Differentiaaliyhtälöt

Laskuharjoitukset

Jimi Käyrä

Harjoitus 2

Jimi Käyrä

2*. **a)** Määritetään yleistä ratkaisua, joten oletetaan, että $y \neq 0$. Tällöin jakamalla funktiolla y saadaan muoto $y'/y = 3$. Integroimalla puolittain saadaan edelleen $\ln|y| = 3x + C$, josta seuraa, että $|y| = \exp(3x + C) = \exp(C) \cdot \exp(3x)$. Yleinen ratkaisu voidaan siis kirjoittaa muodossa $y = A \cdot \exp(3x)$, jossa $A \in \mathbf{R}$.

Alkuehdosta saadaan edelleen yhtälö $A \cdot \exp(3 \cdot 1) = 2 \iff A = 2/\exp(3)$. Näin ollen alkuarvotehtävän ratkaisuksi saadaan $y = 2/\exp(3) \cdot \exp(3x) = 2 \cdot \exp(3x - 3) = 2 \cdot \exp(3(x - 1))$.

b) Kuten edellä saadaan muoto $y'/y = -2$, josta integroimalla $\ln|y| = -2x + C$. Edelleen $|y| = \exp(-2x + C) = \exp(C) \cdot \exp(-2x)$, joka voidaan kirjoittaa muodossa $y = A \cdot \exp(-2x)$, $A \in \mathbf{R}$.

Alkuehdosta saadaan yhtälö $A \cdot \exp(-2 \cdot 1) = 1 \iff A = 1/\exp(-2) = \exp(2)$, joten alkuarvotehtävän ratkaisu on $y = \exp(2) \cdot \exp(-2x) = \exp(-2x + 2) = \exp(-2(x - 1))$.

4*. **a)** Ilmaiskoon $P(t)$ lohipopulaation koon (yksikkönä 1 kala) hetkellä t, jossa t on ilmaistu vuosina. Tällöin muutosnopeudelle voidaan kirjoittaa $P'(t) = kP(t) - a$, ts. $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = kP - a$.

Separoimalla saadaan $\dfrac{\mathrm{d}P}{kP - a} = \mathrm{d}t$ ja tästä edelleen integroimalla puolittain $\dfrac{1}{k}\ln|kP - a| = t + C \iff \ln|kP - a| = k(t + C) \iff |kP - a| = \exp(k(t + C)) = A \cdot \exp(kt)$, joka voidaan kirjoittaa muodossa $kP - a = B \cdot \exp(kt) \iff P = \dfrac{a}{k} + \dfrac{B}{k} \cdot \exp(kt)$ eli $P = \dfrac{a}{k} + D \cdot \exp(kt)$, $D \in \mathbf{R}$.

b) Tapauksessa $a = 0$ on $P(t) = D \cdot \exp(kt)$ ja populaation koko alussa D. Saadaan yhtälö $D \cdot \exp(kt) = 2D$ eli $\exp(kt) = 2$, josta kaksiintumisajalle saadaan $kt = \ln 2$ eli $t = \dfrac{\ln 2}{k}$.

c) Yleinen ratkaisu on $P(t) = \dfrac{55000}{0.2} + D \cdot \exp(0.2t) = 2.75 \cdot 10^5 + D \cdot \exp(0.2t)$, $D \in \mathbf{R}$.

d) Tasapainotila ratkaistaan yhtälöstä $kP(t) - a = 0$, josta $P(t) = a/k$.

e) Lohikannan koko alussa on $P(0) = \dfrac{a}{k} + D \cdot \exp(k \cdot 0) = \dfrac{a}{k} + D$.

Kun kannan koko alussa on suurempi kuin tasapainotila, on $a/k + D > a/k$ eli $D > 0$. Vastaavasti, kun kannan koko alussa on pienempi kuin tasapainotila, pätee $a/k + D < a/k$ eli $D < 0$.

Toisaalta derivaatta $P'(t) = kD \cdot \exp(kt)$ on negatiivinen täsmälleen silloin, kun $D < 0$ eli kun kannan koko alussa on pienempi kuin tasapainotila; tällöin $P(t)$ on aidosti vähenevä eli populaatio pienenee ajan funktiona.

Vastaavasti derivaatta $P'(t) > 0$ täsmälleen silloin, kun $D > 0$ eli kun kannan koko alussa on suurempi kuin tasapainotila; tällöin $P(t)$ on aidosti kasvava eli populaatio kasvaa.

Nämä vastaavat myös tapauksia, joissa lohikanta on puolet tasapainotilasta ja lohikanta on kaksi kertaa suurempi kuin tasapainotila.

Harjoitus 3

Jimi Käyrä

1*. Tasapainotila voidaan ratkaista yhtälöstä $\lambda - \gamma T = 0$, josta $T = \lambda/\gamma = \dfrac{5.6 \cdot 10^8}{0.0014} = 4 \cdot 10^{11}$.

Ottamalla viruskuorma huomioon saadaan differentiaaliyhtälö $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = \lambda - \gamma T - kVT = \lambda - (\gamma + kV)T$, joka voidaan kirjoittaa muotoon $\dfrac{\mathrm{d}T}{\lambda - (\gamma + kV)T} = \mathrm{d}t$. Integroimalla puolittain saadaan $-\dfrac{1}{\gamma + kV} \cdot \ln|\lambda - (\gamma + kV)T| = t + C \iff \ln|\lambda - (\gamma + kV)T| = -(\gamma + kV)(t + C)$ eli $|\lambda - (\gamma + kV)T| = \exp(-(\gamma + kV)(t + C))$.

