# 数理逻辑课后题/考题答案

作者: 杨森

2017 年 10 月 12 日

# 课后题

1. 略

2. 解:

1) => 利用结构归纳法证明

(a) Y 是命题变元，此时 Y 的生成序列即为自身；

(b) $Y =\sim A$, A 的生成序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_m(= A)$, 则 Y 的生成序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_m, Y$;

(c) $Y = B \vee C$, B 的生成序列为 $B_1, B_2, \cdots, B_m(= B)$, C 的生成序列为 $C_1, C_2, \cdots, C_n(= C)$, 则 Y 的生成序列为 $B_1, B_2, \cdots, B_m, C_1, C_2, \cdots, C_n$ $Y = (B \vee C)$

2) <= 利用第二归纳法证明

假设 Y 的生成序列为 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m(= Y)$，证明 $Y_i(1 \le i \le m)$ 是合式公式

(a) $Y_i$ 是命题变元，则 $Y_i$ 是合适公式；

(b) $Y_i =\sim Y_j(j < i)$，因为 $Y_j$ 是合式公式，故 $Y_i$ 也是合式公式；

(c) $Y_i = Y_j \vee Y_k(j, k < i)$，因为 $Y_j$,$Y_k$ 是合式公式，故 $Y_i$ 也是合式公式。

综上，Y 为合式公式当且仅当 Y 有一个生成序列。

3. 略 (根据公式定义进行证明)

4. 略

5. 解: 用结构归纳法证明

1) A 为命题变元 p，显然结论成立；

2) $A =\sim B$，因为 B 满足条件，则 $\sim (B)$ 即 A 也满足条件；

3) $A = B \vee C$，因为 B，C 满足条件，则 $(B) \vee (C)$ 也满足条件

综上，若表达式 A 为合式公式，则最终计数为 0.

6. 略

7. 略

8. 解: 用公式结构归纳法证明

1) A 为命题变元 p

(a) $p \in \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ 且 $p = p_i$，则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n} A = B_i$，即 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n} A$ 为合式公式;

(b) $p \notin \{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$, 则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n} A = A$;

2) $A =\sim B$, 则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n} B$ 为合式公式，所以 $\sim S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n} B = S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n} \sim B$ 为合式公式，即 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n} A$ 为合式公式；

3) $A = B \vee C$, 则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n} B$,$S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n} C$ 为合式公式，所以 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n} B \vee S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n} C = S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n} (B \vee C)$ 为合式公式，即 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n} A$ 为合式公式；

综上，若 A 是合式公式，则 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{B_1,B_2,\cdots,B_n} A$ 为合式公式。

9. 解：若 C 为永真式，根据 Godel 完全性定理则 $\vdash C$，设 C 的证明序列为 $C_1, C_2, \cdots, C_n$, 用第二归纳法证明，$\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n} C_i, 1 \le i \le n$:

1) $C_i \in Aoxims$，显然 $S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_i$ 也为公理

2) 存在 $j,k<i$ 使 $C_k = C_j \supset C_i$，因为 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_j$ 且 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_k$, 即 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_j \supset S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_i$，有 MP 规则可推出 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C_i$。

综上 $\vdash S^{p_1,p_2,\cdots,p_n}_{q_1,q_2,\cdots,q_n}C$, 即 $\vdash D$，再由 Godel 完全性定理推出 $\models D$, 即 D 为永真式。

10.$(\sim(\sim(q\vee r)\vee \sim p)\vee \sim\sim(q\vee r))$

11. 暂无
12. 解：

$$\begin{array}{lll}
1. & A\vee(B\vee C)\vdash A\vee(B\vee C) & \\
2. & A\vee(B\vee C)\vdash (B\vee C)\vee A & 1,i) \\
3. & A\vee(B\vee C)\vdash B\vee(C\vee A) & 2,ii) \\
4. & A\vee(B\vee C)\vdash (C\vee A)\vee B & 3,i) \\
5. & A\vee(B\vee C)\vdash C\vee(A\vee B) & 4,ii) \\
6. & A\vee(B\vee C)\vdash (A\vee B)\vee C & 5,i)
\end{array}$$

13. 暂无
14. 可满足的

其否定对应的合取范式为 $(\sim p\vee q)\wedge(\sim r\vee s)\wedge(\sim s\vee q)\wedge \sim p\wedge r$, 令 $S=\{\sim p\vee q, \sim r\vee s, \sim s\vee q, \sim p, r\}$, 对 S 应用消解规则如下:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $S$ | |
| 2. | $\{\sim r\vee s, \sim s\vee q, r\}$ | 1, 关于 $\sim p$纯文字规则 |
| 3. | $\{s, \sim s\vee q\}$ | 2, 关于 $\sim r$单文字规则 |
| 4. | $\{q\}$ | 3, 关于 $\sim s$单文字规则 |
| 5. | $\{qed\}$ | 4, 关于 $\sim q$纯文字规则 |

令 $\varphi(r)=f$ 时为真，$\varphi(p)=f, \varphi(q)=\varphi(r)=\varphi(s)=t$ 时为假。

15. 永真式

对应的析取范式为 $(\sim r\vee \sim s\vee r\vee \sim q\vee p)\wedge(q\vee \sim p\vee s\vee \sim s\vee r\vee \sim q\vee p)$，每个短句都包含互补文字，故为永真式。

16. 永真式，用真值表
17. 可满足，$\varphi(p)=t, \varphi(q)=f$ 时为真，$\varphi(p)=f, \varphi(q)=t$ 时为假。
18. 永真式，用真值表
19. 解 P' 系统可以看做 P 系统由 $\sim(p\supset q)$ 出发进行的证明

方法一：先证明在 P 系统下若 $\Gamma$ 协调，且 $\sim A\notin Th(\Gamma)$, 则 $\Gamma\cup\{A\}$ 协调。若 $\Gamma\cup\{A\}$ 不协

调，则存在 B 使得 $\Gamma, A \vdash B$ 且 $\Gamma, A \vdash \sim B$, 则

$$
\begin{array}{llr}
1. & \Gamma, A \vdash B & hyp \\
2. & \Gamma, A \vdash \sim B & hyp \\
3. & \Gamma, A \vdash \sim A & 1,2, DR \\
4. & \Gamma \vdash A \supset \sim A & 3, CP \\
5. & \Gamma \vdash \sim A \supset \sim A & \\
6. & \Gamma \vdash \sim A & 4,5, DR_3
\end{array}
$$

这与 $\sim A \notin Th(\Gamma)$ 矛盾，故 $\Gamma \cup \{A\}$ 协调。因为 $\sim (p \supset q)$ 不为永真式，而 P 系统的定理都为永真式, 故 $\sim (p \supset q) \notin Th(P)$ , 所以 $Axiom \cup \{\sim (p \supset q)\}$ 协调，即 P' 系统是协调的。

方法二：假设 P' 系统不协调，则在 P 系统下存在 B 使得 $\sim (p \supset q) \vdash B$ 且 $\sim (p \supset q) \vdash \sim B$, 根据 Godel 完全性定理，$\sim (p \supset q) \models B$ 且 $\sim (p \supset q) \models \sim B$，明显矛盾，故 P' 系统协调。

20. 解不协调，记公理模式 $A \supset B$ 为 AS'

$$
\begin{array}{llr}
1. & \vdash A \vee A \supset A & AS_1 \\
2. & \vdash (A \vee A \supset A) \supset \sim (A \vee A \supset A) & AS' \\
3. & \vdash \sim (A \vee A \supset A) & 1,2, \overline{MP} \\
4. & \vdash B & 3, DR
\end{array}
$$

故在 P 系统中增加 $A \supset B$ 做为公理所得系统不协调。

21. 解:

不存在不含“$\vee$”的定理。用反证法证明：若 A 为满足条件的公式，易知 A 中只有一个命题变元，设为 p，如果辖域中包含 p 的“$\sim$”的个数为偶数，令指派 $\varphi(p) = f$，否则 $\varphi(p) = t$，则 $\varphi(A) = f$，而 P 系统的定理都为永真式，所以 P 系统中不存在不含“$\vee$”的定理。

22. 解:

不存在不含“$\sim$”的定理。用反证法证明：若 A 为满足条件的公式，其中出现的命题变元为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，另 $\varphi(p_1) = \varphi(p_2) = \cdots = \varphi(p_n) = f$，则 $\varphi(A) = f$，而 P 系统的定理都为永真式，所以 P 系统中不存在不含“$\sim$”的定理。

