論文の内容の要旨

修士論文題目

関連圏からのデカルト圏の普遍的再構成

氏名　箕浦 晴弥

§ 1　オリジナルのイントロ

対称モノイド圏論は、ホモトピー論を出自として MacLane により創始された ([?])。モノイド圏論では、圏に函手的なモノイド演算が乗った構造であるモノイド圏を扱う。対称モノイド圏論は、その中でも特にモノイド演算が (同型を除いて) 可換な対称モノイド圏を扱う分野である。これは直積でない「積」と呼ばれるもの、例えばテンソル積やスマッシュ積などの一般化である。

対称モノイド圏論は、圏論の中では比較的弱い構造を扱う理論である。他の圏論の多くの分野、例えばトポス理論やアーベル圏論では、全ての有限直積があること、即ちデカルト圏であることは大前提として、その上にさらに構造を加えていく。対照的に、対称モノイド圏論においてはデカルト圏が最も強い構造である：対称モノイド圏に構造を付加してデカルト圏より強い構造になるならば、それは単にデカルト圏の理論で扱えばよい。即ち、対称モノイド圏論とは「対称モノイド圏とデカルト圏の中間構造たちを調べる分野」であると言うことができる。

対称モノイド圏論の視点で見れば、デカルト圏とは次のような構造だとみなせる：デカルト圏とは、対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ と自然同型 $\varphi_{X,Y} : \mathcal{C}(-,X) \times \mathcal{C}(-,Y) \cong \mathcal{C}(-,X \otimes Y)$ の組 $(\mathcal{C},\varphi)$ のことである。この同型を弱めて、対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ によい自然変換 $\mathcal{C}(-,X) \times \mathcal{C}(-,Y) \to \mathcal{C}(-,X \otimes Y)$ を付加した構造や、対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ によい自然変換 $\mathcal{C}(-,X) \times \mathcal{C}(-,Y) \leftarrow \mathcal{C}(-,X \otimes Y)$ を付加した構造を考える。これらはそれぞれ関連圏 (relevance category) / アフィン圏 (affine category) と呼ばれるものと一致し、対称モノイド圏とデカルト圏の中間構造として知られている ([?])。関連圏 / アフィン圏 は、対称モノイド圏にそれぞれ「対角射」「終対象への標準射」を付加したものとして定義される。即ち、関連圏とは対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ とよいモノイド自然変換 $\Delta : Id_{\mathcal{C}} \to - \otimes -$ の

組であり、アフィン圏は対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ であって単位対象が終対象であるようなものである（ただし、ここで函手 $-\otimes-$ は各対象 X に $X\otimes X$ を対応させる自己函手のことである)。関連圏には例えば集合と単射の圏 $\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ などがある。アフィン圏には例えば凸空間の圏 Conv などがある。

関連圏やアフィン圏は、対称モノイド圏とデカルト圏のよい中間構造と思える。具体的には、対称モノイド圏に「対角射」を追加すれば関連圏に、「終対象」を追加すればアフィン圏になるし、デカルト圏は関連圏に「終対象」を追加したものと見なせ、またアフィン圏に「対角射」を追加したものとも見なせる。ゆえに、これら中間構造を調べることは対称モノイド圏とデカルト圏の関係性を調べるのに有用である。例えば、与えられた対称モノイド圏 $\mathcal{M}$ から普遍的なデカルト圏 $CC[\mathcal{M}]$ を構成する問題 (直積を付加する問題) は、与えられた対称モノイド圏 $\mathcal{M}$ から普遍的な関連圏 $RC[\mathcal{M}]$ を構成する問題 (対角射を付加する問題) と与えられた関連圏 $\mathcal{R}$ から普遍的なデカルト圏 $CC[\mathcal{R}]$ を構成する問題 (終対象を付加する問題) とに分割できる。実際アフィン圏については、アフィン論理への関心も相まって多くの研究がある。しかし、関連圏についてはまだ調べられてこなかった。

$$\begin{tikzcd}
\text{アフィン圏} \arrow[r, "\text{終対象を忘却}"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\perp"] & \text{対称モノイド圏} \arrow[l, bend right, "L"'] \\
\text{デカルト圏} \arrow[u, "\text{対角射を忘却}"] \arrow[r, "\text{終対象を忘却}"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\perp"] & \text{関連圏} \arrow[u, "\text{対角射を忘却}"'] \arrow[l, bend right, "\Lambda"']
\end{tikzcd}$$

本論文では、関連圏について調べる足掛かりとして、デカルト圏との関係を調べることを試みた。具体的には、関連圏がしばしばデカルト圏の関連部分圏として構成されることに着目し、逆に与えられた関連圏がどのようなデカルト圏のよい関連部分圏となるのかを調べた。結果、次の事実を得た：任意の関連圏に対し、それをよい関連部分圏に持つデカルト圏は存在すれば一意である。さらに全ての関連圏に対して、そのようなデカルト圏が存在するかどうか、また存在すればそれがどのようなデカルト圏であるかを計算する方法を与えた。

