

# **LABORATORIO 5**

Unidad 6

Nicolás Delgado

Camila Paladines

## **Computación Científica**

Profesor: Hernán Darío Vargas Cardona, PhD

Junio 11 de 2021

# RESUMEN

En este informe se describen los resultados conseguidos al implementar algoritmos en Python para la obtención de respuestas a problemas matemáticos, como lo es el cómputo de la solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) bajo un Problema de Valor Inicial (PVI) y bajo un Problema de Valor de Frontera (PVF). Las EDOs de primer orden bajo un PVI son calculadas mediante los Métodos de Euler, Serie de Taylor, Runge-Kutta (orden 2 y 4), y Multipaso (2 y 4 pasos). Para las EDOs de orden superior se usa una estrategia de divide y conquista usando los métodos anteriormente mencionados. Las EDOs bajo un PVF son calculadas mediante el Método de Diferencias Finitas y el Método de Elementos Finitos (Colocación). Además, se realizan algunos análisis sobre los métodos utilizados aplicándolos a EDOs de diferente tipo, donde se observa su comportamiento dependiendo de diversos factores. También se calcula la complejidad computacional y la exactitud, con el fin de comparar los métodos y determinar cuál obtuvo mejores resultados para las EDOs usadas.

# ABSTRACT

This report describes the results achieved by implementing algorithms in Python to obtain answers to mathematical problems, such as the computation of the solution of an Ordinary Differential Equation (ODE) under an Initial Value Problem (IVP) and under a Boundary Value Problem (BVP). The first-order ODEs under a IVP are calculated using the Euler, Taylor Series, Runge-Kutta (order 2 and 4), and Multi-step (2 and 4 steps) Methods. A divide and conquer strategy using the above mentioned methods is used for the higher-order ODEs. The ODEs under a BVP are calculated using the Finite Difference Method and the Finite Element Method (Collocation). In addition, some analyses are performed on the methods used by applying them to ODEs of different types, where their behavior is observed depending on various factors. The computational complexity and accuracy are also calculated, in order to compare the methods and determine which one obtained better results for the ODEs used.

# Contenido

<b>I</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>II</b>	<b>Materiales y Métodos</b>	<b>2</b>
1.	Materiales	2
2.	Métodos	2
2.1.	Problemas de Valor Inicial . . . . .	2
2.2.	ODEs de Primer Orden . . . . .	3
2.2.1.	Método de Euler . . . . .	3
2.2.2.	Métodos de Serie de Taylor . . . . .	4
2.2.3.	Métodos de Runge-Kutta . . . . .	4
2.2.4.	Métodos Multi-Paso . . . . .	5
2.3.	ODEs de Orden Superior . . . . .	6
2.4.	Problemas de Valor de Frontera para ODEs . . . . .	6
2.4.1.	Método de Diferencias Finitas . . . . .	7
2.4.2.	Método de Elementos Finitos . . . . .	8
<b>III</b>	<b>Resultados de las Simulaciones</b>	<b>9</b>
1.	ODEs de Primer Orden	9
1.1.	Ejemplo 1 . . . . .	9
1.2.	Ejemplo 2 . . . . .	19
1.3.	Ejemplo 3 . . . . .	29
2.	ODEs de Orden Superior	39
3.	Problemas de Valor de Frontera	42

<b>IV</b>	<b>Discusión y Análisis</b>	<b>48</b>
<b>1.</b>	<b>ODEs de Primer Orden</b>	<b>48</b>
1.1.	Exactitud de los métodos . . . . .	48
1.2.	Complejidad computacional . . . . .	48
<b>2.</b>	<b>ODEs de Orden Superior</b>	<b>49</b>
2.1.	Exactitud de los métodos . . . . .	49
2.2.	Complejidad computacional . . . . .	49
<b>3.</b>	<b>Problemas de Valor de Frontera</b>	<b>50</b>
3.1.	Exactitud de los métodos . . . . .	50
3.2.	Complejidad computacional . . . . .	50
<b>V</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>51</b>
<b>VI</b>	<b>Referencias</b>	<b>52</b>

# Índice de Figuras

1.	M. Euler del Ejemplo 1 . . . . .	10
2.	M. Taylor del Ejemplo 1 . . . . .	11
3.	M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 1 . . . . .	12
4.	M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 1 . . . . .	13
5.	M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 1 . . . . .	14
6.	M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 1 . . . . .	15
7.	Métodos del Ejemplo 1 . . . . .	16
8.	Tiempo en el Ejemplo 1 . . . . .	17
9.	Error en el Ejemplo 1 . . . . .	18
10.	M. Euler del Ejemplo 2 . . . . .	20
11.	M. Taylor del Ejemplo 2 . . . . .	21
12.	M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 2 . . . . .	22
13.	M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 2 . . . . .	23
14.	M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 2 . . . . .	24
15.	M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 2 . . . . .	25
16.	Métodos del Ejemplo 2 . . . . .	26
17.	Tiempo en el Ejemplo 2 . . . . .	27
18.	Error en el Ejemplo 2 . . . . .	28
19.	M. Euler del Ejemplo 3 . . . . .	30
20.	M. Taylor del Ejemplo 3 . . . . .	31
21.	M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 3 . . . . .	32
22.	M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 3 . . . . .	33
23.	M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 3 . . . . .	34
24.	M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 3 . . . . .	35
25.	Métodos del Ejemplo 3 . . . . .	36
26.	Tiempo en el Ejemplo 3 . . . . .	37
27.	Error en el Ejemplo 3 . . . . .	38
28.	Ejemplo de ODEs de Orden Superior . . . . .	40

29.	Tiempo del Ejemplo de ODEs de Orden Superior . . . . .	41
30.	Error del Ejemplo de ODEs de Orden Superior . . . . .	41
31.	M. Diferencias Finitas (PVF) . . . . .	43
32.	M. Elementos Finitos (PVF) . . . . .	44
33.	Comparación de métodos (PVF) . . . . .	45
34.	Tiempo de ejecución (PVF) . . . . .	46
35.	Error $\bar{e}$ (PVF) . . . . .	47

## Índice de Tablas

1.	M. Euler del Ejemplo 1 . . . . .	9
2.	M. Taylor del Ejemplo 1 . . . . .	10
3.	M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 1 . . . . .	11
4.	M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 1 . . . . .	12
5.	M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 1 . . . . .	13
6.	M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 1 . . . . .	14
7.	Métodos del Ejemplo 1 . . . . .	15
8.	Tiempo en el Ejemplo 1 . . . . .	16
9.	Error ( $\bar{e}$ ) en el Ejemplo 1 . . . . .	17
10.	Error ( $\sigma_e$ ) en el Ejemplo 1 . . . . .	18
11.	M. Euler del Ejemplo 2 . . . . .	19
12.	M. Taylor del Ejemplo 2 . . . . .	20
13.	M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 2 . . . . .	21
14.	M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 2 . . . . .	22
15.	M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 2 . . . . .	23
16.	M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 2 . . . . .	24
17.	Métodos del Ejemplo 2 . . . . .	25
18.	Tiempo en el Ejemplo 2 . . . . .	26
19.	Error ( $\bar{e}$ ) en el Ejemplo 2 . . . . .	27
20.	Error ( $\sigma_e$ ) en el Ejemplo 2 . . . . .	28
21.	M. Euler del Ejemplo 3 . . . . .	29

22.	M. Taylor del Ejemplo 3 . . . . .	30
23.	M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 3 . . . . .	31
24.	M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 3 . . . . .	32
25.	M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 3 . . . . .	33
26.	M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 3 . . . . .	34
27.	Métodos del Ejemplo 3 . . . . .	35
28.	Tiempo en el Ejemplo 3 . . . . .	36
29.	Error ( $\bar{e}$ ) en el Ejemplo 3 . . . . .	37
30.	Error ( $\sigma_e$ ) en el Ejemplo 3 . . . . .	38
31.	Ejemplo de ODEs de Orden Superior . . . . .	39
32.	Estadísticas del Ejemplo de ODEs de Orden Superior . . . . .	40
33.	M. Diferencias Finitas (PVF) . . . . .	42
34.	Estadísticas de M. Elementos Finitos (PVF) . . . . .	43
35.	Polinomios de M. Elementos Finitos (PVF) . . . . .	44
36.	Comparación de métodos (PVF) . . . . .	44
37.	Tiempo de ejecución (PVF) . . . . .	45
38.	Error $\bar{e}$ (PVF) . . . . .	46
39.	Error $\sigma_e$ (PVF) . . . . .	47



---

## Parte I

# Introducción

La teoría de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias ha sido usada ampliamente en distintas áreas como la física, la biología y la ingeniería. Estas son de vital importancia a la hora de modelar procesos físicos, biológicos o técnicos. Dado que las ecuaciones diferenciales planteadas no necesariamente tienen una solución exacta o cerrada, es necesario hacer uso de métodos numéricos.

Notando la necesidad de usar esta teoría dentro de aplicaciones específicas de la vida real, se han implementado distintos métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias en un sistema computacional. Esto ha sido de gran importancia ya que la resolución de estos problemas de manera clásica suele ser bastante largo o complejo, lo que aumenta el tiempo en que se desarrolla y no se garantiza que el resultado esté completamente bien, debido al inherente error humano.

Para el cálculo de estas soluciones se han planteado diferentes métodos numéricos. En el caso de los Problemas de Valor Inicial, se ha hecho la distinción entre las EDOs de Primer Orden y las EDOs de Orden Superior. Para las EDOs de Primer Orden se encuentran los Métodos de Euler, Series de Taylor, Runge-Kutta (de orden 2 y 4) y Multipaso (2 y 4 pasos). Para las EDOs de Orden Superior se usa una estrategia de divide y vencerás empleando los métodos para EDOs de Primer Orden mencionados anteriormente. En el caso de los Problemas de Valor de Frontera se plantean los Métodos de Diferencias Finitas y Elementos Finitos. Estos métodos son implementados y evaluados en el presente laboratorio.

---

## Parte II

# Materiales y Métodos

### 1. Materiales

Para el desarrollo de esta unidad se usó Python 3.7, con las siguientes librerías:

- `numpy`, para funciones matemáticas como promedio, desviación estándar, resolución de sistemas de ecuaciones lineales, entre otros.
- `pyplot`, para graficar los resultados en el plano y las estadísticas de los métodos con respecto a su exactitud y tiempo de ejecución.
- `time`, para calcular los tiempos de cómputo de cada uno de los métodos en los Problemas de Valor Inicial y los Problemas de Valor de Frontera.
- `sympy`, para modelar las variables  $t$  y  $y$  dentro de las operaciones de los métodos.

### 2. Métodos

#### 2.1. Problemas de Valor Inicial

Una ecuación diferencial ordinaria (ODE)  $y' = f(t, y)$  no tiene una solución única. En general, hay una familia infinita de funciones que satisfacen la ecuación diferencial. Para encontrar una solución particular se debe especificar el valor denotado por  $y_0$  en algún punto  $t_0$ . Entonces, se requiere conocer:

$$y(t_0) = y_0$$

Esto se conoce como el problema de valor inicial. La ODE gobierna la evolución dinámica del sistema en el tiempo, desde su valor inicial  $y_0$  en el tiempo  $t_0$ . Lo que se busca es una función  $y(t)$  que describe el estado de un sistema como función del tiempo.

---

La solución analítica de una ODE es una función que se computa en cualquier punto  $t$ . Por el contrario, una solución numérica es una tabla de valores aproximados de la solución verdadera evaluados en un conjunto discreto de datos.

Los valores de la solución aproximada se generan paso a paso en incrementos discretos en el tiempo. Por esta razón, los métodos numéricos para resolver ODEs se conocen como métodos de variable discreta.

## 2.2. ODEs de Primer Orden

Las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden son aquellas que tienen la forma  $y' = f(t, y)$  y se pueden solucionar mediante los siguientes métodos numéricos.

### 2.2.1. Método de Euler

Se busca simular el comportamiento del sistema gobernado por la ODE. Empezando en  $t_0$  con el valor inicial dado  $y_0$ , se desea seguir la trayectoria dictada por la ODE. La evaluación de  $f(t_0, y_0)$  nos dice la pendiente o inclinación de la trayectoria en ese punto. Se usa esta información para predecir el valor  $y_1$  de la solución en el tiempo futuro  $t_1 = t_0 + h$ , siendo  $h$  un incremento adecuado. Considere la siguiente serie de Taylor:

$$\begin{aligned} y(t+h) &= y(t) + y'(t)h + \frac{y''(t)}{2!}h^2 + \dots + \\ &= y(t) + f(t, y(t))h + \frac{y''(t)}{2!}h^2 + \dots + \end{aligned}$$

El método de Euler elimina los términos de segundo orden y superior para obtener los valores de la solución aproximada:

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)h_k$$

---

Lo cual permite saltar del tiempo  $t_k$  a  $t_{k+1} = t_k + h_k$ . Equivalentemente, si se reemplaza la derivada en la ecuación diferencial  $y'(t) = f(t, y)$  por la representación en diferencias finitas, se obtiene una ecuación algebraica:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} = f(t_k, y_k)$$

### 2.2.2. Métodos de Serie de Taylor

Del método de Euler se obtiene de la expansión en series de Taylor. Si se toman más términos en la serie de Taylor, se pueden obtener más métodos de paso sencillo (*single-step*) para órdenes más altos. Por ejemplo, tomando un término adicional en la serie de Taylor:

$$y(t+h) = y(t) + y'(t)h + \frac{y''(t)}{2!}h^2 + \frac{y'''(t)}{3!}h^3 + \dots +$$

Se obtiene el método de segundo orden:

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h_k + \frac{y''_k}{2} h_k^2$$

Nótese que se requiere la segunda derivada de  $y''$ . Esto se puede obtener diferenciando  $y' = f(t, y)$  usando la regla de la cadena:

$$y'' = f_t(t, y) + f_y(t, y)y' = f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y)$$

### 2.2.3. Métodos de Runge-Kutta

Son métodos de paso sencillo que son similares a los métodos de serie de Taylor, pero no requieren la computación de derivadas de orden superior. En vez de eso, se simula el efecto de las derivadas superiores evaluando  $f$  varias veces entre  $t_k$  y  $t_{k+1}$ . La idea básica se ilustra por el método de *Runge-Kutta* de orden 2, conocido como el método de *Heun*.

