# 数理逻辑课后题/考题答案

作者: 杨森

2017 年 8 月 20 日

# 课后题

1. 略
2. 解:

1) => 利用结构归纳法证明

(a) Y 是命题变元，此时 Y 的生成序列即为自身；

(b) $Y=\neg A$，A 的生成序列为 $A_1,A_2,\cdots,A_m(=A)$, 则 Y 的生成序列为 $A_1,A_2,\cdots,A_m,Y$;

(c) $Y=B\vee C$, B 的生成序列为 $B_1,B_2,\cdots,B_m(=B)$, C 的生成序列为 $C_1,C_2,\cdots,C_n(=C)$, 则 Y 的生成序列为 $B_1,B_2,\cdots,B_m,C_1,C_2,\cdots,C_n\ Y=(B\vee C)$

2) <= 利用第二归纳法证明

假设 Y 的生成序列为 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m(=Y)$，证明 $Y_i(1\le i\le m)$ 是合式公式

(a) $Y_i$ 是命题变元，则 $Y_i$ 是合适公式；

(b) $Y_i=\neg Y_j(j<i)$，因为 $Y_j$ 是合式公式，故 $Y_i$ 也是合式公式；

(c) $Y_i=Y_j\vee Y_k(j,k<i)$，因为 $Y_j$,$Y_k$ 是合式公式，故 $Y_i$ 也是合式公式。

综上，Y 为合式公式当且仅当 Y 有一个生成序列。
3. 略 (根据公式定义进行证明)
4. 略
5. 解: 用结构归纳法证明

1) A 为命题变元 p，显然结论成立；

2) $A=\neg B$，因为 B 满足条件，则 $\neg(B)$ 即 A 也满足条件；

3) $A=B\vee C$，因为 B，C 满足条件，则 $(B)\vee(C)$ 也满足条件

综上，若表达式 A 为合式公式，则最终计数为 0.
6. 略
7. 略
8. 解: 用公式结构归纳法证明

1) A 为命题变元 p

(a) $p\in\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 且 $p=p_i$，则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A=B_i$，即 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A$ 为合式公式;

(b) $p\notin\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$, 则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A=A$;

2) $A=\neg B$, 则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}B$ 为合式公式，所以 $\neg S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}B=S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}\neg B$ 为合式公式，即 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A$ 为合式公式；

3) $A=B\vee C$, 则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}B$,$S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}C$ 为合式公式，所以 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}B\vee S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}C=S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}(B\vee C)$ 为合式公式，即 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A$ 为合式公式；

综上，若 A 是合式公式，则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A$ 为合式公式。

9. 解：若 C 为永真式，根据 Godel 完全性定理则 $\vdash C$，设 C 的证明序列为 $C_1,C_2,\cdots,C_n$, 用第二归纳法证明，$\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_i,1\le i\le n$:

1) $C_i \in Aoxims$，显然 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n} C_i$ 也为公理

2) 存在 $j, k < i$ 使 $C_k = C_j \supset C_i$，因为 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n} C_j$ 且 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n} C_k$, 即 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n} C_j \supset S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n} C_i$，有 MP 规则可推出 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n} C_i$。

综上 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n} C$, 即 $\vdash D$，再由 Godel 完全性定理推出 $\models D$, 即 D 为永真式。

10.$(\neg(\neg(q \vee r) \vee \neg p) \vee \neg\neg(q \vee r))$

12. 解:

$$
\begin{array}{lll}
1. & A \vee (B \vee C) \vdash A \vee (B \vee C) & \\
2. & A \vee (B \vee C) \vdash (B \vee C) \vee A & 1, i) \\
3. & A \vee (B \vee C) \vdash B \vee (C \vee A) & 2, ii) \\
4. & A \vee (B \vee C) \vdash (C \vee A) \vee B & 3, i) \\
5. & A \vee (B \vee C) \vdash C \vee (A \vee B) & 4, ii) \\
6. & A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C & 5, i)
\end{array}
$$

13. 暂无

14. 可满足的

其否定对应的合取范式为 $(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s) \wedge (\neg s \vee q) \wedge \neg p \wedge r$, 令 $S = \{\neg p \vee q, \neg r \vee s, \neg s \vee q, \neg p, r\}$, 对 S 应用消解规则如下:

$$
\begin{array}{lll}
1. & S & \\
2. & \{\neg r \vee s, \neg s \vee q, r\} & 1, \text{关于}\neg p\text{纯文字规则} \\
3. & \{s, \neg s \vee q\} & 2, \text{关于}\neg r\text{单文字规则} \\
4. & \{q\} & 3, \text{关于}\neg s\text{单文字规则} \\
5. & \{qed\} & 4, \text{关于}\neg q\text{纯文字规则}
\end{array}
$$

