Universidade Federal de São João Del-Rei
Engenharia de Telecomunicações
Processamento Digital de Sinais
Aula Prática IV - Equações Diferencias Lineares
Professor: Gustavo Fernandes Rodrigues

Nome: ____ ________________________

Questão 01 - Equações Diferenciais Lineares com coeficientes constantes

Uma importante subclasse de sistemas de tempo discreto é caracterizada através das equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, conforme mostrada a seguir:

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} p_k x[n-k], \tag{1}$$

onde $x[n]$ e $y[n]$ são respectivamente a entrada e saída do sistema, sendo d_k e p_k constantes. A ordem da equação diferencial que caracteriza o sistema é dada pelo máximo de (N, M).

A saída $y[n]$ pode ser calculada de forma recursiva:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} \frac{d_k}{d_0} y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} \frac{p_k}{d_0} x[n-k]. \tag{2}$$

O procedimento para solucionar a equação diferencial com coeficientes constantes da Equação 1 é similar ao caso de um sistema contínuo. A resposta da saída de $y[n]$ consiste de duas componentes que são calculadas independentemente:

$$y[n] = y_c[n] + y_p[n], \tag{3}$$

onde $y_c[n]$ é a solução da Equação 1 com entrada $x[n] = 0$, que é solução da equação diferencial homogênea:

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y[n-k] = 0, \tag{4}$$

e a componente $y_p[n]$ é a solução da Equação 1 com $x[n] \neq 0$. O termo $y_c[n]$ é chamado de solução complementar ou solução homogênea, enquanto $y_p[n]$ é chamado de solução particular. A soma da solução complementar e particular é chamado de solução total. A forma geral da solução complementar é dada por:

$$y_c[n] = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n + \cdots + \alpha_N \lambda_N^n, \tag{5}$$

onde os termos λ^1, λ^2, $\cdots$, λ^N representam as N raízes obtidas ao fazermos $y_c[n] = \lambda^n$ e os termos α_1, α_2, $\cdots$, α_N são constantes determinadas a partir de condições iniciais específicas para um sistema de tempo discreto.

Para achar a solução particular $y_p[n]$ o procedimento é assumir que a solução particular tem a mesma forma que um sinal de entrada $x[n]$ específico.

Exemplo 1) - Cálculo da solução total de um sistema linear e invariante no tempo para uma entrada constante

Vamos determinar a solução total para $n \geq 0$ de um sistema de tempo discreto caracterizado pela equação:

$$y[n] + y[n-1] - 6y[n-2] = x[n], \tag{6}$$

para um degrau de entrada $x[n] = 8u[n]$ e com condições iniciais $y[-1] = 1$ e $y[-2] = -1$.

Primeiramente determinamos a solução complementar, definindo $x[n] = 0$ e $y[n] = \lambda^n$, temos que:

$$\begin{aligned} \lambda^n + \lambda^{n-1} - 6\lambda^{n-2} &= \lambda^{n-2}(\lambda^2 + \lambda - 6) && (7) \\ &= \lambda^{n-2}(\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0, && (8) \end{aligned}$$

uma vez que as raízes do polinômio $\lambda^2 + \lambda - 6$ são $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 2$. Desta forma, a solução complementar é dada por:

$$y_c[n] = \alpha_1(-3)^n + \alpha_2(2)^n. \tag{9}$$

Para a solução particular, nós assumimos que:

$$y_p[n] = \beta. \tag{10}$$

Substituindo na Equação 6:

$$\beta + \beta - 6\beta = 8u[n], \tag{11}$$

onde $\beta = -2$ para $n \geq 0$.

A solução total é dada por:

$$y[n] = \alpha_1(-3)^n + \alpha_2(2)^n - 2, \qquad n \geq 0. \tag{12}$$

As constantes α_1 e α_2 podem ser escolhidas para atender as condições iniciais:

$$\begin{aligned} y[-2] &= \alpha_1(-3)^{-2} + \alpha_2(2)^{-2} - 2 = -1 && (13) \\ y[-1] &= \alpha_1(-3)^{-1} + \alpha_2(2)^{-1} - 2 = 1 && (14) \end{aligned}$$