Tämä voidaan kirjoittaa muodossa $\lambda - (\gamma + kV)T = D \cdot \exp(-t(\gamma + kV)) \iff (\gamma + kV)T = \lambda - D \cdot \exp(-t(\gamma + kV))$ eli $T = \dfrac{1}{\gamma + kV} \cdot (\lambda - D \cdot \exp(-t(\gamma + kV)))$.

Tässä alkuehto on $T(0) = 3 \cdot 10^{11}$, josta saadaan $\dfrac{\lambda - D}{\gamma + kV} = 3 \cdot 10^{11}$, ts. $\dfrac{5.6 \cdot 10^8 - D}{0.0014 + 0.2 \cdot 1.0 \cdot 10^6} = 3 \cdot 10^{11} \iff D = -59999999860000000$.

Mallille voidaan siis kirjoittaa $T(t) = \dfrac{1}{0.0014 + 0.2 \cdot 1.0 \cdot 10^6} \cdot (5.6 \cdot 10^8 + 59999999860000000 \cdot \exp(-t(0.0014 + 0.2 \cdot 1.0 \cdot 10^6))$ eli $T(t) \approx 2.8 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^{11} \cdot \exp(-2 \cdot 10^5 t)$.

4*. **a)** Olkoon peurakanta $y(t)$ kilopeuraa, jossa t on ilmaistu vuosina. Differentiaaliyhtälö on siis $y'(t) = \dfrac{y(t)}{N}(N - y(t)) - b$.

b) Kirjoitetaan yhtälö muotoon $\dfrac{\mathrm{d}y}{\frac{y}{N}(N - y) - b} = \mathrm{d}t$ ja sijoitetaan, jolloin saadaan $\dfrac{\mathrm{d}y}{\frac{y}{160}(160 - y) - 30} = \mathrm{d}t$. Tässä nimittäjän nollakohdat saadaan yhtälöstä $\dfrac{y}{160}(160 - y) - 30 = 0 \iff y - \dfrac{y^2}{160} - 30 = 0 \iff y^2 - 160y + 4800 = 0$, josta $y = 40$ tai $y = 120$.

Määrätään edelleen osamurtokehitelmä yhtälöstä $\dfrac{1}{-\frac{1}{160}(y - 40)(y - 120)} = \dfrac{A}{y - 40} + \dfrac{B}{y - 120} \iff A(y - 120) + B(y - 40) = -160$, josta $A = 2$ ja $B = -2$.

Saadaan siis yhtälö $2\left(\dfrac{1}{y - 40} - \dfrac{1}{y - 120}\right)\mathrm{d}y = \mathrm{d}t$, josta integroimalla puolittain $2(\ln|y - 40| - \ln|y - 120|) = t + C \iff \ln\left|\dfrac{y - 40}{y - 120}\right| = \dfrac{1}{2}(t + C) = \dfrac{1}{2}t + D$ eli $\left|\dfrac{y - 40}{y - 120}\right| = \exp\left(\dfrac{1}{2}t + D\right) = E \cdot \exp\left(\dfrac{1}{2}t\right)$. Edelleen voidaan kirjoittaa $\dfrac{y - 40}{y - 120} = F \cdot \exp\left(\dfrac{1}{2}t\right) \iff$

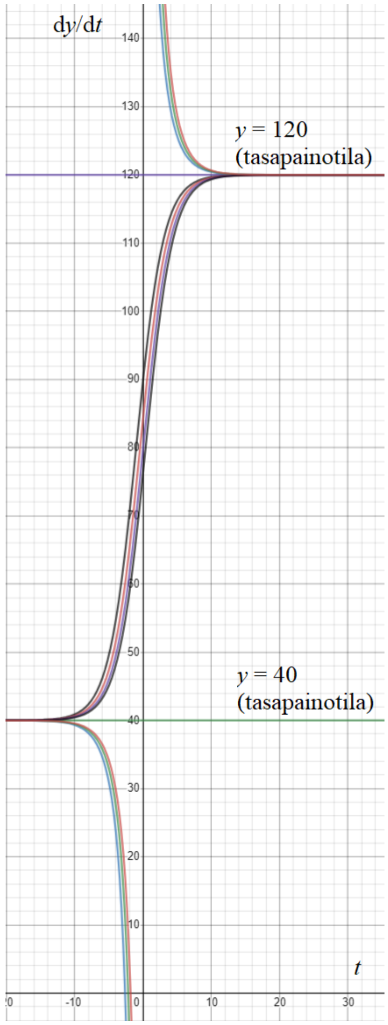
$y = 40 \cdot \dfrac{3F \cdot \exp(t/2) - 1}{F \cdot \exp(t/2) - 1}$. On oltava $y(0) = 80$ eli $40 \cdot \dfrac{3F - 1}{F - 1} = 80$, josta $F = -1$. Siispä ratkaisu on $y = 40 \cdot \dfrac{-3 \cdot \exp(t/2) - 1}{-\exp(t/2) - 1} = 40 \cdot \dfrac{3 \cdot \exp(t/2) + 1}{\exp(t/2) + 1} = 40 \cdot \dfrac{3 + \exp(-t/2)}{1 + \exp(-t/2)}$.

Pitkän ajan kuluttua on $\lim_{t\to\infty} y(t) = 40 \cdot 3 = 120$ kilopeuraa.

c) Erikoisratkaisut saadaan yhtälöstä $\dfrac{y}{N}(N - y) - b = 0 \iff \dfrac{y^2}{N} - y + b = 0$. Tästä saadaan $y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1/N \cdot b}}{2/N}$. Diskriminantti $1-4b/N$ määrää reaalisten ratkaisujen lukumäärän: ratkaisuja on kaksi, kun $1 - 4b/N > 0 \iff b < N/4$.