令 $\varphi(r) = f$ 时为真，$\varphi(p) = f, \varphi(q) = \varphi(r) = \varphi(s) = t$ 时为假。

15. 永真式

对应的析取范式为 $(\neg r \vee \neg s \vee r \vee \neg q \vee p) \wedge (q \vee \neg p \vee s \vee \neg s \vee r \vee \neg q \vee p)$，每个短句都包含互补文字，故为永真式。

16. 永真式，用真值表

17. 可满足，$\varphi(p) = t, \varphi(q) = f$ 时为真，$\varphi(p) = f, \varphi(q) = t$ 时为假。

18. 永真式，用真值表

19. 解 P' 系统可以看做 P 系统由 $\neg(p \supset q)$ 出发进行的证明

方法一：先证明在 P 系统下若 $\Gamma$ 不协调，且 $\neg A \notin Th(\Gamma)$, 则 $\Gamma \cup \{A\}$ 协调。若 $\Gamma \cup \{A\}$ 不协

调，则存在 B 使得 $\Gamma, A \vdash B$ 且 $\Gamma, A \vdash \neg B$, 则

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\Gamma, A \vdash B$ | $hyp$ |
| 2. | $\Gamma, A \vdash \neg B$ | $hyp$ |
| 3. | $\Gamma, A \vdash \neg A$ | $1, 2, DR$ |
| 4. | $\Gamma \vdash A \supset \neg A$ | $3, CP$ |
| 5. | $\Gamma \vdash \neg A \supset \neg A$ | |
| 6. | $\Gamma \vdash \neg A$ | $4, 5, DR_3$ |

这与 $\neg A \notin Th(\Gamma)$ 矛盾，故 $\Gamma \cup \{A\}$ 协调。因为 $\neg(p \supset q)$ 不为永真式，而 P 系统的定理都为永真式, 故 $\neg(p \supset q) \notin Th(P)$ , 所以 $Axiom \cup \{\neg(p \supset q)\}$ 协调，即 P' 系统是协调的。

方法二：假设 P' 系统不协调，则在 P 系统下存在 B 使得 $\neg(p \supset q) \vdash B$ 且 $\neg(p \supset q) \vdash \neg B$，根据 Godel 完全性定理，$\neg(p \supset q) \models B$ 且 $\neg(p \supset q) \models \neg B$，明显矛盾，故 P' 系统协调。

20. 解不协调，记公理模式 $A \supset B$ 为 AS'

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\vdash A \vee A \supset A$ | $AS_1$ |
| 2. | $\vdash (A \vee A \supset A) \supset \neg(A \vee A \supset A)$ | $AS'$ |
| 3. | $\vdash \neg(A \vee A \supset A)$ | $1, 2, \bar{M}P$ |
| 4. | $\vdash B$ | $3, DR$ |

故在 P 系统中增加 $A \supset B$ 做为公理所得系统不协调。

21. 解:

不存在不含“$\vee$”的定理。用反证法证明：若 A 为满足条件的公式，易知 A 中只有一个命题变元，设为 p，如果辖域中包含 p 的“$\neg$”的个数为偶数，令指派 $\varphi(p) = f$，否则 $\varphi(p) = t$，则 $\varphi(A) = f$，而 P 系统的定理都为永真式，所以 P 系统中不存在不含“$\vee$”的定理。

22. 解:

不存在不含“$\neg$”的定理。用反证法证明：若 A 为满足条件的公式，其中出现的命题变元为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，另 $\varphi(p_1) = \varphi(p_2) = \cdots = \varphi(p_n) = f$，则 $\varphi(A) = f$，而 P 系统的定理都为永真式，所以 P 系统中不存在不含“$\neg$”的定理。

