2023年度

修士論文題目

関連圏からのデカルト圏の普遍的再構成

学生証番号　45-216034

フリガナ　ミノウラハルヤ

氏　　名　　箕浦　晴弥

目次

§ 1. 序論

対称モノイド圏論は、ホモトピー論を出自として MacLane により創始された ([Mac63])。モノイド圏論では、圏に函手的なモノイド演算が乗った構造であるモノイド圏を扱う。対称モノイド圏論は、その中でも特にモノイド演算が (同型を除いて) 可換な対称モノイド圏を扱う分野である。これは直積でない「積」と呼ばれるもの、例えばテンソル積やスマッシュ積などの一般化である。

対称モノイド圏論は、圏論の中では比較的弱い構造を扱う理論である。他の圏論の多くの分野、例えばトポス理論やアーベル圏論では、全ての有限直積があること、即ちデカルト圏であることを前提として、その上にさらに構造を加えていく。対照的に、対称モノイド圏論においてはデカルト圏が最も強い構造である：対称モノイド圏に構造を付加してデカルト圏より強い構造になるならば、それは単にデカルト圏の理論で扱えばよい。即ち、対称モノイド圏論とは「対称モノイド圏とデカルト圏の中間構造たちを調べる分野」であると言うことができる。

対称モノイド圏とデカルト圏の中間構造として、関連圏 (relevant category)・アフィン圏 (affine category)([Jac94], [Pet02]) が挙げられる。そもそもデカルト圏とはどのような構造であったかというと、対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ と自然同型 $\varphi_{X,Y} : \mathcal{C}(-,X) \times \mathcal{C}(-,Y) \cong \mathcal{C}(-,X \otimes Y)$ であってモノイド構造と整合的なものの組 $(\mathcal{C}, \varphi)$ である。この普遍性を用いた定義は、次のような定義と等価であることが知られている ([Fox76], [HV19] の Thm4.28)。すなわち、デカルト圏とは対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ 及び 2 つの自然変換「複製」$\Delta_X : X \to X \otimes X$ と「削除」$!_X : X \to I$ の組 $(\mathcal{C}, \Delta, !)$ であって整合性の条件を満たすものである。ここで I は $\mathcal{C}$ の単位対象である。この定義を見ると、デカルト圏とは対称モノイド圏に「複製」射と「削除」射を付加した構造と見なせる。すると中間構造として、対称モノイド圏に「複製」のみ、あるいは「削除」のみを付加した構造が考えられる。これがそれぞれ関連圏・アフィン圏である。関連圏には例えば集合と単射の圏 $\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ や点付き集合の圏 Set_* などがある。アフィン圏には例えば凸空間の圏 Conv([Jac10]) や混合量子状態の圏 CPTP([HS19]) などがある。

これら中間構造を調べることは対称モノイド圏とデカルト圏の関係性を調べるのに有用である。例えば、与えられた対称モノイド圏 $\mathcal{M}$ から普遍的なデカルト圏 $CC[\mathcal{M}]$ を構成する問題 (直積を付加する問題) は、与えられた対称モノイド圏 $\mathcal{M}$ から普遍的な関連圏 $RC[\mathcal{M}]$ を構成する問題 (複製を付加する問題) と与えられた関連圏 $\mathcal{R}$ から普遍的なデカルト圏 $CC[\mathcal{R}]$ を構成する問題 (削除を付加する問題) とに分割できる。実際アフィン圏については、アフィン論理への関心も相まって多くの研究がある ([Jac10], [HS19], [AHK23])。しかし、関連圏についてはまだ調べられてこなかった。

$$\begin{tikzcd}
\text{アフィン圏} \arrow[r, "\text{削除を忘却}"'] \arrow[r, phantom, "\perp", shift left=2] & \text{対称モノイド圏} \arrow[l, bend right, "L"'] \\
\text{デカルト圏} \arrow[u, "\text{複製を忘却}"] \arrow[r, "\text{削除を忘却}"'] \arrow[r, phantom, "\perp", shift left=2] & \text{関連圏} \arrow[u, "\text{複製を忘却}"'] \arrow[l, bend right, "\Lambda"']
\end{tikzcd}$$

図 1　4 つの圏のクラスの関係性

本論文では、関連圏について調べる足掛かりとして、デカルト圏との関係を調べることを試みた。具体的には、関連圏がしばしばデカルト圏の関連部分圏として構成されることに着目し、逆に与えられた関連圏がどのようなデカルト圏のよい関連部分圏となるのかを調べた。結果、次の事実を得た：任意の関連圏に対し、それをよい関連部分圏に持つデカルト圏は存在すれば一意である。さらに全ての関連圏に対して、そのようなデカルト圏が存在するかどうか、また存在すればそれがどのようなデカルト圏であるかを計算する方法を与えた。

本論文で主に扱うのは、与えられた関連圏からそれをよい関連部分圏に持ちうるデカルト圏を構成する操作 Λ である。操作 Λ は、あらゆる関連圏 $\mathcal{R}$ に対してデカルト圏 $\Lambda[\mathcal{R}]$ 及び函手 $H_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to \Lambda[\mathcal{R}]$ の組 $(\Lambda[\mathcal{R}], H_{\mathcal{R}})$ を 1 つずつ返すものである。この $H_{\mathcal{R}}$ は必ずしも単射的 (即ち忠実かつ対象上本質的に単射) であるとは限らないが、もしも $\mathcal{R}$ が何かデカルト圏 $\mathcal{C}$ のよい関連部分圏として構成されているならば、必ず $\Lambda[\mathcal{R}] \cong \mathcal{C}$ である。特に、$\mathcal{R}$ をよい関連部分圏に持つデカルト圏 $\mathcal{C}$ は同型を除いて一意的であることが従う。

さらにこの操作 Λ は、関連圏からデカルト圏を構成する方法として普遍的である。全てのデカルト圏は自然な方法で関連圏と見なせるが、この忘却操作に対して Λ は左随伴である。関連圏からデカルト圏を得る左普遍的な方法は、[Lam72] に見られるような自由構成を用いても得られるため、左随伴があることそのものは驚くべきことではない。しかし Λ は非常に具体的かつ有限的に定義されるため、Λ は関連圏からデカルト圏を得る左普遍的な方法の計算結果を与えていると言える。

構成 Λ の着想の説明をする。関連圏からデカルト圏を作る方法は「削除を追加する」ものであるはずだから、対称モノイド圏からアフィン圏を作る方法に一致するか少なくとも類似するはずである。後者は実際に知られていて、対称モノイド圏から、アフィン圏を作る (左) 普遍的な構成が [HT12] の系として得られている ([HT12], [HS19])。この普遍的な構成、構成 L(呼称は [AHK23] による) は、与えられた対称モノイド圏の射を余分に増やしたのち適切な同値関係で割る構成である。特にモノイド単位対象への射を全て同一視するような同値関係で割るので、モノイド単位対象が終対象になる。標語的に言えば、構成 L は「対称モノイド圏の単位対象を終対象にする構成」である。構成 L は関連圏に施しても一般にはデカルト圏にはならない。例えば $\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ は素朴な方法で関連圏の構造を持ち、$\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ に構成 L を施して得られる圏 $L(\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}})$ は Set と同型ではなく、Tennent category([Ten90]) と等しい ([HT12],Thm4.4) ことが分かっている。$\Lambda(\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}) \cong \mathrm{Set}$ であることが後にわかるから、構成 L 及び構成 Λ の普遍性を踏まえれば、$L(\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}})$ はデカルト圏ではないことがわかる。

構成 L は対称モノイド圏のモノイド単位対象を終対象にするものであったが、上に述べたようにテンソル積を直積にするものではなかった。これに対して 構成 Λ は、関連圏を受け取り、そのモノイド単位対象を終対象に、テンソル積を直積にするものである。

本論文では、関連圏の定義及び基本的な例を述べたのち、関連圏の「デカルト圏化」操作である構成 Λ を記述し、Λ の普遍性、及び Λ が $\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ から Set を復元する性質を持つことを証明する。

§ 1.1. 記法

本論文では簡明さのために、圏の射の合成の記号として $\triangleright$ を用いる。$f \triangleright g := g \circ f$ である。すなわち、この記法では射の合成を図式を読む順番と同じ順番で書くことになる。古くは情報系の文脈では合成を $f;g$ と書く文献もあるとされる ([BW90]) が、数学では大変分かりにくくなるためこれを避ける。

また、モノイド圏の図式の記述に際して、煩雑さを避けるため、結合律の同型 α によって結ばれる対象同士は記号の濫用によって同一視し、α は明示しない。

加えて、モノイド圏の射の表示に際しては、簡単のため $id_A \otimes id_B \otimes f \otimes id_D \otimes id_E$ を $AB \otimes f \otimes DE$ のように記述する。

§ 2. 関連圏

序論で述べたように、関連圏とは対称モノイド圏 $\mathcal{R}$ に「複製」$\{\Delta_X : X \to X \otimes X\}_{X \in \mathcal{R}}$ を付加した構造である。関連圏は [Jac94] で monoidal structure with diagonals として定義されたのが初出と思われる。関連圏は対応 $\mathcal{R}(Z,X) \times \mathcal{R}(Z,Y) \to \mathcal{R}(Z, X \otimes Y); (f,g) \mapsto \Delta_Z \triangleright (f \otimes g)$ を伴うから、関連圏は対称モノイド圏 $\mathcal{R}$ に自然変換 $\{\mathcal{R}(-,X) \times \mathcal{R}(-,Y) \to \mathcal{R}(-,X \otimes Y)\}_{X,Y \in \mathcal{R}}$ を付加した構造を持つ。逆に、よい自然変換 $\{\varphi_{X,Y} : \mathcal{R}(-,X) \times \mathcal{R}(-,Y) \to \mathcal{R}(-,X \otimes Y)\}_{X,Y \in \mathcal{R}}$ があれば複製 $\Delta_X := \varphi_{X,X}(id_X, id_X) : X \to X \otimes X$ が得られるので、関連圏は対称モノイド圏 $\mathcal{R}$ に自然変換 $\{\mathcal{R}(-,X) \times \mathcal{R}(-,Y) \to \mathcal{R}(-,X \otimes Y)\}_{X,Y \in \mathcal{R}}$ を付加した構造に他ならないと言える。デカルト圏は対称モノイド圏 $\mathcal{C}$ によい自然同型 $\{\mathcal{C}(-,X) \times \mathcal{C}(-,Y) \cong \mathcal{C}(-,X \otimes Y)\}_{X,Y \in \mathcal{C}}$ を付加した構造であったから、関連圏は lax-デカルト圏とも呼ぶべきものである。

本節では、関連圏とその周辺概念の定義、及び基本的な例を記述する。

定義 2.1：関連圏

関連圏とは、対称モノイド圏 $\underline{\mathcal{R}} = (\underline{\mathcal{R}}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma)$ と自然変換 $\Delta_X : X \to X \otimes X$ の組 $\mathcal{R} = (\underline{\mathcal{R}}, \Delta)$ であって、Δ がモノイド自然変換で結合的かつ可換であるようなものである。ただし、自然変換 Δ がモノイド自然変換で結合的かつ可換であるとは、以下の４つの図式を可換にすることである。

