

数理逻辑课后题/考题答案

作者: 杨森

2017 年 9 月 3 日

课后题

1. 略

2. 解:

1) \Rightarrow 利用结构归纳法证明

(a) Y 是命题变元, 此时 Y 的生成序列即为自身;

(b) $Y = \sim A$, A 的生成序列为 $A_1, A_2, \dots, A_m (= A)$, 则 Y 的生成序列为 A_1, A_2, \dots, A_m, Y ;

(c) $Y = B \vee C$, B 的生成序列为 $B_1, B_2, \dots, B_m (= B)$, C 的生成序列为 $C_1, C_2, \dots, C_n (= C)$, 则 Y 的生成序列为 $B_1, B_2, \dots, B_m, C_1, C_2, \dots, C_n, Y = (B \vee C)$

2) \Leftarrow 利用第二归纳法证明

假设 Y 的生成序列为 $Y_1, Y_2, \dots, Y_m (= Y)$, 证明 $Y_i (1 \leq i \leq m)$ 是合式公式

(a) Y_i 是命题变元, 则 Y_i 是合适公式;

(b) $Y_i = \sim Y_j (j < i)$, 因为 Y_j 是合式公式, 故 Y_i 也是合式公式;

(c) $Y_i = Y_j \vee Y_k (j, k < i)$, 因为 Y_j, Y_k 是合式公式, 故 Y_i 也是合式公式。

综上, Y 为合式公式当且仅当 Y 有一个生成序列。

3. 略 (根据公式定义进行证明)

4. 略

5. 解: 用结构归纳法证明

1) A 为命题变元 p , 显然结论成立;

2) $A = \sim B$, 因为 B 满足条件, 则 $\sim (B)$ 即 A 也满足条件;

3) $A = B \vee C$, 因为 B, C 满足条件, 则 $(B) \vee (C)$ 也满足条件

综上, 若表达式 A 为合式公式, 则最终计数为 0.

6. 略

7. 略

8. 解: 用公式结构归纳法证明

1) A 为命题变元 p

(a) $p \in \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ 且 $p = p_i$, 则 $S_{B_1, B_2, \dots, B_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} A = B_i$, 即 $S_{B_1, B_2, \dots, B_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} A$ 为合式公式;

(b) $p \notin \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, 则 $S_{B_1, B_2, \dots, B_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} A = A$;

2) $A = \sim B$, 则 $S_{B_1, B_2, \dots, B_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} B$ 为合式公式, 所以 $\sim S_{B_1, B_2, \dots, B_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} B = S_{B_1, B_2, \dots, B_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} \sim B$ 为合式公式, 即 $S_{B_1, B_2, \dots, B_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} A$ 为合式公式;

3) $A = B \vee C$, 则 $S_{B_1, B_2, \dots, B_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} B, S_{B_1, B_2, \dots, B_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} C$ 为合式公式, 所以 $S_{B_1, B_2, \dots, B_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} B \vee S_{B_1, B_2, \dots, B_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} C = S_{B_1, B_2, \dots, B_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} (B \vee C)$ 为合式公式, 即 $S_{B_1, B_2, \dots, B_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} A$ 为合式公式;

综上, 若 A 是合式公式, 则 $S_{B_1, B_2, \dots, B_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} A$ 为合式公式。

9. 解: 若 C 为永真式, 根据 Godel 完全性定理则 $\vdash C$, 设 C 的证明序列为 C_1, C_2, \dots, C_n , 用第二归纳法证明, $\vdash S_{q_1, q_2, \dots, q_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} C_i, 1 \leq i \leq n$:

1) $C_i \in Aoxims$, 显然 $S_{q_1, q_2, \dots, q_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} C_i$ 也为公理

2) 存在 $j, k < i$ 使 $C_k = C_j \supset C_i$, 因为 $\vdash S_{q_1, q_2, \dots, q_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} C_j$ 且 $\vdash S_{q_1, q_2, \dots, q_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} C_k$, 即 $\vdash S_{q_1, q_2, \dots, q_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} C_j \supset S_{q_1, q_2, \dots, q_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} C_i$, 有 MP 规则可推出 $\vdash S_{q_1, q_2, \dots, q_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} C_i$ 。

综上 $\vdash S_{q_1, q_2, \dots, q_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} C$, 即 $\vdash D$, 再由 Godel 完全性定理推出 $\models D$, 即 D 为永真式。

10. $(\sim(\sim(q \vee r) \vee \sim p) \vee \sim\sim(q \vee r))$

11. 暂无

12. 解:

1. $A \vee (B \vee C) \vdash A \vee (B \vee C)$
2. $A \vee (B \vee C) \vdash (B \vee C) \vee A$ 1, i
3. $A \vee (B \vee C) \vdash B \vee (C \vee A)$ 2, ii
4. $A \vee (B \vee C) \vdash (C \vee A) \vee B$ 3, i
5. $A \vee (B \vee C) \vdash C \vee (A \vee B)$ 4, ii
6. $A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C$ 5, i

13. 暂无

14. 可满足的

其否定对应的合取范式为 $(\sim p \vee q) \wedge (\sim r \vee s) \wedge (\sim s \vee q) \wedge \sim p \wedge r$, 令 $S = \{\sim p \vee q, \sim r \vee s, \sim s \vee q, \sim p, r\}$, 对 S 应用消解规则如下:

1. S
2. $\{\sim r \vee s, \sim s \vee q, r\}$ 1, 关于 $\sim p$ 纯文字规则
3. $\{s, \sim s \vee q\}$ 2, 关于 $\sim r$ 单文字规则
4. $\{q\}$ 3, 关于 $\sim s$ 单文字规则
5. $\{qed\}$ 4, 关于 $\sim q$ 纯文字规则

令 $\varphi(r) = f$ 时为真, $\varphi(p) = f, \varphi(q) = \varphi(r) = \varphi(s) = t$ 时为假。

15. 永真式

对应的析取范式为 $(\sim r \vee \sim s \vee r \vee \sim q \vee p) \wedge (q \vee \sim p \vee s \vee \sim s \vee r \vee \sim q \vee p)$, 每个短句都包含互补文字, 故为永真式。

