

---

i

# **LABORATORIO 5**

Unidad 6

Nicolás Delgado

Camila Paladines

## **Computación Científica**

Profesor: Hernán Darío Vargas Cardona, PhD

Junio 11 de 2021

# RESUMEN

En este informe se describen los resultados conseguidos al implementar algoritmos en Python para la obtención de respuestas a problemas matemáticos, como lo es el cómputo de la solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) bajo un Problema de Valor Inicial (PVI) y bajo un Problema de Valor de Frontera (PVF). Las EDOs de primer orden bajo un PVI son calculadas mediante los Métodos de Euler, Serie de Taylor, Runge-Kutta (orden 2 y 4), y Multipaso (2 y 4 pasos). Para las EDOs de orden superior se usa una estrategia de divide y conquista usando los métodos anteriormente mencionados. Las EDOs bajo un PVF son calculadas mediante el Método de Diferencias Finitas y el Método de Elementos Finitos (Colocación). Además, se realizan algunos análisis sobre los métodos utilizados aplicándolos a EDOs de diferente tipo, donde se observa su comportamiento dependiendo de diversos factores. También se calcula la complejidad computacional y la exactitud, con el fin de comparar los métodos y determinar cuál obtuvo mejores resultados para las EDOs usadas.

# ABSTRACT

This report describes the results achieved by implementing algorithms in Python to obtain answers to mathematical problems, such as the computation of the solution of an Ordinary Differential Equation (ODE) under an Initial Value Problem (IVP) and under a Boundary Value Problem (BVP). The first-order ODEs under a IVP are calculated using the Euler, Taylor Series, Runge-Kutta (order 2 and 4), and Multi-step (2 and 4 steps) Methods. A divide and conquer strategy using the above mentioned methods is used for the higher-order ODEs. The ODEs under a BVP are calculated using the Finite Difference Method and the Finite Element Method (Collocation). In addition, some analyses are performed on the methods used by applying them to ODEs of different types, where their behavior is observed depending on various factors. The computational complexity and accuracy are also calculated, in order to compare the methods and determine which one obtained better results for the ODEs used.

# Contenido

|            |  |          |
|------------|--|----------|
| <b>I</b>   | <b>Introducción</b>                                | <b>1</b> |
| <b>II</b>  | <b>Materiales y Métodos</b>                        | <b>2</b> |
| 1.         | Materiales   | 2        |
| 2.         | Métodos  | 2        |
| 2.1.       | Problemas de Valor Inicial . . . . .               | 2        |
| 2.2.       | ODEs de Primer Orden . . . . .                     | 3        |
| 2.2.1.     | Método de Euler . . . . .                          | 3        |
| 2.2.2.     | Métodos de Serie de Taylor . . . . .               | 4        |
| 2.2.3.     | Métodos de Runge-Kutta . . . . .                   | 4        |
| 2.2.4.     | Métodos Multi-Paso . . . . .                       | 5        |
| 2.3.       | ODEs de Orden Superior . . . . .                   | 6        |
| 2.4.       | Problemas de Valor de Frontera para ODEs . . . . . | 6        |
| 2.4.1.     | Método de Diferencias Finitas . . . . .            | 7        |
| 2.4.2.     | Método de Elementos Finitos . . . . .              | 8        |
| <b>III</b> | <b>Resultados de las Simulaciones</b>              | <b>9</b> |
| 1.         | ODEs de Primer Orden                               | 9        |
| 1.1.       | Ejemplo 1 . . . . .                                | 9        |
| 1.2.       | Ejemplo 2 . . . . .                                | 19       |
| 1.3.       | Ejemplo 3 . . . . .                                | 29       |
| 2.         | ODEs de Orden Superior                             | 39       |
| 3.         | Problemas de Valor de Frontera                     | 42       |

|           |                                |           |
|-----------|--------------------------------|-----------|
| <b>IV</b> | <b>Discusión y Análisis</b>    | <b>48</b> |
| 1.        | ODEs de Primer Orden           | 48        |
| 2.        | ODEs de Orden Superior         | 48        |
| 3.        | Problemas de Valor de Frontera | 48        |
| <b>V</b>  | <b>Conclusiones</b>            | <b>49</b> |
| <b>VI</b> | <b>Referencias</b>             | <b>50</b> |

# Índice de Figuras

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.  | M. Euler del Ejemplo 1 . . . . .                 | 10 |
| 2.  | M. Taylor del Ejemplo 1 . . . . .                | 11 |
| 3.  | M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 1 . . . . . | 12 |
| 4.  | M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 1 . . . . . | 13 |
| 5.  | M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 1 . . . . .   | 14 |
| 6.  | M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 1 . . . . .   | 15 |
| 7.  | Métodos del Ejemplo 1 . . . . .                  | 16 |
| 8.  | Tiempo en el Ejemplo 1 . . . . .                 | 17 |
| 9.  | Error en el Ejemplo 1 . . . . .                  | 18 |
| 10. | M. Euler del Ejemplo 2 . . . . .                 | 20 |
| 11. | M. Taylor del Ejemplo 2 . . . . .                | 21 |
| 12. | M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 2 . . . . . | 22 |
| 13. | M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 2 . . . . . | 23 |
| 14. | M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 2 . . . . .   | 24 |
| 15. | M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 2 . . . . .   | 25 |
| 16. | Métodos del Ejemplo 2 . . . . .                  | 26 |
| 17. | Tiempo en el Ejemplo 2 . . . . .                 | 27 |
| 18. | Error en el Ejemplo 2 . . . . .                  | 28 |
| 19. | M. Euler del Ejemplo 3 . . . . .                 | 30 |
| 20. | M. Taylor del Ejemplo 3 . . . . .                | 31 |
| 21. | M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 3 . . . . . | 32 |
| 22. | M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 3 . . . . . | 33 |
| 23. | M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 3 . . . . .   | 34 |
| 24. | M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 3 . . . . .   | 35 |
| 25. | Métodos del Ejemplo 3 . . . . .                  | 36 |
| 26. | Tiempo en el Ejemplo 3 . . . . .                 | 37 |
| 27. | Error en el Ejemplo 3 . . . . .                  | 38 |
| 28. | Ejemplo de ODEs de Orden Superior . . . . .      | 40 |

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 29. | Tiempo del Ejemplo de ODEs de Orden Superior . . . . . | 41 |
| 30. | Error del Ejemplo de ODEs de Orden Superior . . . . .  | 41 |
| 31. | M. Diferencias Finitas (PVF) . . . . .                 | 43 |
| 32. | M. Elementos Finitos (PVF) . . . . .                   | 44 |
| 33. | Comparación de métodos (PVF) . . . . .                 | 45 |
| 34. | Tiempo de ejecución (PVF) . . . . .                    | 46 |
| 35. | Error $\bar{e}$ (PVF) . . . . .                        | 47 |

## Índice de Tablas

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.  | M. Euler del Ejemplo 1 . . . . .                 | 9  |
| 2.  | M. Taylor del Ejemplo 1 . . . . .                | 10 |
| 3.  | M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 1 . . . . . | 11 |
| 4.  | M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 1 . . . . . | 12 |
| 5.  | M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 1 . . . . .   | 13 |
| 6.  | M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 1 . . . . .   | 14 |
| 7.  | Métodos del Ejemplo 1 . . . . .                  | 15 |
| 8.  | Tiempo en el Ejemplo 1 . . . . .                 | 16 |
| 9.  | Error ( $\bar{e}$ ) en el Ejemplo 1 . . . . .    | 17 |
| 10. | Error ( $\sigma_e$ ) en el Ejemplo 1 . . . . .   | 18 |
| 11. | M. Euler del Ejemplo 2 . . . . .                 | 19 |
| 12. | M. Taylor del Ejemplo 2 . . . . .                | 20 |
| 13. | M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 2 . . . . . | 21 |
| 14. | M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 2 . . . . . | 22 |
| 15. | M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 2 . . . . .   | 23 |
| 16. | M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 2 . . . . .   | 24 |
| 17. | Métodos del Ejemplo 2 . . . . .                  | 25 |
| 18. | Tiempo en el Ejemplo 2 . . . . .                 | 26 |
| 19. | Error ( $\bar{e}$ ) en el Ejemplo 2 . . . . .    | 27 |
| 20. | Error ( $\sigma_e$ ) en el Ejemplo 2 . . . . .   | 28 |
| 21. | M. Euler del Ejemplo 3 . . . . .                 | 29 |



|     |  |    |
|-----|--|----|
| 22. | M. Taylor del Ejemplo 3 . . . . .                            | 30 |
| 23. | M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 3 . . . . .             | 31 |
| 24. | M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 3 . . . . .             | 32 |
| 25. | M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 3 . . . . .               | 33 |
| 26. | M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 3 . . . . .               | 34 |
| 27. | Métodos del Ejemplo 3 . . . . .                              | 35 |
| 28. | Tiempo en el Ejemplo 3 . . . . .                             | 36 |
| 29. | Error ( $\bar{e}$ ) en el Ejemplo 3 . . . . .                | 37 |
| 30. | Error ( $\sigma_e$ ) en el Ejemplo 3 . . . . .               | 38 |
| 31. | Ejemplo de ODEs de Orden Superior . . . . .                  | 39 |
| 32. | Estadísticas del Ejemplo de ODEs de Orden Superior . . . . . | 40 |
| 33. | M. Diferencias Finitas (PVF) . . . . .                       | 42 |
| 34. | Estadísticas de M. Elementos Finitos (PVF) . . . . .         | 43 |
| 35. | Polinomios de M. Elementos Finitos (PVF) . . . . .           | 44 |
| 36. | Comparación de métodos (PVF) . . . . .                       | 44 |
| 37. | Tiempo de ejecución (PVF) . . . . .                          | 45 |
| 38. | Error $\bar{e}$ (PVF) . . . . .                              | 46 |
| 39. | Error $\sigma_e$ (PVF) . . . . .                             | 47 |

---

## Parte I

# Introducción

La teoría de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias ha sido usada ampliamente en distintas áreas como la física y la biología,

---

## Parte II

# Materiales y Métodos

### 1. Materiales

Para el desarrollo de esta unidad se usó Python 3.7, con las siguientes librerías:

- `numpy`, para funciones matemáticas como promedio, desviación estándar, resolución de sistemas de ecuaciones lineales, entre otros.
- `pyplot`, para graficar los resultados en el plano y las estadísticas de los métodos con respecto a su exactitud y tiempo de ejecución.
- `time`, para calcular los tiempos de cómputo de cada uno de los métodos en los Problemas de Valor Inicial y los Problemas de Valor de Frontera.
- `sympy`, para modelar las variables  $t$  y  $y$  dentro de las operaciones de los métodos.

### 2. Métodos

#### 2.1. Problemas de Valor Inicial

Una ecuación diferencial ordinaria (ODE)  $y' = f(t, y)$  no tiene una solución única. En general, hay una familia infinita de funciones que satisfacen la ecuación diferencial. Para encontrar una solución particular se debe especificar el valor denotado por  $y_0$  en algún punto  $t_0$ . Entonces, se requiere conocer:

$$y(t_0) = y_0$$

Esto se conoce como el problema de valor inicial. La ODE gobierna la evolución dinámica del sistema en el tiempo, desde su valor inicial  $y_0$  en el tiempo  $t_0$ . Lo que se busca es una función  $y(t)$  que describe el estado de un sistema como función del tiempo.

---

La solución analítica de una ODE es una función que se computa en cualquier punto  $t$ . Por el contrario, una solución numérica es una tabla de valores aproximados de la solución verdadera evaluados en un conjunto discreto de datos.

Los valores de la solución aproximada se generan paso a paso en incrementos discretos en el tiempo. Por esta razón, los métodos numéricos para resolver ODEs se conocen como métodos de variable discreta.

## 2.2. ODEs de Primer Orden

Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden son aquellas que tienen la forma  $y' = f(t, y)$  y se pueden solucionar mediante los siguientes métodos numéricos.

### 2.2.1. Método de Euler

Se busca simular el comportamiento del sistema gobernado por la ODE. Empezando en  $t_0$  con el valor inicial dado  $y_0$ , se desea seguir la trayectoria dictada por la ODE. La evaluación de  $f(t_0, y_0)$  nos dice la pendiente o inclinación de la trayectoria en ese punto. Se usa esta información para predecir el valor  $y_1$  de la solución en el tiempo futuro  $t_1 = t_0 + h$ , siendo  $h$  un incremento adecuado. Considere la siguiente serie de Taylor:

$$\begin{aligned} y(t+h) &= y(t) + y'(t)h + \frac{y''(t)}{2!}h^2 + \dots + \\ &= y(t) + f(t, y(t))h + \frac{y''(t)}{2!}h^2 + \dots + \end{aligned}$$

El método de Euler elimina los términos de segundo orden y superior para obtener los valores de la solución aproximada:

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)h_k$$

---

Lo cual permite saltar del tiempo  $t_k$  a  $t_{k+1} = t_k + h_k$ . Equivalentemente, si se reemplaza la derivada en la ecuación diferencial  $y'(t) = f(t, y)$  por la representación en diferencias finitas, se obtiene una ecuación algebraica:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} = f(t_k, y_k)$$

### 2.2.2. Métodos de Serie de Taylor

Del método de Euler se obtiene de la expansión en series de Taylor. Si se toman más términos en la serie de Taylor, se pueden obtener más métodos de paso sencillo (*single-step*) para órdenes más altos. Por ejemplo, tomando un término adicional en la serie de Taylor:

$$y(t+h) = y(t) + y'(t)h + \frac{y''(t)}{2!}h^2 + \frac{y'''(t)}{3!}h^3 + \dots +$$

Se obtiene el método de segundo orden:

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h_k + \frac{y''_k}{2} h_k^2$$

Nótese que se requiere la segunda derivada de  $y''$ . Esto se puede obtener diferenciando  $y' = f(t, y)$  usando la regla de la cadena:

$$y'' = f_t(t, y) + f_y(t, y)y' = f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y)$$

### 2.2.3. Métodos de Runge-Kutta

Son métodos de paso sencillo que son similares a los métodos de serie de Taylor, pero no requieren la computación de derivadas de orden superior. En vez de eso, se simula el efecto de las derivadas superiores evaluando  $f$  varias veces entre  $t_k$  y  $t_{k+1}$ . La idea básica se ilustra por el método de *Runge-Kutta* de orden 2, conocido como el método de *Heun*.