本論文で主に扱うのは、与えられた関連圏からそれをよい関連部分圏に持ちうるデカルト圏を構成する普遍的な操作 Λ である。操作 Λ は、あらゆる関連圏 $\mathcal{R}$ に対してデカルト圏 $\Lambda(\mathcal{R})$ 及び函手 $H_{\mathcal{R}}:\mathcal{R}\to\Lambda(\mathcal{R})$ の組 $(\Lambda(\mathcal{R}),H_{\mathcal{R}})$ を 1 つずつ返すものである。この $H_{\mathcal{R}}$ は必ずしも単射的 (即ち忠実かつ対象上本質的に単射) であるとは限らないが、もしも $\mathcal{R}$ が何かデカルト圏 $\mathcal{C}$ のよい関連部分圏として構成されているときには、必ず $\Lambda(\mathcal{R})\cong\mathcal{C}$ である。特に、$\mathcal{R}$ をよい関連部分圏に持つデカルト圏 $\mathcal{C}$ は同型を除いて一意的であることが従う。さらにこの操作 Λ は、関連圏からデカルト圏を構成する方法として普遍的である。全てのデカルト圏は自然な方法で関連圏と見なせる

が、この忘却操作に対して Λ は左随伴である。

Λ-construction の着想の説明をする。関連圏からデカルト圏を作る方法は「終対象を追加する」ものであるはずだから、対称モノイド圏からアフィン圏を作る方法に一致するか少なくとも類似するはずである。後者は実際に知られていて、対称モノイド圏から、アフィン圏を作る (左) 普遍的な構成が [?] の系として得られている ([?], [?])。この普遍的な構成、L-construction(named by [?]) は、与えられた対称モノイド圏の射を余分に増やしたのち適切な同値関係で割る構成である。特にモノイド単位対象への射を全て同一視するような同値関係で割るので、モノイド単位対象が終対象になる。標語的に言えば、L-construction は「対称モノイド圏の単位対象を終対象にする構成」である。L-construction は関連圏に施しても一般にはデカルト圏にはならない。例えば $\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ は素朴な方法で関連圏の構造を持ち、$\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ に L-construction を施して得られる圏 $L(\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}})$ は Set と非同型であるが、$\Lambda(\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}) \cong \mathrm{Set}$ である。L-construction 及び Λ-construction の普遍性を踏まえれば、$L(\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}})$ はデカルト圏ではないことがわかる。$L(\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}})$ については [?] の Thm4.4 に類似物の言及があり、Tennent category([?]) との関連が示唆されている。

構成 L は対称モノイド圏のモノイド単位対象を終対象にするものであったが、上に述べたようにテンソル積を直積にするものではなかった。これに対して 構成 Λ は、関連圏を受け取り、そのモノイド単位対象を終対象に、テンソル積を直積にするものである。

本論文では、関連圏 (relevance category) の定義及び基本的な例を述べたのち、関連圏の「デカルト圏化」操作である構成 Λ を記述する。

§ 2　要旨に改変中の部分

本論文では、関連圏について調べる足掛かりとして、デカルト圏との関係を調べることを試みた。具体的には、関連圏がしばしばデカルト圏の関連部分圏として構成されることに着目し、逆に与えられた関連圏がどのようなデカルト圏のよい関連部分圏となるのかを調べた。結果、次の事実を得た：任意の関連圏に対し、それをよい関連部分圏に持つデカルト圏は存在すれば一意である。さらに全ての関連圏に対して、そのようなデカルト圏が存在するかどうか、また存在すればそれがどのようなデカルト圏であるかを計算する方法を与えた。

本論文で主に扱うのは、与えられた関連圏からそれをよい関連部分圏に持ちうるデカルト圏を構成する普遍的な操作 Λ である。操作 Λ は、あらゆる関連圏 $\mathcal{R}$ に対してデカルト圏 $\Lambda(\mathcal{R})$ 及び函手 $H_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to \Lambda(\mathcal{R})$ の組 $(\Lambda(\mathcal{R}), H_{\mathcal{R}})$ を１つずつ返すものである。この $H_{\mathcal{R}}$ は必ずしも単射的 (即ち忠実かつ対象上本質的に単射) であるとは限らないが、もしも $\mathcal{R}$ が何かデカルト圏 $\mathcal{C}$ のよい関連部分圏として構成されているときには、必ず $\Lambda(\mathcal{R}) \cong \mathcal{C}$ である。特に、$\mathcal{R}$ をよい関連部分圏に持つデカルト圏 $\mathcal{C}$ は同型を除いて一意的であることが従う。さらにこの操作 Λ は、関連圏からデカルト圏を構成する方法として普遍的である。全てのデカルト圏は自然な方法で関連圏と見なせるが、この忘却操作に対して Λ は左随伴である。

