数理逻辑课后题/考题答案

作者: 杨森

2017 年 9 月 13 日

课后题

1. 略
2. 解:

1) => 利用结构归纳法证明

(a) Y 是命题变元，此时 Y 的生成序列即为自身；

(b) $Y =\sim A$, A 的生成序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_m(= A)$, 则 Y 的生成序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_m, Y$;

(c) $Y = B \vee C$, B 的生成序列为 $B_1, B_2, \cdots, B_m(= B)$, C 的生成序列为 $C_1, C_2, \cdots, C_n(= C)$, 则 Y 的生成序列为 $B_1, B_2, \cdots, B_m, C_1, C_2, \cdots, C_n$ $Y = (B \vee C)$

2) <= 利用第二归纳法证明

假设 Y 的生成序列为 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m(= Y)$，证明 $Y_i(1 \leq i \leq m)$ 是合式公式

(a) Y_i 是命题变元，则 Y_i 是合适公式；

(b) $Y_i =\sim Y_j(j < i)$，因为 Y_j 是合式公式，故 Y_i 也是合式公式；

(c) $Y_i = Y_j \vee Y_k(j, k < i)$，因为 Y_j,Y_k 是合式公式，故 Y_i 也是合式公式。

综上，Y 为合式公式当且仅当 Y 有一个生成序列。

3. 略 (根据公式定义进行证明)
4. 略
5. 解: 用结构归纳法证明

1) A 为命题变元 p，显然结论成立；

2) $A =\sim B$，因为 B 满足条件，则 $\sim(B)$ 即 A 也满足条件；

3) $A = B \vee C$，因为 B，C 满足条件，则 $(B) \vee (C)$ 也满足条件

综上，若表达式 A 为合式公式，则最终计数为 0.

6. 略
7. 略
8. 解: 用公式结构归纳法证明

1) A 为命题变元 p

(a) $p \in \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ 且 $p = p_i$，则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A = B_i$，即 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A$ 为合式公式;

(b) $p \notin \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$, 则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A = A$;

2) $A =\sim B$, 则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}B$ 为合式公式，所以 $\sim S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}B = S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n} \sim B$ 为合式公式，即 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A$ 为合式公式；

3) $A = B \vee C$, 则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}B$,$S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}C$ 为合式公式，所以 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}B \vee S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}C = S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}(B \vee C)$ 为合式公式，即 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A$ 为合式公式；

综上，若 A 是合式公式，则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n}A$ 为合式公式。

9. 解：若 C 为永真式，根据 Godel 完全性定理则 $\vdash C$，设 C 的证明序列为 $C_1, C_2, \cdots, C_n$, 用第二归纳法证明，$\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_i, 1 \leq i \leq n$:

1) $C_i \in Aoxims$，显然 $S_{q_1,q_2,\cdots,q_n}^{p_1,p_2,\cdots,p_n}C_i$ 也为公理

2) 存在 $j,k<i$ 使 $C_k=C_j\supset C_i$，因为 $\vdash S_{q_1,q_2,\cdots,q_n}^{p_1,p_2,\cdots,p_n}C_j$ 且 $\vdash S_{q_1,q_2,\cdots,q_n}^{p_1,p_2,\cdots,p_n}C_k$, 即 $\vdash S_{q_1,q_2,\cdots,q_n}^{p_1,p_2,\cdots,p_n}C_j\supset S_{q_1,q_2,\cdots,q_n}^{p_1,p_2,\cdots,p_n}C_i$，有 MP 规则可推出 $\vdash S_{q_1,q_2,\cdots,q_n}^{p_1,p_2,\cdots,p_n}C_i$。

综上 $\vdash S_{q_1,q_2,\cdots,q_n}^{p_1,p_2,\cdots,p_n}C$, 即 $\vdash D$，再由 Godel 完全性定理推出 $\models D$, 即 D 为永真式。

10.$(\sim(\sim(q\vee r)\vee\sim p)\vee\sim\sim(q\vee r))$

11. 暂无

12. 解:

$$
\begin{array}{lll}
1. & A\vee(B\vee C)\vdash A\vee(B\vee C) & \\
2. & A\vee(B\vee C)\vdash(B\vee C)\vee A & 1,i) \\
3. & A\vee(B\vee C)\vdash B\vee(C\vee A) & 2,ii) \\
4. & A\vee(B\vee C)\vdash(C\vee A)\vee B & 3,i) \\
5. & A\vee(B\vee C)\vdash C\vee(A\vee B) & 4,ii) \\
6. & A\vee(B\vee C)\vdash(A\vee B)\vee C & 5,i)
\end{array}
$$

13. 暂无

14. 可满足的

其否定对应的合取范式为 $(\sim p\vee q)\wedge(\sim r\vee s)\wedge(\sim s\vee q)\wedge\sim p\wedge r$, 令 $S=\{\sim p\vee q,\sim r\vee s,\sim s\vee q,\sim p,r\}$, 对 S 应用消解规则如下:

$$
\begin{array}{lll}
1. & S & \\
2. & \{\sim r\vee s,\sim s\vee q,r\} & 1,\text{关于}\sim p\text{纯文字规则} \\
3. & \{s,\sim s\vee q\} & 2,\text{关于}\sim r\text{单文字规则} \\
4. & \{q\} & 3,\text{关于}\sim s\text{单文字规则} \\
5. & \{qed\} & 4,\text{关于}\sim q\text{纯文字规则}
\end{array}
$$

令 $\varphi(r)=f$ 时为真，$\varphi(p)=f,\varphi(q)=\varphi(r)=\varphi(s)=t$ 时为假。

15. 永真式

对应的析取范式为 $(\sim r\vee\sim s\vee r\vee\sim q\vee p)\wedge(q\vee\sim p\vee s\vee\sim s\vee r\vee\sim q\vee p)$，每个短句都包含互补文字，故为永真式。

16. 永真式，用真值表

17. 可满足，$\varphi(p)=t,\varphi(q)=f$ 时为真，$\varphi(p)=f,\varphi(q)=t$ 时为假。

18. 永真式，用真值表

19. 解 P' 系统可以看做 P 系统由 $\sim(p\supset q)$ 出发进行的证明

方法一：先证明在 P 系统下若 Γ 协调，且 $\sim A\notin Th(\Gamma)$, 则 $\Gamma\cup\{A\}$ 协调。若 $\Gamma\cup\{A\}$ 不协

调，则存在 B 使得 $\Gamma, A \vdash B$ 且 $\Gamma, A \vdash \sim B$, 则

1.	$\Gamma, A \vdash B$	hyp
2.	$\Gamma, A \vdash \sim B$	hyp
3.	$\Gamma, A \vdash \sim A$	$1, 2, DR$
4.	$\Gamma \vdash A \supset \sim A$	$3, CP$
5.	$\Gamma \vdash \sim A \supset \sim A$	
6.	$\Gamma \vdash \sim A$	$4, 5, DR_3$

这与 $\sim A \notin Th(\Gamma)$ 矛盾，故 $\Gamma \cup \{A\}$ 协调。因为 $\sim (p \supset q)$ 不为永真式，而 P 系统的定理都为永真式, 故 $\sim (p \supset q) \notin Th(P)$, 所以 $Axiom \cup \{\sim (p \supset q)\}$ 协调，即 P' 系统是协调的。

方法二：假设 P' 系统不协调，则在 P 系统下存在 B 使得 $\sim (p \supset q) \vdash B$ 且 $\sim (p \supset q) \vdash \sim B$, 根据 Godel 完全性定理，$\sim (p \supset q) \models B$ 且 $\sim (p \supset q) \models \sim B$，明显矛盾，故 P' 系统协调。

20. 解不协调，记公理模式 $A \supset B$ 为 AS'

1.	$\vdash A \vee A \supset A$	AS_1
2.	$\vdash (A \vee A \supset A) \supset \sim (A \vee A \supset A)$	AS'
3.	$\vdash \sim (A \vee A \supset A)$	$1, 2, \overline{MP}$
4.	$\vdash B$	$3, DR$

故在 P 系统中增加 $A \supset B$ 做为公理所得系统不协调。

21. 解:

不存在不含 “$\vee$” 的定理。用反证法证明：若 A 为满足条件的公式，易知 A 中只有一个命题变元，设为 p，如果辖域中包含 p 的 “$\sim$” 的个数为偶数，令指派 $\varphi(p) = f$，否则 $\varphi(p) = t$，则 $\varphi(A) = f$，而 P 系统的定理都为永真式，所以 P 系统中不存在不含 “$\vee$” 的定理。