---


$$f_t + f_{y_f} = \frac{f(t+h, y+h_f) - f(t, y)}{h}$$

Con esta aproximación, el método de Taylor de segundo orden se convierte a (el cual es de **exactitud de orden 2**):

$$y_{k+1} = y_k + \frac{f(t_k, y_k) + f(t_k + h_k, y_k + h_{k_f}(t_k, y_k))}{2} h_k$$

El método de Runge-Kutta mejor conocido y más empleado es el ***esquema clásico de orden 4***:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

donde:

- $k_1 = f(t_k, y_k)h_k,$
- $k_2 = f(t_k + \frac{h_k}{2}, y_k + \frac{k_1}{2})h_k,$
- $k_3 = f(t_k + \frac{h_k}{2}, y_k + \frac{k_2}{2})h_k,$
- $k_4 = f(t_k + h_k, y_k + k_3)h_k.$

#### 2.2.4. Métodos Multi-Paso

Estos métodos usan información en más de un punto previo para estimar la solución en el siguiente. Por esta razón, a veces se conocen como métodos con memoria. Los métodos lineales *multi-paso* tienen la siguiente forma general:

$$y_{k+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_{k+1-i} + h \sum_{i=0}^n \beta_i f(t_{k+1}, y_{k+1-i})$$

Los parámetros  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  se determinan con interpolación polinómica. Si  $\beta_0 = 0$ , el método es explícito, de lo contrario es implícito. La fórmula explícita del método de dos pasos es:

---


$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}(3y'_k - y'_{k-1})h$$

Uno de los métodos multi-paso más populares es el método explícito de cuarto orden de *Adams-Bashforth*:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{24} \left( 55y'_k - 59y'_{k-1} + 37y'_{k-2} - 9y'_{k-3} \right) h$$

### 2.3. ODEs de Orden Superior

Las ecuaciones diferenciales de orden superior ocurren frecuentemente en la práctica, pero pueden ser transformadas a un sistema equivalente de primer orden de la siguiente manera:

$$u^{(n)} = f(t, u, u', \dots, u^{(n-1)})$$

La ecuación de orden  $n$ -ésimo define las  $n$  nuevas incógnitas  $y_1(t) = u$ ,  $y_2(t) = u'$ ,  $\dots$ ,  $y_n(t) = u^{(n-1)}$ , tal que la ecuación original se convierte en un sistema de primer orden con  $n$  ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_{n-1} \\ y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ f(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}) \end{bmatrix}$$

**Nota:** para el presente laboratorio se usó el Método de Euler para solucionar cada una de las ecuaciones del sistema.

### 2.4. Problemas de Valor de Frontera para ODEs

Un problema de valor de frontera (PVF) para una ODE especifica más de un punto en el cual la solución o sus derivadas deben tener valores dados. Por ejemplo, un PVF para una ODE de segundo orden tiene la forma:

---


$$y'' = f(t, y, y'), \quad a \leq t \leq b,$$

con condiciones de frontera:

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

En general, para hallar la solución particular, deben existir tantas condiciones como el orden de la ODE.

Si todas las condiciones se especifican en un mismo punto, entonces tenemos un problema de valor inicial (PVI), de lo contrario tenemos un (PVF).

Por ejemplo, un PVF para un sistema de dos ODE de primer orden tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, y) \\ f_2(t, y) \end{bmatrix}, \quad a \leq t \leq b$$

Con C.F:  $y_1(a) = \alpha, y_1(b) = \beta$ .

#### 2.4.1. Método de Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas convierte los PVF en sistemas de ecuaciones algebraicas, reemplazando algunas derivadas por aproximaciones con diferencias finitas. Por ejemplo, para resolver un PVF de dos puntos:

$$y'' = f(t, y, y'), \quad a \leq t \leq b,$$

con CF:  $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$ . Primero se divide el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos igualmente espaciados. Sea  $t_i = a + ih, i = 0, 1, 2, \dots, n$ , donde  $h = \frac{b-a}{n}$ . Se busca una aproximación  $y_i \approx y(t_i)$  en cada uno de los puntos de la malla dados por  $t_i$ .

Ya tenemos  $y_0 = \alpha$  y  $y_n = \beta$ . Ahora reemplazamos las derivadas con aproximaciones de diferencias finitas:

---


$$y'(t_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''(t_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Este reemplazo lleva al siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - h^2 f(t_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}) = 0$$

El cual debe ser resuelto para las incógnitas  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ . El sistema de ecuaciones puede ser lineal o no, dependiendo de que  $f$  sea lineal en  $y$  y  $y'$ .

#### 2.4.2. Método de Elementos Finitos

Este método aproxima la solución de un PVF a una combinación lineal de funciones base  $\phi_i$ , típicamente monomios. La aproximación tiene la forma:

$$y(t) \approx u(t) = \sum_{i=1}^n x_i \phi_i(t)$$

Los coeficientes  $x_i$  están determinados mediante la imposición de requerimientos del residuo, que se define como la diferencia entre el lado izquierdo y derecho de la ODE. En este laboratorio se usa el Método de Colocación en la que el residuo es cero, y la ODE se satisface exactamente en los  $n$  puntos discretos.



---

## Parte III

# Resultados de las Simulaciones

## 1. ODEs de Primer Orden

### 1.1. Ejemplo 1

Para la Ecuación Diferencial Ordinaria  $y'$  que se muestra a continuación:

$$y' = 3 \cos(t) - 2y$$

Su solución analítica  $y$  es la siguiente:

$$y = \frac{3 \sin(t) + 6 \cos(t)}{5}$$

En las siguientes seis secciones se muestran, para cada método, los resultados obtenidos con distintos valores de  $h$ , así como las estadísticas de tiempo y exactitud. Las condiciones iniciales son  $t_0 = 5$  y  $y_0 = -0,235$ , obteniendo los puntos hasta  $t_f = 8$ . En las otras dos secciones se muestra más a detalle los resultados de los métodos en cuanto a tiempo y exactitud, respecto de los diferentes valores de  $h$ .

#### Método de Euler

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

<b>h</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b>	<b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b>
0.09375	0.0019156933	0.0176727560	0.0101816776
0.1875	0.0016105175	0.0364801957	0.0202793172
0.375	0.0014901161	0.0778160043	0.0396400737
0.75	0.0013921261	0.1695661406	0.0919998050

Cuadro 1: M. Euler del Ejemplo 1

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

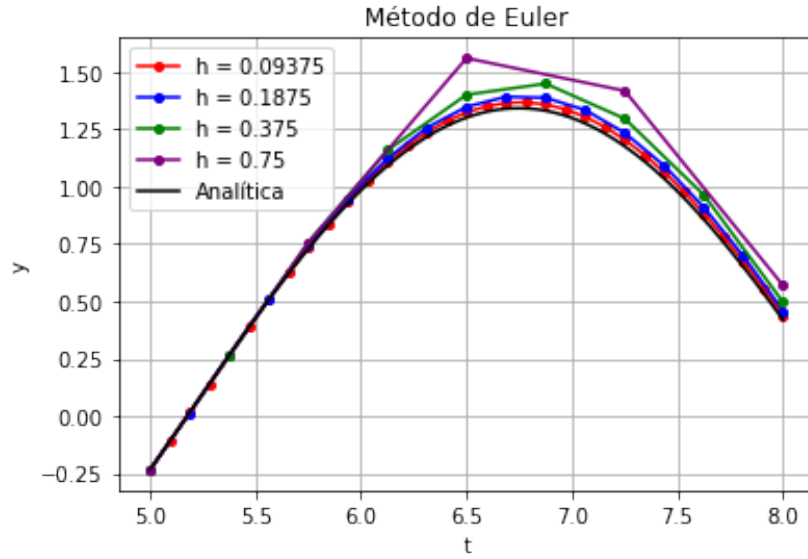


Figura 1: M. Euler del Ejemplo 1

### Método de Series de Taylor

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

<b>h</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b>	<b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b>
0.09375	0.0063250065	0.0004971789	0.0002422959
0.1875	0.0081012249	0.0022513135	0.0010797204
0.375	0.0037639141	0.0117541642	0.0052653051
0.75	0.0038151741	0.0775772782	0.0437234718

Cuadro 2: M. Taylor del Ejemplo 1

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

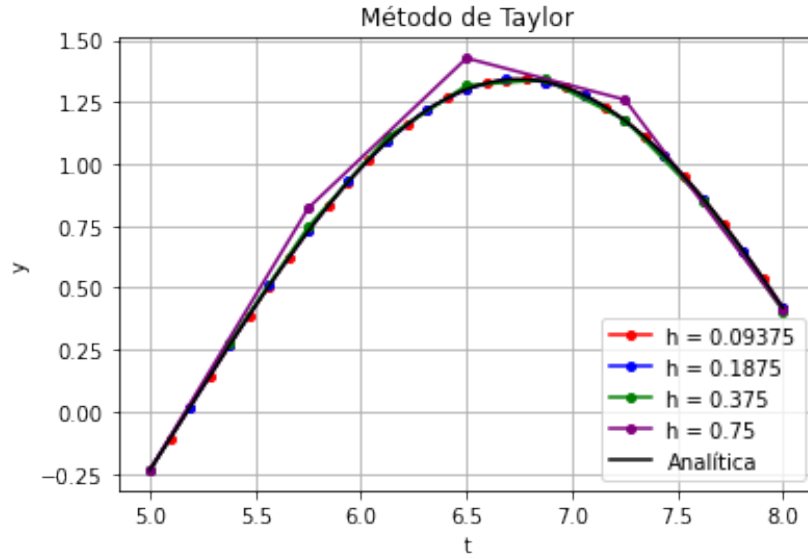


Figura 2: M. Taylor del Ejemplo 1

### Método de Runge-Kutta (orden 2)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

<b>h</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b>	<b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b>
0.09375	0.0022044182	0.0019106231	0.0009632318
0.1875	0.0017294884	0.0085298834	0.0042064975
0.375	0.0015897751	0.0434847115	0.0208508756
0.75	0.0016293526	0.3065913720	0.1554623900

Cuadro 3: M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 1

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

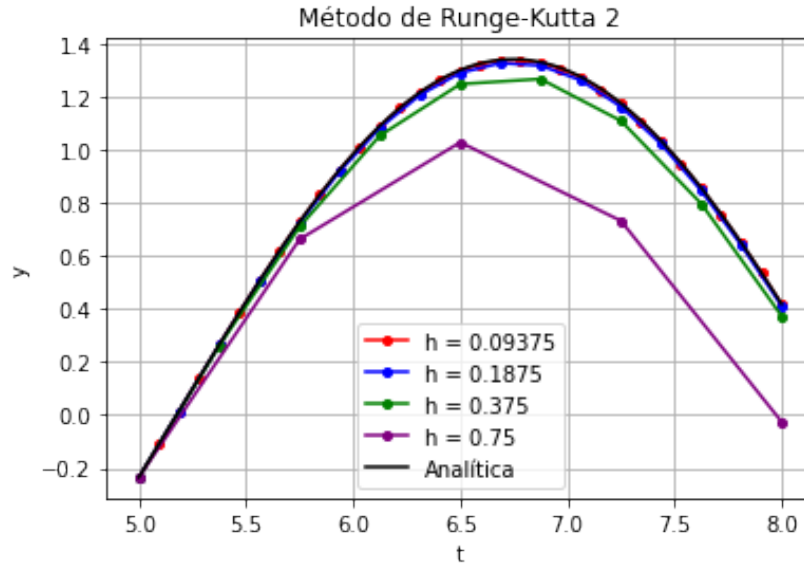


Figura 3: M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 1

#### Método de Runge-Kutta (orden 4)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

<b>h</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b>	<b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b>
0.09375	0.0022711754	0.0000026629	0.0000013599
0.1875	0.0018808842	0.0000466924	0.0000236822
0.375	0.0016026497	0.0008898514	0.0004507352
0.75	0.0014693737	0.0200273144	0.0106579426

