Devoir Maison de mathématiques n° 2

7 Avril 2020

Exercice 1

Partie I.

1. Montrons que f est linéaire :

$$f(P) = (X+1)P$$

$\forall P, Q \in \mathbb{R}^2[X]$, on a :

$$\begin{aligned} f(P+\lambda Q) &= (X+1)(P+\lambda Q) \\ &= (X+1)P + (X+1)\lambda Q \\ &= (X+1)P + \lambda(X+1)Q \\ &= f(P) + \lambda f(Q) \end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire.

2. Déterminons le noyau et l'image de f

On peut écrire $P(X)$ sous la forme $P(X) = aX^2 + bX + c$

On a donc :

$$\begin{aligned} f(P) &= (X+1)P \\ f(aX^2+bX+c) &= aX^3 + bX^2 + cX + aX^2 + bX + c \\ &= aX^3 + (b+a)X^2 + (c+b)X + c \end{aligned}$$

On peut maintenant résoudre $f(P) = 0$

$$\begin{cases} a &= 0 \\ b+a &= 0 \\ c+b &= 0 \\ c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \end{cases}$$

Ce qui implique que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}(0)$

Ainsi f est injective.

On a d'après le théorème du rang :

$$\dim E_3 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

Avec E_3 l'espace des polynômes

Or $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ et $\dim E_3 = 4$, donc $\dim \operatorname{Im} f = 4$

On a ainsi $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(1, X, X^2, X^3)$

Donc $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 = 4$

Ainsi, f est surjective.

Pour conclure, f est injective et surjective, f est donc bijective.

3.

$$\begin{array}{lll} f(1) & = (X+1)1 & = X+1 \\ f(X) & = (X+1)X & = X^2+X \\ f(X^2) & = (X+1)X^2 & = X^3+X^2 \end{array}$$

4.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array} = \mathcal{M}_{\mathbb{R}^2[X],\mathbb{R}^3[X]}(A)$$

Partie II.

1. Montrons que g est linéaire :

D'après la définition de dérivation, on a :

$$(P+Q)'(1) = P'(1) + Q'(1)$$

et,

$$(\lambda P)'(1) = \lambda P'(1)$$

Ainsi, on a :

$$g(P + \lambda Q) = g(P) + g(\lambda Q) = g(P) + \lambda g(Q)$$

Donc g est linéaire.

2.

Sur $\mathbb{R}^3[X]$:

$$\begin{aligned} P(X) &= aX^3 + bX^2 + cX + d \\ P'(X) &= 3aX^2 + 2bX + c \\ P''(X) &= 6aX + 2b \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} P(1) &= a + b + c + d \\ P'(1) &= 3a + 2b + c \\ P''(1) &= 6a + 2b \end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Ker} g \Leftrightarrow \{(P(1); P'(1); P''(1))\} = (0, 0, 0)$

$$\left\{ \begin{array}{rl} a+b+c+d & = 0 \\ 3a+2b & = 0 \\ 6a+2b & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} a+b+c+d & = 0 \\ 2b & = -3a-c \\ a & = \frac{-2b}{6} = \frac{-1}{3}b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} a+b+c+d & = 0 \\ 2b & = b-c \\ a & = \frac{-1}{3}b \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} c & = \frac{1}{3}b + c - d \\ b & = -c \\ a & = \frac{-1}{3}b \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} a & = \frac{1}{3}c \\ b & = -c \\ d & = \frac{-1}{3}c \end{array} \right.$$

On a donc $\operatorname{Ker} g = \operatorname{vect}\left(\frac{1}{3}; -1; 1; -\frac{1}{3}\right)$

On a $\dim \operatorname{Ker} g = 1$ et de plus, $\operatorname{Ker} g$ n'est pas égal au vecteur nul, donc on en déduit que g n'est pas injective.