22. 解:

不存在不含 “$\sim$” 的定理。用反证法证明：若 A 为满足条件的公式，其中出现的命题变元为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，另 $\varphi(p_1) = \varphi(p_2) = \cdots = \varphi(p_n) = f$，则 $\varphi(A) = f$，而 P 系统的定理都为永真式，所以 P 系统中不存在不含 “$\sim$” 的定理。

23. 解:

1.	$\vdash A \vee A \supset A \vee A$	$Axiom$
2.	$\vdash (A \vee A \supset A \vee A) \supset (A \vee A \supset \sim (A \vee A))$	$Axiom$
3.	$\vdash A \vee A \supset \sim (A \vee A)$	$1, 2, MP$
4.	$\vdash (A \vee A \supset \sim (A \vee A)) \supset \sim (A \vee A) \vee A$	$Axiom$
5.	$\vdash \sim (A \vee A) \vee A$	$3, 4, MP$
6.	$\vdash \sim (A \vee A) \vee A \supset A \vee A$	$Axiom$
7.	$\vdash A \vee A$	$5, 6, MP$
8.	$\vdash A$	$5, 7, MP$

可以看出 s 的公式皆为定理，故 s 不协调。

24. 解:

A 是 R 的定理

1.	$\vdash A * A$	$Axiom$
2.	$\vdash A * (A * A)$	$Axiom$
3.	$\vdash A$	$1, 2, < A, (B * A), B >$

25. 解：令 $\Gamma = \{\sim P\}$(P 为命题变元)。

1) P' 是协调的对于 P 系统，Γ 是可满足的，且存在唯一的指派 $\varphi : P \to f$ 满足 Γ，则 $\Gamma \not\models p$，根据完全性定理 $\Gamma \not\vdash p$，所以在 P' 中，命题变元 p 不是定理，故 P' 是协调的。
2) 利用 1) 中的指派判断 A 的真值，若 $\varphi(A) = t$，则 A 是 P' 的定理。构造过程为 P 系统下从 Γ 出发的证明序列。

26. 解: 设命题变元 p 在 A 中不出现。

1.	$\vdash p \supset S^p_A p$	$Axiom$
2.	$\vdash p \supset A$	1
3.	$\vdash p \supset A \supset S^p_{p \supset A}(p \supset A)$	$Axiom$
4.	$\vdash p \supset A \supset (p \supset A \supset A)$	3.
5.	$\vdash p \supset A \supset A$	$2, 4, MP$
6.	$\vdash A$	$2, 5, MP$

所以对任意公式 A 都可以构造出证明序列，所以 P' 不协调，但同时是完全的。

27. 解:

定义 ψ 如下：

$$\begin{cases} \psi(p) = p & \text{若 p 为命题变元} \\ \psi(\wedge) = \vee \\ \psi(\vee) = \wedge \\ \psi(\sim) = \sim \\ \psi(\alpha\beta) = \psi(\alpha)\psi(\beta) \end{cases}$$

易知

- $A \in L(P)$，则 $\psi(A) \in L(Q)$;
- 若 $A \in L(Q)$，则 $\psi(A) \in L(P)$;
- $\psi(\psi(A)) = A$。

首先利用第二归纳法证明必要性：假设 A 为 Q 系统的定理，且证明序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_n (= A)$，下面证明 A_i 为永假式：

- $A_i \in Axiom$，显然 A_i 为永假式；
- 存在 $j, k < i$ 使得 $A_k = \sim A_j \wedge A_i$，根据归纳假设，因为 A_k, A_j 皆为永假式，所以 A_i 为永假式。

必要性得证。
下面分两步进行证明充分性：

1) 用第二归纳法证明：若 A 为 P 系统的定理，即 $\vdash_P A$，则 $\vdash_Q \psi(A)$，设 A 在 P 系统下的证明序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_n (= A)$
   (a) A 为 P 系统的公理，易知 $\psi(A)$ 为 Q 的公理，$\vdash_Q \psi(A)$ 成立
   (b) 存在 $j, k < i$ 使得 $A_k = A_j \supset A_i$，则 $\vdash_Q \psi(A_k)$ 即 $\vdash_Q \sim \psi(A_j) \wedge \psi(A_i)$ 且 $\vdash_Q \psi(A_j)$, 根据 Q 系统的规则，可知 $\vdash \psi(A_i)$ 成立
2) 证明若 $A \equiv B$，则 $\psi(A) \equiv \psi(B)$
   若 $A \equiv B$，则 $\vdash_P A \equiv B$，由第一步知 $\vdash_Q \psi(A \equiv B)$，即 $\vdash_Q \psi(A) \equiv \sim \psi(B)$，所以 $\psi(A) \equiv \sim \psi(B)$ 为永假式，$\psi(A) \equiv \psi(B)$ 为永真式

综上，若 $A \in L(Q)$ 且 A 为永假式，则 $A \equiv p \wedge \sim p$，根据充分性第二步证明，则 $\psi(A) \equiv \psi(p \wedge \sim p)$ 为永真式，则 $\models_P \psi(A)$，根据完全性定理有 $\vdash_P \psi(A)$，根据充分性证明的第一步有 $\vdash_Q \psi(\psi(A))$，即 $\vdash_Q A$。充分性得证。

28. 解: 用公式结构结构归纳法证明：

1) A 为命题变元，易知 $V_\varphi(A) = V_\psi(A)$;
2) $A = \sim B$，由归纳假设知 $V_\varphi(B) = V_\psi(B)$，所以 $V_\varphi(A) = \sim V_\varphi(B) = \sim V_\psi(B) = V_\psi(\sim B) = V_\psi(A)$;
3) $A = B \vee C$，由归纳假设知 $V_\varphi(B) = V_\psi(B)$ 且 $V_\varphi(C) = V_\psi(C)$，所以 $V_\varphi(A) = V_\varphi(B \vee C) = V_\varphi(B) \vee V_\varphi(C) = V_\psi(B) \vee V_\psi(C) = V_\psi(B \vee C) = V_\psi(A)$。

综上，$V_\varphi(A) = V_\psi(A)$。

29. 解: 不是，参考 27 题
30. 解:

1)

$$\begin{array}{lll} 1. & \vdash p \vee p \supset p & AS_1 \\ 2. & \vdash A \vee A \supset A & 1, sub \\ 3. & \vdash p \supset q \vee p & AS_2 \\ 4. & \vdash A \supset B \vee A & 3, sub \\ 5. & \vdash p \supset q \supset (r \vee q \supset q \vee r) & AS_3 \\ 6. & \vdash A \supset B \supset (C \vee A \supset B \vee C) & 5, sub \end{array}$$

由 2,4,6 知 P 的定理比为 p' 的定理。下面用第二归纳法证明 P' 的定理也为 P 的定理，设 A 为 P' 的定理，且证明序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_n (= A)$，则 $\vdash_P A_i$

(a) $A_i \in Axiom$，显然 $\vdash_P A_i$ 成立；

(b) 存在 $j, k < i$ 使得 $A_k = A_j \supset A_i$，根据归纳假设 $\vdash_P A_j$ 且 $\vdash_P A_k$，根据 P 系统的 MP 规则知 $\vdash_P A_i$ 成立；

(c) 存在 $j < i$ 使得 $A_i = S^{p_1, p_2, \cdots, p_n}_{B_1, B_2, \cdots, B_n} A_j$，根据归纳假设 $\vdash_P A_j$，由 P 系统的代入规则 sub 知 $\vdash_P A_i$ 成立。

所以 P 系统和 P' 系统具有相同的定理。

2) 若无 sub 规则，则不能推出 $s \vee s \supset s$(不能推出包含除 p,q,r 之外命题变元的公式)，故 sub 规则独立；若无 MP 规则，则不能推出 $s \vee \sim s$(不能推出长度小于 5 的公式)，故 MP 规则独立。

31. 与 30 题重复 32. 解:

令 $AS_4 = \sim A \vee A$，$AS_5 = A \vee \sim A$。下面证明 $AS_1 - AS_3$ 的独立性。

1) 给每个命题变元以 0，1,2 三个可能的值，$\sim$ 和 $\vee$ 的真值表定义如下：

	$\sim$
0	1
1	0
2	2

$\vee$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

$AS_2 - AS_5$ 在此数值解释下恒为 0，而 AS_1 不常为 0，故 $AS_2 - AS_5$ 不能表示出 AS_1。

2) 定义 $\sim$ 和 $\vee$ 的真值表定义如下：

$AS_1, AS_3 - AS_5$ 在此数值解释下永不为 2，而 AS_2 可能为 2，故 $AS_1, AS_3 - AS_5$ 不能表示出 AS_2。

3) 定义 $\sim$ 和 $\vee$ 的真值表定义如下：

   AS_1, AS_2, AS_4, AS_5 在此数值解释下恒为 0，AS_3 不恒为 0，故 AS_1, AS_2, AS_4, AS_5 不能表示出 AS_3。

