2022年度

修士論文題目

関連圏からのデカルト圏の普遍的再構成

学生証番号　45-216034

フリガナ　ミノウラハルヤ

氏　　名　箕浦　晴弥

Contents

§ 1 Introduction

対称モノイド圏論は、ホモトピー論を出自として MacLane により創始された ([Mac63])。モノイド圏論では、圏に函手的なモノイド演算が乗った構造であるモノイド圏を扱う。対称モノイド圏論は、その中でも特にモノイド演算が (同型を除いて) 可換な対称モノイド圏を扱う分野である。これは直積でない「積」と呼ばれるもの、例えばテンソル積やスマッシュ積などの一般化である。

対称モノイド圏論は、圏論の中では比較的弱い構造を扱う理論である。他の圏論の多くの分野、例えばトポス理論やアーベル圏論では、全ての有限直積があること、即ちデカルト圏であることは大前提として、その上にさらに構造を加えていく。対照的に、対称モノイド圏論においてはデカルト圏が最も強い構造である：対称モノイド圏に構造を付加してデカルト圏より強い構造になるならば、それは単にデカルト圏の理論で扱えばよい。即ち、対称モノイド圏論とは「対称モノイド圏とデカルト圏の中間構造たちを調べる分野」であると言うことができる。

対称モノイド圏論の視点で見れば、デカルト圏とは次のような構造だとみなせる：デカルト圏とは、対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ と自然同型 $\varphi_{X,Y} : \mathcal{C}(-,X) \times \mathcal{C}(-,Y) \cong \mathcal{C}(-,X \otimes Y)$ の組 $(\mathcal{C},\varphi)$ のことである。この同型を弱めて、対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ によい自然変換 $\mathcal{C}(-,X) \times \mathcal{C}(-,Y) \to \mathcal{C}(-,X \otimes Y)$ を付加した構造や、対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ によい自然変換 $\mathcal{C}(-,X) \times \mathcal{C}(-,Y) \leftarrow \mathcal{C}(-,X \otimes Y)$ を付加した構造を考える。これらはそれぞれ関連圏 (relevance category) / アフィン圏 (affine category) と呼ばれるものと一致し、対称モノイド圏とデカルト圏の中間構造として知られている ([Pet02])。関連圏 / アフィン圏 は、対称モノイド圏にそれぞれ「対角射」「終対象への標準射」を付加したものとして定義される。即ち、関連圏とは対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ とよいモノイド自然変換 $\Delta : Id_{\mathcal{C}} \to - \otimes -$ の組であり、アフィン圏は対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ であって単位対象が終対象であるようなものである (ただし、ここで函手 $- \otimes -$ は各対象 X に $X \otimes X$ を対応させる自己函手のことである)。関連圏には例えば集合と単射の圏 $\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ などがある。アフィン圏には例えば凸空間の圏 Conv などがある。

関連圏やアフィン圏は、対称モノイド圏とデカルト圏のよい中間構造と思える。具体的には、対称モノイド圏に「対角射」を追加すれば関連圏に、「終対象」を追加すればアフィン圏になるし、デカルト圏は関連圏に「終対象」を追加したものと見なせ、またアフィン圏に「対角射」を追加したものとも見なせる。ゆえに、これら中間構造を調べることは対称モノイド圏とデカルト圏の関係性を調べるのに有用である。例えば、与えられた対称モノイド圏 $\mathcal{M}$ から普遍的なデカルト圏 $CC[\mathcal{M}]$ を構成する問題 (直積を付加する問題) は、与えられた対称モノイド圏 $\mathcal{M}$ から普遍的な関連圏 $RC[\mathcal{M}]$ を構成する問題 (対角射を付加する問題) と与えられた関連圏 $\mathcal{R}$ から普遍的なデカルト圏 $CC[\mathcal{R}]$ を構成する問題 (終対象を付加する問題) とに分割できる。実際アフィン圏については、アフィン論理への関心も相まって多くの研究がある。しかし、関連圏についてはまだ調べられてこなかった。

$$
\begin{tikzcd}
\text{アフィン圏} \arrow[r, "\text{終対象を忘却}"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\perp"] & \text{対称モノイド圏} \arrow[l, bend right, "L"'] \\
\text{デカルト圏} \arrow[u, "\text{対角射を忘却}"] \arrow[r, "\text{終対象を忘却}"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\perp"] & \text{関連圏} \arrow[l, bend right, "\Lambda"'] \arrow[u, "\text{対角射を忘却}"']
\end{tikzcd}
$$

本論文では、関連圏について調べる足掛かりとして、デカルト圏との関係を調べることを試みた。具体的には、関連圏がしばしばデカルト圏の関連部分圏として構成されることに着目し、逆に与えられた関連圏がどのようなデカルト圏のよい関連部分圏となるのかを調べた。結果、次の事実を得た：任意の関連圏に対し、それをよい関連部分圏に持つデカルト圏は存在すれば一意である。さらに全ての関連圏に対して、そのようなデカルト圏が存在するかどうか、また存在すればそれがどのようなデカルト圏であるかを計算する方法を与えた。

本論文で主に扱うのは、与えられた関連圏からそれをよい関連部分圏に持ちうるデカルト圏を構成する普遍的な操作 Λ である。操作 Λ は、あらゆる関連圏 $\mathcal{R}$ に対してデカルト圏 $\Lambda(\mathcal{R})$ 及び函手 $H_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to \Lambda(\mathcal{R})$ の組 $(\Lambda(\mathcal{R}), H_{\mathcal{R}})$ を 1 つずつ返すものである。この $H_{\mathcal{R}}$ は必ずしも単射的 (即ち忠実かつ対象上本質的に単射) であるとは限らないが、もしも $\mathcal{R}$ が何かデカルト圏 $\mathcal{C}$ のよい関連部分圏として構成されているときには、必ず $\Lambda(\mathcal{R}) \cong \mathcal{C}$ である。特に、$\mathcal{R}$ をよい関連部分圏に持つデカルト圏 $\mathcal{C}$ は同型を除いて一意的であることが従う。さらにこの操作 Λ は、関連圏からデカルト圏を構成する方法として普遍的である。全てのデカルト圏は自然な方法で関連圏と見なせるが、この忘却操作に対して Λ は左随伴である。

Λ-construction の着想の説明をする。関連圏からデカルト圏を作る方法は「終対象を追加する」ものであるはずだから、対称モノイド圏からアフィン圏を作る方法に一致するか少なくとも類似するはずである。後者は実際に知られていて、対称モノイド圏から、アフィン圏を作る (左) 普遍的な構成が [HT12] の系として得られている ([HT12], [HS19])。この普遍的な構成、L-construction(named by [HS19]) は、与えられた対称モノイド圏の射を余分に増やしたのち適切な同値関係で割る構成である。特にモノイド単位対象への射を全て同一視するような同値関係で割るので、モノイド単位対象が終対象になる。標語的に言えば、L-construction は「対称モノイド圏の単位対象を終対象にする構成」である。L-construction は関連圏に施しても一般にはデカルト圏にはならない。例えば $\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ は素朴な方法で関連圏の構造を持ち、$\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ に L-construction を施して得られる圏 $L(\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}})$ は Set と非同型であるが、$\Lambda(\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}) \cong \mathrm{Set}$ である。L-construction 及び Λ-construction の普遍性を踏まえれば、$L(\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}})$ はデカルト圏ではないことがわかる。$L(\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}})$ については [HT12] の Thm4.4 に類似物の言及があり、Tennent category([Ten90]) との関連が示唆されている。

構成 L は対称モノイド圏のモノイド単位対象を終対象にするものであったが、上に述べたようにテンソル積を直積にするものではなかった。これに対して 構成 Λ は、関連圏を受け取り、その

モノイド単位対象を終対象に、テンソル積を直積にするものである。

本論文では、関連圏 (relevance category) の定義及び基本的な例を述べたのち、関連圏の「デカルト圏化」操作である構成 Λ を記述する。

§ 1.1　記法

本論文では簡明さのために、圏の射の合成の記号として $\triangleright$ を用いる。$f \triangleright g := g \circ f$ である。すなわち、この記法では射の合成を図式を読む順番と同じ順番で書くことになる。

