Pitkän matematiikan kertaus

Jimi Käyrä

1. kurssi: Luvut ja lukujonot

1. **a)** Laske $1\frac{2}{3} : 2\frac{1}{2}$.

b) Sievennä lauseke $\frac{2^{100}}{4^{50}}$.

c) Määritä luvun a vastaluvun ja luvun b^{-1} käänteisluvun tulo.

d) Osoita, että luvut $\sqrt{2}$ ja $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ovat toistensa käänteislukuja.

2. Määritä luku a siten, että yhtälö $ax-3x+3a+1=0$ ei toteudu millään x:n reaalilukuarvolla.

3. Ratkaise yhtälöt ja epäyhtälö.

a) $\frac{3x}{4}+\frac{x}{3}=1$

b) $2^{4x}=16$

c) $4\cdot 2^{x}=\frac{1}{32}$

d) $2\,(x-1)-3\,(x+1)\leq 1$

4. Tuoreissa omenissa on 4 % sokeria ja 80 % vettä. Omenat kuivatetaan siten, että niiden uusi vesipitoisuus on 10 %. Mikä on kuivien omenoiden sokeriprosentti?

5. Vuokra muodostaa 5 % opiskelijan kuukausimenoista. Vuokraa korotetaan 2 %.

a) Kuinka monta prosenttiyksikköä vuokran osuus kuukausimenoista kasvaa?

b) Kuinka monta prosenttia opiskelijan on pienennettävä muita menojaan, jotta kokonaismenot pysyvät samoina?

6. **a)** Määrittele *aritmeettinen jono* matemaattisesti.

b) Määritä vakio x siten, että jono $x, 2x-1, 3x, ...$ on aritmeettinen.

7. Aritmeettiselle jonolle (a_n) pätee $a_2=4$ ja $a_5=10$. Määritä S_{100}.

8. Bakteeriviljelmässä oli 2 000 bakteeria kello 13.00. Bakteerien määrä kasvaa 3,5 % minuutin välein. Mihin kellonaikaan mennessä bakteerien määrä ylittää miljoonan rajan?

9. Keksi rekursiivinen sääntö jonon $1, 2, 4, 7, 11, ...$ yleiselle jäsenelle.

10. Määritä $\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{2^n}$.

2. kurssi: Polynomifunktiot- ja yhtälöt

11. Määritellään polynomit $P(x) = x - 1$ ja $Q(x) = x^2 + 1$.

a) Määritä $P(x) - Q(x)$.

b) Laske $P(x) \cdot Q(x)$.

c) Sievennä lauseke $P(x)^2$.

12. **a)** Miten neliöjuuri määritellään?

b) Tutki, onko $\sqrt{4 - 4\sqrt{5}} = 2(1 - \sqrt{5})$.

c) Sievennä lauseke $\sqrt{(1 - 2\pi)^2} + \sqrt{8}$.

13. Jaa polynomi mahdollisimman matalaa astetta oleviin tekijöihin.

a) $4x^2 - 16$

b) $x^3 - x^2 + 3x - 3$

c) $4x^2 - 4x + 1$

14. Supista murtolauseke $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 4}$.

15. Ratkaise yhtälö ja epäyhtälöt.

a) $x^3 + 0,008 = 0$

b) $2x^2 - x \geq 3$

c) $x^3 - x < 0$

16. Toisen asteen polynomi $f(x) = 2ax^2 + x - 1$ on jaollinen binomilla $x - 1$. Määritä polynomin nollakohdat.

17. Tarkastellaan funktiota $f(x) = tx^3 + 2x^2 + x$.

a) Määritä funktion nollakohdat, kun $t = 1$.

b) Määritä t siten, että funktiolla on kolme eri suurta nollakohtaa.

18. Määritä vakio a siten, että funktioiden $f(x) = ax^2 + 4x - 1$ ja $g(x) = x^2 + x - a$ kuvaajat sivuavat toisiaan, ts. niillä on yksi yhteinen piste.

19. Koirille rakennetaan suorakulmion muotoinen aitaus siten, että yhtenä sivuna on talon seinä. Aitamateriaalia on käytettävissä enintään 60 m ja aitauksen pinta-alan on oltava 100 m^2. Määritä aitauksen kaikki mahdolliset mitat.

20. Erään tilaston mukaan vuonna 1995 Internetin käyttäjiä oli 0,4 % maailman väestöstä. Vuonna 2017 vastaava tunnusluku oli 49,6 %. Kuinka suuri oli Internetin käyttäjämäärän keskimääräinen vuosittainen kasvuprosentti tällä aikavälillä? Maailman väestö kasvoi noin 30 % kyseisellä aikavälillä.

21. Reaaliluku on *algebrallinen*, jos se on jonkin kokonaislukukertoimisen polynomin nollakohta. Tällaiset polynomit ovat muotoa

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n,$$

kun polynomin asteluku on $n = 1, 2, 3, ...$ ja kertoimet $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ovat kokonaislukuja. Osoita, että luku x on algebrallinen johtamalla jonkin sopivan polynomin lauseke, kun

a) $x = \frac{2}{3}$

b) $x = \sqrt{3}$

c) $x = 2 + \sqrt{3}$

d) $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. *(yo s16)*

3. kurssi: Geometria

22. **a)** Kolmion sivujen pituudet ovat 2, $\sqrt{10}$ ja $2\sqrt{2}$. Onko kolmio suorakulmainen?

b) Kolmion pinta-ala on 2 cm^2, ja sen vierekkäisten sivujen pituudet ovat 2 cm ja 3 cm. Kuinka suuri on näiden sivujen välinen kulma?