Resolvendo estas equações temos que:

$$\alpha_1 = -1.8, \alpha_2 = 4.8, \tag{15}$$

A solução total é dada por:

$$y[n] = -1.8(-3)^n + 4.8(2)^n - 2, \qquad n \geq 0. \tag{16}$$

Questão 02 - Cálculo da Saída de um sistema usando Matlab

A saída de um sistema causal linear e invariante no tempo da forma da Equação 2 pode ser simulada usando a função `filter` do Matlab. Esta função implementa a Equação 2 conforme mostra as equações a seguir:

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{p_0}{d_0}x[n] + s_1[n-1], && (17) \\ s_1[n] &= \frac{p_1}{d_0}x[n] - \frac{d_1}{d_0}y[n] + s_2[n-1], && (18) \\ &\vdots && (19) \\ s_{N-1}[n] &= \frac{p_{N-1}}{d_0}x[n] - \frac{d_{N-1}}{d_0}y[n] + s_{N-2}[n-1], && (20) \\ s_N[n] &= \frac{p_N}{d_0}x[n] - \frac{d_N}{d_0}y[n], && (21) \end{aligned}$$

onde $s_i[n]$, $1 \leq i \leq N$, são N variáveis internas. Os valores destas variáveis internas $s_i[n]$ no instante inicial são chamadas de condições iniciais.

A função `filter` do Matlab apresenta a seguinte forma:

```
y = filter(p,d,x);
[y, sf]=filter(p,d,x,si);
```

Desta forma o vetor de entrada **x** é processado por um sistema caracterizado pelos coeficientes contidos nos vetores **p** e **d**, gerando o vetor de saída **y**, considerando as condições iniciais iguais a zero. Na segunda representação temos a inclusão das condições iniciais (**si**) e o vetor de saída **sf** com os valores finais de **si**.

Exemplo 2) - Solução Total usando o Matlab

Vamos verificar o resultado obtido no - Exemplo 1) - usando o Matlab. Onde temos que: $y[n] + y[n-1] - 6y[n-2] = x[n]$.

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + s_1[n-1], & (22)\\ s_1[n] &= s_2[n-1] - y[n], & (23)\\ s_2[n] &= 6y[n]. & (24)\\ & & (25) \end{aligned}$$

O próximo passo consiste em determinar os valores iniciais de $s_1[n]$ e $s_2[n]$ a partir das condições iniciais de $y[-1]$ e $y[-2]$. Das equações acima temos que:

$$\begin{aligned} s_2[-1] &= 6y[-1] = (6)(1) = 6, & (26)\\ s_1[-1] &= -y[-1] + 6y[-2] = (-1) + 6(-1) = -7. & (27)\\ & & (28) \end{aligned}$$

Para o cálculo das primeiras oito primeiras amostras da saída de $y[n]$, $0 \leq n \leq 7$, temos que:

```
[y,sf]=filter(1,[1 1 -6], 8*ones(1,8),[-7,6]);
```

Os resultado são:

y = [1 13 1 85 -71 589 -1007 4549];

Calculando a saída utilizando a resposta do exemplo anterior temos que:

$$y[n] = -1.8(-3)^n + 4.8(2)^n - 2, \qquad n \geq 0. \tag{29}$$

```
n=0:7;
y=-1.8*(-3).^n+4.8*(2).^n-2;
```

A resposta é a mesma:

y = [1 13 1 85 -71 589 -1007 4549];

Questão 03 - Cálculo da Resposta ao Impulso e a Resposta ao Degrau de um sistema usando Matlab

Determine a resposta ao impulso das primeiras 41 amostras de um sistema causal, linear e invariante no tempo definido por:

$$y[n]+0.7y[n-1]-0.45y[n-2]-0.6y[n-3] = 0.8x[n]-0.44x[n-1]+0.36x[n-2]+0.02x[n-3]; \quad (30)$$

```
p=[0.8 -0.44 0.36 0.02]
d=[1 0.7 -0.45 -0.6];
[h,m]=impz(p,d,41);
[s,m]=stepz(p,d,41);
```

As figuras 3 e 4 mostram a resposta ao impulso e ao degrau do sistema:

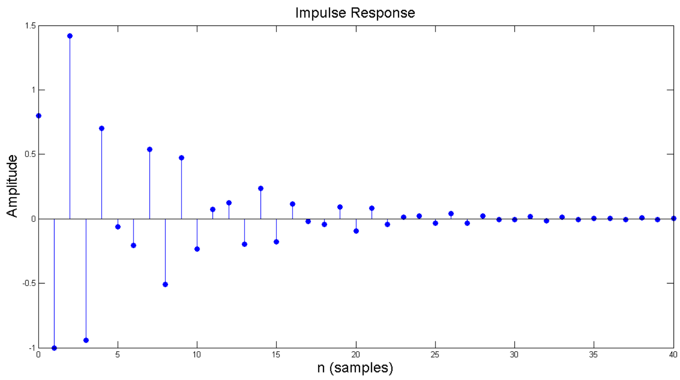

Figure 1: Resposta ao Impulso obtida para o sistema.

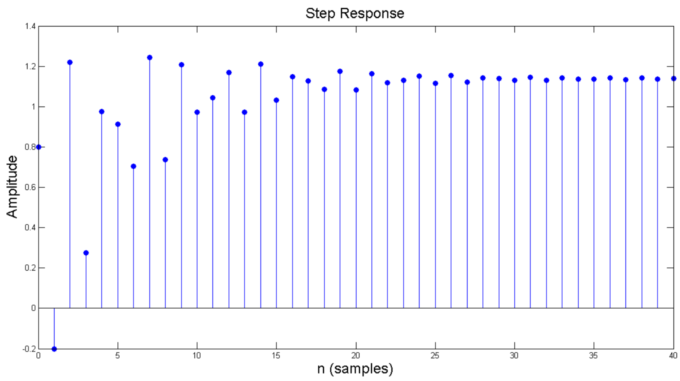

Figure 2: Resposta ao Degrau obtida para o sistema.

Questão 04 - Filtros Recursivos usando Matlab

A equação genérica de filtros recursivos pode ser dada por:

$$y[n] = a_0x[n] + a_1x[n-1] + \cdots + b_1y[n-1] + b2y[n-2] + ... \quad (31)$$

Um exemplo de um filtro recursivo passa baixa de primeira ordem é descrito abaixo:

$$y[n] = a_0x[n] + b_1y[n-1]; \quad (32)$$

sendo: $y[n]$ igual a saída do sistema; b_1 corresponde ao fator de decaimento das amostras ($b_1 = x = e^{-2\pi f_c}$) e o termo a_0 corresponde ao coeficiente de $x[n]$ ($a_0 = 1 - x$).

Exemplo de um filtro passa baixa com frequência de corte (f_c) igual a 0.05 radianos.

```
x=e^(-2π0.05)=0.7304;
y[n]=0.2696x[n]+0.7304y[n-1];
```

Considerando as primeiras 40 amostras, podemos plotar o gráfico da resposta ao impulso do sistema no domínio do tempo usando a função `impz` e no domínio da frequência usando a função `freqz`.

```
d=[1 -0.7304];
p=[0.2696];
h=impz(p,d,40);
impz(p,d,40);
freqz(h);
```

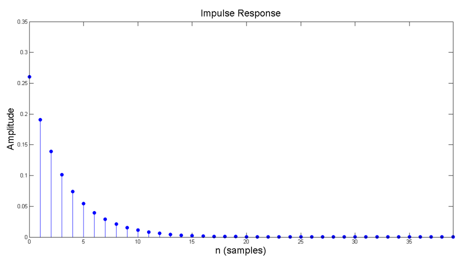

Figure 3: Resposta ao Impulso obtida para o filtro passa baixa no domínio do tempo.

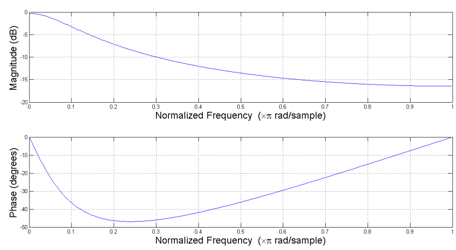

Figure 4: Resposta ao Impulso para o filtro passa baixa no domínio da frequência e gráfico de fase.

Exercícios de Matlab

1) Projete um filtro passa baixas utilizando uma função recursiva de primeira ordem.
2) Projete um filtro passa altas utilizando uma função recursiva de primeira ordem.
3) Projete um filtro passa faixa utilizando uma função recursiva de primeira ordem.