Merkitään nyt $f(y) = -y^2/N+y-b$, jolloin $f'(y) = -2y/N+1$. Koska $f'\left(\dfrac{1 - \sqrt{1 - 4b/N}}{2/N}\right) = -2/N \cdot \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4b/N}}{2/N} + 1 = \sqrt{1 - 4b/N} > 0$, ratkaisut eivät suppene kohti tasapainotilaa ja kyseessä on epästabiili piste.

Toisaalta $f'\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - 4b/N}}{2/N}\right) = -2/N \cdot \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4b/N}}{2/N} + 1 = -\sqrt{1 - 4b/N} < 0$, joten ratkaisut suppenevat kohti tasapainotilaa ja kyseessä on stabiili piste.



Kuvassa on esitetty tasapainotilat ja ei-vakioratkaisut b-kohdan erikoistapauksessa. Havaitaan, että läheltä kohtaa $y = 120$ alkavat ei-vakioratkaisut lähestyvät tasapainotilaa asymptoottisesti sekä ylä- että alapuolelta, joten kyseessä on stabiili tasapainotila.

Toisaalta läheltä kohtaa $y = 40$ alkavat ei-vakioratkaisut eivät lähesty tasoa $y = 40$ ylä- eikä alapuolelta, joten kyseessä on epästabiili tila.

d) Stabiilin populaation koko saadaan yhtälöstä $b = N/4$, josta $N = 4b = 4 \cdot 38 = 152$ kilopeuraa. Edellisten kohtien tapauksessa saataisiin $N = 4 \cdot 30 = 120$, joka vastaa edellisessä kohdassa havaittua stabiilia tasapainotilaa.

e) Kriittinen kaatolupien määrä on $b = N/4$. Jos stabiilin populaation koko on $N = 160$ (kilopeuraa), on kriittinen kaatolupien määrä $b = 160/4 = 40$, joka vastaa c-kohdassa havaittua epästabiilia tasapainotilaa.

Harjoitus 4

Jimi Käyrä

1*. Integroivaksi tekijäksi saadaan $p(x) = \exp\left(\int^x t^2 \, \mathrm{d}t\right) = \exp\left(\frac{1}{3}x^3\right)$. Kertomalla yhtälö puolittain tekijällä $p(x)$ saadaan $y' \cdot \exp\left(\frac{1}{3}x^3\right) + y \cdot x^2 \cdot \exp\left(\frac{1}{3}x^3\right) = x^2 \cdot \exp\left(\frac{1}{3}x^3\right)$, ts. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y \cdot \exp\left(\frac{1}{3}x^3\right)\right) = x^2 \cdot \exp\left(\frac{1}{3}x^3\right)$. Integroimalla puolittain saadaan edelleen $y \cdot \exp\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \exp\left(\frac{1}{3}x^3\right) + C$ eli $y = 1 + C \cdot \exp\left(-\frac{1}{3}x^3\right)$.

Edelleen alkuehdosta $y(0) = 2$ seuraa yhtälö $1 + C = 2 \iff C = 1$. Näin ollen alkuarvotehtävän ratkaisu on $y = 1 + \exp\left(-\frac{1}{3}x^3\right)$.

Ratkaisusta saadaan $y' = -x^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{3}x^3\right)$. Differentiaaliyhtälön vasemmaksi puoleksi saadaan siis sijoittamalla (varsin triviaalisti...) $-x^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{3}x^3\right) + x^2 \cdot \left(1 + \exp\left(-\frac{1}{3}x^3\right)\right) = x^2$, joten saatu y toteuttaa yhtälön. Edelleen $y(0) = 1 + \exp\left(-\frac{1}{3} \cdot 0^3\right) = 1 + 1 = 2$, joten myös alkuehto toteutuu.

2*. Kirjoitetaan yhtälö muotoon $y' - 4xy = 3x$. Integroivaksi tekijäksi saadaan $p(x) = \exp\left(\int^x -4t \, \mathrm{d}t\right) = \exp(-2x^2)$. Kertomalla tekijällä $p(x)$ saadaan $y' \cdot \exp(-2x^2) - y \cdot 4x \cdot \exp(-2x^2) = 3x \cdot \exp(-2x^2)$ eli $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y \cdot \exp(-2x^2)) = -\frac{3}{4} \cdot (-4x) \cdot \exp(-2x^2)$. Integroimalla yhtälö puolittain saadaan $y \cdot \exp(-2x^2) = -\frac{3}{4} \cdot \exp(-2x^2) + C$ eli $y = -\frac{3}{4} + C \cdot \exp(2x^2)$, $C \in \mathbf{R}$.

Edelleen yksityisratkaisulle on oltava $y(0) = 5/4$, mistä seuraa yhtälö $-3/4 + C = 5/4$ eli $C = 2$. Yksityisratkaisu on siis $y = -\frac{3}{4} + 2 \cdot \exp(2x^2)$.

Harjoitus 5

Jimi Käyrä

2*. Tehdään yrite $y = \mathrm{e}^{kx}$, jolloin $y' = k\mathrm{e}^{kx}$ ja $y'' = k^2\mathrm{e}^{kx}$. Sijoittamalla saadaan $k^2\mathrm{e}^{kx} + 2k\mathrm{e}^{kx} + 10\mathrm{e}^{kx} = 0 \iff \mathrm{e}^{kx}(k^2 + 2k + 10) = 0$. Karakteristisen yhtälön $k^2 + 2k + 10 = 0$ ratkaisuiksi saadaan $k = -1 - 3\mathrm{i}$ ja $k = -1 + 3\mathrm{i}$.

Yleinen ratkaisu on siis $y = \mathrm{e}^{-x}(A\cos(3x) + B\sin(3x))$, $A, B \in \mathbf{R}$.

On oltava $y(0) = 3$ eli $A = 3$. Toisaalta tällöin $y' = -\mathrm{e}^{-x}(3\cos(3x) + B\sin(3x)) + \mathrm{e}^{-x}(-9\sin(3x) + 3B\cos(3x)) = \mathrm{e}^{-x}((-9 - B)\sin(3x) + (3B - 3)\cos(3x))$ ja $y'(0) = 3B - 3$. On oltava $y'(0) = 0 \iff B = 1$.

Siispä alkuarvotehtävän ratkaisu on $y = \mathrm{e}^{-x}(3\cos(3x) + \sin(3x))$.

3*. Karakteristisesta yhtälöstä $k^2 - 3k - 4 = 0$ saadaan $k = -1$ ja $k = 4$, joten yleinen ratkaisu on $y = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{4x}$, $A, B \in \mathbf{R}$.

On oltava $y(0) = 2$, josta saadaan yhtälö $A + B = 2$. Rajalla termille $A\mathrm{e}^{-x}$ pätee $\lim_{x\to\infty} A\mathrm{e}^{-x} = 0$; on oltava $B = 0$, jotta myös $\lim_{x\to\infty} B\mathrm{e}^{4x} = 0$. Tällöin $A = 2 - B = 2$.

Yksityisratkaisu on siis $y = 2\mathrm{e}^{-x}$.

Harjoitus 6

Jimi Käyrä

1*. Käytetään approksimaatiolla $\sin\theta \approx \theta$ saatua yhtälöä $\theta''(t) + \dfrac{g}{L}\theta(t) = 0$. Yritteestä $\theta = \mathrm{e}^{kx}$ saadaan $\theta'' = k^2\mathrm{e}^{kx}$ ja edelleen sijoittamalla $k^2\mathrm{e}^{kx} + \dfrac{g}{L}\mathrm{e}^{kx} = 0 \iff \mathrm{e}^{kx}(k^2 + g/L) = 0$. Karakteristisen yhtälön $k^2 + g/L = 0$ ratkaisut ovat $k = -\mathrm{i}\sqrt{g/L}$ ja $k = \mathrm{i}\sqrt{g/L}$.

Tällöin yleinen ratkaisu on $\theta(t) = \mathrm{e}^{0\cdot t}(A\sin(\sqrt{g/L}\cdot t) + B\cos(\sqrt{g/L}\cdot t)) = A\sin(\sqrt{g/L}\cdot t) + B\cos(\sqrt{g/L}\cdot t)$, $A, B \in \mathbf{R}$.

Merkitään nyt yksiköittä $q = \sqrt{g/L} = \sqrt{9.81/2} = \sqrt{4.905}$, jolloin tarkastellaan yleistä ratkaisua $\theta(t) = A\sin(qt) + B\cos(qt)$. Kuvataan A ja B koordinaatiston pisteiksi (A, B), jolloin voidaan kirjoittaa napakoordinaattiesitys $A = r\cos\gamma$, $B = r\sin\gamma$. Kirjoitetaan edelleen $\theta(t) = r\cos\gamma\sin(qt) + r\sin\gamma\cos(qt) = r(\cos\gamma\sin(qt) + \sin\gamma\cos(qt))$, ts. $\theta(t) = r\sin(qt+\gamma)$.

Tästä esityksestä havaitaan, että yleinen ratkaisu kuvaa siniaaltoa, jonka amplitudi on $r = \sqrt{A^2 + B^2}$, perusjakso $2\pi/q$ ja vaihe γ.

Koska $\dfrac{60}{2\pi/q} = \dfrac{60}{2\pi/\sqrt{4.905}} \approx 21.15$, sisältyy minuutin (60 s) mittaiseen ajanjaksoon 21 kokonaista jaksoa, ts. 42 kokonaista puolijaksoa eli 42 nollakohtaa. Minuutin aikana heiluri ohittaa siis tasapainotilansa 42 kertaa.

2*. Karakteristiseksi yhtälöksi saadaan $k^2 + \omega^2 = 0$, josta $k = -\mathrm{i}\omega$ tai $k = \mathrm{i}\omega$.

Tutkitaan kuitenkin aluksi tapaus $\omega = 0$. Tällöin differentiaaliyhtälö pelkistyy muotoon $y'' = 0$, jonka ratkaisuksi saadaan $y = Ax + B$. Ei ole kuitenkaan olemassa kertoimia A ja B, joille $y(0) = y(1) = 0$, mutta yleisesti $y(x) \neq 0$. Siispä oletetaankin, että $\omega \neq 0$.

Karakteristisen yhtälön nojalla saadaan yleinen ratkaisu $y(x) = \mathrm{e}^{0\cdot x}(A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$, $A, B \in \mathbf{R}$. On oltava $y(0) = 0$ eli $B = 0$. Tämä rajoittaa ratkaisuksi $y(x) = A\sin(\omega x)$. Lisäksi on oltava $y(1) = 0$ eli $A\sin\omega = 0$. Ratkaisu on oltava nollasta eroava, joten $A \neq 0$. Siis täytyy olla $\sin\omega = 0 \iff \omega = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. Täytyy myös olla $n \neq 0$, jotta ratkaisu ei ole vakiofunktio.

Vastaavat ratkaisufunktiot ovat $y(x) = A\sin(n\pi x)$, $A \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, $n \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$.
Toisaalta, jos $n > 0$, niin parittomuuden nojalla $A\sin(-n\pi x) = -A\sin(n\pi x) = B\sin(n\pi x)$. Voitaisiin siis rajata $n = 1, 2, \ldots$, jos sallitaan edelleen $B \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$.