---


$$f_t + f_{y_f} = \frac{f(t+h, y+h_f) - f(t, y)}{h}$$

Con esta aproximación, el método de Taylor de segundo orden se convierte a (el cual es de **exactitud de orden 2**):

$$y_{k+1} = y_k + \frac{f(t_k, y_k) + f(t_k + h_k, y_k + h_{k_f}(t_k, y_k))}{2} h_k$$

El método de Runge-Kutta mejor conocido y más empleado es el ***esquema clásico de orden 4***:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

donde:

- $k_1 = f(t_k, y_k)h_k,$
- $k_2 = f(t_k + \frac{h_k}{2}, y_k + \frac{k_1}{2})h_k,$
- $k_3 = f(t_k + \frac{h_k}{2}, y_k + \frac{k_2}{2})h_k,$
- $k_4 = f(t_k + h_k, y_k + k_3)h_k.$

#### 2.2.4. Métodos Multi-Paso

Estos métodos usan información en más de un punto previo para estimar la solución en el siguiente. Por esta razón, a veces se conocen como métodos con memoria. Los métodos lineales *multi-paso* tienen la siguiente forma general:

$$y_{k+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_{k+1-i} + h \sum_{i=0}^n \beta_i f(t_{k+1}, y_{k+1-i})$$

Los parámetros  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  se determinan con interpolación polinómica. Si  $\beta_0 = 0$ , el método es explícito, de lo contrario es implícito. La fórmula explícita del método de dos pasos es:

---


$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}(3y'_k - y'_{k-1})h$$

Uno de los métodos multi-paso más populares es el método explícito de cuarto orden de *Adams-Bashforth*:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{24} \left( 55y'_k - 59y'_{k-1} + 37y'_{k-2} - 9y'_{k-3} \right) h$$

### 2.3. ODEs de Orden Superior

Las ecuaciones diferenciales de orden superior ocurren frecuentemente en la práctica, pero pueden ser transformadas a un sistema equivalente de primer orden de la siguiente manera:

$$u^{(n)} = f(t, u, u', \dots, u^{(n-1)})$$

La ecuación de orden  $n$ -ésimo define las  $n$  nuevas incógnitas  $y_1(t) = u$ ,  $y_2(t) = u'$ , ...,  $y_n(t) = u^{(n-1)}$ , tal que la ecuación original se convierte en un sistema de primer orden con  $n$  ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_{n-1} \\ y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ f(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}) \end{bmatrix}$$

**Nota:** para el presente laboratorio se usó el Método de Euler para solucionar cada una de las ecuaciones del sistema.

### 2.4. Problemas de Valor de Frontera para ODEs

Un problema de valor de frontera (PVF) para una ODE especifica más de un punto en el cual la solución o sus derivadas deben tener valores dados. Por ejemplo, un PVF para una ODE de segundo orden tiene la forma:

---


$$y'' = f(t, y, y'), \quad a \leq t \leq b,$$

con condiciones de frontera:

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

En general, para hallar la solución particular, deben existir tantas condiciones como el orden de la ODE.

Si todas las condiciones se especifican en un mismo punto, entonces tenemos un problema de valor inicial (PVI), de lo contrario tenemos un (PVF).

Por ejemplo, un PVF para un sistema de dos ODE de primer orden tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, y) \\ f_2(t, y) \end{bmatrix}, \quad a \leq t \leq b$$

Con C.F:  $y_1(a) = \alpha, \quad y_1(b) = \beta$ .

#### 2.4.1. Método de Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas convierte los PVF en sistemas de ecuaciones algebraicas, reemplazando algunas derivadas por aproximaciones con diferencias finitas. Por ejemplo, para resolver un PVF de dos puntos:

$$y'' = f(t, y, y'), \quad a \leq t \leq b,$$

con CF:  $y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$ . Primero se divide el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos igualmente espaciados. Sea  $t_i = a + ih$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , donde  $h = \frac{b-a}{n}$ . Se busca una aproximación  $y_i \approx y(t_i)$  en cada uno de los puntos de la malla datos por  $t_i$ .

Ya tenemos  $y_0 = \alpha$  y  $y_n = \beta$ . Ahora reemplazamos las derivadas con aproximaciones de diferencias finitas:



---


$$y'(t_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''(t_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Este reemplazo lleva al siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - h^2 f(t_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}) = 0$$

El cual debe ser resuelto para las incógnitas  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . El sistema de ecuaciones puede ser lineal o no, dependiendo de que  $f$  sea lineal en  $y$  y  $y'$ .

#### 2.4.2. Método de Elementos Finitos

Este método aproxima la solución de un PVF a una combinación lineal de funciones base  $\phi_i$ , típicamente monomios. La aproximación tiene la forma:

$$y(t) \approx u(t) = \sum_{i=1}^n x_i \phi_i(t)$$

Los coeficientes  $x_i$  están determinados mediante la imposición de requerimientos del residuo, que se define como la diferencia entre el lado izquierdo y derecho de la ODE. En este laboratorio se usa el Método de Colocación en la que el residuo es cero, y la ODE se satisface exactamente en los  $n$  puntos discretos.

---

## Parte III

# Resultados de las Simulaciones

## 1. ODEs de Primer Orden

### 1.1. Ejemplo 1

Para la Ecuación Diferencial Ordinaria  $y'$  que se muestra a continuación:

$$y' = 3 \cos(t) - 2y$$

Su solución analítica  $y$  es la siguiente:

$$y = \frac{3 \sin(t) + 6 \cos(t)}{5}$$

En las siguientes seis secciones se muestran, para cada método, los resultados obtenidos con distintos valores de  $h$ , así como las estadísticas de tiempo y exactitud. Las condiciones iniciales son  $t_0 = 5$  y  $y_0 = -0,235$ , obteniendo los puntos hasta  $t_f = 8$ . En las otras dos secciones se muestra más a detalle los resultados de los métodos en cuanto a tiempo y exactitud, respecto de los diferentes valores de  $h$ .

#### Método de Euler

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| <b>h</b> | <b>Tiempo</b> | <b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b> | <b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b> |
|----------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 0.09375  | 0.0019156933  | 0.0176727560                        | 0.0101816776                         |
| 0.1875   | 0.0016105175  | 0.0364801957                        | 0.0202793172                         |
| 0.375    | 0.0014901161  | 0.0778160043                        | 0.0396400737                         |
| 0.75     | 0.0013921261  | 0.1695661406                        | 0.0919998050                         |

Cuadro 1: M. Euler del Ejemplo 1

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

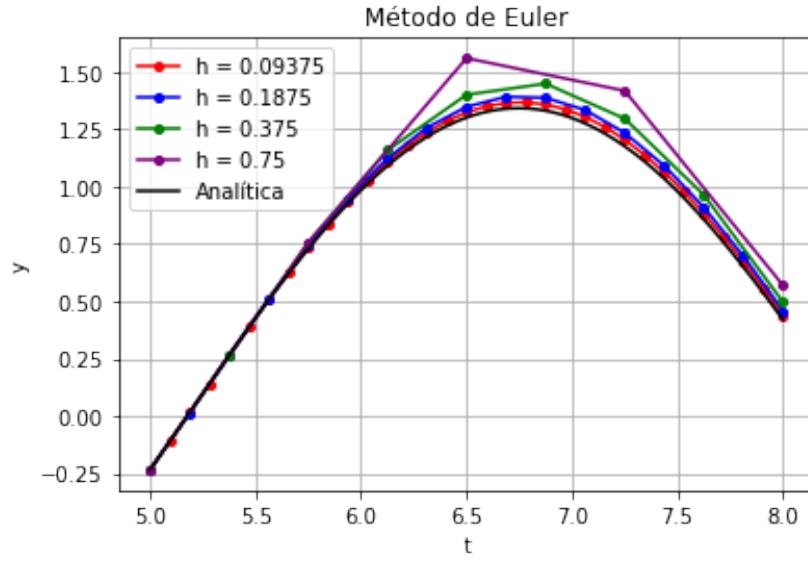


Figura 1: M. Euler del Ejemplo 1

### Método de Series de Taylor

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| <b>h</b> | <b>Tiempo</b> | <b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b> | <b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b> |
|----------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 0.09375  | 0.0063250065  | 0.0004971789                        | 0.0002422959                         |
| 0.1875   | 0.0081012249  | 0.0022513135                        | 0.0010797204                         |
| 0.375    | 0.0037639141  | 0.0117541642                        | 0.0052653051                         |
| 0.75     | 0.0038151741  | 0.0775772782                        | 0.0437234718                         |

Cuadro 2: M. Taylor del Ejemplo 1

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

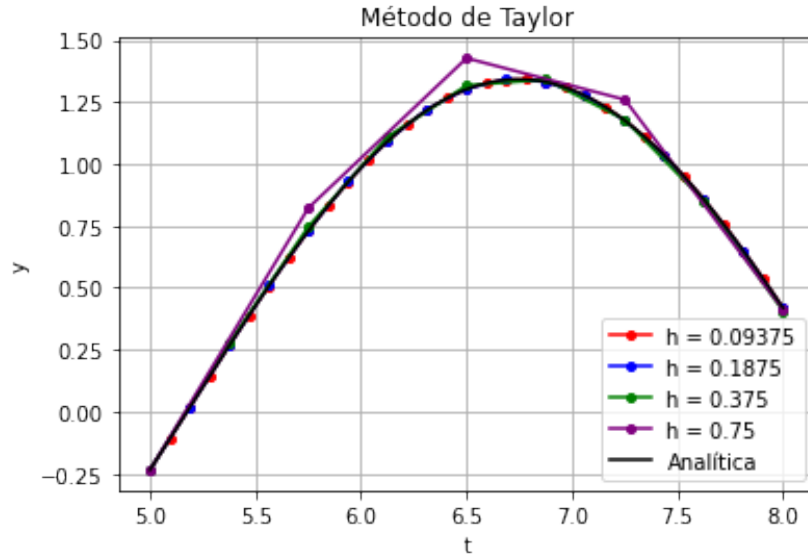


Figura 2: M. Taylor del Ejemplo 1

### Método de Runge-Kutta (orden 2)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| <b>h</b> | <b>Tiempo</b> | <b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b> | <b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b> |
|----------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 0.09375  | 0.0022044182  | 0.0019106231                        | 0.0009632318                         |
| 0.1875   | 0.0017294884  | 0.0085298834                        | 0.0042064975                         |
| 0.375    | 0.0015897751  | 0.0434847115                        | 0.0208508756                         |
| 0.75     | 0.0016293526  | 0.3065913720                        | 0.1554623900                         |

Cuadro 3: M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 1

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

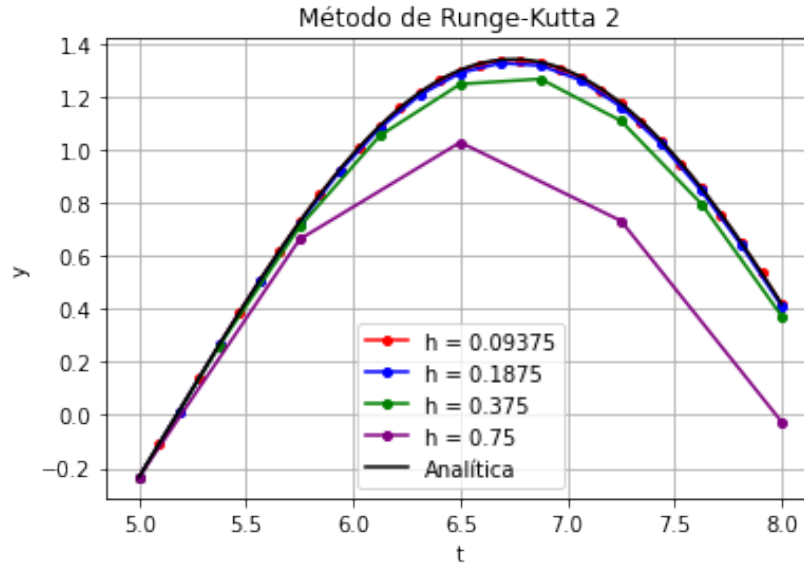


Figura 3: M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 1

#### Método de Runge-Kutta (orden 4)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| <b>h</b> | <b>Tiempo</b> | <b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b> | <b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b> |
|----------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 0.09375  | 0.0022711754  | 0.0000026629                        | 0.0000013599                         |
| 0.1875   | 0.0018808842  | 0.0000466924                        | 0.0000236822                         |
| 0.375    | 0.0016026497  | 0.0008898514                        | 0.0004507352                         |
| 0.75     | 0.0014693737  | 0.0200273144                        | 0.0106579426                         |

Cuadro 4: M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 1

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

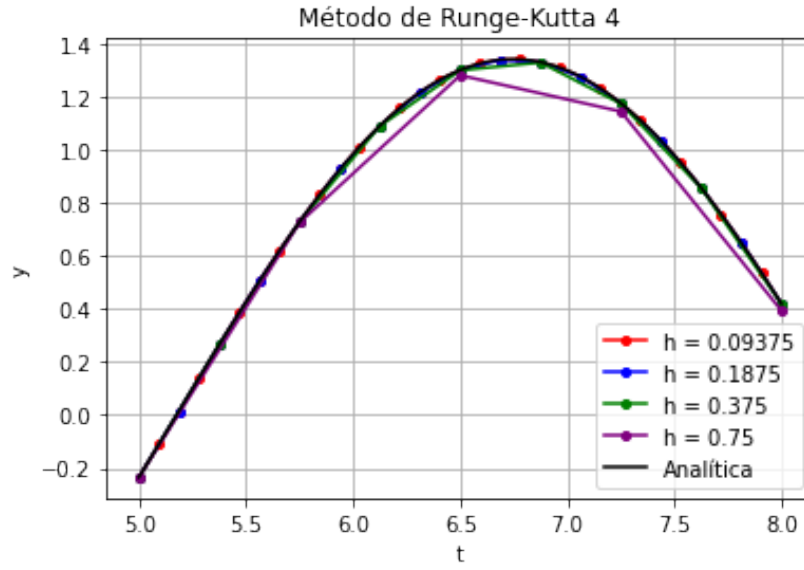


Figura 4: M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 1

### Método Multipaso (2 pasos)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| <b>h</b> | <b>Tiempo</b> | <b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b> | <b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b> |
|----------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 0.09375  | 0.0034122467  | 0.0010617521                        | 0.0005586362                         |
| 0.1875   | 0.0029389858  | 0.0040973854                        | 0.0022293552                         |
| 0.375    | 0.0029447079  | 0.0152991184                        | 0.0095019804                         |
| 0.75     | 0.0031647682  | 0.1695524114                        | 0.1039255813                         |