   综上，结论成立。

33. 解:

构造如下的数值解释：

在此数值解释下，$AS_1 - AS_3$ 恒为 1，$P \supset\sim\sim P$ 不恒为 1，且两个恒为 1 的公式经 MP 规则必得到一个恒为 1 的公式，故不能从 P^* 系统导出 $P \supset\sim\sim P$。

34. 解:

设 p,q 为命题变元，A 为由 $\{\sim, \equiv\}, p, q$ 构成的公式。用公式结构归纳法证明若 A_i 不是永真式或永假式，则 A_i 的真值表中取值为真的个数与取值为假的个数相等。

1) $A = p$ 或者 $A = q$，显然成立；
2) $A =\sim B$，显然成立；
3) $A = B \equiv C$，若 $\varphi(B) = \varphi(C)$ 或 $\varphi(B) \neq \varphi(C)$ 时，则 A 为永真式或永假式，当 $\varphi(B), \varphi(C)$ 不完全一样或完全相反时 (φ 为任意指派)，通过枚举可知结论同样成立。

所以，A 为永真式或者永假式或 A 的真值表中 t 的个数与 f 的个数相等，而 v 的真值表中 t 的个数与 f 的个数不等，因此 $\{\sim, \equiv\}$ 不能表示出 $\vee$，则 $\{\sim, \equiv\}$ 不完全。

35. 解:

先证明对于每个 n 元真值函数 h:$\{t, f\}^n \rightarrow \{t, f\}$，存在一个合取范式 A 以及 n 个命题变元:$p_1, p_2, \cdots, p_n$，使得 $h = [\lambda p_1, \cdots \lambda p_n A]$:

1) 若 h 恒取 t，则令 $A = p_1 \vee \sim p_1$；

	$\sim$
0	2
1	1
2	0

$\vee$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

	$\sim$
0	1
1	2
2	0

$\vee$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	0
2	0	0	2

	$\sim$
0	1
1	0

$\vee$	0	1
0	1	1
1	0	1

2) 若 h 不恒为 t，对 P 系统中的每个指派 φ, 令:

$$A^{\varphi} = p_1^{\varphi} \vee p_2^{\varphi} \vee \cdots \vee p_n^{\varphi}$$

$$p_i^{\varphi} = \begin{cases} \sim p_i & 若\varphi(p_i) = t \\ p_i & 否则 \end{cases}$$

则 $\varphi(A^{\varphi}) = \varphi(p_1^{\varphi}) \vee \cdots \vee \varphi(p_n^{\varphi}) = f$，因此 $[\lambda p_1, \cdots \lambda p_n A](x_1, x_2, \cdots, x_n) = f$ 当且仅当 $x_1 = p_1^{\varphi}, \cdots, x_n = p_n^{\varphi}$。所以 $A = \wedge_{h(\varphi(p_1), \varphi(p_2), \cdots, \varphi(p_n)) = f} A^{\varphi}$ 满足要求。

对于公式 B，都存在一个 n 元真值函数 $h = [\lambda p_1, \cdots \lambda p_m B]$，$p_1, p_2 \cdots, p_m$ 为 B 中出现的所有命题变元，则由上述证明可知，存在一个合取范式 A 使得 $[\lambda p_1, \cdots \lambda p_m A] = h = [\lambda p_1, \cdots \lambda p_m B]$，故 $A \Leftrightarrow B$，即每个公式都有合取范式。

36. 解: $\{\vee, \wedge, \supset, \equiv\}$ 不是完全集

下面用公式结构归纳法证明，由命题变元 p 和 $\{\vee, \wedge, \supset, \equiv\}$ 构成的公式没有永假式，也不能有 $\{\vee, \wedge, \supset, \equiv\}$ 定义出 $\sim$:

1) A 为命题变元 p，既不是永假式，其真值表也不具备 $\sim$ 的形式;

2) $A = B \equiv C$ 或 $A = B \supset C$ 或 $A = B \vee C$ 或 $A = B \wedge C$，由归纳假设知 B 和 C 的真值表具有以下两种形式:

p	
0	0
1	1

p	
0	1
1	1

无论 $A = B \equiv C$ 或 $A = B \supset C$ 或 $A = B \vee C$ 或 $A = B \wedge C$ 都不能使 A 为永假式或者具备与 $\sim$ 相同的真值表，所以 $\{\vee, \wedge, \supset, \equiv\}$ 表达不出 $\sim$，即不完全。

37. 解:

首先用归纳法证明: 若 A 为仅由 $\equiv$ 构成的合式公式 (且其中的命题变元为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$)，则任意改变 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的出现顺序所形成的新公式 B 与 A 等价，用 $^{\#}A$ 表示 A 中命题变元和 $\equiv$ 出现的次数，则 $^{\#}A = 2i + 1 (i = 0, 1, \cdots)$,

1) i=0,1 时显然成立;

2) i=k (k>1)，$A_k = A_{k-1} \equiv P_k$，设 $A_{k-1} = B \equiv C$，则 $A_k = B \equiv C \equiv P_k$，显然 A_k 与 $C \equiv P_k \equiv B$、$P_k \equiv B \equiv C$、$B \equiv P_k \equiv C$ 等价

故仅由 $\equiv$ 构成的命题合式公式 A(且其中的命题变元为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$) 与下式等价:

$$\underbrace{(p_1 \equiv p_1 \equiv \cdots \equiv p_1)}_{l_1} \equiv \underbrace{(p_2 \equiv p_3 \equiv \cdots \equiv p_2)}_{l_2} \equiv \cdots \equiv \underbrace{(p_n \equiv p_n \equiv \cdots \equiv p_n)}_{l_n}$$

其中 l_i 表示 p_i 在 A 中出现的次数，易知若 l_i 为偶数，则该项对应与 t，否则为 p_i。所以结论成立。

38. 略

39. 参考 37

40. 解:

易知由 $\wedge, \not\equiv, t, f$ 构成的公式只能为永真式或者永假式

用结构归纳法证明:

1) A 为 t 显然成立;

2) $A = B \wedge C$,

   - 若 A 能变换到 1, 则 B 和 C 都能变换到 1, 根据归纳假设, B 和 C 都是永真式, 所以 A 也为永真式;
   - 若 A 为永真式, 则 B, C 都是永真式, 根据归纳假设, B 和 C 都能变换到 1, 所以 A 也能变换到 1;

3) $A = B \not\equiv C$

   (a) 若 A 能变换到 1, 则 B 能变换到 0、C 能变换到 1, 或者 B 能变换到 1、C 能变换到 0, 根据归纳假设, B、C 中有一个为永真式, 另一个不为永真式, 故 A 为永真式。

   (b) 若 A 为永真式, 根据归纳假设, B 和 C 中只能有一个永真式, 所以 A 能变换到 1(根据归纳假设, B 和 C 中的永假式只能变换到 0。

综上,结论得证。

41. 解:

设 C(A) 中所有合适的公式的析取为 B, 因为 C(A) 的所有元素均为合取项, 所以 B 是析取范式。根据定理 2.6.7, $\models_\varphi A$ 当且仅当有 $D \in C(A)$ 使得 $\models_\varphi D$ 成立。则对任意指派 φ, 若 $\models_\varphi A$, 则存在 $D \in C(A)$ 满足 $\models_\varphi D$, 又因为 B 为所有 C(A) 元素的析取, 所以 $\models_\varphi B$, 必要性成立;

对任意指派 φ, 若 $\models_\varphi B$, 则必然存在一个 B 的合取项 D 满足 $\models_\varphi D$, 而 $D \in C(A)$, 所以 $\models_\varphi A$, 充分性成立。

42. 解:

| 表示与非, $p \supset q = \sim p \vee q = \sim (p \wedge \sim q)$, 所以用 | 表示为 p|(q|q)。

43. 解:

| 不是可结合的, 因为 $f|f|t \not\equiv f|(f|t)$ 为永真式。

44. 解:

此系统并不协调, 下面给出简要的证明序列, 为了减小公式长度, 做以下表示: 令 $A_p =$

$A|(A|A), A_r = S|Q\blacksquare A|S\blacksquare A|S$，其中 A, S, Q 均为任意公式。

1.	$\vdash p|(p|r)|\blacksquare p|(r|p)|\blacksquare s|q\blacksquare p|s\blacksquare p|s$	
2.	$\vdash A|(A|A)|\blacksquare A|(A|A)|\blacksquare S|Q\blacksquare A|S\blacksquare A|S$	$1, Rule\ i)$
3.	$\vdash A_p|(A_p|A_r)|\blacksquare A_p|(A_r|A_p)|\blacksquare S|Q\blacksquare A_p|S\blacksquare A_p|S$	$1, Rule\ i)$
4.	$\vdash S|Q\blacksquare A_p|S\blacksquare A_p|S$	$2, 3, Rule\ ii)$
5.	$\vdash S'|Q'\blacksquare A_p|S'\blacksquare A_p|S'$	4
6.	$\vdash A_p|(S'|Q')$	$4, 5, Rule\ ii)$
7.	$\vdash A_p|A_p\blacksquare A_p|A_p\blacksquare A_p|A_p$	4
8.	$\vdash Q'$	$6, 7, Rule\ ii)$

45. 此题可能存疑

若 $S = \cup_\varphi\{p_1^\varphi \wedge p_2^\varphi \wedge \cdots\}$，其中

$$p_i^\varphi = \begin{cases} p_i, & 若\varphi(p_i) = t \\ \sim p_i, & 若\varphi(p_i) = f \end{cases}$$

因此，S 中的每一个元素只有一个指派使其为真，所以 S 是析取有效的，但其任意有限子集不是析取有效的。

46.

1.	$\vdash\sim A \supset B\vee \sim A$	
2.	$\sim A \vdash B\vee \sim A$	$1, cp$
3.	$\sim A \vdash\sim A \vee B$	$2, commut$
4.	$\sim A \vdash A \supset B$	3

47.

1.	$A \supset B, \sim (B \supset C) \supset\sim A, A \vdash A$	$\in$
2.	$A \supset B, \sim (B \supset C) \supset\sim A, A \vdash A \supset B$	$\in$
3.	$A \supset B, \sim (B \supset C) \supset\sim A, A \vdash B$	$1, 2, \overline{MP}$
4.	$A \supset B, \sim (B \supset C) \supset\sim A, A \vdash\sim (B \supset C) \supset\sim A$	$\in$
5.	$A \supset B, \sim (B \supset C) \supset\sim A, A \vdash A \supset (B \supset C)$	4
6.	$A \supset B, \sim (B \supset C) \supset\sim A, A \vdash B \supset C$	$1, 5, \overline{MP}$
7.	$A \supset B, \sim (B \supset C) \supset\sim A, A \vdash C$	$3, 6, \overline{MP}$
8.	$A \supset B, \sim (B \supset C) \supset\sim A \vdash A \supset C$	$7, CP$

48.

1. $\vdash B \vee B \supset B$ AS_1
2. $\vdash B \supset B \vee B$ AS_2
3. $\vdash B \vee B$ $1, 2, \overline{MP}$
4. $A \supset \sim (B \supset B) \vdash \sim A \vee \sim (B \supset B)$ $\in$
5. $A \supset \sim (B \supset B) \vdash (B \supset B) \vee A$ $4, commu$
6. $A \supset \sim (B \supset B) \vdash \sim A$ $3, 5, \overline{MP}$

49.

1. $(A \vee B) \supset C, A \vdash A$ $\in$
2. $(A \vee B) \supset C, A \vdash (A \vee B) \supset C$
3. $(A \vee B) \supset C, A \vdash A \vee B$ $\vee_+$
4. $(A \vee B) \supset C, A \vdash C$ $2, 3\overline{MP}$
5. $(A \vee B) \supset C \vdash A \vee C$ $4, CP$
6. $(A \vee B) \supset C \vdash B \vee C$ 同理
7. $(A \vee B) \supset C \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ $5, 6, \wedge_+$
8. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ $\in$
9. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \vee C)$ $\wedge -$
10. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (B \vee C)$ $\wedge -$
11. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \vee B) \supset (C \vee C)$ $\vee \supset \vee$
12. $\vdash (C \vee C) \supset C$ AS_1
13. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \vee B) \supset C$ $11, 12, \overline{MP}$

50.

1.	$(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash A \wedge \sim C$	$\in$
2.	$(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash A$	$1, \wedge -$
3.	$(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash \sim C$	$1, \wedge -$
4.	$(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash \sim C \supset \sim (A \wedge B)$	$1, \in, \supset\sim$
5.	$(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash \sim (A \wedge B)$	$3, 4, \overline{MP}$
6.	$(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash A \supset \sim B$	5
7.	$(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash \sim B$	$2, 6, \overline{MP}$
8.	$(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash \sim B \vee C$	$7, \vee +$
9.	$(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash B \supset C$	8
10.	$A \vee B \supset C \vdash \sim (A \supset C) \supset (B \supset C)$	$9, CP$
11.	$A \vee B \supset C \vdash (A \supset C) \vee (B \supset C)$	10
12.	$A \supset C, A \wedge B \vdash A \wedge B$	$\in$
13.	$A \supset C, A \wedge B \vdash A$	$12, \wedge -$
14.	$A \supset C, A \wedge B \vdash A \supset C$	$\in$
15.	$A \supset C, A \wedge B \vdash C$	$13, 14, \overline{MP}$
16.	$A \supset C \vdash A \wedge B \supset C$	$15, CP$
17.	$B \supset C \vdash A \wedge B \supset C$	同理
18.	$(A \supset C) \vee (B \supset C) \vdash A \wedge B \supset C$	$16, 17, \vee \supset \vee$

51. 解:

1.	$A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash A \wedge \sim B$	$\in$
2.	$A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash A$	$1, \wedge -$
3.	$A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash \sim B$	$1, \wedge -$
4.	$A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash A \supset (B \vee C)$	$\in$
5.	$A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash B \vee C$	$2, 4\overline{MP}$
6.	$A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash \sim B \supset C$	5
7.	$A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash c$	$3, 6, \overline{MP}$
8.	$A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash \sim A \vee C$	$7, DR_4$
9.	$A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash A \supset C$	8
10.	$A \supset (B \vee C) \vdash (A \supset B) \vee (A \supset C)$	$9, CP$
11.	$A \supset B \vdash A \supset B$	$\in$
12.	$A \supset B \vdash A \supset (B \vee C)$	$11, DR_4$
13.	$A \supset C \vdash A \supset (B \vee C)$	同理
14.	$(A \supset B) \vee (A \supset C) \vdash A \supset (B \vee C)$	

52. 解:

1.	$A \supset (B \wedge C), A \vdash A$	$\in$
2.	$A \supset (B \wedge C), A \vdash A \supset (B \wedge C)$	$\in$
3.	$A \supset (B \wedge C), A \vdash B \wedge C$	$1, 2, \overline{MP}$
4.	$A \supset (B \wedge C), A \vdash B$	$3, \wedge -$
5.	$A \supset (B \wedge C) \vdash A \supset B$	$4, CP$
6.	$A \supset (B \wedge C) \vdash A \supset C$	同理
7.	$A \supset (B \wedge C) \vdash (A \supset B) \wedge (A \supset C)$	$5, 6, \wedge +$
8.	$A \supset B \vdash A \supset (B \vee C)$	DR_4
9.	$A \supset C \vdash A \supset (B \vee C)$	DR_4
10.	$(A \supset B) \wedge (A \supset C), A \vdash A \supset B, A \supset C, A$	$\in \wedge -$
11.	$(A \supset B) \wedge (A \supset C), A \vdash B, C, B \wedge C$	$10, \overline{MP}, \wedge +$
12.	$(A \supset B) \wedge (A \supset C) \vdash A \supset (B \wedge C)$	$12, CP$

53. 解:

1. $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash A \supset \sim B$ $\qquad \in$
2. $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash A \supset B$ $\qquad \in, \wedge -$
3. $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash B \supset A$ $\qquad \in, \wedge -$
4. $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash B \supset \sim A$ $\qquad \in$
5. $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash B \supset \sim B$ $\qquad 1, 3, \overline{MP}$
6. $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash A \supset \sim A$ $\qquad 2, 4, \overline{MP}$
7. $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash \sim A$ $\qquad 5$
8. $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash \sim B$ $\qquad 6$
9. $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash \sim A \wedge \sim B$ $\qquad 7, 8 \wedge +$
10. $A \equiv B \vdash \sim (A \supset \sim B) \vee \sim (A \vee B)$ $\qquad 9, CP$
11. $A \equiv B \vdash \sim (A \equiv \sim B)$ $\qquad 10$
12. $\vdash (A \equiv B) \supset \sim (A \equiv \sim B)$ $\qquad 11, CP$
13. $\vdash (A \equiv \sim B) \supset (A \equiv B)$ $\qquad 12, \supset\sim$