Λ-construction の着想の説明をする。関連圏からデカルト圏を作る方法は「終対象を追加する」ものであるはずだから、対称モノイド圏からアフィン圏を作る方法に一致するか少なくとも類似するはずである。後者は実際に知られていて、対称モノイド圏から、アフィン圏を作る (左) 普遍的な構成が [?] の系として得られている ([?], [?])。この普遍的な構成、L-construction(named by [?]) は、与えられた対称モノイド圏の射を余分に増やしたのち適切な同値関係で割る構成である。特にモノイド単位対象への射を全て同一視するような同値関係で割るので、モノイド単位対象が終対象になる。標語的に言えば、L-construction は「対称モノイド圏の単位対象を終対象にする構成」である。L-construction は関連圏に施しても一般にはデカルト圏にはならない。例えば $\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ は素朴な方法で関連圏の構造を持ち、$\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ に L-construction を施して得られる圏 $L(\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}})$ は Set と非同型であるが、$\Lambda(\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}) \cong \mathrm{Set}$ である。L-construction 及び Λ-construction の普遍性を踏まえれば、$L(\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}})$ はデカルト圏ではないことがわかる。$L(\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}})$ については [?] の Thm4.4 に類似物の言及があり、Tennent category([?]) との関連が示唆されている。

構成 L は対称モノイド圏のモノイド単位対象を終対象にするものであったが、上に述べたようにテンソル積を直積にするものではなかった。これに対して 構成 Λ は、関連圏を受け取り、そのモノイド単位対象を終対象に、テンソル積を直積にするものである。

本論文では、関連圏 (relevance category) の定義及び基本的な例を述べたのち、関連圏の「デカルト圏化」操作である構成 Λ を記述する。

対称モノイド圏論とは「対称モノイド圏とデカルト圏の中間構造たちを調べる分野」であると言うことができる。

対称モノイド圏論の視点で見れば、デカルト圏とは次のような構造だとみなせる：デカルト圏とは、対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ と自然同型 $\varphi_{X,Y} : \mathcal{C}(-,X) \times \mathcal{C}(-,Y) \cong \mathcal{C}(-,X \otimes Y)$ の組 $(\mathcal{C},\varphi)$ のことである。この同型を弱めて、対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ によい自然変換 $\mathcal{C}(-,X) \times \mathcal{C}(-,Y) \to \mathcal{C}(-,X \otimes Y)$ を付加した構造や、対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ によい自然変換 $\mathcal{C}(-,X) \times \mathcal{C}(-,Y) \leftarrow \mathcal{C}(-,X \otimes Y)$ を付加した構造を考える。これらはそれぞれ関連圏 (relevance category) / アフィン圏 (affine category) と呼ばれるものと一致し、対称モノイド圏とデカルト圏の中間構造として知られている ([?])。関連圏 / アフィン圏 は、対称モノイド圏にそれぞれ「対角射」「終対象への標準射」を付加したものとして定義される。即ち、関連圏とは対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ とよいモノイド自然変換 $\Delta : Id_{\mathcal{C}} \to - \otimes -$ の組であり、アフィン圏は対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ であって単位対象が終対象であるようなものである（ただし、ここで函手 $- \otimes -$ は各対象 X に $X \otimes X$ を対応させる自己函手のことである)。関連圏には例えば集合と単射の圏 $\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ などがある。アフィン圏には例えば凸空間の圏 Conv などがある。

関連圏やアフィン圏は、対称モノイド圏とデカルト圏のよい中間構造と思える。具体的には、対称モノイド圏に「対角射」を追加すれば関連圏に、「終対象」を追加すればアフィン圏になるし、デカルト圏は関連圏に「終対象」を追加したものと見なせ、またアフィン圏に「対角射」を追加したものとも見なせる。ゆえに、これら中間構造を調べることは対称モノイド圏とデカルト圏の関係性を調べるのに有用である。例えば、与えられた対称モノイド圏 $\mathcal{M}$ から普遍的なデカルト圏 $CC[\mathcal{M}]$ を構成する問題 (直積を付加する問題) は、与えられた対称モノイド圏 $\mathcal{M}$ から普遍的な関連圏 $RC[\mathcal{M}]$ を構成する問題 (対角射を付加する問題) と与えられた関連圏 $\mathcal{R}$ から普遍的なデカルト圏 $CC[\mathcal{R}]$ を構成する問題 (終対象を付加する問題) とに分割できる。実際アフィン圏については、アフィン論理への関心も相まって多くの研究がある。しかし、関連圏についてはまだ調べられてこなかった。

$$\begin{tikzcd}
\text{アフィン圏} \arrow[r, "\text{終対象を忘却}"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\perp"] & \text{対称モノイド圏} \arrow[l, bend right, "L"'] \\
\text{デカルト圏} \arrow[u, "\text{対角射を忘却}"] \arrow[r, "\text{終対象を忘却}"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\perp"] & \text{関連圏} \arrow[u, "\text{対角射を忘却}"'] \arrow[l, bend right, "\Lambda"']
\end{tikzcd}$$

§ 3 Reference