Cuadro 5: M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 1

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

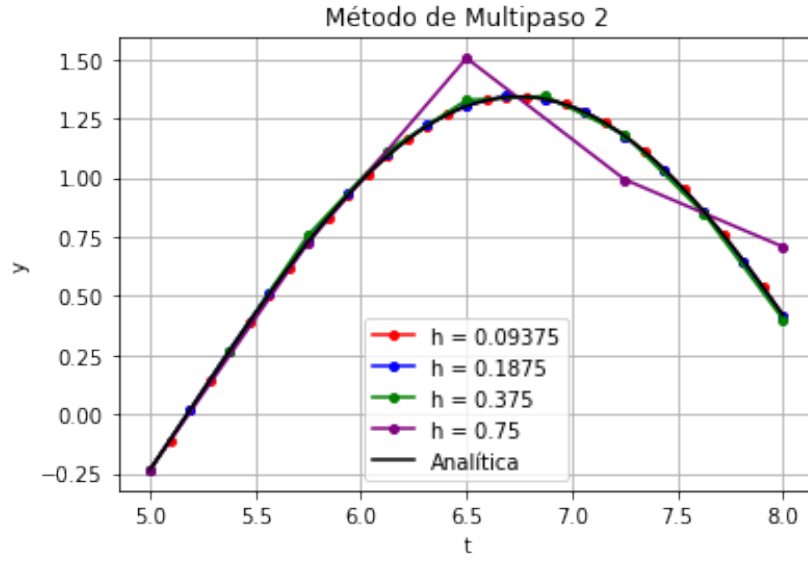


Figura 5: M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 1

#### Método Multipaso (4 pasos)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| $h$     | Tiempo       | Error ( $\bar{e}$ ) | Error ( $\sigma_e$ ) |
|---------|--------------|---------------------|----------------------|
| 0.09375 | 0.0039045811 | 0.0000069565        | 0.0000042228         |
| 0.1875  | 0.0032472610 | 0.0001012118        | 0.0000735813         |
| 0.375   | 0.0029766560 | 0.0033411032        | 0.0035970873         |
| 0.75    | 0.0028731823 | 0.0186775538        | 0.0100994357         |

Cuadro 6: M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 1

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

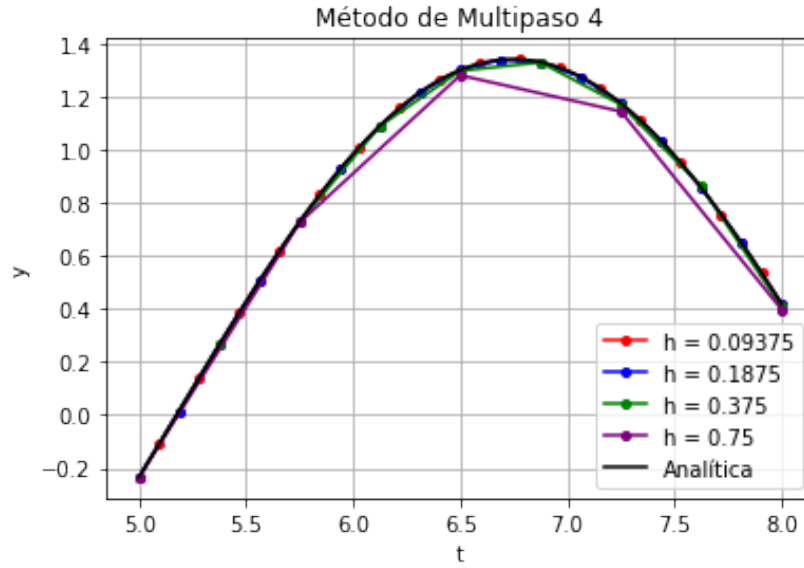


Figura 6: M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 1

### Comparación de los métodos

En la siguiente tabla se puede observar las estadísticas obtenidas por cada método, con  $h = 0,75$ :

| Método        | Tiempo       | Error ( $\bar{e}$ ) | Error ( $\sigma_e$ ) |
|---------------|--------------|---------------------|----------------------|
| Euler         | 0.0013921261 | 0.1695661406        | 0.0919998050         |
| Taylor        | 0.0038151741 | 0.0775772782        | 0.0437234718         |
| Runge-Kutta 2 | 0.0016293526 | 0.3065913720        | 0.1554623900         |
| Runge-Kutta 4 | 0.0014693737 | 0.0200273144        | 0.0106579426         |
| Multipaso 2   | 0.0031647682 | 0.1695524114        | 0.1039255813         |
| Multipaso 4   | 0.0028731823 | 0.0186775538        | 0.0100994357         |

Cuadro 7: Métodos del Ejemplo 1

Que se puede observar en la siguiente gráfica:



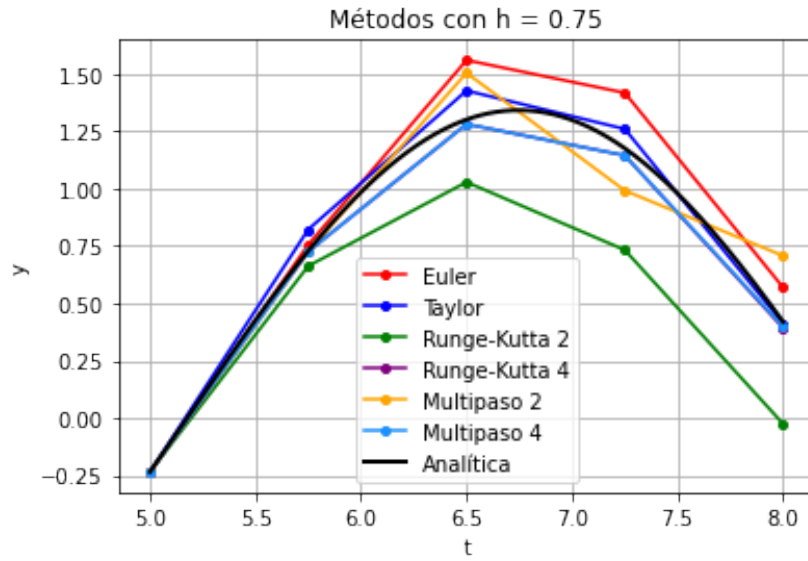


Figura 7: Métodos del Ejemplo 1

### Tiempo de ejecución

En la siguiente tabla se puede observar el tiempo de ejecución de cada uno de los métodos con respecto al valor de  $h$  (R-K es Runge-Kutta y MP es Multipaso).

| $h$ | Euler  | Taylor | R-K 2   | R-K 4   | MP 2    | MP 4    |
|-----|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| 0.1 | 0.0016 | 0.0041 | 0.00156 | 0.00170 | 0.00283 | 0.00300 |
| 0.2 | 0.0014 | 0.0034 | 0.00143 | 0.00147 | 0.00265 | 0.00317 |
| 0.3 | 0.0016 | 0.0036 | 0.00142 | 0.00172 | 0.00280 | 0.00285 |
| 0.4 | 0.0014 | 0.0034 | 0.00139 | 0.00142 | 0.00271 | 0.00277 |
| 0.5 | 0.0014 | 0.0035 | 0.00138 | 0.00142 | 0.00272 | 0.00263 |
| 0.6 | 0.0014 | 0.0034 | 0.00137 | 0.00138 | 0.00284 | 0.00271 |
| 0.7 | 0.0015 | 0.0039 | 0.00136 | 0.00139 | 0.00259 | 0.00273 |
| 0.8 | 0.0016 | 0.0039 | 0.00148 | 0.00148 | 0.00265 | 0.00276 |
| 0.9 | 0.0014 | 0.0035 | 0.00137 | 0.00135 | 0.00267 | 0.00258 |
| 1.0 | 0.0014 | 0.0034 | 0.00143 | 0.00137 | 0.00265 | 0.00267 |

Cuadro 8: Tiempo en el Ejemplo 1

Que se puede ver mejor en la siguiente gráfica:

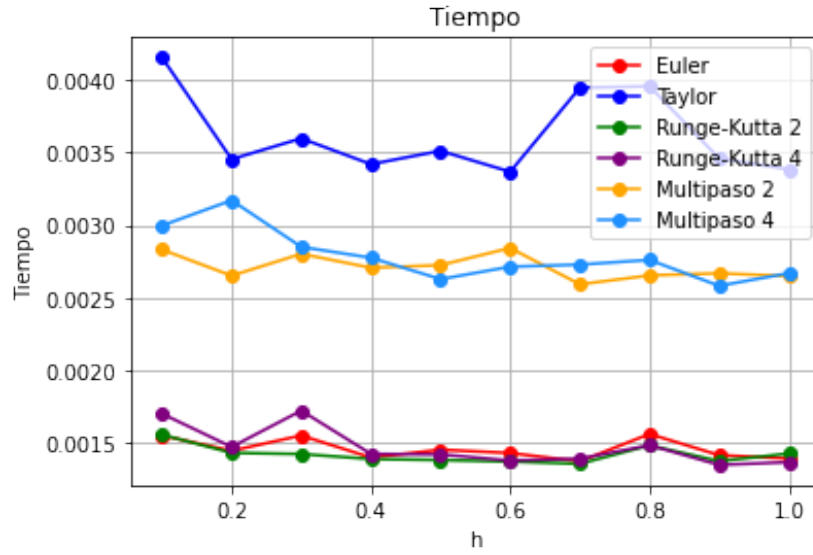


Figura 8: Tiempo en el Ejemplo 1

### Exactitud

En las siguientes tablas se pueden observar el error promedio ( $\bar{e}$ ) y la desviación del error ( $\sigma_e$ ) de cada uno de los métodos con respecto al valor de  $h$  (R-K es Runge-Kutta y MP es Multipaso).

| h   | Euler   | Taylor  | R-K 2   | R-K 4   | MP 2    | MP 4    |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.1 | 0.01889 | 0.00058 | 0.00217 | 0.00000 | 0.00123 | 0.00001 |
| 0.2 | 0.03910 | 0.00261 | 0.00985 | 0.00006 | 0.00464 | 0.00016 |
| 0.3 | 0.05875 | 0.00707 | 0.02428 | 0.00033 | 0.01066 | 0.00218 |
| 0.4 | 0.08136 | 0.01396 | 0.05030 | 0.00116 | 0.01764 | 0.00515 |
| 0.5 | 0.10639 | 0.02421 | 0.09254 | 0.00315 | 0.02731 | 0.00588 |
| 0.6 | 0.10943 | 0.04485 | 0.14527 | 0.00649 | 0.07060 | 0.01275 |
| 0.7 | 0.13325 | 0.06474 | 0.24211 | 0.01360 | 0.18273 | 0.01647 |
| 0.8 | 0.17324 | 0.09591 | 0.38216 | 0.02691 | 0.23929 | 0.02306 |
| 0.9 | 0.16711 | 0.13977 | 0.58115 | 0.04516 | 0.45284 | 0.03729 |
| 1.0 | 0.21507 | 0.25353 | 0.77698 | 0.08060 | 0.46150 | 0.08060 |

Cuadro 9: Error ( $\bar{e}$ ) en el Ejemplo 1

---

| <b>h</b> | <b>Euler</b> | <b>Taylor</b> | <b>R-K 2</b> | <b>R-K 4</b> | <b>MP 2</b> | <b>MP 4</b> |
|----------|--------------|---------------|--------------|--------------|-------------|-------------|
| 0.1      | 0.01068      | 0.00028       | 0.00109      | 0.00000      | 0.00063     | 0.00001     |
| 0.2      | 0.02157      | 0.00123       | 0.00485      | 0.00003      | 0.00253     | 0.00011     |
| 0.3      | 0.03097      | 0.00316       | 0.01193      | 0.00017      | 0.00607     | 0.00274     |
| 0.4      | 0.04186      | 0.00674       | 0.02395      | 0.00058      | 0.01187     | 0.00601     |
| 0.5      | 0.05556      | 0.01258       | 0.04425      | 0.00161      | 0.02274     | 0.00609     |
| 0.6      | 0.07881      | 0.01756       | 0.07207      | 0.00368      | 0.05005     | 0.01021     |
| 0.7      | 0.09479      | 0.03269       | 0.11327      | 0.00732      | 0.14482     | 0.00810     |
| 0.8      | 0.10375      | 0.04926       | 0.18962      | 0.01407      | 0.15382     | 0.01427     |
| 0.9      | 0.14641      | 0.06913       | 0.28131      | 0.02447      | 0.33543     | 0.02930     |
| 1.0      | 0.19962      | 0.04960       | 0.44768      | 0.04649      | 0.37992     | 0.04649     |

Cuadro 10: Error ( $\sigma_e$ ) en el Ejemplo 1

El error promedio se puede ver mejor en la siguiente gráfica:

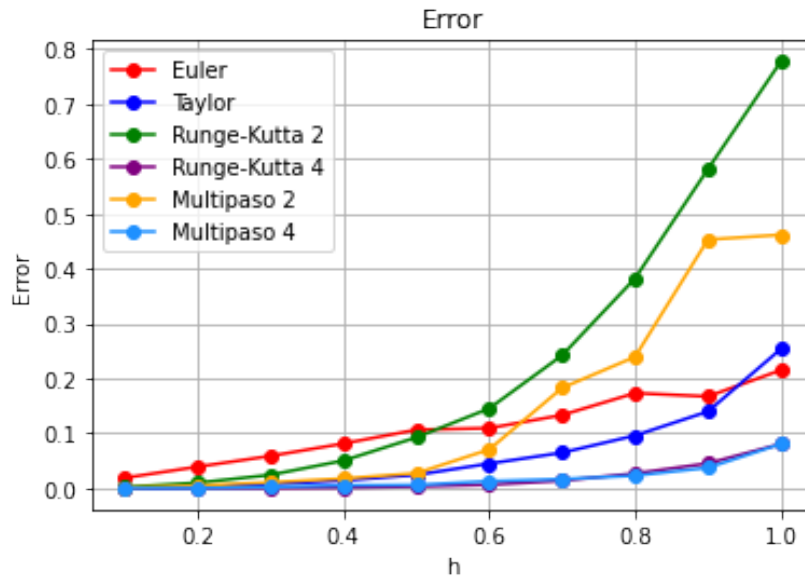


Figura 9: Error en el Ejemplo 1

---

## 1.2. Ejemplo 2

Para la Ecuación Diferencial Ordinaria  $y'$  que se muestra a continuación:

$$y' = 2t^3 - 5t^2$$

Su solución analítica  $y$  es la siguiente:

$$y = \frac{t^4}{2} - \frac{5t^3}{3}$$

En las siguientes seis secciones se muestran, para cada método, los resultados obtenidos con distintos valores de  $h$ , así como las estadísticas de tiempo y exactitud. Las condiciones iniciales son  $t_0 = -15$  y  $y_0 = 30937,5$ , obteniendo los puntos hasta  $t_f = 20$ . En las otras dos secciones se muestra más a detalle los resultados de los métodos en cuanto a tiempo y exactitud, respecto de los diferentes valores de  $h$ .

