'(x)\begin{cases} > 0 & \text{สำหรับ } x < a \\ > 0 & \text{สำหรับ } a < x < c \\ < 0 & \text{สำหรับ } x > c \end{cases} \tag{4.7}$$

3. $f''(a) = f"'(b) = 0$

4.

$$f''(x)\begin{cases} < 0 & \text{สำหรับ } x < a \\ > 0 & \text{สำหรับ } a < x < b \\ < 0 & \text{สำหรับ } x > b \end{cases} \tag{4.8}$$

5. กำหนดให้ฟังก์ชัน f' เป็นดังรูป

$$Fig : graph6$$

กราฟของฟังก์ชัน f′

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. ช่วงใดที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

2. ฟังก์ชัน f มี relative maximum ที่ใด

3. ช่วงใดที่ f concave up

4. ฟังก์ชัน f มี inflection point ที่ใด

4.3 การประยุกต์ของ Monotonicity และ Concavity

จากที่ได้ศึกษามาแล้ว ถ้า f เป็นฟังก์ชันนิยามบนช่วงเปิด (a,b) และ x_1, x_2 เป็นจุดที่อยู่ภายในช่วงดังกล่าว แล้ว

(1) f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ถ้า $f(x_1) < f(x_2)$ เมื่อ $x_1 < x_2$ หรือ $f'(x) > 0$ สำหรับทุกค่า x ที่อยู่ในช่วง (a,b)

(2) f เป็นฟังก์ชันลด ถ้า $f(x_2) < f(x_1)$ เมื่อ $x_1 < x_2$ หรือ $f'(x) < 0$ สำหรับทุกค่า x ที่อยู่ในช่วง (a,b) นอกจากนี้แล้ว

(3) f มีลักษณะแบบ concave up ในช่วง (c,d) ถ้า f' เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วงดังกล่าว หรือ $f''(x) > 0$ สำหรับทุกค่า x ที่อยู่ในช่วง (c,d)

(4) f มีลักษณะแบบ concave down ในช่วง (c, d) ถ้า f' เป็นฟังก์ชันลดในช่วงดังกล่าว หรือ $f''(x) < 0$ สำหรับทุกค่า x ที่อยู่ในช่วง (c, d)

ซึ่งสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาทางวิทยาศาสตร์ชีวภาพ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.16. อัตราการเจริญเติบโตของพืชขึ้นอยู่กับธาตุอาหารที่ได้รับซึ่ง Monod ได้อธิบายไว้ดังสมการ

$$f(R) = \frac{aR}{K+R}, \quad R \geq 0$$

โดยที่ $f(R)$ เป็นอัตราการเจริญเติบโต, R เป็นระดับธาตุอาหาร, a และ K เป็นค่าบวกใดๆ ขึ้นอยู่กับชนิดของพืช อยากทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตของพืชจะเพิ่มขึ้น หรือลดลงเมื่อไหร่

กำหนดให้ R เป็นระดับธาตุอาหาร $f(R)$ เป็นอัตราการเจริญเติบโต เนื่องจาก

$$f(R) = \frac{aR}{K+R}, \quad R \geq 0$$

จะได้

เพราะ $a > 0,\ K > 0$ ดังนั้น

ตัวอย่าง 4.17. จากตัวอย่างที่แล้ว เราทราบว่า อัตราการเจริญเติบโตของพืชเป็นฟังก์ชันเพิ่ม อยากทราบว่าอัตราการเพิ่มของอัตราการเจริญเติบโตของพืชจะเป็นอย่างไร

เนื่องจาก $f(R) = \dfrac{aR}{K+R}, \quad R \geq 0$ จะได้ $f'(R) = \dfrac{aK}{(K+R)^2} > 0$ นั่นคือ อัตราการเจริญเติบโตของพืชเป็นฟังก์ชันเพิ่ม โจทย์อยากทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตของพืชที่เพิ่มขึ้นนี้จะเพิ่มขึ้นด้วยอัตราเท่าไร นั่นคือการหาอนุพันธ์ของ $f'(R)$ จะได้ $f''(R) = \dfrac{-2aK}{(K+R)^3} < 0$ หมายความว่า อัตราการเจริญเติบโตของพืชนั้นเพิ่มขึ้น แต่อัตราการเพิ่มขึ้นนั้นจะลดลง ดังรูป