古くは情報系の文脈では合成を $f; g$ と書く文献もあるとされる ([BW90]) が、数学では大変分かりにくくなるためこれを避ける。

§ 2　関連圏

introduction で述べたように、関連圏とは対称モノイド圏 $\mathcal{R}$ に「対角射」$\{\Delta_X : X \to X \otimes X\}_{X \in \mathcal{R}}$ を付加した構造である。関連圏は対応 $\mathcal{R}(Z, X) \times \mathcal{R}(Z, Y) \to \mathcal{R}(Z, X \otimes Y); (f, g) \mapsto \Delta_Z \triangleright (f \otimes g)$ を伴うから、関連圏は対称モノイド圏 $\mathcal{R}$ に自然変換 $\{\mathcal{R}(-, X) \times \mathcal{R}(-, Y) \to \mathcal{R}(-, X \otimes Y)\}_{X, Y \in \mathcal{R}}$ を付加した構造を持つ。逆に、よい自然変換 $\{\varphi_{X,Y} : \mathcal{R}(-, X) \times \mathcal{R}(-, Y) \to \mathcal{R}(-, X \otimes Y)\}_{X, Y \in \mathcal{R}}$ があれば対角射 $\Delta_X := \varphi_{X,X,X}(id_X, id_X) : X \to X \otimes X$ が得られるので、関連圏は対称モノイド圏 $\mathcal{R}$ に自然変換 $\{\mathcal{R}(-, X) \times \mathcal{R}(-, Y) \to \mathcal{R}(-, X \otimes Y)\}_{X, Y \in \mathcal{R}}$ を付加した構造に他ならないと言える。デカルト圏は対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ によい自然同型 $\{\mathcal{C}(-, X) \times \mathcal{C}(-, Y) \cong \mathcal{C}(-, X \otimes Y)\}_{X, Y \in \mathcal{C}}$ を付加した構造であったから、関連圏は lax-デカルト圏とも呼ぶべきものである。関連圏は [Pet02] で substructural categories の一つとして定義されたのが初出と思われる。

Definition 2.1：関連圏

関連圏とは、対称モノイド圏 $\underline{\mathcal{R}} = (\underline{\underline{\mathcal{R}}}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ と自然変換 $\Delta_X : X \to X \otimes X$ の組 $(\mathcal{R}, \Delta)$ であって、Δ がモノイド自然変換で結合的かつ可換であるようなものである。ただし、自然変換 Δ がモノイド自然変換で結合的かつ可換であるとは、以下の４つの図式を可換にすることである。（煩雑さを避けるため、結合律の同型 α によって結ばれる対象同士は記号の濫用によって同一視している）

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[r, "\Delta_{X \otimes Y}"] \arrow[d, "="'] & X \otimes X \otimes Y \otimes Y \arrow[d, "X \otimes \gamma_{X,Y} \otimes Y"] \\
X \otimes Y \arrow[r, "\Delta_X \otimes \Delta_Y"'] & X \otimes Y \otimes X \otimes Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\Delta_I"] \arrow[d, "="'] & I \otimes I \arrow[d, "="] \\
I & I \otimes I \arrow[l, "\rho_I (= \lambda_I)"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Delta_X"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & X \otimes X \arrow[d, "X \otimes \Delta_X"] \\
X \otimes X \arrow[r, "\Delta_X \otimes X"'] & X \otimes X \otimes X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Delta_X"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & X \otimes X \arrow[d, "id_{X \otimes X}"] \\
X \otimes X \arrow[r, "\gamma_{X,X}"'] & X \otimes X
\end{tikzcd}$$

関連圏を定義したので関連函手を定義する。関連函手は関連圏の間の強対称モノイド函手で対角射を保つものである。

Definition 2.2：関連函手
$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ を関連圏とする。関連函手とは、強対称モノイド函手 $F = (F, \theta, \varepsilon) : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ であって、下の図式を可換にするもののこと。

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\Delta_{F(X)}"] \arrow[d, "="'] & F(X) \otimes F(X) \arrow[d, "\cong"', "\theta_X"] \\ F(X) \arrow[r, "F(\Delta_X)"'] & F(X \otimes X) \end{tikzcd}$$

集合と単射の圏 $\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ は素朴な方法で関連圏とみなせるのであった。この事実は次の 2 つから従うことだと理解できる。まず、全てのデカルト圏は素朴な方法で関連圏とみなせる。また、デカルト圏のモノ射は直積で閉じていて対角射はモノ射なので、モノ射の全体は「関連部分圏」 になる。

Example 2.3：デカルト圏
全てのデカルト圏は素朴な方法で関連圏とみなせる。特に、Set は関連圏である。

Definition 2.4：関連部分圏
$\mathcal{R} = (\underline{\mathcal{R}}, \Delta)$ を関連圏とする。$\mathcal{R}$ の関連部分圏とは、$\underline{\mathcal{R}}$ のモノイド部分圏 $\underline{\mathcal{N}} \subset \underline{\mathcal{R}}$ であって、任意の $\underline{\mathcal{N}}$ の対象 X に対し $\underline{\mathcal{R}}$ の射 Δ_X が $\underline{\mathcal{N}}$ の射であるようなもののことである。

関連部分圏は自然な方法で関連圏とみなせる。

Example 2.5：モノ射の成す関連部分圏
デカルト圏 $\mathcal{C}$ に対し、$\mathcal{C}$ のモノ射全体の成す部分圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ は 関連部分圏である。正則モノ射や分裂モノ射についても同様である。特に、$\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ は関連圏である。

分裂モノ射の例は、特に $\mathcal{C}$ として有界半束をその順序構造でデカルト圏と見なしたものを考えると面白い。$\mathcal{C}$ の分裂モノ射は恒等射しかないので、分裂モノ射の全体は離散圏に関連圏の構造を入れたものになる。離散対称モノイド圏とは即ち可換モノイドであるが、このモノイドが関連圏の構造を持つことは冪等であることを意味する。つまり、この操作は bounded semilattice から順序を忘れて冪等可換モノイドをつくる操作と解釈できる。

モノ射の成す関連部分圏の類似例として、可微分多様体の圏の全ての埋め込みの成す部分圏なども関連部分圏である。

§ 3　構成 Λ

本節では構成 Λ の定義を述べる。Λ は、与えられた関連圏からデカルト圏を構成する普遍的な操作である。以下、$\mathcal{R} = (\mathcal{R}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma, \Delta)$ を関連圏とする。これから本節全体を通して、デカルト圏 $\Lambda(\mathcal{R})$ を定義する。圏 $\Lambda(\mathcal{R})$ を定義した後に $\Lambda(\mathcal{R})$ が持つ素朴なモノイド構造がデカルト積を与えることを示す。圏 $\Lambda(\mathcal{R})$ を構成するに当たって、まず双圏様の中間構造 $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ を構成し、その後 $\Lambda(\mathcal{R})$ を作る。

§ 3.1　構成 Λ の発想・動機付け

関連圏はしばしばデカルト圏の関連部分圏として構成される。本論文では、与えられた関連圏がどのようなデカルト圏のよい関連部分圏として構成されるのかを調べる。

そのために注目したい関連圏の例はデカルト圏のモノ射達が成す関連部分圏である。デカルト圏 $\mathcal{C}$ に対し、その全てのモノ射の成す部分圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ は関連部分圏であった。この $\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ をよい関連部分圏として持つデカルト圏は $\mathcal{C}$ である。そこで構成 Λ を、$\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ に Λ を施したとき $\mathcal{C}$ が復元されるように作る。

まず、$\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ の対象は同じであるから、$\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}]$ の対象は $\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ の対象と定義すればよい。次に射の定義を考える。デカルト圏における「グラフ」は全てモノ射であったことに注目する。

第一案として、各 $X, Y \in \mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ に対し、$\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}]$ における X から Y への射集合 $\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}](X, Y)$ を

$$\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}](X,Y) := \{f : X \to X \times Y \text{ in } \mathcal{C}^{\mathrm{mono}} \mid (\text{ 適切な条件式 })\}$$

と定義することを思いつく。ただし「適切な条件式」とは f が $\mathcal{C}$ でグラフであることと同値な $\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ の条件式である (これは実現可能だが仔細には触れない)。こうすれば確かに $\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}](X, Y) \cong \mathcal{C}(X, Y)$ だが、このままでは合成がうまく定義できない：$f : X \to X \times Y$ と $g : Y \to Y \times Z$ の安直な合成は $f \triangleright (X \times g) : X \to X \times Y \times Z$ で、これから $X \to X \times Z$ の射を得るためには射影 $X \times Y \times Z \to X \times Z$ が必要であるが、射影は多くの場合モノ射ではないので使えない (そもそも全ての射影がある関連圏はただのデカルト圏である)。