### Método de Euler

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| <b>h</b> | <b>Tiempo</b> | <b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b> | <b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b> |
|----------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1.09375  | 0.0019016266  | 5138.9391720295                     | 2390.0818302676                      |
| 2.1875   | 0.0016860962  | 10824.5078722636                    | 4882.6836016416                      |
| 4.375    | 0.0017225742  | 23815.4983520508                    | 10095.1742362803                     |
| 8.75     | 0.0015542507  | 55976.3590494792                    | 20690.8276511253                     |

Cuadro 11: M. Euler del Ejemplo 2

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

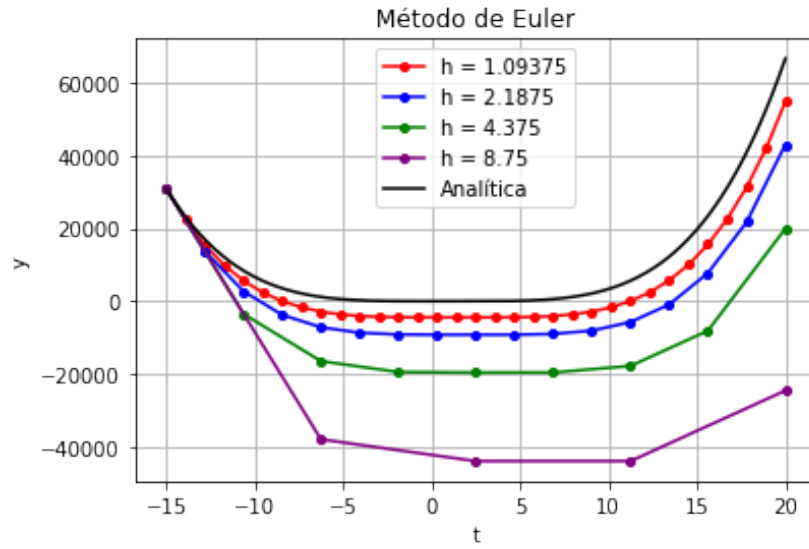


Figura 10: M. Euler del Ejemplo 2

### Método de Series de Taylor

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| <b>h</b> | <b>Tiempo</b> | <b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b> | <b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b> |
|----------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1.09375  | 0.0050203800  | 196.8986727297                      | 95.3960868920                        |
| 2.1875   | 0.0033574104  | 821.7964569728                      | 395.4293467424                       |
| 4.375    | 0.0031280518  | 3606.9361368815                     | 1610.3515534013                      |
| 8.75     | 0.0031075478  | 16399.1292317708                    | 8227.6526322845                      |

Cuadro 12: M. Taylor del Ejemplo 2

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

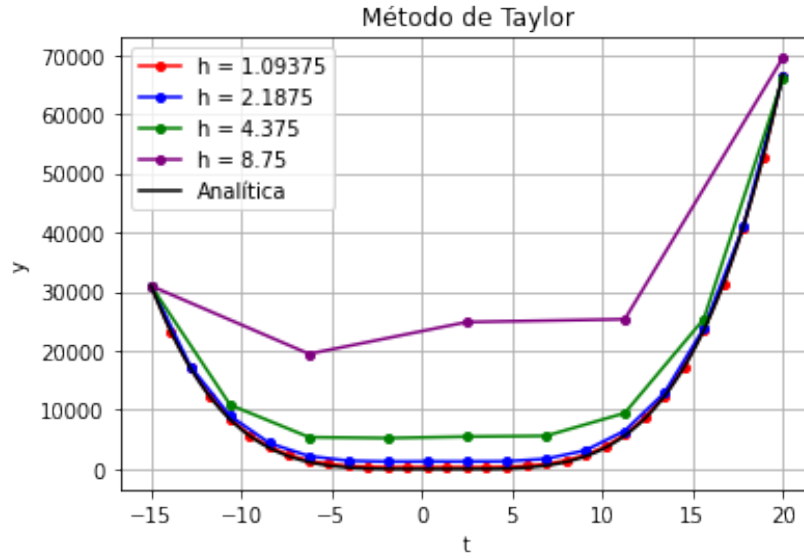


Figura 11: M. Taylor del Ejemplo 2

### Método de Runge-Kutta (orden 2)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| h       | Tiempo       | Error ( $\bar{e}$ ) | Error ( $\sigma_e$ ) |
|---------|--------------|---------------------|----------------------|
| 1.09375 | 0.0020093918 | 94.6873550614       | 46.0107647129        |
| 2.1875  | 0.0019066334 | 384.4227393468      | 176.6153537555       |
| 4.375   | 0.0015735626 | 1574.4908650716     | 671.1706585695       |
| 8.75    | 0.0015466213 | 6769.0022786458     | 1955.1845394124      |

Cuadro 13: M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 2

Los puntos calculados en cada valor de h se pueden ver en la siguiente gráfica:

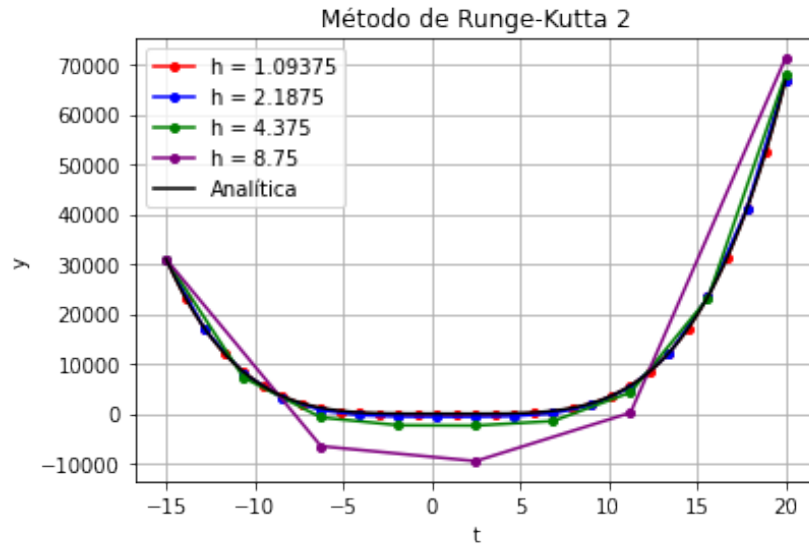


Figura 12: M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 2

#### Método de Runge-Kutta (orden 4)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| h       | Tiempo       | Error ( $\bar{e}$ ) | Error ( $\sigma_e$ ) |
|---------|--------------|---------------------|----------------------|
| 1.09375 | 0.0040440559 | 0.0000000000        | 0.0000000000         |
| 2.1875  | 0.0017249584 | 0.0000000000        | 0.0000000000         |
| 4.375   | 0.0016691685 | 0.0000000000        | 0.0000000000         |
| 8.75    | 0.0016636848 | 0.0000000000        | 0.0000000000         |

Cuadro 14: M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 2

Los puntos calculados en cada valor de h se pueden ver en la siguiente gráfica:

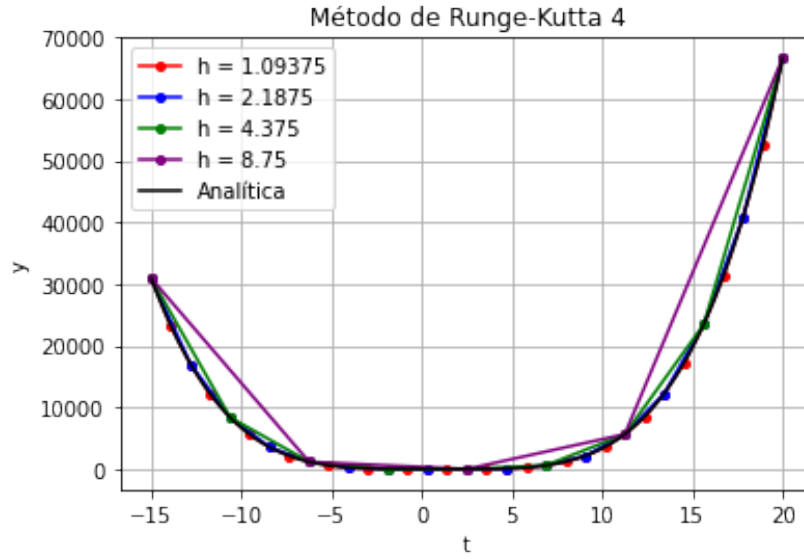


Figura 13: M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 2

#### Método Multipaso (2 pasos)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| <b>h</b> | <b>Tiempo</b> | <b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b> | <b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b> |
|----------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1.09375  | 0.0051748753  | 434.2687254151                      | 227.5641519332                       |
| 2.1875   | 0.0030207634  | 1609.7233692805                     | 872.0484186490                       |
| 4.375    | 0.0027425289  | 5510.7180277507                     | 3145.1548118927                      |
| 8.75     | 0.0027308464  | 14654.5410156250                    | 11080.8684814338                     |

Cuadro 15: M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 2

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:



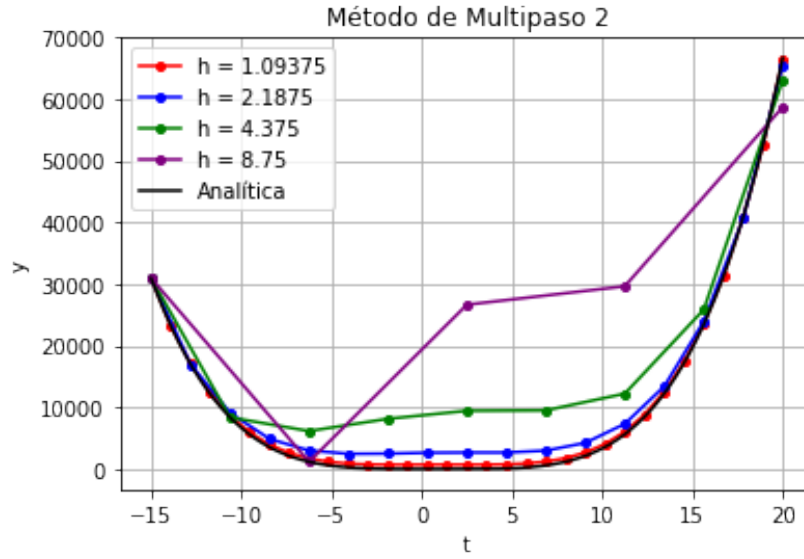


Figura 14: M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 2

#### Método Multipaso (4 pasos)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| h       | Tiempo       | Error ( $\bar{e}$ ) | Error ( $\sigma_e$ ) |
|---------|--------------|---------------------|----------------------|
| 1.09375 | 0.0043046474 | 0.0000000000        | 0.0000000000         |
| 2.1875  | 0.0032670498 | 0.0000000000        | 0.0000000000         |
| 4.375   | 0.0032994747 | 0.0000000000        | 0.0000000000         |
| 8.75    | 0.0030906200 | 0.0000000000        | 0.0000000000         |

Cuadro 16: M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 2

Los puntos calculados en cada valor de h se pueden ver en la siguiente gráfica:

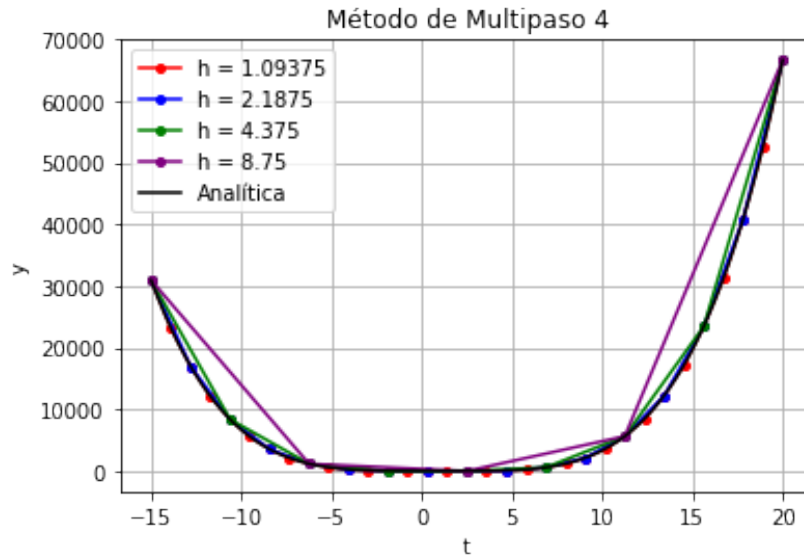


Figura 15: M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 2

### Comparación de los métodos

En la siguiente tabla se puede observar las estadísticas obtenidas por cada método, con  $h = 8,75$ :

| Método        | Tiempo       | Error ( $\bar{e}$ ) | Error ( $\sigma_e$ ) |
|---------------|--------------|---------------------|----------------------|
| Euler         | 0.0015542507 | 55976.3590494792    | 20690.8276511253     |
| Taylor        | 0.0031075478 | 16399.1292317708    | 8227.6526322845      |
| Runge-Kutta 2 | 0.0015466213 | 6769.0022786458     | 1955.1845394124      |
| Runge-Kutta 4 | 0.0016636848 | 0.0000000000        | 0.0000000000         |
| Multipaso 2   | 0.0027308464 | 14654.5410156250    | 11080.8684814338     |
| Multipaso 4   | 0.0030906200 | 0.0000000000        | 0.0000000000         |

Cuadro 17: Métodos del Ejemplo 2

Que se puede observar en la siguiente gráfica:

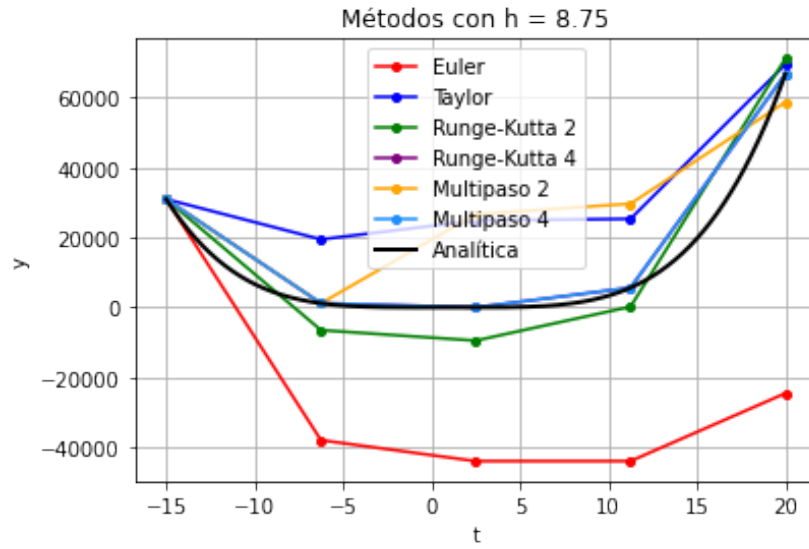


Figura 16: Métodos del Ejemplo 2

### Tiempo de ejecución

En la siguiente tabla se puede observar el tiempo de ejecución de cada uno de los métodos con respecto al valor de  $h$  (R-K es Runge-Kutta y MP es Multipaso).

| $h$ | Euler   | Taylor  | R-K 2   | R-K 4   | MP 2    | MP 4    |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.1 | 0.00192 | 0.00641 | 0.00223 | 0.00271 | 0.00384 | 0.00396 |
| 0.2 | 0.00163 | 0.00332 | 0.00165 | 0.00206 | 0.00307 | 0.00320 |
| 0.3 | 0.00157 | 0.00328 | 0.00171 | 0.00182 | 0.00305 | 0.00340 |
| 0.4 | 0.00160 | 0.00381 | 0.00163 | 0.00164 | 0.00356 | 0.00332 |
| 0.5 | 0.00152 | 0.00349 | 0.00157 | 0.00191 | 0.00288 | 0.00321 |
| 0.6 | 0.00152 | 0.00348 | 0.00147 | 0.00177 | 0.00284 | 0.00313 |
| 0.7 | 0.00142 | 0.00335 | 0.00148 | 0.00249 | 0.00286 | 0.00293 |
| 0.8 | 0.00161 | 0.00314 | 0.00148 | 0.00152 | 0.00281 | 0.00290 |
| 0.9 | 0.00149 | 0.00308 | 0.00151 | 0.00187 | 0.00294 | 0.00293 |
| 1.0 | 0.00143 | 0.00325 | 0.00143 | 0.00149 | 0.00279 | 0.00293 |

Cuadro 18: Tiempo en el Ejemplo 2

Que se puede ver mejor en la siguiente gráfica:

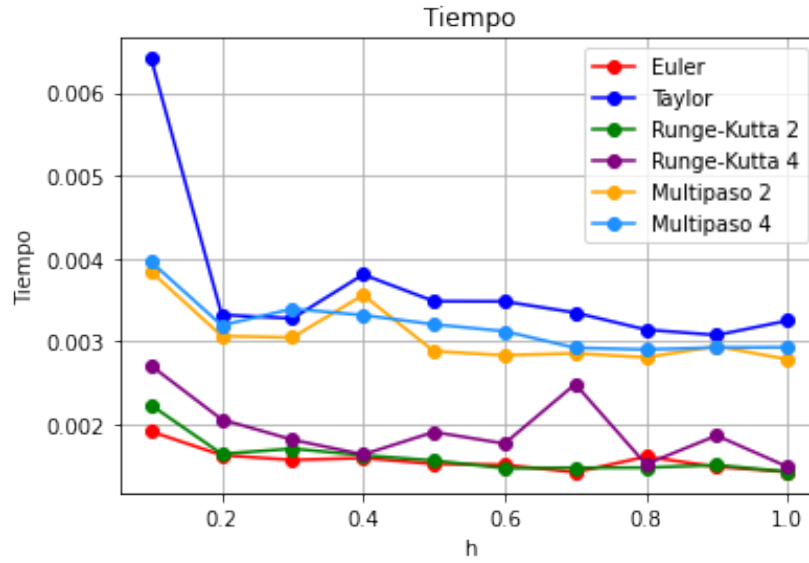


Figura 17: Tiempo en el Ejemplo 2

### Exactitud

En las siguientes tablas se pueden observar el error promedio ( $\bar{e}$ ) y la desviación del error ( $\sigma_e$ ) de cada uno de los métodos con respecto al valor de  $h$  (R-K es Runge-Kutta y MP es Multipaso).

| h   | Euler      | Taylor    | R-K 2    | R-K 4   | MP 2      | MP 4    |
|-----|------------|-----------|----------|---------|-----------|---------|
| 0.1 | 448.95547  | 1.57206   | 0.78328  | 0.00000 | 3.88579   | 0.00000 |
| 0.2 | 906.31080  | 6.31310   | 3.13485  | 0.00000 | 15.43019  | 0.00000 |
| 0.3 | 1360.66095 | 14.27771  | 7.06529  | 0.00000 | 34.50210  | 0.00000 |
| 0.4 | 1831.07413 | 25.48441  | 12.56737 | 0.00000 | 60.89440  | 0.00000 |
| 0.5 | 2281.24479 | 40.05104  | 19.68021 | 0.00000 | 94.60313  | 0.00000 |
| 0.6 | 2797.84800 | 57.79574  | 28.32407 | 0.00000 | 135.02612 | 0.00000 |
| 0.7 | 3322.95297 | 78.92766  | 38.58817 | 0.00000 | 182.59201 | 0.00000 |
| 0.8 | 3735.93600 | 103.74206 | 50.51345 | 0.00000 | 237.00635 | 0.00000 |
| 0.9 | 4206.08700 | 132.04246 | 64.00246 | 0.00000 | 298.10274 | 0.00000 |
| 1.0 | 4677.00000 | 163.80000 | 79.16190 | 0.00000 | 365.38095 | 0.00000 |

Cuadro 19: Error ( $\bar{e}$ ) en el Ejemplo 2

---

| <b>h</b> | <b>Euler</b> | <b>Taylor</b> | <b>R-K 2</b> | <b>R-K 4</b> | <b>MP 2</b> | <b>MP 4</b> |
|----------|--------------|---------------|--------------|--------------|-------------|-------------|
| 0.1      | 216.35640    | 0.78854       | 0.39277      | 0.00000      | 1.96248     | 0.00000     |
| 0.2      | 438.92901    | 3.15426       | 1.56498      | 0.00000      | 7.81325     | 0.00000     |
| 0.3      | 652.10559    | 7.11505       | 3.51575      | 0.00000      | 17.54241    | 0.00000     |
| 0.4      | 881.99695    | 12.64428      | 6.22764      | 0.00000      | 31.03589    | 0.00000     |
| 0.5      | 1078.77029   | 19.83140      | 9.72520      | 0.00000      | 48.44060    | 0.00000     |
| 0.6      | 1361.68240   | 28.44920      | 13.89857     | 0.00000      | 69.26685    | 0.00000     |
| 0.7      | 1651.58577   | 38.61963      | 18.78496     | 0.00000      | 93.36928    | 0.00000     |
| 0.8      | 1780.14484   | 50.91188      | 24.61845     | 0.00000      | 122.49490   | 0.00000     |
| 0.9      | 1982.75127   | 64.44596      | 31.16454     | 0.00000      | 154.52903   | 0.00000     |
| 1.0      | 2180.94770   | 79.87611      | 38.36569     | 0.00000      | 190.85825   | 0.00000     |

Cuadro 20: Error ( $\sigma_e$ ) en el Ejemplo 2

El error promedio se puede ver mejor en la siguiente gráfica:

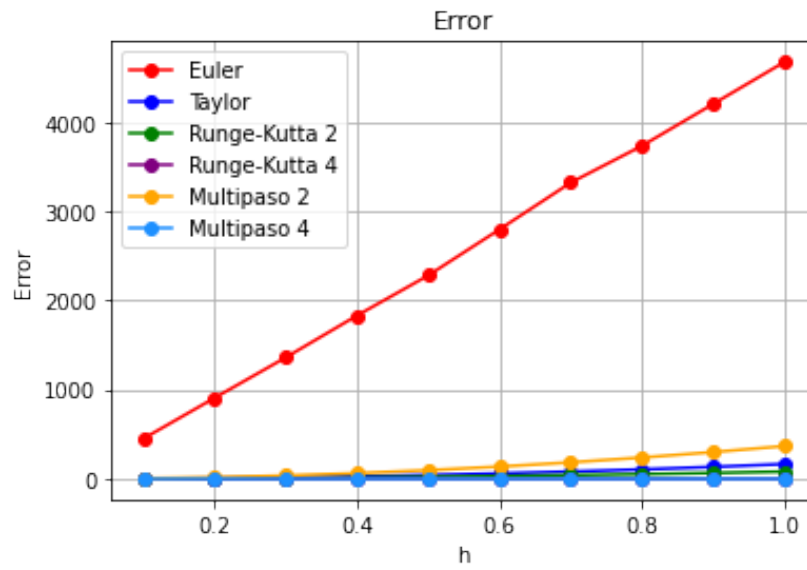


Figura 18: Error en el Ejemplo 2

---

### 1.3. Ejemplo 3

Para la Ecuación Diferencial Ordinaria  $y'$  que se muestra a continuación:

$$y' = 2t \cos(t^2) - 3 \cos(t)$$

Su solución analítica  $y$  es la siguiente:

$$y = \sin(t^2) - 3 \sin(t)$$

En las siguientes seis secciones se muestran, para cada método, los resultados obtenidos con distintos valores de  $h$ , así como las estadísticas de tiempo y exactitud. Las condiciones iniciales son  $t_0 = 2$  y  $y_0 = -3,484$ , obteniendo los puntos hasta  $t_f = 3$ . En las otras dos secciones se muestra más a detalle los resultados de los métodos en cuanto a tiempo y exactitud, respecto de los diferentes valores de  $h$ .

#### Método de Euler

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| <b>h</b> | <b>Tiempo</b> | <b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b> | <b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b> |
|----------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 0.03125  | 0.0022428036  | 0.0778382886                        | 0.0464068001                         |
| 0.0625   | 0.0028591156  | 0.1580991076                        | 0.0926136231                         |
| 0.125    | 0.0019698143  | 0.3248936779                        | 0.1868208324                         |
| 0.25     | 0.0017974377  | 0.6611583257                        | 0.4262467127                         |

Cuadro 21: M. Euler del Ejemplo 3

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

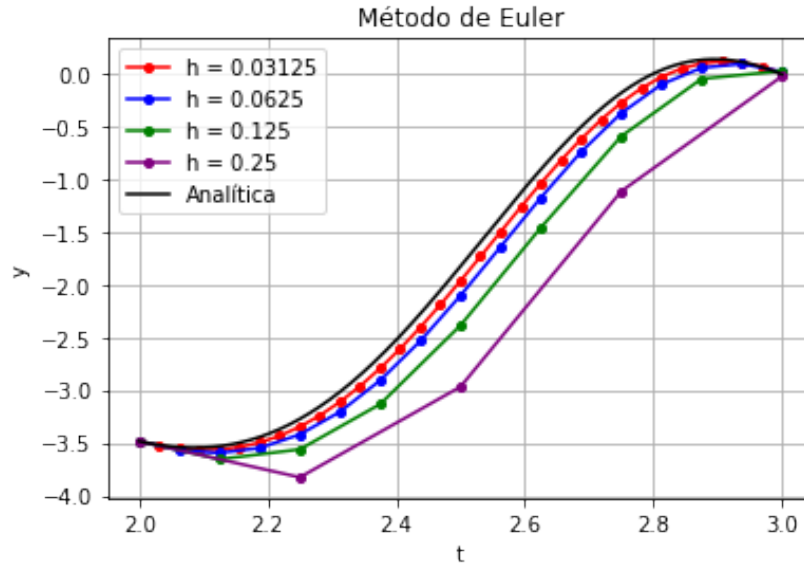


Figura 19: M. Euler del Ejemplo 3

### Método de Series de Taylor

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| <b>h</b> | <b>Tiempo</b> | <b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b> | <b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b> |
|----------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 0.03125  | 0.0050234795  | 0.0031749372                        | 0.0025350499                         |
| 0.0625   | 0.0043566227  | 0.0128072994                        | 0.0099088557                         |
| 0.125    | 0.0042567253  | 0.0523840592                        | 0.0376728700                         |
| 0.25     | 0.0045228004  | 0.2170149578                        | 0.1437226917                         |

Cuadro 22: M. Taylor del Ejemplo 3

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

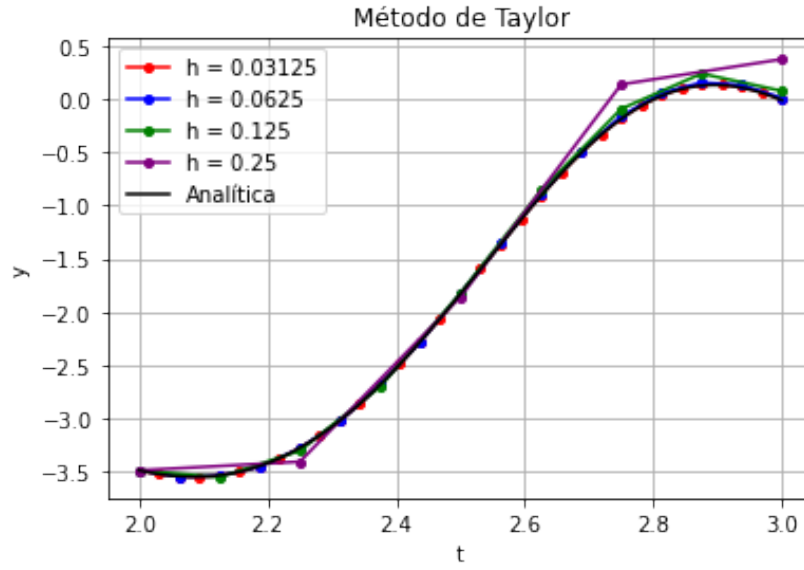


Figura 20: M. Taylor del Ejemplo 3

### Método de Runge-Kutta (orden 2)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| <b>h</b> | <b>Tiempo</b> | <b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b> | <b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b> |
|----------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 0.03125  | 0.0023250580  | 0.0016116691                        | 0.0012872542                         |
| 0.0625   | 0.0020723343  | 0.0065878346                        | 0.0051008918                         |
| 0.125    | 0.0020112991  | 0.0275097978                        | 0.0198280550                         |
| 0.25     | 0.0018315315  | 0.1172724660                        | 0.0742926698                         |

Cuadro 23: M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 3

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:



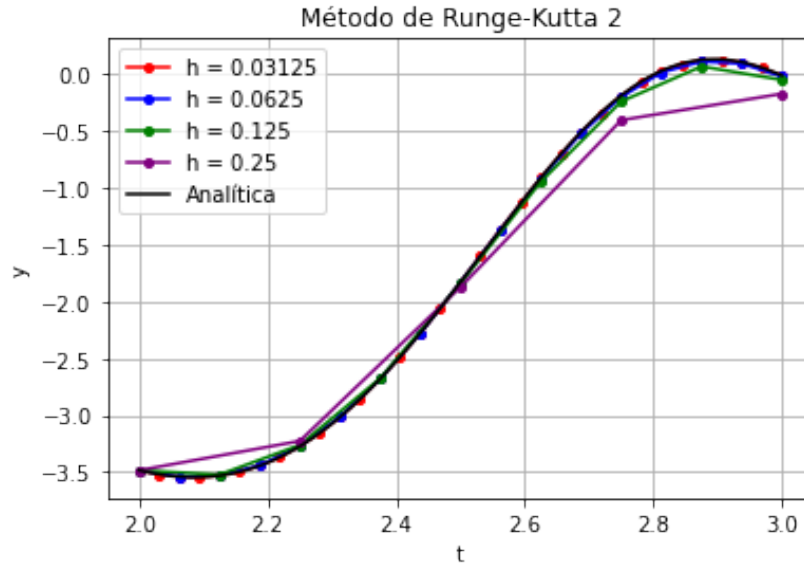


Figura 21: M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 3

#### Método de Runge-Kutta (orden 4)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| <b>h</b> | <b>Tiempo</b> | <b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b> | <b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b> |
|----------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 0.03125  | 0.0026671886  | 0.0000001745                        | 0.0000001256                         |
| 0.0625   | 0.0021915436  | 0.0000028726                        | 0.0000020026                         |
| 0.125    | 0.0019996166  | 0.0000489267                        | 0.0000311142                         |
| 0.25     | 0.0018181801  | 0.0008969483                        | 0.0004236477                         |

Cuadro 24: M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 3

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

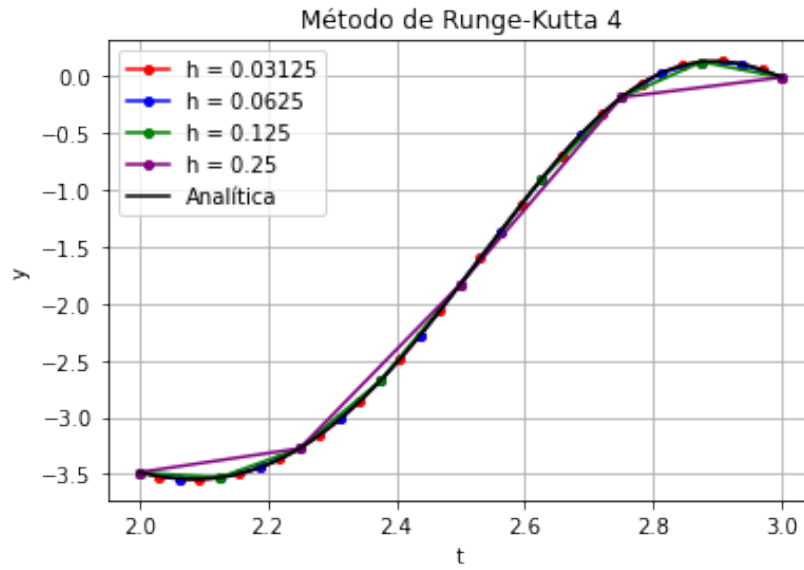


Figura 22: M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 3

### Método Multipaso (2 pasos)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| <b>h</b> | <b>Tiempo</b> | <b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b> | <b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b> |
|----------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 0.03125  | 0.0055129528  | 0.0078810668                        | 0.0067174293                         |
| 0.0625   | 0.0035493374  | 0.0314955695                        | 0.0278003852                         |
| 0.125    | 0.0056204796  | 0.1267943580                        | 0.1169315525                         |
| 0.25     | 0.0043263435  | 0.4937473018                        | 0.5230285527                         |

Cuadro 25: M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 3

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

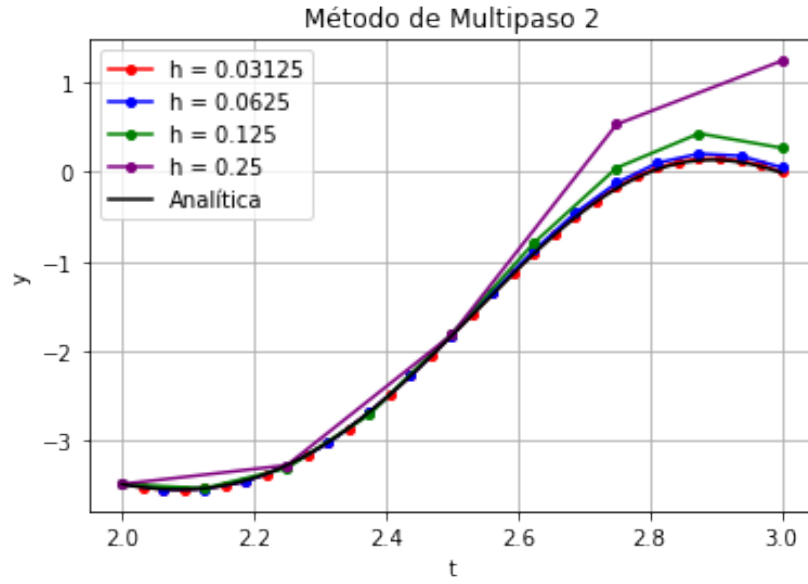


Figura 23: M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 3

#### Método Multipaso (4 pasos)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| <b>h</b> | <b>Tiempo</b> | <b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b> | <b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b> |
|----------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 0.03125  | 0.0042483807  | 0.0001547190                        | 0.0001398299                         |
| 0.0625   | 0.0056202412  | 0.0021982635                        | 0.0023739276                         |
| 0.125    | 0.0033249855  | 0.0269571614                        | 0.0377417527                         |
| 0.25     | 0.0032303333  | 0.1954456921                        | 0.3372967696                         |

Cuadro 26: M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 3

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

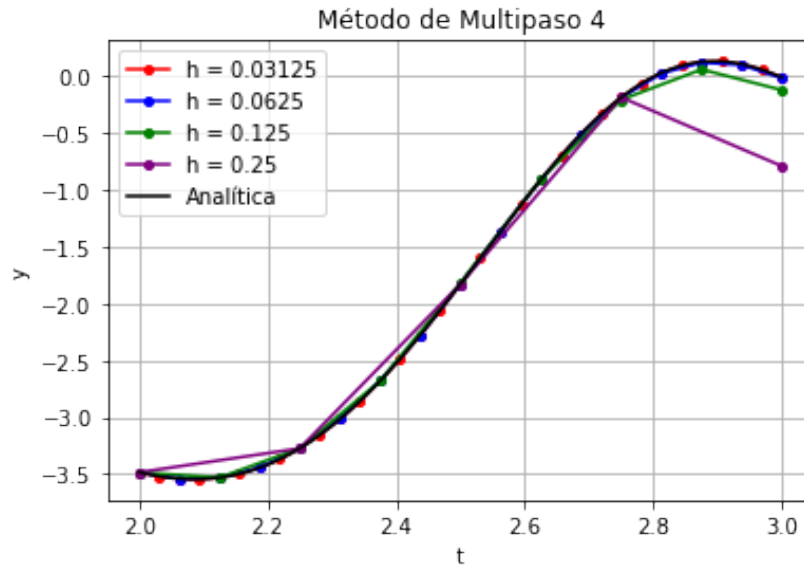


Figura 24: M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 3

### Comparación de los métodos

En la siguiente tabla se puede observar las estadísticas obtenidas por cada método, con  $h = 0,25$ :

| Método        | Tiempo       | Error ( $\bar{e}$ ) | Error ( $\sigma_e$ ) |
|---------------|--------------|---------------------|----------------------|
| Euler         | 0.0017974377 | 0.6611583257        | 0.4262467127         |
| Taylor        | 0.0045228004 | 0.2170149578        | 0.1437226917         |
| Runge-Kutta 2 | 0.0018315315 | 0.1172724660        | 0.0742926698         |
| Runge-Kutta 4 | 0.0018181801 | 0.0008969483        | 0.0004236477         |
| Multipaso 2   | 0.0043263435 | 0.4937473018        | 0.5230285527         |
| Multipaso 4   | 0.0032303333 | 0.1954456921        | 0.3372967696         |

Cuadro 27: Métodos del Ejemplo 3

Que se puede observar en la siguiente gráfica:

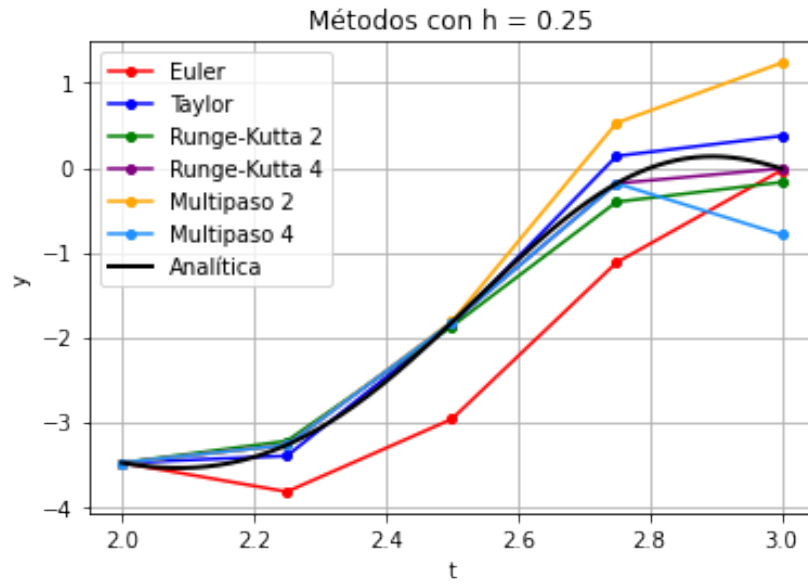


Figura 25: Métodos del Ejemplo 3

### Tiempo de ejecución

En la siguiente tabla se puede observar el tiempo de ejecución de cada uno de los métodos con respecto al valor de  $h$  (R-K es Runge-Kutta y MP es Multipaso).

| $h$ | Euler   | Taylor  | R-K 2   | R-K 4   | MP 2    | MP 4    |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.1 | 0.00203 | 0.00439 | 0.00174 | 0.00174 | 0.00329 | 0.00326 |
| 0.2 | 0.00232 | 0.00415 | 0.00166 | 0.00171 | 0.00314 | 0.00314 |
| 0.3 | 0.00187 | 0.00411 | 0.00167 | 0.00166 | 0.00318 | 0.00316 |
| 0.4 | 0.00164 | 0.00396 | 0.00161 | 0.00162 | 0.00307 | 0.00326 |
| 0.5 | 0.00192 | 0.00411 | 0.00159 | 0.00158 | 0.00306 | 0.00316 |
| 0.6 | 0.00174 | 0.00401 | 0.00159 | 0.00165 | 0.00309 | 0.00324 |
| 0.7 | 0.00162 | 0.00399 | 0.00158 | 0.00158 | 0.00314 | 0.00321 |
| 0.8 | 0.00179 | 0.00404 | 0.00160 | 0.00160 | 0.00312 | 0.00313 |
| 0.9 | 0.00171 | 0.00408 | 0.00160 | 0.00185 | 0.00311 | 0.00320 |
| 1.0 | 0.00180 | 0.00518 | 0.00164 | 0.00160 | 0.00363 | 0.00334 |