23. 解:

$$
\begin{array}{lll}
1. & \vdash A \vee A \supset A \vee A & Axiom \\
2. & \vdash (A \vee A \supset A \vee A) \supset (A \vee A \supset \sim (A \vee A)) & Axiom \\
3. & \vdash A \vee A \supset \sim (A \vee A) & 1,2,MP \\
4. & \vdash (A \vee A \supset \sim (A \vee A)) \supset \sim (A \vee A) \vee A & Axiom \\
5. & \vdash \sim (A \vee A) \vee A & 3,4,MP \\
6. & \vdash \sim (A \vee A) \vee A \supset A \vee A & Axiom \\
7. & \vdash A \vee A & 5,6,MP \\
8. & \vdash A & 5,7,MP
\end{array}
$$

可以看出 s 的公式皆为定理，故 s 不协调。

24. 解:

定理必是对称的

25. 解:

令 $\Gamma = \{\sim P\}$(P 为命题变元)。

1) P' 是协调的对于 P 系统，$\Gamma$ 是可满足的，且存在唯一的指派 $\varphi : P \to f$ 满足 $\Gamma$，则 $\Gamma \not\models p$，根据完全性定理 $\Gamma \nvdash p$，所以在 P' 中，命题变元 p 不是定理，故 P' 是协调的。
2) 利用 1) 中的指派判断 A 的真值，若 $\varphi(A) = t$，则 A 是 P' 的定理。构造过程为 P 系统下从 $\Gamma$ 出发的证明序列。

26. 解:

设命题变元 p 在 A 中不出现。

$$
\begin{array}{lll}
1. & \vdash p \supset S^p_A p & Axiom \\
2. & \vdash p \supset A & 1 \\
3. & \vdash p \supset A \supset S^p_{p \supset A}(p \supset A) & Axiom \\
4. & \vdash p \supset A \supset (p \supset A \supset A) & 3. \\
5. & \vdash p \supset A \supset A & 2,4,MP \\
6. & \vdash A & 2,5,MP
\end{array}
$$

所以对任意公式 A 都可以构造出证明序列，所以 P' 不协调，但同时是完全的。

27. 解:

定义 $\psi$ 如下：

$$\begin{cases}\psi(p)=p \quad \text{若 p 为命题变元}\\ \psi(\wedge)=\vee\\ \psi(\vee)=\wedge\\ \psi(\sim)=\sim\\ \psi(\alpha\beta)=\psi(\alpha)\psi(\beta)\end{cases}$$

易知

- $A\in L(P)$，则 $\psi(A)\in L(Q)$;
- 若 $A\in L(Q)$，则 $\psi(A)\in L(P)$;
- $\psi(\psi(A))=A$。

首先利用第二归纳法证明必要性：假设 A 为 Q 系统的定理，且证明序列为 $A_1,A_2,\cdots,A_n(=A)$，下面证明 $A_i$ 为永假式：

- $A_i\in Axiom$，显然 $A_i$ 为永假式；
- 存在 $j,k<i$ 使得 $A_k=\sim A_j\wedge A_i$，根据归纳假设，因为 $A_k,A_j$ 皆为永假式，所以 $A_i$ 为永假式。

必要性得证。
下面分两步进行证明充分性：

1) 用第二归纳法证明：若 A 为 P 系统的定理，即 $\vdash_P A$，则 $\vdash_Q \psi(A)$，设 A 在 P 系统下的证明序列为 $A_1,A_2,\cdots,A_n(=A)$
   (a) A 为 P 系统的公理，易知 $\psi(A)$ 为 Q 的公理，$\vdash_Q \psi(A)$ 成立
   (b) 存在 $j,k<i$ 使得 $A_k=A_j\supset A_i$，则 $\vdash_Q \psi(A_k)$ 即 $\vdash_Q\sim\psi(A_j)\wedge\psi(A_i)$ 且 $\vdash_Q \psi(A_j)$, 根据 Q 系统的规则，可知 $\vdash\psi(A_i)$ 成立
2) 证明若 $A\equiv B$，则 $\psi(A)\equiv\psi(B)$

   若 $A\equiv B$，则 $\vdash_P A\equiv B$，由第一步知 $\vdash_Q \psi(A\equiv B)$，即 $\vdash_Q \psi(A)\equiv\sim\psi(B)$，所以 $\psi(A)\equiv\sim\psi(B)$ 为永假式，$\psi(A)\equiv\psi(B)$ 为永真式

综上，若 $A\in L(Q)$ 且 A 为永假式，则 $A\equiv p\wedge\sim p$，根据充分性第二步证明，则 $\psi(A)\equiv\psi(p\wedge\sim p)$ 为永真式，则 $\models_P \psi(A)$，根据完全性定理有 $\vdash_P \psi(A)$，根据充分性证明的第一步有 $\vdash_Q \psi(\psi(A))$，即 $\vdash_Q A$。充分性得证。

28. 解: 用公式结构结构归纳法证明：

1) A 为命题变元，易知 $V_\varphi(A)=V_\psi(A)$;
2) $A=\sim B$，由归纳假设知 $V_\varphi(B)=V_\psi(B)$，所以 $V_\varphi(A)=\sim V_\varphi(B)=\sim V_\psi(B)=V_\psi(\sim B)=V_\psi(A)$;
3) $A=B\vee C$，由归纳假设知 $V_\varphi(B)=V_\psi(B)$ 且 $V_\varphi(C)=V_\psi(C)$，所以 $V_\varphi(A)=V_\varphi(B\vee C)=V_\varphi(B)\vee V_\varphi(C)=V_\psi(B)\vee V_\psi(C)=V_\psi(B\vee C)=V_\psi(A)$。

综上，$V_\varphi(A) = V_\psi(A)$。

29. 解: 不是，参考 27 题

30. 解:

1)

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\vdash p \vee p \supset p$ | $AS_1$ |
| 2. | $\vdash A \vee A \supset A$ | $1, sub$ |
| 3. | $\vdash p \supset q \vee p$ | $AS_2$ |
| 4. | $\vdash A \supset B \vee A$ | $3, sub$ |
| 5. | $\vdash p \supset q \supset (r \vee q \supset q \vee r)$ | $AS_3$ |
| 6. | $\vdash A \supset B \supset (C \vee A \supset B \vee C)$ | $5, sub$ |

由 2,4,6 知 P 的定理比为 p' 的定理。下面用第二归纳法证明 P' 的定理也为 P 的定理，设 A 为 P' 的定理，且证明序列为 $A_1, A_2, \cdots, A_n (= A)$，则 $\vdash_P A_i$

(a) $A_i \in Axiom$，显然 $\vdash_P A_i$ 成立；

(b) 存在 $j, k < i$ 使得 $A_k = A_j \supset A_i$，根据归纳假设 $\vdash_P A_j$ 且 $\vdash_P A_k$，根据 P 系统的 MP 规则知 $\vdash_P A_i$ 成立；

(c) 存在 $j < i$ 使得 $A_i = S^{p_1, p_2, \cdots, p_n}_{B_1, B_2, \cdots, B_n} A_j$，根据归纳假设 $\vdash_P A_j$，由 P 系统的代入规则 sub 知 $\vdash_P A_i$ 成立。

所以 P 系统和 P' 系统具有相同的定理。

2) 若无 sub 规则，则不能推出 $s \vee s \supset s$(不能推出包含除 p,q,r 之外命题变元的公式)，故 sub 规则独立；若无 MP 规则，则不能推出 $s \vee \sim s$(不能推出长度小于 5 的公式)，故 MP 规则独立。

31. 与 30 题重复 32. 解:

令 $AS_4 = \sim A \vee A$，$AS_5 = A \vee \sim A$。下面证明 $AS_1 - AS_3$ 的独立性。

1) 给每个命题变元以 0，1,2 三个可能的值，$\sim$ 和 $\vee$ 的真值表定义如下：

| | $\sim$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |
| 2 | 2 |

| $\vee$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 0 |

$AS_2 - AS_5$ 在此数值解释下恒为 0，而 $AS_1$ 不常为 0，故 $AS_2 - AS_5$ 不能表示出 $AS_1$。

2) 定义 $\sim$ 和 $\vee$ 的真值表定义如下：

$AS_1, AS_3 - AS_5$ 在此数值解释下永不为 2，而 $AS_2$ 可能为 2，故 $AS_1, AS_3 - AS_5$ 不能表示出 $AS_2$。

3) 定义 $\sim$ 和 $\vee$ 的真值表定义如下：

$AS_1, AS_2, AS_4, AS_5$ 在此数值解释下恒为 0，$AS_3$ 不恒为 0，故 $AS_1, AS_2, AS_4, AS_5$ 不能表示出 $AS_3$。

综上，结论成立。

33. 解:

构造如下的数值解释：

| | $\sim$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| $\vee$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