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[r, "\Delta_{X \otimes Y}"] \arrow[d, "="'] & X \otimes Y \otimes X \otimes Y \arrow[d, "X \otimes \gamma_{X,Y} \otimes Y"] \\
X \otimes Y \arrow[r, "\Delta_X \otimes \Delta_Y"'] & X \otimes X \otimes Y \otimes Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\Delta_I"] \arrow[d, "="'] & I \otimes I \arrow[d, "="] \\ I & I \otimes I \arrow[l, "\rho_I (=\lambda_I)"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta_X"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & X \otimes X \arrow[d, "X \otimes \Delta_X"] \\ X \otimes X \arrow[r, "\Delta_X \otimes X"'] & X \otimes X \otimes X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta_X"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & X \otimes X \arrow[d, "="] \\ X \otimes X \arrow[r, "\gamma_{X,X}"'] & X \otimes X \end{tikzcd}$$

この自然変換 Δ を関連圏 $\mathcal{R}$ の複製、複製射あるいは対角射と呼ぶ。

次に関連函手を定義する。関連函手は関連圏の間の強対称モノイド函手で複製を保つものである。

定義 2.2：関連函手

$\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ を関連圏とする。関連函手とは、強対称モノイド函手 $F = (F, \mu, \varepsilon) : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ であって、下の図式を可換にするもののこと。

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\Delta_{F(X)}"] \arrow[d, "="'] & F(X) \otimes F(X) \arrow[d, "\mu_X", "\cong"'] \\ F(X) \arrow[r, "F(\Delta_X)"'] & F(X \otimes X) \end{tikzcd}$$

集合と単射の圏 $\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ は素朴な方法で関連圏とみなせるのであった。この事実は次の 2 つから従うことだと理解できる。まず、全てのデカルト圏は素朴な方法で関連圏とみなせる。また、デカルト圏のモノ射は直積で閉じていて複製はモノ射なので、モノ射の全体は「関連部分圏」 になる。

例 2.3：デカルト圏

全てのデカルト圏は素朴な方法で関連圏とみなせる。特に、Set は関連圏である。

定義 2.4：関連部分圏

$\mathcal{R} = (\underline{\mathcal{R}}, \Delta)$ を関連圏とする。$\mathcal{R}$ の関連部分圏とは、$\underline{\mathcal{R}}$ のモノイド部分圏 $\underline{\mathcal{N}} \subset \underline{\mathcal{R}}$ であって、任意の $\underline{\mathcal{N}}$ の対象 X に対し $\underline{\mathcal{R}}$ の射 Δ_X が $\underline{\mathcal{N}}$ の射であるようなもののことである。

関連部分圏は自然な方法で関連圏とみなせる。

例 2.5：モノ射の成す関連部分圏

デカルト圏 $\mathcal{C}$ に対し、$\mathcal{C}$ のモノ射全体の成す部分圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ は 関連部分圏である。正則モノ射や分裂モノ射についても同様である。特に、$\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ は関連圏である。

特に $\mathcal{C}$ として有界半束をその順序構造でデカルト圏と見なしたものを考えると、$\mathcal{C}$ の分裂モノ射は恒等射しかないので、分裂モノ射の全体は離散圏に関連圏の構造を入れたものになる。離散対称モノイド圏とは即ち可換モノイドであるが、このモノイドが関連圏の構造を持つことは冪等であることを意味する。つまり、この操作は有界半束から順序を忘れて冪等可換モノイドをつくる操作と解釈できる。

モノ射の成す関連部分圏の類似例として、可微分多様体の圏の全ての埋め込みの成す部分圏なども関連部分圏である。

§ 3. 構成 Λ の定義

本節では構成 Λ の定義を述べる。Λ は、与えられた関連圏からデカルト圏を構成する普遍的な操作である。以下、$\mathcal{R} = (\mathcal{R}, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho, \gamma, \Delta)$ を関連圏とする（記号の濫用により、関連圏とその台となる圏を同一視する)。これから本節全体を通して、デカルト圏 $\Lambda[\mathcal{R}]$ を定義する。圏 $\Lambda[\mathcal{R}]$ を定義した後に $\Lambda[\mathcal{R}]$ が持つ素朴なモノイド構造がデカルト積を与えることを示す。

関連圏はしばしばデカルト圏の関連部分圏として構成される。本論文では、与えられた関連圏がどのようなデカルト圏のよい関連部分圏として構成されるのかを調べる。

そのために注目したい関連圏の例はデカルト圏のモノ射達が成す関連部分圏である。例 2.5 に述べたように、デカルト圏 $\mathcal{C}$ に対し、その全てのモノ射の成す部分圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ は関連部分圏である。この $\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ をよい関連部分圏として持つデカルト圏は $\mathcal{C}$ である。そこで構成 Λ を、$\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ に Λ を施したとき $\mathcal{C}$ が復元されるように作る。

まず、$\mathcal{C}$ と $\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ の対象は同じであるから、$\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}]$ の対象は $\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ の対象と定義すればよい。次に射の定義を考える。デカルト圏における「グラフ」は全てモノ射であったことに注目する。

第一案として、各 $X, Y \in \mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ に対し、$\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}]$ における X から Y への射集合 $\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}](X, Y)$ を

$$\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}](X,Y) := \{f : X \to X \times Y \text{ in } \mathcal{C}^{\mathrm{mono}} \mid (\text{ 適切な条件式 })\}$$

と定義することが考えられる。ただし「適切な条件式」とは f が $\mathcal{C}$ でグラフであることと同値な $\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ の条件式である (これは実現可能だが仔細には触れない)。このとき確かに $\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}](X, Y) \cong \mathcal{C}(X, Y)$ だが、このままでは合成がうまく定義できない：$f : X \to X \times Y$ と $g : Y \to Y \times Z$ の安直な合成は $f \triangleright (X \times g) : X \to X \times Y \times Z$ で、これから $X \to X \times Z$ の射を得るためには射影 $X \times Y \times Z \to X \times Z$ が必要であるが、射影は多くの場合モノ射ではないので使えない。そもそも全ての射影がある関連圏はただのデカルト圏である。

そこで第二案として、各 $X, Y \in \mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ に対し、$\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}]$ における X から Y への射を、「パラメー

タ付きグラフ」として定義することを考える。すなわち、

$$\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}](X,Y) := \{(A,f) \mid A \in \mathcal{C}^{\mathrm{mono}},\ f : X \to A \times Y \text{ in } \mathcal{C}^{\mathrm{mono}}\}/(\text{適切な同値関係})$$

とする。ただしここで、適切な同値関係とは、$(A,f) \sim (B,g)$ であるのがちょうど $\mathcal{C}$ で $f \triangleright \pi_Y = g \triangleright \pi_Y$ であるときになるような同値関係である。このような同値関係は実際 $\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ の構造のみから得られる。本節では、その構成の詳細を記述する。

本稿における Λ の構成は、[HT12] の構成が大きなヒントになっている。[HT12] ではまず中間構造として双圏を構成して、その local category の連結成分を取ることで欲しい圏を得ていた。そこで本稿でも、同値関係で割る前の射集合を持つ中間構造 $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ を構成し、その商として $\Lambda[\mathcal{R}]$ を定義する。ただし、$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ は構成 L の場合と異なり双圏にはならない。この問題に起因して、連結成分を取ることで圏が得られることが自明ではなくなっている。そのため、$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ から $\Lambda[\mathcal{R}]$ を構成する操作に 1 小節を割き、$\Lambda[\mathcal{R}]$ の well-defined 性の証明 (補題 3.2.4) を述べる。

本節では、上記第二案の構成の詳細及び well-defined 性の証明を述べる。§3.1 では、まずは中間構造 $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ を定義する。§3.2 でその商として $\Lambda[\mathcal{R}]$ を定義し、その well-defined 性を証明する。§3.3 では構成した圏 $\Lambda[\mathcal{R}]$ がデカルト圏になっていることを証明する。

§ 3.1. 中間構造 $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の構成

本 §3.1 節では、圏 $\Lambda[\mathcal{R}]$ を定義する前準備として、中間構造 $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ を構成する。

$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ は、双圏に似た次の 4 つの構造を持っている：

(1) 対象の集まり $\mathrm{Ob}(\mathcal{B}(\mathcal{R}))$

(2) $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の各対象 $\overline{X}, \overline{Y}$ 毎の圏 $\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X}, \overline{Y})$　($\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X}, \overline{Y})$ の対象を 1-射と、射を 2-射と呼ぶ。)

(3) 各 1-射 $v : \overline{X} \to \overline{Y}, w : \overline{Y} \to \overline{Z}$ 毎の合成 1-射 $v \triangleright w : \overline{X} \to \overline{Z}$

(4) $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の各対象 $\overline{X}$ 毎の恒等 1-射 $id_{\overline{X}} : \overline{X} \to \overline{X}$

しかしながら、$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ は 2-射の間の水平合成を持たないため、双圏にはならない。

$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ は $\Lambda[\mathcal{R}]$ の定義に用いる。$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の対象は $\Lambda[\mathcal{R}]$ の対象に対応し、$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射の同値類が $\Lambda[\mathcal{R}]$ の射に対応する。$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 2-射は、$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射から $\Lambda[\mathcal{R}]$ の射をつくるための同値関係として機能する。

以下、$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ を定義する。$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の対象は $\mathcal{R}$ の対象とする。ただし、可読性のために、各 $\mathcal{R}$ の対象 X に対し、それに対応する $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ における対象を $\overline{X}$ と書くことにする。即ち、$\mathrm{Ob}(\mathcal{B}(\mathcal{R})) := \left\{\overline{X} | X \in \mathcal{R}\right\}$ である。はじめに、各対象 $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}(\mathcal{R}))$ 毎に圏 $\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X}, \overline{Y})$ を定義する。

定義 3.1.1：$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射

$X, Y \in \mathcal{R}$ とする。$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の $\overline{X}$ から $\overline{Y}$ への 1-射とは、$A \in \mathcal{R}$ と $\mathcal{R}$ の射 $f : X \to A \otimes Y$ の組 (A, f) のことである。

このように定めた $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射の同値類が $\Lambda[\mathcal{R}]$ の射となる。同値関係として「有限個の 2-射で結ばれていること」を用いる。その 2-射は下記のとおり定義する。

定義 3.1.2：$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 2-射

$X,Y\in\mathcal{R}$ とし、$(A,f),(B,g)$ を $\overline{X}$ から $\overline{Y}$ への $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射とする。$\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の (A,f) から (B,g) への 2-射とは、$\mathcal{R}$ の射 $k:A\otimes Y\to B\otimes Y$ であって下の図式の三角形及び四角形を可換にするもののことである。

$$\begin{tikzcd}
 & A\otimes Y \arrow[r, "A\otimes\Delta_Y"] \arrow[d, "k"] & A\otimes Y\otimes Y \arrow[d, "k\otimes Y"] \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & \\
 & B\otimes Y \arrow[r, "B\otimes\Delta_Y"'] & B\otimes Y\otimes Y
\end{tikzcd}$$

2-射の例を 2 つ挙げておく。

命題 3.1.3：自明な 2-射

$B,X,Y\in\mathcal{R}$ とし、(A,f) を $\overline{X}$ から $\overline{Y}$ への $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射、$a:A\to B$ を $\mathcal{R}$ の射とする。このとき、

(1)$g:=f\triangleright(a\otimes Y)$ とおくと、(B,g) は $\overline{X}$ から $\overline{Y}$ への $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射である。

(2)$\mathcal{R}$ の射 $k:=(a\otimes Y)$ は $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 2-射 $k:(A,f)\to(B,g)$ を与える。

Proof. (1) 定義より従う。

(2) $\otimes$ の函手性から従う。 下図の右の四角形の左上から右下への射は、上下どちらも $a\otimes\Delta_Y$ である。

$$\begin{tikzcd}
 & A\otimes Y \arrow[r, "A\otimes\Delta_Y"] \arrow[d, "k:=a\otimes Y"] & A\otimes Y\otimes Y \arrow[d, "k\otimes Y=a\otimes YY"] \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g:=f\triangleright k"'] & & \\
 & B\otimes Y \arrow[r, "B\otimes\Delta_Y"'] & B\otimes Y\otimes Y
\end{tikzcd}$$

□

命題 3.1.4：複製は 2-射である

$X,Y\in\mathcal{R}$ とし、(A,f) を $\overline{X}$ から $\overline{Y}$ への $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射とする。このとき、

(1)$g:=f\triangleright(A\otimes\Delta_Y)$ とおくと、$(A\otimes Y,g)$ は $\overline{X}$ から $\overline{Y}$ への $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射 である。

(2)$\mathcal{R}$ の射 $k:=A\otimes\Delta_Y$ は $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 2-射 $k:(A,f)\to(A\otimes Y,g)$ を与える。

Proof. (1) 定義より従う。

(2)Δ が結合的であったことから従う。右側の四角形が可換であることは $\Delta_Y\triangleright(Y\otimes\Delta_Y)=\Delta_Y\triangleright(\Delta_Y\otimes Y)$ であることによる。

$$\begin{tikzcd}
 & A\otimes Y \arrow[r, "A\otimes\Delta_Y"] \arrow[dd, "k:=A\otimes\Delta_Y"] & A\otimes Y\otimes Y \arrow[dd, "k\otimes Y=A\otimes\Delta_Y\otimes Y"] \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g:=f\triangleright k"'] & & \\
 & A\otimes Y\otimes Y \arrow[r, "AY\otimes\Delta_Y"'] & A\otimes Y\otimes Y\otimes Y
\end{tikzcd}$$

□

定義 3.1.5：local category of $\mathcal{B}(\mathcal{R})$

各 $X, Y \in \mathcal{R}$ に対し、圏 $\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X}, \overline{Y})$ を以下のように定める：対象は $\overline{X}$ から $\overline{Y}$ への 1-射, 射はその間の 2-射とし、2-射同士の (垂直) 合成、及び恒等 2-射は素直に定義する。これらは well-defined で、圏の公理を満たす。

以上で圏 $\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X}, \overline{Y})$ が定義された。本小節の残りで 1-射の合成、恒等 1-射と 2-射の左 whiskering を定義し、中間構造 $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の定義を終える。

定義 3.1.6：1-射の合成

$X, Y, Z \in \mathcal{R}$ とし、(A, f) を $\overline{X}$ から $\overline{Y}$ への、(B, g) を $\overline{Y}$ から $\overline{Z}$ への $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射とする。$\overline{X}$ から $\overline{Z}$ への $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射 $(A, f) \triangleright (B, g)$ を $(A \otimes B, h)$ と定める。ただし $\mathcal{R}$ の射 $h : X \to A \otimes B \otimes Z$ は次の列の合成で定める：

$$X \xrightarrow{f} A \otimes Y \xrightarrow{A\otimes g} A \otimes B \otimes Z.$$

この合成は結合律を満たす。

定義 3.1.7：恒等 1-射

$X \in \mathcal{R}$ とする。$\overline{X}$ から $\overline{X}$ への $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射 $id_{\overline{X}}$ を $id_{\overline{X}} := (I, {\lambda_X}^{-1})$ と定める。この恒等射と上記合成は整合性の同型の違いを除いて単位律を満たす。

命題 3.1.8：2-射の左 whiskering

$X, Y, Z \in \mathcal{R}$ とし、(A, f) を $\overline{X}$ から $\overline{Y}$ への、$(B_1, g_1), (B_2, g_2)$ を $\overline{Y}$ から $\overline{Z}$ への $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射とする。$k : (B_1, g_1) \to (B_2, g_2)$ を $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 2-射とする。このとき、$\mathcal{R}$ の射 $f{*}k : A{\otimes}B_1{\otimes}Z \to A{\otimes}B_2{\otimes}Z$ を $f * k := A \otimes k$ で定めると、これは $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 2-射 $f * k : (A, f) \triangleright (B_1, g_1) \to (A, f) \triangleright (B_2, g_2)$ を与える。

Proof. 次の図式の上下が等しいことを示せばよい：

$$\begin{tikzcd} & & A\otimes B_1\otimes Z \arrow[r, "AB_1\otimes\Delta_Z"] \arrow[dd, "f*k"] & A\otimes B_1\otimes Z\otimes Z \arrow[dd, "(f*k)\otimes Z:=A\otimes k\otimes Z"] \\ X \arrow[r, "f"] & A\otimes Y \arrow[ur, "A\otimes g_1"] \arrow[dr, "A\otimes g_2"'] & & \\ & & A\otimes B_2\otimes Z \arrow[r, "AB_2\otimes\Delta_Z"'] & A\otimes B_2\otimes Z\otimes Z \end{tikzcd}$$

k は 2-射であったから、次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd} & B_1\otimes Z \arrow[r, "B_1\otimes\Delta_Z"] \arrow[dd, "k"] & B_1\otimes Z\otimes Z \arrow[dd, "k\otimes Z"] \\ Y \arrow[ur, "g_1"] \arrow[dr, "g_2"'] & & \\ & B_2\otimes Z \arrow[r, "B_2\otimes\Delta_Z"'] & B_2\otimes Z\otimes Z \end{tikzcd}$$

この図式に $A\otimes -$ を施せば、求める図式の可換性を得る。

□

以上で中間構造 $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の定義が完了した。次節で圏 $\Lambda[\mathcal{R}]$ を定義し、次々節でそのデカルト構造を示す。

§ 3.2. 圏 $\Lambda[\mathcal{R}]$ の構成

本節では圏 $\Lambda[\mathcal{R}]$ の定義を完成する。まず前述の通り $\Lambda[\mathcal{R}]$ の射を $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射の同値類として定義する。次に合成を $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ の 1-射の合成から誘導されるものとして定義するが、これの well-defined 性は非自明であるから、これを示す。

定義 3.2.1：$\Lambda[\mathcal{R}]$ の対象

$\mathrm{Ob}(\Lambda[\mathcal{R}]) := \mathrm{Ob}(\mathcal{B}(\mathcal{R}))\ (= \left\{\overline{X} \mid X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{R})\right\})$ とする。

定義 3.2.2：$\Lambda[\mathcal{R}]$ の射

$\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X},\overline{Y})$ 上の同値関係 $\sim$ を二項関係「2-射で繋がれている」が生成する同値関係とする。すなわち、2 つの 2-射 $(A,f),(B,g) : \overline{X} \to \overline{Y}$ が $(A,f) \sim (B,g)$ であるのは、有限個の 2-射 $k_{2i} : (C_{2i},h_{2i}) \to (C_{2i+1},h_{2i+1})$, $k_{2i+1} : (C_{2i+2},h_{2i+2}) \to (C_{2i+1},h_{2i+1})$ $(i=0,..,n-1)$ が存在して、$(C_0,h_0)=(A,f),(C_{2n},h_{2n})=(B,g)$ であるときである。この $\sim$ を用いて $\Lambda[\mathcal{R}](\overline{X},\overline{Y}) := \mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X},\overline{Y})/\sim$ と定義する。即ち、$\Lambda[\mathcal{R}](\overline{X},\overline{Y})$ は $\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X},\overline{Y})$ の連結成分全体の集合である。

これからこの商集合の上に合成が誘導されることを示す (補題 3.2.4)。そのために、先に必要な技術的な補題 (補題 3.2.3) を示しておく。

補題 3.2.3 に先んじて、その意味を説明しておく。前述のとおり、$\Lambda[\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}]$ の射は $\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ の射をグラフとするようなものである。一方で、$\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}$ の射はそれ自体素朴に $\Lambda[\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}]$ の射だとみなせるべきである。即ち、単射写像 $f : X \to Y$ に対して、f 自身を $\Lambda[\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}]$ に埋め込んだ射 $[1, f]$ と f のグラフ $[X, (id_X, f)]$ は、($\Lambda[\mathrm{Set}^{\mathrm{mono}}]$ の射として) 同一であるべきだ。補題 3.2.3 はまさしくこれを主張するものである。

補題 3.2.3：$\mathcal{R}$ の射のグラフは $\Lambda[\mathcal{R}]$ ではもとの $\mathcal{R}$ の射と同じ

$(A, f) : \overline{X} \to \overline{Y}$ in $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ に対し、$(A, f) \sim (X \otimes A, \Delta_X \triangleright (X \otimes f))$ である。分かりやすさのために図示すれば以下のよう：

$$
\begin{aligned}
&(X \xrightarrow{\quad f \quad} A \otimes Y) \\
\sim \quad &(X \xrightarrow{\quad \Delta_X \quad} X \otimes X \xrightarrow{\quad X \otimes f \quad} X \otimes A \otimes Y).
\end{aligned}
$$

Proof. 次のように同値で結ぶことができる。

$$
\begin{aligned}
&(A, f) \\
\sim\ &(A \otimes Y,\ f \triangleright (A \otimes \Delta_Y)) \quad (\text{命題 } 3.1.4 \text{ より}) \\
\sim\ &(A \otimes A \otimes Y,\ f \triangleright (A \otimes \Delta_Y) \triangleright (\Delta_A \otimes YY)) \quad (\text{命題 } 3.1.3 \text{ と 命題 } 3.1.8 \text{ より}) \\
=\ &(A \otimes A \otimes Y,\ f \triangleright (\Delta_A \otimes \Delta_Y)) \quad (\otimes \text{ の函手性より}) \\
\sim\ &(A \otimes Y \otimes A,\ f \triangleright (\Delta_A \otimes \Delta_Y) \triangleright (A \otimes \gamma_{AY} \otimes Y) \quad (\text{命題 } 3.1.3 \text{ と 命題 } 3.1.8 \text{ より}) \\
=\ &(A \otimes Y \otimes A,\ f \triangleright \Delta_{A \otimes Y})) \quad (\because \Delta \text{ はモノイド自然変換であった}) \\
=\ &(A \otimes Y \otimes A,\ \Delta_X \triangleright (f \otimes f)) \quad (\Delta \text{ の自然性より}) \\
\sim\ &(X \otimes A,\ \Delta_X \triangleright (X \otimes f)) \quad (\text{命題 } 3.1.3 \text{ と 命題 } 3.1.8 \text{ より})
\end{aligned}
$$

これで示された。分かりやすさのために、同じ式変形の図式的表示 (図 2) と string diagram(図 3) を付しておく。

$$(X \xrightarrow{f} A \otimes Y)$$

命題 3.1.4

$$\sim \quad (X \xrightarrow{f} A \otimes Y \xrightarrow{A \otimes \Delta_Y} A \otimes Y \otimes Y)$$

命題 3.1.3, 命題 3.1.8

$$\sim \quad (X \xrightarrow{f} A \otimes Y \xrightarrow{A \otimes \Delta_Y} A \otimes Y \otimes Y \xrightarrow{\Delta_A \otimes YY} A \otimes A \otimes Y \otimes Y)$$

$\otimes$ の函手性

$$= \quad (X \xrightarrow{f} A \otimes Y \xrightarrow{\Delta_A \otimes \Delta_Y} A \otimes A \otimes Y \otimes Y)$$

命題 3.1.3, 命題 3.1.8

$$\sim \quad (X \xrightarrow{f} A \otimes Y \xrightarrow{\Delta_A \otimes \Delta_Y} A \otimes A \otimes Y \otimes Y \xrightarrow{A \otimes \gamma_{A,Y} \otimes Y} A \otimes Y \otimes A \otimes Y)$$

Δ はモノイド自然変換

$$= \quad (X \xrightarrow{f} A \otimes Y \xrightarrow{\Delta_{A \otimes Y}} A \otimes Y \otimes A \otimes Y)$$

Δ の自然性

$$= \quad (X \xrightarrow{\Delta_X} X \otimes X \xrightarrow{f \otimes f} A \otimes Y \otimes A \otimes Y)$$

$\otimes$ の函手性

$$= \quad (X \xrightarrow{\Delta_X} X \otimes X \xrightarrow{X \otimes f} X \otimes A \otimes Y \xrightarrow{f \otimes AY} A \otimes Y \otimes A \otimes Y)$$

命題 3.1.3, 命題 3.1.8

$$\sim \quad (X \xrightarrow{\Delta_X} X \otimes X \xrightarrow{X \otimes f} X \otimes A \otimes Y)$$

図 2　図式的記法による証明

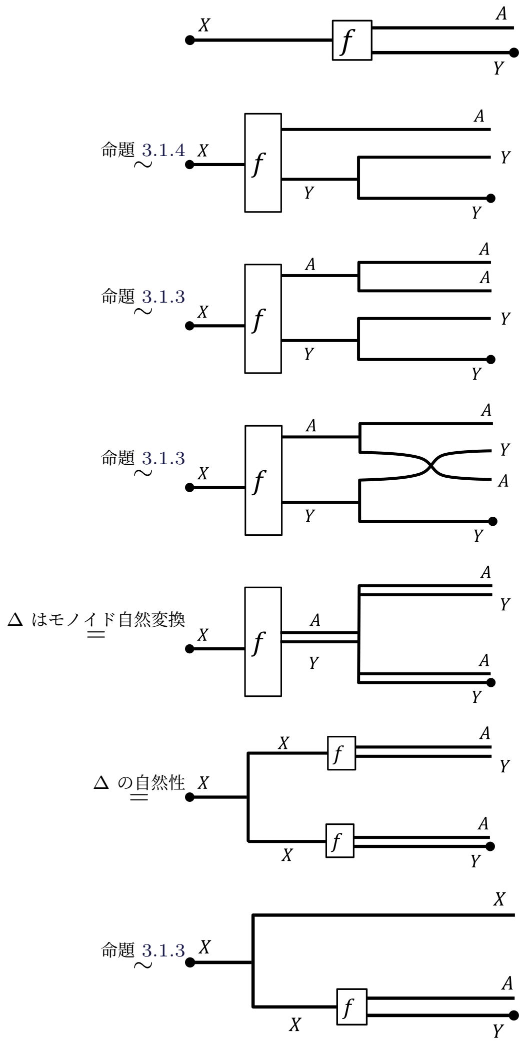

図 3　string diagram による証明

□

補題 3.2.4：$\Lambda[\mathcal{R}]$ の射の合成の well-defined 性

$\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \in \mathcal{B}(\mathcal{R})$ とする。任意の $(A_1, f_1), (A_2, f_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X}, \overline{Y})$, $(B_1, g_1), (B_2, g_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{Y}, \overline{Z})$ に対し、$(A_1, f_1) \sim (A_2, f_2)$ かつ $(B_1, g_1) \sim (B_2, g_2)$ ならば、$(A_1, f_1) \triangleright (B_1, g_1) \sim (A_2, f_2) \triangleright (B_2, g_2)$ である。

Proof. 同値関係 $\sim$ は 2-射の生成する同値関係として定義されていたので、次の 2 つを示せばよい：

(1) 任意の $(A_1, f_1), (A_2, f_2) \in \mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X}, \overline{Y}), (B, g) \in \mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{Y}, \overline{Z})$ 及び $k : (A_1, f_1) \to (A_2, f_2)$ に対

し、$(A_1,f_1)\triangleright(B,g)\sim(A_2,f_2)\triangleright(B,g)$ である

(2) 任意の $(A,f)\in\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X},\overline{Y}),(B_1,g_1),(B_2,g_2)\in\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{Y},\overline{Z})$ 及び $l:(B_1,g_1)\to(B_2,g_2)$ に対し、$(A,f)\triangleright(B_1,g_1)\sim(A,f)\triangleright(B_2,g_2)$ である。

このうち (2) は命題 3.1.8 そのものである。従って、(1) を示せば十分である。

(1) を示す。$(A_1,f_1),(A_2,f_2)\in\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{X},\overline{Y}),(B,g)\in\mathcal{B}(\mathcal{R})(\overline{Y},\overline{Z})$ 及び $k:(A_1,f_1)\to(A_2,f_2)$ を任意に固定する。$(A_1,f_1)\triangleright(B,g)\sim(A_2,f_2)\triangleright(B,g)$ を示す。

$$
\begin{aligned}
&(A_1,f_1)\triangleright(B,g)\\
=\ &(A_1\otimes B,f_1\triangleright(A_1\otimes g))\quad(\text{合成の定義より})\\
\sim\ &(A_1\otimes Y\otimes B,f_1\triangleright(A_1\otimes\Delta_Y)\triangleright(A_1Y\otimes g))\quad(\text{補題 3.2.3 と 命題 3.1.8 より})\\
\sim\ &(A_2\otimes Y\otimes B,f_1\triangleright(A_1\otimes\Delta_Y)\triangleright(A_1Y\otimes g)\triangleright(k\otimes BZ))\quad(\text{命題 3.1.3 と 命題 3.1.8 より})\\
=\ &(A_2\otimes Y\otimes B,f_1\triangleright(A_1\otimes\Delta_Y)\triangleright(k\otimes Y)\triangleright(A_2Y\otimes g))\quad(\otimes\text{ の函手性より})\\
=\ &(A_2\otimes Y\otimes B,f_2\triangleright(A_2\otimes\Delta_Y)\triangleright(A_2Y\otimes g))\quad(\because k\text{ は }(A_1,f_1)\text{ から }(A_2,f_2)\text{ への 2-射であった})\\
\sim\ &(A_2\otimes B,f_2\triangleright(A_2Y\otimes g))\quad(\text{命題 3.2.3 と 命題 3.1.8 より})
\end{aligned}
$$

以上で示された。分かりやすさのために、同じ式変形の図式的表示と string diagram を付しておく。

$$
\begin{aligned}
&(X\xrightarrow{f_1}A_1\otimes Y\xrightarrow{A_1\otimes g}A_1\otimes B\otimes Z)\\
\overset{\text{補題 3.2.3, 命題 3.1.8}}{\sim}\ &(X\xrightarrow{f_1}A_1\otimes Y\xrightarrow{A_1\otimes\Delta_Y}A_1\otimes Y\otimes Y\xrightarrow{A_1Y\otimes g}A_1\otimes Y\otimes B\otimes Z)\\
\overset{\text{命題 3.1.3, 命題 3.1.8}}{\sim}\ &(X\xrightarrow{f_1}A_1\otimes Y\xrightarrow{A_1\otimes\Delta_Y}A_1\otimes Y\otimes Y\xrightarrow{A_1Y\otimes g}A_1\otimes Y\otimes B\otimes Z\xrightarrow{k\otimes BZ}A_2\otimes Y\otimes B\otimes Z)\\
\overset{\otimes\text{ の函手性}}{=}\ &(X\xrightarrow{f_1}A_1\otimes Y\xrightarrow{A_1\otimes\Delta_Y}A_1\otimes Y\otimes Y\xrightarrow{k\otimes Y}A_2\otimes Y\otimes Y\xrightarrow{A_2Y\otimes g}A_2\otimes Y\otimes B\otimes Z)\\
\overset{k\text{ は 2-射}}{=}\ &(X\xrightarrow{f_2}A_2\otimes Y\xrightarrow{A_2\otimes\Delta_Y}A_2\otimes Y\otimes Y\xrightarrow{A_2Y\otimes g}A_2\otimes Y\otimes B\otimes Z)\\
\overset{\text{補題 3.2.3, 命題 3.1.8}}{\sim}\ &(X\xrightarrow{f_2}A_2\otimes Y\xrightarrow{A_2\otimes g}A_2\otimes B\otimes Z)
\end{aligned}
$$

図 4　図式的表示による証明

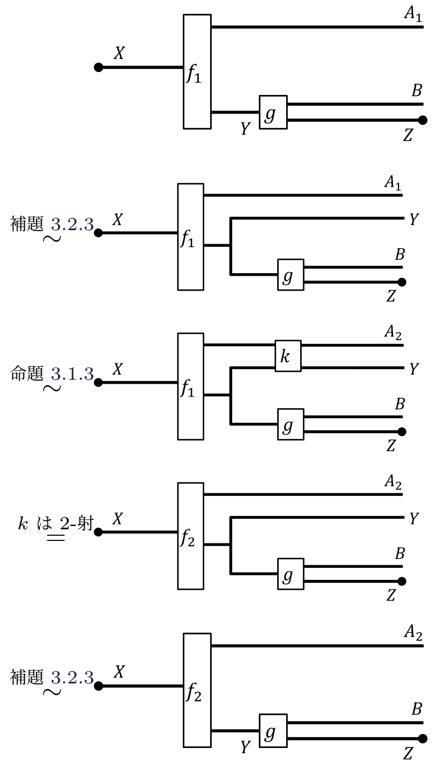

図 5　string diagram による証明

□

定義 3.2.5：$\Lambda[\mathcal{R}]$ の射の合成

$\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z} \in \Lambda[\mathcal{R}], [A, f] \in \Lambda[\mathcal{R}](\overline{X}, \overline{Y}), [B, g] \in \Lambda[\mathcal{R}](\overline{Y}, \overline{Z})$ とする。これらの合成を $[A, f] \triangleright [B, g] := [(A, f) \triangleright (B, g)]$ で定める。これは補題 3.2.4 より well-defined である。

定義 3.2.6：$\Lambda[\mathcal{R}]$ の恒等射

各 $\overline{X} \in \Lambda[\mathcal{R}]$ に対し、$id_{\overline{X}} := [id_{\overline{X}}](= [I, \lambda_X^{-1}])$ と定める。

命題 3.2.7：$\Lambda[\mathcal{R}]$ の結合則

上記合成は結合則を満たす。これは $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ で 1-射の結合則が成り立っていたことから従う。

命題 3.2.8：$\Lambda[\mathcal{R}]$ の単位律

上記合成と恒等射は単位律を満たす。これは $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ で 1-射の単位律が成り立っていたことから従う。

定義 3.2.9：圏 $\Lambda[\mathcal{R}]$

定義 3.2.1, 定義 3.2.2, 定義 3.2.5, 定義 3.2.6 で与えられる構造達は、命題 3.2.7, 命題 3.2.8 より、圏を成す。この圏を $\Lambda[\mathcal{R}]$ と書くことにする。

§ 3.3. $\Lambda[\mathcal{R}]$ のデカルト圏構造

以上で定義した $\Lambda[\mathcal{R}]$ がデカルト圏になっていることを示す。$\mathcal{R}$ から引き継ぐモノイド構造がそのまま直積となる。まずモノイド構造を引き継ぐことを示し、その後それが直積の普遍性を持つことを示す。

定義 3.3.1：$\Lambda[\mathcal{R}]$ のモノイド構造

$\mathcal{R}$ を 関連圏とする。$\Lambda[\mathcal{R}]$ は、$\mathcal{R}$ と同様にして対称モノイド圏となる。モノイド積の函手 $\otimes'$ と単位対象 I' のみ明示する。まず $\otimes'$ を次のように定める。

$$\begin{array}{cccc} \otimes' & : & \Lambda[\mathcal{R}] \times \Lambda[\mathcal{R}] & \longrightarrow & \Lambda[\mathcal{R}] \\ & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & & (\overline{X}, \overline{Y}) & \longmapsto & \overline{X \otimes Y} \\ & & \Big\downarrow & {\scriptstyle ([A,f],[B,g]) \mapsto [A \otimes B, f \square g]} & \Big\downarrow \\ & & (\overline{X'}, \overline{Y'}) & \longmapsto & \overline{X' \otimes Y'} \end{array}$$

ただし、$f \square g := (f \otimes g) \triangleright (A \otimes \gamma_{X,B} \otimes Y)$ である。このように定めた $\otimes'$ は確かに well-defined である。単位対象は $I' := I$ で定める。

命題 3.3.2：$\Lambda[\mathcal{R}]$ の直積

$\overline{X}, \overline{Y} \in \Lambda[\mathcal{R}]$ に対し、$(\overline{X \otimes Y}, \pi_{\overline{X}}, \pi_{\overline{Y}})$ は $\overline{X}$ と $\overline{Y}$ の直積である。ただし、$\overline{Y}$ への射影 $\pi_{\overline{Y}} : \overline{X \otimes Y} \to \overline{Y}$ は、$\pi_{\overline{Y}} := [X, id_{X \otimes Y}]$ で定める。$\overline{X}$ への射影 $\pi_{\overline{X}} : \overline{X \otimes Y} \to \overline{X}$ は、$\pi_{\overline{X}} := [Y, \gamma_{X,Y}]$ で定める。

Proof. $\overline{Z} \in \Lambda[\mathcal{R}]$ を任意に取る。対応 $\varphi : \Lambda[\mathcal{R}](\overline{Z}, \overline{X \otimes Y}) \to \Lambda[\mathcal{R}](\overline{Z}, \overline{X}) \times \Lambda[\mathcal{R}](\overline{Z}, \overline{Y})$ を $\varphi([C,h]) := ([C,h] \triangleright \pi_{\overline{X}}, [C,h] \triangleright \pi_{\overline{Y}})$ で定める。φ が全単射であることを示す。

次の 3 つのことをすればよい。

(i) φ の逆対応 ψ を構成する。
(ii) $\psi \triangleright \varphi = id$ であることを示す。
(iii) $\varphi \triangleright \psi = id$ であることを示す。

(i) φ の逆対応 ψ を構成する。

$[A,f] : \overline{Z} \to \overline{X}$, $[B,g] : \overline{Z} \to \overline{Y}$ を任意に取る。$\mathcal{R}$ の射 $f \boxdot g : Z \to A \otimes B \otimes X \otimes Y$ を $f \boxdot g := \Delta_Z \triangleright (f \square g)$ で定める。即ち $f \boxdot g$ は次の列の合成である：

$$Z \to Z \otimes Z \to (A \otimes X) \otimes (B \otimes Y) \to (A \otimes B) \otimes (X \otimes Y)$$

$\psi([A,f],[B,g]) := [A \otimes B, f \boxdot g]$ とする。ψ の well-defined 性を示す。次の 2 つを示せばよい：
(a) 任意の $(A_1, f_1), (A_2, f_2) : \overline{Z} \to \overline{X}, (B, g) : \overline{Z} \to \overline{Y}$ in $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ と $k : (A_1, f_1) \to (A_2, f_2)$ に対し、$(A_1 \otimes B, f_1 \boxdot g) \sim (A_2 \otimes B, f_2 \boxdot g)$ である。
(b) 任意の $(A, f) : \overline{Z} \to \overline{X}, (B_1, g_1), (B_2, g_2) : \overline{Z} \to \overline{Y}$ in $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ と $l : (B_1, g_1) \to (B_2, g_2)$ に対し、$(A \otimes B_1, f \boxdot g_1) \sim (A \otimes B_2, f \boxdot g_2)$ である。

両者の証明は同様なので (a) のみ示す。$k \otimes BXY : (A_1 \otimes B, f_1 \boxdot g) \to (A_2 \otimes B, f_2 \boxdot g)$ は次の図式を可換にするから、確かに $(A_1 \otimes B, f_1 \boxdot g)$ から $(A_2 \otimes B, f_2 \boxdot g)$ への 2-射である。

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \otimes B \otimes X \otimes Y \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dd, "k\otimes BXY"] & A_1 \otimes B \otimes X \otimes Y \otimes X \otimes Y \arrow[dd, "k\otimes BXYXY"] \\
Z \arrow[ur, "f_1 \boxdot g"] \arrow[dr, "f_2 \boxdot g"'] & & \\
 & A_2 \otimes B \otimes X \otimes Y \arrow[r, "\Delta"] & A_1 \otimes B \otimes X \otimes Y \otimes X \otimes Y
\end{tikzcd}$$

(ii)$\psi \triangleright \varphi = id$ であることを示す。$[A,f] : \overline{Z} \to \overline{X},\ [B,g] : \overline{Z} \to \overline{Y}$ を任意に取る。$([A \otimes B, f \boxdot g] \triangleright \pi_{\overline{X}},\ [A \otimes B, f \boxdot g] \triangleright \pi_{\overline{Y}}) = ([A,f],[B,g])$ であることを示す。2 つの証明は同様なので、$([A \otimes B, f \boxdot g] \triangleright \pi_{\overline{Y}}) = [B,g]$ であることのみ示す。

$$\begin{aligned}
[A \otimes B, f \boxdot g] \triangleright \pi_{\overline{Y}} &= [A \otimes B \otimes X, f \boxdot g] \quad (\triangleright \text{ の定義より}) \\
&= [A \otimes B \otimes X, \Delta_Z \triangleright (f \otimes g) \triangleright (A \otimes \gamma_{X,B} \otimes Y)] \quad (\boxdot \text{ の定義より}) \\
&= [A \otimes X \otimes B, \Delta_Z \triangleright (f \otimes g)] \quad (\text{命題 3.1.3 より}) \\
&= [Z \otimes B, \Delta_Z \triangleright (Z \otimes g)] \quad (\text{命題 3.1.3 より}) \\
&= [B, g] \quad (\text{補題 3.2.3 より})
\end{aligned}$$

$([A \otimes B, f \boxdot g] \triangleright \pi_{\overline{X}}) = [A,f]$ であることの証明も同様である。以上で $\psi \triangleright \varphi = id$ であることが示された。

(iii)$\varphi \triangleright \psi = id$ であることを示す。$[C,h] : \overline{Z} \to \overline{X \otimes Y}$ を任意に取る。$[C,h] = \psi(\varphi([C,h]))$ であることを示す。

（次頁に続く）

（続き：$[C,h] = \psi(\varphi([C,h]))$ であることの証明）まず、

$$\begin{aligned}
&\psi(\varphi([C,h])) \\
&= \psi([C,h] \triangleright \pi_X, [C,h] \triangleright \pi_Y) \quad (\varphi \text{ の定義より}) \\
&= \psi([C \otimes Y, h \triangleright (C \otimes \gamma_{X,Y})], [C \otimes X, h]) \quad (\triangleright \text{ の定義より}) \\
&= [C \otimes Y \otimes C \otimes X,\ (h \triangleright (C \otimes \gamma_{X,Y})) \boxdot h] \quad (\varphi \text{ の定義より})
\end{aligned}$$

である。$[C,h] = [C \otimes Y \otimes C \otimes X,\ (h \triangleright (C \otimes \gamma_{X,Y})) \boxdot h]$ であることを示す。$(C,h) \sim (C \otimes Y \otimes$

$C \otimes X,\ (h \triangleright (C \otimes \gamma_{X,Y})) \boxdot h)$ であることを示せばよい。

$$
\begin{aligned}
&(C \otimes Y \otimes C \otimes X,\ (h \triangleright (C \otimes \gamma_{X,Y})) \boxdot h) \\
&= (C \otimes Y \otimes C \otimes X,\ h \triangleright \Delta_{CXY} \triangleright (C \otimes \gamma_{X,YCX} \otimes Y)\ \ (\text{後述 (*1) より}) \\
&\sim (C \otimes C \otimes Y \otimes X,\ h \triangleright \Delta_{CXY} \triangleright (C \otimes \gamma_{XY,C} \otimes XY) \triangleright (CC \otimes \gamma_{X,YX} \otimes Y))\ \ (\text{後述 (*2) より}) \\
&\sim (C \otimes Y \otimes X,\ h \triangleright (C \otimes \Delta_{XY}) \triangleright (C \otimes \gamma_{X,XY} \otimes Y))\ \ (\text{後述 (*3) より}) \\
&\sim (C \otimes X \otimes Y,\ h \triangleright (C \otimes \Delta_{XY}))\ \ (\text{後述 (*4) より}) \\
&\sim (C,\ h)\ \ (\text{命題 3.1.4 と 命題 3.1.8 より})
\end{aligned}
$$