23. 解:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\vdash A \vee A \supset A \vee A$ | $Axiom$ |
| 2. | $\vdash (A \vee A \supset A \vee A) \supset (A \vee A \supset \neg(A \vee A))$ | $Axiom$ |
| 3. | $\vdash A \vee A \supset \neg(A \vee A)$ | $1, 2, MP$ |
| 4. | $\vdash (A \vee A \supset \neg(A \vee A)) \supset \neg(A \vee A) \vee A$ | $Axiom$ |
| 5. | $\vdash \neg(A \vee A) \vee A$ | $3, 4, MP$ |
| 6. | $\vdash \neg(A \vee A) \vee A \supset A \vee A$ | $Axiom$ |
| 7. | $\vdash A \vee A$ | $5, 6, MP$ |
| 8. | $\vdash A$ | $5, 7, MP$ |

可以看出 s 的公式皆为定理，故 s 不协调。

24. 解:

A 是 R 的定理

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\vdash A * A$ | $Axiom$ |
| 2. | $\vdash A * (A * A)$ | $Axiom$ |
| 3. | $\vdash A$ | $1, 2, < A, (B * A), B >$ |

25. 解：令 $\Gamma = \{\neg P\}$(P 为命题变元)。

1) P' 是协调的对于 P 系统，$\Gamma$ 是可满足的，且存在唯一的指派 $\varphi : P \to f$ 满足 $\Gamma$，则 $\Gamma \not\models p$，根据完全性定理 $\Gamma \nvdash p$，所以在 P' 中，命题变元 p 不是定理，故 P' 是协调的。
2) 利用 1) 中的指派判断 A 的真值，若 $\varphi(A) = t$，则 A 是 P' 的定理。构造过程为 P 系统下从 $\Gamma$ 出发的证明序列。

26. 解: 设命题变元 p 在 A 中不出现。

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\vdash p \supset S^p_A p$ | $Axiom$ |
| 2. | $\vdash p \supset A$ | 1 |
| 3. | $\vdash p \supset A \supset S^p_{p \supset A}(p \supset A)$ | $Axiom$ |
| 4. | $\vdash p \supset A \supset (p \supset A \supset A)$ | 3. |
| 5. | $\vdash p \supset A \supset A$ | $2, 4, MP$ |
| 6. | $\vdash A$ | $2, 5, MP$ |

所以对任意公式 A 都可以构造出证明序列，所以 P' 不协调，但同时是完全的。

27. 解:

定义 $\psi$ 如下：

$$\begin{cases} \psi(p) = p & \text{若 p 为命题变元} \\ \psi(\wedge) = \vee \\ \psi(\vee) = \wedge \\ \psi(\neg) = \neg \\ \psi(\alpha\beta) = \psi(\alpha)\psi(\beta) \end{cases}$$

易知

- $A \in L(P)$，则 $\psi(A) \in L(Q)$;
- 若 $A \in L(Q)$，则 $\psi(A) \in L(P)$;
- $\psi(\psi(A)) = A$。

首先利用第二归纳法证明必要性：假设 A 为 Q 系统的定理，且证明序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_n (= A)$，下面证明 $A_i$ 为永假式：

- $A_i \in Axiom$，显然 $A_i$ 为永假式；
- 存在 $j, k < i$ 使得 $A_k = \neg A_j \wedge A_i$，根据归纳假设，因为 $A_k, A_j$ 皆为永假式，所以 $A_i$ 为永假式。

必要性得证。
下面分两步进行证明充分性：

1) 用第二归纳法证明，若 A 为 P 系统的定理，则 $\psi(A)$ 为 Q 系统定理，设 A 在 P 系统下的证明序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_n (= A)$:
   (a) $A_i \in Axiom_P$，显然 $A_i \in Axiom_Q$，则 $\vdash_Q \psi(A_i)$;
   (b) 存在 $j, k < i$，使得 $A_k = A_j \supset A_i$ 即 $A_k = \neg A_j \vee A_i$，则根据归纳假设 $\vdash \psi(A_j)$ 且 $\vdash \psi(\neg A_j \vee A_i)$ 即 $\vdash \neg\psi(A_j) \wedge \psi(A_i)$，所以 $\vdash \psi(A_i)$。
2) 用结构归纳法证明：若 $A \in L(Q)$ 且 A 为永假式，则 $\psi(A) \in L(P)$ 且 A 为永真式，若 $A \in L(Q)$ 为永真式，则 $\psi(A) \in L(P)$ 为永假式。
   (a) $A = p \wedge \neg p$ 或者 $A = \neg p \wedge p$，显然 A 为 Q 系统的最简永假式，$\psi(A) \in L(P)$ 为永真式;
   (b) $A = \neg(p \wedge \neg p)$ 或者 $A = \neg(\neg p \wedge p)$，显然 A 为 Q 系统的最简永真式，$\psi(A) \in L(P)$ 为永假式;
   (c) $A = \neg B$ 且 A 为永假式，根据归纳假设，B 为永真式，且 $\psi(B) \in L(P)$ 且为永假式，因为 $\psi(A) = \psi(\neg B) = \neg\psi(B)$，则 $\psi(A) \in L(P)$ 为永真式；
   (d) $A = \neg B$ 且 A 为永真式，根据归纳假设，B 为永假式，且 $\psi(B) \in L(P)$ 且为永真式，因为 $\psi(A) = \psi(\neg B) = \neg\psi(B)$，则 $\psi(A) \in L(P)$ 为永假式；
   (e) $A = B \wedge C$ 且 A 为永假式，则存在以下三种情况：
      - B 为永假式，根据归纳假设 $\psi(B) \in L(P)$ 且为永真式，因为 $\psi(A) = \psi(B \wedge C) = \psi(B) \vee \psi(C)$，则 $\psi(A) \in L(P)$ 为永真式；
      - C 为永假式，证明同上；