16. 永真式, 用真值表

17. 可满足, $\varphi(p) = t, \varphi(q) = f$ 时为真, $\varphi(p) = f, \varphi(q) = t$ 时为假。

18. 永真式, 用真值表

19. 解 P' 系统可以看做 P 系统由 $\sim(p \supset q)$ 出发进行的证明

方法一: 先证明在 P 系统下若 Γ 协调, 且 $\sim A \notin Th(\Gamma)$, 则 $\Gamma \cup \{A\}$ 协调。若 $\Gamma \cup \{A\}$ 不协

调, 则存在 B 使得 $\Gamma, A \vdash B$ 且 $\Gamma, A \vdash \sim B$, 则

- | | |
|--|--------------|
| 1. $\Gamma, A \vdash B$ | hyp |
| 2. $\Gamma, A \vdash \sim B$ | hyp |
| 3. $\Gamma, A \vdash \sim A$ | $1, 2, DR$ |
| 4. $\Gamma \vdash A \supset \sim A$ | $3, CP$ |
| 5. $\Gamma \vdash \sim A \supset \sim A$ | |
| 6. $\Gamma \vdash \sim A$ | $4, 5, DR_3$ |

这与 $\sim A \notin Th(\Gamma)$ 矛盾, 故 $\Gamma \cup \{A\}$ 协调。因为 $\sim(p \supset q)$ 不为永真式, 而 P 系统的定理都为永真式, 故 $\sim(p \supset q) \notin Th(P)$, 所以 $Axiom \cup \{\sim(p \supset q)\}$ 协调, 即 P' 系统是协调的。

方法二: 假设 P' 系统不协调, 则在 P 系统下存在 B 使得 $\sim(p \supset q) \vdash B$ 且 $\sim(p \supset q) \vdash \sim B$, 根据 Godel 完全性定理, $\sim(p \supset q) \models B$ 且 $\sim(p \supset q) \models \sim B$, 明显矛盾, 故 P' 系统协调。

20. 解不协调, 记公理模式 $A \supset B$ 为 AS'

- | | |
|--|------------------|
| 1. $\vdash A \vee A \supset A$ | AS_1 |
| 2. $\vdash (A \vee A \supset A) \supset \sim (A \vee A \supset A)$ | AS' |
| 3. $\vdash \sim (A \vee A \supset A)$ | $1, 2, \bar{M}P$ |
| 4. $\vdash B$ | $3, DR$ |

故在 P 系统中增加 $A \supset B$ 做为公理所得系统不协调。

21. 解:

不存在不含“ \vee ”的定理。用反证法证明: 若 A 为满足条件的公式, 易知 A 中只有一个命题变元, 设为 p , 如果辖域中包含 p 的“ \sim ”的个数为偶数, 令指派 $\varphi(p) = f$, 否则 $\varphi(p) = t$, 则 $\varphi(A) = f$, 而 P 系统的定理都为永真式, 所以 P 系统中不存在不含“ \vee ”的定理。

22. 解:

不存在不含“ \sim ”的定理。用反证法证明: 若 A 为满足条件的公式, 其中出现的命题变元为 p_1, p_2, \dots, p_n , 另 $\varphi(p_1) = \varphi(p_2) = \dots = \varphi(p_n) = f$, 则 $\varphi(A) = f$, 而 P 系统的定理都为永真式, 所以 P 系统中不存在不含“ \sim ”的定理。

23. 解:

- | | | |
|----|---|-----------------|
| 1. | $\vdash A \vee A \supset A \vee A$ | <i>Axiom</i> |
| 2. | $\vdash (A \vee A \supset A \vee A) \supset (A \vee A \supset \sim (A \vee A))$ | <i>Axiom</i> |
| 3. | $\vdash A \vee A \supset \sim (A \vee A)$ | 1, 2, <i>MP</i> |
| 4. | $\vdash (A \vee A \supset \sim (A \vee A)) \supset \sim (A \vee A) \vee A$ | <i>Axiom</i> |
| 5. | $\vdash \sim (A \vee A) \vee A$ | 3, 4, <i>MP</i> |
| 6. | $\vdash \sim (A \vee A) \vee A \supset A \vee A$ | <i>Axiom</i> |
| 7. | $\vdash A \vee A$ | 5, 6, <i>MP</i> |
| 8. | $\vdash A$ | 5, 7, <i>MP</i> |

可以看出 s 的公式皆为定理, 故 s 不协调。

24. 解:

A 是 R 的定理

- | | | |
|----|----------------------|---------------------------|
| 1. | $\vdash A * A$ | <i>Axiom</i> |
| 2. | $\vdash A * (A * A)$ | <i>Axiom</i> |
| 3. | $\vdash A$ | 1, 2, $< A, (B * A), B >$ |

25. 解: 令 $\Gamma = \{\sim P\}$ (P 为命题变元)。

- 1) P' 是协调的对于 P 系统, Γ 是可满足的, 且存在唯一的指派 $\varphi: P \rightarrow f$ 满足 Γ , 则 $\Gamma \models p$, 根据完全性定理 $\Gamma \not\models p$, 所以在 P' 中, 命题变元 p 不是定理, 故 P' 是协调的。
- 2) 利用 1) 中的指派判断 A 的真值, 若 $\varphi(A) = t$, 则 A 是 P' 的定理。构造过程为 P 系统下从 Γ 出发的证明序列。

26. 解: 设命题变元 p 在 A 中不出现。

- | | | |
|----|--|-----------------|
| 1. | $\vdash p \supset S_A^p p$ | <i>Axiom</i> |
| 2. | $\vdash p \supset A$ | 1 |
| 3. | $\vdash p \supset A \supset S_{p \supset A}^p (p \supset A)$ | <i>Axiom</i> |
| 4. | $\vdash p \supset A \supset (p \supset A \supset A)$ | 3. |
| 5. | $\vdash p \supset A \supset A$ | 2, 4, <i>MP</i> |
| 6. | $\vdash A$ | 2, 5, <i>MP</i> |

所以对任意公式 A 都可以构造出证明序列, 所以 P' 不协调, 但同时是完全的。

27. 解:

