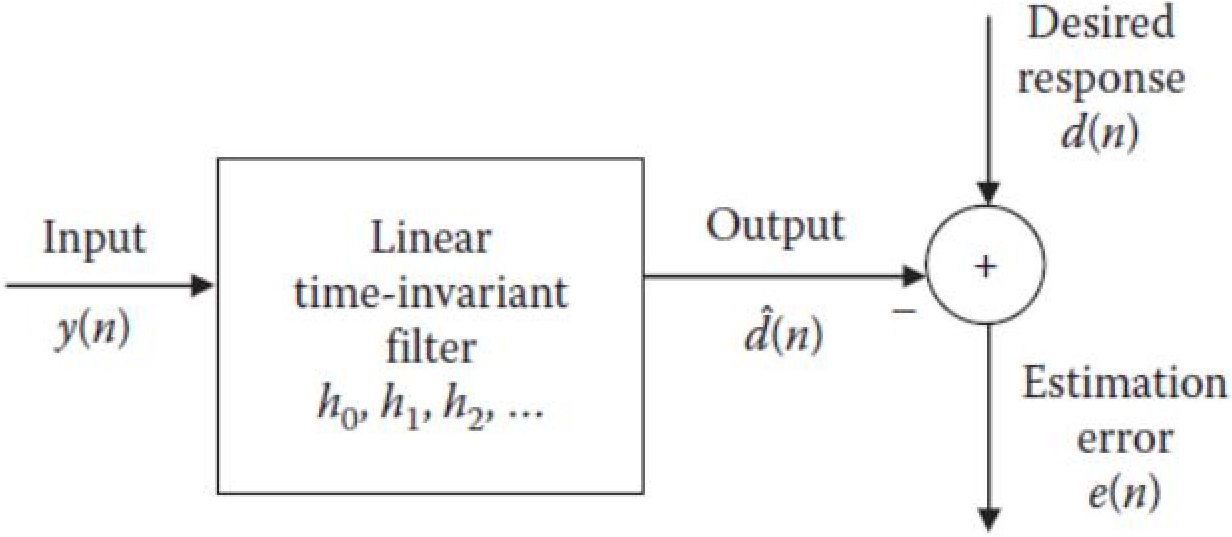
维纳滤波

主讲人：码大虾

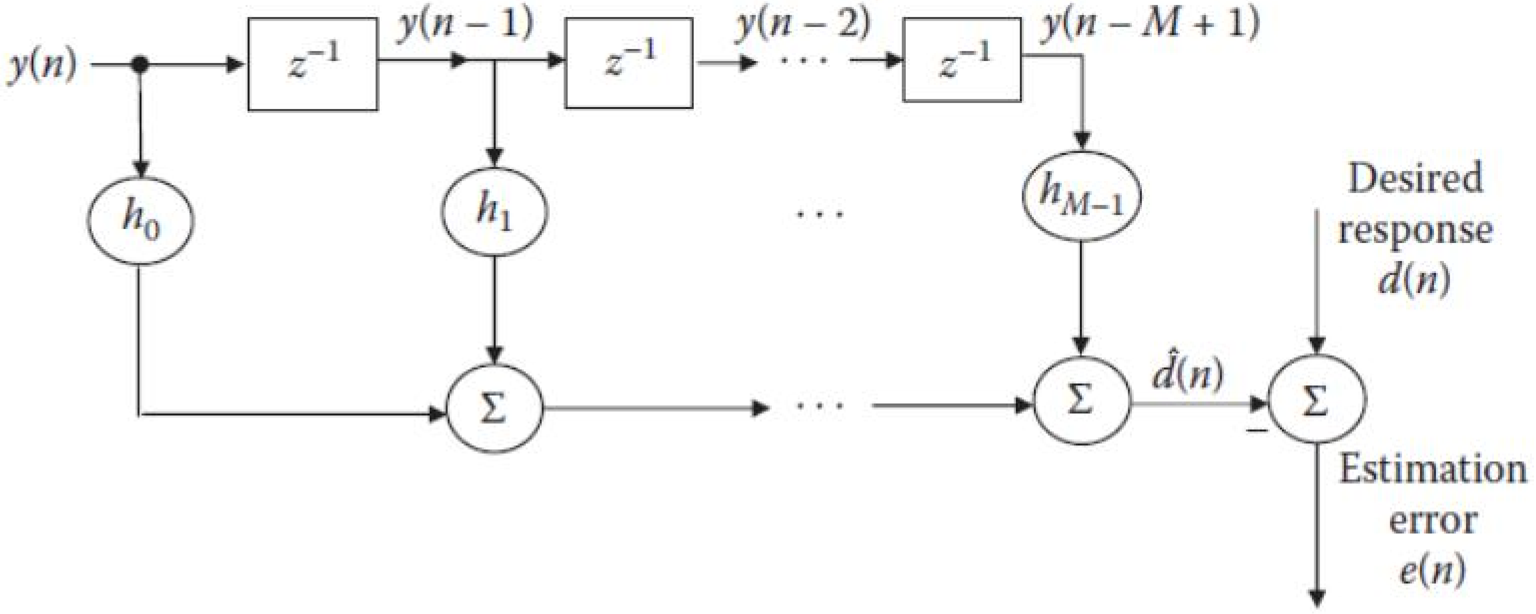
维纳滤波基本原理

- 谱减法认为纯净语音信号可以简单的通过从带噪语音谱中减去噪声谱得到，这种方式并不是通过最优的方式计算得到的。维纳滤波通过对数学上易于处理的一种误差准则，最优化均方误差来计算得到增强信号，具体实现框图如下所示。



维纳滤波

- fir通过最小化误差e(n)可以得到最优滤波器系数，该最优滤波器称为维纳滤波器。



- 其中

$$\hat{d}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h_k y(n-k),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

时域维纳滤波

- 根据不同域处理，维纳滤波器可以分为时域维纳滤波器和频域维纳滤波器。

- 时域维纳滤波器

  在时域最小化误差函数：

$$e(n) = d(n) - \hat{d}(n)$$
$$= d(n) - \mathbf{h}^T \mathbf{y}$$

其中：$h^T = [h_0, h_1, h_2, ..., h_{M-1}]$ 为滤波器系数向量

$y^T = [y(n), y(n-1), y(n-2), ..., y(n-M+1)]$ 为包含过去M个样本的输入向量

时域维纳滤波

- 最小化e(n)的均方误差即对应最优滤波器，该最优滤波器即为维纳滤波器；具体推导如下：

$$J = E[e^2(n)] = E(d(n) - \mathbf{h}^T \mathbf{y})^2$$

$$= E[d^2(n)] - 2\mathbf{h}^T E[\mathbf{y} d(n)] + \mathbf{h}^T E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T]\mathbf{h}$$

