数理逻辑课后题/考题答案

作者: 杨森

2017 年 8 月 16 日

课后题

2. 解:

1) => 利用结构归纳法证明

   (a) Y 是命题变元，此时 Y 的生成序列即为自身;

   (b) $Y = \neg A$，A 的生成序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$, 则 Y 的生成序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_m, Y$;

   (c) $Y = B \vee C$, B 的生成序列为 $B_1, B_2, \cdots, B_m (= B)$, C 的生成序列为 $C_1, C_2, \cdots, C_n (= C)$, 则 Y 的生成序列为 $B_1, B_2, \cdots, B_m, C_1, C_2, \cdots, C_n$ $Y = (B \vee C)$

2) <= 利用第二归纳法证明

   假设 Y 的生成序列为 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m (= Y)$，证明 $Y_i (1 \leq i \leq m)$ 是合式公式

   (a) Y_i 是命题变元，则 Y_i 是合适公式;

   (b) $Y_i = \neg Y_j (j < i)$，因为 Y_j 是合式公式，故 Y_i 也是合式公式;

   (c) $Y_i = Y_j \vee Y_k (j, k < i)$，因为 Y_j,Y_k 是合式公式，故 Y_i 也是合式公式。

综上，Y 为合式公式当且仅当 Y 有一个生成序列。

5. 解: 用结构归纳法证明

1) A 为命题变元 p，显然结论成立;

2) $A = \neg B$，因为 B 满足条件，则 $\neg(B)$ 即 A 也满足条件;

3) $A = B \vee C$，因为 B，C 满足条件，则 $(B) \vee (C)$ 也满足条件

综上，若表达式 A 为合式公式，则最终计数为 0.

8. 解: 用公式结构归纳法证明

1) A 为命题变元 p

   (a) $p \in \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ 且 $p = p_i$，则 $S^{p_1, p_2, \cdots, p_n}_{B_1, B_2, \cdots, B_n} A = B_i$，即 $S^{p_1, p_2, \cdots, p_n}_{B_1, B_2, \cdots, B_n} A$ 为合式公式;

   (b) $p \notin \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$, 则 $S^{p_1, p_2, \cdots, p_n}_{B_1, B_2, \cdots, B_n} A = A$;

2) $A = \neg B$, 则 $S^{p_1, p_2, \cdots, p_n}_{B_1, B_2, \cdots, B_n} B$ 为合式公式，所以 $\neg S^{p_1, p_2, \cdots, p_n}_{B_1, B_2, \cdots, B_n} B = S^{p_1, p_2, \cdots, p_n}_{B_1, B_2, \cdots, B_n} \neg B$ 为合式公式，即 $S^{p_1, p_2, \cdots, p_n}_{B_1, B_2, \cdots, B_n} A$ 为合式公式;

3) $A = B \vee C$, 则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}B$,$S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}C$ 为合式公式，所以 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}B \vee S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}C = S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}(B \vee C)$ 为合式公式，即 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A$ 为合式公式；

综上，若 A 是合式公式，则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A$ 为合式公式。

9. 解：若 C 为永真式，根据 Godel 完全性定理则 $\vdash C$，设 C 的证明序列为 $C_1, C_2, \cdots, C_n$, 用第二归纳法证明，$\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_i, 1 \leq i \leq n$:

1) $C_i \in Aoxims$，显然 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_i$ 也为公理

2) 存在 $j, k < i$ 使 $C_k = C_j \supset C_i$，因为 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_j$ 且 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_k$, 即 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_j \supset S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_i$，有 MP 规则可推出 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_i$。

综上 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C$, 即 $\vdash D$，再由 Godel 完全性定理推出 $\models D$, 即 D 为永真式。

10.$(\neg(\neg(q \vee r) \vee \neg p) \vee \neg\neg(q \vee r))$

12. 解：

$$
\begin{array}{lll}
1. & A \vee (B \vee C) \vdash A \vee (B \vee C) & \\
2. & A \vee (B \vee C) \vdash (B \vee C) \vee A & 1, i) \\
3. & A \vee (B \vee C) \vdash B \vee (C \vee A) & 2, ii) \\
4. & A \vee (B \vee C) \vdash (C \vee A) \vee B & 3, i) \\
5. & A \vee (B \vee C) \vdash C \vee (A \vee B) & 4, ii) \\
6. & A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C & 5, i)
\end{array}
$$