定义 ψ 如下:

$$\begin{cases} \psi(p) = p & \text{若 } p \text{ 为命题变元} \\ \psi(\wedge) = \vee \\ \psi(\vee) = \wedge \\ \psi(\sim) = \sim \\ \psi(\alpha\beta) = \psi(\alpha)\psi(\beta) \end{cases}$$

易知

- $A \in L(P)$, 则 $\psi(A) \in L(Q)$;
- 若 $A \in L(Q)$, 则 $\psi(A) \in L(P)$;
- $\psi(\psi(A)) = A$ 。

首先利用第二归纳法证明必要性: 假设 A 为 Q 系统的定理, 且证明序列为 $A_1, A_2, \dots, A_n (= A)$, 下面证明 A_i 为永假式:

- $A_i \in Axiom$, 显然 A_i 为永假式;
- 存在 $j, k < i$ 使得 $A_k = \sim A_j \wedge A_i$, 根据归纳假设, 因为 A_k, A_j 皆为永假式, 所以 A_i 为永假式。

必要性得证。

下面分两步进行证明充分性:

- 1) 用第二归纳法证明: 若 A 为 P 系统的定理, 即 $\vdash_P A$, 则 $\vdash_Q \psi(A)$, 设 A 在 P 系统下的证明序列为 $A_1, A_2, \dots, A_n (= A)$

(a) A 为 P 系统的公理, 易知 $\psi(A)$ 为 Q 的公理, $\vdash_Q \psi(A)$ 成立

(b) 存在 $j, k < i$ 使得 $A_k = A_j \supset A_i$, 则 $\vdash_Q \psi(A_k)$ 即 $\vdash_Q \sim \psi(A_j) \wedge \psi(A_i)$ 且 $\vdash_Q \psi(A_j)$, 根据 Q 系统的规则, 可知 $\vdash_Q \psi(A_i)$ 成立

- 2) 证明若 $A \equiv B$, 则 $\psi(A) \equiv \psi(B)$

若 $A \equiv B$, 则 $\vdash_P A \equiv B$, 由第一步知 $\vdash_Q \psi(A \equiv B)$, 即 $\vdash_Q \psi(A) \equiv \sim \psi(B)$, 所以 $\psi(A) \equiv \sim \psi(B)$ 为永假式, $\psi(A) \equiv \psi(B)$ 为永真式

综上, 若 $A \in L(Q)$ 且 A 为永假式, 则 $A \equiv p \wedge \sim p$, 根据充分性第二步证明, 则 $\psi(A) \equiv \psi(p \wedge \sim p)$ 为永真式, 则 $\vdash_P \psi(A)$, 根据完全性定理有 $\vdash_P \psi(A)$, 根据充分性证明的第一步有 $\vdash_Q \psi(\psi(A))$, 即 $\vdash_Q A$ 。充分性得证。

28. 解: 用公式结构归纳法证明:

- 1) A 为命题变元, 易知 $V_\varphi(A) = V_\psi(A)$;
- 2) $A = \sim B$, 由归纳假设知 $V_\varphi(B) = V_\psi(B)$, 所以 $V_\varphi(A) = \sim V_\varphi(B) = \sim V_\psi(B) = V_\psi(\sim B) = V_\psi(A)$;
- 3) $A = B \vee C$, 由归纳假设知 $V_\varphi(B) = V_\psi(B)$ 且 $V_\varphi(C) = V_\psi(C)$, 所以 $V_\varphi(A) = V_\varphi(B \vee C) = V_\varphi(B) \vee V_\varphi(C) = V_\psi(B) \vee V_\psi(C) = V_\psi(B \vee C) = V_\psi(A)$ 。

综上, $V_\varphi(A) = V_\psi(A)$ 。

29. 解: 不是, 参考 27 题

30. 解:

1)

1.	$\vdash p \vee p \supset p$	AS_1
2.	$\vdash A \vee A \supset A$	$1, sub$
3.	$\vdash p \supset q \vee p$	AS_2
4.	$\vdash A \supset B \vee A$	$3, sub$
5.	$\vdash p \supset q \supset (r \vee q \supset q \vee r)$	AS_3
6.	$\vdash A \supset B \supset (C \vee A \supset B \vee C)$	$5, sub$

由 2,4,6 知 P 的定理比为 p' 的定理。下面用第二归纳法证明 P' 的定理也为 P 的定理, 设 A 为 P' 的定理, 且证明序列为 $A_1, A_2, \dots, A_n (= A)$, 则 $\vdash_P A_i$

(a) $A_i \in Axiom$, 显然 $\vdash_P A_i$ 成立;

(b) 存在 $j, k < i$ 使得 $A_k = A_j \supset A_i$, 根据归纳假设 $\vdash_P A_j$ 且 $\vdash_P A_k$, 根据 P 系统的 MP 规则知 $\vdash_P A_i$ 成立;

(c) 存在 $j < i$ 使得 $A_i = S_{B_1, B_2, \dots, B_n}^{p_1, p_2, \dots, p_n} A_j$, 根据归纳假设 $\vdash_P A_j$, 由 P 系统的代入规则 sub 知 $\vdash_P A_i$ 成立。

所以 P 系统和 P' 系统具有相同的定理。

2) 若无 sub 规则, 则不能推出 $s \vee s \supset s$ (不能推出包含除 p,q,r 之外命题变元的公式), 故 sub 规则独立; 若无 MP 规则, 则不能推出 $s \vee \sim s$ (不能推出长度小于 5 的公式), 故 MP 规则独立。

31. 与 30 题重复 32. 解:

令 $AS_4 = \sim A \vee A$, $AS_5 = A \vee \sim A$ 。下面证明 $AS_1 - AS_3$ 的独立性。

1) 给每个命题变元以 0, 1, 2 三个可能的值, \sim 和 \vee 的真值表定义如下:

	\sim		\vee	0	1	2
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	2
2	2	2	0	0	2	0

$AS_2 - AS_5$ 在此数值解释下恒为 0, 而 AS_1 不常为 0, 故 $AS_2 - AS_5$ 不能表示出 AS_1 。

2) 定义 \sim 和 \vee 的真值表定义如下:

$AS_1, AS_3 - AS_5$ 在此数值解释下永不为 2, 而 AS_2 可能为 2, 故 $AS_1, AS_3 - AS_5$ 不能表示出 AS_2 。