54. 解:

1. $A \supset (B \supset C), A \wedge B \vdash A, B$ $\qquad \in, \wedge -$
2. $A \supset (B \supset C), A \wedge B \vdash C,$ $\qquad 1, \overline{MP}$
3. $A \supset (B \supset C) \vdash (A \wedge B) \supset C,$ $\qquad 2, CP$
4. $(A \wedge B) \supset C, A, B \vdash A, B$ $\qquad \in$
5. $(A \wedge B) \supset C, A, B \vdash A \wedge B$ $\qquad 4, \wedge +$
6. $(A \wedge B) \supset C, A, B \vdash C$ $\qquad 5, \in, \overline{MP}$
7. $(A \wedge B) \supset C \vdash A \supset (B \supset C)$ $\qquad 6, MP, MP$

55. 参考 50
56. 参考 51
57. 参考 36

58.

$$\begin{aligned}
&\sim a = a \mid a \\
&\sim a = a \downarrow a \\
&a \vee b = (a \mid a) \mid (b \mid b) \\
&a \vee b = (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b) \\
&a \wedge b = (a \mid b) \mid (a \mid b) \\
&a \wedge b = (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b) \\
&a \supset b = a \mid (b \mid b) \\
&a \supset b = (a \downarrow a) \downarrow b \downarrow (a \downarrow a) \downarrow b \\
&a \equiv b = ((a \mid (b \mid b) \mid (b \mid (a \mid a))) \mid ((a \mid (b \mid b) \mid (b \mid (a \mid a))) \\
&a \equiv b = ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((b \downarrow b) \downarrow a)
\end{aligned}$$

对于将公式化成 $\mid$ 或 $\downarrow$ 的形式，可以先化成 $\sim (a \wedge b)$ 或 $\sim (a \vee b)$ 的形式，然后用 $\mid$ 或 $\downarrow$ 做替换。

59. 解：

1) 因为 $C_1, C_2, \cdots, C_m$ 互异，且排序关系是全序的，所以 $C_1, C_2, \cdots, C_m$ 排序后的结果是唯一的。

   令 $T = \{\varphi | \varphi(A) = t\}$，因为 A 不是永假式，所以 $T \neq \emptyset$；令

   $$x_i^{\varphi} = \begin{cases} x_i, & 若\varphi(x_i) = t \\ \sim x_i, & 若\varphi(x_i) = f \end{cases}$$

   则 $\varphi(x_1^{\varphi} \wedge x_2^{\varphi} \wedge \cdots \wedge x_n^{\varphi}) = t$, 令 $C_i' = x_1^{\varphi_i} \wedge x_2^{\varphi_i} \wedge \cdots \wedge x_n^{\varphi_i}$, 对 $C_1', C_2', \cdots, C_n'$ 进行排序得到 $C_1, C_2, \cdots, C_n$，则 $B = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_n$ 即为 A 的唯一的完全解析式。

   再证 $\varphi(A) = \varphi(B)$。对于任意指派 φ

   - 若 $\varphi(A) = t$，故存在一个 C_i'，满足 $\varphi(C_i') = t$, 又 C_i' 为 B 的一个合取项，故 $\varphi(B) = t$。
   - 若 $\varphi(B) = t$，故 B 存在一个析取项 C 使得 $\varphi(C) = t$，所以 $\varphi \in T$，所以 $\varphi(A) = t$.

2) A 为永真式，则 ${}^{\#}T = 2^n$，故有 2^n 个短句，则 $m = 2^n$。

60. 解：

- 析取范式：

  $$(\sim p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r)$$

  合取范式：

  $$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$$

- 析取范式：

  $$(\sim p \wedge \sim r \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge r \wedge q)$$

  合取范式：

  $$(p \vee r \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim r \vee q) \wedge (\sim p \vee r \vee q) \wedge (\sim p \vee r \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim r \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim r \vee \sim q)$$

- 析取范式：

$$(\sim p\wedge \sim r\wedge \sim q)\vee(\sim p\wedge \sim r\wedge q)\vee(\sim p\wedge r\wedge q)\vee(p\wedge \sim r\wedge q)\vee(p\wedge r\wedge q)$$

合取范式：

$$(p\vee \sim r\vee q)\wedge(\sim p\vee r\vee q)\wedge(\sim p\vee \sim r\vee q)$$

61. 解:

1) $(p\wedge \sim q)\vee p$

2) $p\wedge(q\vee r)$

3) $\sim q$

4) p

62. 解:

1.	S	
2.	$\{r, s, \sim r\vee \sim s, q\vee r\}\&\{\sim q, q\vee s, \sim r\vee \sim s, q\vee r\}$	关于 p 的分裂规则
3.	$\{r, q, \sim r, q\vee r\}\&\{s, \sim r\vee \sim s, r\}$	关于 s 和 $\sim q$的单文字规则
4.	$\{\quad\square\}\&\{\quad\square\}$	

63. 解:

1.	S	
2.	$\{p\vee q, p\vee \sim r, q\vee \sim r\vee p, \sim r\vee q\}$	1, 重言式规则
3.	$\{\sim r\vee q\}$	2, 关于 p 的纯文字规则
4.	$\emptyset$	3, 关于 q 的纯文字规则

64. 解:

1.	S	
2.	$\{\sim r, q\vee r\}\&\{q, \sim q\vee \sim r, q\vee r\}$	1, 关于 p 的分裂规则
3.	$\{q\}\&\{r, \sim r\}$	2, 关于 $\sim r, q$的单文字规则
4.	$\emptyset\&\{\quad\square\}$	3, 关于 q 的纯文字规则，关于 r 的单文字规则

65. 解:

1.	S	
2.	$\{q\vee r, \sim q\vee s, \sim r\vee s, \sim s, q\vee \sim r\}$	1, 关于 $\sim p$的单文字规则
3.	$\{q\vee r, \sim q, \sim r, q\vee \sim r\}$	2, 关于 $\sim s$的单文字规则
4.	$\{r, \sim r\}$	3, 关于 $\sim q$的单文字规则
5.	$\{\quad\square\}$	4, 关于 $\sim r$的单文字规则

66-68 可以先化为否定范式，画出平面图，求合取支集合，对合取支元素进行取反，然后消解，如能消解出空短句，则原式为永真式；也可以直接取反，化为析取范式，进行消解。

66. 解：合取支集合为 $\{\sim p, q\wedge\sim r, s\wedge r, s\wedge\sim q, p\wedge r, p\wedge\sim q\}$，令 $S=\{p,\sim q\vee r,\sim s\vee\sim r,\sim s\vee q,\sim p\vee\sim r,\sim p\vee q\}$

对 S 进行消解：

1. S
2. $\{\sim q\vee r,\sim s\vee\sim r,\sim s\vee q,\sim r,q\}$ 1, 关于 p 的单文字规则
3. $\{\sim q,\sim s,\sim s\vee q,q\}$ 2, 关于 $\sim r$的单文字规则
4. $\{\ \ \square\}$ 3, 关于 q 的单文字规则, 关于 $\sim s$的纯文字规则

故原式为永真式。

67. 解：原公式取反后的短句集为 $S=\{p\vee q,\sim p\vee r,\sim p\vee\sim s,\sim r\vee s,r\vee\sim q,\sim q\vee\sim s\}$

对 S 进行消解：

1. S
2. $\{q,\sim r\vee s,r\vee\sim q,\sim q\vee\sim s\}\&\{r,\sim s,\sim r\vee s,r\vee\sim q,\sim q\vee\sim s\}$ 1, 关于 p 的单文字规则
3. $\{\sim r\vee s,r,\sim s\}\&\{\sim s,s,\sim q,\sim q\vee\sim s\}$ 2, 关于 q,r 的单文字规则
4. $\{\ \ \square\}\&\{\ \ \square\}$

故原式为永真式。

68. 解：原公式取反后短句集为 $S=\{p\vee q,s\vee\sim q\vee r,\sim r\vee q,\sim s\vee q,\sim q\}$