Harjoitus 7

LaTeX
Jimi Käyrä

2*. Ratkaistaan ensin vastaava homogeeniyhtälö $4y'' + 4y' + y = 0$. Karakteristiseksi yhtälöksi saadaan $4k^2+4k+1 = 0 \iff k^2+k+\frac{1}{4} = 0$, ts. $\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$. Siispä saadaan kaksoisjuuri $k = -\frac{1}{2}$ ja siten homogeeniyhtälölle ratkaisu $y = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + Bx\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$, $A, B \in \mathbf{R}$.

Siirrytään sitten tutkimaan epähomogeenista yhtälöä $4y'' + 4y' + y = \mathrm{e}^{-x}$. Tehdään nyt ratkaisuyrite $y = C\mathrm{e}^{-x}$, josta seuraa $y' = -C\mathrm{e}^{-x}$ ja $y'' = C\mathrm{e}^{-x}$. Sijoittamalla saadaan differentiaaliyhtälön vasemmaksi puoleksi $4C\mathrm{e}^{-x} - 4C\mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-x} = C\mathrm{e}^{-x}$, joten vaaditaan, että $C = 1$.

Epähomogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on siis summa $y = A\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + Bx\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + \mathrm{e}^{-x}$, $A, B \in \mathbf{R}$.

5*. Ratkaistaan ensin vastaava homogeeniyhtälö $y'' + 25y = 0$. Karakteristiseksi yhtälöksi saadaan $k^2 + 25 = 0$, josta $k = -5\mathrm{i}$ tai $k = 5\mathrm{i}$. Siispä homogeeniyhtälön ratkaisut ovat $y = \mathrm{e}^{0\cdot t}(A\sin(5t) + B\cos(5t)) = A\sin(5t) + B\cos(5t)$, $A, B \in \mathbf{R}$.

Siirrytään tutkimaan alkuperäistä yhtälöä $y'' + 25y = 2\sin(5t)$. Tehdään ”valistunut arvaus” ja valitaan yrite $y = Ct\sin(5t) + Dt\cos(5t) = t(C\sin(5t) + D\cos(5t))$, jolloin

$$y' = C\sin(5t)+D\cos(5t)+t(5C\cos(5t)-5D\sin(5t)) = (C-5Dt)\sin(5t)+(D+5Ct)\cos(5t)$$

ja edelleen $y'' = -5D\sin(5t) + 5(C - 5Dt)\cos(5t) + 5C\cos(5t) - 5(D + 5Ct)\sin(5t)$ eli $y'' = (-10D - 25Ct)\sin(5t) + (10C - 25Dt)\cos(5t)$.

Sijoittamalla alkuperäiseen yhtälöön saadaan vasemmaksi puoleksi

$$(-10D - 25Ct)\sin(5t) + (10C - 25Dt)\cos(5t) + 25(Ct\sin(5t) + Dt\cos(5t))$$

eli $-10D\sin(5t) + 10C\cos(5t)$. Vaaditaan siis, että $C = 0$ ja toisaalta $-10D = 2 \iff D = -\frac{1}{5}$. Saadaan siis ratkaisu $y = -\frac{1}{5}t\cos(5t)$.

Siispä yleinen ratkaisu on $y = A\sin(5t) + B\cos(5t) - \frac{1}{5}t\cos(5t)$. Ehdosta $y(0) = 0$ seuraa $B = 0$, jolloin ratkaisut ovat $y = A\sin(5t) - \frac{1}{5}t\cos(5t)$. Edelleen

$$y' = 5A\cos(5t) - \frac{1}{5}\cos(5t) + t\sin(5t) = \left(5A - \frac{1}{5}\right)\cos(5t) + t\sin(5t)$$

ja vaaditaan $y'(0) = 0$, joten saadaan $5A - \frac{1}{5} = 0$, ts. $A = 1/25$.

Näin ollen yksityisratkaisu on $y = \frac{1}{25}\sin(5t) - \frac{1}{5}t\cos(5t)$.

Harjoitus 8

Jimi Käyrä

2*. Laplace-muunnoksen määritelmän nojalla $\mathcal{L}(f') = \int_0^\infty f'(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$, josta osittaisintegroinnilla ja Laplace-muuntuvuuden nojalla

$$\mathcal{L}(f') = f(t)\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -s\cdot f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = -f(0) + s\underbrace{\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t}_{=\mathcal{L}(f)}.$$

Otetaan yhtälöstä $y' + y = \sin(2t)$ puolittain Laplace-muunnos, jolloin lineaarisuuden nojalla saadaan $\mathcal{L}(y') + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(\sin(2t))$ eli $-y(0) + sY(s) + Y(s) = \frac{2}{s^2+2^2}$. Alkuehdosta $y(0) = 0$, joten voidaan kirjoittaa $sY(s) + Y(s) = \frac{2}{s^2+4} \iff Y(s)\cdot(s+1) = \frac{2}{s^2+4}$ eli $Y(s) = \frac{2}{(s^2+4)(s+1)}$.

Käänteismuunnosta varten muodostetaan osamurtokehitelmä $\frac{2}{(s^2+4)(s+1)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{C}{s+1}$, josta $(As+B)(s+1) + C(s^2+4) = 2 \iff (A+C)s^2 + (A+B)s + (B+4C) = 2$.

Vaaditaan $A + C = 0, A + B = 0$ ja $B + 4C = 2$, joista $A = -2/5$ ja $B = C = 2/5$.

Voidaan siis kirjoittaa $Y(s) = \frac{-\frac{2}{5}s+\frac{2}{5}}{s^2+4} + \frac{\frac{2}{5}}{s+1} = -\frac{2}{5}\cdot\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{s^2+2^2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{s+1}$.

