a ponadto każde ze stanowisk ma produkować dokładnie jeden wyrób i każdy z wyrobów ma być produkowany na dokładnie jednym stanowisku. Należy przydzielić wyroby do stanowisk, by łączna wydajność była maksymalizowana.

Problem ten nazywa się **problemem przydziału** i można zapisać go formalnie w sposób następujący:

$$\max \quad z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

$$ogr. \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=1$$

$$gdzie \quad x_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{zadanie j wykonywane przez i - tą osobę} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

Problem przydziału jest szczególnym przypadkiem problemu transportowego

| WYRÓB / STANOWISKO | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| A | 2 | 10 | 9 | 7 |
| B | 15 | 4 | 14 | 8 |
| C | 13 | 14 | 16 | 11 |
| D | 4 | 15 | 13 | 9 |

## 5.4 Problem komiwojażera - Algorytm Little'a

Metoda podziału i ograniczeń może być zastosowana dla rozwiązania problemu komiwojażera. Algorytm został podany przez Little'a.

Zbiór rozwiązań (wierzchołek w drzewie poszukiwań) będziemy rozbijać na dwa podzbiory:
- zawierający wyróżniony łuk <i,j>
- nie zawierający łuku <i,j>

Podział będzie dokonywany z pewną zasadą heurystyczną, opisaną poniżej. Po wykonaniu podziału liczone są kresy dolne na drodze **redukcji** macierzy kosztów przejść. Podzbiory rozwiązań mające wartości kresów dolnych **większe lub równe** długości najkrótszego dotychczas znalezionego rozwiązania będą pomijane (ograniczamy w ten sposób przestrzeń poszukiwań).

Przykład:

Dana jest macierz kosztów przejść „C" („∞" oznacza koszt o nieskończonej wartości):

| *Macierz C* | *1* | *2* | *3* | *4* |
|---|---|---|---|---|
| *1* | ∞ | 2 | 7 | 3 |
| *2* | 7 | ∞ | 8 | 5 |
| *3* | 9 | 4 | ∞ | 6 |
| *4* | 3 | 8 | 5 | ∞ |

Niech $G^0$ oznacza początkowy zbiór rozwiązań. W celu wyznaczenia kresu dolnego dla $G^0$ dokonujemy redukcji macierzy C
- w każdym wierszu znajdujemy element minimalny i odejmujemy go od wszystkich elementów danego wiersza
- ten sam proces wykonujemy dla kolumn.

Po wykonaniu redukcji macierzy, w każdym wierszu i każdej kolumnie powinien znaleźć się element zerowy. Suma wielkości, które odjęliśmy (stopień redukcji macierzy R) **dodawana jest do dotychczasowej wartości dolnego ograniczenia** (wartość początkowa dolnego ograniczenia = 0):

| *Macierz $C^0$* | *1* | *2* | *3* | *4* | |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | ∞ | 0 | 3 | 1 | -2 |
| *2* | 2 | ∞ | 1 | 0 | -5 |
| *3* | 5 | 0 | ∞ | 2 | -4 |
| *4* | 0 | 5 | 0 | ∞ | -3 |
| | | | -2 | | R=16 |

Po redukcji: (dolne ograniczenie = 16). Kandydatami do wykonania podziału są następujące odcinki (mające w tej zredukowanej macierzy koszt równy 0): <1,2>,<2,4>,<3,2>,<4,1>,<4,3>. Wybieramy ten z nich, który posiada **najwyższy optymistyczny koszt wyłączenia**. Jeżeli wyłączymy odcinek <i,j>, to z miasta „i" musimy wyruszyć do miasta innego niż „j", a do miasta „j" musimy przybyć z miasta różnego od „i". Rozważmy dla przykładu odcinek <2,4> Jeżeli wyłączymy ten odcinek, to z miasta 2 musimy wyruszyć do miasta różnego od 4, a minimalny koszt z tym związany jest równy 1 (minimalna wartość w wierszu 2 różna od tej na pozycji 2,4). Z kolei do miasta 4 trzeba dotrzeć z miasta różnego od 2 i minimalny koszt z tym związany jest równy 1 (minimalna wartość w kolumnie 4 różna od tej na pozycji 2,4). **Suma tych wartości** (2) jest **optymistycznym kosztem** który na pewno musimy ponieść wyłączając odcinek <2,4>. Wartości tych kosztów podane są w postaci indeksów przy elementach zerowych:

| *macierz $C^0$* | *1* | *2* | *3* | *4* | |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | $\infty$ | $0^1$ | 3 | 1 | -2 |
| *2* | 2 | $\infty$ | 1 | $0^2$ | -5 |
| *3* | 5 | $0^2$ | $\infty$ | 2 | -4 |
| *4* | $0^2$ | 5 | $0^1$ | $\infty$ | -3 |
| | | | -2 | | R=16 |

$G^0$ (16)

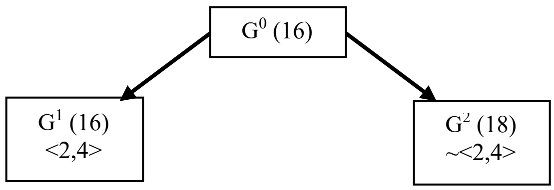
W naszym wypadku aż trzy odcinki mają optymistyczny koszt wyłączenia równy 2. Arbitralnie wybieramy odcinek <2,4> tworząc zbiory marszrut $G^1$ i $G^2$ zawierające lub nie zawierające tego odcinka.