3) 定义 \sim 和 \vee 的真值表定义如下:

AS_1, AS_2, AS_4, AS_5 在此数值解释下恒为 0, AS_3 不恒为 0, 故 AS_1, AS_2, AS_4, AS_5 不能表示出 AS_3 。

综上, 结论成立。

33. 解:

构造如下的数值解释:

在此数值解释下, $AS_1 - AS_3$ 恒为 1, $P \supset \sim \sim P$ 不恒为 1, 且两个恒为 1 的公式经 MP 规则必得到一个恒为 1 的公式, 故不能从 P^* 系统导出 $P \supset \sim \sim P$ 。

34. 解:

设 p, q 为命题变元, A 为由 $\{\sim, \equiv\}, p, q$ 构成的公式。用公式结构归纳法证明若 A_i 不是永真式或永假式, 则 A_i 的真值表中取值为真的个数与取值为假的个数相等。

1) $A = p$ 或者 $A = q$, 显然成立;

2) $A = \sim B$, 显然成立;

3) $A = B \equiv C$, 若 $\varphi(B) = \varphi(C)$ 或 $\varphi(B) \neq \varphi(C)$ 时, 则 A 为永真式或永假式, 当 $\varphi(B), \varphi(C)$ 不完全一样或完全相反时 (φ 为任意指派), 通过枚举可知结论同样成立。

所以, A 为永真式或者永假式或 A 的真值表中 t 的个数与 f 的个数相等, 而 v 的真值表中 t 的个数与 f 的个数不等, 因此 $\{\sim, \equiv\}$ 不能表示出 \vee , 则 $\{\sim, \equiv\}$ 不完全。

35. 解:

先证明对于每个 n 元真值函数 $h: \{t, f\}^n \rightarrow \{t, f\}$, 存在一个合取范式 A 以及 n 个命题变元: p_1, p_2, \dots, p_n , 使得 $h = [\lambda p_1, \dots, \lambda p_n A]$:

1) 若 h 恒取 t, 则令 $A = p_1 \vee \sim p_1$;

	\sim
0	2
1	1
2	0

\vee	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

	\sim
0	1
1	2
2	0

\vee	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	0	0	2

	\sim
0	1
1	0

\vee	0	1
0	1	1
1	0	1

2) 若 h 不恒为 t , 对 P 系统中的每个指派 φ , 令:

$$A^\varphi = p_1^\varphi \vee p_2^\varphi \vee \cdots \vee p_n^\varphi$$

$$p_i^\varphi = \begin{cases} \sim p_i & \text{若 } \varphi(p_i) = t \\ p_i & \text{否则} \end{cases}$$

则 $\varphi(A^\varphi) = \varphi(p_1^\varphi) \vee \cdots \vee \varphi(p_n^\varphi) = f$, 因此 $[\lambda p_1, \cdots \lambda p_n A](x_1, x_2, \cdots, x_n) = f$ 当且仅当 $x_1 = p_1^\varphi, \cdots, x_n = p_n^\varphi$. 所以 $A = \bigwedge_{h(\varphi(p_1), \varphi(p_2), \cdots, \varphi(p_n))=f} A^\varphi$ 满足要求。

对于公式 B , 都存在一个 n 元真值函数 $h = [\lambda p_1, \cdots \lambda p_m B]$, p_1, p_2, \cdots, p_m 为 B 中出现的所有命题变元, 则由上述证明可知, 存在一个合取范式 A 使得 $[\lambda p_1, \cdots \lambda p_m A] = h = [\lambda p_1, \cdots \lambda p_m B]$, 故 $A \Leftrightarrow B$, 即每个公式都有合取范式。

36. 解: $\{\vee, \wedge, \supset, \equiv\}$ 不是完全集

下面用公式结构归纳法证明, 由命题变元 p 和 $\{\vee, \wedge, \supset, \equiv\}$ 构成的公式没有永假式, 也不能有 $\{\vee, \wedge, \supset, \equiv\}$ 定义出 \sim :

- 1) A 为命题变元 p , 既不是永假式, 其真值表也不具备 \sim 的形式;
- 2) $A = B \equiv C$ 或 $A = B \supset C$ 或 $A = B \vee C$ 或 $A = B \wedge C$, 由归纳假设知 B 和 C 的真值表具有以下两种形式:

p	
0	0
1	1

p	
0	1
1	1

无论 $A = B \equiv C$ 或 $A = B \supset C$ 或 $A = B \vee C$ 或 $A = B \wedge C$ 都不能使 A 为永假式或者具备与 \sim 相同的真值表, 所以 $\{\vee, \wedge, \supset, \equiv\}$ 表达不出 \sim , 即不完全。

37. 解:

首先用归纳法证明: 若 A 为仅由 \equiv 构成的合式公式 (且其中的命题变元为 p_1, p_2, \cdots, p_n), 则任意改变 p_1, p_2, \cdots, p_n 的出现顺序所形成的新公式 B 与 A 等价, 用 $\#A$ 表示 A 中命题变元和 \equiv 出现的次数, 则 $\#A = 2i + 1 (i = 0, 1, \cdots)$,

- 1) $i=0, 1$, 显然成立;
- 2) $i=k(k>1)$, $A_k = A_{k-1} \equiv P_k$, 设 $A_{k-1} = B \equiv C$, 则 $A_k = B \equiv C \equiv P_k$, 显然 A_k 与 $C \equiv P_k \equiv B$, $P_k \equiv B \equiv C$, $B \equiv P_k \equiv C$ 等价

故仅由 \equiv 构成的命题合式公式 A (且其中的命题变元为 p_1, p_2, \cdots, p_n) 与下式等价:

$$\underbrace{(p_1 \equiv p_1 \equiv \cdots \equiv p_1)}_{l_1} \equiv \underbrace{(p_2 \equiv p_3 \equiv \cdots \equiv p_2)}_{l_2} \equiv \cdots \equiv \underbrace{(p_n \equiv p_n \equiv \cdots \equiv p_n)}_{l_n}$$

其中 l_i 表示 p_i 在 A 中出现的次数, 易知若 l_i 为偶数, 则该项对应与 t , 否则为 p_i . 所以结论成立。

38. 略

39. 参考 37

40. 解:

易知由 \wedge, \neq, t, f 构成的公式只能为永真式或者永假式
用结构归纳法证明:

1) A 为 t 显然成立;

2) $A = B \wedge C$,

- 若 A 能变换到 1, 则 B 和 C 都能变换到 1, 根据归纳假设, B 和 C 都是永真式, 所以 A 也为永真式;
- 若 A 为永真式, 则 B, C 都是永真式, 根据归纳假设, B 和 C 都能变换到 1, 所以 A 也能变换到 1;

3) $A = B \neq C$

- (a) 若 A 能变换到 1, 则 B 能变换到 0、 C 能变换到 1, 或者 B 能变换到 1、 C 能变换到 0, 根据归纳假设, B, C 中有一个为永真式, 另一个不为永真式, 故 A 为永真式。
- (b) 若 A 为永真式, 根据归纳假设, B 和 C 中只能有一个永真式, 所以 A 能变换到 1 (根据归纳假设, B 和 C 中的永假式只能变换到 0)

综上, 结论得证。

41. 解:

设 $C(A)$ 中所有合适的公式的析取为 B , 因为 $C(A)$ 的所有元素均为合取项, 所以 B 是析取范式。根据定理 2.6.7, $\models_{\varphi} A$ 当且仅当有 $D \in C(A)$ 使得 $\models_{\varphi} D$ 成立。则对任意指派 φ , 若 $\models_{\varphi} A$, 则存在 $D \in C(A)$ 满足 $\models_{\varphi} D$, 又因为 B 为所有 $C(A)$ 元素的析取, 所以 $\models_{\varphi} B$, 必要性成立;

对任意指派 φ , 若 $\models_{\varphi} B$, 则必然存在一个 B 的合取项 D 满足 $\models_{\varphi} D$, 而 $D \in C(A)$, 所以 $\models_{\varphi} A$, 充分性成立。

42. 解:

$|$ 表示与非, $p \supset q = \sim p \vee q = \sim (p \wedge \sim q)$, 所以用 $|$ 表示为 $p|(q|q)$ 。

43. 解:

$|$ 不是可结合的, 因为 $f|f|t \neq f|(f|t)$ 为永真式。

44. 解:

设 A 是 Q 的定理, 则 A 存在证明序列 $A_1, A_2, \dots, A_m (= A)$ 。则 A_i 为公理, 或对 A_j 应用规则 1 所得, 或对 A_k, A_j 应用规则 2 所得。

假设第一次应用规则 2 时, 令 $A_j = D, A_k = E$, 则 D, E 皆由规则 1 得出或为公理。

令 $D = D_1 | (D_1 | D_2) | ((D_1 | (D_2 | D_1)) | (D_3 | D_4 | (D_1 | D_3 | (D_1 | D_3))))$

同时 E 也具备如上的形式, 因为能在 D 和 E 上应用规则 2, 所以 $D_1 | (D_1 | D_2) = D_1 | (D_2 | D_1)$, 则 $D_2 = D_1$, 且 $D_3 | D_4 | (D_1 | D_3 | (D_1 | D_3)) = D_1$, 显然不成立。即规则 2 无法应用与 A 的证明序列中, 因此 A 的定理的长度必然不小于公理的长度, 所以 Q 必然为协调的。

45. 暂无

46.

- | | | |
|----|---------------------------------------|------------------|
| 1. | $\vdash \sim A \supset B \vee \sim A$ | |
| 2. | $\sim A \vdash B \vee \sim A$ | 1, <i>cp</i> |
| 3. | $\sim A \vdash \sim A \vee B$ | 2, <i>commut</i> |
| 4. | $\sim A \vdash A \supset B$ | 3 |

47.

- | | | |
|----|--|------------------|
| 1. | $A \supset B, \sim (B \supset C) \supset \sim A, A \vdash A$ | \in |
| 2. | $A \supset B, \sim (B \supset C) \supset \sim A, A \vdash A \supset B$ | \in |
| 3. | $A \supset B, \sim (B \supset C) \supset \sim A, A \vdash B$ | 1, 2, $\bar{M}P$ |
| 4. | $A \supset B, \sim (B \supset C) \supset \sim A, A \vdash \sim (B \supset C) \supset \sim A$ | \in |
| 5. | $A \supset B, \sim (B \supset C) \supset \sim A, A \vdash A \supset (B \supset C)$ | 4 |
| 6. | $A \supset B, \sim (B \supset C) \supset \sim A, A \vdash B \supset C$ | 1, 5, $\bar{M}P$ |
| 7. | $A \supset B, \sim (B \supset C) \supset \sim A, A \vdash C$ | 3, 6, $\bar{M}P$ |
| 8. | $A \supset B, \sim (B \supset C) \supset \sim A \vdash A \supset C$ | 7, <i>CP</i> |

48.

- | | | |
|----|--|------------------|
| 1. | $\vdash B \vee B \supset B$ | AS_1 |
| 2. | $\vdash B \supset B \vee B$ | AS_2 |
| 3. | $\vdash B \vee B$ | 1, 2, $\bar{M}P$ |
| 4. | $A \supset \sim (B \supset B) \vdash \sim A \vee \sim (B \supset B)$ | \in |
| 5. | $A \supset \sim (B \supset B) \vdash (B \supset B) \vee A$ | 4, <i>commu</i> |
| 6. | $A \supset \sim (B \supset B) \vdash \sim A$ | 3, 5, $\bar{M}P$ |

49.

1. $(A \vee B) \supset C, A \vdash A$ \in
2. $(A \vee B) \supset C, A \vdash (A \vee B) \supset C$
3. $(A \vee B) \supset C, A \vdash A \vee B$ \vee_+
4. $(A \vee B) \supset C, A \vdash C$ $2, 3 \bar{M}P$
5. $(A \vee B) \supset C \vdash A \vee C$ $4, CP$
6. $(A \vee B) \supset C \vdash B \vee C$ 同理
7. $(A \vee B) \supset C \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ $5, 6, \wedge_+$
8. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ \in
9. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \vee C)$ \wedge_-
10. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (B \vee C)$ \wedge_-
11. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \vee B) \supset (C \vee C)$ $\vee \supset \vee$
12. $\vdash (C \vee C) \supset C$ AS_1
13. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \vee B) \supset C$ $11, 12, \bar{M}P$

50.