Hyödynnetään jälleen lineaarisuutta ja otetaan käänteismuunnos puolittain, jolloin saadaan ratkaisu $y = -\frac{2}{5}\cos(2t) + \frac{1}{5}\sin(2t) + \frac{2}{5}\mathrm{e}^{-t}$.

4*. **a)** Kirjoitetaan nyt $F(s) = \frac{s-1}{s^2+9} = \frac{s}{s^2+9} - \frac{1}{s^2+9} = \frac{s}{s^2+3^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{s^2+3^2}$, jolloin taulukoiden avulla saadaan käänteismuunnos $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \cos(3t) - \frac{1}{3}\sin(3t)$.

b) Nimittäjän nollakohdat saadaan yhtälöstä $s^2 - 2s - 3 = 0$, josta $s = -1$ tai $s = 3$. Voidaan siis kirjoittaa tekijäesitys $(s+1)(s-3)$ ja muodostaa osamurtokehitelmä $\frac{8}{s^2-2s-3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3}$, ts. $A(s-3) + B(s+1) = 8 \iff (A+B)s + (B-3A)$. Vaaditaan siis $A + B = 0 \iff A = -B$ ja $B - 3A = 8 \iff B - 3\cdot(-B) = 8$, josta $4B = 8 \iff B = 2$ ja $A = -2$.

On siis $F(s) = -\frac{2}{s+1} + \frac{2}{s-3} = -2\cdot\frac{1}{s-(-1)} + 2\cdot\frac{1}{s-3}$ ja ottamalla käänteismuunnos saadaan $f(t) = -2\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{3t}$.

c) Nyt $F(s) = \frac{12}{s^5} = 12\frac{1}{s^5}$, joten ottamalla käänteismuunnos saadaan $f(t) = 12\cdot\frac{t^{5-1}}{(5-1)!} = \frac{1}{2}t^4$.

Harjoitus 9

Jimi Käyrä

1*. **a)** Ottamalla Laplace-muunnos puolittain saadaan $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 4(sY(s) - y(0)) + 13Y(s) = 0$ ja alkuehdot huomioimalla $s^2Y(s) - s - (-2) + 4(sY(s) - 1) + 13Y(s) = 0 \iff (s^2 + 4s + 13)Y(s) = s + 2$, ts. $Y(s) = \dfrac{s+2}{s^2+4s+13} = \dfrac{s-(-2)}{(s-(-2))^2+3^2}$.
Käänteismuunnoksella saadaan ratkaisu $y(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos(3t)$.

b) Muunnetaan vasen puoli kuten edellä, jolloin saadaan $(s^2+4s+13)Y(s) = s+6\mathrm{e}^{-2s}+2$ eli $Y(s) = \dfrac{s+6\mathrm{e}^{-2s}+2}{s^2+4s+13} = \dfrac{s+2}{s^2+4s+13} + \dfrac{6\mathrm{e}^{-2s}}{s^2+4s+13}$. Tämä voidaan kirjoittaa edelleen muodossa $Y(s) = \dfrac{s-(-2)}{(s-(-2))^2+3^2} + 2\mathrm{e}^{-2s} \cdot \dfrac{3}{(s-(-2))^2+3^2}$. Ottamalla käänteismuunnos saadaan $y(t) = \mathrm{e}^{-2t}\cos(3t) + 2H(t-2)\mathrm{e}^{-2(t-2)}\sin(3(t-2))$.

2*. **a)** Otetaan Laplace-muunnos puolittain, jolloin saadaan $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 6(sY(s) - y(0)) + 8Y(s) = \mathrm{e}^{-s}$ ja alkuehdot sijoittamalla $s^2Y(s) + 6sY(s) + 8Y(s) = \mathrm{e}^{-s}$, ts. $(s^2+6s+8)Y(s) = \mathrm{e}^{-s} \iff Y(s) = \mathrm{e}^{-s} \cdot \dfrac{1}{s^2+6s+8} = \mathrm{e}^{-s} \cdot \dfrac{1}{(s+2)(s+4)}$.
Osamurtokehitelmästä $\dfrac{1}{(s+2)(s+4)} = \dfrac{A}{s+2} + \dfrac{B}{s+4}$ saadaan $A(s+4) + B(s+2) = 1 \iff (A+B)s + (4A+2B) = 1$, joten vaaditaan $A + B = 0, 4A + 2B = 1$ eli $A = 1/2, B = -1/2$.

Siispä voidaan kirjoittaa $Y(s) = \mathrm{e}^{-s}\left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{s-(-2)} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{s-(-4)}\right)$ ja käänteismuunnoksella saadaankin $y(t) = \dfrac{1}{2}H(t-1)(\mathrm{e}^{-2(t-1)} - \mathrm{e}^{-4(t-1)})$.

b) Vasen puoli kuten edellä. Otetaan Laplace-muunnos puolittain, jolloin saadaan $(s^2 + 6s+8)Y(s) = 4/s - 4\mathrm{e}^{-3s}\cdot 1/s$, ts. $Y(s) = \dfrac{\frac{4}{s} - \frac{4\mathrm{e}^{-3s}}{s}}{s^2+6s+8} = \dfrac{4/s}{(s+2)(s+4)} - \dfrac{\frac{4\mathrm{e}^{-3s}}{s}}{(s+2)(s+4)}$.
Kirjoitetaan edelleen $Y(s) = \dfrac{4}{s(s+2)(s+4)} - \mathrm{e}^{-3s} \cdot \dfrac{4}{s(s+2)(s+4)}$.
Jälleen osamurtokehitelmästä $\dfrac{4}{s(s+2)(s+4)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+2} + \dfrac{C}{s+4}$ saadaan $A(s+2)(s+4) + Bs(s+4) + Cs(s+2) = 4 \iff (A+B+C)s^2 + (6A+4B+2C)s + 8A = 4$ ja vaaditaan, että $A + B + C = 0, 6A + 4B + 2C = 0, 8A = 4$. Tästä $A = C = 1/2$ ja $B = -1$.

Siispä nähdään, että
$$Y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{s-(-2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-(-4)} - \mathrm{e}^{-3s}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{s-(-2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-(-4)}\right).$$
Käänteismuunnoksella saadaan ratkaisu

$$y(t) = \frac{1}{2} - \mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4t} - H(t-3)\left(\frac{1}{2} - \mathrm{e}^{-2(t-3)} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-4(t-3)}\right).$$

Harjoitus 10

Jimi Käyrä

1*. Lähdetään aluksi tarkastelemaan homogeeniyhtälöä $Li''(t) + Ri'(t) + \dfrac{1}{C}i(t) = 0$. Saadaan karakteristinen yhtälö $Lk^2 + Rk + 1/C = 0$, josta $k = -\dfrac{R}{2L} \pm \dfrac{\sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L} \equiv m_1, m_2$.

Jos nyt $R^2 = 4L/C$, niin kyseessä on kriittinen vaimennus ja homogeeniyhtälön ratkaisut ovat muotoa $i_{\mathrm{H}}(t) = A\mathrm{e}^{-Rt/2L} + Bt\mathrm{e}^{-Rt/2L} = \mathrm{e}^{-Rt/2L}(A + Bt)$ ja pitkän ajan kuluttua $i_{\mathrm{H}}(t) \to 0$, sillä lineaarisen funktion kasvu "häviää" eksponenttifunktion voimakkaalle vähenemiselle.

Tapauksessa $R^2 > 4L/C$ kyseessä on ylivaimennus ja tällöin ratkaisut ovat muotoa $i_{\mathrm{H}} = A\mathrm{e}^{m_1 t} + B\mathrm{e}^{m_2 t}$. Koska $R, L, C > 0$, havaitaan, että on aina $m_1, m_2 < 0$ ja siten myös pitkän ajan kuluttua $i_{\mathrm{H}} \to 0$.

Edelleen tapauksessa $R^2 > 4L/C$ on kyseessä alivaimennus ja karakteristisella yhtälöllä on tällöin kompleksijuuret $m_1 = a + b\mathrm{j}$ ja $m_2 = a - b\mathrm{j}$, $a < 0, b > 0$. Ratkaisu on tällöin muotoa $i_{\mathrm{H}} = \mathrm{e}^{at}(A\cos(bt) + B\sin(bt))$ ja edelleen $i_{\mathrm{H}} \to 0$ pitkän ajan kuluttua; siispä joka tapauksessa ratkaisu "käyttäytyy nätisti" pitkän ajan kuluttua, ts. $\lim\limits_{t\to\infty} i_{\mathrm{H}} = 0$.

Siirrytään sitten tarkastelemaan täydellistä yhtälöä $Li''(t) + Ri'(t) + \dfrac{1}{C}i(t) = V_0\omega\cos(\omega t)$. Kokeillaan suoraan ratkaisuyritettä $i(t) = A\sin(\omega t - \gamma)$, josta seuraa $i'(t) = A\omega\cos(\omega t - \gamma)$ ja $i''(t) = -A\omega^2\sin(\omega t - \gamma)$. Sijoittamalla nämä saadaan vasemmaksi puoleksi
$-LA\omega^2\sin(\omega t - \gamma) + RA\omega\cos(\omega t - \gamma) + \dfrac{1}{C}A\sin(\omega t - \gamma)$, ts.
$(A/C - LA\omega^2)\sin(\omega t - \gamma) + RA\omega\cos(\omega t - \gamma)$.

Toisaalta oikea puoli voidaan esittää muodossa
$V_0\omega\cos(\omega t) = V_0\omega\cos(\omega t - \gamma + \gamma) = V_0\omega\cos\gamma\cos(\omega t - \gamma) - V_0\omega\sin\gamma\sin(\omega t - \gamma)$.

Vertailemalla sinin ja kosinin kertoimia saadaan pari

$$\begin{cases}(A/C - LA\omega^2) = -V_0\omega\sin\gamma \\ RA\omega = V_0\omega\cos\gamma\end{cases} \iff \begin{cases}A(L\omega^2 - 1/C) = V_0\omega\sin\gamma \\ RA\omega = V_0\omega\cos\gamma.\end{cases}$$

Jakamalla yhtälöt puolittain (ehdolla $\cos\gamma \neq 0$) saadaan $\tan\gamma = \dfrac{L\omega^2 - 1/C}{R\omega}$ eli vaiheelle pätee $\gamma = \arctan\left(\dfrac{L\omega^2 - 1/C}{R\omega}\right) = \arctan\left(\dfrac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}\right) = \arctan\left(\dfrac{X_{\mathrm{L}} - X_{\mathrm{C}}}{R}\right)$.

Tarkastellaan sitten amplitudia. Neliöimällä kerroinyhtälöt saadaan pari

$$\begin{cases}A^2(L\omega^2 - 1/C)^2 = V_0^2\omega^2\sin^2\gamma \\ R^2A^2\omega^2 = V_0^2\omega^2\cos^2\omega\end{cases}$$ ja edelleen summaamalla nämä saadaan

$V_0^2\omega^2(\sin^2\omega + \cos^2\omega) = R^2A^2\omega^2 + A^2(L\omega^2 - 1/C)^2$, ts. $A^2(R^2\omega^2 + (L\omega^2 - 1/C)^2) = V_0^2\omega^2$ ja vihdoin $A = \dfrac{V_0\omega}{\sqrt{R^2\omega^2 + (L\omega^2 - 1/C)^2}}$.