Cuadro 28: Tiempo en el Ejemplo 3

Que se puede ver mejor en la siguiente gráfica:

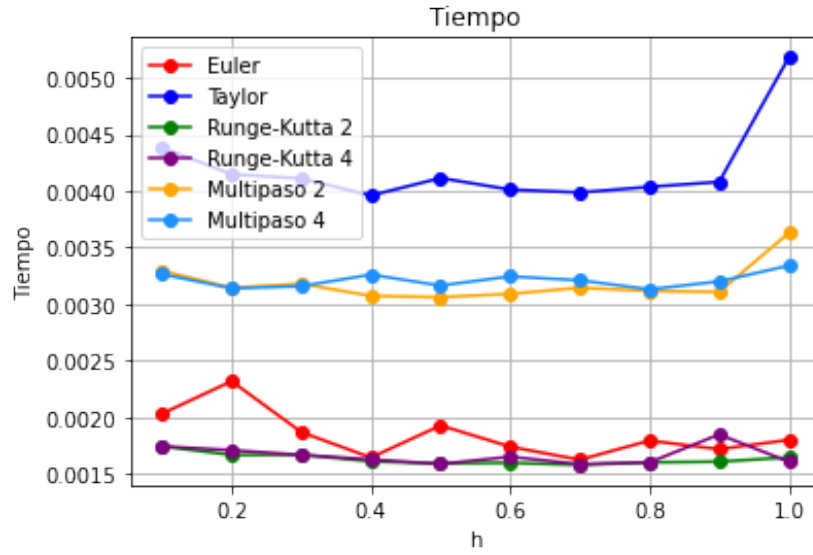


Figura 26: Tiempo en el Ejemplo 3

### Exactitud

En las siguientes tablas se pueden observar el error promedio ( $\bar{e}$ ) y la desviación del error ( $\sigma_e$ ) de cada uno de los métodos con respecto al valor de  $h$  (R-K es Runge-Kutta y MP es Multipaso).

| h   | Euler   | Taylor  | R-K 2   | R-K 4   | MP 2    | MP 4    |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.1 | 0.25763 | 0.03334 | 0.01726 | 0.00002 | 0.08116 | 0.01237 |
| 0.2 | 0.52516 | 0.14085 | 0.07220 | 0.00033 | 0.32793 | 0.12140 |
| 0.3 | 0.72833 | 0.24362 | 0.17130 | 0.00191 | 0.73958 | 0.62062 |
| 0.4 | 1.07160 | 0.45281 | 0.29736 | 0.00744 | 1.38678 | 0.00744 |
| 0.5 | 1.39767 | 1.23048 | 0.44316 | 0.02123 | 2.03734 | 0.03258 |
| 0.6 | 1.88980 | 1.07201 | 0.60216 | 0.01770 | 3.17332 | 0.10790 |
| 0.7 | 2.22376 | 1.63992 | 1.94456 | 0.18703 | 3.01778 | 0.14293 |
| 0.8 | 4.26864 | 4.79106 | 1.59084 | 0.41341 | 1.28105 | 1.27040 |
| 0.9 | 6.24184 | 7.25038 | 5.63654 | 0.36823 | 1.12203 | 1.33856 |
| 1.0 | 4.83959 | 1.92514 | 5.40492 | 0.81651 | 0.81651 | 3.19419 |

Cuadro 29: Error ( $\bar{e}$ ) en el Ejemplo 3

---

| h   | Euler   | Taylor  | R-K 2   | R-K 4   | MP 2    | MP 4    |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0.1 | 0.14799 | 0.02444 | 0.01291 | 0.00001 | 0.07318 | 0.01575 |
| 0.2 | 0.32364 | 0.08693 | 0.05073 | 0.00022 | 0.31331 | 0.19672 |
| 0.3 | 0.48605 | 0.23315 | 0.10101 | 0.00133 | 0.64296 | 1.07189 |
| 0.4 | 0.59405 | 0.29318 | 0.24276 | 0.00204 | 1.06160 | 0.00204 |
| 0.5 | 0.94149 | 0.58249 | 0.29569 | 0.01068 | 2.02680 | 0.01827 |
| 0.6 | 1.32702 | 0.29048 | 0.04763 | 0.00723 | 3.16285 | 0.12770 |
| 0.7 | 1.78022 | 0.95065 | 0.37831 | 0.16834 | 2.99908 | 0.15094 |
| 0.8 | 0.30390 | 4.54794 | 1.27326 | 0.29048 | 1.15812 | 1.23495 |
| 0.9 | 1.39601 | 6.61679 | 1.33868 | 0.00036 | 0.75416 | 1.37225 |
| 1.0 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 1.75548 |

Cuadro 30: Error ( $\sigma_e$ ) en el Ejemplo 3

El error promedio se puede ver mejor en la siguiente gráfica:

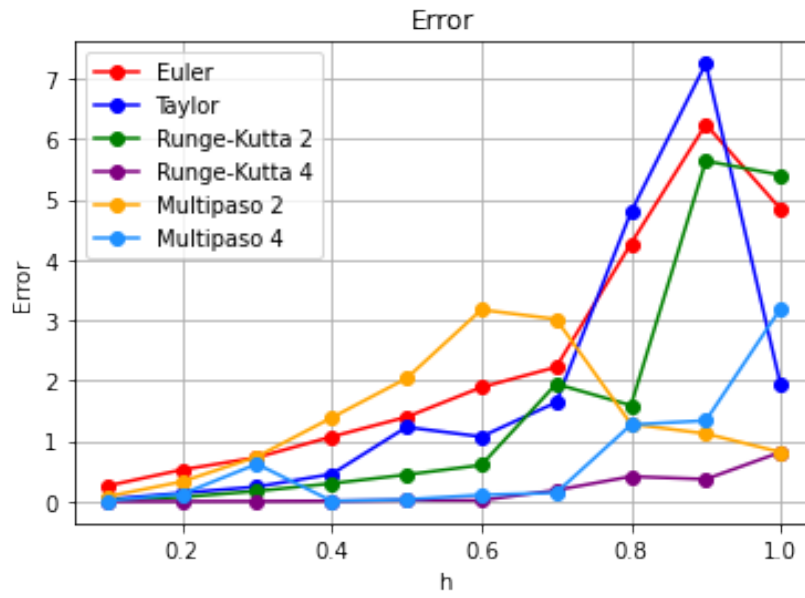


Figura 27: Error en el Ejemplo 3

---

## 2. ODEs de Orden Superior

Para la Ecuación Diferencial Ordinaria  $y'''$  que se muestra a continuación:

$$y''' = 180t^2 + 30$$

Su solución analítica  $y$  es la siguiente:

$$y = 3t^5 + 5t^3$$

Para este ejemplo se tomaron las condiciones iniciales que se muestra a continuación:

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

$$y''(0) = 30$$

Como se indicó anteriormente el límite de análisis de la solución es  $t_0 = 0$  y  $t_f = 10$ . En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| <b>h</b> | <b>Tiempo</b> | <b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b> | <b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b> |
|----------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 0.3125   | 0.0915002823  | 5769.7387933731                     | 7248.8254281816                      |
| 0.625    | 0.0423986912  | 11792.3622131348                    | 14846.2620964991                     |
| 1.25     | 0.0211062431  | 26010.1318359375                    | 32086.2789209033                     |
| 2.5      | 0.0105736256  | 61679.6875000000                    | 71902.2418334524                     |

Cuadro 31: Ejemplo de ODEs de Orden Superior

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:



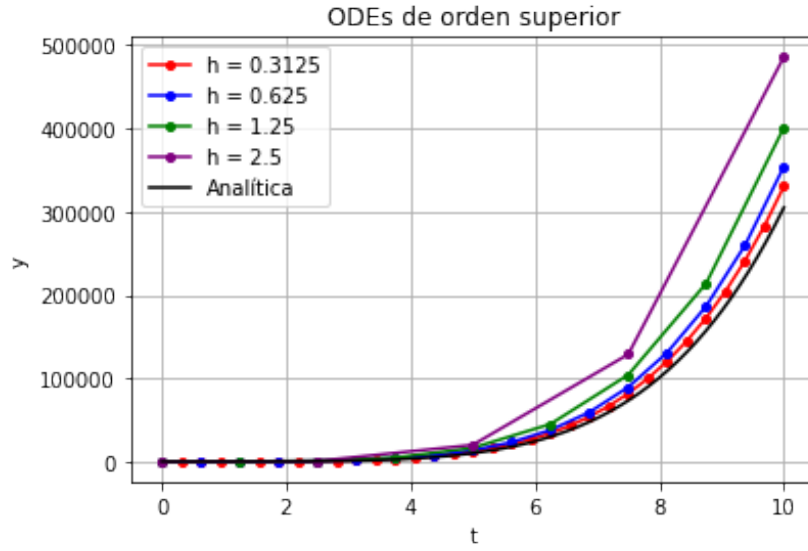


Figura 28: Ejemplo de ODEs de Orden Superior

### Tiempo de ejecución y exactitud

En la siguiente tabla se puede observar el tiempo de ejecución y la exactitud con respecto al valor de  $h$ .

| $h$ | Tiempo  | Error ( $\bar{e}$ ) | Error ( $\sigma_e$ ) |
|-----|---------|---------------------|----------------------|
| 0.1 | 0.28562 | 2177.11197          | 2617.97876           |
| 0.2 | 0.13802 | 4066.79104          | 5062.92690           |
| 0.3 | 0.09191 | 5963.39888          | 7501.39173           |
| 0.4 | 0.06703 | 7380.70528          | 9300.17338           |
| 0.5 | 0.05276 | 9293.81250          | 11717.80139          |
| 0.6 | 0.04473 | 12142.58688         | 15320.13192          |
| 0.7 | 0.04211 | 15995.37184         | 20190.27530          |
| 0.8 | 0.03431 | 17906.30912         | 22526.10860          |
| 0.9 | 0.03715 | 23530.80132         | 29608.62612          |
| 1.0 | 0.02654 | 19987.00000         | 24893.12285          |

Cuadro 32: Estadísticas del Ejemplo de ODEs de Orden Superior

El tiempo de ejecución se puede ver mejor en la siguiente gráfica:

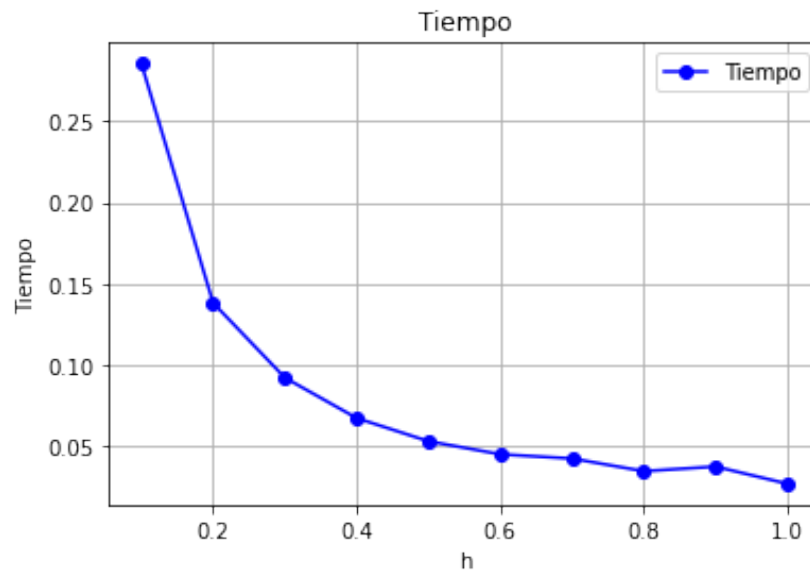


Figura 29: Tiempo del Ejemplo de ODEs de Orden Superior

El error promedio se puede ver mejor en la siguiente gráfica:

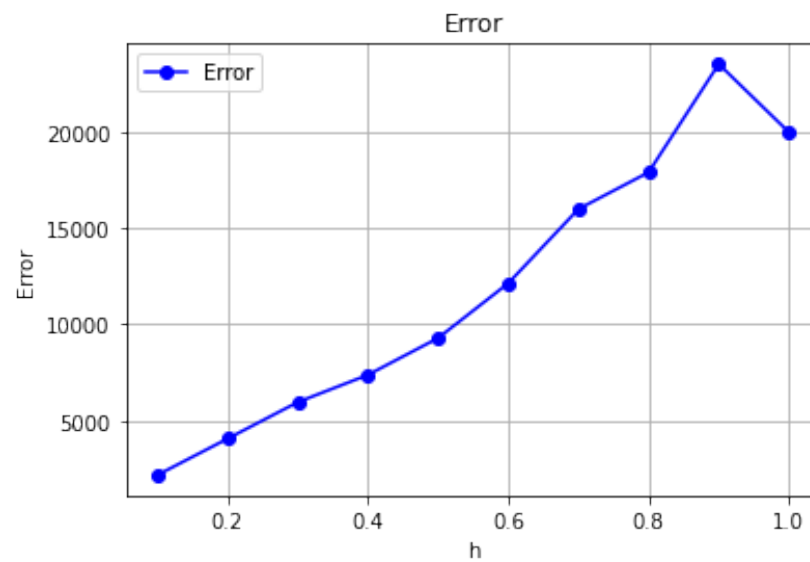


Figura 30: Error del Ejemplo de ODEs de Orden Superior

---

### 3. Problemas de Valor de Frontera

Para la Ecuación Diferencial Ordinaria  $y''$  que se muestra a continuación:

$$y'' = 42t^5 + 2$$

Su solución analítica  $y$  es la siguiente:

$$y = t^7 + t^2$$

En las siguientes dos secciones se muestran, para cada método, los resultados obtenidos con distintos valores de  $n$ , así como las estadísticas de tiempo y exactitud. Las condiciones de frontera son  $t_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $t_f = 15$ ,  $y_f = 170859600$ . En las otras dos secciones se muestra más a detalle los resultados de los métodos en cuanto a tiempo y exactitud, respecto de los diferentes valores de  $n$ .

