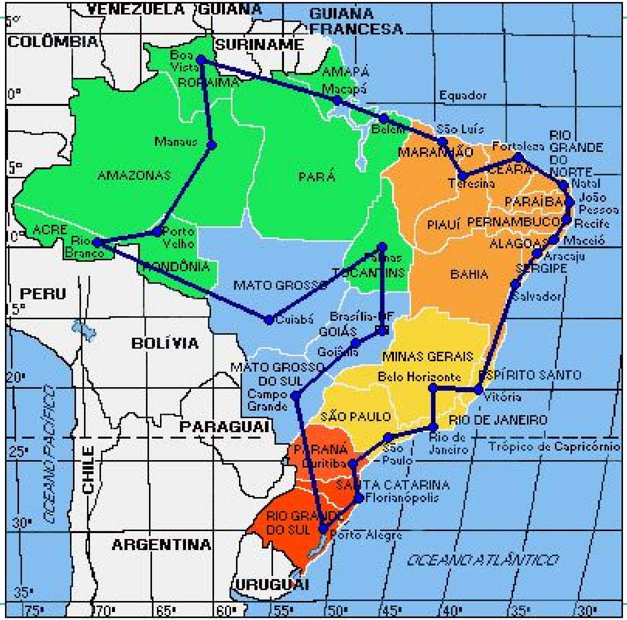
O problema do caixeiro viajante

Fernando Paladini
Lucas Ribeiro Neis
Vinícius Biermann



O Problema

- O problema do caixeiro é um clássico exemplo de problema de otimização combinatória.
- Pode também ser um problema de decisão. O problema de decisão tem uma complexidade diferente do de otimização combinatória.

No problema do caixeiro viajante (TSP), dado um número de cidades *n*:

- Qual o custo total **mais curto** para percorrer todas as cidades apenas uma vez e voltar para a cidade de origem?

Ciclo Hamiltoniano

Dado um grafo não direcionado, um *Ciclo Hamiltoniano (HC)* é aquele que passa por cada um dos vértices do grafo apenas uma vez e volta ao vértice de origem.

Provado ser NP-Completo em 1972 por Richard M. Karp.

Ideia da prova

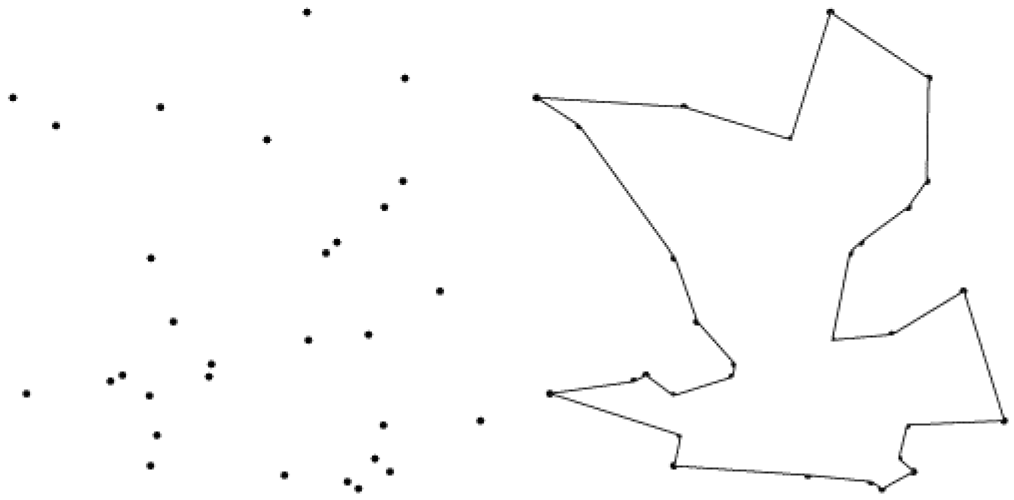
O TSP é um problema NP-Completo. Como visto em aula, para garantir que um problema é NP-Completo precisamos atender a duas condições:

- TSP é NP.
- Mostrar que algum problema NP-Completo pode ser reduzido polinomialmente para TSP.

Caixeiro viajante é NP-Hard?

1º Passo: mostrar que TSP está em NP.

- TSP pode ser checado em tempo polinomial observando-se se cada vértice é visitado apenas uma vez e se a soma do custo das arestas é mínimo.



Caixeiro viajante é NP-Hard?

2º Passo: provar que TSP é NP-Completo.

- Ciclo Hamiltoniano (HC) é um problema NP-Completo.
- Queremos mostrar é que $HC \propto_p TSP$.