である。ただし、上式中の $(*1), (*2), (*3), (*4)$ の部分は以下に示す。まず $(*1)$ は次のように示される。

$$
\begin{aligned}
&(C \otimes Y \otimes C \otimes X,\ (h \triangleright (C \otimes \gamma_{X,Y})) \boxdot h) \\
&= (C \otimes Y \otimes C \otimes X,\ \Delta_Z \triangleright ((h \triangleright (C \otimes \gamma_{X,Y})) \otimes h) \triangleright (CY \otimes \gamma_{X,CX} \otimes Y))\ \ (\boxdot \text{ の定義より}) \\
&= (C \otimes Y \otimes C \otimes X,\ \Delta_Z \triangleright (h \otimes h) \triangleright (C \otimes \gamma_{X,Y} \otimes CXY) \triangleright (CY \otimes \gamma_{X,CX} \otimes Y))\ \ (\otimes \text{ の函手性より}) \\
&= (C \otimes Y \otimes C \otimes X,\ h \triangleright \Delta_{CXY} \triangleright (C \otimes \gamma_{X,Y} \otimes CXY) \triangleright (CY \otimes \gamma_{X,CX} \otimes Y))\ \ (\Delta \text{ の自然性より}) \\
&= (C \otimes Y \otimes C \otimes X,\ h \triangleright \Delta_{CXY} \triangleright (C \otimes \gamma_{X,YCX} \otimes Y)\ \ (\gamma \text{ の整合性より})
\end{aligned}
$$

である。これで $(*1)$ が示された。続いて $(*2)$ を示す。命題 3.1.8 と $\otimes$ の函手性より、$(Y \otimes C \otimes X,\ \gamma_{X,YCX})) \sim (C \otimes Y \otimes X,\ (\gamma_{XY,C} \otimes X) \triangleright (C \otimes \gamma_{X,YX}))$ であることを示せばよい。

$$
\begin{aligned}
&(Y \otimes C \otimes X,\ \gamma_{X,YCX}) \\
&= (Y \otimes C \otimes X,\ (\gamma_{X,YC} \otimes X) \triangleright (YC \otimes \gamma_{X,X}))\ \ (\gamma \text{ の整合性より}) \\
&\sim (C \otimes Y \otimes X,\ (\gamma_{X,YC} \otimes X) \triangleright (YC \otimes \gamma_{X,X}) \triangleright (\gamma_{Y,C} \otimes XX))\ \ (\text{命題 3.1.3 と 命題 3.1.8 より}) \\
&= (C \otimes Y \otimes X,\ (\gamma_{X,YC} \otimes X) \triangleright (\gamma_{Y,C} \otimes XX) \triangleright (YC \otimes \gamma_{X,X}))\ \ (\otimes \text{ の函手性より}) \\
&= (C \otimes Y \otimes X,\ (X \otimes \gamma_{Y,C} \otimes X) \triangleright (\gamma_{X,CY} \otimes X) \triangleright (YC \otimes \gamma_{X,X}))\ \ (\gamma \text{ の自然性より}) \\
&= (C \otimes Y \otimes X,\ (X \otimes \gamma_{Y,C} \otimes X) \triangleright (\gamma_{X,C} \otimes YX) \triangleright (C \otimes \gamma_{X,Y} \otimes X) \triangleright (YC \otimes \gamma_{X,X}))\ \ (\gamma \text{ の整合性より}) \\
&= (C \otimes Y \otimes X,\ (\gamma_{XY,C} \otimes X) \triangleright (C \otimes \gamma_{X,YX}))\ \ (\gamma \text{ の整合性より})
\end{aligned}
$$

である。これで $(*2)$ が示された。続いて $(*3)$ を示す。命題 3.1.8 より、$(C \otimes C \otimes Y \otimes X,\ \Delta_{CXY} \triangleright (C \otimes \gamma_{XY,C} \otimes XY) \triangleright (CC \otimes \gamma_{X,YX} \otimes Y)) \sim (C \otimes Y \otimes X,\ (C \otimes \Delta_{XY}) \triangleright (C \otimes \gamma_{X,XY} \otimes Y))$ であることを示せばよい。

$$
\begin{aligned}
&(C \otimes C \otimes Y \otimes X,\ (\Delta_{CXY}) \triangleright (C \otimes \gamma_{XY,C} \otimes XY) \triangleright (CC \otimes \gamma_{X,YX} \otimes Y)) \\
&= (C \otimes C \otimes Y \otimes X,\ (\Delta_C \otimes \Delta_{XY}) \triangleright (CC \otimes \gamma_{X,XY} \otimes Y))\ \ (\because \Delta \text{ はモノイド自然変換}) \\
&= (C \otimes C \otimes Y \otimes X,\ (C \otimes \Delta_{XY}) \triangleright (C \otimes \gamma_{X,XY} \otimes Y)) \triangleright (\Delta_C \otimes YXXY)\ \ (\because \otimes \text{ の函手性}) \\
&\sim (C \otimes Y \otimes X,\ (C \otimes \Delta_{XY}) \triangleright (C \otimes \gamma_{X,XY} \otimes Y))\ \ (\text{命題 3.1.4 より})
\end{aligned}
$$

である。これで $(*3)$ が示された。続いて $(*4)$ を示す。命題 3.1.8 と $\otimes$ の函手性より、$(Y \otimes X,\ \Delta_{XY} \triangleright$

$(\gamma_{X,XY}\otimes Y)) \sim (X\otimes Y,\ \Delta_{XY})$ であることを示せばよい。

$$
\begin{aligned}
&(Y\otimes X,\ (\Delta_{XY})\triangleright(\gamma_{X,XY}\otimes Y))\\
\sim\ &(X\otimes Y,\ (\Delta_{XY})\triangleright(\gamma_{X,XY}\otimes Y)\triangleright(\gamma_{Y,X}\otimes XY))\ \ \text{(命題 3.1.3 より)}\\
=\ &(X\otimes Y,\ (\Delta_{XY})\triangleright(X\otimes\gamma_{Y,X}\otimes Y)\triangleright(\gamma_{X,X}\otimes YY)\triangleright(X\otimes\gamma_{X,Y}\otimes Y))\ \ (\gamma\ \text{の整合性より})\\
=\ &(X\otimes Y,\ (\Delta_X\otimes\Delta_Y)\triangleright(\gamma_{X,X}\otimes YY)\triangleright(X\otimes\gamma_{X,Y}\otimes Y))\ \ (\because \Delta\ \text{はモノイド自然変換})\\
=\ &(X\otimes Y,\ (\Delta_X\otimes\Delta_Y)\triangleright(X\otimes\gamma_{X,Y}\otimes Y))\ \ (\Delta\ \text{の可換性より})\\
=\ &(X\otimes Y,\ \Delta_{XY})\ \ (\because \Delta\ \text{はモノイド自然変換})
\end{aligned}
$$

である。これで $(*4)$ が示された。これで $(C,h)\sim(C\otimes Y\otimes C\otimes X,\ (h\triangleright(C\otimes\gamma_{X,Y}))\boxdot h)$ の証明が完了した。以上で $[C,h]=\psi(\varphi([C,h]))$ であることの証明が完了した。以上で示された。 □

命題 3.3.3：$\Lambda[\mathcal{R}]$ の終対象

$\Lambda[\mathcal{R}]$ の単位対象 I は終対象である。

Proof. 任意に $\overline{X}\in\Lambda[\mathcal{R}]$ を取り、$!_{\overline{X}} := [X,\lambda_X] : \overline{X}\to I$ と置く。任意の $[A,f]:\overline{X}\to I$ に対し、次のように $[A,f] = !_{\overline{X}}$ であることを示す。$(A,f)\sim(X,\lambda_X)$ であることを示せばよい。

$f' : X\to A$ を $f' := (-\otimes I)^{-1}(f\triangleright\lambda_X)$ と定めると、

$$
\begin{aligned}
&(A,f)\\
=\ &(A,\lambda_X\triangleright(f'\times I))\\
\sim\ &(X,\lambda_X)\ \text{(命題 3.1.3 より)}
\end{aligned}
$$

である。以上で示された。 □

以上より $\Lambda[\mathcal{R}]$ は全ての有限直積を持ち、従ってデカルト圏であることが示された。次節では Λ が関連圏からデカルト圏を得る普遍的な方法であることを示す。

§ 4. 構成 Λ の普遍性

前節で定義した構成 Λ は、関連圏からデカルト圏を得る普遍的な方法になっている。今節ではこの普遍性を示す。まず、$\mathcal{R}$ から $\Lambda[\mathcal{R}]$ への普遍的な函手を定める。

定義 4.1：ユニット函手 $H_{\mathcal{R}}$

函手 $H_{\mathcal{R}} : \mathcal{R}\to\Lambda[\mathcal{R}]$ を次で定める。

$$
\begin{array}{cccc}
H_{\mathcal{R}} & : & \mathcal{R} & \longrightarrow & \Lambda[\mathcal{R}]\\
 & & \cup & & \cup\\
 & & X & \longmapsto & \overline{X}\\
 & & \Big\downarrow & f\mapsto[I,f\triangleright(\lambda_Y)^{-1}] & \Big\downarrow\\
 & & Y & \longmapsto & \overline{Y}
\end{array}
$$

$H_{\mathcal{R}}$ は関連函手になる。$H_{\mathcal{R}}$ の関連函手としての構造の同型 $m_{X,Y} : H_{\mathcal{R}}(X) \otimes H_{\mathcal{R}}(Y) \to H_{\mathcal{R}}(X \otimes Y)$ と $e : I \to H_{\mathcal{R}}(I)$ を次で定める。

$$m_{X,Y} := [I, \lambda^{-1}_{X\otimes Y}]$$
$$e := [I, \lambda^{-1}_{I}]$$

そして Λ は次の普遍性を満たす。ただし、煩雑な議論を避けるため、2-圏論的主張を 1-圏論的主張に弱めている。

命題 4.2：Λ の普遍性

$\mathcal{R}$ を関連圏とし、デカルト圏 $\Lambda[\mathcal{R}]$ 及び関連函手 $H_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \to \Lambda[\mathcal{R}]$ を上で定めたものとする。このとき、任意のデカルト圏 $\mathcal{D}$ 及び関連函手 $F = (F, \mu, \varepsilon) : \mathcal{R} \to \mathcal{D}$ に対し、次を満たす（強）モノイド函手 $\overline{F} : \Lambda[\mathcal{R}] \to \mathcal{D}$ が一意に存在する：

$F = H_{\mathcal{R}} \triangleright \overline{F}$

Proof. $\mathcal{D}$ をデカルト圏とする。3 ステップに分けて示す。

(i) $\overline{F}$ の構成と well-defined 性の証明

(ii) $\overline{-}$ が $H_{\mathcal{R}} \triangleright -$ の左逆であることの証明

(iii) $\overline{-}$ が $H_{\mathcal{R}} \triangleright -$ の右逆であることの証明

(i) ($\overline{F}$ の構成と well-defined 性の証明)

関連函手 $F = (F, \mu, \varepsilon) : \mathcal{R} \to \mathcal{D}$ に対し（強）モノイド函手 $\overline{F} = (\overline{F}, \overline{\mu}, \overline{\varepsilon}) : \Lambda[\mathcal{R}] \to \mathcal{D}$ を対応させる操作 $\overline{(-)}$ を次で定める：

- 各 $\overline{X} \in \Lambda[\mathcal{R}]$ に対し、$\overline{F}(\overline{X}) := F(X)$ とする
- 各 $[A, f] : \overline{X} \to \overline{Y}$ in $\Lambda[\mathcal{R}]$ に対し、$\overline{F}([A, f])$ を $\overline{F}([A, f]) := F(f) \triangleright \mu^{-1}_{A,Y} \triangleright \pi_{2,F(A),F(Y)}$ とする。

ただし、$\mu_{A,Y} : F(A) \times F(Y) \to F(A \otimes Y)$ は F のモノイド函手としての構造の同型であり、$\pi_{2,F(A),F(Y)}$ はデカルト圏 $\mathcal{D}$ における第二射影である。分かりやすさのために追記する。$F(f)$ は下の列の合成である：

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(A \otimes Y) \xleftarrow[\cong]{\mu_{A,Y}} F(A) \times F(Y) \xrightarrow{\pi_2} F(Y).$$

$\overline{F}$ の well-defined 性を示す。$(A, f), (B, g) : \overline{X} \to \overline{Y}$ in $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ と $k : (A, f) \to (B, g)$ を任意に取る。$\overline{F}([A, f]) = \overline{F}([B, g])$ を示せばよい。次の図式 6 の可換性を示せば、$\overline{F}([A, f]) = \overline{F}([B, g])$ であることが分かる。この図式の手前上辺が $\overline{F}([A, f])$, 手前下辺が $\overline{F}([B, g])$ である。

$$
\begin{tikzcd}
 & & F(A\otimes Y\otimes Y) \arrow[dd, "F(k\otimes Y)"] & F(A\otimes Y)\times F(Y) \arrow[l, "\mu_{A\otimes Y,Y}", "\cong"'] \arrow[dd, "F(k)\times F(Y)"] & & F(A)\times F(Y)\times F(Y) \arrow[ll, "\mu_{A,Y}\times F(Y)", "\cong"'] \arrow[ddr, "\pi_3"] & \\
 & F(A\otimes Y) \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dd, "F(k)"] & & & F(A)\times F(Y) \arrow[llll, "\mu_{A,Y}", "\cong"'] \arrow[ur, "F(A)\times\Delta_{F(Y)}"'] \arrow[drr, "\pi_2"] & & \\
F(X) \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[dr, "F(g)"'] & & F(B\otimes Y\otimes Y) & F(B\otimes Y)\times F(Y) \arrow[l, "\cong"] & & F(B)\times F(Y)\times F(Y) \arrow[ll, "\cong"] \arrow[r, "\pi_3"] & F(Y) \\
 & F(B\otimes Y) \arrow[ur, "\Delta"] & & & F(B)\times F(Y) \arrow[llll, "\cong"] \arrow[ur] \arrow[urr, "\pi_2"] & &
\end{tikzcd}
$$

図 6 $\overline{F}([A,f]) = \overline{F}([B,g])$ を証明する図式

この図式の最左の三角形、及び左面の四角形は、k が (A,f) から (B,g) への 2-射であったから可換である。奥面左の四角形は、F が関連函手であることから可換である。奥面右の五角形は、各項の最右の $F(Y)$ 成分を操作していないため可換である。上面右の三角形、下面右の三角形についても同様。上面左の五角形の可換性は、以下の図式より従う。

$$
\begin{tikzcd}
F(A\otimes Y\otimes Y) & F(A\otimes Y)\times F(Y) \arrow[l, "\mu_{A\otimes Y,Y}"'] & F(A)\times F(Y)\times F(Y) \arrow[l, "\mu_{A,Y}\times F(Y)"'] \arrow[dl, "F(A)\times\mu_{Y,Y}"] \\
 & F(A)\times F(Y\otimes Y) \arrow[ul, "\mu_{A,Y\otimes Y}"] & \\
F(A\otimes Y) \arrow[uu, "F(A\otimes\Delta_Y)"] & & F(A)\times F(Y) \arrow[ll, "\mu_{A,Y}"] \arrow[ul, "F(A)\times F(\Delta_Y)"'] \arrow[uu, "F(A)\times\Delta_{F(Y)}"']
\end{tikzcd}
$$

この図式の内部の三角形及び四角形はそれぞれ可換であるから、外側の五角形が可換であることが分かる。これで図式 6 の上面五角形の可換性が示された。下面左の五角形の可換性も同様に示される。以上を以て図式 6 の手前以外の全ての面の可換性が示されたので、手前面の可換性が従う。従って $\overline{F}([A,f]) = \overline{F}([B,g])$ であることが示された。これで函手 $\overline{F}$ の well-defined 性が示された。

また $\overline{F}$ のモノイド函手としての構造の同型 $\overline{\mu}_{\overline{F}(\overline{X}),\overline{F}(\overline{Y})} : \overline{F}(\overline{X}) \times \overline{F}(\overline{Y}) \to \overline{F}(\overline{X} \otimes \overline{Y})$ と $\overline{\varepsilon} : 1 \to \overline{F}(\overline{I})$ を $\overline{\mu}_{\overline{F}(\overline{X}),\overline{F}(\overline{Y})} := \mu_{F(X),F(Y)}$, $\overline{\varepsilon} := \varepsilon$ と定める。すると $(\overline{F}, \overline{\mu}, \overline{\varepsilon})$ は確かに強モノイド函手である。

(ii) ($\overline{}$ が $H_{\mathcal{R}} \triangleright -$ の左逆であることの証明)

関連函手 $F : \mathcal{R} \to \mathcal{D}$ に対し、$H_{\mathcal{R}} \triangleright \overline{F} = F$ であることを示す。$H_{\mathcal{R}} \triangleright -$ も $\overline{}$ も対象上何も操作しないので、対象の対応が等しいことは直ちに分かる。よって射の対応だけ見ればよい。$f : X \to Y$ in $\mathcal{R}$ を 1 つ取り固定する。$(H_{\mathcal{R}} \triangleright \overline{F})(f)$ と $F(f)$ が等しいことを示す。$f' := f \triangleright {\lambda_Y}^{-1}$ とおく。上の図式

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f')"] \arrow[dr, "F(f)"'] & F(I \otimes Y) \arrow[d, "F(\lambda_Y)"'] & F(I) \times F(Y) \arrow[l, "\mu_{1,Y}"'] \arrow[r, "\pi_{F(I),F(Y)}"] \arrow[d, shift left, "! \times F(Y)"] & F(Y) \\
& F(Y) & 1 \times F(Y) \arrow[l, "\lambda_{F(Y)}"'] \arrow[u, shift left, "\varepsilon \times F(Y)"] \arrow[ur, "\lambda_{F(Y)}"'] &
\end{tikzcd}$$

図 7　$(H_{\mathcal{R}} \triangleright \overline{F})(f) = F(f)$ を証明する図式

7 を辿れば、

$$\begin{aligned}
&(H_{\mathcal{R}} \triangleright \overline{F})(f) \\
&= \overline{F}(H_{\mathcal{R}}(f)) \\
&= \overline{F}([1, f']) \\
&= F(f') \triangleright \mu^{-1}_{I,Y} \triangleright \pi_{F(I),F(Y)} \\
&= F(f') \triangleright \mu^{-1}_{I,Y} \triangleright (!_{F(I)} \times F(Y)) \triangleright \lambda_{F(Y)} \\
&= F(f') \triangleright \mu^{-1}_{I,Y} \triangleright (\varepsilon \times F(Y))^{-1} \triangleright \lambda_{F(Y)} \\
&= F(f') \triangleright F(\lambda_Y) \triangleright \lambda^{-1}_{F(Y)} \triangleright \lambda_{F(Y)} \\
&= F(f) \triangleright \lambda^{-1}_{F(Y)} \triangleright \lambda_{F(Y)} \\
&= F(f)
\end{aligned}$$

である。これで示された。

(iii) ($\overline{-}$ が $H_{\mathcal{R}} \triangleright -$ の右逆であることの証明)

（強）モノイド函手 $G = (G, \nu, \zeta) : \Lambda[\mathcal{R}] \to \mathcal{D}$ に対し、$\overline{H_{\mathcal{R}} \triangleright G} = G$ であることを示す。$H_{\mathcal{R}} \triangleright -$ も $\overline{-}$ も対象上何も操作しないので、対象の対応が等しいことは直ちに分かる。よって射の対応だけ見ればよい。$H_{\mathcal{R}} \triangleright G =: (H_{\mathcal{R}} \triangleright G, \mu, \varepsilon)$ と置く。$\mu_{X,Y} = \nu_{H(X),H(Y)} \triangleright G(\overline{\mu}_{X,Y})$, $\varepsilon = G(e) \triangleright \zeta$ である。

$[A, f] : \overline{X} \to \overline{Y}$ in $\Lambda[\mathcal{R}]$ を 1 つ取り固定する。$\overline{H_{\mathcal{R}} \triangleright G}([A, f]) = G([A, f])$ であることを示す。

$$\begin{aligned}
&\overline{H_{\mathcal{R}} \triangleright G}([A, f]) \\
&= (H_{\mathcal{R}} \triangleright G)(f) \triangleright \mu^{-1}_{A,Y} \triangleright \pi_2 \\
&= (H_{\mathcal{R}} \triangleright G)(f) \triangleright (\nu_{H_{\mathcal{R}}(X),H_{\mathcal{R}}(Y)} \triangleright G(m_{A,Y}))^{-1} \triangleright \pi_2 \\
&= (H_{\mathcal{R}} \triangleright G)(f) \triangleright G(m_{A,Y})^{-1} \triangleright \nu^{-1}_{H_{\mathcal{R}}(X),H_{\mathcal{R}}(Y)} \triangleright \pi_2 \\
&= G([I, f \triangleright \lambda_Y]) \triangleright G(m_{A,Y})^{-1} \triangleright \nu^{-1}_{H_{\mathcal{R}}(X),H_{\mathcal{R}}(Y)} \triangleright \pi_2 \\
&= G([I, f \triangleright \lambda_Y]) \triangleright G(m_{A,Y})^{-1} \triangleright G(\pi_2) \\
&= G([I, f \triangleright \lambda_Y] \triangleright (m_{A,Y})^{-1} \triangleright \pi_2) \\
&= G([A, f \triangleright \lambda_Y \triangleright {\lambda_Y}^{-1}]) \\
&= G([A, f])
\end{aligned}$$

