

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΤΟΜΕΑΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

Υπολογιστικός Ηλεκτρομαγνητισμός (8^ο εξάμηνο)

ΕΡΓΑΣΙΑ - Μέθοδοι Πεπερασμένων Στοιχείων

Μέρος Β – Διάδοση Ηλεκτρομαγνητικού Κύματος Προθεσμία: 5 Ιουνίου 2019

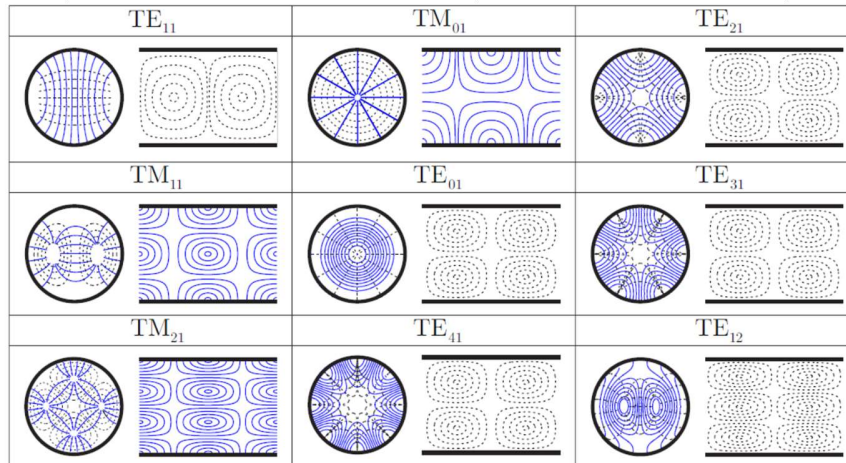
B.1 Κυματοδηγός κυκλικής διατομής

Βρείτε και απεικονίστε του πρώτους εννέα ρυθμούς (είτε TE είτε TM) και τις αντίστοιχες συχνότητες αποκοπής ενός μεταλλικού κυματοδηγού κυκλικής διατομής με αέρα και διάμετρο $2a = 2 \text{ cm}$. Ειδικότερα, γράψτε δύο κώδικες πεπερασμένων στοιχείων (έναν για ρυθμούς TE και έναν για ρυθμούς TM), οι οποίοι θα είναι παρόμοιοι, με μία μόνον κυκλική περιοχή αλλά προφανώς διαφορετικές οριακές συνθήκες στο εξωτερικό τέλεια αγωγίμο όριο. Για τη σύνταξη του προγράμματος ακολουθήστε την ίδια, κατά βάση, μεθοδολογία που χρησιμοποιήσατε και για το ηλεκτροστατικό πρόβλημα, με τις εξής ειδικότερες οδηγίες:

- Στην περίπτωση των ρυθμών TE με άγνωστη την H_z οι οριακές συνθήκες για τη συνιστώσα αυτή είναι ομογενείς Neumann άρα οι κόμβοι του εξωτερικού συνόρου αφήνονται ως άγνωστοι. Αντίθετα, στους ρυθμούς TM οι κόμβοι του εξωτερικού συνόρου θα έχουν μηδενικές τιμές της E_z (συνθήκες Dirichlet).
- Καθώς το πρόβλημα είναι ιδιοτιμών, θα πρέπει να αποθηκεύσετε και να αρχικοποιήσετε και τους δύο αραιούς ολικούς πίνακες ακαμψίας και μάζας \mathbf{S} και \mathbf{T} , αντίστοιχα. Οι τοπικοί πίνακες ακαμψίας δημιουργούνται εντελώς παρόμοια με την περίπτωση του ηλεκτροστατικού πεδίου, ενώ οι τοπικοί πίνακες μάζας υπολογίζονται επίσης σε πολύ απλή μορφή. Η συνάθροιση γίνεται όπως στο ηλεκτροστατικό πρόβλημα αλλά και για τους δύο πίνακες (ξεχωριστά αλλά στον ίδιο προφανώς βρόχο σάρωσης στοιχείο-προς-στοιχείο), ενώ δεν υπάρχει διάνυσμα (column vector) δεξιού μέλους.
- Λύστε το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμών $(\mathbf{S} - k_e^2 \mathbf{T})\mathbf{x} = 0$ με τη συνάρτηση `eigs`. Χρησιμοποιήστε τη μορφή `[V,D] = eigs(S,T,k,sigma)`; , επιλέγοντας $k=6$ (τις πρώτες 6 ιδιοτιμές τόσο για TE όσο και για TM) και κατάλληλο `sigma` ώστε να πάρετε τις *μικρότερες* ιδιοτιμές.
- Από τον πίνακα \mathbf{V} που περιέχει τα ιδιοδιανύσματα πάρτε την κάθε μια από τις 6 στήλες του (με ένα `for` από 1 έως 6) και από αυτή συμπληρώστε κατάλληλα το διάνυσμα $\mathbf{X0}$ (το οποίο τελικά θα έχει τις τιμές του άγνωστου πεδίου σε όλους τους κόμβους) χρησιμοποιώντας και το διάνυσμα `index`.
- Απεικονίστε χρωματικά τη μεταβολή του αγνώστου πεδίου για καθέναν από τους 6 πρώτους ρυθμούς TE και 6 πρώτους ρυθμούς TM με την `pdeplot`, χρησιμοποιώντας 3 `refinements` αν είναι δυνατόν, για καλύτερα αποτελέσματα (και 2 `refinements` είναι OK). Χρησιμοποιήστε

colormap jet και τις εντολές axis equal και axis tight για καλύτερη απεικόνιση. Βάλτε και colorbar on;

- Συγκρίνετε τα γραφήματα (colour plots) των άγνωστων πεδίων για κάθε ρυθμό, με το γνωστό γράφημα του παρακάτω σχήματος. Διαπιστώστε οι ισοσταθμικές του άγνωστου πεδίου με ποιες δυναμικές γραμμές συμπίπτουν, τόσο για τους ρυθμούς TE όσο και τους ρυθμούς TM.



- Υπολογίστε τις συχνότητες αποκοπής των παραπάνω ρυθμών χωρίς refinement, όπως επίσης και με 1, 2 και 3 refinements. Υπολογίστε τα σχετικά σφάλματα (ως προς τη θεωρητική λύση) για κάθε περίπτωση και παρουσιάστε τα σε πίνακα. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

B.2 Σκέδαση από άπειρο κυκλικό τέλεια αγωγίμο κύλινδρο

Επίπεδο ομοιόμορφο ηλεκτρομαγνητικό κύμα με διεύθυνση κατά τα +x της μορφής

$$\mathbf{E}^i = \hat{\mathbf{z}} E_0 e^{-jk_0 x}, E_0 = 1 \text{ V/m}$$

προσπίπτει σε άπειρου μήκους τέλεια αγωγίμο κύλινδρο διαμέτρου $2a$ που βρίσκεται στον αέρα. Η πόλωση του κύματος είναι TM (η άγνωστη μεταβλητή του προβλήματος είναι η συνιστώσα z του σχεδάζόμενου ηλεκτρικού πεδίου). Γράψτε έναν κώδικα για την επίλυση του προβλήματος σκέδασης, με PML (τέλεια προσαρμοσμένο στρώμα) πάχους d γύρω από τον κύλινδρο. Το στρώμα απέχει (και από τις τέσσερις πλευρές του) ελάχιστη απόσταση («αέρα») w από τον κύλινδρο. Για τη σύνταξη του προγράμματος ακολουθήστε την ίδια, κατά βάση, μεθοδολογία που χρησιμοποιήσατε και για το ηλεκτροστατικό πρόβλημα, με τις εξής ειδικότερες οδηγίες:

- Δημιουργήστε τις περιοχές του υπολογιστικού χωρίου όπως φαίνονται στο παρακάτω σχήμα, δηλ. μια τετραγωνική περιοχή πλευράς $2a+2w$, μια κυκλική περιοχή την οποία προφανώς θα εξαιρέσετε από το χωρίο καθώς στο εσωτερικό του κυλίνδρου δεν θα έχουμε διακριτοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία και τις περιοχές του PML.
- Επιλέξτε την παράμετρο $a = a_r - j\beta = 1 - j\beta$ σταθερή, επιλέγοντας το β έτσι ώστε να έχουμε θεωρητικό συντελεστή ανάκλασης 10^{-6} στην κάθετη πρόσπτωση (η σταθερά β θα εξαρτάται προφανώς από το πάχος d του PML). Για κάθε περιοχή ορίστε τις τιμές των στοιχείων του

τανυστή του PML. Ουσιαστικά για κάθε περιοχή PML χρειάζεστε 3 παραμέτρους $\mu_{xx}, \mu_{yy}, \varepsilon_{zz}$, οι οποίες μπορούν να τοποθετηθούν σε μικρούς πίνακες-διανύσματα (διάστασης ίσης με το πλήθος των περιοχών). Για την κεντρική περιοχή (αέρα) είναι προφανώς $\mu_{xx}=\mu_{yy}=\mu_0$ και $\varepsilon_{zz}=\varepsilon_0$.

- Προσοχή: ταυτοποιήστε προσεκτικά τις περιοχές. Ενδέχεται στον πίνακα t (4^η γραμμή) όπου βρίσκεται ο δείκτης της κάθε περιοχής να μην αντιστοιχούν οι περιοχές με τη σειρά που δόθηκαν στον πίνακα gd.
- Ο σχηματισμός των πινάκων μοιάζει πολύ με το ηλεκτροστατικό πρόβλημα. Εκτός από τον τοπικό πίνακα ακαμψίας υπολογίζεται και εδώ ο τοπικός πίνακας μάζας, όμως ο συνολικός πίνακας του συστήματος θα είναι ένας πίνακας \mathbf{A} που θα υπολογίζεται από τη συνάθροιση των τοπικών πινάκων $\mathbf{A}_e = \mathbf{S}_e - \omega^2 \mathbf{T}_e$.
- Στο σύνορο του σκεδαστή C θα εφαρμόσετε μη ομογενείς συνθήκες Dirichlet $E_z^s|_C = -E_z^i|_C$, άρα σε κάθε κόμβο του συνόρου του σκεδαστή, το σκεδαζόμενο πεδίο θα είναι γνωστό και ίσο με το προσπίπτον. Αντίθετα, στο εξωτερικό σύνορο (τερματισμός του PML) θα εφαρμόσουμε τις πιο απλές οριακές συνθήκες δηλ. ομογενείς Neumann (δεν παίζουν κάποιο ρόλο), οπότε οι κόμβοι του εξωτερικού συνόρου θα είναι άγνωστοι. Άρα οι πίνακες node_id, index και X0 θα καθοριστούν μόνον από τους κόμβους του συνόρου του σκεδαστή.
- Χρησιμοποιήστε τουλάχιστον 2 (καλύτερα 3) refinements για καλύτερα αποτελέσματα. Λύστε το σύστημα εξισώσεων που προκύπτει με direct solver. Υπολογίστε σε κάθε κόμβο το συνολικό πεδίο (άθροισμα προσπίπτοντος που είναι γνωστό και σκεδαζόμενου, το οποίο υπολογίσατε). Απεικονίστε το συνολικό πεδίο, κατά προτίμηση μόνον στον αέρα εφόσον είναι εύκολο (το πεδίο μέσα στο PML δεν έχει καμία φυσική σημασία).

Αριθμητική εφαρμογή: Θεωρήστε συχνότητα $f = 300$ MHz ($\lambda=1$ m). Λύστε το πρόβλημα για διάμετρο σκεδαστή $\lambda/2$, 2λ και 5λ . Επιλέξτε περιθώριο «αέρα» $w = \lambda$ σε όλες τις περιπτώσεις. Για όλες τις παραπάνω περιπτώσεις συγκρίνετε τα αποτελέσματα (οπτικά) για δύο τιμές πάχους PML, $d = \lambda$ και $\lambda/4$.