Cuadro 4: M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 1

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

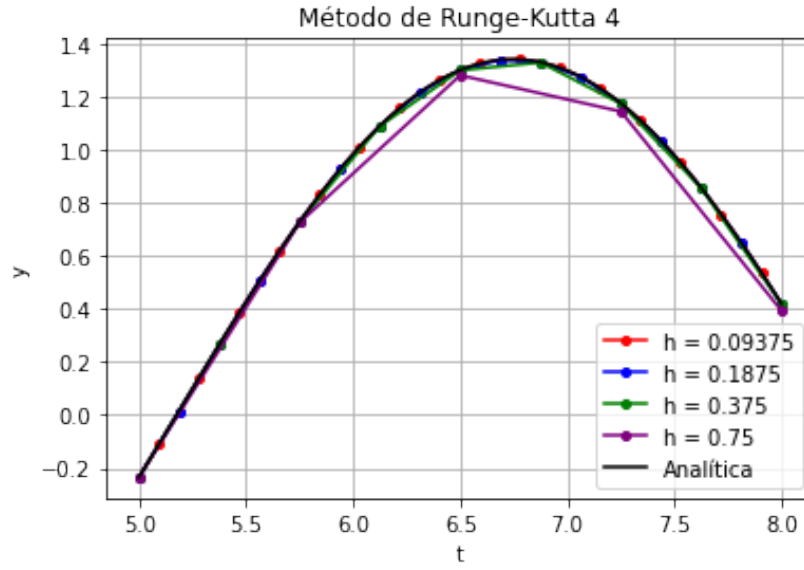


Figura 4: M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 1

### Método Multipaso (2 pasos)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

<b>h</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b>	<b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b>
0.09375	0.0034122467	0.0010617521	0.0005586362
0.1875	0.0029389858	0.0040973854	0.0022293552
0.375	0.0029447079	0.0152991184	0.0095019804
0.75	0.0031647682	0.1695524114	0.1039255813

Cuadro 5: M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 1

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

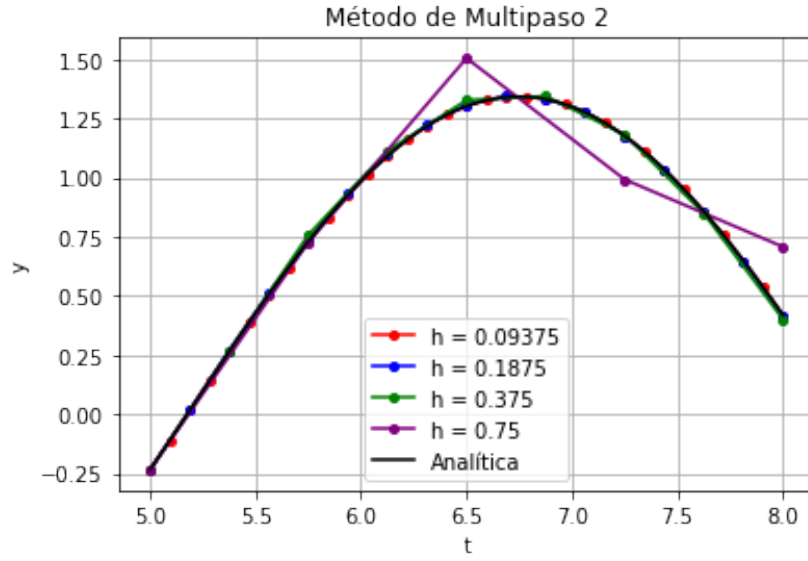


Figura 5: M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 1

#### Método Multipaso (4 pasos)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

$h$	Tiempo	Error ( $\bar{e}$ )	Error ( $\sigma_e$ )
0.09375	0.0039045811	0.0000069565	0.0000042228
0.1875	0.0032472610	0.0001012118	0.0000735813
0.375	0.0029766560	0.0033411032	0.0035970873
0.75	0.0028731823	0.0186775538	0.0100994357

Cuadro 6: M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 1

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

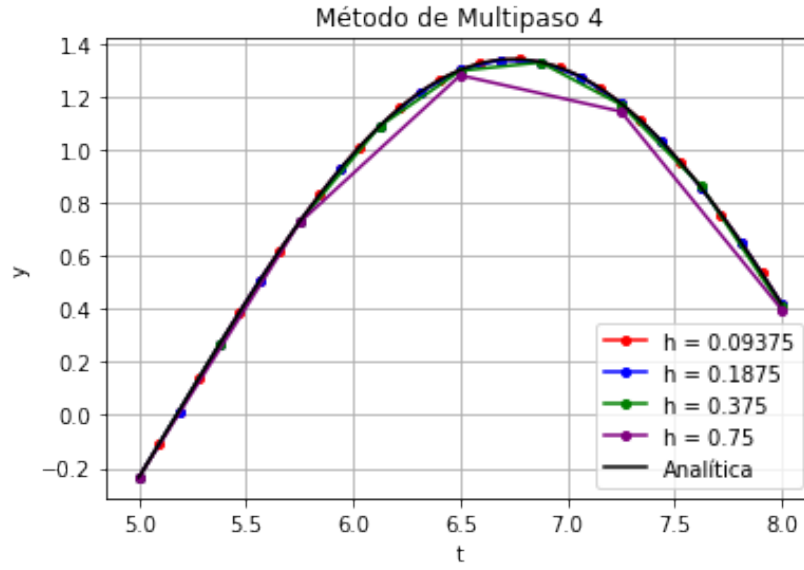


Figura 6: M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 1

### Comparación de los métodos

En la siguiente tabla se puede observar las estadísticas obtenidas por cada método, con  $h = 0,75$ :

Método	Tiempo	Error ( $\bar{e}$ )	Error ( $\sigma_e$ )
Euler	0.0013921261	0.1695661406	0.0919998050
Taylor	0.0038151741	0.0775772782	0.0437234718
Runge-Kutta 2	0.0016293526	0.3065913720	0.1554623900
Runge-Kutta 4	0.0014693737	0.0200273144	0.0106579426
Multipaso 2	0.0031647682	0.1695524114	0.1039255813
Multipaso 4	0.0028731823	0.0186775538	0.0100994357

Cuadro 7: Métodos del Ejemplo 1

Que se puede observar en la siguiente gráfica:

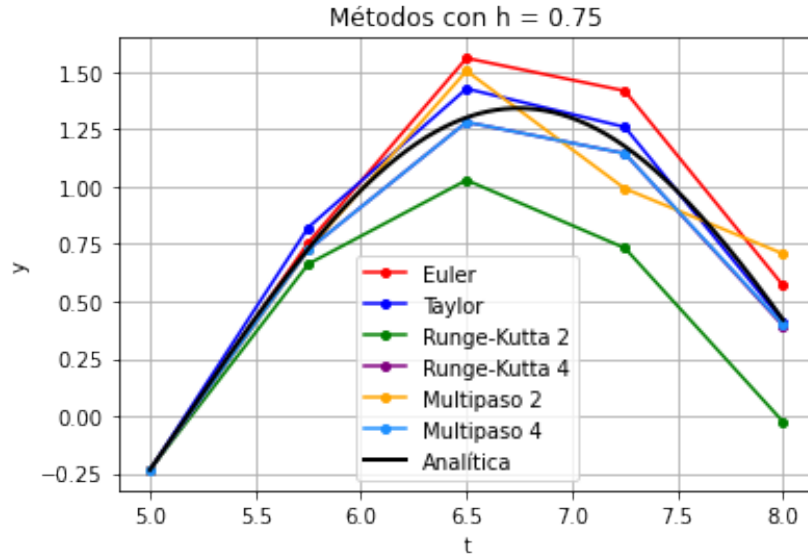


Figura 7: Métodos del Ejemplo 1

### Tiempo de ejecución

En la siguiente tabla se puede observar el tiempo de ejecución de cada uno de los métodos con respecto al valor de  $h$  (R-K es Runge-Kutta y MP es Multipaso).

$h$	Euler	Taylor	R-K 2	R-K 4	MP 2	MP 4
0.1	0.0016	0.0041	0.00156	0.00170	0.00283	0.00300
0.2	0.0014	0.0034	0.00143	0.00147	0.00265	0.00317
0.3	0.0016	0.0036	0.00142	0.00172	0.00280	0.00285
0.4	0.0014	0.0034	0.00139	0.00142	0.00271	0.00277
0.5	0.0014	0.0035	0.00138	0.00142	0.00272	0.00263
0.6	0.0014	0.0034	0.00137	0.00138	0.00284	0.00271
0.7	0.0015	0.0039	0.00136	0.00139	0.00259	0.00273
0.8	0.0016	0.0039	0.00148	0.00148	0.00265	0.00276
0.9	0.0014	0.0035	0.00137	0.00135	0.00267	0.00258
1.0	0.0014	0.0034	0.00143	0.00137	0.00265	0.00267

Cuadro 8: Tiempo en el Ejemplo 1

Que se puede ver mejor en la siguiente gráfica:



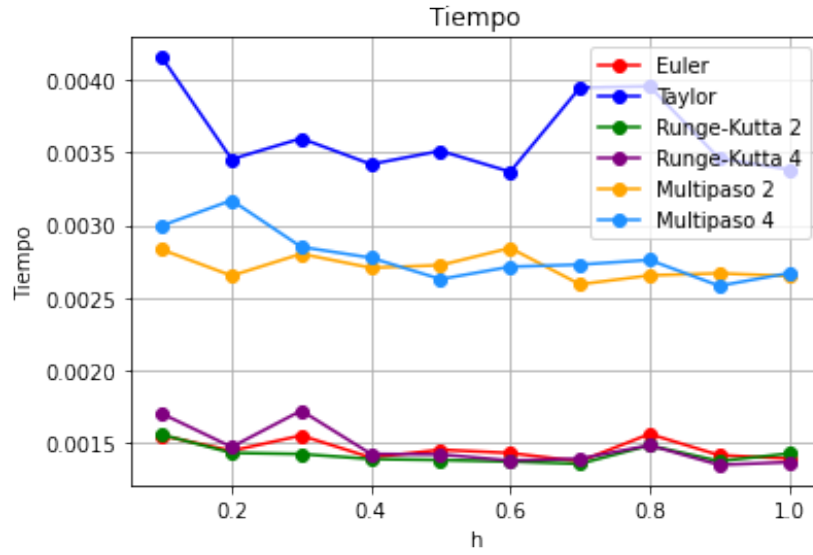


Figura 8: Tiempo en el Ejemplo 1

### Exactitud

En las siguientes tablas se pueden observar el error promedio ( $\bar{e}$ ) y la desviación del error ( $\sigma_e$ ) de cada uno de los métodos con respecto al valor de  $h$  (R-K es Runge-Kutta y MP es Multipaso).

h	Euler	Taylor	R-K 2	R-K 4	MP 2	MP 4
0.1	0.01889	0.00058	0.00217	0.00000	0.00123	0.00001
0.2	0.03910	0.00261	0.00985	0.00006	0.00464	0.00016
0.3	0.05875	0.00707	0.02428	0.00033	0.01066	0.00218
0.4	0.08136	0.01396	0.05030	0.00116	0.01764	0.00515
0.5	0.10639	0.02421	0.09254	0.00315	0.02731	0.00588
0.6	0.10943	0.04485	0.14527	0.00649	0.07060	0.01275
0.7	0.13325	0.06474	0.24211	0.01360	0.18273	0.01647
0.8	0.17324	0.09591	0.38216	0.02691	0.23929	0.02306
0.9	0.16711	0.13977	0.58115	0.04516	0.45284	0.03729
1.0	0.21507	0.25353	0.77698	0.08060	0.46150	0.08060

Cuadro 9: Error ( $\bar{e}$ ) en el Ejemplo 1

---

<b>h</b>	<b>Euler</b>	<b>Taylor</b>	<b>R-K 2</b>	<b>R-K 4</b>	<b>MP 2</b>	<b>MP 4</b>
0.1	0.01068	0.00028	0.00109	0.00000	0.00063	0.00001
0.2	0.02157	0.00123	0.00485	0.00003	0.00253	0.00011
0.3	0.03097	0.00316	0.01193	0.00017	0.00607	0.00274
0.4	0.04186	0.00674	0.02395	0.00058	0.01187	0.00601
0.5	0.05556	0.01258	0.04425	0.00161	0.02274	0.00609
0.6	0.07881	0.01756	0.07207	0.00368	0.05005	0.01021
0.7	0.09479	0.03269	0.11327	0.00732	0.14482	0.00810
0.8	0.10375	0.04926	0.18962	0.01407	0.15382	0.01427
0.9	0.14641	0.06913	0.28131	0.02447	0.33543	0.02930
1.0	0.19962	0.04960	0.44768	0.04649	0.37992	0.04649

Cuadro 10: Error ( $\sigma_e$ ) en el Ejemplo 1

El error promedio se puede ver mejor en la siguiente gráfica:



Figura 9: Error en el Ejemplo 1

---

## 1.2. Ejemplo 2

Para la Ecuación Diferencial Ordinaria  $y'$  que se muestra a continuación:

$$y' = 2t^3 - 5t^2$$

Su solución analítica  $y$  es la siguiente:

$$y = \frac{t^4}{2} - \frac{5t^3}{3}$$

En las siguientes seis secciones se muestran, para cada método, los resultados obtenidos con distintos valores de  $h$ , así como las estadísticas de tiempo y exactitud. Las condiciones iniciales son  $t_0 = -15$  y  $y_0 = 30937,5$ , obteniendo los puntos hasta  $t_f = 20$ . En las otras dos secciones se muestra más a detalle los resultados de los métodos en cuanto a tiempo y exactitud, respecto de los diferentes valores de  $h$ .

