Pontificia Universidad Javeriana
Departamento de Matemáticas
Análisis Numérico

Taller de Interpolación

Taller 2
por

Monica Alejandra Alvarez Carrillo
monica_alvarez@javeriana.edu.co

Santiago Palacios Loaiza
palacios-santiago@javeriana.edu.co

Paula Catalina Piñeros Pardo
pineros.paula@javeriana.edu.co

Profesora: Eddy Herrera Daza

Bogotá D.C., 26 de Abril del 2020

1. Ejercicio 1

1.1. Enunciado:

Dados los n + 1 puntos distintos (x_i;y_i) el polinomio interpolante que incluye a todos los puntos es único

1.2. Solución:

El teorema que permite la solución de esta pregunta es el teorema de unicidad de interpolación. Primero debemos suponer que existen dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, donde ambos tienen un grado menor o igual a n y donde ambos cumplen con $P(x_i) = y_i$ y $Q(x_i) = y_i$ para los valores desde i hasta n. Entonces podemos suponer la existencia de un polinomio $R(x) = P(x) - Q(x)$ que cumple con $R(x_i) = P(x_i) - Q(x_i) = 0$ para los valores desde i hasta n.
De este ultimo polinomio podemos asegurar que tiene $n+1$ raíces distintas, ya que los x_i eran todos distintos, también podemos asegurar que el grado de $R(x)$ es menor o igual que n por ser la resta de dos polinomios que ya cumplen con esa propiedad.
Finalmente, es sabido que un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces. Como $R(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a n que tiene $n + 1$ raíces reales distintas, debe ser el polinomio nulo. Como $R(x)$ es el polinomio nulo, lo polinomio $P(x)$ y $Q(x)$ no pueden ser diferentes

2. Ejercicio 2

2.1. Enunciado:

Construya un polinomio de grado tres que pase por: (0; 10); (1; 15); (2; 5) y que la tangente sea igual a 1 en X_0

2.2. Solución:

Para poder construir el polinomio que pasara por dichos puntos se hizo uso del método de Newton. Por lo que el primer paso era crear la matriz de diferencias divididas; ya teniendo está matriz obtenemos su diagonal, pues estos valores indican los coeficientes del polinomio que vamos a construir. Por lo que en está caso, dicha matriz es:

10	NA	NA
15	5	NA
5	-10	-7.5

Matriz obtenida

Por lo que los coeficientes en este caso serían: 10, 5, -7.5.

El acompañante dichos coeficientes dependerá de su posición y de los valores de x, pues para esto se usa esta fórmula recursiva:

$$C_{i,j} = \frac{C_{i,j-1} - C_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}, j = 1, 2, 3, ..., n, i = j, j+1, ..., n$$

Por tanto los coeficientes serían: 1, (x - 0), (x - 0)(x - 1).

Teniendo en cuenta lo anterior, ya podemos construir el polinomio buscado, el cual es:

$$10 + 5(x - 0) - 7{,}5(x - 0)(x - 1)$$

$$10 + 5x - 7{,}5(x^2 - x)$$

3. Ejercicio 4

3.1. Enunciado:

Con la funciona $f(x) = lnx$ construya la interpolación de diferencias divididas en $x_0 = 1$; $x_1 = 2$ y estime el error en [1; 2]

3.2. Solución:

Para hallar la solución del problema planteado, se procedió con evaluar la función en determinados puntos, para este caso elegimos 10 puntos, y se obtuvo los siguientes resultados:

x	$f(x)$
1	0.0000000
2	0.6931472
3	1.0986123
4	1.3862944
5	1.6094379
6	1.7917595
7	1.9459101
8	2.0794415
9	2.1972246
10	2.3025851

Evaluación de la función en diferentes puntos

Una vez, conocidos estos valores, se procedió a utilizar el método de diferencias divididas con el fin obtener los coeficientes del polinomio interpolante.

Diferencias divididas
0.6931472
0.4054651
0.2876821
0.2231436
0.1823216
0.1541507
0.1335314
0.1177830

Coeficientes obtenidos

Como el enunciado exige estimar el error en el intervalo $[1, 2]$, se hizo uso de la fórmula

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1!)}(x - x_0)(x - x_1)...$$

```
#Calcular error en el intervalo [1,2]
e <- abs((1.2-x[1])*(1.2-x[2])/factorial(2))
f = expression(log(x))
err<-function(f,n,s){
  x=0;
  while (x < n){
    f = D(f,'x');
    x = x+1;
  }
  return (s*abs(eval(f)));
}
cat("Error estimado", err(f,2,e))

}
```

De esta manera se llegó a estimar un error de 0,02.

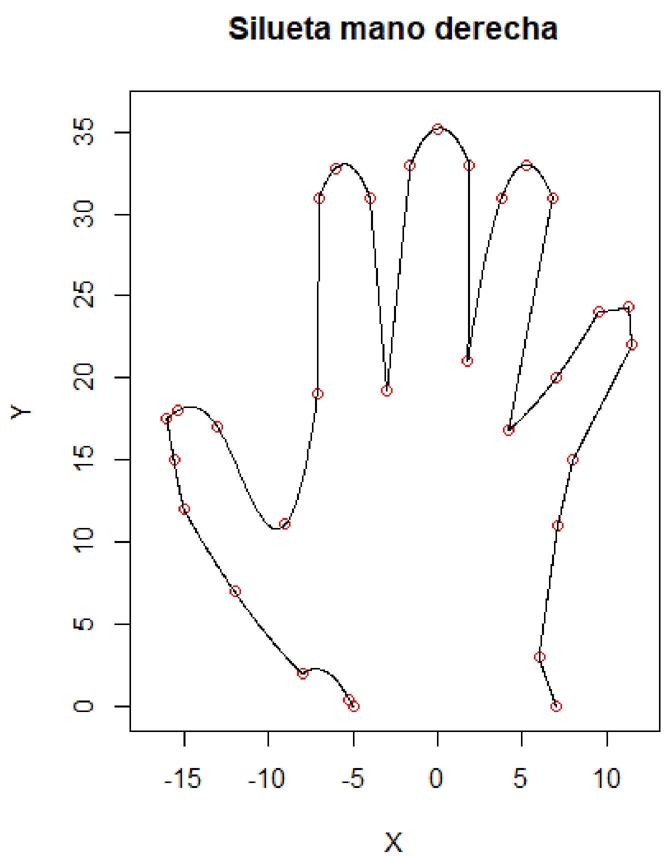
4. Ejercicio 5

4.1. Enunciado:

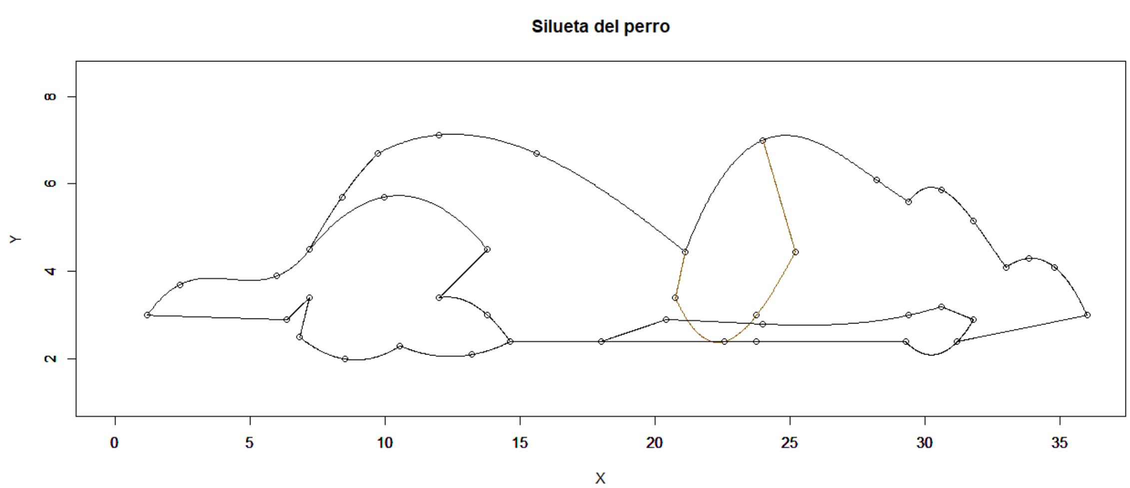
Utilice la interpolación de splines cúbicos para el problema de la mano y del perrito.

4.2. Solución:

Para realizar la interpolación de la mano mediante el uso de Splines cúbicos, primero se tuvo en cuenta el reto que suponía obtener los diferentes puntos, para resolver este inconveniente se tuvo la idea de calcar la mano derecha de uno de los integrantes del grupo en una hoja cuadriculada, se usó la muñeca como el origen y se obtuvieron los puntos haciendo uso de la cuadrícula. Una vez, obtenidos los puntos, se procedió a divirlos por intervalos para hacer el uso de la función spline de la librería Stats de R, dicha función ya implementa la interpolación mediante splines cubicos o de Hermite. De esta manera, se obtuvo la siguiente silueta de la mano:



En cuanto al perrito, se realizó un procedimiento similar al de la mano para obtener los puntos, se realizó igualmente las respectivas divisiones de los intervalos para los splines. Se logró reproducir la silueta del perro así:



5. Ejercicio 7

5.1. Enunciado:

Sea $f(x) = e^x$ en el intervalo de $[0; 1]$ utilice el método de Lagrange y determine el tamaño del paso que me produzca un error por debajo de 10^{-5}. Es posible utilizar el polinomio de Taylor para interpolar en este caso? Verifique su respuesta

5.2. Solución:

La teoría nos dice que es posible implementar un polinomio interpolante de Lagrange de una manera vectorizada de la siguiente forma:

```
X = matrix(rep(x, times=n), n, n, byrow=T) con n = length(x)
```

$$Sea\ x = c(x_0, x_1, ..., x_n)$$

Lo que nos deja con una matriz donde todas las filas corresponden al arreglo x que contienen los puntos de X. Posteriormente debemos proceder a la creación de dos matrices. La primera es mN que se obtiene llenando la diagonal con 1 y en el resto de valores colocando el resultado de diferencia entre a, que es valor medio del intervalo que estamos evaluando, y los valores correspondientes de la matriz X previamente creada. A continuación el resultado:

$$\mathbf{mN} = \begin{pmatrix} 1 & a-x_1 & a-x_2 & a-x_3 \\ a-x_0 & 1 & a-x_2 & a-x_3 \\ a-x_0 & a-x_1 & 1 & a-x_3 \\ a-x_0 & a-x_1 & a-x_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Y luego la matriz mD se crea restando a la matriz X la matriz transpuesta de la misma y, una vez mas, llenando la diagonal con el valor 1.

$$\mathbf{mD} = \begin{pmatrix} 1 & x_1-x_0 & x_2-x_0 & x_3-x_0 \\ x_0-x_1 & 1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ x_0-x_2 & x_1-x_2 & 1 & x_3-x_2 \\ x_0-x_3 & x_1-x_3 & x_2-x_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente tras la creación de estas dos matrices vamos a obtener el valor de $L_(n,k)(a)$, que luego se sumara a los valores de y. Estos últimos se obtiene de aplicar los valores originales de x en la función, en nuestro caso $f(x) = e^x = y$. El calculo de $L_(n,k)(a)$ corresponde a:

```
Lnk(a)= prod(N[k, ])/prod(D[ ,k])
```

El código de la implementación completa en R se muestra a continuación. Lo que retorna finalmente este fragmento de código corresponde a $P_n(a)$.

```
 lagrange = function(x,y,a){
    n = length(x)
    if(a < min(x) || max(x) < a) stop("No est  interpolando")
    X = matrix(rep(x, times=n), n, n, byrow=T)
    mN = a - X; diag(mN) = 1
    mD = X - t(X); diag(mD) = 1
    Lnk = apply(mN, 1, prod)/apply(mD, 2, prod)
    sum(y*Lnk)
}
```

Siendo claro el método que se sigue para la solución del problema procedemos a realizar pruebas, primero con un tamaño de paso de 0.3 y luego con un tamaño de 0.25:

```
> x<-c(0,0.333,0.666,0.999)
> y<-f(x)
> lagrange(x,y,0.5)
   [1] 1.648242
> x<-c(0,0.25,0.5,0.75,1)
> y<-f(x)
> lagrange(x,y,0.5)
   [1] 1.648721
```

No son necesarias mas pruebas pues al comprobarlo con el valor teórico ya obtuvimos un error menor al deseado de 10^{-5}. Concluimos entonces que el tamaño del paso corresponde a 0.25

6. Ejercicio 8

6.1. Enunciado:

Considere el comportamiento de gases no ideales se describe a menudo con la ecuación virial de estado. los siguientes datos para el nitrógeno N_2

$T(K)$	100	200	300	400	450	500	600
$B(cm^3/mol)$	-160	-35	-4.2	9.0	x	16.9	21.3

Donde T es la temperatura [K] y B es el segundo coeficiente virial. El comportamiento de gases no ideales se describe a menudo con la ecuación virial de estado

$$\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + ...$$

Donde P es la presión, V el volumen molar del gas, T es la temperatura Kelvin y R es la constante de gas ideal.Los coeficientes $B = B(T)$, $C = C(T)$, son el segundo y tercer coeficiente virial, respectivamente. En la práctica se usa la serie truncada para aproximar

$$\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{B}{V}$$

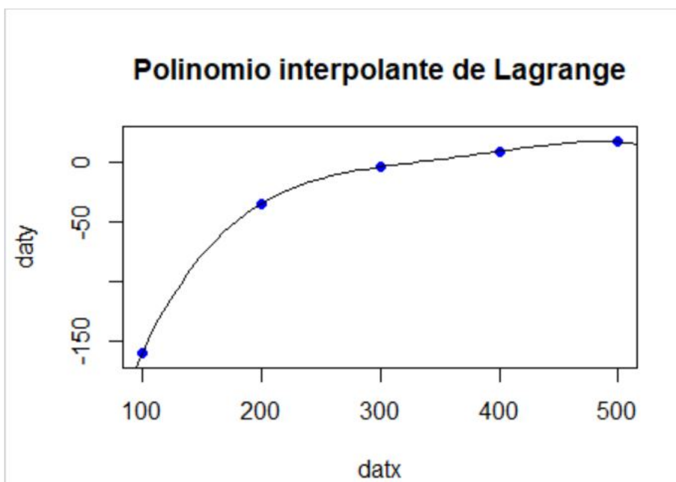
En la siguiente figura se muestra como se distribuye la variable B a lo largo de la temperatura
a) Determine un polinomio interpolante para este caso.
b) Utilizando el resultado anterior calcule el segundo y tercer coeficiente virial a 450K.
c) Grafique los puntos y el polinomio que ajusta.
d) Utilice la interpolación de Lagrange y escriba el polinomio interpolante.
e) Compare su resultado con la serie truncada (modelo teórico), ¿cuál aproximación es mejor?, ¿por qué?

6.2. Solución:

El polinomio interpolante de Lagrange, se obtuvo con la función poly_calc() de la librería PolynomF, para hacer esta aproximación se usaron 5 puntos, como se muestra a continuación:

$$-573{,}9 + 6{,}63535 * x - 0{,}03183458 * x^2 + 7{,}766667e{-}5 * x^3 - 9{,}404167e{-}8 * x^4$$

Del polinomio obtenido en anteriormente se puede decir que el segundo coeficiente virial a una temperatura de 450K está dado por 15,35547. Los puntos y el polinomio que se ajusta se muestra en la siguiente gráfica:



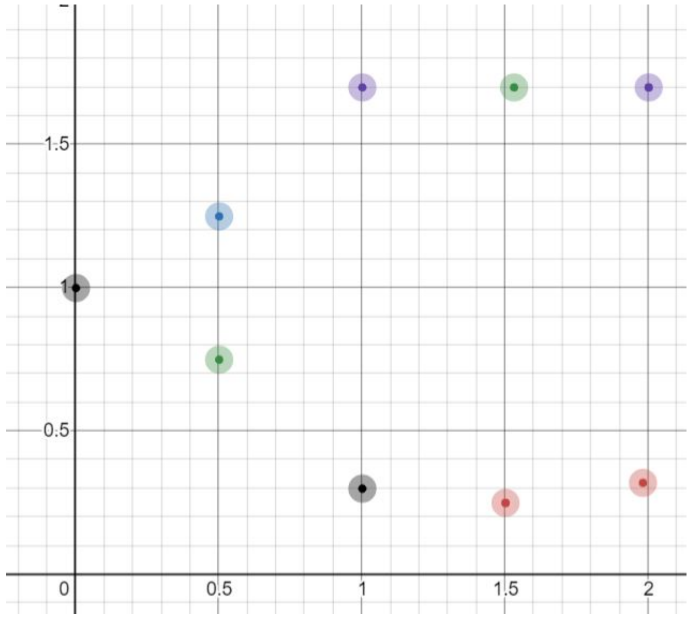
7. Ejercicio Iniciales con Bezier

7.1. Enunciado:

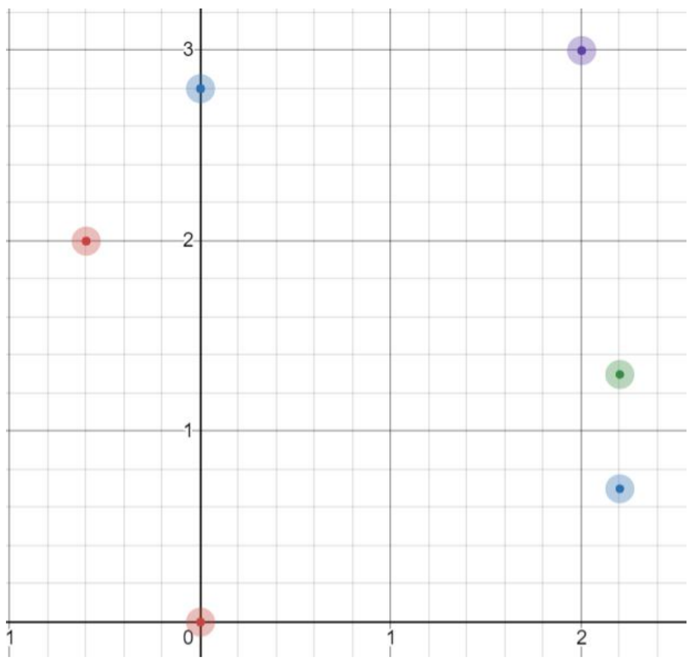
El objetivo es utilizar curvas de Bezier para esbozar aproximaciones a las iniciales de los integrantes del grupo de trabajo. Las iniciales serán S,M,C de los integrantes Santiago, Mónica y Catalina.

7.2. Solución:

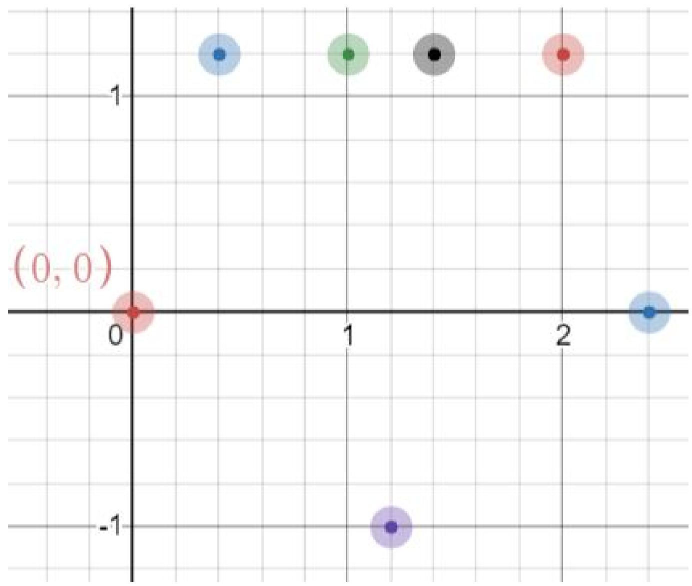
Para la solución primero se dibujaron unas aproximaciones de los puntos utilizando la herramienta web Desmos. Estas aproximaciones se muestran a continuación:



Aproximación de los puntos para la letra C

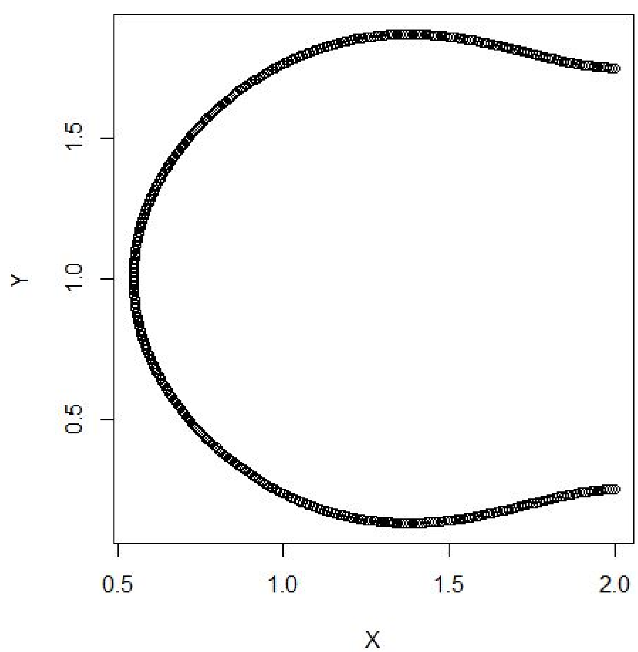


Aproximación de los puntos para la letra S

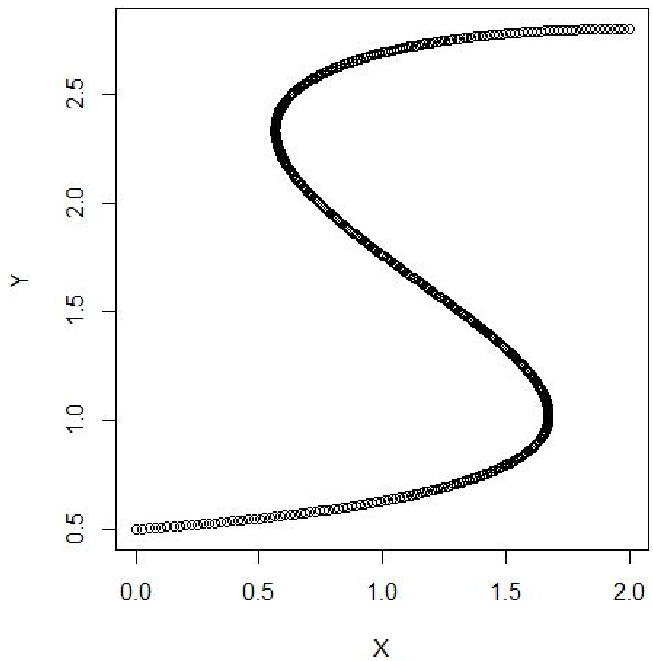


Aproximación de los puntos para la letra M

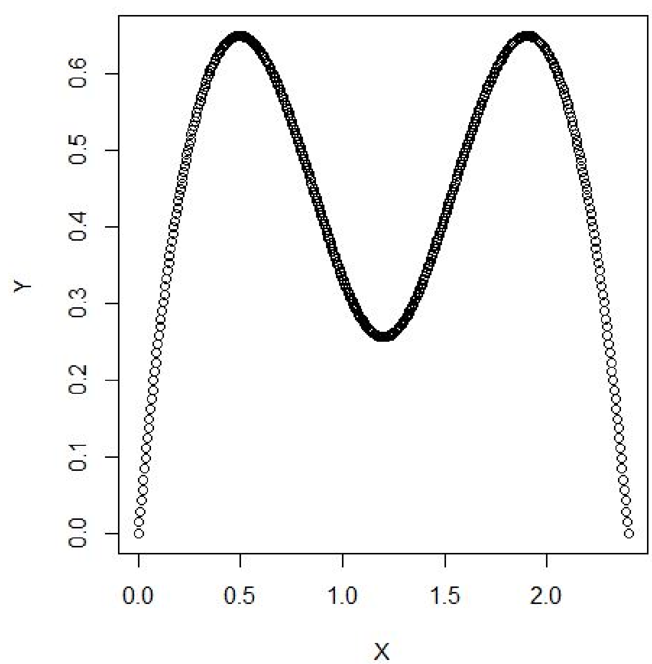
Posteriormente se uso la función $bezier(t, p)$ del paquete de R que recibe el mismo nombre, como parámetro se envía una matriz con los puntos guía en las dimensiones de X y Y, es importante aclarar que algunos puntos sufrieron pequeñas modificaciones respecto al boceto original en Desmos, y se envían un arreglo para representar la cantidad que puntos que posteriormente la función retorna. Los puntos retornados fueron graficados y los resultados finales se muestran a continuación.



Dibujo final mediante curvas de Bezier de la letra C



Dibujo final mediante curvas de Bezier de la letra S



Dibujo final mediante curvas de Bezier de la letra M

8. Referencias:

- Mora, W. Ïntroducción a los métodos numéricos. Implementaciones en R", 2015.
- Burden, R. - Faire, J. "Numerical Analysis", 2011