1. $(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash A \wedge \sim C$ \in
2. $(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash A$ $1, \wedge_-$
3. $(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash \sim C$ $1, \wedge_-$
4. $(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash \sim C \supset \sim (A \wedge B)$ $1, \in, \supset \sim$
5. $(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash \sim (A \wedge B)$ $3, 4, \bar{M}P$
6. $(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash A \supset \sim B$ 5
7. $(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash \sim B$ $2, 6, \bar{M}P$
8. $(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash \sim B \vee C$ $7, \vee_+$
9. $(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash B \supset C$ 8
10. $A \vee B \supset C \vdash \sim (A \supset C) \supset (B \supset C)$ $9, CP$
11. $A \vee B \supset C \vdash (A \supset C) \vee (B \supset C)$ 10
12. $A \supset C, A \wedge B \vdash A \wedge B$ \in
13. $A \supset C, A \wedge B \vdash A$ $12, \wedge_-$
14. $A \supset C, A \wedge B \vdash A \supset C$ \in
15. $A \supset C, A \wedge B \vdash C$ $13, 14, \bar{M}P$
16. $A \supset C \vdash A \wedge B \supset C$ $15, CP$
17. $B \supset C \vdash A \wedge B \supset C$ 同理
18. $(A \supset C) \vee (B \supset C) \vdash A \wedge B \supset C$ $16, 17, \vee \supset \vee$

51. 解:

1. $A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash A \wedge \sim B$ \in
2. $A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash A$ $1, \wedge -$
3. $A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash \sim B$ $1, \wedge -$
4. $A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash A \supset (B \vee C)$ \in
5. $A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash B \vee C$ $2, 4 \bar{M}P$
6. $A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash \sim B \supset C$ 5
7. $A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash c$ $3, 6, \bar{M}P$
8. $A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash \sim A \vee C$ $7, DR_4$
9. $A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash A \supset C$ 8
10. $A \supset (B \vee C) \vdash (A \supset B) \vee (A \supset C)$ $9, CP$
11. $A \supset B \vdash A \supset B$ \in
12. $A \supset B \vdash A \supset (B \vee C)$ $11, DR_4$
13. $A \supset C \vdash A \supset (B \vee C)$ 同理
14. $(A \supset B) \vee (A \supset C) \vdash A \supset (B \vee C)$

52. 解:

1. $A \supset (B \wedge C), A \vdash A$ \in
2. $A \supset (B \wedge C), A \vdash A \supset (B \wedge C)$ \in
3. $A \supset (B \wedge C), A \vdash B \wedge C$ $1, 2, \bar{M}P$
4. $A \supset (B \wedge C), A \vdash B$ $3, \wedge -$
5. $A \supset (B \wedge C) \vdash A \supset B$ $4, CP$
6. $A \supset (B \wedge C) \vdash A \supset C$ 同理
7. $A \supset (B \wedge C) \vdash (A \supset B) \wedge (A \supset C)$ $5, 6, \wedge +$
8. $A \supset B \vdash A \supset (B \vee C)$ DR_4
9. $A \supset C \vdash A \supset (B \vee C)$ DR_4
10. $(A \supset B) \wedge (A \supset C), A \vdash A \supset B, A \supset C, A$ $\in \wedge -$
11. $(A \supset B) \wedge (A \supset C), A \vdash B, C, B \wedge C$ $10, \bar{M}P, \wedge +$
12. $(A \supset B) \wedge (A \supset C) \vdash A \supset (B \wedge C)$ $12, CP$

53. 解:

1. $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash A \supset \sim B$ \in
2. $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash A \supset B$ $\in, \wedge -$
3. $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash B \supset A$ $\in, \wedge -$
4. $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash B \supset \sim A$ \in
5. $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash B \supset \sim B$ $1, 3, \bar{M}P$
6. $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash A \supset \sim A$ $2, 4, \bar{M}P$
7. $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash \sim A$ 5
8. $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash \sim B$ 6
9. $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash \sim A \wedge \sim B$ $7, 8 \wedge +$
10. $A \equiv B \vdash \sim (A \supset \sim B) \vee \sim (A \vee B)$ $9, CP$
11. $A \equiv B \vdash \sim (A \equiv \sim B)$ 10
12. $\vdash (A \equiv B) \supset \sim (A \equiv \sim B)$ $11, CP$
13. $\vdash (A \equiv \sim B) \supset (A \equiv B)$ $12, \supset \sim$

54. 解:

1. $A \supset (B \supset C), A \wedge B \vdash A, B$ $\in, \wedge -$
2. $A \supset (B \supset C), A \wedge B \vdash C,$ $1, \bar{M}P$
3. $A \supset (B \supset C) \vdash (A \wedge B) \supset C,$ $2, CP$
4. $(A \wedge B) \supset C, A, B \vdash A, B$ \in
5. $(A \wedge B) \supset C, A, B \vdash A \wedge B$ $4, \wedge +$
6. $(A \wedge B) \supset C, A, B \vdash C$ $5, \in, \bar{M}P$
7. $(A \wedge B) \supset C \vdash A \supset (B \supset C)$ $6, MP, MP$

55. 参考 50

56. 参考 51

57. 参考 36

58.

$$\sim a = a \mid a$$

$$\sim a = a \downarrow a$$

$$a \vee b = (a \mid a) \mid (b \mid b)$$

$$a \vee b = (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)$$

$$a \wedge b = (a \mid b) \mid (a \mid b)$$

$$a \wedge b = (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)$$

$$a \supset b = a \mid (b \mid b)$$

$$a \supset b = (a \downarrow a) \downarrow b \downarrow (a \downarrow a) \downarrow b$$

$$a \equiv b = ((a \mid (b \mid b) \mid (b \mid (a \mid a))) \mid ((a \mid (b \mid b) \mid (b \mid (a \mid a))))$$

$$a \equiv b = ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((b \downarrow b) \downarrow a)$$

对于将公式化成 \mid 或 \downarrow 的形式, 可以先化成 $\sim (a \wedge b)$ 或 $\sim (a \vee b)$ 的形式, 然后用 \mid 或 \downarrow 做替换。