在此数值解释下，$AS_1 - AS_3$ 恒为 1，$P \supset \sim\sim P$ 不恒为 1，且两个恒为 1 的公式经 MP 规则必得到一个恒为 1 的公式，故不能从 $P^*$ 系统导出 $P \supset \sim\sim P$。

34. 解:

设 p,q 为命题变元，A 为由 $\{\sim, \equiv\}, p, q$ 构成的公式。用公式结构归纳法证明若 $A_i$ 不是永真式或永假式，则 $A_i$ 的真值表中取值为真的个数与取值为假的个数相等。

1) $A = p$ 或者 $A = q$，显然成立；

2) $A = \sim B$，显然成立；

3) $A = B \equiv C$，若 $\varphi(B) = \varphi(C)$ 或 $\varphi(B) \neq \varphi(C)$ 时，则 $A$ 为永真式或永假式，当 $\varphi(B)$,$\varphi(C)$ 不完全一样或完全相反时 ($\varphi$ 为任意指派)，通过枚举可知结论同样成立。

所以，A 为永真式或者永假式或 A 的真值表中 t 的个数与 f 的个数相等，而 $v$ 的真值表中 t 的个数与 f 的个数不等，因此 $\{\sim, \equiv\}$ 不能表示出 $\vee$，则 $\{\sim, \equiv\}$ 不完全。

35. 解:

先证明对于每个 n 元真值函数 h:$\{t, f\}^n \to \{t, f\}$，存在一个合取范式 A 以及 n 个命题变元:$p_1, p_2, \cdots, p_n$，使得 $h = [\lambda p_1, \cdots \lambda p_n A]$：

1) 若 h 恒取 t，则令 $A = p_1 \vee \sim p_1$;

| | $\sim$ |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 1 | 1 |
| 2 | 0 |

| $\vee$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 2 |

| | $\sim$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 0 |

| $\vee$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 2 |

2) 若 h 不恒为 t，对 P 系统中的每个指派 $\varphi$, 令:

$$A^{\varphi} = p_1^{\varphi} \vee p_2^{\varphi} \vee \cdots \vee p_n^{\varphi}$$

$$p_i^{\varphi} = \begin{cases} \sim p_i & 若\varphi(p_i) = t \\ p_i & 否则 \end{cases}$$

则 $\varphi(A^{\varphi}) = \varphi(p_1^{\varphi}) \vee \cdots \vee \varphi(p_n^{\varphi}) = f$，因此 $[\lambda p_1, \cdots \lambda p_n A](x_1, x_2, \cdots, x_n) = f$ 当且仅当 $x_1 = p_1^{\varphi}, \cdots, x_n = p_n^{\varphi}$。所以 $A = \wedge_{h(\varphi(p_1), \varphi(p_2), \cdots, \varphi(p_n))=f} A^{\varphi}$ 满足要求。

对于公式 B，都存在一个 n 元真值函数 $h = [\lambda p_1, \cdots \lambda p_m B]$，$p_1, p_2 \cdots, p_m$ 为 B 中出现的所有命题变元，则由上述证明可知，存在一个合取范式 A 使得 $[\lambda p_1, \cdots \lambda p_m A] = h = [\lambda p_1, \cdots \lambda p_m B]$，故 $A \Leftrightarrow B$，即每个公式都有合取范式。

36. 解: $\{\vee, \wedge, \supset, \equiv\}$ 不是完全集

下面用公式结构归纳法证明，由命题变元 p 和 $\{\vee, \wedge, \supset, \equiv\}$ 构成的公式没有永假式，也不能有 $\{\vee, \wedge, \supset, \equiv\}$ 定义出 $\sim$:

1) A 为命题变元 p，既不是永假式，其真值表也不具备 $\sim$ 的形式;

2) $A = B \equiv C$ 或 $A = B \supset C$ 或 $A = B \vee C$ 或 $A = B \wedge C$，由归纳假设知 B 和 C 的真值表具有以下两种形式:

| p | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |

| p | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |

无论 $A = B \equiv C$ 或 $A = B \supset C$ 或 $A = B \vee C$ 或 $A = B \wedge C$ 都不能使 A 为永假式或者具备与 $\sim$ 相同的真值表，所以 $\{\vee, \wedge, \supset, \equiv\}$ 表达不出 $\sim$，即不完全。

37. 解:

首先用归纳法证明：若 A 为仅由 $\equiv$ 构成的合式公式 (且其中的命题变元为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$)，则任意改变 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的出现顺序所形成的新公式 B 与 A 等价，用 $^{\#}A$ 表示 A 中命题变元和 $\equiv$ 出现的次数，则 $^{\#}A = 2i + 1 (i = 0, 1, \cdots)$，

1) i=0,1 时显然成立;

2) i=k (k>1)，$A_k = A_{k-1} \equiv P_k$，设 $A_{k-1} = B \equiv C$，则 $A_k = B \equiv C \equiv P_k$，显然 $A_k$ 与 $C \equiv P_k \equiv B$、$P_k \equiv B \equiv C$、$B \equiv P_k \equiv C$ 等价

故仅由 $\equiv$ 构成的命题合式公式 A(且其中的命题变元为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$) 与下式等价:

$$\underbrace{(p_1 \equiv p_1 \equiv \cdots \equiv p_1)}_{l_1} \equiv \underbrace{(p_2 \equiv p_3 \equiv \cdots \equiv p_2)}_{l_2} \equiv \cdots \equiv \underbrace{(p_n \equiv p_n \equiv \cdots \equiv p_n)}_{l_n}$$

其中 $l_i$ 表示 $p_i$ 在 A 中出现的次数，易知若 $l_i$ 为偶数，则该项对应与 t，否则为 $p_i$。所以结论成立。

38. 略

39. 参考 37

40. 解：

易知由 $\wedge, \not\equiv, t, f$ 构成的公式只能为永真式或者永假式

用结构归纳法证明：

1) A 为 t 显然成立；

2) $A = B \wedge C$，

- 若 A 能变换到 1，则 B 和 C 都能变换到 1，根据归纳假设，B 和 C 都是永真式，所以 A 也为永真式；
- 若 A 为永真式，则 B，C 都是永真式，根据归纳假设，B 和 C 都能变换到 1，所以 A 也能变换到 1；

3) $A = B \not\equiv C$

(a) 若 A 能变换到 1，则 B 能变换到 0、C 能变换到 1，或者 B 能变换到 1、C 能变换到 0，根据归纳假设，B、C 中有一个为永真式，另一个不为永真式，故 A 为永真式。

(b) 若 A 为永真式，根据归纳假设，B 和 C 中只能有一个永真式，所以 A 能变换到 1(根据归纳假设，B 和 C 中的永假式只能变换到 0。

综上，结论得证。

41. 解：

设 C(A) 中所有合适的公式的析取为 B，因为 C(A) 的所有元素均为合取项，所以 B 是析取范式。根据定理 2.6.7，$\models_\varphi A$ 当且仅当有 $D \in C(A)$ 使得 $\models_\varphi D$ 成立。则对任意指派 $\varphi$，若 $\models_\varphi A$，则存在 $D \in C(A)$ 满足 $\models_\varphi D$，又因为 B 为所有 C(A) 元素的析取，所以 $\models_\varphi B$，必要性成立；

对任意指派 $\varphi$，若 $\models_\varphi B$，则必然存在一个 B 的合取项 D 满足 $\models_\varphi D$，而 $D \in C(A)$，所以 $\models_\varphi A$, 充分性成立。

42. 解：

| 表示与非，$p \supset q = \sim p \vee q = \sim (p \wedge \sim q)$，所以用 | 表示为 p|(q|q)。

43. 解：

| 不是可结合的，因为 $f|f|t \not\equiv f|(f|t)$ 为永真式。

44. 解：

此系统并不协调，下面给出简要的证明序列，为了减小公式长度，做以下表示：令 $A_p =$

$A|(A|A), A_r = S|Q\blacksquare A|S\blacksquare A|S$，其中 $A, S, Q$ 均为任意公式。

1. $\vdash p|(p|r)|\blacksquare p|(r|p)|\blacksquare s|q\blacksquare p|s\blacksquare p|s$
2. $\vdash A|(A|A)|\blacksquare A|(A|A)|\blacksquare S|Q\blacksquare A|S\blacksquare A|S$ $\qquad 1, Rule\ i)$
3. $\vdash A_p|(A_p|A_r)|\blacksquare A_p|(A_r|A_p)|\blacksquare S|Q\blacksquare A_p|S\blacksquare A_p|S$ $\qquad 1, Rule\ i)$
4. $\vdash S|Q\blacksquare A_p|S\blacksquare A_p|S$ $\qquad 2, 3, Rule\ ii)$
5. $\vdash S'|Q'\blacksquare A_p|S'\blacksquare A_p|S'$ $\qquad 4$
6. $\vdash A_p|(S'|Q')$ $\qquad 4, 5, Rule\ ii)$
7. $\vdash A_p|A_p\blacksquare A_p|A_p\blacksquare A_p|A_p$ $\qquad 4$
8. $\vdash Q'$ $\qquad 6, 7, Rule\ ii)$

45. 此题可能存疑

若 $S = \cup_\varphi\{p_1^\varphi \wedge p_2^\varphi \wedge \cdots\}$，其中

$$p_i^\varphi = \begin{cases} p_i, & \text{若}\varphi(p_i) = t \\ \sim p_i, & \text{若}\varphi(p_i) = f \end{cases}$$

因此，S 中的每一个元素只有一个指派使其为真，所以 S 是析取有效的，但其任意有限子集不是析取有效的。

46.

1. $\vdash\sim A \supset B\vee \sim A$
2. $\sim A \vdash B\vee \sim A$ $\qquad 1, cp$
3. $\sim A \vdash\sim A \vee B$ $\qquad 2, commut$
4. $\sim A \vdash A \supset B$ $\qquad 3$

47.

1. $A \supset B, \sim (B \supset C) \supset\sim A, A \vdash A$ $\qquad \in$
2. $A \supset B, \sim (B \supset C) \supset\sim A, A \vdash A \supset B$ $\qquad \in$
3. $A \supset B, \sim (B \supset C) \supset\sim A, A \vdash B$ $\qquad 1, 2, \overline{MP}$
4. $A \supset B, \sim (B \supset C) \supset\sim A, A \vdash\sim (B \supset C) \supset\sim A$ $\qquad \in$
5. $A \supset B, \sim (B \supset C) \supset\sim A, A \vdash A \supset (B \supset C)$ $\qquad 4$
6. $A \supset B, \sim (B \supset C) \supset\sim A, A \vdash B \supset C$ $\qquad 1, 5, \overline{MP}$
7. $A \supset B, \sim (B \supset C) \supset\sim A, A \vdash C$ $\qquad 3, 6, \overline{MP}$
8. $A \supset B, \sim (B \supset C) \supset\sim A \vdash A \supset C$ $\qquad 7, CP$

48.

1. $\vdash B \vee B \supset B$ $\quad AS_1$
2. $\vdash B \supset B \vee B$ $\quad AS_2$
3. $\vdash B \vee B$ $\quad 1, 2, \overline{MP}$
4. $A \supset \sim (B \supset B) \vdash \sim A \vee \sim (B \supset B)$ $\quad \in$
5. $A \supset \sim (B \supset B) \vdash (B \supset B) \vee A$ $\quad 4, commu$
6. $A \supset \sim (B \supset B) \vdash \sim A$ $\quad 3, 5, \overline{MP}$

49.

1. $(A \vee B) \supset C, A \vdash A$ $\quad \in$
2. $(A \vee B) \supset C, A \vdash (A \vee B) \supset C$
3. $(A \vee B) \supset C, A \vdash A \vee B$ $\quad \vee_+$
4. $(A \vee B) \supset C, A \vdash C$ $\quad 2, 3\overline{MP}$
5. $(A \vee B) \supset C \vdash A \vee C$ $\quad 4, CP$
6. $(A \vee B) \supset C \vdash B \vee C$ 同理
7. $(A \vee B) \supset C \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ $\quad 5, 6, \wedge_+$
8. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ $\quad \in$
9. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \vee C)$ $\quad \wedge -$
10. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (B \vee C)$ $\quad \wedge -$
11. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \vee B) \supset (C \vee C)$ $\quad \vee \supset \vee$
12. $\vdash (C \vee C) \supset C$ $\quad AS_1$
13. $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \vdash (A \vee B) \supset C$ $\quad 11, 12, \overline{MP}$

50.

1. $(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash A \wedge \sim C$ $\in$
2. $(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash A$ $1, \wedge-$
3. $(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash \sim C$ $1, \wedge-$
4. $(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash \sim C \supset \sim (A \wedge B)$ $1, \in, \supset\sim$
5. $(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash \sim (A \wedge B)$ $3, 4, \overline{MP}$
6. $(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash A \supset \sim B$ $5$
7. $(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash \sim B$ $2, 6, \overline{MP}$
8. $(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash \sim B \vee C$ $7, \vee+$
9. $(A \wedge B) \supset C, \sim (A \supset C) \vdash B \supset C$ $8$
10. $A \vee B \supset C \vdash \sim (A \supset C) \supset (B \supset C)$ $9, CP$
11. $A \vee B \supset C \vdash (A \supset C) \vee (B \supset C)$ $10$
12. $A \supset C, A \wedge B \vdash A \wedge B$ $\in$
13. $A \supset C, A \wedge B \vdash A$ $12, \wedge-$
14. $A \supset C, A \wedge B \vdash A \supset C$ $\in$
15. $A \supset C, A \wedge B \vdash C$ $13, 14, \overline{MP}$
16. $A \supset C \vdash A \wedge B \supset C$ $15, CP$
17. $B \supset C \vdash A \wedge B \supset C$ 同理
18. $(A \supset C) \vee (B \supset C) \vdash A \wedge B \supset C$ $16, 17, \vee \supset \vee$

51. 解:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash A \wedge \sim B$ | $\in$ |
| 2. | $A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash A$ | $1, \wedge -$ |
| 3. | $A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash \sim B$ | $1, \wedge -$ |
| 4. | $A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash A \supset (B \vee C)$ | $\in$ |
| 5. | $A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash B \vee C$ | $2, 4\overline{MP}$ |
| 6. | $A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash \sim B \supset C$ | $5$ |
| 7. | $A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash c$ | $3, 6, \overline{MP}$ |
| 8. | $A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash \sim A \vee C$ | $7, DR_4$ |
| 9. | $A \supset (B \vee C), \sim (A \supset B) \vdash A \supset C$ | $8$ |
| 10. | $A \supset (B \vee C) \vdash (A \supset B) \vee (A \supset C)$ | $9, CP$ |
| 11. | $A \supset B \vdash A \supset B$ | $\in$ |
| 12. | $A \supset B \vdash A \supset (B \vee C)$ | $11, DR_4$ |
| 13. | $A \supset C \vdash A \supset (B \vee C)$ | 同理 |
| 14. | $(A \supset B) \vee (A \supset C) \vdash A \supset (B \vee C)$ | |

52. 解:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A \supset (B \wedge C), A \vdash A$ | $\in$ |
| 2. | $A \supset (B \wedge C), A \vdash A \supset (B \wedge C)$ | $\in$ |
| 3. | $A \supset (B \wedge C), A \vdash B \wedge C$ | $1, 2, \overline{MP}$ |
| 4. | $A \supset (B \wedge C), A \vdash B$ | $3, \wedge -$ |
| 5. | $A \supset (B \wedge C) \vdash A \supset B$ | $4, CP$ |
| 6. | $A \supset (B \wedge C) \vdash A \supset C$ | 同理 |
| 7. | $A \supset (B \wedge C) \vdash (A \supset B) \wedge (A \supset C)$ | $5, 6, \wedge +$ |
| 8. | $A \supset B \vdash A \supset (B \vee C)$ | $DR_4$ |
| 9. | $A \supset C \vdash A \supset (B \vee C)$ | $DR_4$ |
| 10. | $(A \supset B) \wedge (A \supset C), A \vdash A \supset B, A \supset C, A$ | $\in \wedge -$ |
| 11. | $(A \supset B) \wedge (A \supset C), A \vdash B, C, B \wedge C$ | $10, \overline{MP}, \wedge +$ |
| 12. | $(A \supset B) \wedge (A \supset C) \vdash A \supset (B \wedge C)$ | $12, CP$ |

53. 解:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash A \supset \sim B$ | $\in$ |
| 2. | $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash A \supset B$ | $\in, \wedge-$ |
| 3. | $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash B \supset A$ | $\in, \wedge-$ |
| 4. | $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash B \supset \sim A$ | $\in$ |
| 5. | $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash B \supset \sim B$ | $1, 3, \overline{MP}$ |
| 6. | $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash A \supset \sim A$ | $2, 4, \overline{MP}$ |
| 7. | $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash \sim A$ | $5$ |
| 8. | $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash \sim B$ | $6$ |
| 9. | $(A \supset B) \wedge (B \supset A), \sim A \vee \sim B \vdash \sim A \wedge \sim B$ | $7, 8 \wedge +$ |
| 10. | $A \equiv B \vdash \sim (A \supset \sim B) \vee \sim (A \vee B)$ | $9, CP$ |
| 11. | $A \equiv B \vdash \sim (A \equiv \sim B)$ | $10$ |
| 12. | $\vdash (A \equiv B) \supset \sim (A \equiv \sim B)$ | $11, CP$ |
| 13. | $\vdash (A \equiv \sim B) \supset (A \equiv B)$ | $12, \supset \sim$ |