以上で示された。分かりやすさのために、同じ式変形の図式的表示を付す。

$$
\begin{aligned}
&((\overline{H_{\mathcal{R}} \triangleright G})(X) \xrightarrow{(\overline{H_{\mathcal{R}} \triangleright G})([A,f])} (\overline{H_{\mathcal{R}} \triangleright G})(Y)) \\
=\ &((H_{\mathcal{R}} \triangleright G)(X) \xrightarrow{(H_{\mathcal{R}} \triangleright G)(f)} (H_{\mathcal{R}} \triangleright G)(A \otimes Y) \xleftarrow{\mu_{A,Y}} (H_{\mathcal{R}} \triangleright G)(A) \times (H_{\mathcal{R}} \triangleright G)(Y) \xrightarrow{\pi_2} (H_{\mathcal{R}} \triangleright G)(Y)) \\
=\ &(G(\overline{X}) \xrightarrow{G([I,f'])} G(\overline{A \otimes Y}) \xleftarrow{G(m_{A,Y})} G(\overline{A} \otimes' \overline{Y}) \xleftarrow{\nu_{\overline{A},\overline{Y}}} G(\overline{A}) \times G(\overline{Y}) \xrightarrow{\pi_2} G(\overline{Y})) \\
=\ &(G(\overline{X}) \xrightarrow{G([I,f'])} G(\overline{A \otimes Y}) \xleftarrow{G(m_{A,Y})} G(\overline{A} \otimes' \overline{Y}) \xrightarrow{G(\pi_2)} G(Y)) \\
=\ &(G(\overline{X}) \xrightarrow{G([A,f])} G(\overline{Y}))
\end{aligned}
$$

□

§ 5. モノ射の成す関連圏からの復元

構成 Λ を考えたもともとの動機は、デカルト圏 $\mathcal{C}$ に対し、$\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}] \cong \mathcal{C}$ となる Λ をつくることであった。本節ではこれを示す。より一般に、デカルト圏 $\mathcal{C}$ に対し、$\mathcal{C}$ の「よい関連部分圏」に対し $\Lambda[\mathcal{R}] \cong \mathcal{C}$ となることの証明を与える。まずは「よい関連部分圏」を定義する。よい関連部分圏とは、全てのグラフを持つような関連部分圏のことである。

定義 5.1：よい関連部分圏

$\mathcal{C}$ をデカルト圏とする。$\mathcal{C}$ の部分圏 $\mathcal{R}$ が**よい関連部分圏**であるとは、$\mathcal{R}$ が $\mathcal{C}$ の全ての対象を持ち、$\mathcal{C}$ の任意の射 $f : X \to Y$ に対し、f のグラフ $(id_X, f) : X \to X \times Y$ が $\mathcal{R}$ に属することをいう。

定理 5.2：よい関連部分圏からの復元

$\mathcal{C}$ をデカルト圏とし、$\mathcal{R}$ を $\mathcal{C}$ のよい関連部分圏とする。このとき、$\Lambda[\mathcal{R}] \cong \mathcal{C}$ である。包含函手 $i : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ から Λ の普遍性により誘導される函手 $\bar{i} : \Lambda[\mathcal{R}] \to \mathcal{C}$ は圏同型である。

Proof. 誘導される函手 $\bar{i}$ が対象上全単射であることは、i がそうであることと $\bar{i}$ の定義から明らか。よって $\bar{i}$ が忠実充満であることを示せばよい。

$X, Y \in \mathcal{C}$ を取る。$(\bar{i})_{X,Y} : \Lambda[\mathcal{R}](\overline{X}, \overline{Y}) \to \mathcal{C}(X, Y)$ が全単射であることを示す。3 ステップに分けて示す。

(i) 逆写像となるべき写像 $\psi : \mathcal{C}(X, Y) \to \Lambda[\mathcal{R}](\overline{X}, \overline{Y})$ の構成
(ii) ψ が $(\bar{i})_{X,Y}$ の左逆であることの証明
(iii) ψ が $(\bar{i})_{X,Y}$ の右逆であることの証明

(i) (逆写像となるべき写像 $\psi : \mathcal{C}(X, Y) \to \Lambda[\mathcal{R}](\overline{X}, \overline{Y})$ の構成)

$\psi(f) := [X, (id_X, f)]$ と置く。これが φ の逆であることを示せばよい。

(ii) (ψ が $(\bar{i})_{X,Y}$ の左逆であることの証明)

$\psi \triangleright (\bar{i})_{X,Y} = id$ であることを示す。$f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ を取り固定する。$(\bar{i})_{X,Y}(\psi(f)) = f$ in $\mathcal{C}$ であることを示す。

$$\begin{aligned} & (\bar{i})_{X,Y}(\psi(f)) \\ = & (\bar{i})_{X,Y}([X, (id_X, f)]) \\ = & (id_X, f) \triangleright \pi_Y \\ = & f \end{aligned}$$

以上で示された。

(iii) (ψ が $(\bar{i})_{X,Y}$ の右逆であることの証明)

$(\bar{i})_{X,Y} \triangleright \psi = id$ であることを示す。$[A, f] : \overline{X} \to \overline{Y}$ in $\Lambda[\mathcal{R}]$ を取り固定する。$\psi(\bar{i}_{X,Y}([A, f])) = [A, f]$ in $\Lambda[\mathcal{R}]$ であることを示す。

$$\begin{aligned} & \psi((\bar{i})_{X,Y}([A, f])) \\ = & \psi(f \triangleright \pi_Y) \\ = & [X, (id_X, f \triangleright \pi_Y)] \\ = & [X \times A, (id_X, f \triangleright \pi_Y) \triangleright ((id_X, f \triangleright \pi_A) \times Y)] \quad (\text{命題 } 3.1.3 \text{ より}) \\ = & [X \times A, (id_X, f \triangleright \pi_Y, f \triangleright \pi_A)] \\ = & [X \times A, (id_X, f)] \\ = & [X \times A, \Delta_X \triangleright (X \times f)] \\ = & [A, f] \quad (\text{補題 } 3.2.3 \text{ より}) \end{aligned}$$

以上で示された。 □

このように、デカルト圏 $\mathcal{C}$ の全てのグラフを持つ $\mathcal{C}$ の関連部分圏 $\mathcal{R}$ は、必ず $\Lambda[\mathcal{R}] \cong \mathcal{C}$ となる。冒頭で述べた $\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}] \cong \mathcal{C}$ であることは、ここから直ちに従う。

系 5.3：$\Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}] \cong \mathcal{C}$

$\mathcal{C}$ をデカルト圏とする。

このとき、包含函手 $i_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\mathrm{mono}} \to \mathcal{C}$ から、Λ の普遍性によりのびる函手 $\overline{i_{\mathcal{C}}} : \Lambda[\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}] \to \mathcal{C}$ は圏同型である。

Proof. $\mathcal{C}^{\mathrm{mono}}$ は $\mathcal{C}$ のよい関連部分圏であることから従う。 □

この他にも、よい関連部分圏の例として、§2 節で述べた分裂モノ射の成す関連部分圏や、多様体と埋め込みの成す関連圏などが挙げられる。これらの例についても、定理 5.2 の系として、操作 Λ を施せば元の圏が復元できることが分かる。

§ 6. まとめと今後の課題

本論文では、関連圏の構造を調べるため、与えられた関連圏に対し普遍的なデカルト圏を対応させる操作 Λ の具体的な表示を与えた。そして Λ はデカルト圏のよい関連部分圏からもとのデカルト圏を復元する操作になっていることを示した。

デカルト圏でない具体的な関連圏に Λ を適用してみることで、その関連圏がデカルト圏に埋め込まれれば、より分析しやすくなることが期待される。この分析をより容易にするためにも、関連圏がデカルト圏に埋め込まれるかどうかを特徴づける必要十分条件を見つけることが今後の課題である。関連圏がデカルト圏に埋め込まれる十分条件の例として「全ての射がモノ射であること」を予想しているが、これが必要条件でないことは明らかである。

他にも、Λ は圏のクラスの間の函手的対応であり、2-圏論においては具体例の 1 つとして有用である可能性がある。本論文では、2-圏論的議論を避けるために strict な議論を用いたが、本論文の主張は本来 2-圏的なものであるべきである。本論文の主張を 2-圏論的に書き直すことは今後の課題である。

§ 7. 謝辞

本論文は筆者が東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻修士課程在学中に行った研究の成果をまとめた学位論文である。同専攻准教授長谷川立先生には、指導教官として研究の機会を与えていただき、また研究及び論文執筆の過程で多くのご指導をいただいた。ここに深く感謝の意を表する。同大学院工学系研究科物理工学専攻小芦研究室冬鏡澪氏、並びにソルボンヌ大学情報学研究所 (LIP6) の楊博氏には、研究テーマを決めるにあたって多くの助言をいただいた。深く感謝する。本研究室の山本雄太氏、洞龍弥氏には、研究室のセミナーを始め研究及び論文執筆の過程で多大な助言をいただいた。深く感謝する。同大学院工学系研究科精密工学専攻医用精密工学研究室箕浦有希也氏には、論文の推敲に多大な助言をいただいた。深く感謝する。同大学院情報理工学系研究科システム情報学専攻奈良研究室大澤悠一氏には、論文執筆にあたって技術的な助言をいただいた。ここに感謝の意を表する。家族には、研究に専念できる環境を作っていただき、また論文執筆の過程で多くの励ましをいただいた。ここに感謝の意を表する。

§ 8. 参考文献

参考文献

[AHK23] Pablo Andrés-Martínez, Chris Heunen, and Robin Kaarsgaard, *Universal properties of partial quantum maps*, Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science **394** (2023), 192–207.

[BW90] Michael Barr and Charles Wells, *Category theory for computing science*, vol. 1, Prentice Hall New York, 1990.

[Fox76] Thomas Fox, *Coalgebras and cartesian categories*, Communications in Algebra **4** (1976), no. 7, 665–667.

[HS19] Mathieu Huot and Sam Staton, *Universal properties in quantum theory*, arXiv preprint arXiv:1901.10117 (2019).

[HT12] C. Hermida and R.D. Tennent, *Monoidal indeterminates and categories of possible worlds*, Theoretical Computer Science **430** (2012), 3–22, Mathematical Foundations of Programming Semantics (MFPS XXV).

[HV19] Chris Heunen and Jamie Vicary, *Categories for quantum theory: an introduction*, Oxford University Press, 2019.

[Jac94] Bart Jacobs, *Semantics of weakening and contraction*, Annals of Pure and Applied Logic **69** (1994), no. 1, 73–106.

[Jac10] Bart Jacobs, *Convexity, duality and effects*, Theoretical Computer Science (Berlin, Heidelberg) (Cristian S. Calude and Vladimiro Sassone, eds.), Springer Berlin Heidelberg, 2010, pp. 1–19.

[Lam72] Joachim Lambek, *Deductive systems and categories. III. Cartesian closed categories, intuitionist propositional calculus, and combinatory logic*, Toposes, algebraic geometry and logic (Conf., Dalhousie Univ., Halifax, N.S., 1971), Lecture Notes in Math., vol. Vol. 274, Springer, Berlin-New York, 1972, pp. 57–82. MR 349356

[Mac63] Saunders MacLane, *Natural associativity and commutativity*, Rice Institute Pamphlet-Rice University Studies **49** (1963), no. 4.

[Pet02] Zoran Petrić, *Coherence in substructural categories*, Studia Logica **70** (2002), no. 2, 271–296.

[Ten90] R.D. Tennent, *Semantical analysis of specification logic*, Information and Computation **85** (1990), no. 2, 135–162.