Weźmy pod uwagę zbiór $G^1$. Tworzymy macierz $C^1$ usuwając z macierzy $C^0$ wiersz 2 i kolumnę 4 oraz przyjmując $c_{42}=\infty$ (blokujemy drogę przeciwną). Zmodyfikowana i zredukowana macierz $C^1$ znajduje się poniżej:

| *Macierz $C^1$* | *1* | *2* | *3* | |
|---|---|---|---|---|
| *1* | $\infty$ | $0^3$ | 3 | |
| *3* | 5 | $0^5$ | $\infty$ | |
| *4* | $0^5$ | $\infty$ | $0^3$ | |
| | | | | R=0 |

Weźmy pod uwagę zbiór $G^2$. Tworzymy macierz $C^2$ z macierzy $C^0$ przyjmując $c_{24}=\infty$. Zmodyfikowana i zredukowana macierz $C^2$ znajduje się poniżej:

| *macierz $C^2$* | *1* | *2* | *3* | *4* | |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | $\infty$ | $0^0$ | 3 | $0^1$ | |
| *2* | 1 | $\infty$ | $0^1$ | $\infty$ | -1 |
| *3* | 5 | $0^1$ | $\infty$ | 1 | |
| *4* | $0^1$ | 5 | $0^0$ | $\infty$ | |
| | | | | -1 | R=2 |



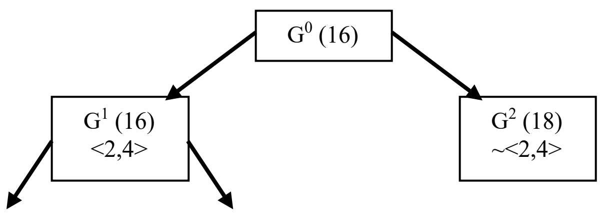

Do dalszego podziału wybieramy wierzchołek o najmniejszej wartości kresu dolnego $G^1$. Z tablicy $C^1$ wynika, że tylko odcinki <3,2> oraz <4,1> mogą być rozpatrywane (zerowy koszt, maksymalna optymistyczna wartość kosztu wyłączenia 5). Arbitralnie wybieramy <3,2> tworząc zbiory $G^3$ i $G^4$.

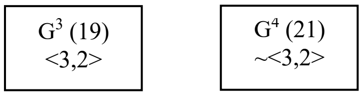
Weźmy pod uwagę zbiór $G^3$. Tworzymy macierz $C^3$ usuwając z macierzy $C^1$ wiersz 3 i kolumnę 2. Nie dokonujemy podstawienia $c_{32}=\infty$, gdyż ten element został już wyeliminowany. Zmodyfikowana i zredukowana macierz $C^3$ znajduje się poniżej:

| *Macierz $C^3$* | *1* | *3* | |
|---|---|---|---|
| *1* | $\infty$ | $0^\infty$ | -3 |
| *4* | $0^\infty$ | $0^0$ | |
| | | | R=3 |

Weźmy pod uwagę zbiór $G^4$. Tworzymy macierz $C^4$ z macierzy $C^1$ przyjmując $c_{32}=\infty$. Zmodyfikowana i zredukowana macierz $C^4$ znajduje się poniżej:

| *Macierz $C^4$* | *1* | *2* | *3* | |
|---|---|---|---|---|
| *1* | $\infty$ | $0^\infty$ | 3 | |
| *3* | $0^\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | -5 |
| *4* | $0^0$ | $\infty$ | $0^3$ | |
| | | | | R=5 |






Do dalszego podziału wybieramy wierzchołek o najmniejszej wartości kresu dolnego $G^2$. Z tablicy $C^2$ wynika, że tylko odcinki <1,4> <2,3> oraz <3,2> mogą być rozpatrywane (zerowy koszt, maksymalna optymistyczna wartość kosztu wyłączenia 1). Arbitralnie wybieramy <1,4> tworząc zbiory $G^5$ i $G^6$.

Weźmy pod uwagę zbiór $G^5$. Tworzymy macierz $C^5$ usuwając z macierzy $C^2$ wiersz 1 i kolumnę 4. Ponadto dokonujemy podstawienia $c_{41}=\infty$. Zmodyfikowana i zredukowana macierz $C^5$ znajduje się poniżej:

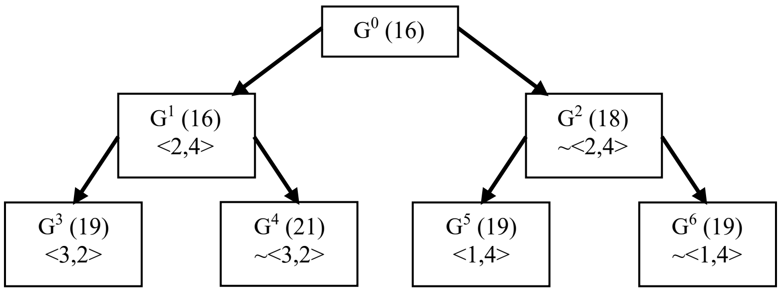
| *macierz $C^5$* | *1* | *2* | *3* |
|---|---|---|---|
| *2* | $0^4$ | $\infty$ | $0^0$ |
| *3* | 4 | $0^9$ | $\infty$ |
| *4* | $\infty$ | 5 | $0^5$ |
| | -1 | | |

R=1

Weźmy pod uwagę zbiór $G^6$. Tworzymy macierz $C^6$ z macierzy $C^2$ przyjmując $c_{14}=\infty$. Zmodyfikowana i zredukowana macierz $C^6$ znajduje się poniżej:

| *macierz $C^2$* | *1* | *2* | *3* | *4* |
|---|---|---|---|---|
| *1* | $\infty$ | $0^3$ | 3 | $\infty$ |
| *2* | 1 | $\infty$ | $0^1$ | $\infty$ |
| *3* | 5 | $0^0$ | $\infty$ | $0^\infty$ |
| *4* | $0^1$ | 5 | $0^0$ | $\infty$ |
| | | | | -1 |

R=1




Do dalszego podziału wybieramy wierzchołek o najmniejszej wartości kresu dolnego $G^3$. Z tablicy $C^3$ wynika, że tylko odcinki <1,3> oraz <4,1> mogą być rozpatrywane (zerowy koszt, maksymalna optymistyczna wartość kosztu wyłączenia $\infty$). Arbitralnie wybieramy <1,3> tworząc zbiory $G^7$ i $G^8$.

Weźmy pod uwagę zbiór $G^7$. Tworzymy macierz $C^7$ usuwając z macierzy $C^3$ wiersz 1 i kolumnę 3. Macierz redukuje się do jednego elementu. Zmodyfikowana i zredukowana macierz $C^7$ znajduje się poniżej:

| *Macierz $C^7$* | *1* |
|---|---|
| *4* | 0 |

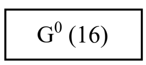
R=0

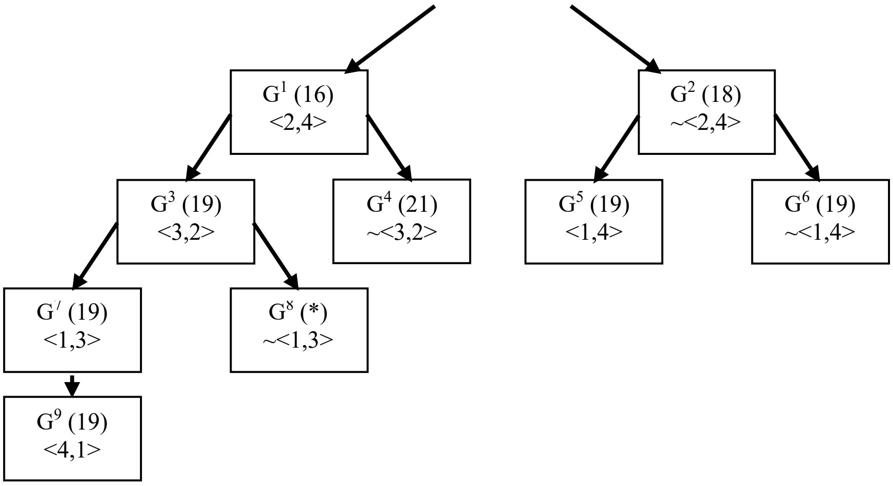
UWAGA – z tej macierzy wynika, że dołączając do wierzchołka $G^7$ jedyną możliwą marszrutę <4,1> otrzymujemy rozwiązanie końcowe, dla którego wartość funkcji kosztu równa się kresowi dolnemu równemu 19. Oznaczmy to rozwiązanie przez wierzchołek $G^9$.

Weźmy pod uwagę zbiór $G^8$. Tworzymy macierz $C^8$ z macierzy $C^3$ . Podstawiamy za $c_{13}=\infty$. Zmodyfikowana macierz $C^8$ znajduje się poniżej:
UWAGA – koszt redukcji wynosi $\infty$ (patrz wiersz 1). Kres dolny byłby równy także $\infty$. Oznacza to, że wierzchołek ten nie będzie dalej dzielony – można dowieść, że nie odpowiada mu żadna marszruta. Pomijamy więc w dalszych rozważaniach ten wierzchołek.

| *Macierz $C^8$* | *1* | *3* |
|---|---|---|
| *1* | $\infty$ | $\infty$ |
| *4* | $0^\infty$ | $0^0$ |

R = $\infty$
(!)






Podział pozostałych zbiorów nie może dać rozwiązania lepszego. Otrzymane rozwiązanie jest optymalne, choć niekoniecznie jedyne. W celu stwierdzenia czy istnieją inne rozwiązania, należałoby dokonać podziału zbiorów $G^5$ i $G^6$.