54. 解:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A \supset (B \supset C), A \wedge B \vdash A, B$ | $\in, \wedge-$ |
| 2. | $A \supset (B \supset C), A \wedge B \vdash C,$ | $1, \overline{MP}$ |
| 3. | $A \supset (B \supset C) \vdash (A \wedge B) \supset C,$ | $2, CP$ |
| 4. | $(A \wedge B) \supset C, A, B \vdash A, B$ | $\in$ |
| 5. | $(A \wedge B) \supset C, A, B \vdash A \wedge B$ | $4, \wedge +$ |
| 6. | $(A \wedge B) \supset C, A, B \vdash C$ | $5, \in, \overline{MP}$ |
| 7. | $(A \wedge B) \supset C \vdash A \supset (B \supset C)$ | $6, MP, MP$ |

55. 参考 50
56. 参考 51
57. 参考 36

58.

$$
\begin{aligned}
&\sim a = a \mid a \\
&\sim a = a \downarrow a \\
&a \vee b = (a \mid a) \mid (b \mid b) \\
&a \vee b = (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b) \\
&a \wedge b = (a \mid b) \mid (a \mid b) \\
&a \wedge b = (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b) \\
&a \supset b = a \mid (b \mid b) \\
&a \supset b = (a \downarrow a) \downarrow b \downarrow (a \downarrow a) \downarrow b \\
&a \equiv b = ((a \mid (b \mid b) \mid (b \mid (a \mid a))) \mid ((a \mid (b \mid b) \mid (b \mid (a \mid a))) \\
&a \equiv b = ((a \downarrow a) \downarrow b) \downarrow ((b \downarrow b) \downarrow a)
\end{aligned}
$$

对于将公式化成 $\mid$ 或 $\downarrow$ 的形式，可以先化成 $\sim (a \wedge b)$ 或 $\sim (a \vee b)$ 的形式，然后用 $\mid$ 或 $\downarrow$ 做替换。

59. 解:

1) 因为 $C_1, C_2, \cdots, C_m$ 互异，且排序关系是全序的，所以 $C_1, C_2, \cdots, C_m$ 排序后的结果是唯一的。

   令 $T = \{\varphi | \varphi(A) = t\}$，因为 A 不是永假式，所以 $T \neq \emptyset$；令

$$
x_i^{\varphi} = \begin{cases} x_i, & 若\varphi(x_i) = t \\ \sim x_i, & 若\varphi(x_i) = f \end{cases}
$$

   则 $\varphi(x_1^{\varphi} \wedge x_2^{\varphi} \wedge \cdots \wedge x_n^{\varphi}) = t$, 令 $C_i' = x_1^{\varphi_i} \wedge x_2^{\varphi_i} \wedge \cdots \wedge x_n^{\varphi_i}$, 对 $C_1', C_2', \cdots, C_n'$ 进行排序得到 $C_1, C_2, \cdots, C_n$，则 $B = C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_n$ 即为 A 的唯一的完全解析式。

   再证 $\varphi(A) = \varphi(B)$。对于任意指派 $\varphi$

   - 若 $\varphi(A) = t$，故存在一个 $C_i'$，满足 $\varphi(C_i') = t$, 又 $C_i'$ 为 B 的一个合取项，故 $\varphi(B) = t$。
   - 若 $\varphi(B) = t$，故 B 存在一个析取项 C 使得 $\varphi(C) = t$，所以 $\varphi \in T$，所以 $\varphi(A) = t$.

2) A 为永真式，则 ${}^{\#}T = 2^n$，故有 $2^n$ 个短句，则 $m = 2^n$。

60. 解:

- 析取范式:

$$(\sim p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \sim r)$$

  合取范式:

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \sim r) \wedge (p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$$

- 析取范式:

$$(\sim p \wedge \sim r \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge r \wedge q)$$

  合取范式:

$$(p \vee r \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim r \vee q) \wedge (\sim p \vee r \vee q) \wedge (\sim p \vee r \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee \sim r \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim r \vee \sim q)$$

- 析取范式：

$$(\sim p\wedge \sim r\wedge \sim q)\vee(\sim p\wedge \sim r\wedge q)\vee(\sim p\wedge r\wedge q)\vee(p\wedge \sim r\wedge q)\vee(p\wedge r\wedge q)$$

合取范式：

$$(p\vee \sim r\vee q)\wedge(\sim p\vee r\vee q)\wedge(\sim p\vee \sim r\vee q)$$

61. 解:

1) $(p\wedge \sim q)\vee p$
2) $p\wedge(q\vee r)$
3) $\sim q$
4) $p$

62. 解:

1. $S$
2. $\{r,s,\sim r\vee \sim s,q\vee r\}\&\{\sim q,q\vee s,\sim r\vee \sim s,q\vee r\}$ 关于 p 的分裂规则
3. $\{r,q,\sim r,q\vee r\}\&\{s,\sim r\vee \sim s,r\}$ 关于 s 和 $\sim q$的单文字规则
4. $\{\ \ \square\}\&\{\ \ \square\}$

63. 解:

1. $S$
2. $\{p\vee q,p\vee \sim r,q\vee \sim r\vee p,\sim r\vee q\}$ 1, 重言式规则
3. $\{\sim r\vee q\}$ 2, 关于 p 的纯文字规则
4. $\emptyset$ 3, 关于 q 的纯文字规则

64. 解:

1. $S$
2. $\{\sim r,q\vee r\}\&\{q,\sim q\vee \sim r,q\vee r\}$ 1, 关于 p 的分裂规则
3. $\{q\}\&\{r,\sim r\}$ 2, 关于 $\sim r,q$的单文字规则
4. $\emptyset\&\{\ \ \square\}$ 3, 关于 q 的纯文字规则，关于 r 的单文字规则

65. 解:

1. $S$
2. $\{q\vee r,\sim q\vee s,\sim r\vee s,\sim s,q\vee \sim r\}$ 1, 关于 $\sim p$的单文字规则
3. $\{q\vee r,\sim q,\sim r,q\vee \sim r\}$ 2, 关于 $\sim s$的单文字规则
4. $\{r,\sim r\}$ 3, 关于 $\sim q$的单文字规则
5. $\{\ \ \square\}$ 4, 关于 $\sim r$的单文字规则

66-68 可以先化为否定范式，画出平面图，求合取支集合，对合取支元素进行取反，然后消解，如能消解出空短句，则原式为永真式；也可以直接取反，化为析取范式，进行消解。

66. 解：合取支集合为 $\{\sim p, q\wedge \sim r, s\wedge r, s\wedge \sim q, p\wedge r, p\wedge \sim q\}$，令 $S=\{p, \sim q\vee r, \sim s\vee \sim r, \sim s\vee q, \sim p\vee \sim r, \sim p\vee q\}$

对 S 进行消解：

1. $S$
2. $\{\sim q\vee r, \sim s\vee \sim r, \sim s\vee q, \sim r, q\}$ 1, 关于 p 的单文字规则
3. $\{\sim q, \sim s, \sim s\vee q, q\}$ 2, 关于 $\sim r$的单文字规则
4. $\{\ \ \square\}$ 3, 关于 q 的单文字规则, 关于 $\sim s$的纯文字规则

故原式为永真式。

67. 解：原公式取反后的短句集为 $S=\{p\vee q, \sim p\vee r, \sim p\vee \sim s, \sim r\vee s, r\vee \sim q, \sim q\vee \sim s\}$

对 S 进行消解：

1. $S$
2. $\{q, \sim r\vee s, r\vee \sim q, \sim q\vee \sim s\}\&\{r, \sim s, \sim r\vee s, r\vee \sim q, \sim q\vee \sim s\}$ 1, 关于 p 的单文字规则
3. $\{\sim r\vee s, r, \sim s\}\&\{\sim s, s, \sim q, \sim q\vee \sim s\}$ 2, 关于 q,r 的单文字规则
4. $\{\ \ \square\}\&\{\ \ \square\}$

故原式为永真式。

68. 解：原公式取反后短句集为 $S=\{p\vee q, s\vee \sim q\vee r, \sim r\vee q, \sim s\vee q, \sim q\}$

对 S 进行消解：

1. $S$
2. $\{p, \vee \sim q\vee r, \sim r, \sim s\}$ 1, 关于 $\sim q$的单文字规则
3. $\{p, s\vee \sim p, \sim s\}$ 2, 关于 $\sim r$的单文字规则
4. $\{s, \sim s\}$ 3, 关于 p 的单文字规则
5. $\{\ \ \square\}$