$$= E[d^2(n)] - 2\mathbf{h}^T \mathbf{r}_{yd}^{-} + \mathbf{h}^T \mathbf{R}_{yy} \mathbf{h}$$

- 上式中：$r_{yd}^{-} = E\left[yd(n)\right] = E\left[y(n)y(n-1)\ldots y(n-M+1)d(n)\right]$ 为输入信号和期望信号的互相关向量(Mx1)，$R_{yy} = E\left[yy^T\right]$ 为输入信号的自相关矩阵(MxM).

时域维纳滤波

- 为使代价函数J得到最小值，对h求偏导0：

$$\frac{dJ}{dh_k} = 0$$

- 代入代价函数J，可得：

$$\frac{dJ}{dh_k} = -2r_{yd}^{-} + 2h^T R_{yy} = 0$$

- 进一步化简：

$$R_{yy}h^* = r_{yd}^{-}$$

- 最终可得最优滤波器：

$$h^* = R_{yy}^{-1} r_{yd}^{-}$$

- 得到h*即为时域维纳滤波器系数

频域维纳滤波

- 频域维纳滤波和时域维纳滤波几乎是一致的，只是频域滤波在进行信号处理前先将滤波器转换到频域，然后在频域进行处理。由前面的框图可以得到输出信号：

$$\hat{d}(n) = h(n) * y(n)$$

- 其中*表示卷积，由卷积定理可知，时域卷积对应频域相乘：

$$\widehat{D}(w) = H(w)Y(w)$$

- 相应频域误差信号为：

$$\begin{aligned} E(w_k) &= D(w_k) - \widehat{D}(w_k) \\ &= D(w_k) - H(w_k)Y(w_k) \end{aligned}$$

频域维纳滤波

- 计算均方误差

$$
\begin{aligned}
E[|E(w_k)|^2] &= E[D(w_k) - H(w_k)Y(w_k)]^*[D(w_k) - H(w_k)Y(w_k)] \\
&= E[|D(w)|^2] - H(w_k)E[D^*(w_k)Y(w_k)] - H^*(w_k)E[Y^*(w_k)D(w_k)] + |H(w_k)|^2E[|Y(w_k)|^2]
\end{aligned}
$$

- 记 $P_{yy}(w_k) = E[|Y(w_k)|^2]$ 为y(n)的功率谱，$P_{yd}(w_k) = E[Y(w_k)D^*(w_k)]$是y(n)和d(n)的互相关功率谱，则可以将均方误差表示为：

$$
J_2 = E[|E(w_k)|^2] = E[|D(w_k)|^2] - H(w_k)P_{yd}(w_k) - H^*(w_k)P_{dy}(w_k) + |H(w_k)|^2P_{yy}(w_k)
$$

- 关于H进行求导：

$$
\begin{aligned}
\frac{dJ_2}{dH(w_k)} &= H^*(w_k)P_{yy}(w_k) - P_{yd}(w_k) \\
&= [H(w_k)P_{yy}(w_k) - P_{dy}(w_k)] = 0
\end{aligned}
$$

频域维纳滤波

- 进一步化简可得：$H(w_k) = \frac{P_{dy}(w_k)}{P_{yy}(w_k)}$
- $H(w_k)$即为频域的维纳滤波器系数，且一般为复数值。

维纳滤波降噪

- 由于传统维纳滤波降噪算法大多是基于频域实现的，这里主要讲解频域维纳滤波降噪的实现。通过前面频域维纳滤波推导可知：

$$H(w_k) = \frac{P_{dy}(w_k)}{P_{yy}(w_k)}$$

- 分析维纳滤波解可知，只要求出$P_{dy}(w_k)$和$P_{yy}(w_k)$即可求得维纳滤波器系数。

$$\begin{aligned} P_{dy}(\omega_k) &= E[X(\omega_k)\{X(\omega_k)+N(\omega_k)\}^*] \\ &= E[X(\omega_k)X^*(\omega_k)]+E[X(\omega_k)N^*(\omega_k)] \\ &= P_{xx}(\omega_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{yy}(\omega_k) &= E[\{X(\omega_k)+N(\omega_k)\}\{X(\omega_k)+N(\omega_k)\}^*] \\ &= E[X(\omega_k)X^*(\omega_k)]+E[N(\omega_k)N^*(\omega_k)]+E[X(\omega_k)N^*(\omega_k)] \\ &\quad +E[N(\omega_k)X^*(\omega_k)] = P_{xx}(\omega_k)+P_{nn}(\omega_k) \end{aligned}$$

维纳滤波降噪

- 代入$P_{dy}(w_k)$和$P_{yy}(w_k)$求得结果可得：

$$H(\omega_k) = \frac{P_{xx}(\omega_k)}{P_{xx}(\omega_k) + P_{nn}(\omega_k)}$$

- 定义先验信噪比：

$$\xi_k \triangleq \frac{P_{xx}(\omega_k)}{P_{nn}(\omega_k)} \qquad \gamma_k = \frac{P_{yy}(w_k)}{P_{nn}(w_k)}$$

- 将先验信噪比代入$H(w_k)$有：

$$H(\omega_k) = \frac{\xi_k}{\xi_k + 1}$$

维纳滤波变体

$$H(\omega_k)=\left(\frac{P_{xx}(\omega_k)}{P_{xx}(\omega_k)+aP_{nn}(\omega_k)}\right)^{\beta}$$

$$g(k)=\frac{P_{xx}(\omega_k)}{P_{xx}(\omega_k)+\mu_k P_{dd}(\omega_k)}$$

$$=\frac{\xi_k}{\xi_k+\mu_k}$$