数理逻辑课后题/考题答案

作者: 杨森

2017 年 8 月 24 日

课后题

1. 略
2. 解:

1) => 利用结构归纳法证明

(a) Y 是命题变元，此时 Y 的生成序列即为自身；

(b) $Y=\neg A$，A 的生成序列为 $A_1,A_2,\cdots,A_m(=A)$, 则 Y 的生成序列为 $A_1,A_2,\cdots,A_m,Y$;

(c) $Y=B\vee C$, B 的生成序列为 $B_1,B_2,\cdots,B_m(=B)$, C 的生成序列为 $C_1,C_2,\cdots,C_n(=C)$, 则 Y 的生成序列为 $B_1,B_2,\cdots,B_m,C_1,C_2,\cdots,C_n\ Y=(B\vee C)$

2) <= 利用第二归纳法证明

假设 Y 的生成序列为 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_m(=Y)$，证明 $Y_i(1\le i\le m)$ 是合式公式

(a) Y_i 是命题变元，则 Y_i 是合适公式；

(b) $Y_i=\neg Y_j(j<i)$，因为 Y_j 是合式公式，故 Y_i 也是合式公式；

(c) $Y_i=Y_j\vee Y_k(j,k<i)$，因为 Y_j,Y_k 是合式公式，故 Y_i 也是合式公式。

综上，Y 为合式公式当且仅当 Y 有一个生成序列。

3. 略 (根据公式定义进行证明)
4. 略
5. 解: 用结构归纳法证明

1) A 为命题变元 p，显然结论成立；

2) $A=\neg B$，因为 B 满足条件，则 $\neg(B)$ 即 A 也满足条件；

3) $A=B\vee C$，因为 B，C 满足条件，则 $(B)\vee(C)$ 也满足条件

综上，若表达式 A 为合式公式，则最终计数为 0.

6. 略
7. 略
8. 解: 用公式结构归纳法证明

1) A 为命题变元 p

(a) $p\in\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$ 且 $p=p_i$，则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A=B_i$，即 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A$ 为合式公式;

(b) $p\notin\{p_1,p_2,\cdots,p_n\}$, 则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A=A$;

2) $A=\neg B$, 则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}B$ 为合式公式，所以 $\neg S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}B=S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}\neg B$ 为合式公式，即 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A$ 为合式公式；

3) $A=B\vee C$, 则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}B$,$S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}C$ 为合式公式，所以 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}B\vee S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}C=S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}(B\vee C)$ 为合式公式，即 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A$ 为合式公式；

综上，若 A 是合式公式，则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A$ 为合式公式。

9. 解：若 C 为永真式，根据 Godel 完全性定理则 $\vdash C$，设 C 的证明序列为 $C_1,C_2,\cdots,C_n$, 用第二归纳法证明，$\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_i, 1\le i\le n$:

1) $C_i \in Aoxims$，显然 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_i$ 也为公理

2) 存在 $j,k<i$ 使 $C_k = C_j \supset C_i$，因为 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_j$ 且 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_k$, 即 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_j \supset S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_i$，有 MP 规则可推出 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_i$。

综上 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C$, 即 $\vdash D$，再由 Godel 完全性定理推出 $\models D$, 即 D 为永真式。

10.$(\neg(\neg(q\vee r)\vee\neg p)\vee\neg\neg(q\vee r))$

11. 暂无

12. 解:

$$
\begin{array}{lll}
1. & A\vee(B\vee C)\vdash A\vee(B\vee C) & \\
2. & A\vee(B\vee C)\vdash (B\vee C)\vee A & 1,i) \\
3. & A\vee(B\vee C)\vdash B\vee(C\vee A) & 2,ii) \\
4. & A\vee(B\vee C)\vdash (C\vee A)\vee B & 3,i) \\
5. & A\vee(B\vee C)\vdash C\vee(A\vee B) & 4,ii) \\
6. & A\vee(B\vee C)\vdash (A\vee B)\vee C & 5,i)
\end{array}
$$