59. 解:

- 1) 因为 C_1, C_2, \dots, C_m 互异, 且排序关系是全序的, 所以 C_1, C_2, \dots, C_m 排序后的结果是唯一的。

令 $T = \{\varphi \mid \varphi(A) = t\}$, 因为 A 不是永假式, 所以 $T \neq \emptyset$; 令

$$x_i^\varphi = \begin{cases} x_i, & \text{若 } \varphi(x_i) = t \\ \sim x_i, & \text{若 } \varphi(x_i) = f \end{cases}$$

则 $\varphi(x_1^\varphi \wedge x_2^\varphi \wedge \dots \wedge x_n^\varphi) = t$, 令 $C'_i = x_1^{\varphi_i} \wedge x_2^{\varphi_i} \wedge \dots \wedge x_n^{\varphi_i}$, 对 C'_1, C'_2, \dots, C'_n 进行排序得到 C_1, C_2, \dots, C_n , 则 $B = C_1 \vee C_2 \vee \dots \vee C_n$ 即为 A 的唯一的完全解析式。

再证 $\varphi(A) = \varphi(B)$ 。对于任意指派 φ

- 若 $\varphi(A) = t$, 故存在一个 C'_i , 满足 $\varphi(C'_i) = t$, 又 C'_i 为 B 的一个合取项, 故 $\varphi(B) = t$ 。
- 若 $\varphi(B) = t$, 故 B 存在一个析取项 C 使得 $\varphi(C) = t$, 所以 $\varphi \in T$, 所以 $\varphi(A) = t$ 。

- 2) A 为永真式, 则 $\#T = 2^n$, 故有 2^n 个短句, 则 $m = 2^n$ 。

60. 解:

- 析取范式:

$$(\sim p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r)$$

合取范式:

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$$

- 析取范式:

$$(\sim p \wedge \sim r \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge r \wedge q)$$

合取范式:

$$(p \vee r \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim r \vee q) \wedge (\sim p \vee r \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim r \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim r \vee q) \wedge (\sim p \vee r \vee \sim q)$$

- 析取范式:

$$(\sim p \wedge \sim r \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim r \wedge q) \vee (\sim p \wedge r \wedge q) \vee (p \wedge \sim r \wedge q) \vee (p \wedge r \wedge q)$$

合取范式:

$$(p \vee \sim r \vee q) \wedge (\sim p \vee r \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim r \vee q)$$

61. 解:

1) $(p \wedge \sim q) \vee p$

2) $p \wedge (q \vee r)$

3) $\sim q$

4) p

62. 解:

1. S

2. $\{r, s, \sim r \vee \sim s, q \vee r\} \& \{\sim q, q \vee s, \sim r \vee \sim s, q \vee r\}$

关于 p 的分裂规则

3. $\{r, q, \sim r, q \vee r\} \& \{s, \sim r \vee \sim s, r\}$

关于 s 和 $\sim q$ 的单文字规则

4. $\{ \square \} \& \{ \square \}$

63. 解:

1. S

2. $\{p \vee q, p \vee \sim r, q \vee \sim r \vee p, \sim r \vee q\}$

1, 重言式规则

3. $\{\sim r \vee q\}$

2, 关于 p 的纯文字规则

4. \emptyset

3, 关于 q 的纯文字规则

64. 解:

1. S

2. $\{\sim r, q \vee r\} \& \{q, \sim q \vee \sim r, q \vee r\}$

1, 关于 p 的分裂规则

3. $\{q\} \& \{r, \sim r\}$

2, 关于 $\sim r, q$ 的单文字规则

4. $\emptyset \& \{ \square \}$

3, 关于 q 的纯文字规则, 关于 r 的单文字规则

65. 解:

1. S

2. $\{q \vee r, \sim q \vee s, \sim r \vee s, \sim s, q \vee \sim r\}$

1, 关于 $\sim p$ 的单文字规则

3. $\{q \vee r, \sim q, \sim r, q \vee \sim r\}$

2, 关于 $\sim s$ 的单文字规则

4. $\{r, \sim r\}$

3, 关于 $\sim q$ 的单文字规则

5. $\{ \square \}$

4, 关于 $\sim r$ 的单文字规则

66-68 可以先化为否定范式，画出平面图，求合取支集合，对合取支元素进行取反，然后消解，如能消解出空短句，则原式为永真式；也可以直接取反，化为析取范式，进行消解。

66. 解：合取支集合为 $\{\sim p, q \wedge \sim r, s \wedge r, s \wedge \sim q, p \wedge r, p \wedge \sim q\}$ ，令 $S = \{p, \sim q \vee r, \sim s \vee \sim r, \sim s \vee q, \sim p \vee \sim r, \sim p \vee q\}$

对 S 进行消解：

1. S
2. $\{\sim q \vee r, \sim s \vee \sim r, \sim s \vee q, \sim r, q\}$ 1, 关于 p 的单文字规则
3. $\{\sim q, \sim s, \sim s \vee q, q\}$ 2, 关于 $\sim r$ 的单文字规则
4. $\{\square\}$ 3, 关于 q 的单文字规则, 关于 $\sim s$ 的纯文字规则

故原式为永真式。

67. 解：原公式取反后的短句集为 $S = \{p \vee q, \sim p \vee r, \sim p \vee \sim s, \sim r \vee s, r \vee \sim q, \sim q \vee \sim s\}$

对 S 进行消解：

1. S
2. $\{q, \sim r \vee s, r \vee \sim q, \sim q \vee \sim s\} \& \{r, \sim s, \sim r \vee s, r \vee \sim q, \sim q \vee \sim s\}$ 1, 关于 p 的单文字规则
3. $\{\sim r \vee s, r, \sim s\} \& \{\sim s, s, \sim q, \sim q \vee \sim s\}$ 2, 关于 q, r 的单文字规则
4. $\{\square\} \& \{\square\}$

故原式为永真式。

68. 解：原公式取反后短句集为 $S = \{p \vee q, s \vee \sim q \vee r, \sim r \vee q, \sim s \vee q, \sim q\}$