### Método de Euler

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

<b>h</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b>	<b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b>
1.09375	0.0019016266	5138.9391720295	2390.0818302676
2.1875	0.0016860962	10824.5078722636	4882.6836016416
4.375	0.0017225742	23815.4983520508	10095.1742362803
8.75	0.0015542507	55976.3590494792	20690.8276511253

Cuadro 11: M. Euler del Ejemplo 2

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

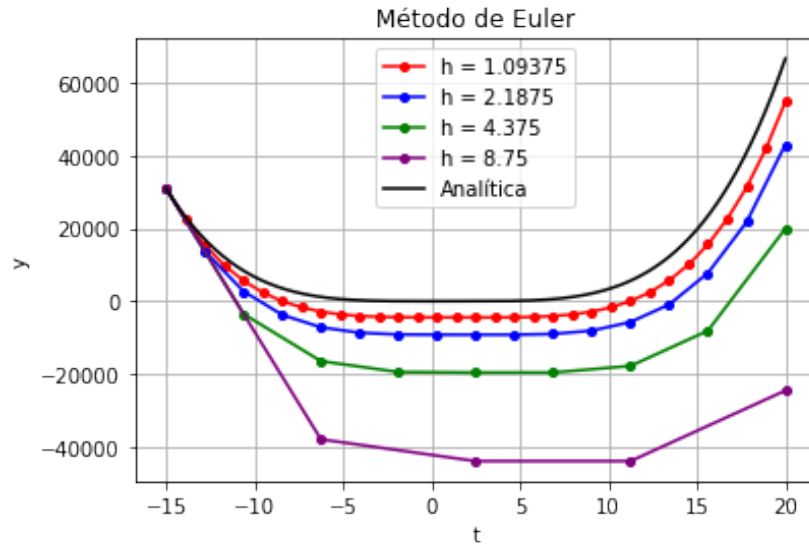


Figura 10: M. Euler del Ejemplo 2

### Método de Series de Taylor

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

<b>h</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b>	<b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b>
1.09375	0.0050203800	196.8986727297	95.3960868920
2.1875	0.0033574104	821.7964569728	395.4293467424
4.375	0.0031280518	3606.9361368815	1610.3515534013
8.75	0.0031075478	16399.1292317708	8227.6526322845

Cuadro 12: M. Taylor del Ejemplo 2

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

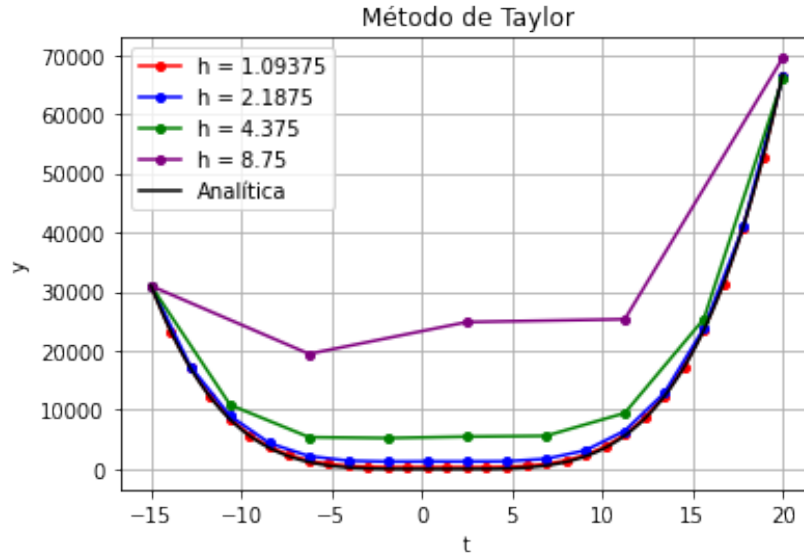


Figura 11: M. Taylor del Ejemplo 2

### Método de Runge-Kutta (orden 2)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

h	Tiempo	Error ( $\bar{e}$ )	Error ( $\sigma_e$ )
1.09375	0.0020093918	94.6873550614	46.0107647129
2.1875	0.0019066334	384.4227393468	176.6153537555
4.375	0.0015735626	1574.4908650716	671.1706585695
8.75	0.0015466213	6769.0022786458	1955.1845394124

Cuadro 13: M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 2

Los puntos calculados en cada valor de h se pueden ver en la siguiente gráfica:

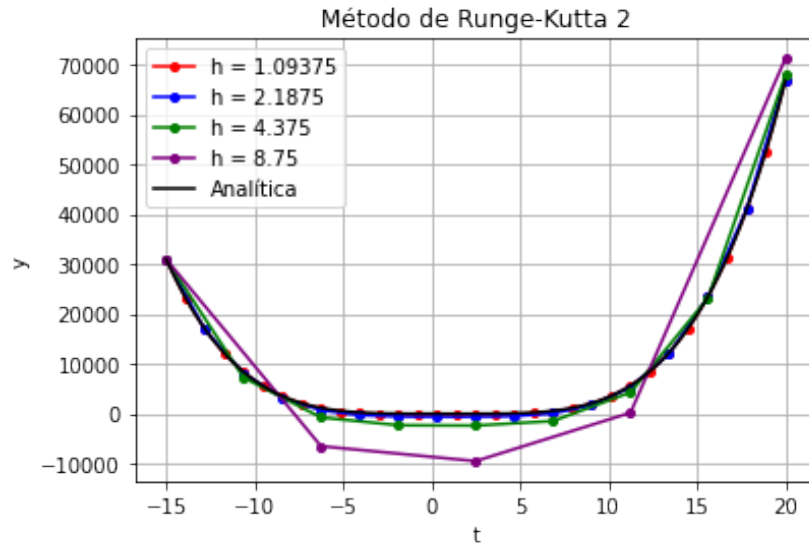


Figura 12: M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 2

#### Método de Runge-Kutta (orden 4)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

h	Tiempo	Error ( $\bar{e}$ )	Error ( $\sigma_e$ )
1.09375	0.0040440559	0.0000000000	0.0000000000
2.1875	0.0017249584	0.0000000000	0.0000000000
4.375	0.0016691685	0.0000000000	0.0000000000
8.75	0.0016636848	0.0000000000	0.0000000000

Cuadro 14: M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 2

Los puntos calculados en cada valor de h se pueden ver en la siguiente gráfica:

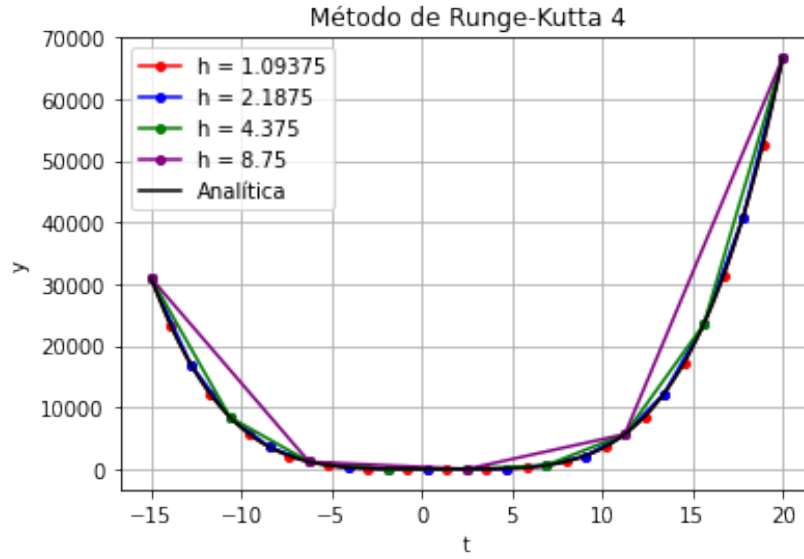


Figura 13: M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 2

#### Método Multipaso (2 pasos)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

<b>h</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b>	<b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b>
1.09375	0.0051748753	434.2687254151	227.5641519332
2.1875	0.0030207634	1609.7233692805	872.0484186490
4.375	0.0027425289	5510.7180277507	3145.1548118927
8.75	0.0027308464	14654.5410156250	11080.8684814338

Cuadro 15: M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 2

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

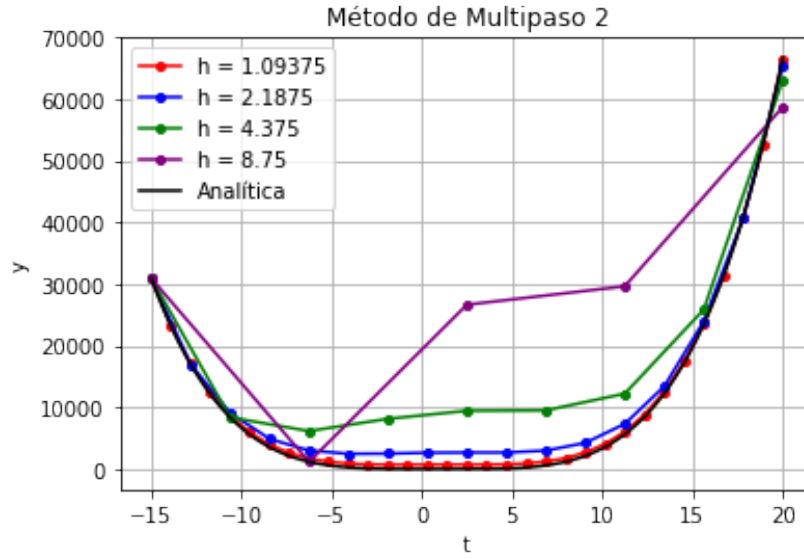


Figura 14: M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 2

#### Método Multipaso (4 pasos)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

h	Tiempo	Error ( $\bar{e}$ )	Error ( $\sigma_e$ )
1.09375	0.0043046474	0.0000000000	0.0000000000
2.1875	0.0032670498	0.0000000000	0.0000000000
4.375	0.0032994747	0.0000000000	0.0000000000
8.75	0.0030906200	0.0000000000	0.0000000000

Cuadro 16: M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 2

Los puntos calculados en cada valor de h se pueden ver en la siguiente gráfica:



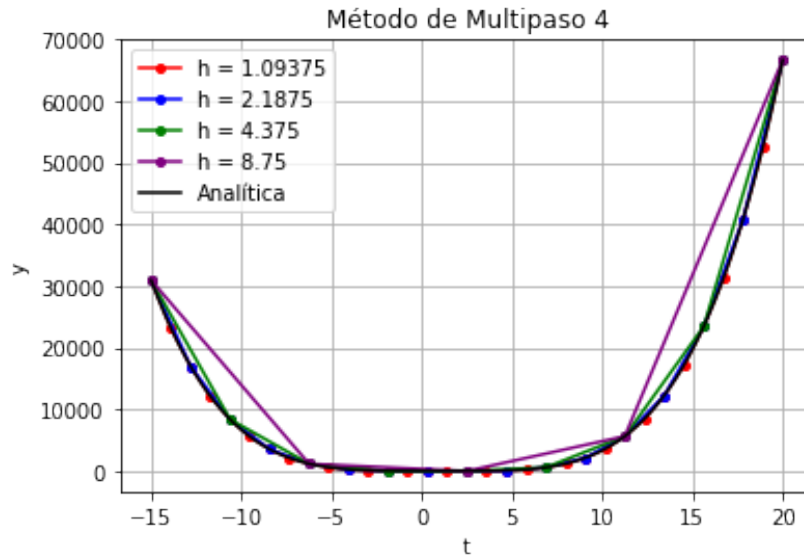


Figura 15: M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 2

### Comparación de los métodos

En la siguiente tabla se puede observar las estadísticas obtenidas por cada método, con  $h = 8,75$ :

Método	Tiempo	Error ( $\bar{e}$ )	Error ( $\sigma_e$ )
Euler	0.0015542507	55976.3590494792	20690.8276511253
Taylor	0.0031075478	16399.1292317708	8227.6526322845
Runge-Kutta 2	0.0015466213	6769.0022786458	1955.1845394124
Runge-Kutta 4	0.0016636848	0.0000000000	0.0000000000
Multipaso 2	0.0027308464	14654.5410156250	11080.8684814338
Multipaso 4	0.0030906200	0.0000000000	0.0000000000

Cuadro 17: Métodos del Ejemplo 2

Que se puede observar en la siguiente gráfica:

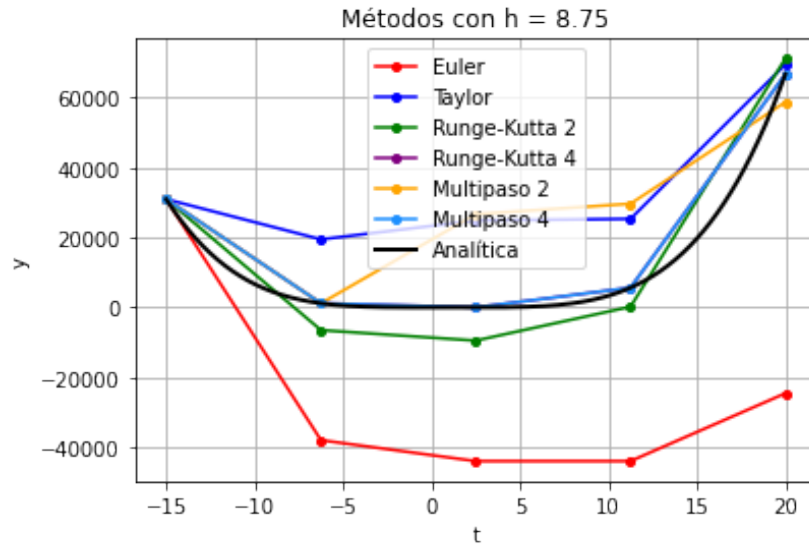


Figura 16: Métodos del Ejemplo 2

### Tiempo de ejecución

En la siguiente tabla se puede observar el tiempo de ejecución de cada uno de los métodos con respecto al valor de  $h$  (R-K es Runge-Kutta y MP es Multipaso).

$h$	Euler	Taylor	R-K 2	R-K 4	MP 2	MP 4
0.1	0.00192	0.00641	0.00223	0.00271	0.00384	0.00396
0.2	0.00163	0.00332	0.00165	0.00206	0.00307	0.00320
0.3	0.00157	0.00328	0.00171	0.00182	0.00305	0.00340
0.4	0.00160	0.00381	0.00163	0.00164	0.00356	0.00332
0.5	0.00152	0.00349	0.00157	0.00191	0.00288	0.00321
0.6	0.00152	0.00348	0.00147	0.00177	0.00284	0.00313
0.7	0.00142	0.00335	0.00148	0.00249	0.00286	0.00293
0.8	0.00161	0.00314	0.00148	0.00152	0.00281	0.00290
0.9	0.00149	0.00308	0.00151	0.00187	0.00294	0.00293
1.0	0.00143	0.00325	0.00143	0.00149	0.00279	0.00293

Cuadro 18: Tiempo en el Ejemplo 2

Que se puede ver mejor en la siguiente gráfica:

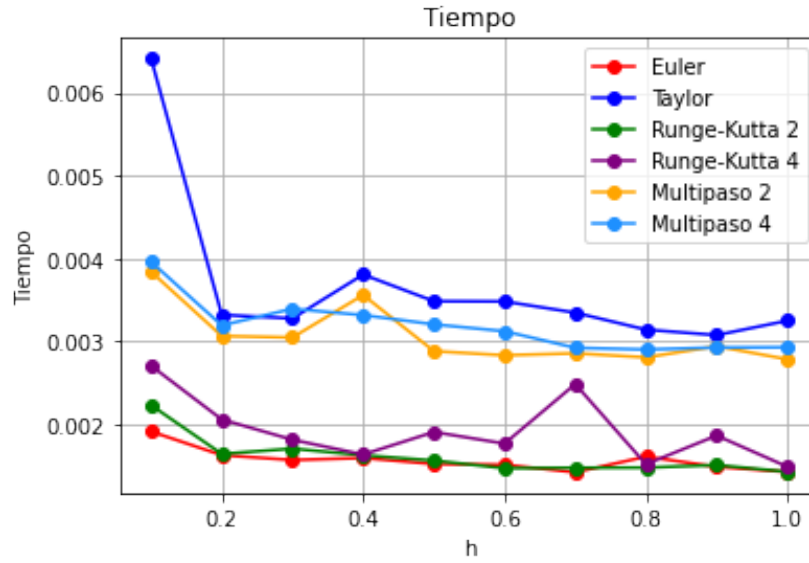


Figura 17: Tiempo en el Ejemplo 2

### Exactitud

En las siguientes tablas se pueden observar el error promedio ( $\bar{e}$ ) y la desviación del error ( $\sigma_e$ ) de cada uno de los métodos con respecto al valor de  $h$  (R-K es Runge-Kutta y MP es Multipaso).

h	Euler	Taylor	R-K 2	R-K 4	MP 2	MP 4
0.1	448.95547	1.57206	0.78328	0.00000	3.88579	0.00000
0.2	906.31080	6.31310	3.13485	0.00000	15.43019	0.00000
0.3	1360.66095	14.27771	7.06529	0.00000	34.50210	0.00000
0.4	1831.07413	25.48441	12.56737	0.00000	60.89440	0.00000
0.5	2281.24479	40.05104	19.68021	0.00000	94.60313	0.00000
0.6	2797.84800	57.79574	28.32407	0.00000	135.02612	0.00000
0.7	3322.95297	78.92766	38.58817	0.00000	182.59201	0.00000
0.8	3735.93600	103.74206	50.51345	0.00000	237.00635	0.00000
0.9	4206.08700	132.04246	64.00246	0.00000	298.10274	0.00000
1.0	4677.00000	163.80000	79.16190	0.00000	365.38095	0.00000

Cuadro 19: Error ( $\bar{e}$ ) en el Ejemplo 2

---

h	Euler	Taylor	R-K 2	R-K 4	MP 2	MP 4
0.1	216.35640	0.78854	0.39277	0.00000	1.96248	0.00000
0.2	438.92901	3.15426	1.56498	0.00000	7.81325	0.00000
0.3	652.10559	7.11505	3.51575	0.00000	17.54241	0.00000
0.4	881.99695	12.64428	6.22764	0.00000	31.03589	0.00000
0.5	1078.77029	19.83140	9.72520	0.00000	48.44060	0.00000
0.6	1361.68240	28.44920	13.89857	0.00000	69.26685	0.00000
0.7	1651.58577	38.61963	18.78496	0.00000	93.36928	0.00000
0.8	1780.14484	50.91188	24.61845	0.00000	122.49490	0.00000
0.9	1982.75127	64.44596	31.16454	0.00000	154.52903	0.00000
1.0	2180.94770	79.87611	38.36569	0.00000	190.85825	0.00000

Cuadro 20: Error ( $\sigma_e$ ) en el Ejemplo 2

El error promedio se puede ver mejor en la siguiente gráfica:

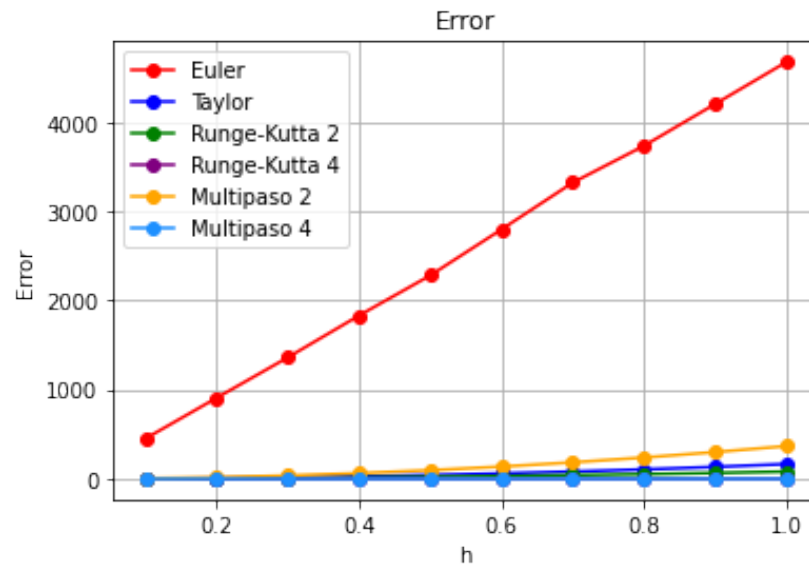


Figura 18: Error en el Ejemplo 2

---

### 1.3. Ejemplo 3

Para la Ecuación Diferencial Ordinaria  $y'$  que se muestra a continuación:

$$y' = 2t \cos(t^2) - 3 \cos(t)$$

Su solución analítica  $y$  es la siguiente:

$$y = \sin(t^2) - 3 \sin(t)$$

En las siguientes seis secciones se muestran, para cada método, los resultados obtenidos con distintos valores de  $h$ , así como las estadísticas de tiempo y exactitud. Las condiciones iniciales son  $t_0 = 2$  y  $y_0 = -3,484$ , obteniendo los puntos hasta  $t_f = 3$ . En las otras dos secciones se muestra más a detalle los resultados de los métodos en cuanto a tiempo y exactitud, respecto de los diferentes valores de  $h$ .

#### Método de Euler

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

<b>h</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b>	<b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b>
0.03125	0.0022428036	0.0778382886	0.0464068001
0.0625	0.0028591156	0.1580991076	0.0926136231
0.125	0.0019698143	0.3248936779	0.1868208324
0.25	0.0017974377	0.6611583257	0.4262467127

Cuadro 21: M. Euler del Ejemplo 3

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

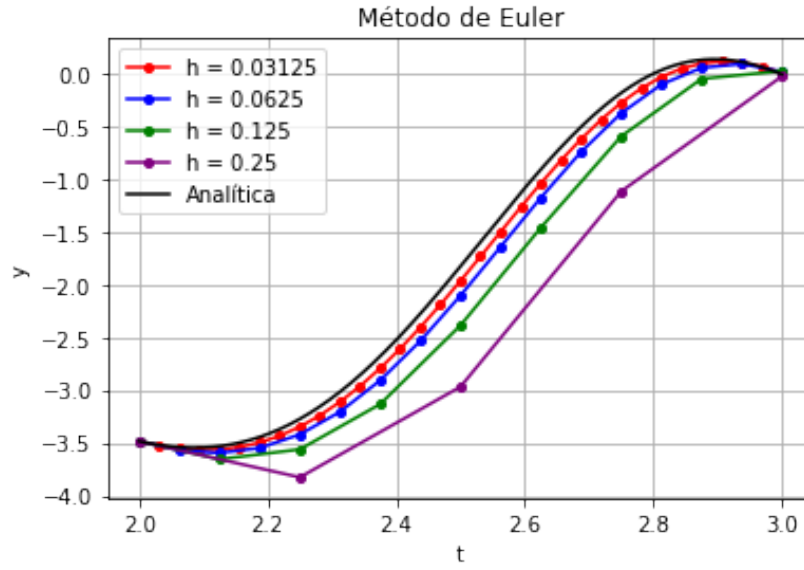


Figura 19: M. Euler del Ejemplo 3

### Método de Series de Taylor

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

<b>h</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b>	<b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b>
0.03125	0.0050234795	0.0031749372	0.0025350499
0.0625	0.0043566227	0.0128072994	0.0099088557
0.125	0.0042567253	0.0523840592	0.0376728700
0.25	0.0045228004	0.2170149578	0.1437226917

Cuadro 22: M. Taylor del Ejemplo 3

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

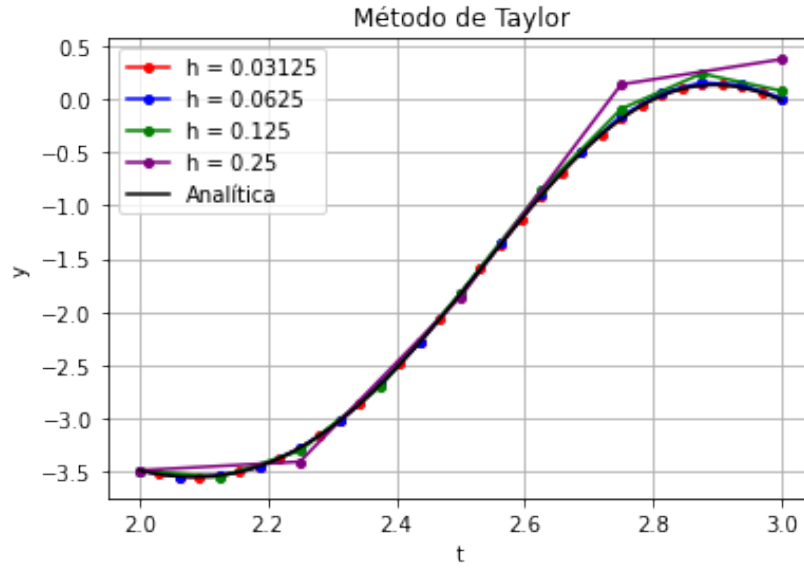


Figura 20: M. Taylor del Ejemplo 3

### Método de Runge-Kutta (orden 2)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

<b>h</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b>	<b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b>
0.03125	0.0023250580	0.0016116691	0.0012872542
0.0625	0.0020723343	0.0065878346	0.0051008918
0.125	0.0020112991	0.0275097978	0.0198280550
0.25	0.0018315315	0.1172724660	0.0742926698

Cuadro 23: M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 3

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

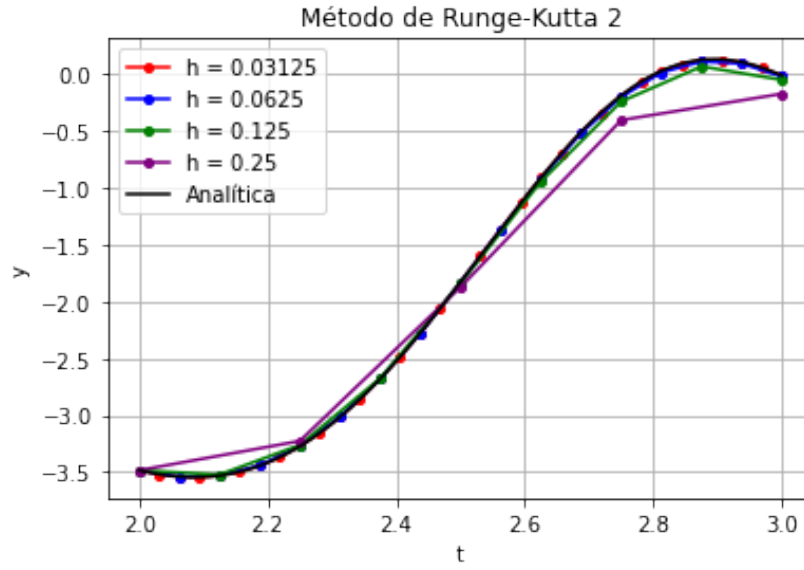


Figura 21: M. Runge-Kutta (orden 2) del Ejemplo 3

#### Método de Runge-Kutta (orden 4)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

<b>h</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b>	<b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b>
0.03125	0.0026671886	0.0000001745	0.0000001256
0.0625	0.0021915436	0.0000028726	0.0000020026
0.125	0.0019996166	0.0000489267	0.0000311142
0.25	0.0018181801	0.0008969483	0.0004236477