そこで第二案として、各 $X, Y \in \mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ に対し、$\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}]$ における X から Y への射を、「パラメータ付きグラフ」として定義することを考える。すなわち、

$$\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}](X,Y) := \{(A, f) \mid A \in \mathcal{C}^{\mathrm{mono}},\ f : X \to A \times Y \text{ in } \mathcal{C}^{\mathrm{mono}}\} / (\text{適切な同値関係})$$

とすることを試みる。ただしここで、適切な同値関係とは、$(A, f) \sim (B, g)$ であるのがちょうど $\mathcal{C}$ で $f \triangleright \pi_Y = g \triangleright \pi_Y$ であるときになるような同値関係である。このような同値関係は実際 $\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ の構造のみから得られる。本節では、その構成の詳細を記述する。

本節では、上記第二案の構成の詳細及び well-defined 性の証明を述べる。§3.2 で構成の第一段階として双圏様の中間構造を定義し、§3.3 でその商として $\Lambda[\mathcal{R}]$ を定義し、その well-defined 性を

証明する。§3.4 では構成した圏 $\Lambda[\mathcal{R}]$ がデカルト圏になっていることを証明する。

本稿における Λ の構成は、[HT12] の構成が大きなヒントになっているが、重大な違いがある。[HT12] ではまず中間構造として双圏を構成して、その local category の連結成分を取ることで欲しい圏を得ていた。本稿でも概ねそのような方針で構成するのだが、[HT12] で双圏になっていたものに相当する中間構造は惜しくも双圏にならない。この問題に起因して、連結成分を取ることで圏が得られることが自明ではなくなっている。そのため、最終的に得る圏の well-defined 性の証明 (prop 3.3.4) がわざわざ書かれている。

§ 3.2　中間構造 $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の構成

本 §3.2 節では、圏 $\Lambda(\mathcal{R})$ を定義する前準備として、中間構造 $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ を構成する。

$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ は、双圏に似た次の 4 つの構造を持っている：

(1) 対象、あるいは 0-cell の集まり $\mathrm{Ob}(\mathcal{B}(\mathcal{R}))$

(2)$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の各対象 $\overline{X}, \overline{Y}$ 毎の圏 $\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X}, \overline{Y})$

($\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X}, \overline{Y})$ の対象を 1-射と、射を 2-射と呼ぶ。)

(3) 各 1-射 $v : \overline{X} \to \overline{Y}, w : \overline{Y} \to \overline{Z}$ 毎の合成 1-射 $v \triangleright w : \overline{X} \to \overline{Z}$

(4)$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ 各対象 $\overline{X}$ 毎の恒等 1-射 $id_{\overline{X}} : \overline{X} \to \overline{X}$

しかしながら、$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ は 2-射の間の水平合成を持たないため、双圏にはならない。

$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ は $\Lambda(\mathcal{R})$ の定義に用いる。$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の対象は $\Lambda(\mathcal{R})$ の対象に対応し、$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射の同値類が $\Lambda(\mathcal{R})$ の射に対応する。$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 2-射は、$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射から $\Lambda(\mathcal{R})$ の射をつくるための同値関係として機能する。

以下、$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ を定義する。$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の対象は $\mathcal{R}$ の対象とする。ただし、可読性のために、各 $\mathcal{R}$ の対象 X に対し、それに対応する $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ における対象を $\overline{X}$ と書くことにする。即ち、$\mathrm{Ob}(\mathcal{B}(\mathcal{R})) := \left\{\overline{X} | X \in \mathcal{R}\right\}$ である。はじめに、各対象 $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}(\mathcal{R}))$ 毎に圏 $\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X}, \overline{Y})$ を定義する。

Definition 3.2.1：$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ **の 1-射**

$X, Y \in \mathcal{R}$ とする。$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の $\overline{X}$ から $\overline{Y}$ への 1-射とは、$A \in \mathcal{R}$ と $\mathcal{R}$ の射 $f : X \to A \otimes Y$ の組 (A, f) のことである。

このように定めた $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射、その同値類が $\Lambda(\mathcal{R})$ の射となる。同値関係として「有限個の 2-射で結ばれていること」を用いる。その 2-射は下記のとおり定義する。

Definition 3.2.2： $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ **の 2-射**

$X, Y \in \mathcal{R}$ とし、$(A, f), (B, g)$ を $\overline{X}$ から $\overline{Y}$ への $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射とする。$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の (A, f) から (B, g) への 2-射とは、$\mathcal{R}$ の射 $k : A \otimes Y \to B \otimes Y$ であって下の図式の三角形及び四角形を可換にするもののことである。

$$\begin{tikzcd}
 & A\otimes Y \arrow[r, "A\otimes\Delta_Y"] \arrow[d, "k"] & A\otimes Y\otimes Y \arrow[d, "k\otimes Y"] \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & \\
 & B\otimes Y \arrow[r, "B\otimes\Delta_Y"'] & B\otimes Y\otimes Y
\end{tikzcd}$$

2-射の例を 2 つ挙げておく。

Proposition 3.2.3： 自明な 2-射

$B, X, Y \in \mathcal{R}$ とし、(A, f) を $\overline{X}$ から $\overline{Y}$ への $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射、$a : A \to B$ を $\mathcal{R}$ の射とする。このとき、
(1)$g := f \triangleright (a \otimes Y)$ とおくと、(B, g) は $\overline{X}$ から $\overline{Y}$ への $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射である。
(2)$\mathcal{R}$ の射 $k := (a \otimes Y)$ は $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 2-射 $k : (A, f) \to (B, g)$ を与える。

Proof. (1) 定義より従う。
(2) $\otimes$ の函手性から従う。 下図の右の四角形の左上から右下への射は、上下どちらも $a \otimes \Delta_Y$ である。

$$\begin{tikzcd}
 & A\otimes Y \arrow[r, "A\otimes\Delta_Y"] \arrow[d, "k:=a\otimes Y"] & A\otimes Y\otimes Y \arrow[d, "k\otimes Y=a\otimes YY"] \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g:=f\triangleright k"'] & & \\
 & B\otimes Y \arrow[r, "B\otimes\Delta_Y"'] & B\otimes Y\otimes Y
\end{tikzcd}$$

□

Proposition 3.2.4： 対角射は 2-射である

$X, Y \in \mathcal{R}$ とし、(A, f) を $\overline{X}$ から $\overline{Y}$ への $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射とする。このとき、
(1)$g := f \triangleright (A \otimes \Delta_Y)$ とおくと、$(A \otimes Y, g)$ は $\overline{X}$ から $\overline{Y}$ への $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射 である。
(2)$\mathcal{R}$ の射 $k := A \otimes \Delta_Y$ は $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 2-射 $k : (A, f) \to (A \otimes Y, g)$ を与える。

Proof. (1) 定義より従う。
(2)Δ が結合的であったことから従う。右側の四角形が可換であることは $\Delta_Y \triangleright (Y \otimes \Delta_Y) = \Delta_Y \triangleright (\Delta_Y \otimes Y)$ であることによる。

$$
\begin{tikzcd}
 & A \otimes Y \arrow[r, "A\otimes\Delta_Y"] \arrow[dd, "k:=A\otimes\Delta_Y"] & A \otimes Y \otimes Y \arrow[dd, "k\otimes Y=A\otimes\Delta_Y\otimes Y"] \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g:=f\triangleright k"'] & & \\
 & A \otimes Y \otimes Y \arrow[r, "AY\otimes\Delta_Y"'] & A \otimes Y \otimes Y \otimes Y
\end{tikzcd}
$$

□

Definition 3.2.5: local category of $\mathcal{B}(\mathcal{R})$
各 $X, Y \in \mathcal{R}$ に対し、圏 $\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X}, \overline{Y})$ を以下のように定める：対象は $\overline{X}$ から $\overline{Y}$ への 1-射, 射はその間の 2-射とし、2-射同士の (垂直) 合成、及び恒等 2-射は素直に定義する。これらは well-defined で、圏の公理を満たす。