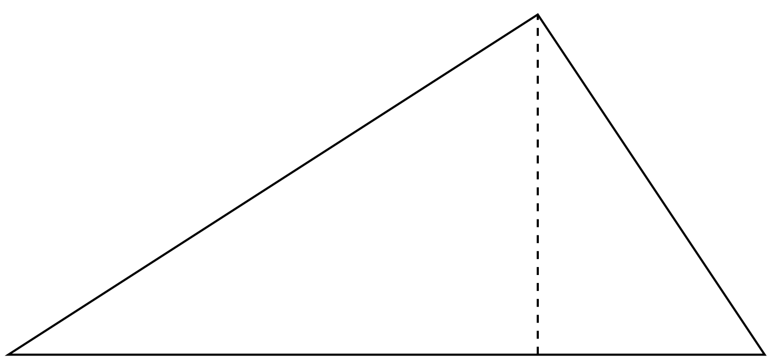
23. Lukua π voidaan approksimoida asettamalla ympyrän sisään säännöllinen monikulmio, jonka kärjet ovat ympyrän kehällä. Tällöin likiarvo saadaan monikulmion piirin ja ympyrän säteen suhteena. Kuinka monen desimaalin tarkkuudella saadaan luvun π arvo, kun sitä approksimoidaan säännöllisellä 96-kulmiolla?

24. Kolme euron kolikkoa asetetaan sivuamaan toisiaan. Laske kolikkojen väliin jäävän alueen pinta-ala, kun euron kolikon halkaisija on 23,25 mm.

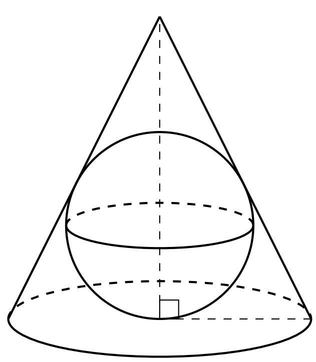
25. Osoita, että säännöllisen n-kulmion kulmien summa on $(n-2)\cdot 180°$.

26. Täysin pyöreän geenimanipuloidun omenan säde on 5,0 cm. Omenan läpi porataan sen keskeltä kulkeva reikä, jonka säde on 1,0 cm. Kuinka monta prosenttia omenan tilavuudesta tällöin häviää? Anna vastaus prosenttiyksikön kymmenesosan tarkkuudella. *(yo s15)*

27. Laske kolmion ABC pinta-alan tarkka arvo.



28. Ympyräkartion pohjan säde on 1 ja korkeus 2. Sen sisään asetetaan pallo, joka sivuaa kartion pohjaa ja vaippaa. Määritä pallon säde.



29. Paikat A ja B sijaitsevat molemmat leveyspiirillä 50°, ja niiden pituusasteiden erotus on 20°. Mikä on paikkojen välinen etäisyys? Entä kuinka pitkä olisi paikasta A paikkaan B porattu suora tunneli?

30. CH_4-molekyylin neljä vetyatomia ovat säännöllisen tetraedrin kärjissä, ja hiiliatomi on tetraedrin korkeusjanalla yhtä etäällä kaikista vetyatomeista. Määritä metaanimolekyylin sidoskulma, ts. kahdesta vetyatomista hiiliatomiin vedettyjen janojen välinen kulma.
(Vihje: Korkeusjana leikkaa tetraedrin pohjan sen painopisteessä.)

31. Kuinka kauas on mahdollista nähdä 1 km korkeasta tornista? Maapallon säde on 6 370 km.

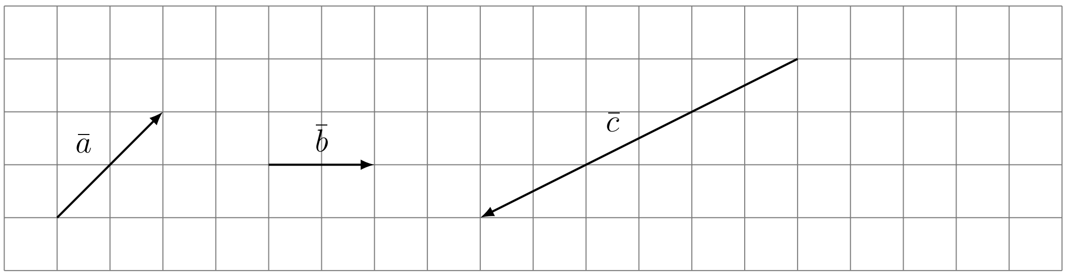
32. Vesisäiliön, jonka mitat on ilmoitettu kuviossa, veden korkeudeksi mitattiin 10 cm. Kuinka paljon säiliössä on vettä?