13. 暂无

14. 可满足的

其否定对应的合取范式为 $(\neg p\vee q)\wedge(\neg r\vee s)\wedge(\neg s\vee q)\wedge\neg p\wedge r$, 令 $S=\{\neg p\vee q,\neg r\vee s,\neg s\vee q,\neg p,r\}$, 对 S 应用消解规则如下:

$$
\begin{array}{lll}
1. & S & \\
2. & \{\neg r\vee s,\neg s\vee q,r\} & 1,\text{关于}\neg p\text{纯文字规则} \\
3. & \{s,\neg s\vee q\} & 2,\text{关于}\neg r\text{单文字规则} \\
4. & \{q\} & 3,\text{关于}\neg s\text{单文字规则} \\
5. & \{qed\} & 4,\text{关于}\neg q\text{纯文字规则}
\end{array}
$$

令 $\varphi(r)=f$ 时为真，$\varphi(p)=f,\varphi(q)=\varphi(r)=\varphi(s)=t$ 时为假。

15. 永真式

对应的析取范式为 $(\neg r\vee\neg s\vee r\vee\neg q\vee p)\wedge(q\vee\neg p\vee s\vee\neg s\vee r\vee\neg q\vee p)$，每个短句都包含互补文字，故为永真式。

16. 永真式，用真值表

17. 可满足，$\varphi(p)=t,\varphi(q)=f$ 时为真，$\varphi(p)=f,\varphi(q)=t$ 时为假。

18. 永真式，用真值表

19. 解 P' 系统可以看做 P 系统由 $\neg(p\supset q)$ 出发进行的证明

方法一：先证明在 P 系统下若 Γ 不协调，且 $\neg A\notin Th(\Gamma)$, 则 $\Gamma\cup\{A\}$ 协调。若 $\Gamma\cup\{A\}$ 不协

调，则存在 B 使得 $\Gamma, A \vdash B$ 且 $\Gamma, A \vdash \neg B$, 则

1.	$\Gamma, A \vdash B$	hyp
2.	$\Gamma, A \vdash \neg B$	hyp
3.	$\Gamma, A \vdash \neg A$	$1, 2, DR$
4.	$\Gamma \vdash A \supset \neg A$	$3, CP$
5.	$\Gamma \vdash \neg A \supset \neg A$	
6.	$\Gamma \vdash \neg A$	$4, 5, DR_3$

这与 $\neg A \notin Th(\Gamma)$ 矛盾，故 $\Gamma \cup \{A\}$ 协调。因为 $\neg(p \supset q)$ 不为永真式，而 P 系统的定理都为永真式, 故 $\neg(p \supset q) \notin Th(P)$, 所以 $Axiom \cup \{\neg(p \supset q)\}$ 协调，即 P' 系统是协调的。

方法二：假设 P' 系统不协调，则在 P 系统下存在 B 使得 $\neg(p \supset q) \vdash B$ 且 $\neg(p \supset q) \vdash \neg B$，根据 Godel 完全性定理，$\neg(p \supset q) \models B$ 且 $\neg(p \supset q) \models \neg B$，明显矛盾，故 P' 系统协调。

20. 解不协调，记公理模式 $A \supset B$ 为 AS'

1.	$\vdash A \vee A \supset A$	AS_1
2.	$\vdash (A \vee A \supset A) \supset \neg(A \vee A \supset A)$	AS'
3.	$\vdash \neg(A \vee A \supset A)$	$1, 2, \bar{M}P$
4.	$\vdash B$	$3, DR$

故在 P 系统中增加 $A \supset B$ 做为公理所得系统不协调。

21. 解:

不存在不含“$\vee$”的定理。用反证法证明：若 A 为满足条件的公式，易知 A 中只有一个命题变元，设为 p，如果辖域中包含 p 的“$\neg$”的个数为偶数，令指派 $\varphi(p) = f$，否则 $\varphi(p) = t$，则 $\varphi(A) = f$，而 P 系统的定理都为永真式，所以 P 系统中不存在不含“$\vee$”的定理。

22. 解:

不存在不含“$\neg$”的定理。用反证法证明：若 A 为满足条件的公式，其中出现的命题变元为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，另 $\varphi(p_1) = \varphi(p_2) = \cdots = \varphi(p_n) = f$，则 $\varphi(A) = f$，而 P 系统的定理都为永真式，所以 P 系统中不存在不含“$\neg$”的定理。

23. 解:

1.	$\vdash A \vee A \supset A \vee A$	$Axiom$
2.	$\vdash (A \vee A \supset A \vee A) \supset (A \vee A \supset \neg(A \vee A))$	$Axiom$
3.	$\vdash A \vee A \supset \neg(A \vee A)$	$1, 2, MP$
4.	$\vdash (A \vee A \supset \neg(A \vee A)) \supset \neg(A \vee A) \vee A$	$Axiom$
5.	$\vdash \neg(A \vee A) \vee A$	$3, 4, MP$
6.	$\vdash \neg(A \vee A) \vee A \supset A \vee A$	$Axiom$
7.	$\vdash A \vee A$	$5, 6, MP$
8.	$\vdash A$	$5, 7, MP$

可以看出 s 的公式皆为定理，故 s 不协调。

24. 解:

A 是 R 的定理

1.	$\vdash A * A$	$Axiom$
2.	$\vdash A * (A * A)$	$Axiom$
3.	$\vdash A$	$1, 2, < A, (B * A), B >$

25. 解：令 $\Gamma = \{\neg P\}$(P 为命题变元)。

1) P' 是协调的对于 P 系统，Γ 是可满足的，且存在唯一的指派 $\varphi : P \to f$ 满足 Γ，则 $\Gamma \not\models p$，根据完全性定理 $\Gamma \not\vdash p$，所以在 P' 中，命题变元 p 不是定理，故 P' 是协调的。

2) 利用 1) 中的指派判断 A 的真值，若 $\varphi(A) = t$，则 A 是 P' 的定理。构造过程为 P 系统下从 Γ 出发的证明序列。

26. 解: 设命题变元 p 在 A 中不出现。

1.	$\vdash p \supset S^p_A p$	$Axiom$
2.	$\vdash p \supset A$	1
3.	$\vdash p \supset A \supset S^p_{p \supset A}(p \supset A)$	$Axiom$
4.	$\vdash p \supset A \supset (p \supset A \supset A)$	$3.$
5.	$\vdash p \supset A \supset A$	$2, 4, MP$
6.	$\vdash A$	$2, 5, MP$

所以对任意公式 A 都可以构造出证明序列，所以 P' 不协调，但同时是完全的。

27. 解:

定义 ψ 如下：

$$\begin{cases} \psi(p) = p & \text{若 p 为命题变元} \\ \psi(\wedge) = \vee \\ \psi(\vee) = \wedge \\ \psi(\neg) = \neg \\ \psi(\alpha\beta) = \psi(\alpha)\psi(\beta) \end{cases}$$

易知

- $A \in L(P)$，则 $\psi(A) \in L(Q)$;
- 若 $A \in L(Q)$，则 $\psi(A) \in L(P)$;
- $\psi(\psi(A)) = A$。

首先利用第二归纳法证明必要性：假设 A 为 Q 系统的定理，且证明序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_n(= A)$，下面证明 A_i 为永假式：

- $A_i \in Axiom$，显然 A_i 为永假式；
- 存在 $j, k < i$ 使得 $A_k = \neg A_j \wedge A_i$，根据归纳假设，因为 A_k, A_j 皆为永假式，所以 A_i 为永假式。