De plus, $\dim E \neq \dim \operatorname{Im} g$

avec $\dim E = 4$ et $\dim \operatorname{Im} g = 3$

On peut donc écrire $\operatorname{Im} g = \{(X^2; X; 1)\}$

Ainsi on peut dire que g n'est pas surjective. Donc, g n'est pas bijective.

3.

On peut calculer $g(1), g(X), g(X^2)$ et $g(X^3)$

On a $\operatorname{Im} g = \operatorname{vect}(1, X, X^2, X^3)$

On a donc :

$$\begin{aligned} g(1) &= (1,0,0) \\ g(X) &= (X,1,0) \\ g(X^2) &= (X^2, 2X, 2) \\ g(X^3) &= (X^3, 3X^2, 6X) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} g(1) &= 1 \\ g(X) &= 1 + X \\ g(X^2) &= 2 + 2X + X^2 \\ g(X^3) &= 6X + 3X^2 + X^3 \end{aligned}$$

On a ainsi la matrice suivante :

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} g(1) & g(X) & g(X^2) & g(X^3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \mathcal{M}\mathrm{at}\, g$$

Partie III.

On a :

$$\begin{aligned} h &= g \circ f \\ g \circ f &= \mathcal{M}\mathrm{at}\, g \times \mathcal{M}\mathrm{at}\, f = \mathcal{M}\mathrm{at}\, C \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1.

On a :

$$\begin{array}{cc} \mathcal{M}_{\varepsilon}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

2.

Calcul du déterminant :

$\det \mathcal{M}(f) = 3(2 - (1 \times (-1))) = 3(2+1) = 9 \neq 0$

Comme le déterminant est non-nul, on peut dire que la matrice est inversible, et que les vecteurs colonnes forment une base.

Aussi, comme det $\mathcal{M}(f) \neq 0$, on peut dire que l'application g est injective.

De plus, on sait que le rang d'une matrice $n \times n$ constituée des 3 vecteurs de la base, est n.

D'où ici, $rg(f) = 3$, ainsi, f est surjective.

Et comme, g est injective et surjective, g est bijective.

3.

Soient les vecteurs :

$$b_1 = (1,0,1), \quad b_2 = (1,1,1), \quad b_3 = (-1,1,0).$$

4. Montrons que la famille $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ est une base.

On obtient la matrice suivante :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On peut ainsi calculer le déterminant :

$$\begin{aligned} det\ \mathcal{B} &= 1(1 \times 0 - 1 \times 1) \\ &= 1(0-1) \\ &= (-1) \neq 0 \end{aligned}$$

Donc, la matrice est inversible, et on peut dire que la famille $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ forme une base.

5.

La matrice de passage $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(id)$ est tout simplement :

$$P = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir $\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(id)$, il suffit de faire P^{-1}.
Or, $P^{-1} = \frac{1}{\det\ P} \times^t \text{Com}\ P$
Ce qui nous donne :

$$P^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Déterminons la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$

On a,

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \alpha\vec{b_1} + \beta\vec{b_2} + \gamma\vec{b_3} = (2,0,1) \\ &= \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,1) + \gamma(-1,1,0) \\ &= (\alpha+\beta-\gamma, \beta+\gamma, \alpha+\beta) \end{aligned}$$

On peut donc procéder par identification via un système :

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha+\beta-\gamma &= 2 \\ \beta+\gamma &= 0 \\ \alpha+\beta &= 1 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \alpha-\gamma-\gamma &= 2 \\ \beta &= -\gamma \\ \alpha-\gamma &= 1 \Leftrightarrow \gamma = -1+\alpha \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \alpha-2(-1+\alpha) &= 2 \\ \alpha+2-2\alpha &= 2 \\ -\alpha &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \beta &= 1 \\ \gamma &= -1 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow f(x_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc $f(x_1) = \vec{b_2} - \vec{b_3}$