对 S 进行消解：

1. S
2. $\{p, \sim q \vee r, \sim r, \sim s\}$ 1, 关于 $\sim q$ 的单文字规则
3. $\{p, s \vee \sim p, \sim s\}$ 2, 关于 $\sim r$ 的单文字规则
4. $\{s, \sim s\}$ 3, 关于 p 的单文字规则
5. $\{\square\}$

故原公式为永真式。

69. 略 (太长，可以用平面图)

70. 解：

- 1) P 中 z, Q 中 u
- 2) z, u
- 3) u, x, z
- 4) g(x) 对公式中 u 不自由
- 5) h(x, y) 对公式中 u 不自由

6) u 对公式中 x 自由

71. 解:

- 1) $\forall x \in H(B(x) \wedge W(t(x)) \supset K(m(x)))$
- 2) $\forall xy \in H(H(y) \wedge W(x) \wedge K(m(y)) \supset \sim L(x, y))$
- 3) $\sim \exists x \in H(B(x) \wedge W(t(x)))$
- 4) 在牲口棚中有一匹马和牲口棚中所有的黑尾巴马相像
- 5) 在牲口棚中不存在没有白尾巴的马

72. 解:

- 1) $\forall x(C(x, f(r)) \supset U(x, r))$
- 2) 如果两个人的父亲是兄弟, 那么这两个人就是堂兄弟
- 3) $\exists xy(C(x, r) \wedge B(y, r) \supset Y(x, y))$

73. 解:

- 1) 自由变元: x , 约束变元: x , 任意项都可以代入
- 2) 自由变元: y , 约束变元: x, y , x 不出项的项可以代入

74. 解:

$n+1, n-1$ 都有可能

75. 解:

用结构归纳法证明

1) 若 A 为命题变元

(a) $A=m$, 则 $S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} S_B^m A = S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} B$, 因为 $B = S_{u_1, u_2, \dots, u_n}^{x_1, x_2, \dots, x_n} C$ 且 u_1, u_2, \dots, u_n 不在 C 中出现, 故 $S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} B = C = S_C^m A$

(b) A 为命题变元, 且 $A = p \neq m$, 则 $S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} S_B^m A = S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} p = p = S_C^m A$

2) A 为原子公式, $A = P(t_1, t_2, \dots, t_k), t_i = f(y_1, y_2, \dots, y_j), 1 \leq i \leq k$, 则 m 不在 A 中出现, 所以 $S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} S_B^m A = A = S_C^m A$

3) $A = \sim D$, 因为 $S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} S_B^m D = S_C^m D$, 所以 $\sim S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} S_B^m D = \sim S_C^m D$, 即 $S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} S_B^m A = S_C^m A$

4) $A = D \vee E$, 因为 $S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} S_B^m D = S_C^m D$, 且 $S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} S_B^m E = S_C^m E$, 则 $S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} S_B^m D \vee S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} S_B^m E = S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} S_B^m (D \vee E) = S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} S_B^m A = S_C^m D \vee S_C^m E = S_C^m (D \vee E) = S_C^m A$

5) $A = \forall y D$, 则 $y \notin \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, 则 B 对 A 中 m 是自由的, 且 $S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} S_B^m D = S_C^m D$, 所以 $S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} S_B^m A = S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} S_B^m \forall y D = \forall y S_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{u_1, u_2, \dots, u_n} S_B^m D = \forall y S_C^m D = S_C^m \forall y D = S_C^m A$

综上, 结论成立.

76. 解:

相同公式中, 运算符的运算顺序也是相同的, 若 $B \neq D$, 假设 B 是 D 的前缀, 令 $D = B \vee F$, 则 $D \vee E = B \vee F \vee E$, 故 $C = F \vee E$, 这就导致 $B \vee C$ 中的 “ \vee ” 与 $D \vee E$ 中的 “ \vee ” 运算次序不同, 故 B 不为 D 的前缀, 同理 D 不为 B 的前缀, 从而 $B=D$ 。同理得 $C=E$ 。

77. 解:

用公式结构归纳法证明:

- 1) C 为原子公式, 显然 y 在 C 中不出现, $S_x^y S_y^x C = C$;
- 2) $C = \sim A$, 因为 $S_x^y S_y^x A = A$, 所以 $S_x^y S_y^x C = S_x^y S_y^x \sim A = \sim S_x^y S_y^x A = \sim A = C$;
- 3) $C = B \vee D$, 因为 $S_x^y S_y^x B = B$ 且 $S_x^y S_y^x D = D$, 所以 $S_x^y S_y^x C = S_x^y S_y^x (B \vee D) = S_x^y S_y^x B \vee S_x^y S_y^x D = B \vee D = C$;
- 4) $C = \forall z B$
 - 若 $z=x$, 则 $S_y^x C = S_y^x \forall x B = \forall x B = C$, y 在 C 中不自由, $S_x^y C = C$, 所以 $S_x^y S_y^x C = C$;
 - 若 $z=y$, 则 $S_y^x C = S_y^x \forall y B$, 因为 y 对 C 中 x 是自由的, 所以 x 不在 C 中出现, 故 $S_y^x C = C$, $S_x^y C = C$, 所以 $S_x^y S_y^x C = C$;
 - 若 $z \neq x, y$, 则 $S_x^y S_y^x C = S_x^y S_y^x (\forall z B) = \forall z S_x^y S_y^x B = \forall z B = C$ 。

综上, 若 y 在 C 中不自由, 且 y 对 C 中 x 是自由的, 则 $S_x^y S_y^x C = C$ 。

78. 解:

令 $A = (p \equiv q) \wedge (p \equiv \sim (r \supset q)) \supset (q \supset \sim r)$, 则 A 为 P 永真。

令 $B = (\forall x(G(x) \supset H(x)) \equiv \exists x H(x)) \wedge (\forall x(G(x) \supset H(x)) \equiv \sim (\forall x G(x) \supset \exists x H(x))) \supset (\exists x H(x) \supset \sim \forall x G(x))$

则 $B = S_{\forall x(G(x) \supset H(x)), \exists x H(x), \forall x G(x)}^{p, q, r} A$, 故 B 为 P 用真的, 则通过 P 规则可以导出 $\exists x H(x) \supset \sim \forall x G(x)$ 。

79. 解: