a ponadto każde ze stanowisk ma produkować dokładnie jeden wyrób i każdy z wyrobów ma być produkowany na dokładnie jednym stanowisku. Należy przydzielić wyroby do stanowisk, by łączna wydajność była maksymalizowana.

Problem ten nazywa się **problemem przydziału** i można zapisać go formalnie w sposób następujący:

$$\max \quad z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$ogr. \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1$$

$$gdzie \quad x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{zadanie j wykonywane przez i - tą osobę} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

Problem przydziału jest szczególnym przypadkiem problemu transportowego

WYRÓB / STANOWISKO	1	2	3	4
A	2	10	9	7
B	15	4	14	8
C	13	14	16	11
D	4	15	13	9

5.4 Problem komiwojażera - Algorytm Little'a

Metoda podziału i ograniczeń może być zastosowana dla rozwiązania problemu komiwojażera. Algorytm został podany przez Little'a.

Zbiór rozwiązań (wierzchołek w drzewie poszukiwań) będziemy rozbijać na dwa podzbiory:
- zawierający wyróżniony łuk <i,j>
- nie zawierający łuku <i,j>

Podział będzie dokonywany z pewną zasadą heurystyczną, opisaną poniżej. Po wykonaniu podziału liczone są kresy dolne na drodze **redukcji** macierzy kosztów przejść. Podzbiory rozwiązań mające wartości kresów dolnych **większe lub równe** długości najkrótszego dotychczas znalezionego rozwiązania będą pomijane (ograniczamy w ten sposób przestrzeń poszukiwań).

Przykład:

Dana jest macierz kosztów przejść „C" („∞" oznacza koszt o nieskończonej wartości):

Macierz C	*1*	*2*	*3*	*4*
1	∞	2	7	3
2	7	∞	8	5
3	9	4	∞	6
4	3	8	5	∞

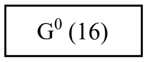
Niech G^0 oznacza początkowy zbiór rozwiązań. W celu wyznaczenia kresu dolnego dla G^0 dokonujemy redukcji macierzy C
- w każdym wierszu znajdujemy element minimalny i odejmujemy go od wszystkich elementów danego wiersza
- ten sam proces wykonujemy dla kolumn.

Po wykonaniu redukcji macierzy, w każdym wierszu i każdej kolumnie powinien znaleźć się element zerowy. Suma wielkości, które odjęliśmy (stopień redukcji macierzy R) **dodawana jest do dotychczasowej wartości dolnego ograniczenia** (wartość początkowa dolnego ograniczenia = 0):

Macierz C^0	*1*	*2*	*3*	*4*	
1	∞	0	3	1	-2
2	2	∞	1	0	-5
3	5	0	∞	2	-4
4	0	5	0	∞	-3
			-2		R=16

Po redukcji: (dolne ograniczenie = 16). Kandydatami do wykonania podziału są następujące odcinki (mające w tej zredukowanej macierzy koszt równy 0): <1,2>,<2,4>,<3,2>,<4,1>,<4,3>. Wybieramy ten z nich, który posiada **najwyższy optymistyczny koszt wyłączenia**. Jeżeli wyłączymy odcinek <i,j>, to z miasta „i" musimy wyruszyć do miasta innego niż „j", a do miasta „j" musimy przybyć z miasta różnego od „i". Rozważmy dla przykładu odcinek <2,4> Jeżeli wyłączymy ten odcinek, to z miasta 2 musimy wyruszyć do miasta różnego od 4, a minimalny koszt z tym związany jest równy 1 (minimalna wartość w wierszu 2 różna od tej na pozycji 2,4). Z kolei do miasta 4 trzeba dotrzeć z miasta różnego od 2 i minimalny koszt z tym związany jest równy 1 (minimalna wartość w kolumnie 4 różna od tej na pozycji 2,4). **Suma tych wartości** (2) jest **optymistycznym kosztem** który na pewno musimy ponieść wyłączając odcinek <2,4>. Wartości tych kosztów podane są w postaci indeksów przy elementach zerowych:

macierz C^0	*1*	*2*	*3*	*4*	
1	∞	0^1	3	1	-2
2	2	∞	1	0^2	-5
3	5	0^2	∞	2	-4
4	0^2	5	0^1	∞	-3
			-2		R=16



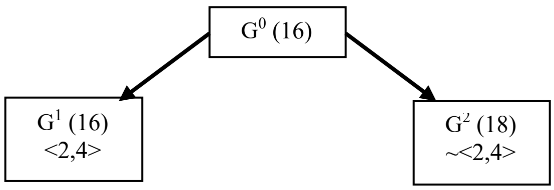
W naszym wypadku aż trzy odcinki mają optymistyczny koszt wyłączenia równy 2. Arbitralnie wybieramy odcinek <2,4> tworząc zbiory marszrut G^1 i G^2 zawierające lub nie zawierające tego odcinka.

Weźmy pod uwagę zbiór G^1. Tworzymy macierz C^1 usuwając z macierzy C^0 wiersz 2 i kolumnę 4 oraz przyjmując $c_{42}=\infty$ (blokujemy drogę przeciwną). Zmodyfikowana i zredukowana macierz C^1 znajduje się poniżej:

Macierz C^1	*1*	*2*	*3*	
1	∞	0^3	3	
3	5	0^5	∞	
4	0^5	∞	0^3	
				R=0

Weźmy pod uwagę zbiór G^2. Tworzymy macierz C^2 z macierzy C^0 przyjmując $c_{24}=\infty$. Zmodyfikowana i zredukowana macierz C^2 znajduje się poniżej:

macierz C^2	*1*	*2*	*3*	*4*	
1	∞	0^0	3	0^1	
2	1	∞	0^1	∞	-1
3	5	0^1	∞	1	
4	0^1	5	0^0	∞	
				-1	R=2



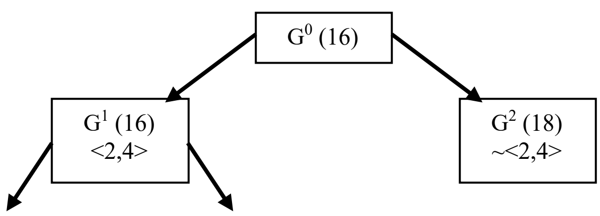
Do dalszego podziału wybieramy wierzchołek o najmniejszej wartości kresu dolnego G^1. Z tablicy C^1 wynika, że tylko odcinki <3,2> oraz <4,1> mogą być rozpatrywane (zerowy koszt, maksymalna optymistyczna wartość kosztu wyłączenia 5). Arbitralnie wybieramy <3,2> tworząc zbiory G^3 i G^4.

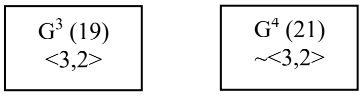
Weźmy pod uwagę zbiór G^3. Tworzymy macierz C^3 usuwając z macierzy C^1 wiersz 3 i kolumnę 2. Nie dokonujemy podstawienia $c_{32}=\infty$, gdyż ten element został już wyeliminowany. Zmodyfikowana i zredukowana macierz C^3 znajduje się poniżej:

Macierz C^3	*1*	*3*	
1	∞	0^∞	-3
4	0^∞	0^0	
			R=3

Weźmy pod uwagę zbiór G^4. Tworzymy macierz C^4 z macierzy C^1 przyjmując $c_{32}=\infty$. Zmodyfikowana i zredukowana macierz C^4 znajduje się poniżej:

Macierz C^4	*1*	*2*	*3*	
1	∞	0^∞	3	
3	0^∞	∞	∞	-5
4	0^0	∞	0^3	
				R=5





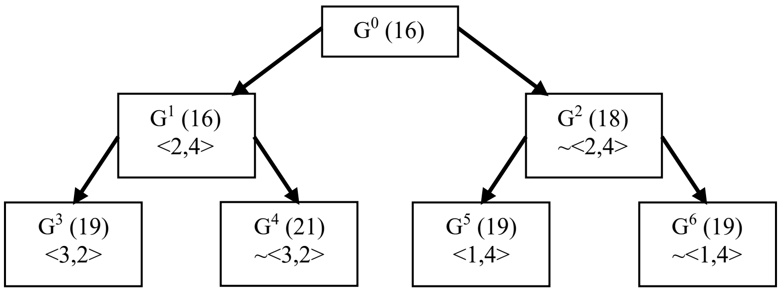
Do dalszego podziału wybieramy wierzchołek o najmniejszej wartości kresu dolnego G^2. Z tablicy C^2 wynika, że tylko odcinki <1,4> <2,3> oraz <3,2> mogą być rozpatrywane (zerowy koszt, maksymalna optymistyczna wartość kosztu wyłączenia 1). Arbitralnie wybieramy <1,4> tworząc zbiory G^5 i G^6.

Weźmy pod uwagę zbiór G^5. Tworzymy macierz C^5 usuwając z macierzy C^2 wiersz 1 i kolumnę 4. Ponadto dokonujemy podstawienia $c_{41}=\infty$. Zmodyfikowana i zredukowana macierz C^5 znajduje się poniżej:

macierz C^5	*1*	*2*	*3*	
2	0^4	∞	0^0	
3	4	0^9	∞	
4	∞	5	0^5	
	-1			R=1

Weźmy pod uwagę zbiór G^6. Tworzymy macierz C^6 z macierzy C^2 przyjmując $c_{14}=\infty$. Zmodyfikowana i zredukowana macierz C^6 znajduje się poniżej:

macierz C^2	*1*	*2*	*3*	*4*	
1	∞	0^3	3	∞	
2	1	∞	0^1	∞	
3	5	0^0	∞	0^∞	
4	0^1	5	0^0	∞	
				-1	R=1



Do dalszego podziału wybieramy wierzchołek o najmniejszej wartości kresu dolnego G^3. Z tablicy C^3 wynika, że tylko odcinki <1,3> oraz <4,1> mogą być rozpatrywane (zerowy koszt, maksymalna optymistyczna wartość kosztu wyłączenia ∞). Arbitralnie wybieramy <1,3> tworząc zbiory G^7 i G^8.

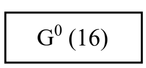
Weźmy pod uwagę zbiór G^7. Tworzymy macierz C^7 usuwając z macierzy C^3 wiersz 1 i kolumnę 3. Macierz redukuje się do jednego elementu. Zmodyfikowana i zredukowana macierz C^7 znajduje się poniżej:

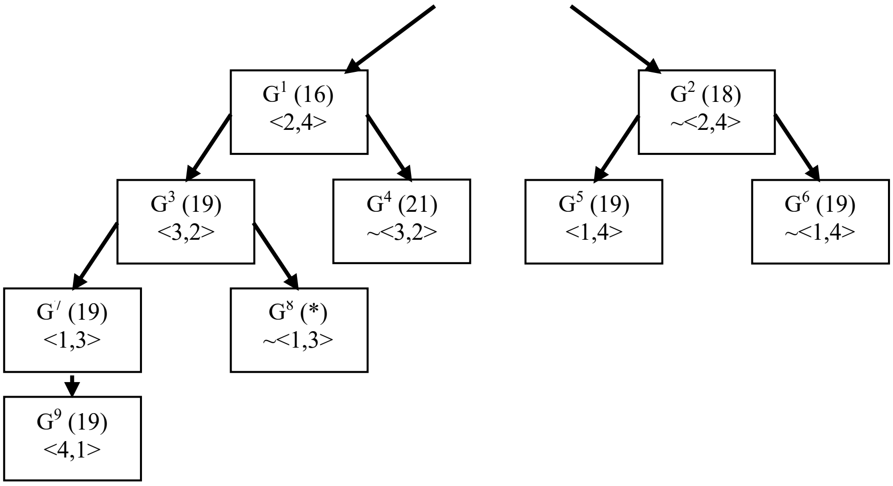
Macierz C^7	*1*	
4	0	
		R=0

UWAGA – z tej macierzy wynika, że dołączając do wierzchołka G^7 jedyną możliwą marszrutę <4,1> otrzymujemy rozwiązanie końcowe, dla którego wartość funkcji kosztu równa się kresowi dolnemu równemu 19. Oznaczmy to rozwiązanie przez wierzchołek G^9.

Weźmy pod uwagę zbiór G^8. Tworzymy macierz C^8 z macierzy C^3 . Podstawiamy za $c_{13}=\infty$. Zmodyfikowana macierz C^8 znajduje się poniżej:
UWAGA – koszt redukcji wynosi ∞ (patrz wiersz 1). Kres dolny byłby równy także ∞. Oznacza to, że wierzchołek ten nie będzie dalej dzielony – można dowieść, że nie odpowiada mu żadna marszruta. Pomijamy więc w dalszych rozważaniach ten wierzchołek.

Macierz C^8	*1*	*3*	
1	∞	∞	
4	0^∞	0^0	
			R = ∞ (!)





Podział pozostałych zbiorów nie może dać rozwiązania lepszego. Otrzymane rozwiązanie jest optymalne, choć niekoniecznie jedyne. W celu stwierdzenia czy istnieją inne rozwiązania, należałoby dokonać podziału zbiorów G^5 i G^6.