



FINITE ELEMENT METHOD (FEM)

ΜΕΡΟΣ Β: ΔΙΑΔΟΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ



MAY 28, 2019

ΠΑΛΑΣΚΟΣ ΜΑΡΙΟΣ (8492)

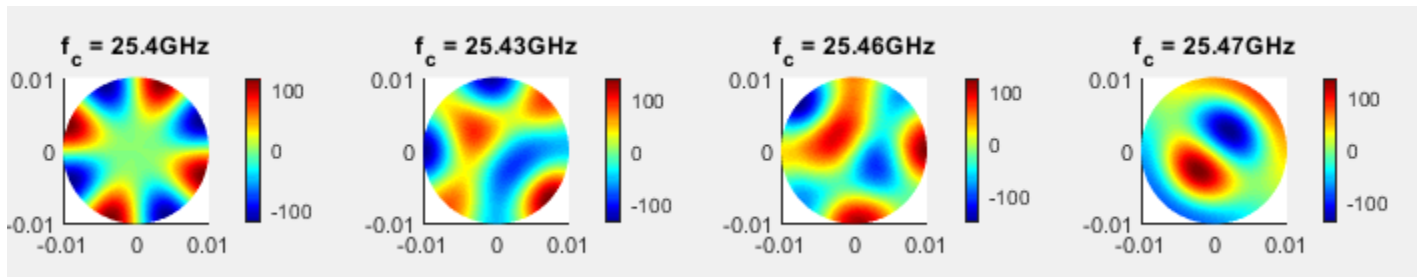
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ – ΤΟΜΕΑΣ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

B.1 Κυματοδηγός κυκλικής διατομής

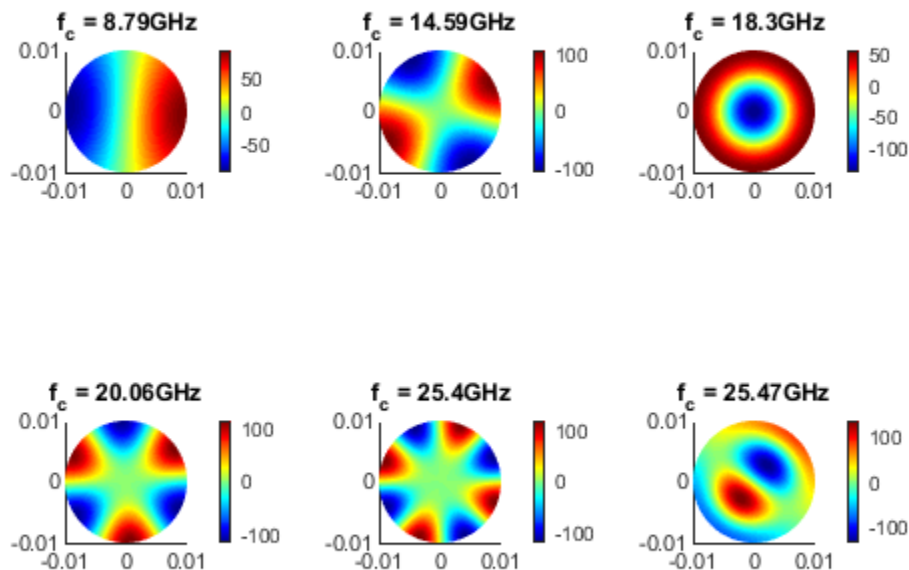
Τα αρχεία TM_Ez.m και TE_Hz.m μας δίνουν τους ρυθμούς TM και TE αντίστοιχα, μαζί με τις συχνότητες αποκοπής του κάθε ρυθμού. Να σημειωθεί ότι, λόγω συμμετρίας, ο αλγόριθμος των πεπερασμένων στοιχείων έδινε «κατά μέσο όρο» κάθε ρυθμό από δύο φορές (με περιστροφή του προηγούμενου κατά 90 μοίρες). Για το λόγο αυτό η συνάρτηση εύρεσης των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων κλήθηκε για διπλάσιο πλήθος ρυθμών:

```
[V,D] = eigs(Sff,Tff,12,'smallestabs');
```