故原公式为永真式。

69. 略 (太长，可以用平面图)

70. 解：

1) P 中 z,Q 中 u

2) z,u

3) u,x,z

4) g(x) 对公式中 u 不自由

5) h(x,y) 对公式中 u 不自由

6) u 对公式中 x 自由

71. 解:

1) $\forall x \in H(B(x) \wedge W(t(x)) \supset K(m(x)))$

2) $\forall xy \in H(H(y) \wedge W(x) \wedge K(m(y)) \supset \sim L(x,y))$

3) $\sim \exists x \in H(B(x) \wedge W(t(x)))$

4) 在牲口棚中有一匹马和牲口棚中所有的黑尾巴马相像

5) 在牲口棚中不存在没有白尾巴的马

72. 解:

1) $\forall x(C(x,f(r)) \supset U(x,r))$

2) 如果两个人的父亲是兄弟，那么这两个人就是堂兄弟

3) $\exists xy(C(x,r) \wedge B(y,r) \supset Y(x,y))$

73. 解:

1) 自由变元:x，约束变元:x，任意项都可以代入

2) 自由变元:y，约束变元:x,y，x 不出现的项可以代入

74. 解:

n+1,n-1 都有可能

75. 解:

用结构归纳法证明

1) 若 A 为命题变元

(a) A=m，则 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B A = S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}B$，因为 $B = S^{x_1,x_2,\cdots,x_n}_{u_1,u_2\cdots,u_n}C$ 且 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 不在 C 中出现，故 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}B = C = S^m_C A$

(b) A 为命题变元，且 $A = p \neq m$, 则 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B A = S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}p = p = S^m_C A$

2) A 为原子公式，$A = P(t_1,t_2,\cdots,t_k), t_i = f(y_1,y_2,\cdots,y_j), 1 \leq i \leq k$, 则 m 不在 A 中出现，所以 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B A = A = S^m_C A$

3) $A = \sim D$, 因为 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B D = S^m_C D$, 所以 $\sim S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B D = \sim S^m_C D$, 即 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B A = S^m_C A$

4) $A = D \vee E$, 因为 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B D = S^m_C D$, 且 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B E = S^m_C E$, 则 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B D \vee S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B E = S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B(D \vee E) = S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B A = S^m_C D \vee S^m_C E = S^m_C(D \vee E) = S^m_C A$

5) $A = \forall yD$, 则 $y \notin \{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$, 则 B 对 A 中 m 是自由的, 且 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B D = S^m_C D$, , 所以 $S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B A = S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B \forall yD = \forall y S^{u_1,u_2\cdots,u_n}_{x_1,x_2,\cdots,x_n}S^m_B D = \forall y S^m_C D = S^m_C \forall yD = S^m_C A$

综上，结论成立.

76. 解：

相同公式中，运算符的运算顺序也是相同的，若 $B \neq D$，假设 B 是 D 的前缀，令 $D = B \vee F$，则 $D \vee E = B \vee F \vee E$，故 $C = F \vee E$，这就导致 $B \vee C$ 中的 "$\vee$" 与 $D \vee E$ 中的 "$\vee$" 运算次序不同，故 B 不为 D 的前缀，同理 D 不为 B 的前缀，从而 B=D。同理得 C=E。

77. 解：

用公式结构归纳法证明：

1) C 为原子公式，显然 y 在 C 中不出现，$S^y_x S^x_y C = C$;

2) $C =\sim A$，因为 $S^y_x S^x_y A = A$, 所以 $S^y_x S^x_y C = S^y_x S^x_y \sim A =\sim S^y_x S^x_y A =\sim A = C$;

3) $C = B \vee D$，因为 $S^y_x S^x_y B = B$ 且 $S^y_x S^x_y D = D$，所以 $S^y_x S^x_y C = S^y_x S^x_y (B \vee D) = S^y_x S^x_y B \vee S^y_x S^x_y D = B \vee D = C$;

4) $C = \forall z B$

- 若 z=x，则 $S^x_y C = S^x_y \forall x B = \forall x B = C$,y 在 C 中不自由，$S^y_x C = C$，所以 $S^y_x S^x_y C = C$;
- 若 z=y，则 $S^x_y C = S^x_y \forall y B$，因为 y 对 C 中 x 是自由的，所以 x 不在 C 中出现，故 $S^x_y C = C, S^y_x C = C$，所以 $S^y_x S^x_y C = C$;
- 若 $z \neq x, y$，则 $S^y_x S^x_y C = S^y_x S^x_y (\forall z B) = \forall z S^y_x S^x_y B = \forall z B = C$。

综上，若 y 在 C 中不自由，且 y 对 C 中 x 是自由的，则 $S^y_x S^x_y C = C$。

78. 解：

令 $A = (p \equiv q) \wedge (p \equiv\sim (r \supset q)) \supset (q \supset\sim r)$，则 A 为 P 永真。

令 $B = (\forall x(G(x) \supset H(x)) \equiv \exists x H(x)) \wedge (\forall x(G(x) \supset H(x)) \equiv\sim (\forall x G(x) \supset \exists x H(x))) \supset (\exists x H(x) \supset\sim \forall x G(x))$

则 $B = S^{p,q,r}_{\forall x(G(x)\supset H(x)), \exists x H(x), \forall x G(x)} A$，故 B 为 P 用真的，则通过 P 规则可以导出 $\exists x H(x) \supset\sim \forall x G(x)$。

79. 解：

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall x(R(x) \supset P(x)) \wedge \forall x(\sim Q(x) \supset R(x)) \vdash \forall x(R(x) \supset P(x)), \forall x(\sim Q(x) \supset R(x))$ | $\in, \wedge-$ |
| 2. | $\forall x(R(x) \supset P(x)) \wedge \forall x(\sim Q(x) \supset R(x)) \vdash R(x) \supset P(x)$ | $1, AS_4$ |
| 3. | $\forall x(R(x) \supset P(x)) \wedge \forall x(\sim Q(x) \supset R(x)) \vdash\sim Q(x) \supset R(x)$ | $1, AS_4$ |
| 4. | $\forall x(R(x) \supset P(x)) \wedge \forall x(\sim Q(x) \supset R(x)) \vdash\sim Q(x) \supset P(x)$ | $2, 3, trans$ |
| 5. | $\forall x(R(x) \supset P(x)) \wedge \forall x(\sim Q(x) \supset R(x)) \vdash P(x) \vee Q(x)$ | $4. \equiv subiii)$ |
| 6. | $\forall x(R(x) \supset P(x)) \wedge \forall x(\sim Q(x) \supset R(x)) \vdash \forall x(P(x) \vee Q(x))$ | $5, gen$ |
| 7. | $\vdash \forall x(R(x) \supset P(x)) \wedge \forall x(\sim Q(x) \supset R(x)) \supset \forall x(P(x) \vee Q(x))$ | $6, CP$ |

80. 解:

$$\begin{array}{lll} 1. & P(x) \vdash P(x) & \in \\ 2. & \vdash P(x) \supset P(x) & 1, CP \\ 3. & \vdash S_x^y(P(x) \supset P(y)) & 2 \\ 4. & \vdash \exists y(P(x) \supset P(y)) & 3, \text{x 对}P(x) \supset P(y)\text{中 y 自由} \\ 5. & \vdash \forall x \exists y(P(x) \supset P(y)) & 4, gen \end{array}$$

81. 解:

$$\begin{array}{lll} 1. & p \supset \forall x \sim Q(x), p \vdash p \supset \forall x \sim Q(x) & \in \\ 2. & p \supset \forall x \sim Q(x), p \vdash p & \in \\ 3. & p \supset \forall x \sim Q(x), p \vdash \forall x \sim Q(x) & 1, 2, \overline{MP} \\ 4. & \vdash (p \supset \forall x \sim Q(x)) \supset \forall x(p \supset\sim Q(x)) & 3, AS_4, CP, Gen, CP \\ 5. & \vdash\sim \forall x(p \supset\sim Q(x)) \supset\sim (p \supset \forall x \sim Q(x)) & 4, \supset\sim \\ 6. & \vdash \exists x(p \wedge Q(x)) \supset (p \wedge \exists x Q(x)) & 5, \equiv sub\ iii) \\ 7. & \forall x(p \supset\sim Q(x)), p \vdash \forall x(p \supset\sim Q(x)), p & \in \\ 8. & \forall x(p \supset\sim Q(x)), p \vdash\sim Q(x) & 7, AS_4, \overline{MP} \\ 9. & \forall x(p \supset\sim Q(x)) \vdash p \supset \forall x \sim Q(X) & 8, Gen, CP \\ 10. & \vdash\sim (p \supset \forall x \sim Q(x)) \supset\sim \forall x(p \supset\sim Q(x)) & 9, CP, \supset\sim \\ 11. & \vdash p \wedge \exists x Q(x) \supset \exists x(p \wedge Q(x)) & 10, \equiv sub\ iii) \\ 12. & \vdash \exists x(p \wedge Q(x)) \equiv (p \wedge \exists x Q(x)) & 6, 11 \end{array}$$