必要性得证。
下面分两步进行证明充分性：

1) 用第二归纳法证明，若 A 为 P 系统的定理，则 $\psi(A)$ 为 Q 系统定理，设 A 在 P 系统下的证明序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_n(= A)$:
   (a) $A_i \in Axiom_P$，显然 $A_i \in Axiom_Q$，则 $\vdash_Q \psi(A_i)$;
   (b) 存在 $j, k < i$，使得 $A_k = A_j \supset A_i$ 即 $A_k = \neg A_j \vee A_i$，则根据归纳假设 $\vdash \psi(A_j)$ 且 $\vdash \psi(\neg A_j \vee A_i)$ 即 $\vdash \neg\psi(A_j) \wedge \psi(A_i)$，所以 $\vdash \psi(A_i)$。
2) 用结构归纳法证明：若 $A \in L(Q)$ 且 A 为永假式，则 $\psi(A) \in L(P)$ 且 A 为永真式，若 $A \in L(Q)$ 为永真式，则 $\psi(A) \in L(P)$ 为永假式。
   (a) $A = p \wedge \neg p$ 或者 $A = \neg p \wedge p$，显然 A 为 Q 系统的最简永假式，$\psi(A) \in L(P)$ 为永真式;
   (b) $A = \neg(p \wedge \neg p)$ 或者 $A = \neg(\neg p \wedge p)$，显然 A 为 Q 系统的最简永真式，$\psi(A) \in L(P)$ 为永假式;
   (c) $A = \neg B$ 且 A 为永假式，根据归纳假设，B 为永真式，且 $\psi(B) \in L(P)$ 且为永假式，因为 $\psi(A) = \psi(\neg B) = \neg\psi(B)$，则 $\psi(A) \in L(P)$ 为永真式；
   (d) $A = \neg B$ 且 A 为永真式，根据归纳假设，B 为永假式，且 $\psi(B) \in L(P)$ 且为永真式，因为 $\psi(A) = \psi(\neg B) = \neg\psi(B)$，则 $\psi(A) \in L(P)$ 为永假式；
   (e) $A = B \wedge C$ 且 A 为永假式，则存在以下三种情况：
      - B 为永假式，根据归纳假设 $\psi(B) \in L(P)$ 且为永真式，因为 $\psi(A) = \psi(B \wedge C) = \psi(B) \vee \psi(C)$，则 $\psi(A) \in L(P)$ 为永真式；
      - C 为永假式，证明同上；

- B,C 均不为永假式，但对任意指派 φ 都有 $\varphi(B) \neq \varphi(C)$，又因为 $\psi(A) = \psi(B \wedge C) = \psi(B) \vee \psi(C)$，所以 $\psi(A) \in L(P)$ 为永真式；

(f) $A = B \wedge C$ 且 A 为永真式，则 B 和 C 皆为永真式，根据归纳假设，$\psi(B) \in L(P)$ 且为永假式且 $\psi(C) \in L(P)$ 且为永假式，又因为又因为 $\psi(A) = \psi(B \wedge C) = \psi(B) \vee \psi(C)$，故 $\psi(A) \in L(P)$ 为永假式。

综上，若 $A \in L(Q)$ 且 A 为永假式，根据充分性第二步证明，则 $\psi(A) \in L(P)$ 且为永真式，即 $\models_P \psi(A)$，根据完全性定理有 $\vdash_P \psi(A)$，根据充分性证明的第一步有 $\vdash_Q \psi(\psi(A))$，即 $\vdash_Q A$。充分性得证。

28. 解: 用公式结构结构归纳法证明：

1) A 为命题变元，易知 $V_\varphi(A) = V_\psi(A)$;

2) $A = \neg B$，由归纳假设知 $V_\varphi(B) = V_\psi(B)$，所以 $V_\varphi(A) = \neg V_\varphi(B) = \neg V_\psi(B) = V_\psi(\neg B) = V_\psi(A)$;

3) $A = B \vee C$，由归纳假设知 $V_\varphi(B) = V_\psi(B)$ 且 $V_\varphi(C) = V_\psi(C)$，所以 $V_\varphi(A) = V_\varphi(B \vee C) = V_\varphi(B) \vee V_\varphi(C) = V_\psi(B) \vee V_\psi(C) = V_\psi(B \vee C) = V_\psi(A)$。

综上，$V_\varphi(A) = V_\psi(A)$。

29. 解: 不是，参考 27 题

30. 解:

1)

1.	$\vdash p \vee p \supset p$	AS_1
2.	$\vdash A \vee A \supset A$	$1, sub$
3.	$\vdash p \supset q \vee p$	AS_2
4.	$\vdash A \supset B \vee A$	$3, sub$
5.	$\vdash p \supset q \supset (r \vee q \supset q \vee r)$	AS_3
6.	$\vdash A \supset B \supset (C \vee A \supset B \vee C)$	$5, sub$

