DPU 2 - Devoir Maison

May 10, 2021

Exercice 2.1

Application $\mathcal{C}_1$

Soit l'application $\mathcal{C}_1$, défine dans le tableau ci-dessous :

$u \in \{0,1\}^3$	$\mathcal{C}_1(u)$
000	0000000
001	0010110
010	0101000
011	0111110
100	1000101
101	1010011
110	1101101
111	1111011

Cette application est-elle un code ?

D'après le tableau, à chaque ligne de $\mathcal{C}_1(u)$, correspond une et une seule ligne de la colonne u. Ce qui veut dire que pour tout $w \in \mathcal{C}_1(u)$, il existe un seul antécédent dans $\{0,1\}^3$. Cette application est injective, c'est donc un code.

Ce code est-il linéaire ?

Vérifions que :

$$(i) \quad \forall \lambda \in \{0,1\}, \forall u \in \{0,1\}^3, \mathcal{C}_1(\lambda u) = \lambda \mathcal{C}_1(u)$$
$$(ii) \quad \forall u,v \in \{0,1\}^3, \mathcal{C}_1(u+v) = \mathcal{C}_1(u) + \mathcal{C}_1(v)$$

(i) est vraie pour $\lambda = 1$, évident.
Pour $\lambda = 0, \mathcal{C}_1(0) = \mathcal{C}_1(000) = 0000000 = 0 \times \mathcal{C}_1(000)$.
Donc (i) est vraie.
On a vérifié que $\forall u,v \in \{0,1\}^3, \mathcal{C}_1(u+v) = \mathcal{C}_1(u) + \mathcal{C}_1(v)$. On peut simplifier les calculs pour le cas $u + 0 = u$ et $\mathcal{C}(0) = 0$, le cas u où $v = 0$ conduit à l'égalité demandée. De même pour le cas $u = v$.
Donc (ii) est vraie, l'application $\mathcal{C}_1$ est linéaire.

Matrice génératrice

On choisit comme base évidente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice génératrice est obtenue par application de $\mathcal{C}_1$ sur chacune des lignes de la base. On obtient la matrice G_1 suivante :

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcul de la distance minimale

On calcule la distance H pour chaque image $\mathcal{C}_1$.
Le résultat est dans le tableau ci-dessous :

$u \in \{0,1\}^3$	$w = \mathcal{C}_1(u)$	$H(w)$
000	0000000	0
001	0010110	3
010	0101000	2
011	0111110	5
100	1000101	3
101	1010011	4
110	1101101	5
111	1111011	6

La distance minimale $\delta(\mathcal{C}_1) = 2$

Capacité de correction

$$\begin{aligned} k &= \left\lfloor \frac{\delta(\mathcal{C}_1) - 1}{2} \right\rfloor \\ k &= 0 \end{aligned}$$

Application $\mathcal{C}_2$

En suivant le même raisonnement, $\mathcal{C}_2$ est injective, c'est donc un code. Elle est linéaire.
Sa matrice génératice est :

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La distance minimale $\delta(\mathcal{C}_2) = 4$
Capacité de correction $k = 1$.

Application $\mathcal{C}_3$

En suivant le même raisonnement, $\mathcal{C}_3$ est injective, c'est donc un code. Elle est linéaire.
Sa matrice génératice est :

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La distance minimale $\delta(\mathcal{C}_3) = 3$
Capacité de correction $k = 1$.

Identification des classes connues : $\mathcal{C}_3$ est un code de répétition sur les 6 premiers bits. Le dernier bit est un bit de parité impair pour les 3 premiers bits du code.

Application $\mathcal{C}_4$

En suivant le même raisonnement, $\mathcal{C}_4$ est injective, c'est donc un code. Elle est linéaire.

Sa matrice génératice est :

$$G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La distance minimale $\delta(\mathcal{C}_4) = 4$

Capacité de correction $k = 1$.

Exercice 2.3

On considère le code $\mathcal{C}$ de matrice génératrice Sa matrice génératice est :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice de contrôle

G est une matrice génératice normalisée de la forme $(I_3 P)$.

La matrice de contrôle Y s'écrit :

$$Y = \begin{pmatrix} P \\ I_3 \end{pmatrix}$$

Donc

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Capacité de correction

On écrit le tableau donnant $Im(\mathcal{C})$ avec les poids correspondant

$u \in \{0,1\}^3$	$w = \mathcal{C}(u)$	$H(w)$
000	000000	0
001	001101	3
010	010011	3
011	011110	4
100	100111	4
101	101010	3
110	110100	3
111	111001	4

Ainsi $\delta(\mathcal{C}) = \min\limits_{\substack{w \in \mathcal{C}\{0,1\}^6 \\ w \neq 0}} H(w) = 3$

Donc

$$\begin{aligned} k &= \left\lfloor \frac{\delta(\mathcal{C}) - 1}{2} \right\rfloor \\ k &= 1 \end{aligned}$$

Calculons le syndrome de $\tilde{w_1} = 101111$ et $\tilde{w_2} = 111111$.
$S(\tilde{w_1}) = (101)$
$S(\tilde{w_2}) = (110)$
On écrit le tableau standard au poids $k = 1$

$e \in \bar{B_1}$	$S(e) \in \{0,1\}^3$	$H(e)$
000001	001	1
000010	010	1
000100	100	1
001000	101	1
010000	011	1
100000	111	1

D'après la table $\tilde{e_1} = 001000$ on corrige $\tilde{w_1}$ par $\hat{w_1} = \tilde{w_1} + \tilde{e_1}$
$\hat{w_1} = 101111 + 001000 = 100111$

Le syndrome $S(\tilde{w_2})$ n'est pas trouvé dans le tableau standard, le mot $\tilde{w_2}$ comporte donc plus de $k = 1$ erreurs.