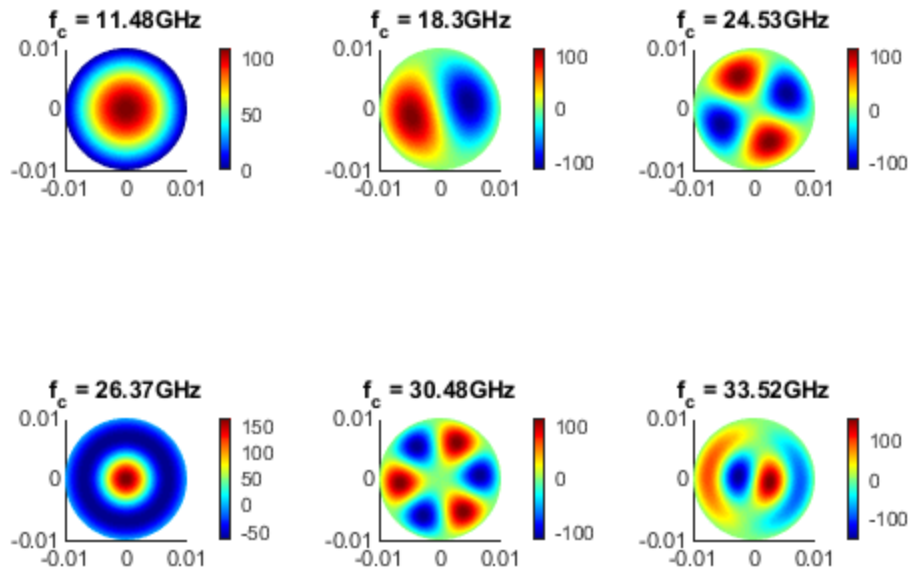
Ωστόσο οι συχνότητες των «δίδυμων ρυθμών» απέχουν πολύ λίγο. Όμως υπάρχουν και πραγματικοί ρυθμοί ($TE_{41} \rightarrow 25.4 \text{ GHz}$, $TE_{12} \rightarrow 25.47 \text{ GHz}$) που επίσης απέχουν μικρή απόσταση. Επομένως, ήταν δύσκολο να γραφεί κώδικας που να αποφασίζει, με ένα προκαθορισμένο κατώφλι, εάν ο επόμενος ρυθμός είναι δίδυμος του προηγούμενου ή πραγματικός που όντως απέχει πολύ λίγο. Κατά συνέπεια, σε κάθε περίπτωση ξεχωριστά (TE και TM), απεικονίστηκαν οι πρώτοι 12 ρυθμοί που δίνει ο αλγόριθμος FEM και κατόπιν επιλέχθηκαν οι πρώτοι 6 (που φαίνονται παρακάτω), οι οποίοι «είχαν νόημα». Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η προσπάθεια του αλγορίθμου να «βρει» 2 ρυθμούς μεταξύ των TE_{41} και TE_{12} , οι οποίοι, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, βρίσκονται ήδη πολύ κοντά μεταξύ τους και φαίνεται να μην έχουν νόημα.