由 2,4,6 知 P 的定理比为 p' 的定理。下面用第二归纳法证明 P' 的定理也为 P 的定理，设 A 为 P' 的定理，且证明序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_n (= A)$，则 $\vdash_P A_i$

(a) $A_i \in Axiom$，显然 $\vdash_P A_i$ 成立；

(b) 存在 $j, k < i$ 使得 $A_k = A_j \supset A_i$，根据归纳假设 $\vdash_P A_j$ 且 $\vdash_P A_k$，根据 P 系统的 MP 规则知 $\vdash_P A_i$ 成立；

(c) 存在 $j < i$ 使得 $A_i = S^{p_1, p_2, \cdots, p_n}_{B_1, B_2, \cdots, B_n} A_j$，根据归纳假设 $\vdash_P A_j$，由 P 系统的代入规则 sub 知 $\vdash_P A_i$ 成立。

所以 P 系统和 P' 系统具有相同的定理。

2) 若无 sub 规则，则不能推出 $s \vee s \supset s$(不能推出包含除 p,q,r 之外命题变元的公式)，故 sub 规则独立；若无 MP 规则，则不能推出 $s \vee \neg s$(不能推出长度小于 5 的公式)，故 MP 规则独立。

31. 与 30 题重复 32. 解:

令 $AS_4 = \neg A \vee A$，$AS_5 = A \vee \neg A$。下面证明 $AS_1 - AS_3$ 的独立性。

1) 给每个命题变元以 0，1,2 三个可能的值，¬ 和 ∨ 的真值表定义如下:

	¬
0	1
1	0
2	2

∨	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

$AS_2 - AS_5$ 在此数值解释下恒为 0，而 AS_1 不常为 0，故 $AS_2 - AS_5$ 不能表示出 AS_1。

2) 定义 ¬ 和 ∨ 的真值表定义如下:

	¬
0	2
1	1
2	0

∨	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$AS_1, AS_3 - AS_5$ 在此数值解释下永不为 2，而 AS_2 可能为 2，故 $AS_1, AS_3 - AS_5$ 不能表示出 AS_2。

3) 定义 ¬ 和 ∨ 的真值表定义如下:

	¬
0	1
1	2
2	0

∨	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	0	0	2

AS_1, AS_2, AS_4, AS_5 在此数值解释下恒为 0，AS_3 不恒为 0，故 AS_1, AS_2, AS_4, AS_5 不能表示出 AS_3。

综上，结论成立。

33. 解:

构造如下的数值解释:

	¬
0	1
1	0

∨	0	1
0	1	1
1	0	1

在此数值解释下，$AS_1 - AS_3$ 恒为 1，$P \supset \neg\neg P$ 不恒为 1，且两个恒为 1 的公式经 MP 规则必得到一个恒为 1 的公式，故不能从 P^* 系统导出 $P \supset \neg\neg P$。

34. 解:

设 p,q 为命题变元，A 为由 $\{\neg, \equiv\}, p, q$ 构成的公式。用公式结构归纳法证明若 A_i 不是永真式或永假式，则 A_i 的真值表中取值为真的个数与取值为假的个数相等。

1) $A=p$ 或者 $A=q$，显然成立；

2) $A=\neg B$，显然成立；

3) $A=B\equiv C$，若 $\varphi(B)=\varphi(C)$ 或 $\varphi(B)\neq\varphi(C)$ 时，则 A 为永真式或永假式，当 $\varphi(B),\varphi(C)$ 不完全一样或完全相反时 (φ 为任意指派)，通过枚举可知结论同样成立。

所以，A 为永真式或者永假式或 A 的真值表中 t 的个数与 f 的个数相等，而 v 的真值表中 t 的个数与 f 的个数不等，因此 $\{\neg,\equiv\}$ 不能表示出 $\vee$，则 $\{\neg,\equiv\}$ 不完全。

35. 解:

先证明对于每个 n 元真值函数 h:$\{t,f\}^n\rightarrow\{t,f\}$，存在一个合取范式 A 以及 n 个命题变元:$p_1,p_2,\cdots,p_n$，使得 $h=[\lambda p_1,\cdots\lambda p_n A]$:

1) 若 h 恒取 t，则令 $A=p_1\vee\neg p_1$;

2) 若 h 不恒为 t，对 P 系统中的每个指派 φ, 令:

$$A^{\varphi}=p_1^{\varphi}\vee p_2^{\varphi}\vee\cdots\vee p_n^{\varphi}$$
$$p_i^{\varphi}=\begin{cases}\neg p_i & 若\varphi(p_i)=t\\ p_i & 否则\end{cases}$$

则 $\varphi(A^{\varphi})=\varphi(p_1^{\varphi})\vee\cdots\vee\varphi(p_n^{\varphi})=f$，因此 $[\lambda p_1,\cdots\lambda p_n A](x_1,x_2,\cdots,x_n)=f$ 当且仅当 $x_1=p_1^{\varphi},\cdots,x_n=p_n^{\varphi}$。所以 $A=\wedge_{h(\varphi(p_1),\varphi(p_2),\cdots,\varphi(p_n))=f}A^{\varphi}$ 满足要求。

对于公式 B，都存在一个 n 元真值函数 $h=[\lambda p_1,\cdots\lambda p_m B]$，$p_1,p_2\cdots,p_m$ 为 B 中出现的所有命题变元，则由上述证明可知，存在一个合取范式 A 使得 $[\lambda p_1,\cdots\lambda p_m A]=h=[\lambda p_1,\cdots\lambda p_m B]$，故 $A\Leftrightarrow B$，即每个公式都有合取范式。

36. 解: $\{\vee,\wedge,\supset,\equiv\}$ 不是完全集

下面用公式结构归纳法证明，由命题变元 p 和 $\{\vee,\wedge,\supset,\equiv\}$ 构成的公式没有永假式，也不能有 $\{\vee,\wedge,\supset,\equiv\}$ 定义出 $\neg$:

1) A 为命题变元 p，既不是永假式，其真值表也不具备 $\neg$ 的形式；

2) $A=B\equiv C$ 或 $A=B\supset C$ 或 $A=B\vee C$ 或 $A=B\wedge C$，由归纳假设知 B 和 C 的真值表具有以下两种形式:

p	
0	0
1	1

p	
0	1
1	1

无论 $A=B\equiv C$ 或 $A=B\supset C$ 或 $A=B\vee C$ 或 $A=B\wedge C$ 都不能使 A 为永假式或者具备与 $\neg$ 相同的真值表，所以 $\{\vee,\wedge,\supset,\equiv\}$ 表达不出 $\neg$，即不完全。

37. 解:

首先用归纳法证明：若 A 为仅由 $\equiv$ 构成的合式公式 (且其中的命题变元为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$)，则任意改变 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的出现顺序所形成的新公式 B 与 A 等价，用 $^{\#}A$ 表示 A 中命题变元和 $\equiv$ 出现的次数，则 $^{\#}A=2i+1(i=0,1,\cdots)$,

1) i=0,1，显然成立;

2) i=k(k>1)，$A_k = A_{k-1} \equiv P_k$，设 $A_{k-1} = B \equiv C$，则 $A_k = B \equiv C \equiv P_k$，显然 A_k 与 $C \equiv P_k \equiv B$、$P_k \equiv B \equiv C$、$B \equiv P_k \equiv C$ 等价

故仅由 $\equiv$ 构成的命题合式公式 A(且其中的命题变元为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$) 与下式等价:

$$\underbrace{(p_1 \equiv p_1 \equiv \cdots \equiv p_1)}_{l_1} \equiv \underbrace{(p_2 \equiv p_3 \equiv \cdots \equiv p_2)}_{l_2} \equiv \cdots \equiv \underbrace{(p_n \equiv p_n \equiv \cdots \equiv p_n)}_{l_n}$$

其中 l_i 表示 p_i 在 A 中出现的次数，易知若 l_i 为偶数，则该项对应与 t，否则为 p_i。所以结论成立。

38. 略
39. 参考 37
40. 解:

易知由 $\wedge, \not\equiv, t, f$ 构成的公式只能为永真式或者永假式

用结构归纳法证明:

1) A 为 t 显然成立;

2) $A = B \wedge C$,

- 若 A 能变换到 1，则 B 和 C 都能变换到 1，根据归纳假设，B 和 C 都是永真式，所以 A 也为永真式;
- 若 A 为永真式，则 B，C 都是永真式，根据归纳假设，B 和 C 都能变换到 1，所以 A 也能变换到 1;

3) $A = B \not\equiv C$

(a) 若 A 能变换到 1，则 B 能变换到 0、C 能变换到 1，或者 B 能变换到 1、C 能变换到 0，根据归纳假设，B、C 中有一个为永真式，另一个不为永真式，故 A 为永真式。

(b) 若 A 为永真式，根据归纳假设，B 和 C 中只能有一个永真式，所以 A 能变换到 1(根据归纳假设，B 和 C 中的永假式只能变换到 0)

综上，结论得证。

41. 解:

设 C(A) 中所有合适的公式的析取为 B，因为 C(A) 的所有元素均为合取项，所以 B 是析取范式。根据定理 2.6.7，$\models_\varphi A$ 当且仅当有 $D \in C(A)$ 使得 $\models_\varphi D$ 成立。则对任意指派 φ，若 $\models_\varphi A$，则存在 $D \in C(A)$ 满足 $\models_\varphi D$，又因为 B 为所有 C(A) 元素的析取，所以 $\models_\varphi B$，必要性成立;

对任意指派 φ，若 $\models_\varphi B$，则必然存在一个 B 的合取项 D 满足 $\models_\varphi D$，而 $D \in C(A)$，所以 $\models_\varphi A$, 充分性成立。

42. 解:

| 表示与非，$p \supset q = \neg p \vee q = \neg(p \wedge \neg q)$，所以用 | 表示为 p|(q|q)。

43. 解:

$|$ 不是可结合的，因为 $f|f|t \not\equiv f|(f|t)$ 为永真式。

44. 解：

设 A 是 Q 的定理，则 A 存在证明序列 $A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$。则 A_i 为公理，或对 A_j 应用规则 1 所得，或对 A_k, A_j 应用规则 2 所得。

假设第一次应用规则 2 时，令 $A_j = D, A_k = E$, 则 D，E 皆由规则 1 得出或为公理。

令 $D = D_1 \mid (D_1 \mid D_2) \mid ((D_1 \mid (D_2 \mid D_1)) \mid (D_3 \mid D_4 \mid (D_1 \mid D_3 \mid (D_1 \mid D_3))))$

75. 解：用结构归纳法证明

1) 若 A 为命题变元

(a) A=m，则 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B A = S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} B$，因为 $B = S^{x_1,x_2,\cdots,x_n}_{u_1,u_2\cdots,u_n} C$ 且 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 不在 C 中出现，故 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} B = C = S^m_C A$

(b) A 为命题变元，且 $A = p \neq m$, 则 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B A = S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} p = p = S^m_C A$

2) A 为原子公式，$A = P(t_1, t_2, \cdots, t_k), t_i = f(y_1, y_2, \cdots, y_j), 1 \leq i \leq k$, 则 m 不在 A 中出现，所以 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B A = A = S^m_C A$

3) $A = \neg D$, 因为 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B D = S^m_C D$, 所以 $\neg S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B D = \neg S^m_C D$, 即 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B A = S^m_C A$

4) $A = D \vee E$, 因为 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B D = S^m_C D$, 且 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B E = S^m_C E$, 则 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B D \vee S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B E = S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B (D \vee E) = S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B A = S^m_C D \vee S^m_C E = S^m_C (D \vee E) = S^m_C A$

5) $A = \forall y D$, 则 $y \notin \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, 则 B 对 A 中 m 是自由的, 且 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B D = S^m_C D$, , 所以 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B A = S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B \forall y D = \forall y S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n} S^m_B D = \forall y S^m_C D = S^m_C \forall y D = S^m_C A$

综上，结论成立.

76. 解：