กราฟของฟังก์ชัน $f(R) = \frac{aR}{K+R}$

ตัวอย่าง 4.18. อัตราการเจริญเติบโตของประชากรสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ logistic

$$f(N) = rN(1 - \frac{N}{K})$$

เมื่อ N เป็นจำนวนประชากร, r และ K เป็นค่าบวก อยากทราบว่าอัตราการเจริญเติบโตของประชากรจะเพิ่มขึ้น หรือลดลงอย่างไร

โจทย์ต้องการทราบว่า $f(N)$ จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไร นั่นคือ $f'(N) > 0$ หรือ $f'(N) < 0$ เมื่อ N อยู่ในช่วงใด เนื่องจากอนุพันธ์ใช้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงแบบค่อยเป็นค่อยไป ดังนั้น $f'(N)$ จะเปลี่ยนจากค่าลบเป็นค่าบวก ย่อมต้องผ่านค่าศูนย์ก่อน การหาค่า N^* ที่ทำให้ $f(N^*) = 0$ ย่อมเป็นหนทางหนึ่งที่สามารถใช้พิจารณาช่วงที่ทำให้ $f'(N) > 0$ และ $f'(N) < 0$ ได้ จาก $f(N) = rN(1 - \frac{N}{K})$ จะได้

$$f'(N) = r - \frac{2rN}{K}$$

ซึ่ง $f'(N) = 0$ เมื่อ $N = \frac{K}{2}$

ถ้า $N > \dfrac{K}{2}$ $f'(N) < 0$ และถ้า $N < \dfrac{K}{2}$ $f'(N) > 0$ ดังนั้น อัตราการเจริญเติบโตของประชากร

จะเพิ่มขึ้น เมื่อ $N < \frac{K}{2}$ และจะลดลง เมื่อ $N > \frac{K}{2}$ แสดงว่าประชากรยิ่งหนาแน่น อัตราการเพิ่มของประชากรก็จะยิ่งลดลง

4.3.1 แบบฝึกหัด

1. จากตัวอย่างที่ 9 จงวาดกราฟของ $f(N)$ และระบุช่วงที่ทำให้ f มีลักษณะแบบ concave up และแบบ concave down
2. ค่า pH ของสารละลายสัมพันธ์กับความเข้มข้นของไฮโดรเจนอิออน, H^+, ดังนี้

$$pH = -log(H^+)$$

   จงพิจารณาว่าค่า pH ของสารละลายจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไร

4.4 การหาค่าเหมาะที่สุด (Optimization)

การหาค่าเหมาะที่สุด คือปัญหาที่ต้องการทราบค่าสูงสุด (absolute maximum) และค่าต่ำสุด (absolute minimum) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.19. ผลผลิตของพืชผักสัมพันธ์กับปริมาณไนโตรเจนดังสมการ $Y(N) = \dfrac{N}{1+N^2}$ เมื่อ $Y(N)$ เป็นผลผลิตของพืชผัก และ N เป็นปริมาณไนโตรเจน $(N \geq 0)$ จงหาปริมาณไนโตรเจนที่ทำให้ได้ผลผลิตของพืชผักมากที่สุด

กำหนดให้ N เป็นปริมาณไนโตรเจน $Y(N)$ เป็นผลผลิตของพืชผัก จากความสัมพันธ์

$$Y(N) = \frac{N}{1+N^2}$$

หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการ

กำหนดให้ $Y'(N) = 0$ เพื่อหา relative extrema $Y'(N) = 0$ เมื่อ $1-N^2 = 0$ ดังนั้น $N = \pm 1$

เราจะพิจารณา N ในช่วง $N \geq 0$ ดังนั้น $N = -1$ จึงอยู่นอกโดเมน จุดที่สนใจจึงเหลือเพียง $N = 1$ โดยพิจารณาเครื่องหมายของ $Y'(N)$ เราจะได้ว่า