- B,C 均不为永假式，但对任意指派 $\varphi$ 都有 $\varphi(B) \neq \varphi(C)$，又因为 $\psi(A) = \psi(B \wedge C) = \psi(B) \vee \psi(C)$，所以 $\psi(A) \in L(P)$ 为永真式；

(f) $A = B \wedge C$ 且 A 为永真式，则 B 和 C 皆为永真式，根据归纳假设，$\psi(B) \in L(P)$ 且为永假式且 $\psi(C) \in L(P)$ 且为永假式，又因为又因为 $\psi(A) = \psi(B \wedge C) = \psi(B) \vee \psi(C)$，故 $\psi(A) \in L(P)$ 为永假式。

综上，若 $A \in L(Q)$ 且 A 为永假式，根据充分性第二步证明，则 $\psi(A) \in L(P)$ 且为永真式，即 $\models_P \psi(A)$，根据完全性定理有 $\vdash_P \psi(A)$，根据充分性证明的第一步有 $\vdash_Q \psi(\psi(A))$，即 $\vdash_Q A$。充分性得证。

28. 解: 用公式结构结构归纳法证明:

1) A 为命题变元，易知 $V_\varphi(A) = V_\psi(A)$;

2) $A = \neg B$，由归纳假设知 $V_\varphi(B) = V_\psi(B)$，所以 $V_\varphi(A) = \neg V_\varphi(B) = \neg V_\psi(B) = V_\psi(\neg B) = V_\psi(A)$;

3) $A = B \vee C$，由归纳假设知 $V_\varphi(B) = V_\psi(B)$ 且 $V_\varphi(C) = V_\psi(C)$，所以 $V_\varphi(A) = V_\varphi(B \vee C) = V_\varphi(B) \vee V_\varphi(C) = V_\psi(B) \vee V_\psi(C) = V_\psi(B \vee C) = V_\psi(A)$。

综上，$V_\varphi(A) = V_\psi(A)$。

29. 解: 不是，参考 27 题

30. 解:

1)

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\vdash p \vee p \supset p$ | $AS_1$ |
| 2. | $\vdash A \vee A \supset A$ | $1, sub$ |
| 3. | $\vdash p \supset q \vee p$ | $AS_2$ |
| 4. | $\vdash A \supset B \vee A$ | $3, sub$ |
| 5. | $\vdash p \supset q \supset (r \vee q \supset q \vee r)$ | $AS_3$ |
| 6. | $\vdash A \supset B \supset (C \vee A \supset B \vee C)$ | $5, sub$ |

由 2,4,6 知 P 的定理比为 p' 的定理。下面用第二归纳法证明 P' 的定理也为 P 的定理，设 A 为 P' 的定理，且证明序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_n (= A)$，则 $\vdash_P A_i$

(a) $A_i \in Axiom$，显然 $\vdash_P A_i$ 成立；

(b) 存在 $j, k < i$ 使得 $A_k = A_j \supset A_i$，根据归纳假设 $\vdash_P A_j$ 且 $\vdash_P A_k$，根据 P 系统的 MP 规则知 $\vdash_P A_i$ 成立；

(c) 存在 $j < i$ 使得 $A_i = S^{p_1, p_2, \cdots, p_n}_{B_1, B_2, \cdots, B_n} A_j$，根据归纳假设 $\vdash_P A_j$，由 P 系统的代入规则 sub 知 $\vdash_P A_i$ 成立。