Para tal, assuma que:

- $G^1=(V,E^1)$ é uma instância de ciclo hamiltoniano.
- $G^2=(V,E^2)$ é uma instância de TSP, onde:
  - $E^2 = \{ (i, j) \mid i,j \in V \text{ e } i \neq j\}$

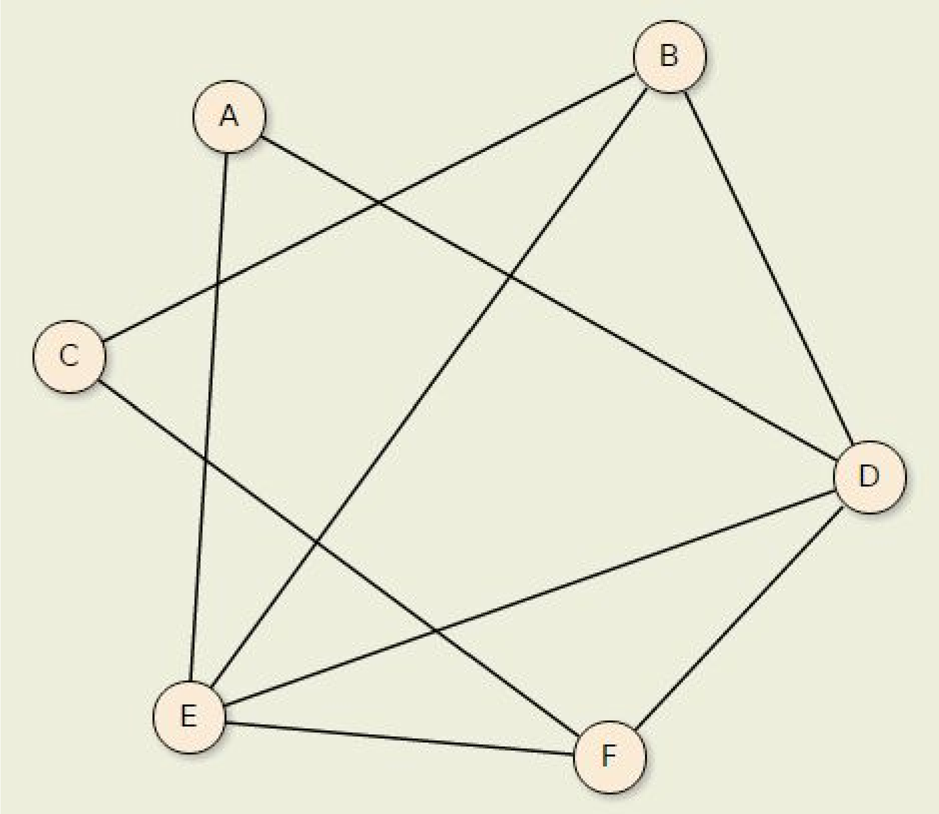
Caixeiro viajante é NP-Hard?

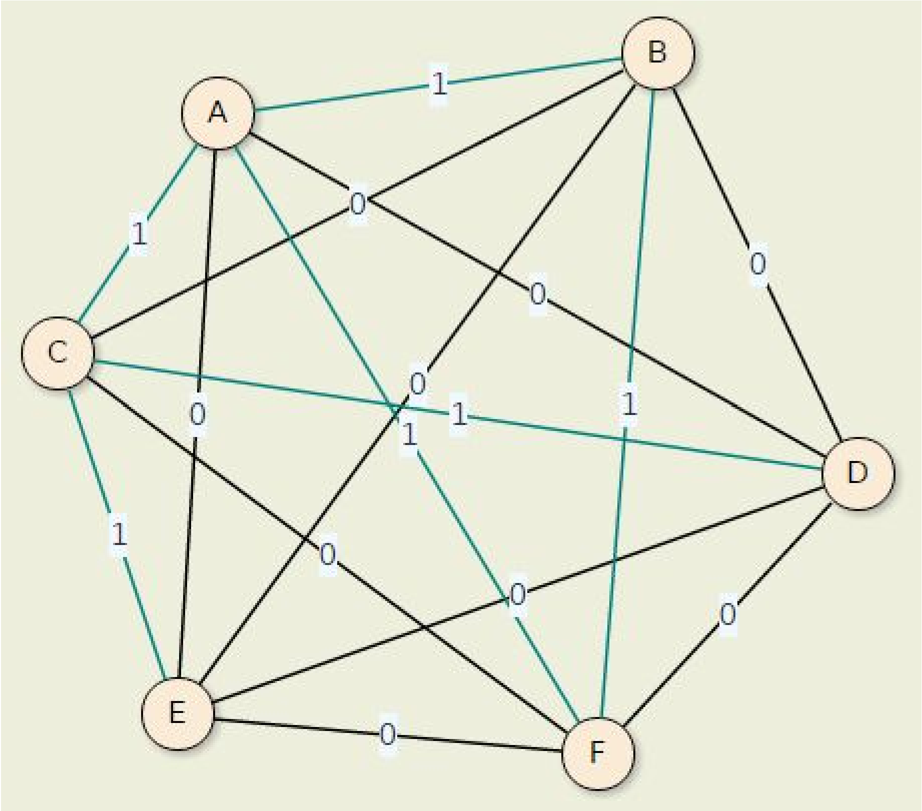
Seja a função de custo *f* definida como segue:

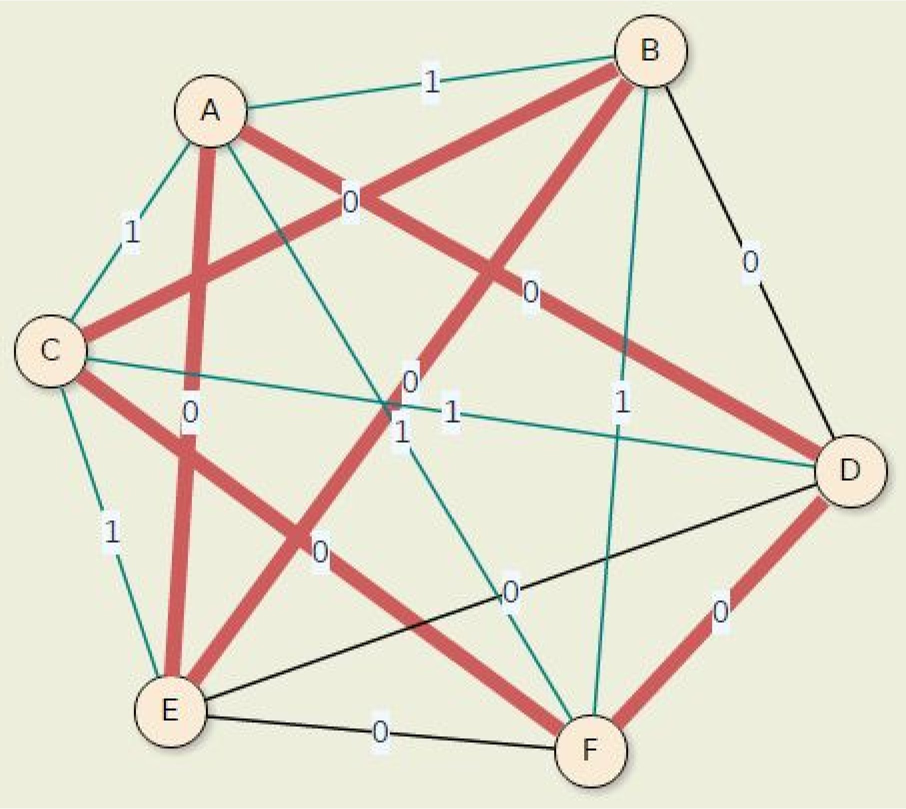
```
if ((i,j) ∈ E') {
    f(i, j) = 0;
} elsif ((i,j) ∉ E') {
    f(i, j) = 1;
}
```

Caixeiro viajante é NP-Hard?

- Suponha que existe um ciclo hamiltoniano H em G^1.
- O custo de cada aresta em H é 0 em G^2, pois toda aresta pertence a G^2. Desta forma, H possui custo 0 em G^2.
- Se o grafo G^1 tem um ciclo hamiltoniano, então G^2 tem custo 0.
- Assumindo um custo de no máximo 0 para um ciclo em G^2 temos um ciclo hamiltoniano formado apenas pelas arestas de G^1.
- Assim, temos um ciclo hamiltoniano em G^1 se e somente se existir uma solução com custo máximo 0 em G^2.


A
B
C
D
E
F


A
B
C
D
E
F
1
1
1
1
1
1
0
0
0
0
0
0
0
0
0


A
B
C
D
E
F
1
1
1
1
1
1
1
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0

TSP como problema de Otimização

- TSP, como dito anteriormente, pode ser visto como um problema de Otimização.
- Esta variação é NP-hard, pois não conseguimos fazer os cálculos necessário em tempo polinomial, mas ainda podemos reduzir problemas NP-completos a ele.

Referências

- http://www.csd.uoc.gr/~hy583/papers/ch11.pdf
- http://www.cs.cmu.edu/afs/cs.cmu.edu/academic/class/46927-f97/slides/Lec4/sld032.htm
- http://algoviz.org/OpenDSA/Books/Everything/html/hamiltonianCycle_to_TSP.html