14. 可满足的

其否定对应的合取范式为 $(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg s \vee q) \wedge \neg p \wedge r$, 令 $S = \{\neg p \vee q, \neg r \vee s, \neg s \vee q, \neg p, r\}$, 对 S 应用消解规则如下:

$$
\begin{array}{lll}
1. & S & \\
2. & \{\neg r \vee s, \neg s \vee q, r\} & 1, \text{关于}\neg p\text{纯文字规则} \\
3. & \{s, \neg s \vee q\} & 2, \text{关于}\neg r\text{单文字规则} \\
4. & \{q\} & 3, \text{关于}\neg s\text{单文字规则} \\
5. & \{qed\} & 4, \text{关于}\neg q\text{纯文字规则}
\end{array}
$$

令 $\varphi(r) = f$ 时为真，$\varphi(p) = f, \varphi(q) = \varphi(r) = \varphi(s) = t$ 时为假。

15. 永真式

对应的析取范式为 $(\neg r \vee \neg s \vee r \vee \neg q \vee p) \wedge (q \vee \neg p \vee s \vee \neg s \vee r \vee \neg q \vee p)$，每个短句都包含互补文字，故为永真式。

16. 永真式，用真值表

17. 可满足，$\varphi(p) = t, \varphi(q) = f$ 时为真，$\varphi(p) = f, \varphi(q) = t$ 时为假。

18. 永真式，用真值表

19. 解 P' 系统可以看做 P 系统由 $\neg(p \supset q)$ 出发进行的证明

方法一：先证明在 P 系统下若 Γ 不协调，且 $\neg A \notin Th(\Gamma)$, 则 $\Gamma \cup \{A\}$ 协调。若 $\Gamma \cup \{A\}$ 不协调，则存在 B 使得 $\Gamma, A \vdash B$ 且 $\Gamma, A \vdash \neg B$, 则

1.	$\Gamma, A \vdash B$	hyp
2.	$\Gamma, A \vdash \neg B$	hyp
3.	$\Gamma, A \vdash \neg A$	$1, 2, DR$
4.	$\Gamma \vdash A \supset \neg A$	$3, CP$
5.	$\Gamma \vdash \neg A \supset \neg A$	
6.	$\Gamma \vdash \neg A$	$4, 5, DR_3$

这与 $\neg A \notin Th(\Gamma)$ 矛盾，故 $\Gamma \cup \{A\}$ 协调。因为 $\neg(p \supset q)$ 不为永真式，而 P 系统的定理都为永真式, 故 $\neg(p \supset q) \notin Th(P)$, 所以 $Axiom \cup \{\neg(p \supset q)\}$ 协调，即 P' 系统是协调的。

方法二：假设 P' 系统不协调，则在 P 系统下存在 B 使得 $\neg(p \supset q) \vdash B$ 且 $\neg(p \supset q) \vdash \neg B$，根据 Godel 完全性定理，$\neg(p \supset q) \models B$ 且 $\neg(p \supset q) \models \neg B$，明显矛盾，故 P' 系统协调。

75. 解：用结构归纳法证明

1) 若 A 为命题变元

   (a) A=m，则 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B A = S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} B$，因为 $B = S^{x_1,x_2,\cdots,x_n}_{u_1,u_2\cdots,u_n} C$ 且 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 不在 C 中出现，故 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} B = C = S^m_C A$

   (b) A 为命题变元，且 $A = p \neq m$, 则 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B A = S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} p = p = S^m_C A$

2) A 为原子公式，$A = P(t_1, t_2, \cdots, t_k), t_i = f(y_1, y_2, \cdots, y_j), 1 \leq i \leq k$, 则 m 不在 A 中出现，所以 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B A = A = S^m_C A$

3) $A = \neg D$,因为 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B D = S^m_C D$,所以 $\neg S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B D = \neg S^m_C D$, 即 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B A = S^m_C A$

4) $A = D \vee E$, 因为 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B D = S^m_C D$, 且 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B E = S^m_C E$, 则 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B D \vee S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B E = S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B (D \vee E) = S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B A = S^m_C D \vee S^m_C E = S^m_C (D \vee E) = S^m_C A$

5) $A = \forall y D$, 则 $y \notin \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, 则 B 对 A 中 m 是自由的, 且 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B D = S^m_C D$, , 所以 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B A = S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B \forall y D = \forall y S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B D = \forall y S^m_C D = S^m_C \forall y D = S^m_C A$

综上，结论成立.

76. 解：