所以 P 系统和 P' 系统具有相同的定理。

2) 若无 sub 规则，则不能推出 $s \vee s \supset s$(不能推出包含除 p,q,r 之外命题变元的公式)，故 sub 规则独立；若无 MP 规则，则不能推出 $s \vee \neg s$(不能推出长度小于 5 的公式)，故 MP 规则独立。

31. 与 30 题重复 32. 解:

令 $AS_4 = \neg A \vee A$，$AS_5 = A \vee \neg A$。下面证明 $AS_1 - AS_3$ 的独立性。

1) 给每个命题变元以 0，1,2 三个可能的值，$\neg$ 和 $\vee$ 的真值表定义如下:

| | $\neg$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 2 |

| $\vee$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 0 |

$AS_2 - AS_5$ 在此数值解释下恒为 0，而 $AS_1$ 不常为 0，故 $AS_2 - AS_5$ 不能表示出 $AS_1$。

2) 定义 $\neg$ 和 $\vee$ 的真值表定义如下:

| | $\neg$ |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 1 |
| 2 | 0 |

| $\vee$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 2 |

$AS_1, AS_3 - AS_5$ 在此数值解释下永不为 2，而 $AS_2$ 可能为 2，故 $AS_1, AS_3 - AS_5$ 不能表示出 $AS_2$。

3) 定义 $\neg$ 和 $\vee$ 的真值表定义如下:

| | $\neg$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

| $\vee$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 2 |

$AS_1, AS_2, AS_4, AS_5$ 在此数值解释下恒为 0，$AS_3$ 不恒为 0，故 $AS_1, AS_2, AS_4, AS_5$ 不能表示出 $AS_3$。

综上，结论成立。

33. 解:

构造如下的数值解释:

| | $\neg$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| $\vee$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

在此数值解释下，$AS_1 - AS_3$ 恒为 1，$P \supset \neg\neg P$ 不恒为 1，且两个恒为 1 的公式经 MP 规则必得到一个恒为 1 的公式，故不能从 $P^*$ 系统导出 $P \supset \neg\neg P$。

34. 解:

设 p,q 为命题变元，A 为由 $\{\neg, \equiv\}, p, q$ 构成的公式。用公式结构归纳法证明若 $A_i$ 不是永真式或永假式，则 $A_i$ 的真值表中取值为真的个数与取值为假的个数相等。

1) $A = p$ 或者 $A = q$，显然成立；

2) $A = \neg B$，显然成立；

3) $A = B \equiv C$，若 $\varphi(B) = \varphi(C)$ 或 $\varphi(B) \neq \varphi(C)$ 时，则 $A$ 为永真式或永假式，当 $\varphi(B), \varphi(C)$ 不完全一样或完全相反时 ($\varphi$ 为任意指派)，通过枚举可知结论同样成立。

所以，A 为永真式或者永假式或 A 的真值表中 t 的个数与 f 的个数相等，而 $v$ 的真值表中 t 的个数与 f 的个数不等，因此 $\{\neg, \equiv\}$ 不能表示出 $\vee$，则 $\{\neg, \equiv\}$ 不完全。

35. 解:

先证明对于每个 n 元真值函数 h:$\{t, f\}^n \rightarrow \{t, f\}$，存在一个合取范式 A 以及 n 个命题变元:$p_1, p_2, \cdots, p_n$，使得 $h = [\lambda p_1, \cdots \lambda p_n A]$:

1) 若 h 恒取 t，则令 $A = p_1 \vee \neg p_1$;

2) 若 h 不恒为 t，对 P 系统中的每个指派 $\varphi$, 令:

$$A^\varphi = p_1^\varphi \vee p_2^\varphi \vee \cdots \vee p_n^\varphi$$

$$p_i^\varphi = \begin{cases} \neg p_i & 若\varphi(p_i) = t \\ p_i & 否则 \end{cases}$$

则 $\varphi(A^\varphi) = \varphi(p_1^\varphi) \vee \cdots \vee \varphi(p_n^\varphi) = f$，因此 $[\lambda p_1, \cdots \lambda p_n A](x_1, x_2, \cdots, x_n) = f$ 当且仅当 $x_1 = p_1^\varphi, \cdots, x_n = p_n^\varphi$。所以 $A = \wedge_{h(\varphi(p_1), \varphi(p_2), \cdots, \varphi(p_n)) = f} A^\varphi$ 满足要求。