Cuadro 24: M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 3

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:



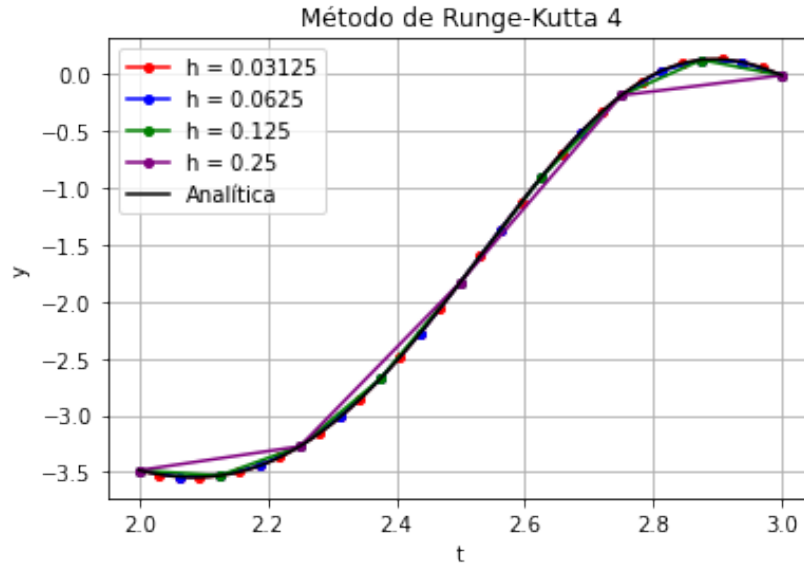


Figura 22: M. Runge-Kutta (orden 4) del Ejemplo 3

### Método Multipaso (2 pasos)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

<b>h</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b>	<b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b>
0.03125	0.0055129528	0.0078810668	0.0067174293
0.0625	0.0035493374	0.0314955695	0.0278003852
0.125	0.0056204796	0.1267943580	0.1169315525
0.25	0.0043263435	0.4937473018	0.5230285527

Cuadro 25: M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 3

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

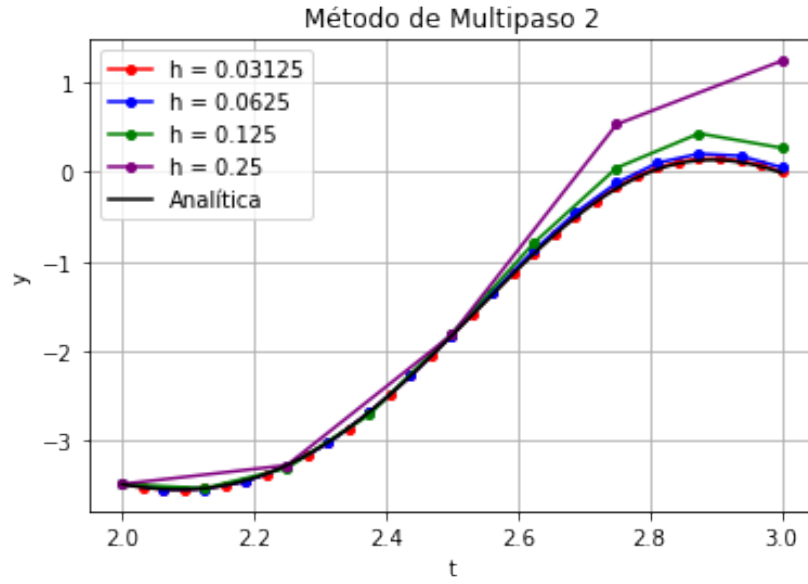


Figura 23: M. Multipaso (2 pasos) del Ejemplo 3

#### Método Multipaso (4 pasos)

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

<b>h</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b>	<b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b>
0.03125	0.0042483807	0.0001547190	0.0001398299
0.0625	0.0056202412	0.0021982635	0.0023739276
0.125	0.0033249855	0.0269571614	0.0377417527
0.25	0.0032303333	0.1954456921	0.3372967696

Cuadro 26: M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 3

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

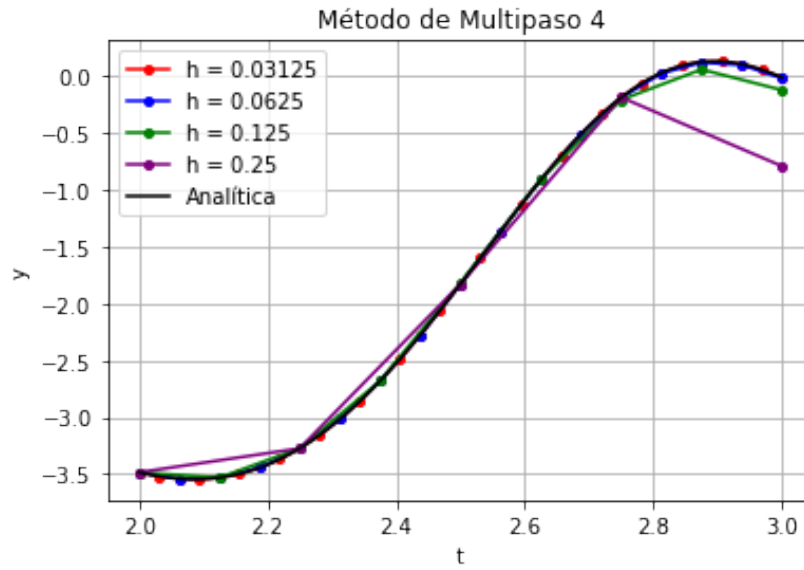


Figura 24: M. Multipaso (4 pasos) del Ejemplo 3

### Comparación de los métodos

En la siguiente tabla se puede observar las estadísticas obtenidas por cada método, con  $h = 0,25$ :

Método	Tiempo	Error ( $\bar{e}$ )	Error ( $\sigma_e$ )
Euler	0.0017974377	0.6611583257	0.4262467127
Taylor	0.0045228004	0.2170149578	0.1437226917
Runge-Kutta 2	0.0018315315	0.1172724660	0.0742926698
Runge-Kutta 4	0.0018181801	0.0008969483	0.0004236477
Multipaso 2	0.0043263435	0.4937473018	0.5230285527
Multipaso 4	0.0032303333	0.1954456921	0.3372967696

Cuadro 27: Métodos del Ejemplo 3

Que se puede observar en la siguiente gráfica:

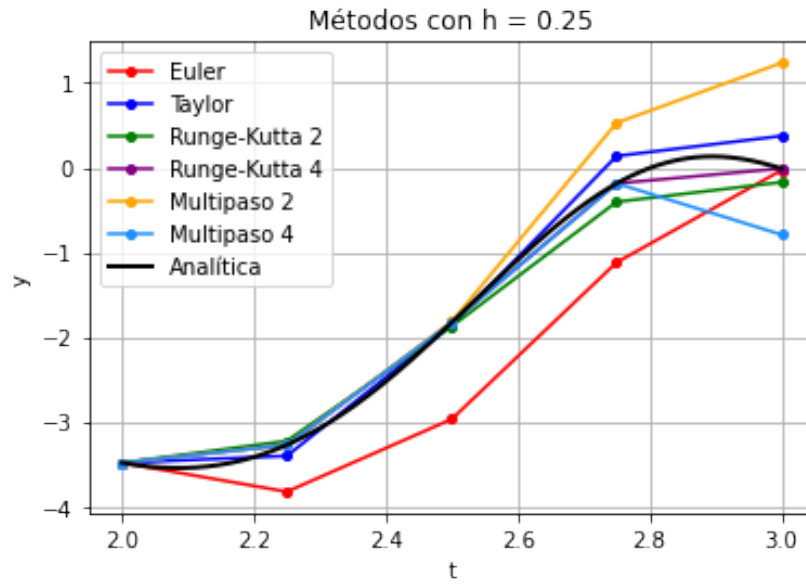


Figura 25: Métodos del Ejemplo 3

### Tiempo de ejecución

En la siguiente tabla se puede observar el tiempo de ejecución de cada uno de los métodos con respecto al valor de  $h$  (R-K es Runge-Kutta y MP es Multipaso).

$h$	Euler	Taylor	R-K 2	R-K 4	MP 2	MP 4
0.1	0.00203	0.00439	0.00174	0.00174	0.00329	0.00326
0.2	0.00232	0.00415	0.00166	0.00171	0.00314	0.00314
0.3	0.00187	0.00411	0.00167	0.00166	0.00318	0.00316
0.4	0.00164	0.00396	0.00161	0.00162	0.00307	0.00326
0.5	0.00192	0.00411	0.00159	0.00158	0.00306	0.00316
0.6	0.00174	0.00401	0.00159	0.00165	0.00309	0.00324
0.7	0.00162	0.00399	0.00158	0.00158	0.00314	0.00321
0.8	0.00179	0.00404	0.00160	0.00160	0.00312	0.00313
0.9	0.00171	0.00408	0.00160	0.00185	0.00311	0.00320
1.0	0.00180	0.00518	0.00164	0.00160	0.00363	0.00334

Cuadro 28: Tiempo en el Ejemplo 3

Que se puede ver mejor en la siguiente gráfica:

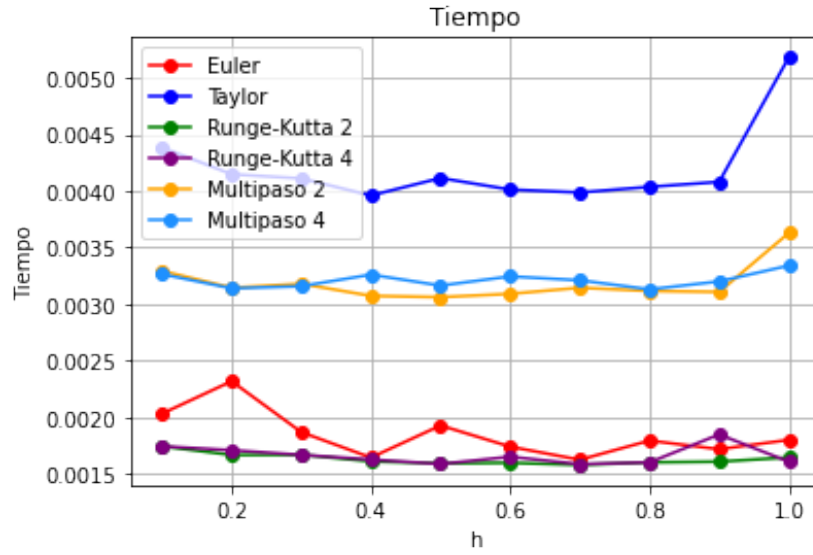


Figura 26: Tiempo en el Ejemplo 3

### Exactitud

En las siguientes tablas se pueden observar el error promedio ( $\bar{e}$ ) y la desviación del error ( $\sigma_e$ ) de cada uno de los métodos con respecto al valor de  $h$  (R-K es Runge-Kutta y MP es Multipaso).

h	Euler	Taylor	R-K 2	R-K 4	MP 2	MP 4
0.1	0.25763	0.03334	0.01726	0.00002	0.08116	0.01237
0.2	0.52516	0.14085	0.07220	0.00033	0.32793	0.12140
0.3	0.72833	0.24362	0.17130	0.00191	0.73958	0.62062
0.4	1.07160	0.45281	0.29736	0.00744	1.38678	0.00744
0.5	1.39767	1.23048	0.44316	0.02123	2.03734	0.03258
0.6	1.88980	1.07201	0.60216	0.01770	3.17332	0.10790
0.7	2.22376	1.63992	1.94456	0.18703	3.01778	0.14293
0.8	4.26864	4.79106	1.59084	0.41341	1.28105	1.27040
0.9	6.24184	7.25038	5.63654	0.36823	1.12203	1.33856
1.0	4.83959	1.92514	5.40492	0.81651	0.81651	3.19419

Cuadro 29: Error ( $\bar{e}$ ) en el Ejemplo 3

---

h	Euler	Taylor	R-K 2	R-K 4	MP 2	MP 4
0.1	0.14799	0.02444	0.01291	0.00001	0.07318	0.01575
0.2	0.32364	0.08693	0.05073	0.00022	0.31331	0.19672
0.3	0.48605	0.23315	0.10101	0.00133	0.64296	1.07189
0.4	0.59405	0.29318	0.24276	0.00204	1.06160	0.00204
0.5	0.94149	0.58249	0.29569	0.01068	2.02680	0.01827
0.6	1.32702	0.29048	0.04763	0.00723	3.16285	0.12770
0.7	1.78022	0.95065	0.37831	0.16834	2.99908	0.15094
0.8	0.30390	4.54794	1.27326	0.29048	1.15812	1.23495
0.9	1.39601	6.61679	1.33868	0.00036	0.75416	1.37225
1.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.75548

Cuadro 30: Error ( $\sigma_e$ ) en el Ejemplo 3

El error promedio se puede ver mejor en la siguiente gráfica:

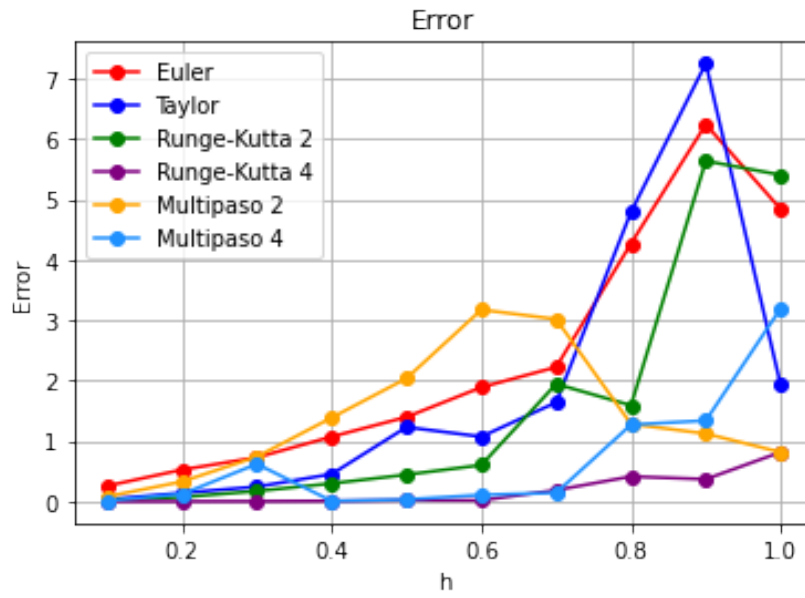


Figura 27: Error en el Ejemplo 3

---

## 2. ODEs de Orden Superior

Para la Ecuación Diferencial Ordinaria  $y'''$  que se muestra a continuación:

$$y''' = 180t^2 + 30$$

Su solución analítica  $y$  es la siguiente:

$$y = 3t^5 + 5t^3$$

Para este ejemplo se tomaron las condiciones iniciales que se muestra a continuación:

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

$$y''(0) = 30$$

Como se indicó anteriormente el límite de análisis de la solución es  $t_0 = 0$  y  $t_f = 10$ . En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

<b>h</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b>	<b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b>
0.3125	0.0915002823	5769.7387933731	7248.8254281816
0.625	0.0423986912	11792.3622131348	14846.2620964991
1.25	0.0211062431	26010.1318359375	32086.2789209033
2.5	0.0105736256	61679.6875000000	71902.2418334524

Cuadro 31: Ejemplo de ODEs de Orden Superior

Los puntos calculados en cada valor de  $h$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

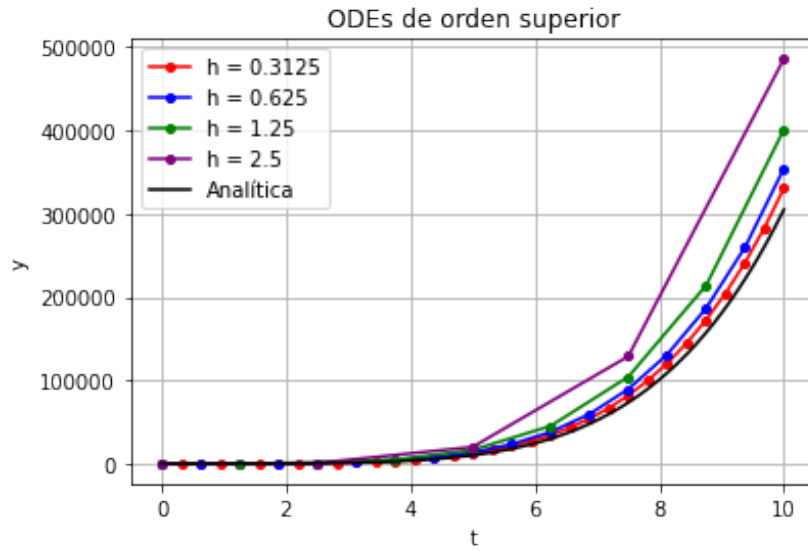


Figura 28: Ejemplo de ODEs de Orden Superior

### Tiempo de ejecución y exactitud

En la siguiente tabla se puede observar el tiempo de ejecución y la exactitud con respecto al valor de  $h$ .

$h$	Tiempo	Error ( $\bar{e}$ )	Error ( $\sigma_e$ )
0.1	0.28562	2177.11197	2617.97876
0.2	0.13802	4066.79104	5062.92690
0.3	0.09191	5963.39888	7501.39173
0.4	0.06703	7380.70528	9300.17338
0.5	0.05276	9293.81250	11717.80139
0.6	0.04473	12142.58688	15320.13192
0.7	0.04211	15995.37184	20190.27530
0.8	0.03431	17906.30912	22526.10860
0.9	0.03715	23530.80132	29608.62612
1.0	0.02654	19987.00000	24893.12285

Cuadro 32: Estadísticas del Ejemplo de ODEs de Orden Superior

El tiempo de ejecución se puede ver mejor en la siguiente gráfica:



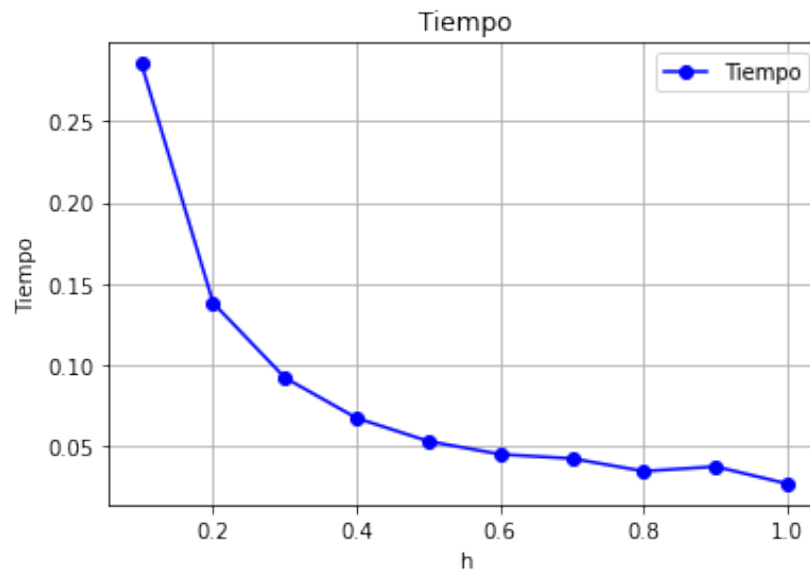


Figura 29: Tiempo del Ejemplo de ODEs de Orden Superior

El error promedio se puede ver mejor en la siguiente gráfica:

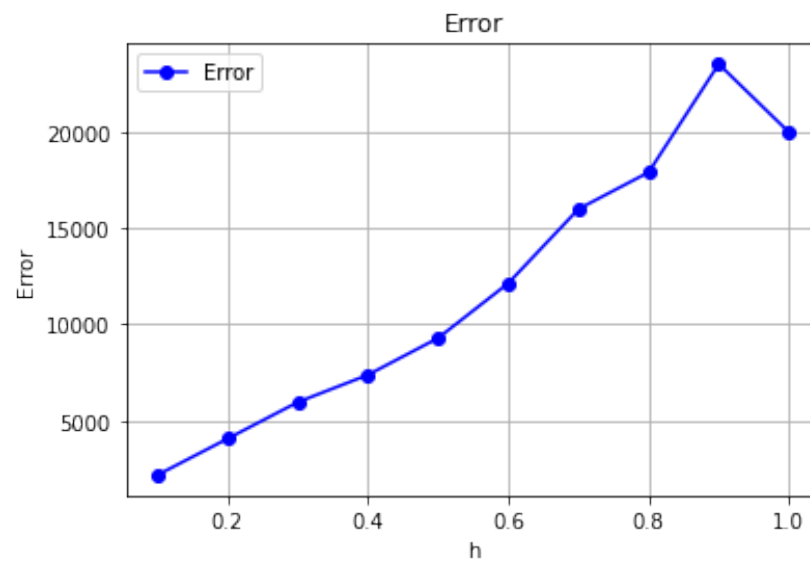


Figura 30: Error del Ejemplo de ODEs de Orden Superior

---

### 3. Problemas de Valor de Frontera

Para la Ecuación Diferencial Ordinaria  $y''$  que se muestra a continuación:

$$y'' = 42t^5 + 2$$

Su solución analítica  $y$  es la siguiente:

$$y = t^7 + t^2$$

En las siguientes dos secciones se muestran, para cada método, los resultados obtenidos con distintos valores de  $n$ , así como las estadísticas de tiempo y exactitud. Las condiciones de frontera son  $t_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $t_f = 15$ ,  $y_f = 170859600$ . En las otras dos secciones se muestra más a detalle los resultados de los métodos en cuanto a tiempo y exactitud, respecto de los diferentes valores de  $n$ .

#### Método de Diferencias Finitas

En la siguiente tabla se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ):

<b>n</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b>	<b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b>
4	0.00165	26250000.00000	6562500.00000
6	0.00143	9185400.00000	2878417.70497
8	0.00120	4554352.35319	1602644.25723
10	0.00124	2700617.28395	1020753.77060

Cuadro 33: M. Diferencias Finitas (PVF)

Los puntos calculados en cada valor de  $n$  se pueden ver en la siguiente gráfica:

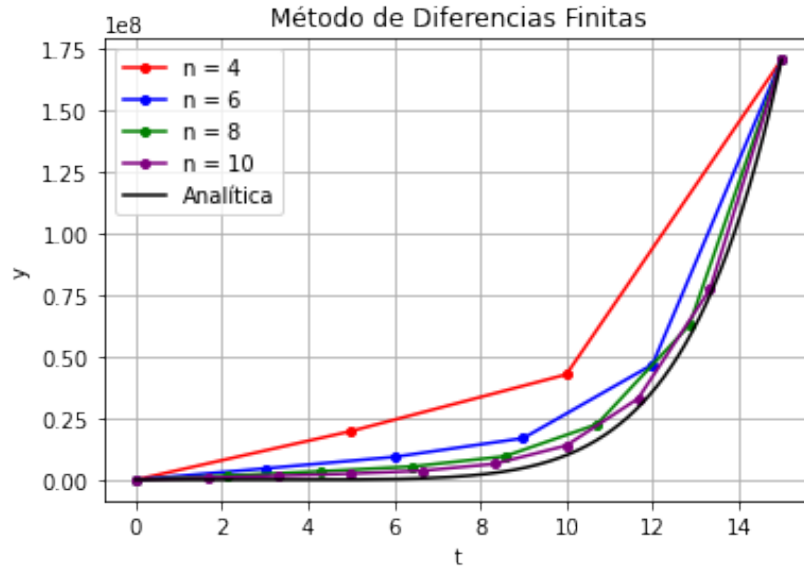


Figura 31: M. Diferencias Finitas (PVF)

### Método de Elementos Finitos

En la siguientes tablas se muestran las estadísticas de tiempo de ejecución, error promedio ( $\bar{e}$ ) y desviación del error ( $\sigma_e$ ), además de los polinomios calculados por el método:

h	Tiempo	Error ( $\bar{e}$ )	Error ( $\sigma_e$ )
4	0.00318	26250000.00000	6562500.00000
6	0.00404	2009306.25000	178982.76924
8	0.00512	0.00000	0.00000
10	0.00629	0.00000	0.00000

Cuadro 34: Estadísticas de M. Elementos Finitos (PVF)

<b>h</b>	<b>y(t)</b>
4	$135625t^3 - 1968749t^2 + 10406250t$
6	$1228,5t^5 - 28350t^4 + 269892t^3 - 1224719t^2 + 2524162,5t$
8	$0,99t^7 + 1,00t^2 - 3,0$
10	$1,00t^7 + 0,99t^2$

Cuadro 35: Polinomios de M. Elementos Finitos (PVF)

Los puntos calculados en cada valor de n se pueden ver en la siguiente gráfica:

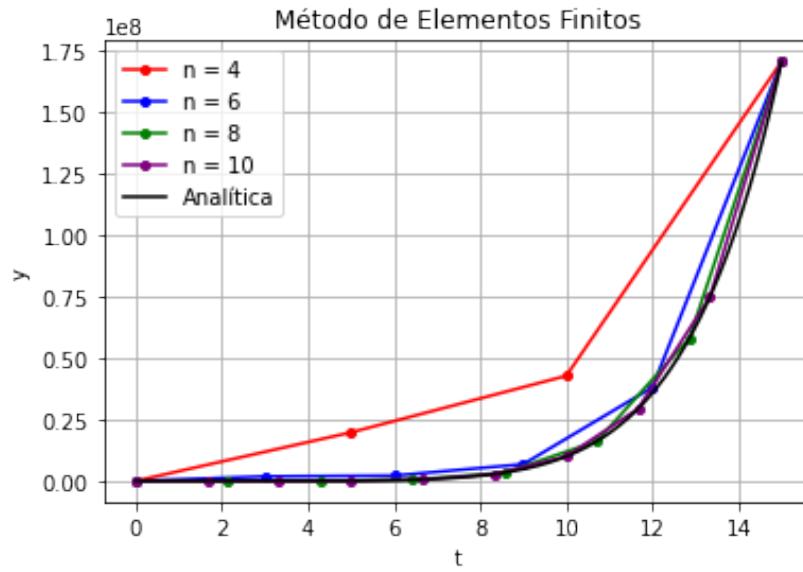


Figura 32: M. Elementos Finitos (PVF)

### Comparación de los métodos

En la siguiente tabla se puede observar las estadísticas obtenidas por cada método, con  $n = 10$ :

<b>Método</b>	<b>Tiempo</b>	<b>Error (<math>\bar{e}</math>)</b>	<b>Error (<math>\sigma_e</math>)</b>
Diferencias Finitas	0.00143	2700617.28395	1020753.77060
Elementos Finitos	0.00649	0.00000	0.00000