对 S 进行消解:

1. S
2. $\{p,\vee\sim q\vee r,\sim r,\sim s\}$ 1, 关于 $\sim q$的单文字规则
3. $\{p,s\vee\sim p,\sim s\}$ 2, 关于 $\sim r$的单文字规则
4. $\{s,\sim s\}$ 3, 关于 p 的单文字规则
5. $\{\ \ \square\}$

故原公式为永真式。

69. 略 (太长，可以用平面图)

70. 解：

1) P 中 z,Q 中 u

2) z,u

3) u,x,z

4) g(x) 对公式中 u 不自由

5) h(x,y) 对公式中 u 不自由

6) u 对公式中 x 自由

71. 解:

1) $\forall x \in H(B(x) \wedge W(t(x)) \supset K(m(x)))$

2) $\forall xy \in H(H(y) \wedge W(x) \wedge K(m(y)) \supset \sim L(x,y))$

3) $\sim \exists x \in H(B(x) \wedge W(t(x)))$

4) 在牲口棚中有一匹马和牲口棚中所有的黑尾巴马相像

5) 在牲口棚中不存在没有白尾巴的马

72. 解:

1) $\forall x(C(x,f(r)) \supset U(x,r))$

2) 如果两个人的父亲是兄弟，那么这两个人就是堂兄弟

3) $\exists xy(C(x,r) \wedge B(y,r) \supset Y(x,y))$

73. 解:

1) 自由变元:x，约束变元:x，任意项都可以代入

2) 自由变元:y，约束变元:x,y，x 不出现的项可以代入

74. 解:

n+1,n-1 都有可能

75. 解:

用结构归纳法证明

1) 若 A 为命题变元

   (a) A=m，则 $S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B A = S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}B$，因为 $B = S^{x_1,x_2,\cdots,x_n}_{u_1,u_2,\cdots,u_n}C$ 且 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 不在 C 中出现，故 $S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}B = C = S^m_C A$

   (b) A 为命题变元，且 $A = p \neq m$, 则 $S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B A = S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}p = p = S^m_C A$

2) A 为原子公式，$A = P(t_1,t_2,\cdots,t_k), t_i = f(y_1,y_2,\cdots,y_j), 1 \leq i \leq k$, 则 m 不在 A 中出现，所以 $S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B A = A = S^m_C A$

3) $A = \sim D$, 因为 $S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B D = S^m_C D$, 所以 $\sim S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B D = \sim S^m_C D$, 即 $S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B A = S^m_C A$

4) $A = D \vee E$, 因为 $S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B D = S^m_C D$, 且 $S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B E = S^m_C E$, 则 $S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B D \vee S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B E = S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B(D \vee E) = S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B A = S^m_C D \vee S^m_C E = S^m_C(D \vee E) = S^m_C A$

5) $A = \forall y D$, 则 $y \notin \{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$, 则 B 对 A 中 m 是自由的, 且 $S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B D = S^m_C D$, , 所以 $S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B A = S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B \forall y D = \forall y S^{u_1,u_2,\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B D = \forall y S^m_C D = S^m_C \forall y D = S^m_C A$

综上，结论成立.

76. 解:

相同公式中，运算符的运算顺序也是相同的，若 $B \neq D$，假设 B 是 D 的前缀，令 $D = B \vee F$，则 $D \vee E = B \vee F \vee E$，故 $C = F \vee E$，这就导致 $B \vee C$ 中的 “$\vee$” 与 $D \vee E$ 中的 “$\vee$” 运算次序不同，故 B 不为 D 的前缀，同理 D 不为 B 的前缀，从而 B=D。同理得 C=E。

77. 解:

用公式结构归纳法证明:

1) C 为原子公式，显然 y 在 C 中不出现，$S_x^y S_y^x C = C$;

2) $C = \sim A$，因为 $S_x^y S_y^x A = A$, 所以 $S_x^y S_y^x C = S_x^y S_y^x \sim A = \sim S_x^y S_y^x A = \sim A = C$;

3) $C = B \vee D$，因为 $S_x^y S_y^x B = B$ 且 $S_x^y S_y^x D = D$，所以 $S_x^y S_y^x C = S_x^y S_y^x (B \vee D) = S_x^y S_y^x B \vee S_x^y S_y^x D = B \vee D = C$;

4) $C = \forall z B$

- 若 z=x，则 $S_y^x C = S_y^x \forall x B = \forall x B = C$,y 在 C 中不自由，$S_x^y C = C$，所以 $S_x^y S_y^x C = C$;
- 若 z=y，则 $S_y^x C = S_y^x \forall y B$，因为 y 对 C 中 x 是自由的，所以 x 不在 C 中出现，故 $S_y^x C = C, S_x^y C = C$，所以 $S_x^y S_y^x C = C$;
- 若 $z \neq x, y$，则 $S_x^y S_y^x C = S_x^y S_y^x (\forall z B) = \forall z S_x^y S_y^x B = \forall z B = C$。

综上，若 y 在 C 中不自由，且 y 对 C 中 x 是自由的，则 $S_x^y S_y^x C = C$。

78. 解:

令 $A = (p \equiv q) \wedge (p \equiv \sim (r \supset q)) \supset (q \supset \sim r)$，则 A 为 P 永真。

令 $B = (\forall x(G(x) \supset H(x)) \equiv \exists x H(x)) \wedge (\forall x(G(x) \supset H(x)) \equiv \sim (\forall x G(x) \supset \exists x H(x))) \supset (\exists x H(x) \supset \sim \forall x G(x))$

则 $B = S^{p,q,r}_{\forall x(G(x) \supset H(x)), \exists x H(x), \forall x G(x)} A$，故 B 为 P 用真的，则通过 P 规则可以导出 $\exists x H(x) \supset \sim \forall x G(x)$。

79. 解:

1. $\forall x(R(x) \supset P(x)) \wedge \forall x(\sim Q(x) \supset R(x)) \vdash \forall x(R(x) \supset P(x)), \forall x(\sim Q(x) \supset R(x))$ $\quad \in, \wedge -$
2. $\forall x(R(x) \supset P(x)) \wedge \forall x(\sim Q(x) \supset R(x)) \vdash R(x) \supset P(x)$ $\quad 1, AS_4$
3. $\forall x(R(x) \supset P(x)) \wedge \forall x(\sim Q(x) \supset R(x)) \vdash \sim Q(x) \supset R(x)$ $\quad 1, AS_4$
4. $\forall x(R(x) \supset P(x)) \wedge \forall x(\sim Q(x) \supset R(x)) \vdash \sim Q(x) \supset P(x)$ $\quad 2, 3, trans$
5. $\forall x(R(x) \supset P(x)) \wedge \forall x(\sim Q(x) \supset R(x)) \vdash P(x) \vee Q(x)$ $\quad 4. \equiv subiii)$
6. $\forall x(R(x) \supset P(x)) \wedge \forall x(\sim Q(x) \supset R(x)) \vdash \forall x(P(x) \vee Q(x))$ $\quad 5, gen$
7. $\vdash \forall x(R(x) \supset P(x)) \wedge \forall x(\sim Q(x) \supset R(x)) \supset \forall x(P(x) \vee Q(x))$ $\quad 6, CP$

80. 解：

1.	$P(x) \vdash P(x)$	$\in$
2.	$\vdash P(x) \supset P(x)$	$1, CP$
3.	$\vdash S_x^y(P(x) \supset P(y))$	2
4.	$\vdash \exists y(P(x) \supset P(y))$	3, x 对$P(x) \supset P(y)$中 y 自由
5.	$\vdash \forall x \exists y(P(x) \supset P(y))$	$4, gen$

81. 解：

1.	$p \supset \forall x \sim Q(x), p \vdash p \supset \forall x \sim Q(x)$	$\in$
2.	$p \supset \forall x \sim Q(x), p \vdash p$	$\in$
3.	$p \supset \forall x \sim Q(x), p \vdash \forall x \sim Q(x)$	$1, 2, \overline{MP}$
4.	$\vdash (p \supset \forall x \sim Q(x)) \supset \forall x(p \supset \sim Q(x))$	$3, AS_4, CP, Gen, CP$
5.	$\vdash \sim \forall x(p \supset \sim Q(x)) \supset \sim (p \supset \forall x \sim Q(x))$	$4, \supset \sim$
6.	$\vdash \exists x(p \wedge Q(x)) \supset (p \wedge \exists x Q(x))$	$5, \equiv sub\ iii)$
7.	$\forall x(p \supset \sim Q(x)), p \vdash \forall x(p \supset \sim Q(x)), p$	$\in$
8.	$\forall x(p \supset \sim Q(x)), p \vdash \sim Q(x)$	$7, AS_4, \overline{MP}$
9.	$\forall x(p \supset \sim Q(x)) \vdash p \supset \forall x \sim Q(X)$	$8, Gen, CP$
10.	$\vdash \sim (p \supset \forall x \sim Q(x)) \supset \sim \forall x(p \supset \sim Q(x))$	$9, CP, \supset \sim$
11.	$\vdash p \wedge \exists x Q(x) \supset \exists x(p \wedge Q(x))$	$10, \equiv sub\ iii)$
12.	$\vdash \exists x(p \wedge Q(x)) \equiv (p \wedge \exists x Q(x))$	$6, 11$