82. 解:

$$\begin{array}{lll} 1. & \forall y P(y) \vdash \forall x P(x) & \in, \alpha\beta \\ 2. & \vdash \forall y P(y) \supset \forall x P(x) & CP \end{array}$$

$\forall y P(y) \supset \forall x P(x)$ 的前束范式为 $\exists y \forall x(P(y) \supset P(x))$，根据前束范式定理，$\forall y P(y) \supset \forall x P(x) \equiv \exists y \forall x(P(y) \supset P(x))$。所以

$$\begin{array}{lll} 3. & \vdash \exists y \forall x(P(y) \supset P(x)) & 2, \equiv sub\ iii) \end{array}$$

也可以演绎证明 $\vdash \forall y P(y) \supset \forall x P(x) \supset \exists y \forall x(P(y) \supset P(x))$。

83. 解:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\forall xP(x) \wedge \forall x \sim Q(x) \vdash P(x), \sim Q(x)$ | $\wedge -, AS_4$ |
| 2. | $\forall xP(x) \wedge \forall x \sim Q(x) \vdash \forall x(P(x) \wedge Q(x))$ | $1, \wedge +, Gen$ |
| 3. | $\vdash \exists x(P(x) \supset Q(x)) \supset (\forall xP(x) \supset \exists xQ(x))$ | $2, CP, \supset\sim, \equiv sub\ iii)$ |
| 4. | $\forall x(p(x) \wedge \sim Q(x)) \vdash \forall xP(x), \forall x \sim Q(x)$ | $\in, AS_4, \wedge -, Gen$ |
| 5. | $\forall x(p(x) \wedge \sim Q(x)) \supset \forall xP(x) \wedge \forall x \sim Q(x)$ | $4, \wedge +, CP$ |
| 6. | $\vdash (\forall xP(x) \supset \exists xQ(x)) \supset \exists x(P(x) \supset Q(x))$ | $5, \supset\sim, \equiv sub\ iii)$ |
| 7. | $\vdash \exists x(P(x) \supset Q(x)) \equiv (\forall xP(x) \supset \exists xQ(x))$ | $3, 6$ |

84. 解:

$$
\begin{aligned}
\exists x\forall y(P(x) \equiv P(y)) &\equiv \exists x((\sim P(x) \vee \forall yP(y)) \wedge (\sim \exists yP(y) \vee P(x))) \\
&\equiv \exists x((\sim P(x) \wedge \sim \exists yP(y)) \vee (\forall yP(y) \wedge P(x))) \\
&\equiv (\sim \forall xP(x) \wedge \sim \exists yP(y)) \vee (\forall yP(y) \wedge \exists xP(x)) \\
&\equiv (\forall xP(x) \supset \forall yP(y)) \wedge (\exists yP(y) \supset \forall yP(y)) \wedge (\exists yP(y) \supset \exists xP(x)) \\
&\equiv (\exists yP(y) \supset \forall yP(y))
\end{aligned}
$$

由换名规则可得 $\exists yP(y) \supset \forall yP(y) \equiv \exists xP(x) \supset \forall yP(y)$，且 $\forall yP(y) \supset \exists xP(x)$ 为永真式，故

$$
\begin{aligned}
\exists yP(y) \supset \forall yP(y) &\equiv (\exists xP(x) \supset \forall yP(y)) \wedge (\forall yP(y) \supset \exists xP(x)) \\
&\equiv (\exists xP(x) \equiv \forall yP(y))
\end{aligned}
$$

85. 解:

$\forall x(P(x) \equiv \exists yP(y))$ 同样等价于 $\exists yP(y) \supset \forall yP(y)$, 后续证明参考 84 题。

86. 解:

由 84 题知 $\exists x\forall y(P(x) \equiv P(y)) \equiv (\exists xP(x) \supset \forall xP(x))$，而 $(\exists xP(x) \supset \forall xP(x)) \equiv (\forall xP(x) \vee \forall x \sim P(x))$

87. 略

88. 解:

1) $\exists xyz(\sim R(x,u) \wedge (\sim R(y,z) \supset Q(u,y)))$

2) $\exists x\forall y\exists u\forall v \sim (Q(x,y) \supset\sim (P(u,y,z) \supset\sim R(v)))$

3)

89. 解:

1) 由 84 题知，$\exists y\forall x(P(x) \equiv Q(y))$ 是 $\forall xP(x) \equiv \exists yP(y)$ 的前束范式，另外 $\exists xy\forall ab(P(x) \supset P(y) \wedge P(a) \supset P(b))$ 也是。

2) $\exists a,b,x,y(\sim P(a,b) \supset\sim (P(x,y) \supset P(u,y)))$

90. 解:

1) 必要性

因为 $\models_{(I,\sigma)} \exists xA$，所以 $I(\exists xA)(\sigma)=t$，即 $I(\forall x\sim A)(\sigma)=f$，所以存在 $a$ 使得 $I(\sim A)(\sigma[x|a])=f$ 则 $I(A)(\sigma[x|a])=t$。

令 $\varphi=\sigma[x|a]$，则满足条件 $\varphi(y)=\sigma(y)$ $(x\neq y)$，且 $I(A)(\varphi)=t$，故 $\models_{(I,\varphi)} A$。

2) 充分性

因为 $\models_{(I,\varphi)} A$，所以 $I(A)(\varphi)=t$，又 $\varphi(y)=\sigma(y)$ $(x\neq y)$，则 $I(A)(\sigma[x|\varphi(x)])=t$，即 $I(\sim A)(\sigma[x|\varphi(x)])=f$，故 $I(\forall x\sim A)(\sigma)=f$，所以 $I(\exists xA)(\sigma)=t$，即 $\models_{(I,\sigma)} \exists xA$。

对于 91 题来说，需要先将量词移到括号中去进行证明。

91. 解：

1)

| | |
|---|---|
| 1. $\forall xzP(z,x)\vdash\forall zP(z,y)$ | $AS_4$ |
| 2. $\forall zP(z,y)\vdash P(y,y)$ | $AS_4$ |
| 3. $\forall xzP(z,x)\vdash P(y,y)$ | $1,2,trans$ |
| 4. $\forall xzP(z,x)\vdash\exists x\forall y(P(x,y)\supset P(y,y))$ | $3,\vee+,Gen,\exists+$ |
| 5. $\vdash\sim\forall xzP(z,x)\vee\exists x\forall y(\sim P(x,y)\vee P(y,y))$ | $4,CP$ |
| 6. $\vdash\exists x\forall y\exists z(\sim P(z,x)\vee(\sim P(x,y)\vee P(y,y)))$ | $5,\equiv sub\ iii)$ |
| 7. $\vdash\exists x\forall y\exists z(P(z,x)\wedge P(x,y)\supset P(y,y))$ | $6,\equiv sub\ iii)$ |

2)

| | |
|---|---|
| 1. $\forall xQ(x)\vdash\forall yQ(y)$ | $\alpha\beta$ |
| 2. $\forall xQ(x)\vdash\exists xP(x)\vee\forall yQ(y)$ | $2,\vee+$ |
| 3. $\vdash\sim\forall xQ(x)\vee(\exists xP(x)\vee\forall yQ(y))$ | $2,CP$ |
| 4. $\vdash\exists x\forall y(Q(x)\supset(P(x)\vee Q(y)))$ | $3,\equiv sub\ iii)$ |

92. 解：$A=p\vee\sim p$ 93. 解：$P(x)$ 94. 解：

设 $I=<D,I_0>$，$\sigma\in\sum_I$ 为解释 I 下的任意指派；

若对于任意的 $a\in D$，$I(C)(\sigma[x|a])=t$，则 $I(\forall xC)(\sigma)=t$, 所以 $I(C\supset\forall xC)(\sigma)=t$，即 $C\supset\forall xC$ 在 I 下可满足；

若存在 $a\in D$，$I(C)(\sigma[x|a])=f$，令 $\varphi=\sigma[x|a]$，则 $I(C)(\varphi)=f$，$I(\sim C)(\varphi)=t$，所以 $I(C\supset\forall xC)(\varphi)=I(\sim C\vee\forall xC)(\varphi)=t$，即 $C\supset\forall xC$ 在 I 下可满足；