4. kurssi: Vektorit

33. Kuviossa on esitetty vektorit $\bar{a}, \bar{b}$ ja $\bar{c}$.

a) Piirrä vektorit $\bar{a} - \bar{b}$ ja $2\bar{a} + \bar{b}$.

b) Jaa vektori $\bar{c}$ vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ suuntaisiin komponentteihin piirtämällä.



34. Selitä käsite ja anna esimerkki.

a) paikkavektori

b) tason vektoriyhtälö

c) komponenttiesityksen yksikäsitteisyys

d) vektorin $\bar{a}$ suuntainen yksikkövektori

35. Olkoot vektorit $\bar{a} = 10\bar{i} + 3\bar{j}$ ja $\bar{b} = 3\bar{i} + t\bar{j}$, $t \in \mathbb{R}$. Määritä t siten, että

a) vektorit ovat yhtä pitkät,

b) vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan,

c) vektorit ovat yhdensuuntaiset. Ovatko ne tällöin samansuuntaiset vai vastakkaissuuntaiset?

36. Origosta O alkava vektori $\overline{OP}$ on vektorin $3\bar{i} + \bar{j}$ suuntainen, ja sen kärki P on pisteiden $A = (1, 2)$ ja $B = (7, 1)$ yhdysjanalla. Missä suhteessa piste P jakaa janan AB? *(yo s04)*

37. Vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ ovat vastakkaissuuntaiset. Olkoon $\bar{a} = \frac{3}{2}\bar{i} - 2\bar{j}$ ja olkoon vektorin $\bar{b}$ pituus 5. Määritä $\bar{b}$. Mikä on loppupiste, kun $\bar{b}$ asetetaan alkamaan pisteestä $(4, 3)$? *(yo k01)*

38. Kolmiolla ABC on sivuvektorit $\overline{AB} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$ ja $\overline{AC} = 2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$.

a) Piirä kolmio xyz-koordinaatistoon.

b) Määritä kolmion suurin kulma ja pinta-ala.

39. Olkoon $|\bar{a}| = 1$ ja $|\bar{b}| = \sqrt{2}$ ja $\bar{a} \cdot \bar{b} = \frac{1}{2}$. Laske vektorien $\bar{a} + \bar{b}$ ja $\bar{a} - \bar{b}$ välinen kulma.

40. Suoraviivaisesti lentävä lentokone kulkee pisteiden $A = (60, 50, 40)$ ja $B = (10, 5, 20)$ kautta.

a) Muodosta lentorataa kuvaavan suoran vektoriyhtälö.

b) Missä pisteessä kone koskettaa xy-tasoa?

c) Kuinka suuressa kulmassa kone kohtaa xy-tason?

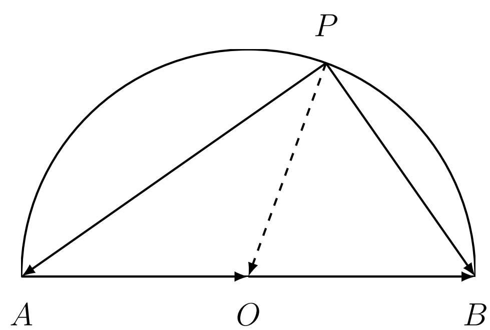
41. Taso kulkee origon ja pisteiden $(5,4,3)$ sekä $(10,2,5)$ kautta. Määritä tason yhtälö normaalimuodossa.

42. Taso sisältää suoran $\begin{cases} x = 2t \\ y = t+1 \\ z = 3t-1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ ja pisteen $(1,2,3)$.

a) Määritä tason yhtälö parametrimuodossa.

b) Mikä on origon etäisyys tasosta?

43. Osoita, että puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora. *(Ohje: Lausu jännevektorit muiden vektoreiden avulla ja hyödynnä pistetulon ominaisuuksia.)*



5. kurssi: Analyyttinen geometria

44. Ratkaise yhtälö ja epäyhtälöt.

a) $|2x - 1| = 21$

b) $|x - 1| \leq 100$

c) $|3x + 1| > |x - 1|$

45. Pistejoukko koostuu pisteistä, joiden etäisyys origosta on kaksinkertainen verrattuna niiden etäisyyteen pisteestä $(1, 2)$. Määritä pistejoukon yhtälö ja tutki, kuuluuko piste $(4, 5)$ pistejoukkoon.

46. Määritä pisteiden $A = (1, 1)$ ja $B = (2, 3)$ välisen janan keskinormaalin yhtälö yleisessä muodossa.

47. Tarkastellaan suoraa $y = ax - 1$ parametrin $a \in \mathbb{R}$ eri arvoilla.

a) Määritä a siten, että suora on yhdensuuntainen suoran $2x + 3y - 2 = 0$ kanssa. Mitkä ovat tällöin suorien suuntakulmat?

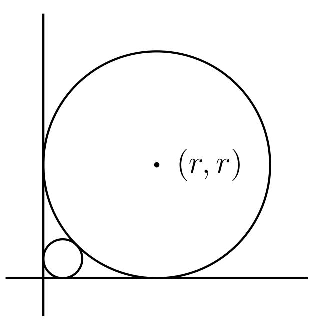
b) Kuinka suuri on a-kohdan suorien välinen etäisyys?

48. Origokeskiselle ympyrälle, jonka säde on 5, piirretään tangentit pisteestä $(6, 6)$. Kuinka suuri on tangenttien välinen kulma?

49. Ympyrä kulkee pisteen $(1, 1)$ kautta. Kuinka suuri on kehäpisteiden $(3, 4)$ ja $(4, 5)$ välisen kaaren pituus?

50. Olkoot $A = (2, -1)$ ja $B = (6, 3)$. Määritä yhtälö sille pistejoukolle, jonka pisteistä (x, y) katsottuna jana AB näkyy suorassa kulmassa. Piirrä pistejoukko. *(Vihje: Voit hyödyntää vektoreita.)*

51. Ympyrän keskipiste on (r, r) ja säde r. Asetetaan uusi ympyrä siten, että se sivuaa koordinaattiakseleita ja alkuperäisen ympyrän origonpuoleista neljänneskaarta (kuva). Määritä tämän ympyrän säde. *(yo s07, mukailtu)*



6. kurssi: Derivaatta

52. Mitä tarkoitetaan raja-arvolla? Määrää $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$.

53. Ratkaise yhtälö ja epäyhtälö.

a) $\dfrac{x}{x-1} - 2x = 0$

b) $\dfrac{4x^3 - 2x^2 - x}{x-2} \leq x$

54. Miten määritellään funktion jatkuvuus kohdassa $x = a$? Millä ehdoilla funktio on jatkuva välillä $[a, b]$? Anna esimerkki funktiosta, joka on epäjatkuva kohdassa $x = 0$.

55. Miten määritellään reaalifunktion f derivaatta? Johda määritelmän nojalla funktion $g(x) = 2x^2 + x$ derivaattafunktio.

56. Määritä funktioiden derivaatat muuttujan x suhteen.

a) $f(x) = 2x^{18} - 4x - 1$

b) $g(x) = ax^2 + bx + c$

c) $h(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 2} - \dfrac{1}{x}$

57. Tutki funktion $f(x) = |x^3 - 2x^2 - 1|$ kulkua eli määritä, millä väleillä funktio on kasvava ja millä vähenevä sekä määritä ääriarvokohdat.

58. Mittauksessa kappaleen paikalle johdettiin likimääräiskaava $x(t) = t^4 - 2t^3 + 2t$, $0 \leq t \leq 2$. Millä ajanhetkellä kappaleen kiihtyvyys on pienin?

59. Yksikkösäteisen pallon sisälle asetetaan tilavuudeltaan mahdollisimman suuri ympyrälierö. Määritä ympyrälieriön mitat.

7. kurssi: Trigonometriset funktiot

60. Määritä lausekkeiden arvot yksikköympyrän avulla.

61. Olkoon $f(t) = \sin(at)$, kun $t \in \mathbb{R}$. Millä vakion $a > 0$ arvolla lausekkeen $|f'(t)|$ suurin arvo on 2? *(yo s17)*

8. kurssi: Juuri- ja logaritmifunktiot

62. Ratkaise yhtälöt.

9. kurssi: Integraalilaskenta

63. Miten määritellään reaalifunktion f integraalifunktio?

10. kurssi: Todennäköisyys ja tilastot

64. Määritä oheisen tilastoaineiston tunnusluvut ...

11. kurssi: Lukuteoria ja todistaminen

65. Olkoot p ja q loogisia lauseita. ...

66. Osoita, että kahden parittoman luvun summa on parillinen, mutta tulo pariton.

67. Todista, että luku $\sqrt{7}$ on irrationaaliluku.

68. Olkoon luku n pariton kokonaisluku. Osoita, että tällöin $n^2 \equiv 1 \pmod 8$.

69. Etsi sellaiset kokonaislukuparit, joiden summa on 192 ja joiden suurin yhteinen tekijä on 18.

70. Osoita, että mikä tahansa kymmenjärjestelmän luku on jaollinen luvulla 9, jos sen numeroiden summa on jaollinen luvulla 9.

71. Millä numeron n arvoilla 10-järjestelmän luku $12n34n567n89n$ on jaollinen luvulla

a) 3

b) 6

c) 9?

(yo s2015)

72. Osoita induktiolla, että $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$.

73. Osoita induktiolla, että $2^n > n^2$, kun $n \in \mathbb{N}$ ja $n \geq 5$.

74. Olkoot m ja n positiivisia reaalilukuja, $n > m$. Osoita, että $\dfrac{m+1}{n+1} > \dfrac{m}{n}$.

12. kurssi: Numeerisia ja algebrallisia menetelmiä

75. Määritä yhtälön (jotain) tarkat juuret.

13. kurssi: Differentiaali- ja integraalilaskennan jatkokurssi

76. Laske integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x,\ \text{kun}\ f(x) = \begin{cases} x^4, & \text{jos } x = 0 \text{ tai } x^4 \leq 1/x^4 \\ 1/x^4, & \text{jos } 1/x^4 \leq x^4. \end{cases}$$

Ratkaisut

1. **a)** $1\frac{2}{3} : 2\frac{1}{2} = \frac{5}{3} : \frac{5}{2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{3}$

b) $\frac{2^{100}}{4^{50}} = \frac{2^{100}}{(2^2)^{50}} = \frac{2^{100}}{2^{100}} = 1$

c) Luvun a vastaluku on $-a$ ja luvun $b^{-1} = \frac{1}{b}$ käänteisluku on b, joten niiden tulo on $-ab$.

d) Lukujen tulo on $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$, joten ne ovat toistensa käänteislukuja.

2. Yhtälö saadaan muotoon $(a-3)x = -3a - 1$, josta $x = \frac{-3a-1}{a-3}$. Muuttuja x ei ole määritelty, kun $a - 3 = 0$. Yhtälö on siis identtisesti epätosi, kun $a = 3$.

3. **a)**

$$
\begin{aligned}
\frac{3x}{4} + \frac{x}{3} &= 1 \qquad | \cdot 12 \\
\frac{12 \cdot 3x}{4} + \frac{12 \cdot x}{3} &= 12 \\
9x + 4x &= 12 \\
13x &= 12 \qquad |: 13 \\
x &= \frac{12}{13}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
2^{4x} &= 16 \\
2^{4x} &= 2^4 \\
4x &= 4 \qquad |: 4 \\
x &= 1
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
4 \cdot 2^x &= \frac{1}{32} \\
2^2 \cdot 2^x &= \frac{1}{2^5} \\
2^{x+2} &= 2^{-5} \\
x + 2 &= -5 \\
x &= -7
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
2(x-1) - 3(x+1) &\leq 1 \\
2x - 2 - 3x - 3 &\leq 1 \\
-x &\leq 6 \qquad | \cdot(-1) \\
x &\geq -6
\end{aligned}
$$

4. Olkoon tuoreen omenan massa t. Kuiva-ainetta on 20 % eli $0,20t$. Olkoon kuivatun omenan massa k. Siitä kuiva-ainetta on 90 % eli $0,90k$. Kuiva-aineen määrä pysyy vakiona kuivauksessa, joten saadaan yhtälö $0,20t = 0,90k$, mistä $k = \frac{0,20}{0,90}t$. Koska sokerin määrä pysyy vakiona, on sitä myös kuivatussa omenassa $0,04t$. Siten sokerin osuus kuivatussa omenassa on $\frac{0,04t}{\frac{0,20}{0,90}t} = 18$ %.

5. Olkoot kuukausimenot x, jolloin vuokran osuus on $0,05x$.

a) Uusi vuokra on $1,02 \cdot 0,05x = 0,051x$. Siten vuokran osuus kasvoi $5,1\ \% - 5\ \% = 0,1$ prosenttiyksikköä.

b) Ennen korotusta muihin menoihin kuluu $0,95x$ ja korotuksen jälkeen $0,94x$, jotta menot pysyvät samoina. Nyt $\dfrac{0,95x}{0,94x} \approx 1,01$, joten muita menoja on pienennettävä 1 %.

6. a) Jono (a_n) on aritmeettinen, jos ja vain jos erotus $a_{n+1} - a_n$ on aina jokin luvusta n riippumaton vakio.

b) Määritelmän nojalla täytyy olla $3x - (2x-1) = (2x-1) - x$, jolla ei ole ratkaisua. Siten jono ei ole aritmeettinen millään x:n arvolla.

7. Olkoon jonon differenssi d, jolloin $a_2 + 3d = a_5$ eli $4 + 3d = 10$, mistä $d = 2$. Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = a_2 - d = 2$ ja sadas jäsen $a_{100} = 2 + 99 \cdot 2 = 200$. Summaksi saadaan $S_100 = \dfrac{100 \cdot (2+200)}{2} = 10100$.

8. Bakteerien lukumäärät muodostavat geometrisen jonon (a_n), jossa $a_1 = 2000$ ja $q = 1,035$. Olkoon n aika minuutteina. Yleiselle jäsenelle pätee $a_n = 2000 \cdot 1,035^{n-1}$. Saadaan

$$\begin{aligned}
2000 \cdot 1,035^{n-1} &= 10^6 \qquad |: 2000\\
1,035^{n-1} &= \frac{10^6}{2000} \qquad |\ \lg\\
(n-1) \cdot \lg 1,035 &= \lg \frac{10^6}{2000}\\
n &= \frac{\lg \frac{10^6}{2000}}{\lg 1,035} + 1 \approx 181,6 \text{ (min)}.
\end{aligned}$$

Koska alkuhetki merkittiin ensimmäisen minuutin kohdalle, on kulunut aika 180,6 min. Miljoonan raja on siis ylitetty kello 16.01.

9. Ensimmäiseen jäseneen lisätään 1, toiseen 2 jne. Siten rekursiiviseksi säännöksi voidaan muotoilla $a_n = a_{n-1} + (n-1) = a_{n-1} + n - 1$.

10. Olkoon $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ ja $a_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Jono on geometrinen, koska $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2^{n+1}} : \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}$. Sen ensimmäinen jäsen on $a_1 = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$. Summaksi saadaan nyt $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{2^n} = \frac{1/2 \cdot (1 - (1/2)^{100})}{1 - 1/2} = 1 - \frac{1}{2^{100}}$.

11. a) $P(x) - Q(x) = x - 1 - (x^2+1) = x - 1 - x^2 - 1 = x^2 + x - 2$

b) $P(x) \cdot Q(x) = (x-1)(x^2+1) = x^3 + x - x^2 - 1 = x^3 - x^2 + x - 1$

c) $P(x)^2 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

12. a) $4x^2 - 16 = (2x-4)(2x+4)$

b) $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

13. Osoittajan nollakohdat saadaan yhtälöstä $x^2-3x-4=0$, josta $x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$. Osoittajan tulomuodoksi saadaan $(x-4)(x+1)$. Supistettu muoto on siis $\dfrac{(x-4)(x+1)}{x-4} = x+1$.

14. **a)**

b) Määritetään vastaavan yhtälön juuret. Saadaan $2x^2-x-3=0$, josta $x = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot}}{2 \cdot 2}$ $\dfrac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} 3/2 \\ -1 \end{cases}$. Funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten se on positiivinen muualla paitsi nollakohtiensa välillä. Siten yhtälön ratkaisu on $x \leq -1 \vee x \geq \frac{3}{2}$.

c) Määritetään vastaavan yhtälön juuret. Saadaan $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0$, josta $x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1$. Merkkikaavion nojalla epäyhtälö toteutuu, kun (jotain...)

15. Polynomilla on tekijä $x-1$, joten sillä on nollakohta $x=1$. Täytyy siis olla $2a \cdot 1^2 + 1 - 1 = 0$, josta $a = 0$. Kysytty polynomi on $f(x) = x-1$, jolla on ensimmäisen asteen funktiona vain yksi nollakohta, $x = 1$.

16. **a)** Funktio saadaan nyt muotoon $f(x) = x^3+2x^2+x$, ja sen nollakohdat saadaan yhtälöstä $x^3+2x^2+x = 0 \Leftrightarrow x(x^2+2x+1) = 0$. Nyt $x = 0$ tai $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-2}{2} = -1$.

b) Nyt $f(x) = tx^3 + 2x^2 + x = x(tx^2+2x+1)$. Funktiolla on aina nollakohta $x = 0$, ja muut nollakohdat saadaan yhtälöstä $tx^2+2x+1 = 0$, jolla tulee olla kaksi eri suurta ratkaisua $\neq 0$. Täytyy olla $D > 0$ eli $(2t)^2 - 4 \cdot t \cdot 1 > 0 \Leftrightarrow 4t^2 - 4t > 0$. Vastaavan yhtälön juuret saadaan yhtälöstä $4t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow 4t(t-1) = 0$, josta $t = 0$ tai $t = 1$. Kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, joten ehto toteutuu muualla paitsi nollakohtien välissä. (kuvaaja tähän)

17. Funktioiden kuvaajat leikkaavat, kun $f(x) = g(x) \Leftrightarrow ax^2 + 4x - 1 = x^2 + x - a$. Yhtälö saadaan muotoon $(a-1)x^2 + 3x + (a-1) = 0$. Koska leikkauspisteitä tulee olla tasan yksi, täytyy olla $D = 0$ eli $3^2 - 4 \cdot (a-1) \cdot (a-1) = 0$, mistä saadaan $a = \pm\dfrac{5}{2}$.

18. Piirille saadaan ehto $a + 2h \leq 60$ ja pinta-alalle ehto $ah = 100$, josta $a = \dfrac{100}{h}$. Sijoittamalla piirin ehtoon saadaan epäyhtälö $\frac{100}{h} + 2h \leq 60$. Kerrotaan tämä luvulla h (sivun pituutena positiivinen luku), jolloin saadaan $2h^2 - 60h + 100 \leq 0$. (jatkuu)

19. **a)** Kerrotaan yhtälö $x = \frac{2}{3}$ puolittain luvulla 3, jolloin sopivaksi polynomiksi saadaan $P(x) = 3x - 2$.

b) Neliöidään yhtälö $x = \sqrt{3}$ puolittain, jolloin polynomiksi saadaan $Q(x) = x^2 - 3$.

c) Muokataan yhtälö muotoon $x - 2 = \sqrt{3}$ ja neliöidään puolittain, jolloin saadaan $(x - 2)^2 = 3$ ja lopulta polynomiksi $R(x) = x^2 - 4x + 1$.

d) Neliöidään yhtälö $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ puolittain, jolloin saadaan $x^2 = 2\sqrt{2}\sqrt{3}+5$. Tämä sievenee edelleen muotoon $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$. Neliöidään uudelleen puolittain, jolloin saadaan sopivaksi polynomiksi $S(x) = x^4 - 10x^2 + 1$.

20. **a)** Kolmio on suorakulmainen, jos ja vain jos sen sivujen pituudet toteuttavat Pythagoraan lauseen. Pisin sivu on $\sqrt{10}$, joten saadaan $2^2 + (2\sqrt{2})^2 = (\sqrt{10})^2$. Yhtälö ei toteudu, joten kolmio ei ole suorakulmainen.

b) Sijoittamalla kolmion pinta-alan trigonometriseen kaavaan $A = \frac{1}{2}\sin\alpha ab$ saadaan $\frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot 2 \cdot 3 = 2$, josta $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. Siis sivujen välinen kulma on $\alpha \approx 41,8°$ tai suplementtikulma $180° - \alpha \approx 138°$.

21. **a)** Nyt $|\bar{a}| = \sqrt{10^2 + 3^2} = \sqrt{109}$ ja $|\bar{b}| = \sqrt{3^2 + t^2} = \sqrt{t^2 + 9}$. Ehdoksi saadaan siis $\sqrt{t^2 + 9} = \sqrt{109}$, josta ratkeaa $t = \pm 10$.

b) Täytyy olla $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ eli $10 \cdot 3 + 3 \cdot t = 0$, josta ratkeaa $t = -10$.

c) On etsittävä $s \in \mathbb{R}$ siten, että $\bar{a} = s\bar{b}$. Siis $10\bar{i} + 3\bar{j} = s(3\bar{i} + t\bar{j})$, josta edelleen $10\bar{i}+3\bar{j} = 3s\bar{i}+st\bar{j}$. Saadaan yhtälöpari $\begin{cases} 3s = 10 \\ st = 3 \end{cases}$, josta $s = \frac{10}{3}$, $t = \frac{9}{10}$. Vektorit ovat siis yhdensuuntaiset, kun $t = \frac{9}{10}$. Koska $s > 0$, ovat vektorit tällöin samansuuntaiset.

22. **a)** Paikkavektori on vektori, jonka alkupiste on origossa. Esim. $\overline{OP} = 2\bar{i} + \bar{j}$.

b) Olkoot $\bar{u}$ ja $\bar{v}$ tason suuntavektoreita (kantavektoreita) ja A jokin tason tunnettu piste, jolloin tason vektoriyhtälö on muotoa $\overline{OP} = \overline{OA} + s\bar{u} + t\bar{v}$, $s, t \in \mathbb{R}$. Sijoittamalla vektoriyhtälöön jotkin s:n ja u:n arvot saadaan jonkin tason pisteen P paikkavektori $\overline{OP}$. Esim. $\overline{OP} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k} + s(2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}) + t(3\bar{i} - 4\bar{j} + 5\bar{k})$.

c) Jaetaan vektori $\bar{a}$ vektoreiden $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ suuntaisiin komponentteihin, jolloin on oltava luvut $r, s \in \mathbb{R}$ siten, että $\bar{a} = r\bar{b} + s\bar{c}$. Komponenttiesityksen yksikäsitteisyydellä tarkoitetaan sitä, että on olemassa vain yhdet tällaiset luvut r ja s. Esim. vektori $\bar{d}$ voidaan esittää muodossa $\bar{d} = \bar{i} + 2\bar{j}$, jossa tehty komponenttijako on yksikäsitteinen.

d) Vektori $\bar{a}$ ja sen suuntainen yksikkövektori $\bar{a}^0$ ovat yhdensuuntaisia, ja lisäksi yksikkövektorin $\bar{a}^0$ pituus on 1. Esim. vektorin $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j}$ pituus on $|\bar{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, jolloin sen suuntainen yksikkövektori $\bar{b}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$.

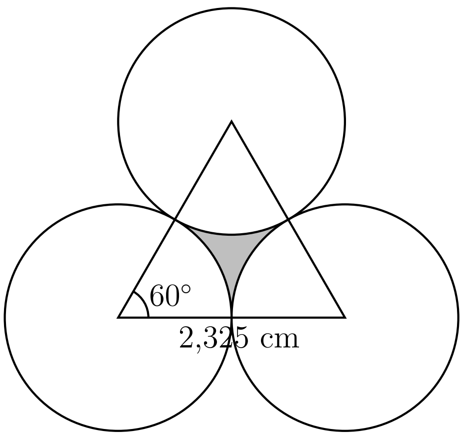
23. **a)** Suoran suuntavektoriksi käy esim. $\overline{BA} = (60 - 10)\bar{i} + (50 - 5)\bar{j} + (40 - 20)\bar{k} = 50\bar{i} + 45\bar{j} + 20\bar{k}$. Lisäksi $\overline{OA} = 60\bar{i} + 50\bar{j} + 40\bar{k}$. Tällöin suoran vektoriyhtälö on $\overline{OP} = 60\bar{i} + 50\bar{j} + 40\bar{k} + t(50\bar{i} + 45\bar{j} + 20\bar{k})$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Muodostetaan aluksi suoran parametriesitys. Sieventämällä vektoriyhtälöstä päästään muotoon $\overline{OP} = (60 + 50t)\bar{i} + (50 + 45t)\bar{j} + (40 + 2t)\bar{k}$, josta saadaan parametriesitys $\begin{cases} x = 60 + 50t \\ y = 50 + 45t \\ z = 40 + 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Kone koskettaa xy-tasoa, kun $z = 0$. Tällöin $40+2t = 0$, josta saadaan $t = -20$. Nyt saadaan $x = 60+50\cdot(-20) = -940$ ja $y = 50+45\cdot(-2) = -850$. Kysytty piste on siis $(-940, -850, 0)$.

c) Suuntavektorin projektio xy-tasolle on $\bar{a} = 60\bar{i} + 50\bar{j}$. Lentokoneen ja xy-tason välinen kulma on vektoreiden $\bar{a}$ ja $\overline{BA}$ välinen kulma. Nyt saadaan

24. Nyt $(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b}) = \bar{a}\cdot\bar{a}-\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{b}-\bar{b}\cdot\bar{b} = \bar{a}\cdot\bar{a}-\bar{b}\cdot\bar{b}$. Koska vektorin pistetulo itsensä kanssa on sen pituuden neliö, on $\bar{a}\cdot\bar{a} = 1^2 = 1$ ja $\bar{b}\cdot\bar{b} = (\sqrt{2})^2 = 2$. Siis $(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b}) = 1-2 = -1$.