82. 解：

1.	$\forall y P(y) \vdash \forall x P(x)$	$\in, \alpha\beta$
2.	$\vdash \forall y P(y) \supset \forall x P(x)$	CP

$\forall y P(y) \supset \forall x P(x)$ 的前束范式为 $\exists y \forall x(P(y) \supset P(x))$，根据前束范式定理，$\forall y P(y) \supset \forall x P(x) \equiv \exists y \forall x(P(y) \supset P(x))$。所以

3.	$\vdash \exists y \forall x(P(y) \supset P(x))$	$2, \equiv sub\ iii)$

也可以演绎证明 $\vdash \forall y P(y) \supset \forall x P(x) \supset \exists y \forall x(P(y) \supset P(x))$。

83. 解:

1.	$\forall xP(x)\wedge\forall x\sim Q(x)\vdash P(x),\sim Q(x)$	$\wedge-, AS_4$
2.	$\forall xP(x)\wedge\forall x\sim Q(x)\vdash\forall x(P(x)\wedge Q(x))$	$1,\wedge+, Gen$
3.	$\vdash\exists x(P(x)\supset Q(x))\supset(\forall xP(x)\supset\exists xQ(x))$	$2, CP, \supset\sim, \equiv sub\ iii)$
4.	$\forall x(p(x)\wedge\sim Q(x))\vdash\forall xP(x),\forall x\sim Q(x)$	$\in, AS_4,\wedge-, Gen$
5.	$\forall x(p(x)\wedge\sim Q(x))\supset\forall xP(x)\wedge\forall x\sim Q(x)$	$4,\wedge+, CP$
6.	$\vdash(\forall xP(x)\supset\exists xQ(x))\supset\exists x(P(x)\supset Q(x))$	$5,\supset\sim,\equiv sub\ iii)$
7.	$\vdash\exists x(P(x)\supset Q(x))\equiv(\forall xP(x)\supset\exists xQ(x))$	$3,6$

84. 解:

$$\begin{aligned}\exists x\forall y(P(x)\equiv P(y))&\equiv\exists x((\sim P(x)\vee\forall yP(y))\wedge(\sim\exists yP(y)\vee P(x)))\\&\equiv\exists x((\sim P(x)\wedge\sim\exists yP(y))\vee(\forall yP(y)\wedge P(x)))\\&\equiv(\sim\forall xP(x)\wedge\sim\exists yP(y))\vee(\forall yP(y)\wedge\exists xP(x))\\&\equiv(\forall xP(x)\supset\forall yP(y))\wedge(\exists yP(y)\supset\forall yP(y))\wedge(\exists yP(y)\supset\exists xP(x))\\&\equiv(\exists yP(y)\supset\forall yP(y))\end{aligned}$$

由换名规则可得 $\exists yP(y)\supset\forall yP(y)\equiv\exists xP(x)\supset\forall yP(y)$，且 $\forall yP(y)\supset\exists xP(x)$ 为永真式，故

$$\begin{aligned}\exists yP(y)\supset\forall yP(y)&\equiv(\exists xP(x)\supset\forall yP(y))\wedge(\forall yP(y)\supset\exists xP(x))\\&\equiv(\exists xP(x)\equiv\forall yP(y))\end{aligned}$$

85. 解:

$\forall x(P(x)\equiv\exists yP(y))$ 同样等价于 $\exists yP(y)\supset\forall yP(y)$, 后续证明参考 84 题。

86. 解:

由 84 题知 $\exists x\forall y(P(x)\equiv P(y))\equiv(\exists xP(x)\supset\forall xP(x))$，而 $(\exists xP(x)\supset\forall xP(x))\equiv(\forall xP(x)\vee\forall x\sim P(x))$

87. 略

88. 解:

1) $\exists xyz(\sim R(x,u)\wedge(\sim R(y,z)\supset Q(u,y)))$

2) $\exists x\forall y\exists u\forall v\sim(Q(x,y)\supset\sim(P(u,y,z)\supset\sim R(v)))$

3)

89. 解:

1) 由 84 题知，$\exists y\forall x(P(x)\equiv Q(y))$ 是 $\forall xP(x)\equiv\exists yP(y)$ 的前束范式，另外 $\exists xy\forall ab(P(x)\supset P(y)\wedge P(a)\supset P(b))$ 也是。

2) $\exists a,b,x,y(\sim P(a,b)\supset\sim(P(x,y)\supset P(u,y)))$

90. 解:

1) 必要性

因为 $\models_{(I,\sigma)} \exists xA$，所以 $I(\exists xA)(\sigma) = t$，即 $I(\forall x \sim A)(\sigma) = f$，所以存在 a 使得 $I(\sim A)(\sigma[x|a]) = f$ 则 $I(A)(\sigma[x|a]) = t$。

令 $\varphi = \sigma[x|a]$，则满足条件 $\varphi(y) = \sigma(y)$ $(x \neq y)$，且 $I(A)(\varphi) = t$，故 $\models_{(I,\varphi)} A$。

2) 充分性

因为 $\models_{(I,\varphi)} A$，所以 $I(A)(\varphi) = t$，又 $\varphi(y) = \sigma(y)$ $(x \neq y)$，则 $I(A)(\sigma[x|\varphi(x)]) = t$，即 $I(\sim A)(\sigma[x|\varphi(x)]) = f$，故 $I(\forall x \sim A)(\sigma) = f$，所以 $I(\exists xA)(\sigma) = t$，即 $\models_{(I,\sigma)} \exists xA$。

对于 91 题来说，需要先将量词移到括号中去进行证明。

91. 解：

1)

1. $\forall xzP(z,x) \vdash \forall zP(z,y)$	AS_4
2. $\forall zP(z,y) \vdash P(y,y)$	AS_4
3. $\forall xzP(z,x) \vdash P(y,y)$	$1, 2, trans$
4. $\forall xzP(z,x) \vdash \exists x\forall y(P(x,y) \supset P(y,y))$	$3, \vee+, Gen, \exists+$
5. $\vdash \sim \forall xzP(z,x) \vee \exists x\forall y(\sim P(x,y) \vee P(y,y))$	$4, CP$
6. $\vdash \exists x\forall y\exists z(\sim P(z,x) \vee (\sim P(x,y) \vee P(y,y)))$	$5, \equiv sub\ iii)$
7. $\vdash \exists x\forall y\exists z(P(z,x) \wedge P(x,y) \supset P(y,y))$	$6, \equiv sub\ iii)$

2)

1. $\forall xQ(x) \vdash \forall yQ(y)$	$\alpha\beta$
2. $\forall xQ(x) \vdash \exists xP(x) \vee \forall yQ(y)$	$2, \vee+$
3. $\vdash \sim \forall xQ(x) \vee (\exists xP(x) \vee \forall yQ(y))$	$2, CP$
4. $\vdash \exists x\forall y(Q(x) \supset (P(x) \vee Q(y)))$	$3, \equiv sub\ iii)$

92. 解：$A = p \vee \sim p$ 93. 解：$P(x)$ 94. 解：

设 $I =< D, I_0 >$，$\sigma \in \sum_I$ 为解释 I 下的任意指派；

若对于任意的 $a \in D$，$I(C)(\sigma[x|a]) = t$，则 $I(\forall xC)(\sigma) = t$, 所以 $I(C \supset \forall xC)(\sigma) = t$，即 $C \supset \forall xC$ 在 I 下可满足；

若存在 $a \in D$，$I(C)(\sigma[x|a]) = f$，令 $\varphi = \sigma[x|a]$，则 $I(C)(\varphi) = f$，$I(\sim C)(\varphi) = t$，所以 $I(C \supset \forall xC)(\varphi) = I(\sim C \vee \forall xC)(\varphi) = t$，即 $C \supset \forall xC$ 在 I 下可满足；