以上で圏 $\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X}, \overline{Y})$ が定義された。本小節の残りで 1-射の合成と 2-射の左 whiskering を定義し、中間構造 $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の定義を終える。

Definition 3.2.6: 1-射の合成
$X, Y, Z \in \mathcal{R}$ とし、(A, f) を $\overline{X}$ から $\overline{Y}$ への、(B, g) を $\overline{Y}$ から $\overline{Z}$ への $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射とする。$\overline{X}$ から $\overline{Z}$ への $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射 $(A, f) \triangleright (B, g)$ を $(A \otimes B, h)$ と定める。ただし $\mathcal{R}$ の射 $h : X \to A \otimes B \otimes Z$ は次の列の合成で定める：

$$X \xrightarrow{f} A \otimes Y \xrightarrow{A\otimes g} A \otimes B \otimes Z.$$

この合成は結合律を満たす。

Proposition 3.2.7: 2-射の左 whiskering
$X, Y, Z \in \mathcal{R}$ とし、(A, f) を $\overline{X}$ から $\overline{Y}$ への、$(B_1, g_1), (B_2, g_2)$ を $\overline{Y}$ から $\overline{Z}$ への $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射とする。$k : (B_1, g_1) \to (B_2, g_2)$ を $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 2-射とする。このとき、$\mathcal{R}$ の射 $f * k : A \otimes B_1 \otimes Z \to A \otimes B_2 \otimes Z$ を $f * k := A \otimes k$ で定めると、これは $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 2-射 $f * k : (A, f) \triangleright (B_1, g_1) \to (A, f) \triangleright (B_2, g_2)$ を与える。

Proof. 次の図式の上下が等しいことを示せばよい：

$$
\begin{tikzcd}
 & & A \otimes B_1 \otimes Z \arrow[r, "AB\otimes\Delta_Z"] \arrow[dd, "f*k"] & A \otimes B_1 \otimes Z \otimes Z \arrow[dd, "(f*k)\otimes Z:=A\otimes k\otimes Z"] \\
X \arrow[r, "f"] & A \otimes Y \arrow[ur, "A\otimes g_1"] \arrow[dr, "A\otimes g_2"'] & & \\
 & & A \otimes B_2 \otimes Z \arrow[r, "AB\otimes\Delta_Z"'] & A \otimes B_1 \otimes Z \otimes Z
\end{tikzcd}
$$

k は 2-射であったから、次の図式は可換である：

$$
\begin{tikzcd}
 & B_1 \otimes Z \arrow[r, "B\otimes\Delta_Z"] \arrow[dd, "k"] & B_1 \otimes Z \otimes Z \arrow[dd, "k\otimes Z"] \\
Y \arrow[ur, "g_1"] \arrow[dr, "g_2"'] & & \\
 & B_2 \otimes Z \arrow[r, "B\otimes\Delta_Z"'] & B_2 \otimes Z \otimes Z
\end{tikzcd}
$$

この図式に $A \otimes -$ を施せば、求める図式の可換性を得る。

□

以上で中間構造 $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の定義が完了した。次節で圏 $\Lambda(\mathcal{R})$ を定義し、次々節でそのデカルト構造を示す。

§ 3.3　圏 $\Lambda(\mathcal{R})$ の構成

本節では圏 $\Lambda(\mathcal{R})$ の定義を完成する。まず前述の通り $\Lambda(\mathcal{R})$ の射を $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射の同値類として定義する。次に合成を $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射の合成から誘導されるものとして定義するが、これの well-defined 性は非自明であるから、これを示す。

Definition 3.3.1： $\Lambda(\mathcal{R})$ の対象
$\mathrm{Ob}(\Lambda(\mathcal{R})) := \mathrm{Ob}(\mathcal{B}(\mathcal{R}))(= \mathrm{Ob}(\mathcal{R}))$ とする。

Definition 3.3.2： $\Lambda(\mathcal{R})$ の射
$\Lambda(\mathcal{R})(\overline{X}, \overline{Y}) := \mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X}, \overline{Y})/\sim$ とする。ただし $\sim$ は $\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X}, \overline{Y})$ 上の二項関係「2 射で繋がれている」が生成する同値関係。即ち、$\Lambda(\mathcal{R})(\overline{X}, \overline{Y})$ は $\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X}, \overline{Y})$ の連結成分全体の集合である。

これからこの商集合の上に合成が誘導されることを示す (lem3.3.4)。そのために、先に必要な技術的な補題 (lem3.3.3) を示しておく。

lemma 3.3.3 は次のような意味を持つ補題と解釈できる。前述のとおり、$\Lambda[\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}]$ の射は $\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ の射をグラフとするようなものである。一方で、$\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ の射はそれ自体素朴に $\Lambda[\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}]$ の射だとみなせるべきである。即ち、単射写像 $f : X \to Y$ に対して、f 自身を $\Lambda[\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}]$ に埋め込んだ射 $[1, f]$ と f のグラフ $[X, (id_X, f)]$ は、($\Lambda[\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}]$ の射として) 同一であるべきだ。lem3.3.3 はまさしくこれを主張するものである。

Lemma 3.3.3： $\mathcal{R}$ の射のグラフは $\Lambda(\mathcal{R})$ ではもとの $\mathcal{R}$ の射と同じ
$(A, f) : \overline{X} \to \overline{Y}$ in $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ に対し、$(A, f) \sim (X \otimes A, \Delta_X \triangleright (X \otimes f))$ である。

$$(X \xrightarrow{\quad f \quad} A \otimes Y)$$

$$\sim \ (X \xrightarrow{\Delta_X} X \otimes X \xrightarrow{\quad X \otimes f \quad} X \otimes A \otimes Y)$$

Proof. 次のように同値で結ぶことができる。

$$\begin{aligned}
&(A, f) \\
\sim&(A \otimes Y, f \triangleright (A \otimes \Delta_Y)) \\
\sim&(A \otimes A \otimes Y, f \triangleright (\Delta_A \otimes \Delta_Y)) \\
\sim&(A \otimes Y \otimes A, f \triangleright (\Delta_A \otimes \Delta_Y) \triangleright (A \otimes \gamma_{AY} \otimes Y) \\
=&(A \otimes Y \otimes A, f \triangleright \Delta_{A \otimes Y})) \\
=&(A \otimes Y \otimes A, \Delta_X \triangleright (f \otimes f)) \\
\sim&(X \otimes A, \Delta_X \triangleright (X \otimes f))
\end{aligned}$$

これで示された。分かりやすさのために、同じ式変形の図式と string diagram を付しておく。

$$(X \xrightarrow{\quad f \quad} A \otimes Y)$$

$$\sim \ (X \xrightarrow{f} A \otimes Y \xrightarrow{\quad A \otimes \Delta_Y \quad} A \otimes Y \otimes Y) \qquad \text{(by prop 3.2.4)}$$

(by prop 3.2.3 and 3.2.7)

$$\sim \ (X \xrightarrow{f} A \otimes Y \xrightarrow{\quad A \otimes \Delta_Y \quad} A \otimes Y \otimes Y \xrightarrow{\quad \Delta_A \otimes YY \quad} A \otimes A \otimes Y \otimes Y)$$

$$= \ (X \xrightarrow{f} A \otimes Y \xrightarrow{\quad \Delta_A \otimes \Delta_Y \quad} A \otimes A \otimes Y \otimes Y) \qquad \text{(by functoriality of } \otimes)$$

$$\sim \ (X \xrightarrow{f} A \otimes Y \xrightarrow{\quad \Delta_{AY} \quad} A \otimes Y \otimes A \otimes Y) \qquad \text{(because } \Delta \text{ is monoidal)}$$

$$= \ (X \xrightarrow{\Delta_X} X \otimes X \xrightarrow{\quad f \otimes f \quad} A \otimes Y \otimes A \otimes Y) \qquad \text{(by naturality of } \Delta)$$

$$= \ (X \xrightarrow{\Delta_X} X \otimes X \xrightarrow{\quad X \otimes f \quad} X \otimes A \otimes Y \xrightarrow{\quad f \otimes AY \quad} A \otimes Y \otimes A \otimes Y)$$

$$\sim\ (X \xrightarrow{\Delta_X} X \otimes X \xrightarrow{\quad X \otimes f \quad} X \otimes A \otimes Y) \qquad \text{(by prop 3.2.3 and 3.2.7)}$$

以上で示された。参考までに、この証明を String Diagram を用いて書き直しておく。次のようになる：

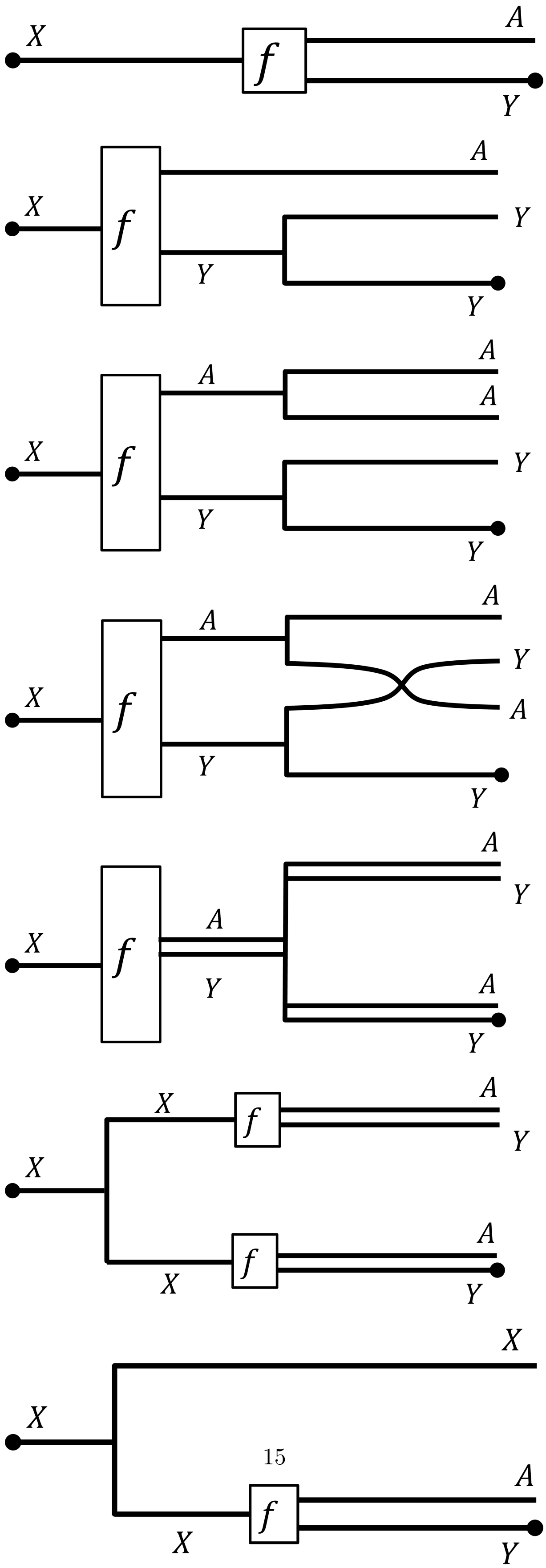

Figure 1: String Diagram による証明

□

Lemma 3.3.4： $\Lambda(\mathcal{R})$ **の射の合成の well-defined 性**
$X,Y,Z \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ とする。任意の $(A_1,f_1),(A_2,f_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X},\overline{Y}),\ (B_1,g_1),(B_2,g_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{Y},\overline{Z})$ に対し、$(A_1,f_1) \sim (A_2,f_2)$ かつ $(B_1,g_1) \sim (B_2,g_2)$ ならば、$(A_1,f_1) \triangleright (B_1,g_1) \sim (A_2,f_2) \triangleright (B_2,g_2)$ である。

Proof. 同値関係 $\sim$ は 2-射の生成する同値関係として定義されていたので、次の 2 つを示せばよい：
(1) 任意の $(A_1,f_1),(A_2,f_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X},\overline{Y}),(B,g) \in \mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{Y},\overline{Z})$ 及び $k:(A_1,f_1) \to (A_2,f_2)$ に対し、$(A_1,f_1) \triangleright (B,g) \sim (A_2,f_2) \triangleright (B,g)$ である。
(2) 任意の $(A,f) \in \mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X},\overline{Y}),(B_1,g_1),(B_2,g_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{Y},\overline{Z})$ 及び $l:(B_1,g_1) \to (B_2,g_2)$ に対し、$(A,f) \triangleright (B_1,g_1) \sim (A,f) \triangleright (B_2,g_2)$ である。

このうち (2) は prop 3.2.7 そのものである。従って、(1) を示せば十分である。

(1) を示す。$(A_1,f_1),(A_2,f_2)\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X},\overline{Y}),(B,g) \in \mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X},\overline{Y})$ 及び $k:(A_1,f_1) \to (A_2,f_2)$ を任意に固定する。$(A_1,f_1) \triangleright (B,g)$ から $(A_2,f_2) \triangleright (B,g)$ へ至る 2-射のジグザグを構成する。

$$(X \xrightarrow{f_1} A_1 \otimes Y \xrightarrow{A_1 \otimes g} A_1 \otimes B \otimes Z)$$

(by prop 3.2.7, lem 3.3.3)

$$\sim\ (X \xrightarrow{\quad f_1 \quad} A_1 \otimes Y \xrightarrow{\quad A_1 \otimes \Delta_Y \quad} A_1 \otimes Y \otimes Y \xrightarrow{A_1 Y \otimes g} A_1 \otimes Y \otimes B \otimes Z)$$

$$\sim\ (X \xrightarrow{f_1} A_1 \otimes Y \xrightarrow{A_1 \otimes \Delta_Y} A_1 \otimes Y \otimes Y \xrightarrow{A_1 Y \otimes g} A_1 \otimes Y \otimes B \otimes Z$$

$$\xrightarrow{k \otimes BZ} A_2 \otimes Y \otimes B \otimes Z) \qquad \text{(by prop 3.2.3, prop 3.2.7)}$$

$$=\ (X \xrightarrow{f_1} A_1 \otimes Y \xrightarrow{A_1 \otimes \Delta_Y} A_1 \otimes Y \otimes Y \xrightarrow{k \otimes Y} A_2 \otimes Y \otimes Y$$

$$\xrightarrow{A_2 Y \otimes g} A_2 \otimes Y \otimes B \otimes Z) \qquad \text{(by functoriality of } \otimes)$$

$$=\ (X \xrightarrow{f_2} A_2 \otimes Y \xrightarrow{A_2 \otimes \Delta_Y} A_2 \otimes Y \otimes Y$$

$$\xrightarrow{A_2 Y \otimes g} A_2 \otimes Y \otimes B \otimes Z) \qquad \text{(because } k \text{ is a 2-morphism from } (A_1,f_1) \text{ to } (A_2,f_2))$$

$$\sim\ (X \xrightarrow{f_2} A_2 \otimes Y \xrightarrow{A_2 \otimes g_2} A_2 \otimes B \otimes Z) \qquad \text{(by prop 3.2.7 and 3.3.3)}$$

以上で示された。 $\square$

Definition 3.3.5： $\Lambda(\mathcal{R})$ **の射の合成**

$\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \in \Lambda(\mathcal{R}), [A, f] \in \Lambda(\mathcal{R})(\overline{X}, \overline{Y}), [B, g] \in \Lambda(\mathcal{R})(\overline{Y}, \overline{Z})$ とする。これらの合成を $[A, f] \triangleright [B, g] := [(A, f) \triangleright (B, g)]$ で定める。これは lemma3.3.4 より well-defined である。

Definition 3.3.6： $\Lambda(\mathcal{R})$ **の恒等射**

各 $\overline{X} \in \Lambda(\mathcal{R})$ に対し、$id_{\overline{X}} := [I, \rho_X^{-1}]$ と定める。

Proposition 3.3.7： $\Lambda(\mathcal{R})$ **の結合則**

上記 composition は結合則を満たす。これは $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ で 1-射の結合則が成り立っていたことから従う。

Proposition 3.3.8： $\Lambda(\mathcal{R})$ **の単位律**

上記合成と identity は単位律を満たす。

Definition 3.3.9： **圏** $\Lambda(\mathcal{R})$

definition 3.3.1, 3.3.2, 3.3.5, 3.3.6 で与えられる構造達は、proposition3.3.7, 3.3.8 より、圏を成す。この圏を $\Lambda(\mathcal{R})$ と書くことにする。

§ 3.4 Cartesian Structure of the Category $\Lambda(\mathcal{R})$

以上で定義した $\Lambda(\mathcal{R})$ がデカルト圏になっていることを示す。実は $\mathcal{R}$ から引き継ぐモノイド構造がそのまま直積となる。まずモノイド構造を引き継ぐことを示し、その後それが直積の普遍性を持つことを示す。

Definition 3.4.1：$\Lambda(\mathcal{R})$ のモノイド構造
$\mathcal{R}$ を 関連圏とする。$\Lambda(\mathcal{R})$ は、素朴な方法で対称モノイド圏となる。モノイド積の函手 $\otimes'$ のみ明示する。$\otimes'$ を次のように定める。

$$
\begin{array}{ccccc}
\otimes' & : & \Lambda(\mathcal{R}) \times \Lambda(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \Lambda(\mathcal{R}) \\
 & & \Cup & & \Cup \\
 & & (X, Y) & \longmapsto & X \otimes Y \\
 & & \Big\downarrow & ([A,f],[B,g]) \mapsto [A \otimes B, f \Box g] & \Big\downarrow \\
 & & (X', Y') & \longmapsto & X' \otimes Y'
\end{array}
$$

ただし、$f \Box g := (f \otimes g) \triangleright (A \otimes \gamma_{X,B} \otimes Y)$ である。このように定めた $\otimes'$ は確かに well-defined である。

Proposition 3.4.3：$\Lambda[\mathcal{R}]$ の直積
簡単のため $\mathcal{C} := \Lambda[\mathcal{R}]$ とおく。$X, Y \in \mathcal{C}$ に対し、$(X \otimes Y, \pi_X, \pi_Y)$ は X と Y の直積である。ただし、$\pi_Y : X \otimes Y \to Y$ は、$\pi_Y := [X, id_{X \otimes Y}]$ で定める。$\pi_X : X \otimes Y \to X$ は、$\pi_X := [Y, \gamma_{X,Y}]$ で定める。

Proof. $Z \in \mathcal{C}$ を任意に取る。対応 $\varphi : \mathcal{C}(Z, X \otimes Y) \to \mathcal{C}(Z, X) \times \mathcal{C}(Z, Y)$ を $\varphi([C, h]) := ([C, h] \triangleright \pi_X, [C, h] \triangleright \pi_Y)$ で定める。φ が全単射であることを示す。

次の 3 つのことをすればよい。
(i) φ の逆対応 ψ を構成する。
(ii) $\psi \triangleright \varphi = id$ であることを示す。
(iii) $\varphi \triangleright \psi = id$ であることを示す。

(i) φ の逆対応 ψ を構成する。

$[A, f] : Z \to X,\ [B, g] : Z \to Y$ を任意に取る。$\mathcal{R}$ の射 $f \boxdot g$ を $f \boxdot g := \Delta_Z \triangleright (f \Box g)$ で定める。即ち $f \boxdot g$ は次の列の合成である：

$$Z \to Z \otimes Z \to (A \otimes X) \otimes (B \otimes Y) \to (A \otimes B) \otimes (X \otimes Y)$$

$\psi([A, f], [B, g]) := [A \otimes B, f \boxdot g]$ とする。ψ の well-defined 性を示す。次の 2 つを示せばよい：
(a) 任意の $(A_1, f_1), (A_2, f_2) : Z \to X, (B, g) : Z \to Y$ in $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ と $k : (A_1, f_1) \to (A_2, f_2)$ に対し、

$(A_1 \otimes B, f_1 \boxdot g) \sim (A_2 \otimes B, f_2 \boxdot g)$ である。
(b) 任意の $(A, f) : Z \to X, (B_1, g_1), (B_2, g_2) : Z \to Y$ in $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ と $l : (B_1, g_1) \to (B_2, g_2)$ に対し、$(A \otimes B_1, f \boxdot g_1) \sim (A \otimes B_2, f \boxdot g_2)$ である。

両者の証明は同様なので (a) のみ示す。$k \otimes BXY : (A_1 \otimes B, f_1 \boxdot g) \to (A_2 \otimes B, f_2 \boxdot g)$ は次の図式を可換にするから、確かに $(A_1 \otimes B, f_1 \boxdot g)$ から $(A_2 \otimes B, f_2 \boxdot g)$ への 2-射である。

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \otimes B \otimes X \otimes Y \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "k\otimes BXY"] & A_1 \otimes B \otimes X \otimes Y \otimes X \otimes Y \arrow[d, "k\otimes BXYXY"] \\
Z \arrow[ur, "f_1 \boxdot g"] \arrow[dr, "f_2 \boxdot g"'] & & \\
 & A_2 \otimes B \otimes X \otimes Y \arrow[r, "\Delta"] & A_1 \otimes B \otimes X \otimes Y \otimes X \otimes Y
\end{tikzcd}$$

(ii)$\psi \triangleright \varphi = id$ であることを示す。$[A, f] : Z \to X,\ [B, g] : Z \to Y$ を任意に取る。$([A \otimes B, f \boxdot g] \triangleright \pi_X,\ [A \otimes B, f \boxdot g] \triangleright \pi_Y) = ([A, f], [B, g])$ であることを示す。$([A \otimes B, f \boxdot g] \triangleright \pi_Y) = [B, g]$ であることのみ示す。

$$\begin{aligned}
[A \otimes B, f \boxdot g] \triangleright \pi_Y &= [A \otimes B \otimes X, f \boxdot g] \quad \text{(by def of } \triangleright \text{)} \\
&= [A \otimes B \otimes X, \Delta_Z \triangleright (f \otimes g) \triangleright (A \otimes \gamma_{X,B} \otimes Y)] \quad \text{(by def of } \boxdot \text{)} \\
&= [A \otimes X \otimes B, \Delta_Z \triangleright (f \otimes g)] \quad \text{(by prop 3.2.3)} \\
&= [Z \otimes B, \Delta_Z \triangleright (Z \otimes g)] \quad \text{(by prop 3.2.3)} \\
&= [B, g] \quad \text{(by prop 3.3.3)}
\end{aligned}$$

$([A \otimes B, f \boxdot g] \triangleright \pi_X) = [A, f]$ であることの証明も同様である。以上で $\psi \triangleright \varphi = id$ であることが示された。

(iii)$\varphi \triangleright \psi = id$ であることを示す。$[C, h] : Z \to X \otimes Y$ を任意に取る。$[C, h] = \psi(\varphi([C, h]))$ であ

ることを示す。

$\psi(\varphi([C,h]))$

$= \psi([C,h] \triangleright \pi_X, [C,h] \triangleright \pi_Y)$ (by def of φ)

$= \psi([C \otimes Y, h \triangleright (C \otimes \gamma_{X,Y})], [C \otimes X, h])$ (by def of $\triangleright$)

$= [C \otimes Y \otimes C \otimes X,\ (h \triangleright (C \otimes \gamma_{X,Y})) \boxdot h]$ (by def of ψ)

$= [C \otimes Y \otimes C \otimes X,\ \Delta_Z \triangleright ((h \triangleright (C \otimes \gamma_{X,Y})) \otimes h) \triangleright (CY \otimes \gamma_{X,CX} \otimes Y)]$ (by def of $\boxdot$)

$= [C \otimes Y \otimes C \otimes X,\ \Delta_Z \triangleright (h \otimes h) \triangleright (C \otimes \gamma_{X,Y} \otimes CXY) \triangleright (CY \otimes \gamma_{X,CX} \otimes Y)]$ (by functoriality of $\otimes$)

$= [C \otimes Y \otimes C \otimes X,\ h \triangleright \Delta_{CXY} \triangleright (C \otimes \gamma_{X,Y} \otimes CXY) \triangleright (CY \otimes \gamma_{X,CX} \otimes Y)]$ (by naturality of Δ)

$= [C \otimes Y \otimes C \otimes X,\ h \triangleright (\Delta_C \otimes \Delta_{XY}) \triangleright (C \otimes \gamma_{CX,Y} \otimes XY)]$ $(*)$

$= [C \otimes C \otimes X \otimes Y,\ h \triangleright (\Delta_C \otimes \Delta_{XY})]$ (by prop 3.2.3)

$= [C \otimes X \otimes Y,\ h \triangleright (C \otimes \Delta_{XY})]$ (by prop 3.2.3)

$= [C,\ h]$ (by prop 3.2.4 and prop 3.2.7)

上式中の $(*)$ の部分は下のように示される。

$\Delta_{CXY} \triangleright (C \otimes \gamma_{X,Y} \otimes CXY) \triangleright (CY \otimes \gamma_{X,CX} \otimes Y)$

$= (\Delta_C \otimes \Delta_{XY}) \triangleright (C \otimes \gamma_{C,XY} \otimes XY) \triangleright (C \otimes \gamma_{X,Y} \otimes CXY) \triangleright (CY \otimes \gamma_{X,CX} \otimes Y)$ (by monoidality of Δ)

$= (\Delta_C \otimes \Delta_X \otimes \Delta_Y) \triangleright (CCX \otimes \gamma_{X,Y} \otimes Y) \triangleright (C \otimes \gamma_{C,XY} \otimes XY) \triangleright (C \otimes \gamma_{X,Y} \otimes CXY) \triangleright (CY \otimes \gamma_{X,CX} \otimes Y)$ (by mo

$= (\Delta_C \otimes \Delta_X \otimes \Delta_Y) \triangleright (CCX \otimes \gamma_{X,Y} \otimes Y) \triangleright (CC \otimes \gamma_{X,Y} \otimes XY) \triangleright (C \otimes \gamma_{C,YX} \otimes XY) \triangleright (CY \otimes \gamma_{X,CX} \otimes Y)$ (by col

$= (\Delta_C \otimes \Delta_X \otimes \Delta_Y) \triangleright (CCX \otimes \gamma_{X,Y} \otimes Y) \triangleright (CC \otimes \gamma_{X,Y} \otimes XY) \triangleright (C \otimes \gamma_{C,Y} \otimes XY) \triangleright (CY \otimes \gamma_{X,X} \otimes Y)$ (by cohere

$= (\Delta_C \otimes \Delta_X \otimes \Delta_Y) \triangleright (C \otimes \gamma_{CXX,Y} \otimes Y) \triangleright (CY \otimes \gamma_{X,X} \otimes CY)$ (by coherence)

$= (\Delta_C \otimes \Delta_X \otimes \Delta_Y) \triangleright (CC \otimes \gamma_{X,X} \otimes YY) \triangleright (C \otimes \gamma_{CXX,Y} \otimes Y)$ (by coherence)

$= (\Delta_C \otimes \Delta_X \otimes \Delta_Y) \triangleright (C \otimes \gamma_{CXX,Y} \otimes Y)$ (by commutativity of Δ_X)

$= (\Delta_C \otimes \Delta_X \otimes \Delta_Y) \triangleright (CCX \otimes \gamma_{X,Y} \otimes Y) \triangleright (C \otimes \gamma_{CX,Y} \otimes XY)$ (by coherence)

$= (\Delta_C \otimes \Delta_{XY}) \triangleright (C \otimes \gamma_{CX,Y} \otimes XY)]$ (by monoidality of Δ)

上式中の (by coherence) と書かれた部分は六角形公理及び函手性・自然性のみから導かれる主張である。

以上で示された。 □

§ 4　universality of Λ construction

前節で定義した構成 Λ は、実は関連圏からデカルト圏を得る普遍的な方法になっている。今節ではこの普遍性を示す。まず $\mathcal{R}$ から $\Lambda(\mathcal{R})$ への素朴な埋め込みを定める。

Definition 4.1：ユニット函手 $H_{\mathcal{R}}$
函手 $H_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to \Lambda[\mathcal{R}]$ を次で定める：

$$
\begin{array}{ccccc}
H_{\mathcal{R}} & : & \mathcal{R} & \longrightarrow & \Lambda(\mathcal{R}) \\
 & & \cup & & \cup \\
 & & X & \longmapsto & X \\
 & & {\scriptstyle f}\downarrow & f \longmapsto [I, f \triangleright \rho_Y] & \downarrow \\
 & & Y & \longmapsto & Y
\end{array}
$$

$H_{\mathcal{R}}$ は関連函手である。

　そして Λ は次の普遍性を満たす（煩雑な議論を避けるため、２圏論的主張を１圏論的主張に弱めている）。

proposition 4.2: universality of Λ
$\mathcal{R}$ を関連圏とし、デカルト圏 $\mathcal{C} := \Lambda[\mathcal{R}]$ 及び関連函手 $H_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ を上で定めたものとする。
このとき、任意のデカルト圏 $\mathcal{D}$ 及び関連函手 $F = (F, \theta, \varepsilon) : \mathcal{R} \to \mathcal{D}$ に対し、
次を満たす（強）モノイド函手 $\overline{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が一意に存在する：
　$F = H_{\mathcal{R}} \triangleright \overline{F}$

Proof.　３ステップに分ける。(i) $\overline{F}$ の構成と well-definedness の証明
(ii) $\overline{-}$ が $H_{\mathcal{R}} \triangleright -$ の左逆であることの証明
(iii) $\overline{-}$ が $H_{\mathcal{R}} \triangleright -$ の右逆であることの証明

　(i) ($\overline{F}$ の構成と well-definedness の証明) 関連函手 $F = (F, \theta, \varepsilon) : \mathcal{R} \to \mathcal{D}$ に対し（強）モノイド函手 $\overline{F} = (\overline{F}, \overline{\theta}, \overline{\varepsilon}) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を対応させる操作 $\overline{(-)}$ を次で定める：
各 $\overline{X} \in \mathcal{C}$ に対し、$\overline{F}(\overline{X}) := F(X)$.
各 $[A, f] : \overline{X} \to \overline{Y}$ in $\mathcal{C}$ に対し、函手 $\overline{F}([A, f])$ を $\overline{F}([A, f]) := F(f) \triangleright \theta^{-1}_{A,Y} \triangleright \pi_{F(A),F(Y)}$ で定める。
ただし、$\theta_{A,Y} : F(A) \times F(Y) \to F(A \otimes Y)$ は F のモノイド函手としての構造の同型である。
分かりやすさのために追記する。これは下の列の合成のことである：
$F(X) \to F(A \otimes Y) \cong F(A) \times F(Y) \to F(Y)$.

　この $\overline{F}$ の well-definedness を示す。
$(A, f), (B, g) : X \to Y$ in $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ と $k : (A, f) \to (B, g)$ を任意に取る。$\overline{F}([A, f]) = \overline{F}([B, g])$ を示

せばよい。

$\overline{F}$ は relevance functor であったから、次の図式は可換：

$$
\begin{tikzcd}
 & & F(A\otimes Y\otimes Y) \arrow[r, "\cong"] \arrow[dd, "F(k\otimes Y)"] & F(A\otimes Y)\times F(Y) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dd, "F(k)\times F(Y)"] & & F(A)\times F(Y)\times F(Y) \arrow[ddr, "\pi"] & \\
 & F(A\otimes Y) \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rrr, "\cong"] \arrow[dd, "F(k)"] & & & F(A)\times F(Y) \arrow[ur] \arrow[drr, "\pi"] & & \\
F(X) \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[dr, "F(g)"'] & & F(B\otimes Y\otimes Y) \arrow[r, "\cong"] & F(B\otimes Y)\times F(Y) \arrow[rr, "\cong"] & & F(B)\times F(Y)\times F(Y) \arrow[r, "\pi"] & F(Y) \\
 & F(B\otimes Y) \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rrr, "\cong"] & & & F(B)\times F(Y) \arrow[ur] \arrow[urr, "\pi"'] & &
\end{tikzcd}
$$

この図式は可換なので、従って特に $\overline{F}([A,f]) = \overline{F}([B,g])$ である。これで函手 $\overline{F}$ の well-definedness が示された。

また $\overline{\theta}_{\overline{F}(\overline{X}),\overline{F}(\overline{Y})} : \overline{F}(\overline{X}) \times \overline{F}(\overline{Y}) \to \overline{F}(\overline{X}\otimes)$ を $\overline{\theta}_{\overline{F}(\overline{X}),\overline{F}(\overline{Y})} := \theta_{F(X),F(Y)}$、$\overline{\varepsilon} := \varepsilon$ と定める。すると $(\overline{F}, \overline{\theta}, \overline{\varepsilon})$ は確かに強モノイド函手である。

(ii) 操作 $\overline{(-)}$ と $H_{\mathcal{R}} \triangleright -$ が互いに逆であることを示す。

どちらも対象上何も操作しないので、対象の対応が等しいことは直ちに分かる。よって射の対応だけ見ればよい。

(ii-a) 関連函手 $F : \mathcal{R} \to \mathcal{D}$ に対し、$H_{\mathcal{R}} \triangleright \overline{F} = F$ であることを示す。

各 $f : X \to Y$ in $\mathcal{R}$ に対し、

$$
\begin{aligned}
&(H_{\mathcal{R}} \triangleright \overline{F})(f) \\
=&\overline{F}(H_{\mathcal{R}}(f)) \\
=&\overline{F}([1, f']) \\
=&F(f') \triangleright \theta^{-1}_{I,Y} \triangleright \pi_{F(I),F(Y)} \\
=&F(f') \triangleright \theta^{-1}_{I,Y} \triangleright (\varepsilon \times F(Y))^{-1} \triangleright \rho_{F(Y)} \\
=&F(f') \triangleright F(\rho_Y) \triangleright \rho^{-1}_{F(Y)} \triangleright \rho_{F(Y)} \\
=&F(f) \triangleright \rho^{-1}_{F(Y)} \triangleright \rho_{F(Y)} \\
=&F(f)
\end{aligned}
$$

である（下記図式参照）。これで示された。

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f')"] \arrow[dr, "F(f)"'] & F(1\otimes Y) \arrow[d, "F(\rho_Y)"'] & F(1)\times F(Y) \arrow[l, "\theta_{1,Y}"'] \arrow[r, "\pi_{F(1),F(Y)}"] \arrow[d, shift left, "!\times F(Y)"] & F(Y) \\
 & F(Y) & 1\times F(Y) \arrow[l, "\rho_{F(Y)}"] \arrow[u, shift left, "\varepsilon\times F(Y)"] \arrow[ur, "\rho_{F(Y)}"'] &
\end{tikzcd}
$$

(ii-b) （強）モノイド函手 $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対し、$\overline{H_{\mathcal{R}} \triangleright G} = G$ であることを示す。
各 $[A, f] : \overline{X} \to \overline{Y}$ in $\mathcal{C}$ に対して、
$\overline{H_{\mathcal{R}} \triangleright G}([A, f])$ は次の合成に等しい：

$$(H_{\mathcal{R}} \triangleright G)(X) \xrightarrow{(H_{\mathcal{R}} \triangleright G)(f)} (H_{\mathcal{R}} \triangleright G)(A \otimes Y) \xrightarrow{\quad \cong \quad} (H_{\mathcal{R}} \triangleright G)(A) \times (H_{\mathcal{R}} \triangleright G)(Y) \xrightarrow{\quad \pi \quad} (H_{\mathcal{R}} \triangleright G)(Y).$$

整理すればこれは

$$G(X) \xrightarrow{G([1, f'])} G(A \otimes Y) \xrightarrow{\quad \cong \quad} G(A) \times G(Y) \xrightarrow{\quad \pi \quad} G(Y)$$

に等しい。G は cartesian だったのでこれは

$$G(X) \xrightarrow{G([1, f'])} G(A \otimes Y) \xrightarrow{\quad G(\pi) \quad} G(Y)$$

に等しい。これが $G([A, f])$ に等しいことを示すためには、$[A, f]$ が次と等しいことを言えばよい：

$$X \xrightarrow{\quad [1, f'] \quad} A \otimes Y \xrightarrow{\quad \pi \quad} Y.$$

これは $\Lambda(\mathcal{R})$ における射影の定義を見れば直ちに分かる。 $\square$

§ 5　The Category of monomorphisms

Λ-construction を考えたもともとの動機は、デカルト圏 $\mathcal{C}$ に対し、$\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}] \cong \mathcal{C}$ であろう、ということであった。本節ではこれを示す。

§ 5.1　The Category of monomorphisms

thm 6.1.1 : $\Lambda[\mathcal{R}] \cong \mathcal{C}$

$\mathcal{C}$ をデカルト圏とし、$\mathcal{R}$ を $\mathcal{C}$ の関連部分圏で $\mathcal{C}$ の全てのグラフを含むものとする。
このとき、$\Lambda[\mathcal{R}] \cong \mathcal{C}$ である。
包含函手 $i : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ から、Λ の普遍性によりのびる函手 $\bar{i} : \Lambda[\mathcal{R}] \to \mathcal{C}$ は iso である。

(proof)
簡単のため、$\Lambda := \Lambda[\mathcal{R}]$ と置く。
$\bar{i}$ が bijective on objects であることは、i がそうであることと $\bar{i}$ の定義から明らか。
あとは $\bar{i}$ が fully-faithful であることを示せばよい。
$X, Y \in \mathcal{C}$ を取る。
$(\bar{i})_{X,Y} : \Lambda(X,Y) \to \mathcal{C}(X,Y)$ の逆写像 $\psi : \mathcal{C}(X,Y) \to \Lambda(X,Y)$ を構成する。
$\psi(f) := [X, (id_X, f)]$ と置く。これが逆であることを示す。

(i)$\psi \triangleright (\bar{i})_{X,Y} = id$ であること：$f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ を取り固定する。

$$\begin{aligned} &(\bar{i})_{X,Y}(\psi(f)) \\ =\ &(\bar{i})_{X,Y}([X, (id_X, f)]) \\ =\ &(id_X, f) \triangleright \pi_Y \\ =\ &f \end{aligned}$$

(ii)$(\bar{i})_{X,Y} \triangleright \psi = id$ であること：$[A, f] : X \to Y$ in Λ を取り固定する。

$$
\begin{aligned}
&\psi((\bar{i})_{X,Y}([A,f])) \\
&= \psi((\bar{i})_{X,Y}([A,f])) \\
&= \psi(f \triangleright \pi_Y) \\
&= [X, (id_X, f \triangleright \pi_Y)] \\
&= [X \times A, (id_X, f \triangleright \pi_Y) \triangleright ((id_X, f \triangleright \pi_A) \times Y)] \quad \text{(by prop 4.2.3)} \\
&= [X \times A, (id_X, f \triangleright \pi_Y, f \triangleright \pi_A)] \\
&= [X \times A, (id_X, f)] \\
&= [X \times A, \Delta_X \triangleright (X \times f)] \\
&= [A, f] \quad \text{(by prop 4.3.3)}
\end{aligned}
$$

cor 6.1.2 : $\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}] \cong \mathcal{C}$

$\mathcal{C}$ をデカルト圏とする。

このとき、包含函手 $i_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\mathrm{mono}} \to \mathcal{C}$ から、Λ の普遍性によりのびる函手 $\overline{i_{\mathcal{C}}} : \Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}] \to \mathcal{C}$ は iso である。

§ 6　関連研究と今後の課題

・関連圏の「複製」構造は、前述のとおり"lax-universality"とでも呼ぶべきものである。この"lax-universality"の概念は比較的容易に一般化できる。既によく知られる"weak-universality"よりは強い概念であり、一般的に言えることが見つかる可能性がある。真の universality でなくとも十分豊かな性質を示すことは関連圏の姿から窺い知ることができるため、様々な普遍性についてその lax 版を調べてみることは有益であることが示唆される。

§ 7　Reference

References

[BW90] Michael Barr and Charles Wells, *Category theory for computing science*, vol. 1, Prentice Hall New York, 1990.

[HS19] Mathieu Huot and Sam Staton, *Universal properties in quantum theory*, arXiv preprint arXiv:1901.10117 (2019).

[HT12] C. Hermida and R.D. Tennent, *Monoidal indeterminates and categories of possible worlds*, Theoretical Computer Science **430** (2012), 3–22, Mathematical Foundations of Programming Semantics (MFPS XXV).

[Mac63] Saunders MacLane, *Natural associativity and commutativity*, Rice Institute Pamphlet-Rice University Studies **49** (1963), no. 4.

[Pet02] Zoran Petrić, *Coherence in substructural categories*, Studia Logica **70** (2002), no. 2, 271–296.

[Ten90] R.D. Tennent, *Semantical analysis of specification logic*, Information and Computation **85** (1990), no. 2, 135–162.

§ 8 謝辞