เนื่องจาก $Y(N)$ เปลี่ยนจากฟังก์ชันเพิ่ม เป็นฟังก์ชันลด ที่ $N = 1$ ดังนั้น ที่ $N = 1$ เกิดจากจุดสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) โดย $Y(1) = \frac{1}{2}$

เนื่องจากเราสนใจ absolute maximum จึงต้องตรวจสอบจุดปลายของโดเมน ($N \geq 0$ หรือ $N \in [0, \infty)$) นั่นคือ $N = 0$ และ $N \to \infty$ ด้วย ว่าทำให้ Y มีค่ามากกว่า $Y(1) = \frac{1}{2}$ หรือไม่

ดังนั้นที่ $N = 1$ จะเกิดจุดสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) ซึ่งเป็นปริมาณไนโตรเจนที่ทำให้พืชผักมีผลผลิตมากที่สุด คือ $Y(1) = \frac{1}{2}$ (ดูกราฟ 2.8)

ตัวอย่าง 4.20. เรือบรรทุกน้ำมันของบริษัทแห่งหนึ่งอับปางลงบริเวณอ่าวไทย ทำให้น้ำมันไหลรั่วซึมลงสู่ทะเล กระทบต่อระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ และสิ่งมีชีวิตที่อาศัยอยู่ในบริเวณดังกล่าว สมมติว่าระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ หลังเหตุการณ์เรือล่ม มีการเปลี่ยนแปลงดังสมการ

$$P(t) = 500[1 - \frac{4}{t+4} + \frac{16}{(t+4)^2}]$$

เมื่อ $P(t)$ เป็นระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ หลังเหตุการณ์เรือล่มผ่านพ้นไป t เดือน อยากทราบว่าเมื่อไหร่ออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำบริเวณดังกล่าวจะอยู่ในระดับที่ต่ำที่สุด

กำหนดให้ t เป็นเวลาหลังเหตุการณ์เรือล่ม $P(t)$ เป็นระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ บริเวณที่เกิดเหตุ

จาก $P(t) = 500[1 - \frac{4}{t+4} + \frac{16}{(t+4)^2}]$ หาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้างของสมการ

(4.9)

กำหนดให้ $P'(t) = \dfrac{2000t - 8000}{(t+4)^3} = 0$ จะได้ $t = 4$ เครื่องหมายของ $P'(t) > 0$ เมื่อ $t > 4$ และ $P'(t)0$ เมื่อ $t < 4$ ดังนั้น $P(t)$ เปลี่ยนจากฟังก์ชันลดเป็นฟังก์ชันเพิ่มที่ $t = 4$ ดังนั้น ที่ $t = 4$ เกิดจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) โดย $P(4) = 375$

เนื่องจากเราสนใจ absolute minimum จึงต้องตรวจสอบค่า $P(t)$ ที่จุดปลายของโดเมน t ด้วย นั่นคือ $t = 0$ และ $t \to \infty$ $P(0) = 500$ และ $\lim_{t\to\infty} P(t) = 500$ ดังนั้น ที่ $t = 4$ เกิดจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ (absolute minimum) ระดับออกซิเจนที่ละลายอยู่ในน้ำ บริเวณดังกล่าวต่ำสุด หลังเหตุการณ์เรืออับปางผ่านพ้นไป 4 เดือน

ตัวอย่าง 4.21. นักชีววิทยาต้องการออกแบบพื้นที่ทดลองให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เขามีรั้วยาว 1600 ฟุต เขาจะใช้รั้วนี้อย่างไร จึงจะทำให้ได้พื้นที่ทดลองที่กว้างใหญ่ที่สุด

กำหนดให้

x เป็นความกว้างของพื้นที่ทดลอง
y เป็นความยาวของพื้นที่ทดลอง
A เป็นพื้นที่ของพื้นที่ทดลอง
P เป็นความยาวรอบรูปของพื้นที่ทดลอง

เนื่องจาก $A = xy$ และ $P = 2x + 2y$ จากโจทย์ $P = 2x + 2y = 1600$ ดังนั้น $x + y = 800$ หรือ $y = 800 - x$ แทน y ลงใน $A = xy$ จะได้

(4.10)

โจทย์ต้องการหาพื้นที่กว้างใหญ่ที่สุด เราจึงต้องหาอนุพันธ์ทั้ง 2 ข้าง

กำหนดให้ $A'(x) = 800 - 2x = 0$ จะได้ $x = 400$ และ $A(400) = 1600$ ตามลำดับ ทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับสอง $A''(x) = -2 < 0$ พบว่า $x = 400$ ทำให้เกิดจุดสูงสุดสัมบูรณ์ เพราะ $A(x)$

มีลักษณะแบบ concave down ดังนั้นนักชีววิทยาควรกั้นรั้วเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกว้าง 400 ฟุต จึงจะได้พื้นที่ทดลองที่กว้างใหญ่ที่สุด

1. วาดภาพและกำหนดตัวแปรต่างๆ เช่น x, y เป็นต้น
2. หาสูตรหรือสมการของปริมาณที่ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด
3. ใช้เงื่อนไขที่โจทย์ระบุให้ในการตัดทอนตัวแปร เพื่อทำให้สมการในขั้นตอนที่ 2 อยู่ในรูปฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับตัวแปรเพียงตัวเดียว
4. หาช่วงที่เป็นไปได้ของตัวแปร โดยให้สอดคล้องกับความหมายของโจทย์
5. ใช้เทคนิคการหาค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมพัทธ์ ไม่ว่าจะเป็นทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง หรือทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับสอง
6. ตรวจสอบจุดปลายของโดเมนของตัวแปร เพื่อยืนยันการเกิดค่าสูงสุด/ต่ำสุดสัมบูรณ์

4.4.1 แบบฝึกหัด

1. อัตราการเปลี่ยนแปลงของการสังเคราะห์แสงขึ้นกับความเข้มของแสง x, ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $R(x) = 270x - 90x^2$ จงหาความเข้มของแสง ที่ทำให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของการสังเคราะห์

แสงมากที่สุด

2. การตอบสนองต่อยาชนิดหนึ่งขึ้นกับปริมาณของยา, x, ดังสมการ $S = 1000x - x^2$ จงหาปริมาณยาที่ทำให้มีการตอบสนองต่อยาชนิดนี้มากที่สุด

3. นักวิจัยพบว่าขณะไอ ปริมาณอากาศที่ไหลผ่านทางหลอดลมสัมพันธ์กับสมการ $F = SA$ เมื่อ S คือความเร็วของอากาศ และ A คือพื้นที่ตัดขวางของหลอดลม ดังรูป 2.9 ถ้าความเร็วของอากาศมีสูตรเป็น $S = c - r$ โดย r คือรัศมีของหลอดลมขณะไอ และ c คือรัศมีของหลอดลมในสภาวะปกติ จงหารัศมีที่ทำให้ปริมาณอากาศที่ไหลผ่านหลอดลมมีมากที่สุด ขณะที่ไอ

4. เภสัชกรต้องการสร้างกล่องไร้ฝาอย่างง่ายเพื่อขนย้ายยา เขามีกระดาษแข็งกว้าง 16 นิ้ว ยาว 30 นิ้ว เขาตั้งใจจะตัดมุมของกระดาษแข็งทั้ง 4 ออก ตามรูป 2.10 แล้วทำการพับตามรอยปะและเชื่อมรอยต่อด้วยเทปกาว จงหาความยาว x ที่ตัดตามมุม เพื่อให้ได้กล่องที่มีปริมาตรมากที่สุด

5. คราวนี้นักชีววิทยาคนเดิม ต้องการพื้นที่ทดลองแบบสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 320 ตารางเมตร ด้านที่ขนานกันคู่หนึ่งใช้รั้วราคา 100 บาทต่อเมตร ส่วนด้านคู่ที่เหลือใช้รั้วราคา 200 บาทต่อเมตร จงหาความกว้างและความยาวของพื้นที่ทดลองแห่งนี้ เมื่อใช้งบประมาณน้อยที่สุด

