Exercices DPU1

Novembre 2020

Exercice 1.2

1)

On a :

$$d_H(\hat{w}_1, \tilde{w}) \leq d_H(v, \tilde{w}) \quad \forall v \in \mathcal{C}\{0,1\}^m$$

Or

$$d_H(w, \tilde{w}) \leq k$$

Donc

$$d_H(\hat{w}_1, \tilde{w}) \leq k$$

De même

$$d_H(\hat{w}_2, \tilde{w}) \leq k$$

En sommant :

$$d_H(\hat{w}_1, \tilde{w}) + d_H(\hat{w}_2, \tilde{w}) \leq 2k$$

Or d_H est une distance, donc :

$$d_H(\hat{w}_1, \hat{w}_2) \leq d_H(\hat{w}_1, \tilde{w}) + d_H(\hat{w}_2, \tilde{w})$$
$$d_H(\hat{w}_1, \hat{w}_2) \leq 2k$$

2)

$$d_H(\hat{w}_1, \hat{w}_2) \leq 2k$$
$$d_H(\hat{w}_1, \hat{w}_2) \leq 2\left\lfloor \frac{\delta(\mathcal{C}) - 1}{2} \right\rfloor$$
$$d_H(\hat{w}_1, \hat{w}_2) \leq \delta(\mathcal{C}) - 1$$

Or $\delta(\mathcal{C})$ est le minimum de la distance de Hamming entre 2 mots différents.
Si :

$$d_H(\hat{w}_1, \hat{w}_2) \leq \delta(\mathcal{C}) - 1$$

Alors, la seule solution est :

$$\hat{w}_1 = \hat{w}_2$$

3)

On a :

$$d_H(\hat{w}_1, \tilde{w}) \leq d_H(v, \tilde{w}) \quad \forall v \in \mathcal{C}\{0,1\}^m$$

Donc :

$$\hat{w}_1 = \arg \min_{v \in \mathcal{C}(\{0,1\}^m)} d_H(\tilde{w}, v)$$

Non, cela ne suffit pas à démontrer le théorème.

4)

D'après la définition $\hat{w}_1$ a au plus k bits différents du mot d'origine

$$d_H(w, \hat{w}_1) \leq k$$

Mais

$$\hat{w}_1 = \arg \min_{v \in \mathcal{C}(\{0,1\}^m)} d_H(\tilde{w}, v)$$

Donc :

$$d_H(w, \hat{w}_1) = \delta(\mathcal{C})$$

5)

$$\left\lfloor \frac{\delta(\mathcal{C}) - 1}{2} \right\rfloor < k < \delta(\mathcal{C}) - 1$$

Si

$$\left\lfloor \frac{\delta(C) - 1}{2} \right\rfloor < k \quad \text{(voir remarque 1.3)}$$

Alors $\mathcal{C}$ est un l-correcteur

Exercice 1.3

1)

$\mathcal{C}$ est une application injective

$$\mathcal{C} : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}^2$$

L'ensemble des mots du code est l'image de $\{0, 1\}$ par $\mathcal{C}$, $\{00, 11\}$ noté :

$$\{0, 1\} = \{\mathcal{C}(u), u \in \{0, 1\}\}$$

2)

- Redondance :

  D'après la définition 1.6 :

  redondance = 2-1 = 1
- Rendement :

  rendement = $\rho = \frac{1}{2}$
- Distance minimale :

$$\delta(\mathcal{C}) = \min_{\substack{v, w \in \mathcal{C}(\{0,1\}), \\ v \neq w}} d_H(v, w)$$
$$= d_H(00, 11) = 2$$

3)

La capacité de ce code à détecter les erreurs de transmission est :

$$k = \delta(\mathcal{C}) - 1 = 2 - 1 = 1$$

Donc, on peut détecter 1 seule erreur.

4)

La capacité de ce code à corriger les erreurs de transmission est :

$$k = \left\lfloor \frac{\delta(\mathcal{C}) - 1}{2} \right\rfloor$$
$$= \left\lfloor \frac{2 - 1}{2} \right\rfloor$$
$$= 0$$

Ce qui signifie que le code est donc impossible à corriger.

5)

$$\Omega = \{ii\}^{m \times n} \text{ pour } i \in \{0, 1\}$$

6)

7)

Exercice 1.5

1)

On note d un majorant de $\delta(\mathcal{C})$

$$d = n - m + 1$$
$$d = 4$$
$$\delta(\mathcal{C}) \leq 4$$
$$k \leq \left\lfloor \frac{\delta(\mathcal{C}) - 1}{2} \right\rfloor$$
$$k \leq \left\lfloor \frac{4 - 1}{2} \right\rfloor$$
$$k \leq 1$$

3)

En procédant au même raisonnement que dans le 1), on en déduit que $n = 5$ C'est un code parfait

4)

3

5)

2