$$f(x_2) = \alpha\vec{b_1} + \beta\vec{b_2} + \gamma\vec{b_3} = (0,3,2)$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \alpha+\beta-\gamma & =0 \\ \beta+\gamma & =3 \\ \alpha+\beta & =2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \alpha+3-\gamma-\gamma & =0 \\ \beta & =3-\gamma \\ \alpha+3-\gamma & =2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} -1+\gamma+3-\gamma-\gamma & =0 \\ \beta & =3-\gamma \\ \alpha & =-1+\gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \alpha & =1 \\ \beta & =1 \\ \gamma & =2 \end{array}\right. \Leftrightarrow f(x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc

$$f(x_2) = \vec{b_1} + \vec{b_2} + 2\vec{b_3}$$

$$f(x_3) = \alpha\vec{b_1} + \beta\vec{b_2} + \gamma\vec{b_3} = (-1,0,1)$$

$$\left\{\begin{array}{rl} \alpha+\beta-\gamma & =-1 \\ \beta+\gamma & =0 \\ \alpha+\beta & =1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \alpha+\beta-\gamma & =-1 \\ \beta & =-\gamma \\ \alpha-\gamma & =1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rl} 1+\gamma-\gamma-\gamma & =1 \\ \beta & =-\gamma \\ \alpha & =1+\gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \gamma & =2 \\ \beta & =-2 \\ \alpha & =3 \end{array}\right.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x_3) &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 3\vec{b_1} - 2\vec{b_2} + \vec{b_3} \end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a donc :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(f) : (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}) \xrightarrow[\mathcal{B}]{\mathcal{E}} (\mathbb{R}^3, \mathcal{E}) \xrightarrow[\mathcal{M}_{x \in P^{-1}}(id)]{id} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B})$$

Ainsi,

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(f) = C = B \times P^{-1}$$

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 3

1.

Soit

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det\,\mathcal{M}(f) = 0$$

Donc la matrice n'est pas inversible.

• Déterminons le noyau de l'application linéaire f :

Pour déterminer $\operatorname{Ker} f$, on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on calcule $\mathcal{M}(f).X = 0$.

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x + 2y + 2z & = 0 \\ -y - z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = -2y - 2z \\ y & = -z \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = 2z - 2z = 0 \\ y & = -z \end{array} \right.$$

Ainsi

$$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z), x = 0, y = -z, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

D'où $\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}\{-e_2 + e_3\}$

• Déterminons l'image de l'application linéaire f :

Par le théorème du rang, on sait que :

$$\dim \mathcal{E} = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

Sachant que $\dim \operatorname{Ker} f$ et $\dim \mathcal{E} = 3$ car $(\mathbb{R}^3)$, on a donc $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

Pour déterminer $\operatorname{Im} f$, on va utiliser les vecteurs de la base $\mathcal{E}$.

On a :

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f$ De plus,

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\0 & -1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Donc, $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f$

Or $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, ils sont linéairement indépendants, ils engendrent donc un espace vectoriel de dim 2 inclus dans $\operatorname{Im} f$ qui est aussi de dim 2.

Ainsi, on a : $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$ (dans $\mathcal{E}$)

2.

• Ces espaces sont-ils supplémentaires ?

On a toujours d'après le théorème du rang $\dim \mathcal{E} = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

Pour montrer que ces sous-espaces sont supplémentaires, il suffit de montrer que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.

Soient :

$$X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$$

Avec

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f &= \operatorname{vect}(0, -1, 1)\\ &= \operatorname{vect}(u)\end{aligned}$$

Donc ici, $X \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

De plus, $X \in \operatorname{Im} f \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,
$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha + 2\beta + 2\gamma\\-\beta - \gamma\\0\end{pmatrix}$

Donc si X vérifie les 2 équations précédentes, on a :

$$\begin{pmatrix}\alpha + 2\beta + 2\gamma\\-\beta - \gamma\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-a\\a\end{pmatrix}$$

Ce qui équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\gamma & = 0 \\ -\beta - \gamma & = -a \\ 0 & = a \end{cases}$$

Comme $a = 0$, $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, on a bien prouvé que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f \subset \{0\}$

Cependant, d'après la réciprque du théorème du rang, comme $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, ils contiennent l'élément neutre.

On a toujours, $\{0\} \subset \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$

Donc $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$. Ainsi, les 2 sev sont supplémentaires.

• f est-elle une projection ?

Soient les 2 sous-espaces vectoriels suivant :

$$U = \text{vect}\{(0, -1, 1)\} \text{ et } V = \text{vect}\{(1, 0, 0); (2, -1, 0)\}$$

Calculons $proj_v^u$:

$$(x, y, z) = a(b_1) + b(b_2) + c(b_3)$$
$$(x, y, z) = a(0, -1, 1) + b(1, 0, 0) + c(2, -1, 0)$$

$$\begin{cases} x & = 0a + b + 2c \\ y & = -a + 0b + -c \\ z & = a + 0b + 0c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b & = x - 2c \\ -c & = y + z \\ a & = z \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b & = x + 2y + 2z \\ c & = -y - z \\ a & = z \end{cases}$$

On obtient :

$$(x, y, z) = zb_1 + (x + 2y + 2z)b_2 + (-y - z)b_3$$

La projection sur U parralèlement à V (où $U = \text{vect}(b_1)$) et $V = \text{vect}\{(b_2, b_3)\}$ vérifie :

$$proj(b_1) = b1$$
$$proj(b_2) = 0$$
$$proj(b_3) = 0$$

Donc,

$$\begin{aligned} proj(x, y, z) &= proj(xb_1 + (x + 2y + 2z)b_2 + (-y - z)b_3) \\ &= zproj(b_1) + (x + 2y + 2z)proj(b_2) + (-y - z)proj(b_3) \\ &= z \times b_1 \end{aligned}$$

On peut ainsi exprimer dans la base canonique : $(0, -z, z)$

$$proj_v^u(x, y, z) = (0, -z, z)$$

Les 3 coordonnées sont colinéaires, c'est une application de rang 1.

• f est-elle une symétrie ?

Pour savoir si f est une symétrie, on calcul $f \circ f$ (f^2).

Calculons donc A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f^2 \neq Id_3 \Rightarrow f \text{ n'est pas une symétrie.}$$

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E.

• Pour la démonstration, nous allons d'abord supposer que $f \circ p = p \circ f$.

$\forall x \in \mathrm{Ker}(p), p(x) = 0$ par définition du noyau.

A partir de notre hypothèse :

$$\begin{aligned} p \circ f(x) &= f \circ p(x) \\ &= f(p(x)) \\ &= f(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car f est un endomorphisme

Donc $\mathrm{Ker}\, p$ est stable par f.

De même $\forall y \in \mathrm{Im}\, p, \exists x \in F,$ tel que $y = p(x)$ (définition de l'image de p).

D'après notre hypothèse, on peut écrire :

$$f(y) = f(p(x)) = p(f(x))$$

Donc $f(y)$ est antécédent de $f(x)$, donc $f(y) \in \mathrm{Im}\, p$.

L'image de p, $\mathrm{Im}\, p$ est stable par f.

• Réciproque :

Supposons que $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont stables par f.

p est une projection donc $F = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$

Soit $x \in \mathrm{Ker}\, p$ alors $f(p(x)) = f(0) = 0$ et $p(f(x)) = 0$ car $\mathrm{Ker}\, p$ stable par f.

Soit $y \in \mathrm{Im}\, p, \exists x \in F,$ tel que $y = p(x)$.

$$f(p(y)) = f(p(p(x))) = f(p^2(x)) = f(p(x))$$

car p est une projection

donc $f(p(y)) = f(y)$ et $f(y) \in \operatorname{Im} p$ car $\operatorname{Im} p$ est stable par f.