对于公式 B，都存在一个 n 元真值函数 $h = [\lambda p_1, \cdots \lambda p_m B]$，$p_1, p_2 \cdots, p_m$ 为 B 中出现的所有命题变元，则由上述证明可知，存在一个合取范式 A 使得 $[\lambda p_1, \cdots \lambda p_m A] = h = [\lambda p_1, \cdots \lambda p_m B]$，故 $A \Leftrightarrow B$，即每个公式都有合取范式。

36. 解: $\{\vee, \wedge, \supset, \equiv\}$ 不是完全集

下面用公式结构归纳法证明，由命题变元 p 和 $\{\vee, \wedge, \supset, \equiv\}$ 构成的公式没有永假式，也不能有 $\{\vee, \wedge, \supset, \equiv\}$ 定义出 $\neg$:

1) 对于命题变元 P 既不是永假式，其真值表也不具备 $\neg$ 的形式；

75. 解：用结构归纳法证明

1) 若 A 为命题变元

   (a) A=m，则 $S^{u_1, u_2 \cdots, u_n}_{x_1, x_2, \cdots, x_n} S^m_B A = S^{u_1, u_2 \cdots, u_n}_{x_1, x_2, \cdots, x_n} B$，因为 $B = S^{x_1, x_2, \cdots, x_n}_{u_1, u_2 \cdots, u_n} C$ 且 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 不在 C 中出现，故 $S^{u_1, u_2 \cdots, u_n}_{x_1, x_2, \cdots, x_n} B = C = S^m_C A$

   (b) A 为命题变元，且 $A = p \neq m$, 则 $S^{u_1, u_2 \cdots, u_n}_{x_1, x_2, \cdots, x_n} S^m_B A = S^{u_1, u_2 \cdots, u_n}_{x_1, x_2, \cdots, x_n} p = p = S^m_C A$

2) A 为原子公式，$A = P(t_1, t_2, \cdots, t_k), t_i = f(y_1, y_2, \cdots, y_j), 1 \leq i \leq k$, 则 m 不在 A 中出现，所以 $S^{u_1, u_2 \cdots, u_n}_{x_1, x_2, \cdots, x_n} S^m_B A = A = S^m_C A$

3) $A = \neg D$, 因为 $S^{u_1, u_2 \cdots, u_n}_{x_1, x_2, \cdots, x_n} S^m_B D = S^m_C D$, 所以 $\neg S^{u_1, u_2 \cdots, u_n}_{x_1, x_2, \cdots, x_n} S^m_B D = \neg S^m_C D$, 即 $S^{u_1, u_2 \cdots, u_n}_{x_1, x_2, \cdots, x_n} S^m_B A = S^m_C A$

4) $A = D \vee E$, 因为 $S_{x_1,x_2,\cdots,x_n}^{u_1,u_2.\cdots,u_n} S_B^m D = S_C^m D$, 且 $S_{x_1,x_2,\cdots,x_n}^{u_1,u_2.\cdots,u_n} S_B^m E = S_C^m E$, 则 $S_{x_1,x_2,\cdots,x_n}^{u_1,u_2.\cdots,u_n} S_B^m D \vee S_{x_1,x_2,\cdots,x_n}^{u_1,u_2.\cdots,u_n} S_B^m E = S_{x_1,x_2,\cdots,x_n}^{u_1,u_2.\cdots,u_n} S_B^m (D \vee E) = S_{x_1,x_2,\cdots,x_n}^{u_1,u_2.\cdots,u_n} S_B^m A = S_C^m D \vee S_C^m E = S_C^m (D \vee E) = S_C^m A$

5) $A = \forall y D$, 则 $y \notin \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, 则 B 对 A 中 m 是自由的, 且 $S_{x_1,x_2,\cdots,x_n}^{u_1,u_2.\cdots,u_n} S_B^m D = S_C^m D$, , 所以 $S_{x_1,x_2,\cdots,x_n}^{u_1,u_2.\cdots,u_n} S_B^m A = S_{x_1,x_2,\cdots,x_n}^{u_1,u_2.\cdots,u_n} S_B^m \forall y D = \forall y S_{x_1,x_2,\cdots,x_n}^{u_1,u_2.\cdots,u_n} S_B^m D = \forall y S_C^m D = S_C^m \forall y D = S_C^m A$

综上，结论成立.

76. 解: