SCMA104 Systems of Ordinary Differential Equations and Applications in Medical Science

Pairote Satiracoo

2024-08-21

Contents

3.10 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

ในบทที่ 1 เราอธิบายการขยายพันธ์แบคทีเรีย $N(t)$ ในรูปของเวลา t ในรูปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยมีสมการดังต่อไปนี้

$$\frac{N(t+h)-N(t)}{h} = b \cdot N(t) - m \cdot N(t) \tag{3.42}$$

$$\tag{3.43}$$

ในทางคณิตศาสตร์เราเรียกสมการดังกล่าวว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) และมีเนื้อหาในรายวิชานี้ที่จะเรียนในบทถัดๆ ไป ทั้งนี้ฟังก์ชัน $N(t)$ ที่ปรากฏในสมการเป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า (unknown function) และเราสามารถหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นโดยวิธีการหาปริพันธ์ (Integration) ได้คำตอบของสมการดังนี้

$$N(t) = N_0 e^{(b-m)t} \tag{3.44}$$

ดังนั้นในบทนี้ เราจะกล่าวถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม เราสามารถใช้นิยาม หรือสูตรต่อไปนี้ในการหาอนุพันธ์

ทฤษฎี 3.7.

1. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$
2. $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$
3. $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$
4. $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1)$

ตัวอย่าง 3.38. จงหาอนุพันธ์ของ $f(x) = e^{x^2+1}$

วิธีทำ

เราสามารถใช้กฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ของ $f(x) = e^{x^2+1}$ ได้ดังต่อไปนี้

โดยการกำหนดให้ $u = x^2 + 1,$ แล้ว $f(x) = e^u$ และจะได้ว่า

เนื่องจาก $\frac{d}{du}e^u = e^u$ และ $\frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x.$

ดังนั้น

เมื่อแทนตัวแปร $u = x^2 + 1$ ลงในสมการข้างต้น เราจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}f(x) = e^{x^2+1} \cdot 2x$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $f(x) = e^{x^2+1}$ คือ

$$\boxed{\frac{d}{dx}f(x) = 2xe^{x^2+1}}$$

ตัวอย่าง 3.39. จงแสดงว่า $N(t) = \frac{K}{1+(K-1)e^{-rt}}$ เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

โดยที่ r และ K เป็นค่าคงตัวที่เป็นบวก สมการเชิงอนุพันธ์นี้มีชื่อเรียกว่า the logistic growth equation

วิธีทำ

1. **หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน** $N(t)$:

   กำหนดให้ $N(t) = \frac{K}{1+(K-1)e^{-rt}}$.

   เราสามารถใช้กฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

$$\frac{dN}{dt} =$$

2. **จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปอย่างง่าย**

$$\frac{dN}{dt} = \cdot$$

3. **แทน** $N(t)$ ลงใน the logistic equation:

เนื่องจาก

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

โดยการแทน $N(t) = \frac{K}{1+(K-1)e^{-rt}}$ ลงไปในสมการข้างต้น เราจะได้ว่า

$$rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = \frac{rK(K-1)e^{-rt}}{(1+(K-1)e^{-rt})^2}$$