#### Método de Diferencias Finitas

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

| <b>n</b> | <b>Tiempo</b> | <b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b> | <b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b> |
|----------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 4        | 0.00165       | 26250000.00000                      | 6562500.00000                        |
| 6        | 0.00143       | 9185400.00000                       | 2878417.70497                        |
| 8        | 0.00120       | 4554352.35319                       | 1602644.25723                        |
| 10       | 0.00124       | 2700617.28395                       | 1020753.77060                        |

Cuadro 33: M. Diferencias Finitas (PVF)

Los puntos calculados en cada valor de  $n$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

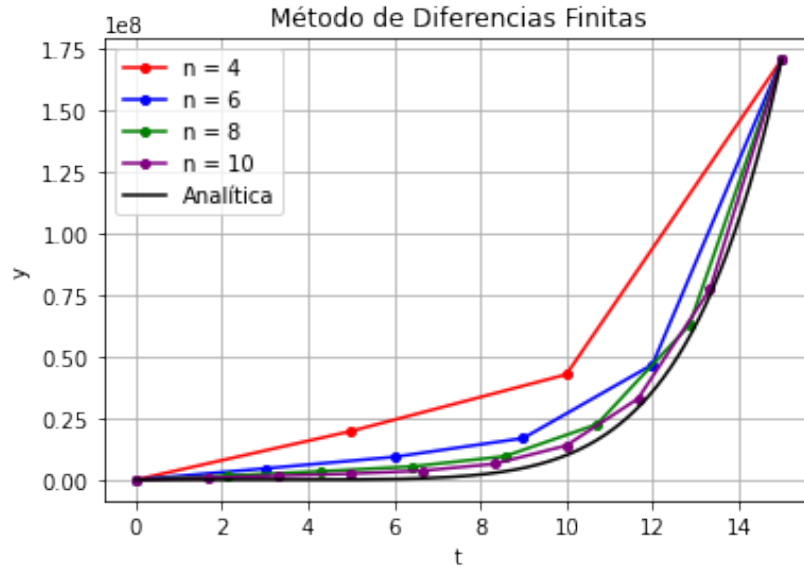


Figura 31: M. Diferencias Finitas (PVF)

### Método de Elementos Finitos

En la siguientes tablas se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ), además de los polinomios calculados por el método:

| h  | Tiempo  | Error ( $\bar{e}$ ) | Error ( $\sigma_e$ ) |
|----|---------|---------------------|----------------------|
| 4  | 0.00318 | 26250000.00000      | 6562500.00000        |
| 6  | 0.00404 | 2009306.25000       | 178982.76924         |
| 8  | 0.00512 | 0.00000             | 0.00000              |
| 10 | 0.00629 | 0.00000             | 0.00000              |

Cuadro 34: Estadísticas de M. Elementos Finitos (PVF)

---

| <b>h</b> | <b>y(t)</b>  |
|----------|--|
| 4        | $135625t^3 - 1968749t^2 + 10406250t$                         |
| 6        | $1228,5t^5 - 28350t^4 + 269892t^3 - 1224719t^2 + 2524162,5t$ |
| 8        | $0,99t^7 + 1,00t^2 - 3,0$                                    |
| 10       | $1,00t^7 + 0,99t^2$  |

Cuadro 35: Polinomios de M. Elementos Finitos (PVF)

Los puntos calculados en cada valor de n se pueden ver en la siguiente gráfica:

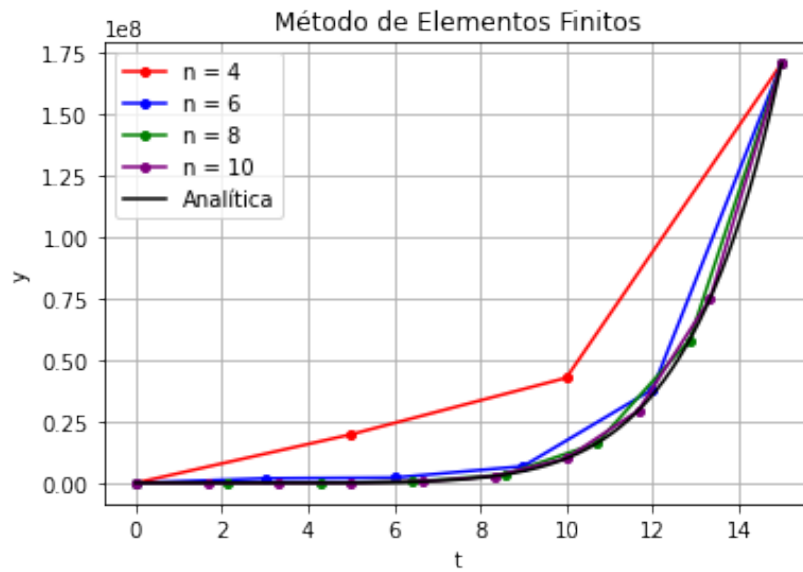


Figura 32: M. Elementos Finitos (PVF)

### Comparación de los métodos

En la siguiente tabla se puede observar las estadísticas obtenidas por cada método, con  $n = 10$ :

| <b>Método</b>       | <b>Tiempo</b> | <b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b> | <b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b> |
|---------------------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| Diferencias Finitas | 0.00143       | 2700617.28395                       | 1020753.77060                        |
| Elementos Finitos   | 0.00649       | 0.00000                             | 0.00000                              |

Cuadro 36: Comparación de métodos (PVF)

Que se puede observar en la siguiente gráfica:

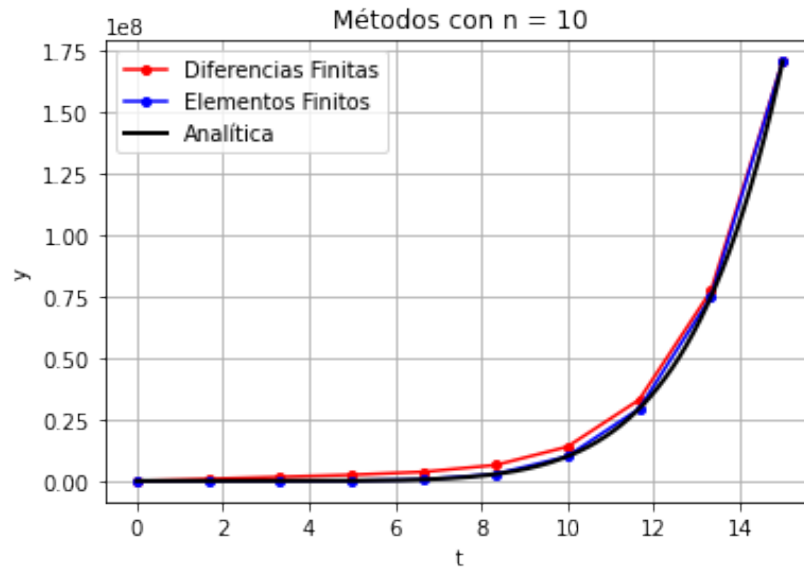


Figura 33: Comparación de métodos (PVF)

### Tiempo de ejecución

En la siguiente tabla se puede observar el tiempo de ejecución de cada uno de los métodos con respecto al valor de  $n$ .

| n  | Diferencias Finitas | Elementos Finitos |
|----|---------------------|-------------------|
| 3  | 0.0012867451        | 0.0021784306      |
| 4  | 0.0011565685        | 0.0025899410      |
| 5  | 0.0012617111        | 0.0032415390      |
| 6  | 0.0012328625        | 0.0035440922      |
| 7  | 0.0013127327        | 0.0041799545      |
| 8  | 0.0013139248        | 0.0046648979      |
| 9  | 0.0012440681        | 0.0053088665      |
| 10 | 0.0012834072        | 0.0059263706      |
| 11 | 0.0013060570        | 0.0064511299      |
| 12 | 0.0013132095        | 0.0070304871      |

Cuadro 37: Tiempo de ejecución (PVF)

Que se puede ver mejor en la siguiente gráfica:

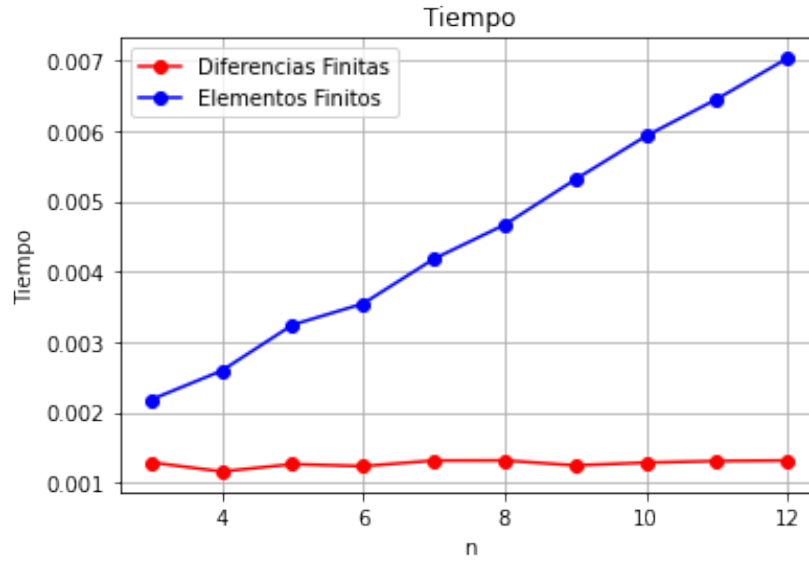


Figura 34: Tiempo de ejecución (PVF)

### Exactitud

En las siguientes tablas se pueden observar el error promedio ( $\bar{e}$ ) y la desviación del error ( $\sigma_e$ ) de cada uno de los métodos con respecto al valor de  $n$ .

| n  | Diferencias Finitas | Elementos Finitos   |
|----|---------------------|---------------------|
| 3  | 56063232.4218750000 | 56063232.4218750000 |
| 4  | 26250000.0000000000 | 26250000.0000000000 |
| 5  | 14599800.1098632757 | 4379940.0329592498  |
| 6  | 9185399.9999999981  | 2009306.2500000000  |
| 7  | 6280517.5781249991  | 87158.2031246613    |
| 8  | 4554352.3531861827  | 0.0000000100        |
| 9  | 3449202.7759552025  | 0.0000000081        |
| 10 | 2700617.2839505784  | 0.0000000425        |
| 11 | 2170768.3593750005  | 0.0000000681        |
| 12 | 1782315.8502586465  | 0.0000000686        |

Cuadro 38: Error  $\bar{e}$  (PVF)

---

| n  | Diferencias Finitas | Elementos Finitos  |
|----|---------------------|--------------------|
| 3  | 0.0000000000        | 0.0000000000       |
| 4  | 6562500.0000000000  | 6562500.0000000000 |
| 5  | 4190931.0483032530  | 3102242.8129737382 |
| 6  | 2878417.7049747310  | 178982.7692382356  |
| 7  | 2101362.9066954814  | 56719.2321417461   |
| 8  | 1602644.2572328798  | 0.0000000067       |
| 9  | 1262861.8939167827  | 0.0000000093       |
| 10 | 1020753.7706015311  | 0.0000000336       |
| 11 | 842102.2268460587   | 0.0000000486       |
| 12 | 706506.1385796772   | 0.0000001080       |

Cuadro 39: Error  $\sigma_e$  (PVF)

El error promedio se puede ver mejor en la siguiente gráfica:

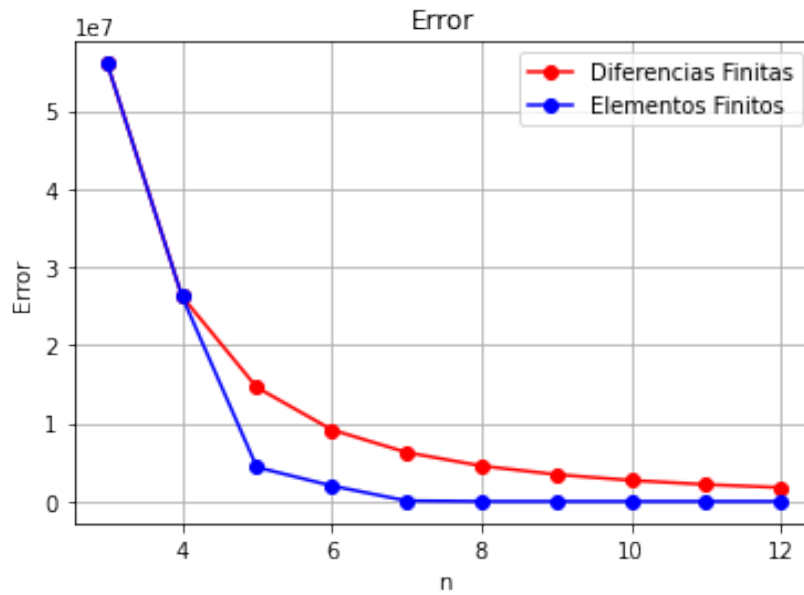


Figura 35: Error  $\bar{e}$  (PVF)



---

Parte IV

## Discusión y Análisis

1. ODEs de Primer Orden
2. ODEs de Orden Superior
3. Problemas de Valor de Frontera

---

Parte V

# Conclusiones

---

## Parte VI

# Referencias

- Material del curso, disponible en BlackBoard
- Bornemann, F., 2016. *Numerical linear algebra*. 1st ed. *Simson, W.*
- Mathews, J., Fink, K., Fernández Carrión, A. & Contreras Márquez, M., 2011. *Métodos Numéricos con MATLAB*. 3rd ed. Madrid: *Pearson Prentice Hall*.
- Librería Numpy
- Librería Pyplot (Matplotlib)
- Librería Time
- Librería Sympy