Lineaarialgebran jatkoa

Jimi Käyrä

Sisällys

1 Avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektorit

Oletetaan, että $n \in 1, 2, 3, ...$ Avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkiot ovat jonoja, joissa on n reaalilukua eli

$$\mathbb{R}^n = \{(v_1, v_2, ..., v_n) \mid v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{R}\}.$$

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ alkioita kutsutaan **vektoreiksi**.

Jos $u_1, u_2, ..., u_n \in \mathbb{R}$, niin $\overline{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ vektori ja sanotaan, että $u_1, u_2, ..., u_n$ ovat vektorin $\overline{u}$ **komponentit**.

Vektori $\overline{w}$ on vektoreiden $\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_k$ **lineaarikombinaatio**, jos on olemassa sellaiset reaaliluvut $a_1, a_2, ..., a_k$, että

$$\overline{w} = a_1\overline{v}_1 + a_2\overline{v}_2 + ... + a_k\overline{v}_k.$$

Esim. Olkoot $\overline{v}_1 = (1, 1)$, $\overline{v}_2 = (-1, 2)$ ja $\overline{w} = (5, -1)$. Osoita, että vektori $\overline{w}$ on vektoreiden $\overline{v}_1$ ja $\overline{v}_2$ lineaarikombinaatio.

2 Vektoreiden virittämä aliavaruus

Vektoreiden $\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_k \in \mathbb{R}$ virittämä **aliavaruus** tarkoittaa kyseisten vektoreiden kaikkien lineaarikombinaatioiden joukkoa eli

$$W = \text{span}(\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_k) = \{a_1\overline{v}_1 + a_2\overline{v}_2 + ... + a_k\overline{v}_k \mid a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}\}.$$

Aliavaruuden W **dimensio** $\dim(W)$ on alivaruuden W kannan vektoreiden lukumäärä.

Esim. Tutki, kuuluuko vektori $\overline{w} = (6, 3, 2, -1)$ vektoreiden $\overline{v}_1 = (0, -1, 2, 1)$, $\overline{v}_2 = (2, 0, 1, -1)$ ja $\overline{v}_3 = (4, 2, 2, 0)$ virittämään aliavaruuteen $\text{span}(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)$.

3 Vapaus ja kanta

Vektorijono $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_k)$ on **vapaa** eli **lineaarisesti riippumaton**, jos seuraava ehto pätee: jos

$$c_1\overline{v}_1 + c_2\overline{v}_2 + ... + c_k\overline{v}_k = \overline{0}$$

joillakin $c_1, ..., c_k \in \mathbb{R}$, niin

$$c_1 = 0, c_2 = 0, ..., c_k = 0.$$

Jos jono ei ole vapaa, niin se on **sidottu**.

Esim. Olkoot $\overline{v}_1 = (1, 2)$ ja $\overline{v}_2 = (-3, -1)$. Onko jono $(\overline{v}_1, \overline{v}_2)$ vapaa?

Vektorijono $(\overline{w}_1, \overline{w}_2, ..., \overline{w}_k)$ on aliavaruuden W **kanta**, jos

$$W = \text{span}(\overline{w}_1, \overline{w}_2, ..., \overline{w}_k)$$

ja jono

$$(\overline{w}_1, \overline{w}_2, ..., \overline{w}_k)$$

on vapaa.

Esim. Olkoot $\overline{e}_1 = (1, 0)$ ja $\overline{e}_2 = (0, 1)$. Osoita, että jono $(\overline{e}_1, \overline{e}_2)$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

4 Ominaisarvo ja ominaisvektori

Oletetaan, että A on $n \times n$ -neliömatriisi. Reaaliluku λ on matriisin **ominaisarvo**, jos on olemassa sellainen **ominaisvektori** $\overline{v} \in \mathbb{R}^n$, että $\overline{v} \neq \overline{0}$ ja

$$A\overline{v} = \lambda\overline{v}.$$

Siis matriisin A ominaisvektori on vektori, jolle matriisilla A kertominen vastaa reaaliluvulla λ kertomista.