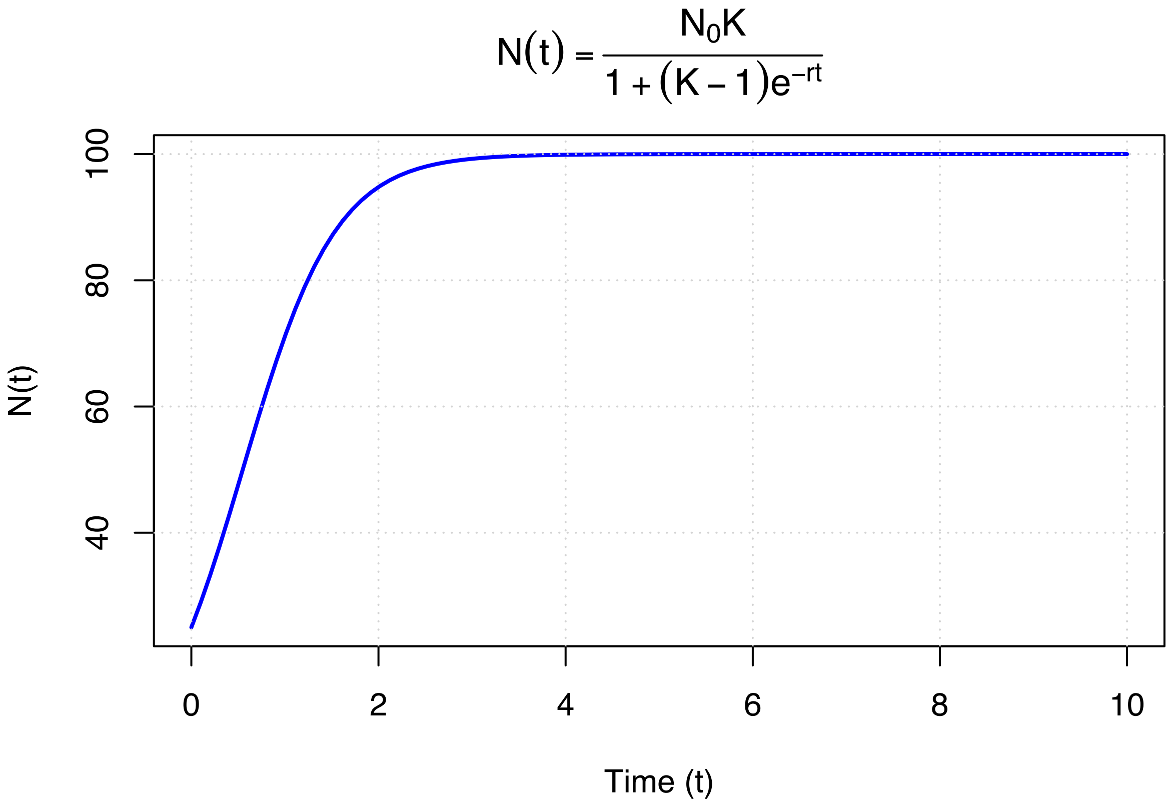
4. **ผลสรุปที่ได้จากการหาอนุพันธ์ และการแทนค่าฟังก์ชัน**

เราจะเห็นว่าทั้ง 2 ข้างของสมการข้างต้นเท่ากัน แสดงว่า ฟังก์ชัน $N(t) = \frac{K}{1+(K-1)e^{-rt}}$ เป็นคำตอบของสมการ the logistic growth equation

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้นเราสมมติให้ $N(0) = 1$ ในกรณีที่กำหนดให้ $N(0) = N_0$ แล้วคำตอบของสมการ the logistic growth equation จะอยู่ในรูป

$$N(t) = \frac{N_0 \cdot K}{1 + (K-1)e^{-rt}}$$

รูปต่อไปนี้แสดงกราฟของคำตอบของแบบจำลองการเติบโตแบบ logistic เมื่อกำหนดให้ $N_0 = 25$, $K = 4$ และ $r = 2$ กราฟจะมีลักษณะเป็นรูปตัว S (ซิกมอยด์, sigmoidal) ซึ่งสะท้อนการเติบโตที่จำกัดเนื่องจากความจุที่รองรับได้ (carrying capacity) หรือค่า K ในตอนแรก ประชากรจะเติบโตแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล แต่เมื่อเข้าใกล้ K อัตราการเติบโตจะช้าลงและกราฟจะแบนลง ซึ่งแตกต่างจากแบบจำลองการเติบโตแบบเอ็กซ์โพเนนเชียลธรรมดา โดยประชากรจะเติบโตโดยไม่มีขอบเขต โดยเป็นไปตามกราฟที่เพิ่มขึ้นอย่างต่อเนื่อง ในโมเดลโลจิสติกส์ การเติบโตถูกจำกัดและจะคงตัวเมื่อจำนวนประชากรใกล้ถึงขีดจำกัดความจุ


$N(t) = \frac{N_0 K}{1 + (K - 1)e^{-rt}}$
100
80
60
40
N(t)
0
2
4
6
8
10
Time (t)

ตัวอย่าง 3.40. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน:

$$y = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

โดยใช้การลอการิทึมทั้งสองฝั่งก่อนทำการหาอนุพันธ์

วิธีทำ

1. **ลอการิทึมทั้งสองข้าง:**

$$\ln y = \ln\left(\frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

ใช้สมบัติลอการิทึม

ย่อ:

2. **หาอนุพันธ์ทั้งสองข้าง:**

ย่อ:

3. **จัดรูปหา** $\frac{dy}{dx}$:

4. **แทนค่า** $y = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ $y = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}}$ คือ:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{e^x \cdot x^2}{\sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)}$$