Lineaarialgebran jatkoa

1. **a)** Oletetaan, että vektoreille $\overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{R}^n$ pätee $||\overline{v}|| = 3$, $||\overline{w}|| = 4$ ja $\overline{v} \cdot \overline{w} = -3$. Määritä $||2\overline{v} - \overline{w}||$.

b) Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ kaikki ominaisarvot ja ominaisvektorit.

2. Oletetaan, että $\overline{v}, \overline{w}, \overline{u} \in \mathbb{R}^n$ ja $\overline{w} \neq \overline{0}$. Oletetaan lisäksi, että vektori $\overline{u}$ on yhdensuuntainen vektorin $\overline{w}$ kanssa. Osoita, että $\mathrm{proj}_{\overline{w}}(\overline{v}) = \mathrm{proj}_{\overline{u}}(\overline{v})$. Tulkitse tulos geometrisesti avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

3. Merkitään $\overline{w}_1 = (1, 2, 0)$, $\overline{w}_2 = (1, 1, -1)$ ja $\overline{w}_3 = (1, 4, 2)$.

a) Kuuluuko vektori $\overline{v} = (1, 1, 0)$ aliavaruuteen $\mathrm{span}\,(\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3)$?
b) Muodostavatko vektorit $\overline{w}_1$, $\overline{w}_2$, $\overline{w}_3$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan?

4. Olkoot a, b ja c positiivisia reaalilukuja. Tetraedrin kolme kärkeä ovat koordinaattiakseleiden pisteissä $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ ja $(0, 0, c)$, ja neljäs kärki on origossa $(0, 0, 0)$. Kärkien vastaisten tetraedrin tahkojen pinta-aloja merkitään samassa järjestyksessä kirjaimilla A, B, C ja D, jossa D tarkoittaa origon vastaisen tahkon pinta-alaa.

Määritä D ristitulon avulla ja osoita, että

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2.$$