Cuadro 36: Comparación de métodos (PVF)

Que se puede observar en la siguiente gráfica:

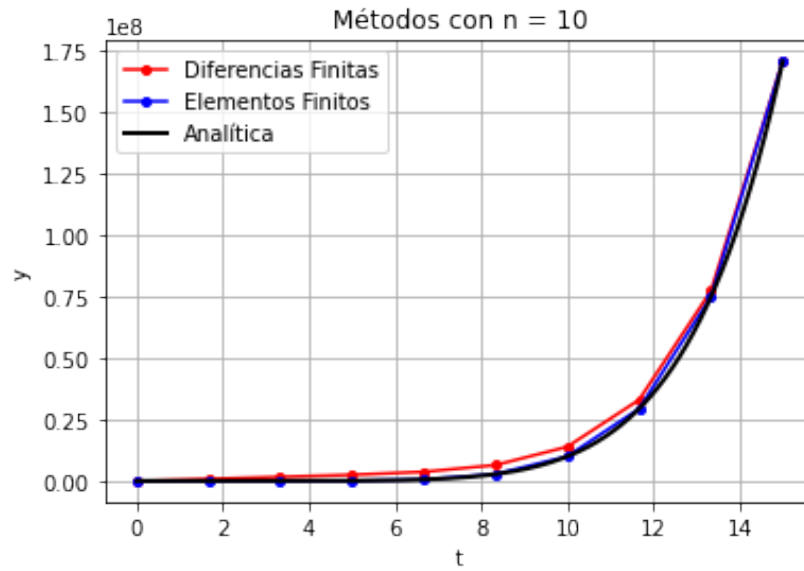


Figura 33: Comparación de métodos (PVF)

### Tiempo de ejecución

En la siguiente tabla se puede observar el tiempo de ejecución de cada uno de los métodos con respecto al valor de  $n$ .

n	Diferencias Finitas	Elementos Finitos
3	0.0012867451	0.0021784306
4	0.0011565685	0.0025899410
5	0.0012617111	0.0032415390
6	0.0012328625	0.0035440922
7	0.0013127327	0.0041799545
8	0.0013139248	0.0046648979
9	0.0012440681	0.0053088665
10	0.0012834072	0.0059263706
11	0.0013060570	0.0064511299
12	0.0013132095	0.0070304871

Cuadro 37: Tiempo de ejecución (PVF)

Que se puede ver mejor en la siguiente gráfica:

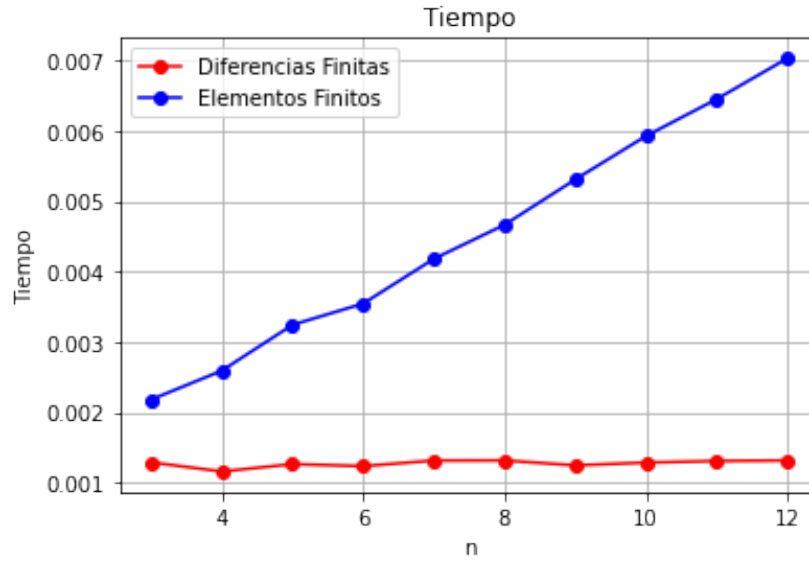


Figura 34: Tiempo de ejecución (PVF)

### Exactitud

En las siguientes tablas se pueden observar el error promedio ( $\bar{e}$ ) y la desviación del error ( $\sigma_e$ ) de cada uno de los métodos con respecto al valor de  $n$ .

n	Diferencias Finitas	Elementos Finitos
3	56063232.4218750000	56063232.4218750000
4	26250000.0000000000	26250000.0000000000
5	14599800.1098632757	4379940.0329592498
6	9185399.9999999981	2009306.2500000000
7	6280517.5781249991	87158.2031246613
8	4554352.3531861827	0.0000000100
9	3449202.7759552025	0.0000000081
10	2700617.2839505784	0.0000000425
11	2170768.3593750005	0.0000000681
12	1782315.8502586465	0.0000000686

Cuadro 38: Error  $\bar{e}$  (PVF)

---

n	Diferencias Finitas	Elementos Finitos
3	0.0000000000	0.0000000000
4	6562500.0000000000	6562500.0000000000
5	4190931.0483032530	3102242.8129737382
6	2878417.7049747310	178982.7692382356
7	2101362.9066954814	56719.2321417461
8	1602644.2572328798	0.0000000067
9	1262861.8939167827	0.0000000093
10	1020753.7706015311	0.0000000336
11	842102.2268460587	0.0000000486
12	706506.1385796772	0.0000001080

Cuadro 39: Error  $\sigma_e$  (PVF)

El error promedio se puede ver mejor en la siguiente gráfica:

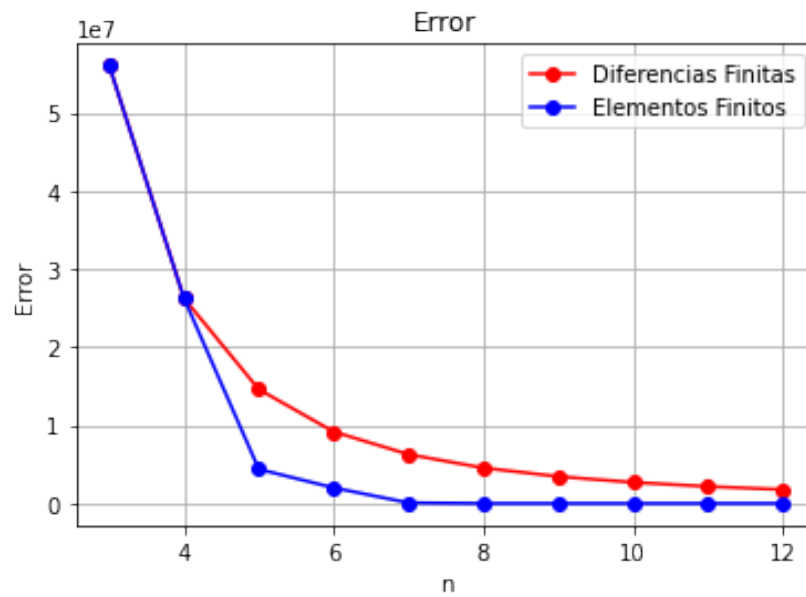


Figura 35: Error  $\bar{e}$  (PVF)

---

## Parte IV

# Discusión y Análisis

## 1. ODEs de Primer Orden

### 1.1. Exactitud de los métodos

En los ejemplos propuestos se puede observar que los métodos con mejores resultados son Runge-Kutta de orden 4 y Multipaso de 4 pasos. Los métodos con peores resultados varían mucho dependiendo de la ecuación diferencial, aunque resaltan en su mayoría los métodos de Euler, Taylor y Multipaso de 2 pasos.

De manera general cabe anotar que, como los resultados de los ejemplos 1 y 3 son funciones trigonométricas, la forma de estas es más compleja de alcanzar, por lo que la exactitud de los métodos varía con cada una de ellas. Es contrario lo que sucede con el ejemplo 2, en el que el método de Euler destaca por su alto error respecto de los demás, y este es lineal en relación con  $h$ . También se puede observar que para el ejemplo 2, los métodos Runge-Kutta de orden 4 y Multipaso de 4 pasos obtuvieron un error cero en la resolución de esta ecuación.

En el ejemplo 2 se puede destacar mejor el error de cada uno de los métodos, pudiendo ordenarlos de mayor a menor error así: Euler, Multipaso (2 pasos), Taylor, Runge-Kutta (orden 2), Multipaso (4 pasos) y Runge-Kutta (orden 4). Sin embargo, como se dijo anteriormente, este depende mucho de la ecuación diferencial.

Finalmente, se destaca el crecimiento del error en relación con el valor de  $h$ , que como se puede observar, no siempre es lineal, ya que depende de la ecuación que se esté resolviendo.

### 1.2. Complejidad computacional

Al obtener los tiempos de ejecución de cada uno de los métodos en los ejemplos propuestos, es posible resaltar que el método de Taylor gasta más tiempo que



---

los demás, seguido por los métodos Multipaso (tanto de 2 como de 4 pasos). Los que tardan menor tiempo en ejecutarse son los métodos de Euler y Runge-Kutta (tanto de orden 2 como de orden 4).

En la sección anterior se planteó que los mejores métodos en cuanto a exactitud eran Multipaso (4 pasos) y Runge-Kutta (orden 4). Al analizar su tiempo de ejecución es posible resaltar al método de Runge-Kutta (orden 4) como la mejor opción debido a su bajo error y bajo tiempo de ejecución.

Con estos ejemplos se puede señalar la particularidad de los tiempos de ejecución con estos métodos, ya que de manera contra-intuitiva, estos tiempos no son decrecientes respecto del valor de  $h$ , incluso tienden a ser constantes a medida que  $h$  aumenta, aunque sí se puede diferenciar entre algunos de los métodos.

## **2. ODEs de Orden Superior**

### **2.1. Exactitud de los métodos**

Con el ejemplo propuesto, se puede observar que el error crece a medida que aumenta  $h$ , tanto al analizar la Figura 30 (error vs  $h$ ) como la Figura 28 (resultados con diferentes valores de  $h$ ). También es importante decir que el error no es completamente lineal respecto del incremento del valor de  $h$ .

### **2.2. Complejidad computacional**

Para este ejemplo en específico es posible notar que el tiempo es decreciente con respecto a  $h$ , esto es debido a que si el valor de  $h$  es alto, la cantidad de puntos por calcular es menor y se tarda menos tiempo en ejecutarse.

---

## 3. Problemas de Valor de Frontera

### 3.1. Exactitud de los métodos

En el ejemplo presentado el error es el mismo para los métodos usados hasta  $n = 4$ , a partir de  $n = 5$  el método de Diferencias Finitas obtiene mayor error que el método de Elementos Finitos. Este último comienza a tener un error bastante bajo a partir de  $n = 8$ , llegando a ser incluso menor que 1, por lo que se considera como una buena opción para resolver una ecuación diferencial bajo un problema de valor de frontera.

Al analizar la gráfica de la Figura 35, es posible darse cuenta que el error (en ambos métodos) tiende a disminuir a medida que  $n$  aumenta, esto debido a que si calcula un mayor número de puntos, se puede acercar más al resultado analítico, aunque teniendo mucho cuidado con no exceder en el aumento de  $n$  debido a que la matriz que se usa puede llegar a ser singular y por lo tanto no proveer la solución.

### 3.2. Complejidad computacional

En la gráfica de la Figura 34 es posible percatarse de que el método de Elementos Finitos tarda más tiempo en ejecutarse que el método de Diferencias Finitas. También es importante notar que el tiempo que gasta el método de Elementos Finitos es creciente respecto del valor de  $n$ , mientras que el que gasta el método de Diferencias Finitas es casi constante.

En contraste con el análisis de exactitud de los métodos, es destacable el hecho de que aunque el método de Elementos Finitos obtiene un menor error respecto del otro, su tiempo de ejecución es mucho mayor y creciente, mientras que a pesar de que el método de Diferencias Finitas tiene un mayor error, su tiempo de ejecución es muy bajo y casi constante. La elección del método para resolver la ecuación dependerá del interés sobre exactitud o complejidad computacional.

---

## Parte V

# Conclusiones

La implementación del cálculo aproximado de la solución de una Ecuación Diferencial Ordinaria en un computador, se vuelve importante para diversas aplicaciones que hacen uso de esta teoría y que requieren resultados rápidos y con la máxima garantía de su correctitud, lo que no siempre se puede lograr usando los métodos tradicionales donde el tiempo gastado y el error inherente del ser humano suele ser un grave problema.

Es relevante analizar los diferentes métodos definidos para un problema, tanto en exactitud como en complejidad, ya que esto permite decidir, según el problema y los datos, cuál es el más apropiado para realizar los cálculos.

Se logró comprender las diferentes formas de solucionar una Ecuación Diferencial Ordinaria y la importancia de los métodos aprendidos para diversas aplicaciones del mundo real.

Se comprendió que al usar la computación para resolver problemas matemáticos se puede profundizar en el comportamiento de los métodos tanto a nivel de exactitud como a nivel de complejidad, con lo que se logra aprender más sobre ellos e identificar en qué caso usarlos y de qué manera se puede aprovechar mejor.

---

## Parte VI

# Referencias

- Material del curso, disponible en BlackBoard
- Bornemann, F., 2016. *Numerical linear algebra*. 1st ed. *Simson, W.*
- Mathews, J., Fink, K., Fernández Carrión, A. & Contreras Márquez, M., 2011. *Métodos Numéricos con MATLAB*. 3rd ed. Madrid: *Pearson Prentice Hall*.
- Librería Numpy
- Librería Pyplot (Matplotlib)
- Librería Time
- Librería Sympy