Esim. Matriisilla $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ on ominaisvektori $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Määritä jokin tätä vastaava ominaisarvo.

Samaa ominaisarvoa voi vastata useampi ominaisvektori. Ominaisarvoa λ vastaava **ominaisavaruus** on joukko

$$V_\lambda = \{\overline{v} \in \mathbb{R}^n | A\overline{v} = \lambda\overline{v}\}.$$

Yhtälö saadaan muotoon $A\overline{v} = \lambda I\overline{v}$ eli $A\overline{v} - \lambda I\overline{v}$, josta $(A - \lambda I)\overline{v} = \overline{0}$. Jotta yhtälöllä olisi ratkaisuja $\overline{v} \neq \overline{0}$, on oltava $\det(A - \lambda I) = 0$. Kirjoittamalla determinantti auki saadaan matriisin A **karakteristinen polynomi**.

Esim. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ karakteristinen polynomi ja kaikki ominaisarvoa 4 vastaavat ominaisvektorit.

5 Piste- ja ristitulo

Vektoreiden $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ **pistetulo** on

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n.$$

Vektorin **normilla** ja pistetulolla on yhteys

$$||\overline{x}||^2 = \overline{x} \cdot \overline{x}.$$

Pistetulolle pätee myös

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = ||\overline{x}||||\overline{y}|| \cos \theta,$$

missä θ on vektorien välinen kulma.

Esim. Määritä vektoria $\overline{r} = -3\overline{i} + 5\overline{j}$ vastaan kohtisuora yksikkövektori.

Olkoot $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita. Tällöin **ristitulolle** $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ pätee

$$||\overline{c}|| = ||\overline{a}||||\overline{b}|| \sin \alpha,$$

jossa α on vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ välinen kulma. Vektorin suunta määräytyy oikean käden säännön mukaan siten, että $\overline{a} \perp \overline{c}$ ja $\overline{b} \perp \overline{c}$. Huomaa, että ristitulo ei ole vaihdannainen eikä liitännäinen.

Ristitulovektorin $\overline{c}$ pituus on vektoreiden $\overline{a}$ ja $\overline{b}$ rajoittaman suunnikkaan pinta-ala.

Vektoreiden $\overline{a}$, $\overline{b}$ ja $\overline{c}$ rajoittaman suuntaissärmiön tilavuus saadaan **skalaarikolmitulon** $\overline{a} \times \overline{b} \cdot \overline{c}$ avulla.

Esim. Määritä suuntaissärmiön tilavuus, kun $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j}$, $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j}$ sekä $\overline{c} = 3\overline{i} + \overline{k}$.

6 Sovelluksia

Olkoot $\overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{w} \neq \overline{0}$. Tällöin vektorin $\overline{v}$ **projektio** vektorin $\overline{w}$ virittämälle aliavaruudelle on sellainen vektori $\overline{p} \in \mathbb{R}^n$, että vektori $\overline{p}$ on yhdensuuntainen vektorin $\overline{w}$ kanssa ja vektori $\overline{v} - \overline{p}$ on kohtisuorassa vektoria $\overline{w}$ vastaan. Tällöin

$$\overline{p} = \mathrm{proj}_{\overline{w}}(\overline{v}) = \frac{\overline{v} \cdot \overline{w}}{\overline{w} \cdot \overline{w}} \overline{w}.$$

Esim. Suora S kulkee pisteiden $A = (2, -3, 5)$ ja $B = (4, 1, 7)$ kautta. Määritä pisteen $C = (4, -1, 9)$ etäisyys suorasta S projektion avulla.

Tason normaalimuotoinen yhtälö
Piste $Q = (x, y, z)$ on tasossa T, jos ja vain jos $\overline{n} \cdot (\overline{q} - \overline{p}) = 0$, missä $\overline{n}$ on jokin tasoa T vastaan kohtisuora vektori.