```
In [1]: import matplotlib.pyplot as plt
        import math
        import numpy as np
```

```
In [2]: # скорость света: 3*10^8 м/с
        c=3e8
        # Из долей скорости света к скорости
        def c2v(cc):
            return cc*c
        # из скорости в доли скорости света
        def v2c(v):
            return v/c

        # Множитель Лоренца
        def lorentz(v):
            cc = v2c(v)
            return math.sqrt(1 - cc*cc)

        # Преобразование Лоренца координат из неподвижной в движущуюся СО
        def x2moving(x, t, v):
            return (x - v*t)/lorentz(v)

        # Преобразование Лоренца времени из неподвижной в движущуюся СО
        def t2moving(x, t, v):
            return (t - v2c(v)*x/v)/lorentz(v)

        # Преобразование массы
        def m_rel(m,v):
            return  m/lorentz(v)

        def mc2(m):
            return m*c*c
```

39.31. При какой скорости υ движения тела[1] релятивистское сокращение длины составляет 1 %? 50 %?

39.32. Собственное среднее время жизни одной из нестабильных элементарных частиц (время, измеренное в системе отсчета, в которой эта частица покоится) $\tau_0 = 2{,}2$ мкс. Пучок таких частиц движется со скоростью $\upsilon = 0{,}95c$. Какова средняя длина l их пробега в отсутствие столкновений?

39.33. При какой скорости движения кинетическая энергия тела в 3 раза превышает энергию покоя?

\newcommand{\lorentz}[1]{\sqrt{\large{1-\frac}}

\newcommand{\divlorentz}[2]{\large\frac{#1}{\sqrt{\large{1-\frac}}}

39.31 ¶

Релятивистское сокращение длины $l = l_0\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$

> Теория тут такая. Мы измерили координаты конца тела в системе отсчета наблюдателя в момент t. Получили координату начала тела x_1 и координату x_2 конца тела. Этим координатам в системе отсчета, связанной с телом, соответствуют координаты $x_1' = \frac{x_1 - \upsilon t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$ и $x_2' = \frac{x_2 - \upsilon t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$.
>
> Длина в системе отсчета наблюдателя равна $l = x_2 - x_1$
>
> Длина в системе тела равна $l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - \upsilon t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - \upsilon t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$
>
> Тем самым в системе наблюдателя длина тела $l = l_0\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$

Итак, нам надо найти скорость, при которой сокращение длины составляет заданный процент.

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{l}{l_0}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{l^2}{l_0^2}$$

$$v = c\sqrt{1 - \frac{l^2}{l_0^2}}$$

1. Сокращение составляет 1%: $\frac{l}{l_0} = 0.99$
2. Сокращение составляет 50%: $\frac{l}{l_0} = 0.5$

In [5]:
```
dl=0.99
cc = math.sqrt(1-dl*dl)
cc, c2v(cc)
```

Out[5]: `(0.14106735979665894, 42320207.93899768)`

In [6]:
```
dl=0.5
cc = math.sqrt(1-dl*dl)
cc,c2v(cc)
```

Out[6]: `(0.8660254037844386, 259807621.13533157)`

Ответ:

1. Скорость составит 0.14 скорости света, или $4.2 \cdot 10^7$ м/с
2. Скорость составит 0.87 скорости света, или $2.6 \cdot 10^8$ м/с

39.32

Пусть в системе координат наблюдателя частица родилась в точке $x_0 = 0$ в момент времени $t_0 = 0$, а распалась в точке $x_1 = l$ в момент времени τ. Найдём, как связаны время жизни частицы T и наблюдаемое время τ.

В собственной системе координат частица не двигалась. Она находилась в координате $x' = 0$ с момента времени $t'_0 = 0$ по момент времени $t'_1 = T$.

Время t и t' связаны по формуле $t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ и $t = \frac{t + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Подставим во вторую формулу $x' = 0$ и $t' = T$

Получим $\tau = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ - это момент времени по часам наблюдателя, когда частица распадётся.

Точка, в которой частица распадётся $x = \frac{x' + vT}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{vT}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. Так как частица родилась в точке с координтой $x = 0$, то длина пробега - это координата точки, в которой частица распалась.

$$l = \frac{vT}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

In [10]:
```
T=2.2e-6 # 2.2 мкс
v = 0.95*c # 0.95 с (скорости света)
l = v*T/lorentz(v)
l # в метрах
```

Out[10]: `2008.0070487157923`

Ответ: 2 километра

39.33

Полная энергия частицы равна $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Когда у частицы нет потенциальной энергии, то полная энергия состоит из энергии покоя $E_0 = mc^2$ и кинетической энергии T: $E = E_0 + T$

Тогда вопрос задачи формулируется так: чему равна скорость частицы, если $\frac{T}{E_0} = 3 = n$

$$n = \frac{E-E_0}{E_0} = \frac{E}{E_0} - 1 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{mc^2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = n + 1$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{(n+1)^2}}$$

In [12]:
```
n=3
r = 1.0/(n+1)
cc = math.sqrt(1 - r*r)
cc
```

Out[12]: `0.9682458365518543`

Ответ: скорость должна быть 0.97 скорости света

39.37. На сколько изменяется масса покоя пружины с жесткостью 5 кН/м при сжатии на 10 см?

39.38. До какой скорости должен был бы разогнаться поезд, чтобы его кинетическая энергия была в 3 миллиарда раз меньше энергии покоя?

39.39. При какой скорости v движения частицы ее кинетическая энергия равна энергии покоя?

39.40. В результате ядерной реакции масса покоя вещества уменьшается на 0,1 %. Какая энергия выделяется в результате использования 1 г ядерного топлива?

39.37

До сжатия пружины её энергия была $E_0 = m_0c^2$

Когда пружину сжали, добавилась энергия $\Delta E = k\frac{x^2}{2}$

Прибавка к релятивистской массе $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{kx^2}{2c^2}$

In [13]:
```
k=5000 # 5кН/м
x = 0.1 # 10 см
delta_m = k*x*x/(2*c*c)
delta_m
```

Out[13]: `2.777777777777778e-16`

Ответ: масса пружины увеличивается на $2.8 \cdot 10^{-16}$ кг

39.40

Уменьшение массы на Δm приводит к высвобождению энергии $E = \Delta mc^2$

In [17]:
```
percent = 0.1/100 # 0.1%
m = 1.0/1000 # 1g
delta_E = percent*m*c*c

delta_E, delta_E/1e9
```

Out[17]:
```
(90000000000.0, 90.0)
```

Ответ: $9 \cdot 10^{10}$ Дж

39.51. Релятивистская частица распадается на два одинаковых «осколка». Скорость одного из них равна нулю. Найдите скорость v частицы до распада и скорость v_2 второго «осколка», если известно, что при распаде такой же *неподвижной* частицы оба «осколка» имеют скорость u.

39.52. Частица движется со скоростью $0{,}04c$. Во сколько раз увеличится ее кинетическая энергия, если скорость движения увеличится: а) в 2 раза; б) в 20 раз?

39.51

В системе отсчёта, связанной с частицей, направим ось координат в ту же сторону, как и в системе координат наблюдателя. Тогда скорость одной из частиц будет $-u$, а второй u.

По правилу сложения скоростей найдём скорости частиц в системе наблюдателя:

$v_1 = \frac{-u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$, $v_2 = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}$

По условию задачи $v_1 = 0$, следовательно $v = u$. Подставим найденное значение скорости частицы до распада в формулу для v_2: $v_2 = \frac{2u}{1+\frac{u^2}{c^2}}$

Ответ: скорость частицы перед распадом была равна u. Скорость второго оскола в системе отсчета наблюдателя $v_2 = \frac{2u}{1+\frac{u^2}{c^2}}$

39.52

начальная скорость $v_0 = 0.04c$. Её полная энергия $W_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_0{}^2}{c^2}}} = 1.0008mc^2$

Кинетическая энергия $T_0 = W_0 - mc^2 = 0.0008mc^2$

Для скорости $v_1 = 2v_0$ полная энергия равна $W_1 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_1{}^2}{c^2}}} = 1.0032mc^2$, а кинетическая равна $T_1 = 0.0032mc^2$.

Кинетическая энергия выросла в 4 раза.

Для скорости $v_2 = 20v_0$: $W_2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v_2{}^2}{c^2}}} = 1.6667mc^2$, и кинетическая энергия равна $T_2 = 0.6667mc^2$.

Кинетическая энергия возросла в 832.3 раза.

In [83]:
```
v0 = 0.04;W0 = 1/math.sqrt(1-v0*v0)
print("W0", W0)
v1=2*v0; W1 = 1/math.sqrt(1-v1*v1)
print("W1", W1)
v2=20*v0; W2 = 1/math.sqrt(1-v2*v2)
print("W2", W2)
print("T2/T0", (W2-1)/(W0-1))
```

```
W0 1.0008009612817945
W1 1.00321544238141
W2 1.6666666666666667
T2/T0 832.3331998932925
```

39.54. Пусть в системе отсчета K расстояние между точками, в которых произошли два события, равно l, а промежуток времени между этими событиями равен τ.

Обозначим $S = c\tau - l$. В системе отсчета K' соответствующая величина $S' = c\tau' - l'$, где l' и τ' — расстояние и промежуток времени между *теми же* событиями. Исходя из постулатов теории относительности докажите, что величины S и S' имеют одинаковый знак или *обе* обращаются в нуль.

39.54

Пусть в системе координат K координаты двух событий в пространстве времени равны (x_0, t_0) и (x_1, t_1). Про эти координаты нам известно, что $x_1 - x_0 = l$, $t_1 - t_0 = \tau$.

Надём соответствующие координаты (x_0', t_0') и (x_1', t_1') в системе координат K', которая двигается относительно K со скоростью v:

$$\begin{cases} x_0' = \frac{x_0 - vt_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ t_0' = \frac{t_0 + \frac{v}{c^2}x_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, t_1' = \frac{t_1 + \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Найдём, чему равняется $c\tau' - l'$

$$c\tau' - l' = c(t_1' - t_0') - (x_1' - x_0') = c\frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1 - (t_0 - \frac{v}{c^2}x_0)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - vt_1 - (x_0 - vt_0)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} =$$

$$= c\frac{\tau - \frac{v}{c^2}l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l - v\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(c\tau - \frac{v}{c}l - (l - v\tau))$$

Преобразуем выражение в скобках. Раскроем скобки и сгруппируем члены:

$c\tau - \frac{v}{c}l - (l - v\tau) = c\tau + v\tau - \frac{v}{c}l - l = c\tau(1 + \frac{v}{c}) - l(1 + \frac{v}{c}) = (c\tau - l)(1 + \frac{v}{c})$

Итого мы получили: $S' = c\tau' - l' = (c\tau - l)\frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = S\frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Так как скорость системы отсчета K' не превосходит скорость света: $|v| \leq c$, то $1 + \frac{v}{c} \geq 0$. Тем самым в выражении для S' множитель неотрицателен: $\frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \geq 0$

Следовательно, если система K' движется со скоростью, меньшей скорости света, то этот множитель больше нуля и S' и S одного знака. Множитель $\frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ может обраться в ноль только в одном случае - когда $v = -c$, то есть система отсчета K' движется со скоростью света навстречу наблюдателю. В этой системе отсчета $S' = 0$.

Утверждение задачи доказано.

39.55. Поскольку одновременность событий относительна, возникает вопрос: существует ли такая система отсчета K', в которой попадание мяча в окно происходит одновременно с ударом по этому мячу?

39.55

Обозначим событие "удар по мячу" координатами (x_0, t_0), а событие "попадание в окно" координатами (x_1, t_1). Пусть мяч летит со скоростью u, намного меньшей скорости света, тогда $x_1 - x_0 = u(t_1 - t_0)$.

В системе отсчета K', двигающейся со скоростью v относительно наблюдателя, координаты этих событий будут (x_0', t_0') и (x_1', t_1').

Запишем условие "мяч влетел в окно одновременно с ударом". Очевидно, это $t_1' = t_0'$.

Выпишем явные формулы для t_1' и t_0': $t_0' = \frac{t_0 + \frac{v}{c^2} x_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, t_1' = \frac{t_1 + \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Тогда $t_1' = t_0'$ выполняется в том и только том случае, когда $\frac{t_1 - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_0 - \frac{v}{c^2} x_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Избавимся от знаменателя и соберём члены с временем слева, а члены с координатами справа.
$t_1 - t_0 = \frac{v}{c^2}(x_1 - x_0) = \frac{v}{c^2} u(t_1 - t_0)$

Такак $t_1 - t_0 > 0$, то на это значение можно сократить обе части равенства.

$\frac{uv}{c^2} = 1$

Выразим необходимую скорость v через u: $v = \frac{c^2}{u}$

Так как $u < c$, то скорость v должна быть выше скорости света.

Ответ: такая система отсчета не существует.

39.56. Найдите импульс протона, у которого кинетическая энергия вдвое больше энергии покоя.

39.56

Полная энергия протона $W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = T + mc^2$, где T - кинетическая энергия. Так как по условию задачи $T = 2mc^2$, то $W = 3mc^2$.

Следовательно $\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3mc^2$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{9} \implies \frac{v^2}{c^2} = \frac{8}{9} \implies v = \frac{2\sqrt{2}}{3}c \implies v \approx 0.94c$$

Импульс равен $p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3mv = 2\sqrt{2}mc$

Масса протона равна $1,672 \cdot 10^{-27}$ кг.

Импульс

In [86]:
```
math.sqrt(8/9)
```

Out[86]:
```
0.9428090415820634
```

In [87]:
```
m = 1.672e-27
2*math.sqrt(2)*m*c
```

Out[87]:
```
1.418739045772689e-18
```

Ответ: импульс протона равен $1.4 \cdot 10^{-18}$ кг·м/с

In [ ]:
```

```