25. Yhdistämällä ympyröiden keskipisteet janoilla muodostuu tasasivuinen kolmio, jonka sivuna on ympyrän halkaisija. Kolikoiden väliin jäävän alueen pinta-ala saadaan kolmion pinta-alan ja kolmen ympyräsektorin pinta-alojen erotuksena. Nyt $A_{\text{kolmio}} = \frac{(2{,}325\text{ cm})^2\cdot\sqrt{3}}{4}$ ja $A_{\text{sektorit}} = 3\cdot\frac{60°}{360°}\cdot\pi\cdot(2,325\text{ cm}/2)^2$. Kolikoiden väliin jäävän alueen pinta-ala on $A = A_{\text{kolmio}}-A_{\text{sektorit}} \approx 0,2179\text{ cm}^2$.



26. Nyt $\overline{PB} = \overline{PO}+\overline{OB}$ ja $\overline{PA} = \overline{PO}-\overline{AO}$. Koska $\overline{AO} = \overline{OB}$, voidaan merkitä $\overline{PA} = \overline{PO}-\overline{OB}$. Jännevektoreiden pistetulo on $\overline{PB}\cdot\overline{PA} = (\overline{PO}+\overline{OB})\cdot(\overline{PO}-\overline{OB}) = \overline{PO}\cdot\overline{PO}-\overline{PO}\cdot\overline{OB}+\overline{PO}\cdot\overline{OB}-\overline{OB}\cdot\overline{OB} = \overline{PO}\cdot\overline{PO}-\overline{OB}\cdot\overline{OB}$. Vektorin pistetulo itsensä kanssa on sen pituuden neliö. Koska ympyrän säteinä vektoreilla $\overline{PO}$ ja $\overline{OB}$ on sama pituus r, saadaan lopulta $\overline{PB}\cdot\overline{PA} = r^2 - r^2 = 0$, mistä kohtisuoruus seuraa.

27. Olkoon maailman väestö a vuonna 1995. Internetin käyttäjiä oli silloin $0,004a$. Vuonna 2017 maailman väestö oli $1,3a$ ja Internetin käyttäjiä $0,496\cdot 1,3a = 0,6448a$. Olkoon Internetin käyttäjien vuosittainen kasvukerroin k, jolloin saadaan $0,004a\cdot k^{22} = 0,6448a$. Tästä ratkeaa $k \approx 1,26$. Siis Internetin käyttäjien määrä on kasvanut vuosittain noin 26 %.

28. **a)** Yhtälö $|2x-1| = 21$ saadaan muotoon $2x-1 = \pm 21$, josta $x = \pm 10$. Siis $x = 10$ tai $x = -10$.

b) Epäyhtälö $|x-1| \leq 100$ saadaan muotoon $-100 \leq x-1 \leq 100$, josta $-99 \leq x \leq 101$.

c) Epäyhtälön $|3x+1| > |x-1|$ molemmat puolet ovat epänegatiivisia, joten se voidaan korottaa puolittain neliöön. Näin saadaan $(3x+1)^2 > (x-1)^2$ eli $8x^2+8x > 0 \Leftrightarrow x^2+x > 0$. Ratkaisemalla nollakohdat saadaan $x^2+x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) = 0$, josta $x = 0$ tai $x = -1$. Merkkikaavion tai kuvaajan perusteella havaitaan, että vaadittu ehto toteutuu, kun $x < -1$ tai $x > 0$.

29. Olkoon mielivaltainen pistejoukon piste (x, y), jolloin saadaan ehto $\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$. Korottamalla yhtälö puolittain neliöön saadaan $x^2+y^2 = 4[(x-1)^2+(y-2)^2]$, josta sieventämällä ja ratkaisukaavalla tai laskimella $y = \frac{1}{3}(8 \pm \sqrt{-9x^2 + 24x + 4})$. Sijoitus $(x, y) = (4, 5)$ tuottaa epätoden yhtälön, joten piste ei kuulu pistejoukkoon.

30. Pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran kulmakerroin on $k_{AB} = \frac{3-1}{2-1} = 2$. Koska keskinormaali on kohtisuorassa janaa AB vastaan, määräytyy keskinormaalin kulmakerroin ehdosta $k_{AB} \cdot k_{\text{normaali}} = -1$, josta $k_{\text{normaali}} = -\frac{1}{2}$. Janan AB keskipiste on $\left(\frac{1+2}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (1,5; 2)$. Keskinormaali kulkee tämän pisteen kautta, joten sen yhtälö saadaan muotoon ...

31. yhdensuuntaisuus blah

32. Olkoon koordinaattiakseleiden leikkauspiste $O = (0, 0)$, jolloin r-säteisen ympyrän keskipisteen etäisyys O:sta on $\sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r$. Olkoon uuden ympyrän säde R. Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan, että $\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{2}r - r - R}{\sqrt{2}r}$. Tästä ratkeaa uuden ympyrän säteeksi $R = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}r$ eli $R = (3 - 2\sqrt{2})r$.