Análisis Numérico
Interpolación
Eddy Herrera Daza

1. Introducción

En interpolación son varios los métodos que existen para modelar curvas y superficies. No obstante, surje la pregunta como realizar a aproximaciones de objetos reales, como se ve en la Figura 1 teniendo en cuenta que el modelo sea lo más cercano al objeto real

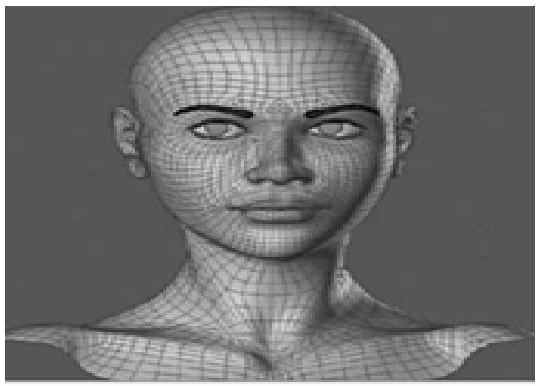

Figura 1: *Objeto real*

Por su parte, el uso de los splines conlleva que, hay que ir reproduciendo la curva a tramos pequeños, con la diferencia de que además hay que saber de cálculo funcional que relacione la información de forma matemática. Por su parte, el problema de los polinomios de Lagrange, que si pueden reproducir un tramo largo de curva, es que en para obtener una buena aproximación hay que elevar el grado del polinomio, a veces demasiado, complicando ası su representación gráfica, pero una pequeña modificación de los puntos de interpolación, es muy probable que ya no nos sirve el mismo polinomio y es necesario calcularlo de nuevo.

Entonces, un joven licenciado en matemáticas decide probar suerte dentro de una conocida compañía dedicada a la fabricación y venta de automóviles, se llamaba Paul de F. de Casteljau. Dos años después a de Casteljau, el ingeniero Pierre E. Bézier, comenzó a plantearse también el problema del diseño asistido por ordenador, consiguió entonces una aproximación mejor y así su trabajo trascendio en todo tipo de programas de diseño (Autocad, Corel, Adobe Illustrator . . .), el lenguaje Postscript esta basado también en las curvas de Bézier, y en definitiva cualquier arquitecto o profesional del diseño conoce esta herramienta matemática

2. Curva y Superficies de Bézier

Las curvas de Bézier, un instrumento matemático para la modelización de curvas y superficies, nacieron como una aplicación concreta en el seno de la industria automovilística. Las curvas Bézier pueden ser útiles para interpolar movimiento cuando el objeto exhibe formas de movimiento curvilíneo (Long 2015). Por ejemplo, los movimientos de los mamíferos marinos a menudo exhiben esto propiedad (Tremblay et al. 2006).
Una curva de Bézier es una curva paramétrica basada en cuatro puntos de control. La curva comienza en el primer punto de control con su pendiente tangente a la línea entre los dos primeros puntos de control y la curva termina en el cuarto punto de control con su pendiente tangente a la línea entre los dos últimos puntos de control. En la Figura 1, los cuatro círculos grises son puntos de control y la línea negra es una curva de Bezier en relación con esos puntos de control.

Definición :Una curva de Bézier de grado n se especifica por una secuencia de $n + 1$ puntos $P_0, ...P_1 \in R^2, R^3$ que se conocen como puntos de control(dados por el escaneo) El polígono que se obtiene al unir los puntos de control con segmentos de línea se denomina polígono de control.

Figura 2: *Curva Bezier*

Spline de Bezier
Una spline de Bezier es una curva que consta de varias curvas de Bezier unidas entre sí. Por ejemplo, en la Figura 2 hay siete puntos de control, pero el cuarto punto de control de la primera curva es también el primer punto de control de la segunda curva. os dos últimos puntos de la primera curva sean colineales con los dos primeros puntos de la segunda curva. Esto significa que la spline de Bezier es suave, porque las pendientes de las dos curvas de Bezier son las mismas donde se encuentran.

Los polinomios de Bernstein son también utilizados para efectuar aproximaciones e interpolaciones de funciones como la curva de Beizer, funciones de densidad de probabilidad,entre otras.

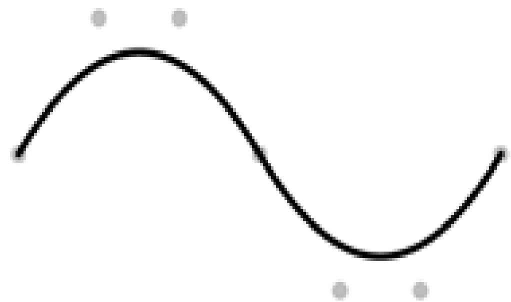

Figura 3: *Spline Bezier*

Polinomios de Bernstein: Se define el polinomios de Bernstein de grado n de la siguiente manera:

$$B_i^n(t) = nCit^i(1-t)^{n-i}; \tag{1}$$

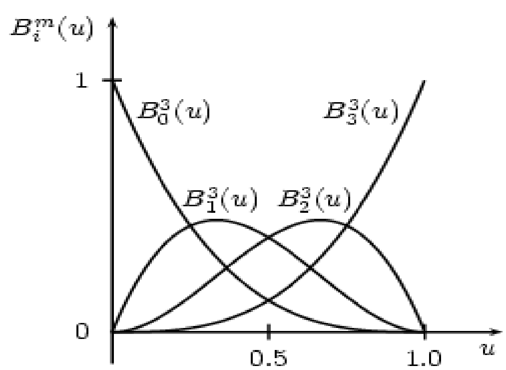

Figura 4: *Polinomios Bernstein*

Por lo tanto toda curva de Bezier $\alpha(t)$ de grado $\leq n$ tiene una única representación de Bezier.

$$\alpha(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)P_i; \forall t \in [0,1] \tag{2}$$

La figura 4 ilustra una curva de grado 3 con sus puntos de control y su polígono de control.

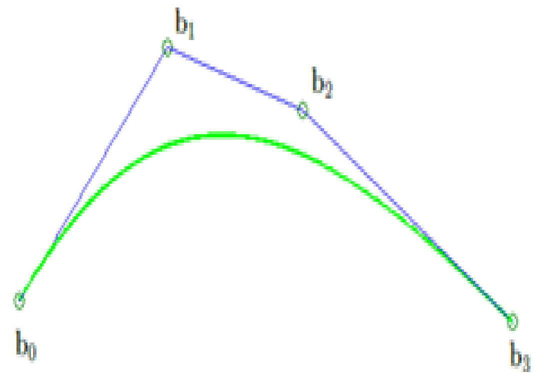

Figura 5: *Curva Bezier de grado 3*

2.1. Propiedades

1. **Interpolación de los puntos frontera**
   $\alpha(0) = P_0; \alpha(1) = P_n$

2. **Envoltura Convexa**
   La curva esta contenida en la envoltura convexa de los puntos control

3. **Invarianza Afín**
   Esta propiedad nos indica que es posible aplicar ciertas transformaciones geométricas a $\alpha(t)$, con sólo aplicarlas a los puntos de control

4. **Invarianza bajo transformación de parametros afines**

2.2. Superficies

Dados dos enteros positivos n, m y un conjunto de puntos de control $P_{ij} \in R^2, R^3$ una Superficie de Bezier de grado n en dirección de u y de grado m en dirección de v esta dada por:

$$\alpha(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} B_i^n(t) B_j^m(t) P_{i,}; \forall u, v \in [0,1] \tag{3}$$

Un ejemplo de una superficie generada esta en la Figura 4

3. Problema de Aproximación

El problema natural que se plantea una vez definida una curva o una superficie de Bézier, es el siguiente:
Dada una curva o superficie arbitrarias, cómo podemos obtener una curva o superficie de Bézier lo más cercana posible a la original. Es decir, nos planteamos un problema de aproximación. Una

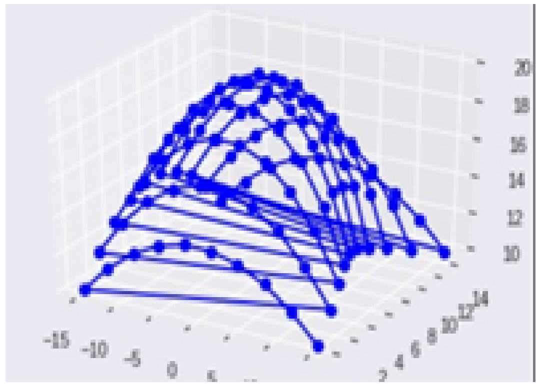

Figura 6: *Curva Bezier de grado 3*

vez conocidos las técnicas de aproximación como los splines cúbicos, los polinomios de Lagrange o mínimos cuadrados, estas tienen sus ventajas y desventajas. El denominador común en todas ellas es que se toma una muestra no aleatoria y finita de puntos del objeto a aproximar y se intenta conseguir un objeto similar aproximándose a estos puntos.
Luego, dada una lista de $k+1$ puntos $Q_0, .., Q_k$ del plano real se busca una curva polinómica $\alpha[0,1] \longrightarrow R_2$ talque se cumpla $||Q_i - \alpha(t_i)|| < \varepsilon$ en otras palabras, dados el vector de los puntos de control **P** se debe solucionar el sistema $MP = Q$

Reto de Interpolación
El objetivo propuesto es conseguir dibujar el mortero valenciano (figura 6) usando superficies de Bezier y otro método (BSplines). Para ello se puede utilizar R(PathInterpolatR, gridBezier,vwline) o Python(griddata, matplotlib)

Figura 7: *Mortero Valenciano*

Se suguiere dividir la figura en cuatro cuadrantes, de manera que una vez construido uno, el resto puede representarse realizando rotaciones por ejemplo. Tenga en cuenta que la figura no puede representarse mediante una unica superficie hay que dividirla de la manera eficiente.

Tenga en cuenta que las zonas afiladas. Para el caso de superficies la derivada es obviamente direccional, pero la idea es la misma.

Referencias

Long, JA (2015) Kinematic interpolation of movement data. International Journal of Geographical Information Science. DOI: 10.1080/13658816.2015.1081909.

Tremblay, YC et al. (2006) Interpolation of animal tracking data in a fluid environment. Journal of Experimental Biology. 209(1): 128-140.