Todetaan siis, että täydellisen yhtälön ratkaisu on muotoa $i(t) = i_{\mathrm{H}}(t) + A\sin(\omega t + \gamma)$, jossa $i_{\mathrm{H}}(t)$ on homogeeniyhtälön ratkaisu ja A, ω sekä γ ovat edellä johdetut kertoimet. Edellä on todettu, että pitkän ajan kuluttua $i_{\mathrm{H}}(t) \to 0$.

Koska jännite $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$, vaaditaan $\gamma = 0$, jotta virta ja jännite ovat pitkän ajan kuluttua samassa vaiheessa. On siis oltava $\dfrac{X_{\mathrm{L}} - X_{\mathrm{C}}}{R} = 0$, ts. $X_{\mathrm{L}} = X_{\mathrm{C}}$ eli kapasitanssin ja induktanssin reaktanssien on oltava yhtä suuret.

Kohdan 2 tapauksessa täytyy siis olla $C = \dfrac{1}{L\omega^2} = \dfrac{1}{0,5\ \mathrm{H} \cdot \left(200\ (\mathrm{rad/s})\right)^2} = 5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{F}$. Kun L ja C on kiinnitetty, resistanssi vaikuttaa siihen, miten virta käyttäytyy ennen "asettumistaan" eli onko kyseessä tapaus $R^2 = 4L/C$, $> 4L/C$ vai $< 4L/C$. Vastaavasti on nähty, että V_0 vaikuttaa amplitudiin.

Kohdassa 3 muut suureet tunnetaan ja maksimoitavana on kulmataajuudesta riippuva amplitudifunktio. Merkitään nyt yksiköittä $A(\omega) = \dfrac{V_0\omega}{\sqrt{R^2\omega^2 + (L\omega^2 - 1/C)^2}} = \dfrac{500\omega}{\sqrt{10^4\omega^2 + (\omega^2 - 10^4)^2}}$, jolloin derivaatta

$$A'(\omega) = -\frac{500(\omega^4 - 10^8)}{(\omega^4 - 10^4\omega^2 + 10^8)^{3/2}}.$$

Tästä saadaan ehdon $\omega > 0$ toteuttava nollakohta $\omega = 100$, joka onneksi osoittautuu kulkukaavion avulla funktion $A(\omega)$ maksimikohdaksi.

Tällöin vaihe-erolle saadaan $\gamma = \arctan\left(\dfrac{1\ \mathrm{H} \cdot 100\ \mathrm{rad/s} - \frac{1}{100\ \mathrm{rad/s} \cdot 100 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}}}{100\ \Omega}\right) = 0\ (\mathrm{rad})$, joten pitkän ajan kuluttua virta ja jännite ovat samassa vaiheessa.

Harjoitus 11

Jimi Käyrä

2*. **a)** Ylemmästä yhtälöstä saadaan $6z = y' + 4y \iff z = \frac{1}{6}y' + \frac{2}{3}y$ ja edelleen $z' = \frac{1}{6}y'' + \frac{2}{3}y'$. Sijoittamalla nämä alempaan yhtälöön saadaan $\frac{1}{6}y'' + \frac{2}{3}y' = -3y + 5\left(\frac{1}{6}y' + \frac{2}{3}y\right)$, ts. $\frac{1}{6}y'' + \frac{2}{3}y' = -3y + \frac{5}{6}y' + \frac{10}{3}y \iff \frac{1}{6}y'' - \frac{1}{6}y' - \frac{1}{3}y = 0$ ja edelleen $y'' - y' - 2y = 0$.

Karakteristisesta yhtälöstä $k^2 - k - 2 = 0$ saadaan reaalijuuret $k = -1$ ja $k = 2$, jolloin ratkaisu on $y = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{2x}$. Ehdosta $y(0) = 3$ seuraa edelleen, että $A + B = 3$ **(1)**.

Saadusta ratkaisusta seuraa, että $y' = -A\mathrm{e}^{-x} + 2B\mathrm{e}^{2x}$. Sijoittamalla nämä saadaan $z = \frac{1}{6}\left(-A\mathrm{e}^{-x} + 2B\mathrm{e}^{2x}\right) + \frac{2}{3}\left(A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{2x}\right) = \frac{1}{2}A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{2x}$. Ehdon $z(0) = 2$ nojalla on oltava $\frac{1}{2}A + B = 2 \iff A + 2B = 4$. Tästä ja yhtälöstä **(1)** seuraa, että $A = 2$ ja $B = 1$.

Siispä saadaan ratkaisupari $\begin{cases} y(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{2x} \\ z(x) = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{2x}. \end{cases}$

b) Kirjoitetaan pari muotoon $y' = z + 1$, $z' = -y$. Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $z = y' - 1$ ja edelleen $z' = y''$. Sijoittamalla tämä jälkimmäiseen yhtälöön saadaan $y'' = -y \iff y'' + y = 0$.

Saadaan karakteristinen yhtälö $k^2 + 1 = 0$, josta $k = -\mathrm{i}$ tai $k = \mathrm{i}$, joten ratkaisu on $y = A\cos(x) + B\sin(x)$.

Löydetystä ratkaisusta seuraa $y' = -A\sin(x) + B\cos(x)$. Sijoittamalla saadaankin $z = -A\sin(x) + B\cos(x) - 1$, joten ratkaisupari on $\begin{cases} y(x) = A\cos(x) + B\sin(x) \\ z(x) = -A\sin(x) + B\cos(x) - 1, \end{cases}$ $A, B \in \mathbf{R}$.