综上，若 C 是任意合式公式，I 是任意解释，则 $C \supset \forall xC$ 在 I 下是可满足的。

95. 解：

必要性成立,$\models A$，根据完全性定理，$\vdash A$ 成立，根据 Gen 规则有 $\vdash \forall xA$，根据 $\vee+$ 规则 $\vdash (A \supset \forall xA)$，根据可靠性定理 $\models (A \supset \forall xA)$ 成立。

充分性不成立，$A = p \wedge \sim p$ 即为反例。

96. 解：

$$
\begin{array}{ll}
1.\ \forall xP(x) \vdash P(a) & AS_4 \\
2.\ \forall xP(x) \vdash P(b) & AS_4 \\
3.\ \forall xP(x) \vdash P(a) \wedge P(b) & 1,2,\wedge+ \\
4.\ \vdash \forall xP(x) \supset P(a) \wedge P(b) & 3, CP \\
5.\ \vdash \exists x(P(x) \supset P(a) \wedge P(b)) & 4
\end{array}
$$

对任意项 t，取解释 $I =< \{a,b\}, I_0 >$，指派 $\sigma \in \sum_I$，使得 $I(P(a)) = t, I(P(b)) = f$ 且 $\sigma(t) = a$，则 $I(P(t) \supset P(a) \wedge P(b)) = f$，即不存在项 t 使得 $\models A(t)$。

97. 解：

1) 可满足的。

若 M，N 皆为永真式，$\exists x(M \equiv N) \supset (\exists xM \supset \exists xN)$ 为有效的；

令 $M = \forall y(x \times y = 0), N = p \wedge \sim p$，则 $\exists M \equiv N$ 为 t，$\exists xM$ 为 t，$\exists xN$ 为 f，故 $\exists x(M \equiv V) \supset (\exists M \equiv \exists N)$ 为 f。

2) 有效的

$$
\begin{array}{ll}
1.\ \forall x(M \equiv N), \forall xM \vdash M, M \supset N & \in, AS_4, \wedge- \\
2.\ \forall x(M \equiv N), \forall xM \vdash \forall xN & 1, \overline{MP}, Gen \\
3.\ \forall x(M \equiv N) \vdash \forall xM \supset \forall xN & 2, CP \\
4.\ \forall x(M \equiv N) \vdash \forall xN \supset \forall xM & \text{同理} \\
5.\ \vdash \forall x(M \equiv N) \supset (\forall xM \equiv \forall xN) & 3,4,\wedge+, CP
\end{array}
$$

98. 解：

以下的解法对题目做了稍微的修改：$A = \exists z(\exists x \forall y P(x,y,z) \supset \exists W Q(w,z))$。
A 的前束范式为 $\exists z \forall x \exists x \exists w(P(x,y,z) \supset Q(w,z))$
B 的前束范式为 $\exists z \exists y \forall x \exists w(P(x,y,z) \supset Q(w,z))$
C 的前束范式为 $\exists z \exists y \forall x \exists w(P(x,y,z) \supset Q(w,z))$

故 $B \equiv C, B \supset A, C \supset A$ 为有效的，下面对 $B \supset A$ 进行简要的证明：
设 $D = \forall x \exists x \exists w(P(x,y,z) \supset Q(w,z)), E = \exists y \forall x \exists w(P(x,y,z) \supset Q(w,z))$

$$
\begin{array}{ll}
1.\ \vdash E \supset D & \\
2.\ \vdash \sim D \supset \sim E & 1, \supset\sim \\
3.\ \forall z \sim D \vdash \sim D & AS_4 \\
4.\ \forall z \sim D \vdash \forall z \sim E & 2,3, \overline{MP}, Gen \\
5.\ \vdash \forall z \sim D \supset \forall z \sim E & 4, CP \\
6.\ \vdash \exists zE \supset \exists zD & 5, \supset\sim \\
7.\ \vdash B \supset A & 6
\end{array}
$$

99. 解:

有效的。

$$
\begin{array}{ll}
1.\ \exists xP(x)\supset\forall xQ(x), P(x)\vdash Q(x) & \in,\exists+,\overline{MP},AS_4\\
2.\ \vdash\exists xP(x)\supset\forall xQ(x)\supset\forall x(P(x)\supset Q(x)) & 1,CP,Gen,CP
\end{array}
$$

100. 解:

不是有效的，令解释 $I=<N,J_0>$，其中 N 表示自然数集，$Q(x)$、$P(x)$ 在解释 I 和指派 $\sigma\in\sum_I$ 下都为 “x 是奇数”，显然 $I(\forall x(P(x)\supset Q(x))\supset(\exists xP(x)\supset\forall xQ(x)))(\sigma)=f$。

101. 解:

不是有效的，令解释 $I=<N,J_0>$，其中 N 表示自然数集，$Q(x)$、$P(x)$ 在解释 I 和指派 $\sigma\in\sum_I$ 下都为 “x 是奇数”、“x 是偶数”，显然 $I(\forall x(P(x)\supset Q(x))\equiv(\forall xP(x)\supset\exists xQ(x)))(\sigma)=f$。

102. 解:

不是有效的，由 84 题知 $\exists x\forall y(P(x)\equiv P(y))\equiv(\exists xP(x)\equiv\forall yP(y))$，显然 $\exists xP(x)\equiv\forall yP(y)$ 不是有效的，故 $\exists x\forall y(P(x)\equiv P(y))$ 也不是有效的。

103. 解:

不是有效的，令解释 $I=<N,I_0>$，其中 N 为自然数集，$R(x,y)$ 在 I 下表示为 “$\frac{x}{y}=0$”。

104. 解:

1) $I(x+y=1)(\sigma[x|1][y|1])=f$，所以 $I(\forall x\forall y(x+y=1))(\sigma)=f$，I' 下同理。

2)
- a 为任意自然数

$$
\begin{aligned}
&I(x+y=1)(\sigma[x|2][y|a])=f\\
&I(\sim(x+y=1))(\sigma[x|2][y|a])=t\\
&I(\forall y\sim(x+y=1))(\sigma[x|2])=t\\
&I(\sim\forall y\sim(x+y=1))(\sigma[x|2])=f\\
&I(\forall x\exists y(x+y=1))(\sigma)=f
\end{aligned}
$$

- a 为任意实数

$$
\begin{aligned}
&I(x+y=1)(\sigma[x|a][y|1-a])=t\\
&I(\sim(x+y=1))(\sigma[x|a][y|1-a])=f\\
&I(\forall y\sim(x+y=1))(\sigma[x|a])=f\\
&I(\sim\forall y\sim(x+y=1))(\sigma[x|a])=t\\
&I(\forall x\exists y(x+y=1))(\sigma)=t
\end{aligned}
$$

3) 设 a 为任意整数

$$I(x+y=1)(\sigma[x|a][y|a+2])=f$$
$$I(\forall y(x+y=1))(\sigma[x|a])=f$$
$$I(\sim\forall y(x+y=1))(\sigma[x|a])=t$$
$$I(\forall x\sim\forall y(x+y=1))(\sigma)=t$$
$$I(\exists x\sim\forall y(x+y=1))(\sigma)=f$$

I' 下同理。

4) 有 2),3) 可直接推出

5)

$$I(O(x))(\sigma[x|1])=t$$
$$I(\sim O(x))(\sigma[x|1])=f$$
$$I(\forall x\sim O(x))(\sigma)=f$$
$$I(\exists x\sim O(x))(\sigma)=t$$

$$I(O(x))(\sigma[x|2])=f$$
$$I(\forall xO(x))(\sigma)=f$$

故 $I(\exists xO(x)\supset\forall xO(x))(\sigma)=f$

105. 解:
存在，$A=P(x)\vee\sim P(x)$ 即满足条件。

106. 解:
不一定，若 $A=B=P(x)$ 则 A,B 是协调的，若 $A=\sim B=\sim P(x)$, 则 A,B 不协调。

107. 解:
不一定成立，$M=P,N=\sim P,C=P\wedge\sim P$。

108. 解:
不一定成立，$M=N=P\vee\sim P,C=(P\vee\sim P)\wedge(\sim(P\vee\sim P))$。

110. 解:
不一定成立，令 $A=\sim\forall xP(x)$，则 $A'=\sim\exists xP(x)$，则 $\vdash A\supset A'$ 不成立。

111. 解:
令 $H=\{k\subsetneqq L(F)|\Gamma\subsetneqq k$且 k 是协调的$\}$