综上，若 C 是任意合式公式，I 是任意解释，则 $C\supset\forall xC$ 在 I 下是可满足的。

95. 解：

必要性成立,$\models A$，根据完全性定理，$\vdash A$ 成立，根据 Gen 规则有 $\vdash\forall xA$，根据 $\vee+$ 规则 $\vdash(A\supset\forall xA)$，根据可靠性定理 $\models(A\supset\forall xA)$ 成立。

充分性不成立，$A=p\wedge\sim p$ 即为反例。

96. 解：

$$
\begin{array}{ll}
1.\ \forall xP(x)\vdash P(a) & AS_4\\
2.\ \forall xP(x)\vdash P(b) & AS_4\\
3.\ \forall xP(x)\vdash P(a)\wedge P(b) & 1,2,\wedge+\\
4.\ \vdash \forall xP(x)\supset P(a)\wedge P(b) & 3,CP\\
5.\ \vdash \exists x(P(x)\supset P(a)\wedge P(b)) & 4
\end{array}
$$

对任意项 t，取解释 $I=<\{a,b\},I_0>$，指派 $\sigma\in\sum_I$，使得 $I(P(a))=t,I(P(b))=f$ 且 $\sigma(t)=a$，则 $I(P(t)\supset P(a)\wedge P(b))=f$，即不存在项 t 使得 $\models A(t)$。

97. 解：

1) 可满足的。

若 M，N 皆为永真式，$\exists x(M\equiv N)\supset(\exists xM\supset\exists xN)$ 为有效的；

令 $M=\forall y(x\times y=0),N=p\wedge\sim p$，则 $\exists M\equiv N$ 为 t，$\exists xM$ 为 t，$\exists xN$ 为 f，故 $\exists x(M\equiv V)\supset(\exists M\equiv\exists N)$ 为 f。

2) 有效的

$$
\begin{array}{ll}
1.\ \forall x(M\equiv N),\forall xM\vdash M,M\supset N & \in,AS_4,\wedge-\\
2.\ \forall x(M\equiv N),\forall xM\vdash \forall xN & 1,\overline{MP},Gen\\
3.\ \forall x(M\equiv N)\vdash \forall xM\supset\forall xN & 2,CP\\
4.\ \forall x(M\equiv N)\vdash \forall xN\supset\forall xM & \text{同理}\\
5.\ \vdash \forall x(M\equiv N)\supset(\forall xM\equiv\forall xN) & 3,4,\wedge+,CP
\end{array}
$$

98. 解：

以下的解法对题目做了稍微的修改：$A=\exists z(\exists x\forall yP(x,y,z)\supset\exists WQ(w,z))$。
A 的前束范式为 $\exists z\forall x\exists x\exists w(P(x,y,z)\supset Q(w,z))$
B 的前束范式为 $\exists z\exists y\forall x\exists w(P(x,y,z)\supset Q(w,z))$
C 的前束范式为 $\exists z\exists y\forall x\exists w(P(x,y,z)\supset Q(w,z))$

故 $B\equiv C,B\supset A,C\supset A$ 为有效的，下面对 $B\supset A$ 进行简要的证明：
设 $D=\forall x\exists x\exists w(P(x,y,z)\supset Q(w,z)),E=\exists y\forall x\exists w(P(x,y,z)\supset Q(w,z))$

$$
\begin{array}{ll}
1.\ \vdash E\supset D & \\
2.\ \vdash\sim D\supset\sim E & 1,\supset\sim\\
3.\ \forall z\sim D\vdash\sim D & AS_4\\
4.\ \forall z\sim D\vdash\forall z\sim E & 2,3,\overline{MP},Gen\\
5.\ \vdash\forall z\sim D\supset\forall z\sim E & 4,CP\\
6.\ \vdash\exists zE\supset\exists zD & 5,\supset\sim\\
7.\ \vdash B\supset A & 6
\end{array}
$$

99. 解:

有效的。

$$\begin{array}{ll} 1.\ \exists xP(x)\supset\forall xQ(x), P(x)\vdash Q(x) & \in,\exists+,\overline{MP},AS_4 \\ 2.\ \vdash\exists xP(x)\supset\forall xQ(x)\supset\forall x(P(x)\supset Q(x)) & 1,CP,Gen,CP \end{array}$$

100. 解:

不是有效的，令解释 $I=<N,J_0>$，其中 N 表示自然数集，$Q(x)$、$P(x)$ 在解释 I 和指派 $\sigma\in\sum_I$ 下都为 “x 是奇数”，显然 $I(\forall x(P(x)\supset Q(x))\supset(\exists xP(x)\supset\forall xQ(x)))(\sigma)=f$。

101. 解:

不是有效的，令解释 $I=<N,J_0>$，其中 N 表示自然数集，$Q(x)$、$P(x)$ 在解释 I 和指派 $\sigma\in\sum_I$ 下都为 “x 是奇数”、“x 是偶数”，显然 $I(\forall x(P(x)\supset Q(x))\equiv(\forall xP(x)\supset\exists xQ(x)))(\sigma)=f$。

102. 解:

不是有效的，由 84 题知 $\exists x\forall y(P(x)\equiv P(y))\equiv(\exists xP(x)\equiv\forall yP(y))$，显然 $\exists xP(x)\equiv\forall yP(y)$ 不是有效的，故 $\exists x\forall y(P(x)\equiv P(y))$ 也不是有效的。

103. 解:

不是有效的，令解释 $I=<N,I_0>$，其中 N 为自然数集，$R(x,y)$ 在 I 下表示为 “$\frac{x}{y}=0$”。

104. 解:

1) $I(x+y=1)(\sigma[x|1][y|1])=f$，所以 $I(\forall x\forall y(x+y=1))(\sigma)=f$，I' 下同理。

2)
- a 为任意自然数

$$\begin{aligned} &I(x+y=1)(\sigma[x|2][y|a])=f\\ &I(\sim(x+y=1))(\sigma[x|2][y|a])=t\\ &I(\forall y\sim(x+y=1))(\sigma[x|2])=t\\ &I(\sim\forall y\sim(x+y=1))(\sigma[x|2])=f\\ &I(\forall x\exists y(x+y=1))(\sigma)=f \end{aligned}$$

- a 为任意实数

$$\begin{aligned} &I(x+y=1)(\sigma[x|a][y|1-a])=t\\ &I(\sim(x+y=1))(\sigma[x|a][y|1-a])=f\\ &I(\forall y\sim(x+y=1))(\sigma[x|a])=f\\ &I(\sim\forall y\sim(x+y=1))(\sigma[x|a])=t\\ &I(\forall x\exists y(x+y=1))(\sigma)=t \end{aligned}$$

3) 设 a 为任意整数

$$
\begin{aligned}
&I(x+y=1)(\sigma[x|a][y|a+2]) = f \\
&I(\forall y(x+y=1))(\sigma[x|a]) = f \\
&I(\sim \forall y(x+y=1))(\sigma[x|a]) = t \\
&I(\forall x \sim \forall y(x+y=1))(\sigma) = t \\
&I(\exists x \sim \forall y(x+y=1))(\sigma) = f
\end{aligned}
$$

I' 下同理。

4) 有 2),3) 可直接推出

5)

$$
\begin{aligned}
&I(O(x))(\sigma[x|1]) = t \\
&I(\sim O(x))(\sigma[x|1]) = f \\
&I(\forall x \sim O(x))(\sigma) = f \\
&I(\exists x \sim O(x))(\sigma) = t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&I(O(x))(\sigma[x|2]) = f \\
&I(\forall x O(x))(\sigma) = f
\end{aligned}
$$

故 $I(\exists x O(x) \supset \forall x O(x))(\sigma) = f$

105. 解:
存在，$A = P(x) \vee \sim P(x)$ 即满足条件。

106. 解:
不一定，若 $A = B = P(x)$ 则 A,B 是协调的，若 $A =\sim B =\sim P(x)$, 则 A,B 不协调。

107. 解:
不一定成立，$M = P, N =\sim P, C = P \wedge \sim P$。

108. 解:
不一定成立，$M = N = P \vee \sim P, C = (P \vee \sim P) \wedge (\sim (P \vee \sim P))$。

110. 解:
不一定成立，令 $A =\sim \forall x P(x)$，则 $A' =\sim \exists x P(x)$，则 $\vdash A \supset A'$ 不成立。

111. 解：定理 3.7.6，也可根据定义 2.4.1 进行证明。

112. 解：同 111 题。

113. 解：

可由逻辑结果的定理直接推出

1) 成立

2) 不成立

122. 解：

$$1.\ \vdash \forall x(A \supset B) \equiv$$