การไหลเวียนของอากาศในหลอดลม

4.5 รูปแบบไม่กำหนด (Indeterminate form) และกฎของโลปิตาล (L'Hopital Rule)

นิยาม 4.6. ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ เราจะกล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$ อาจแทน $x \to a$ ด้วย $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$

ในการหาค่าลิมิตของรูปแบบไม่กำหนดแบบ $\dfrac{0}{0}$ นั้น เราจะนำกฎของโลปิตาลมาประยุกต์ใช้

ทฤษฎี 4.5. *(กฎของโลปิตาล)*

1. *ถ้า* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *และ* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *แล้ว* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *จะอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด* $\dfrac{0}{0}$ *และได้ว่า*
   $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

2. ถ้า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ จะอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{\infty}{\infty}$ และ

ได้ว่า $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

ตัวอย่าง 4.22. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$

กฎของโลปิตาลยังคงเป็นจริงในกรณีที่ $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$

ตัวอย่าง 4.23. จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{\infty}{\infty}$

กฎของโลปิตาลใช้กับลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ เท่านั้น หากลิมิตไม่ได้อยู่ในรูปแบบดังกล่าว เราจะต้องจัดให้อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ เสียก่อนแล้วจึงนำกฎของโลปิตาลมาใช้

4.5.1 การหาลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $0 \cdot \infty$ หรือ $\infty - \infty$

การหาลิมิตในรูปแบบไม่กำหนด $0 \cdot \infty$ หรือ $\infty - \infty$ สามารถทำได้โดยจัดให้ลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$ ก่อนแล้วจึงนำกฎของโลปิตาลมาใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.24. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1/x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{\infty}{\infty}$

ตัวอย่าง 4.25. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x})$

วิธีทำ เพราะว่า $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}) = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

ซึ่งยังอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\frac{0}{0}$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}) = -\frac{1}{2}$

4.5.2 การหาลิมิตที่อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $0^0, 1^\infty, \infty^0$

ในการหาค่าลิมิตทั้ง 3 แบบนี้ เราสามารถจัดให้ลิมิตอยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$ หรือ $\dfrac{\infty}{\infty}$ โดยอาศัยฟังก์ชันลอการิทึมเข้าช่วย แล้วจึงนำกฎของโลปิตาลมาใช้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.26. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

วิธีทำ ให้ $y = x^x$ ดังนั้น $\ln y = x \ln x$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1/x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{\infty}{\infty}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = 0$

เพราะว่า $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln y = \ln(\lim\limits_{x\to 0^+} y)$ ดังนั้น $\ln(\lim\limits_{x\to 0^+} y) = 0$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to 0^+} y = e^0 = 1$

หรือ $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$

ตัวอย่าง 4.27. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$

วิธีทำ ให้ $y = x^{1/(x-1)}$ ดังนั้น $\ln y = \dfrac{\ln x}{x-1}$

และ $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{0}{0}$

ดังนั้น $\lim_{x\to 1} \ln y = 1$

เพราะว่า $\lim_{x\to 1} \ln y = \ln(\lim_{x\to 1} y)$ ดังนั้น $\ln(\lim_{x\to 1} y) = 1$

นั่นคือ $\lim_{x\to 1} y = e^1 = e$

หรือ $\lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)} = e$

ตัวอย่าง 4.28. จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

วิธีทำ ให้ $y = x^{1/x}$ ดังนั้น $\ln y = \dfrac{\ln x}{x}$

และ $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ อยู่ในรูปแบบไม่กำหนด $\dfrac{\infty}{\infty}$

ดังนั้น $\lim_{x\to\infty} \ln y = 0$

เพราะว่า $\lim_{x\to\infty} \ln y = \ln(\lim_{x\to\infty} y)$ ดังนั้น $\ln(\lim_{x\to\infty} y) = 0$

นั่นคือ $\lim_{x\to\infty} y = e^0 = 1$

หรือ $\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = 1$