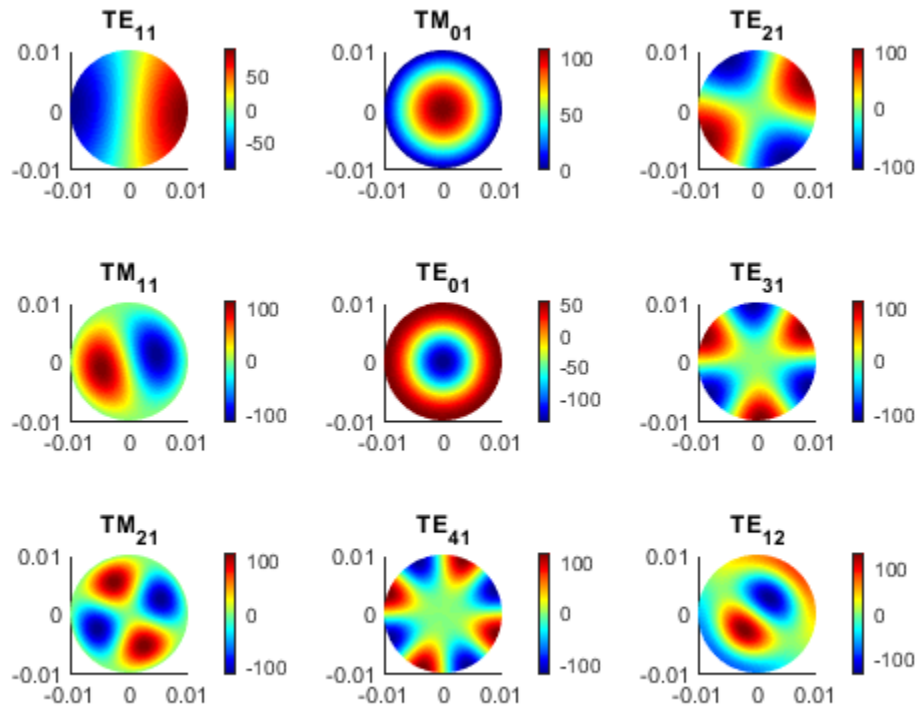
TE modes



TM modes



Σε καθένα από τα αρχεία TM_Ez.m και TE_Hz.m αποθηκεύω τους πρώτους 6 ρυθμούς μαζί με τις αντίστοιχες συχνότητες αποκοπής και στο αρχείο B1.m τα κάνω load και με βάση τις 9 πρώτες (μικρότερες) συχνότητες αποκοπής τελικά παίρνουμε τους ζητούμενους ρυθμούς, οι οποίοι φαίνονται παρακάτω:



Το παραπάνω γράφημα μας δίνει τη μεταβολή των $E_z(TM)$ και $H_z(TM)$ στο εγκάρσιο επίπεδο. Η ανάλυση που ακολουθεί αφορά το εγκάρσιο επίπεδο.

Για τους TM ρυθμούς, από τις σχέσεις (4.93)-(4.96) του βιβλίου των μικροκυμάτων έχουμε:

$$E_\rho = A \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \quad (1), \quad H_\phi = B \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \quad (2), \quad E_\phi = \left(\frac{A}{\rho}\right) \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \quad (3), \quad H_\rho = \left(-\frac{B}{\rho}\right) \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \quad (4)$$

Όπου $A, B = f(\beta, k_c)$. Από τις (1) – (3) και (2) – (4) παίρνουμε αντίστοιχα:

$$\mathbf{E} = E_\rho \hat{\rho} + E_\phi \hat{\phi} = A \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \hat{\rho} + \left(\frac{A}{\rho}\right) \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \hat{\phi} \quad (5), \quad \mathbf{H} = H_\rho \hat{\rho} + H_\phi \hat{\phi} = \left(-\frac{B}{\rho}\right) \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \hat{\rho} + B \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \hat{\phi} \quad (6)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις είναι φανερό ότι: $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} \perp \mathbf{H} \quad (7)$, αποτέλεσμα μου επιβεβαιώνει τα παρακάτω σχήματα. Επίσης:

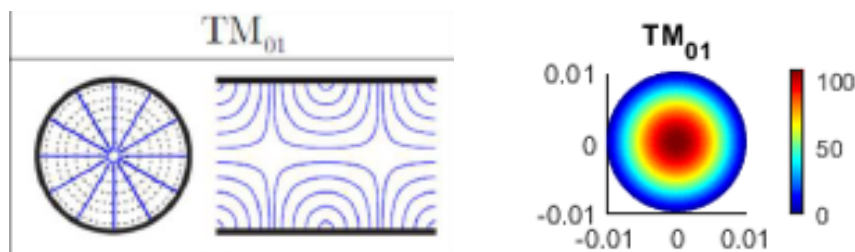
$$\nabla E_z = \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \hat{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \hat{\phi} \stackrel{(5)}{\Rightarrow} \nabla E_z = \left(\frac{1}{A}\right) \mathbf{E} \quad (8)$$

Από τις (7) και (8) έπεται ότι: $\nabla E_z \perp \mathbf{H} \quad (9)$

Όμως γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα κλίσης μία συνάρτησης σε ένα σημείο είναι κάθετο στην ισοσταθμική που διέρχεται από το σημείο αυτό. Κατά συνέπεια, $\nabla E_z \perp \text{ισοσταθμικές της } E_z \quad (10)$. Από τις (9) και (10) συμπεραίνουμε ότι:

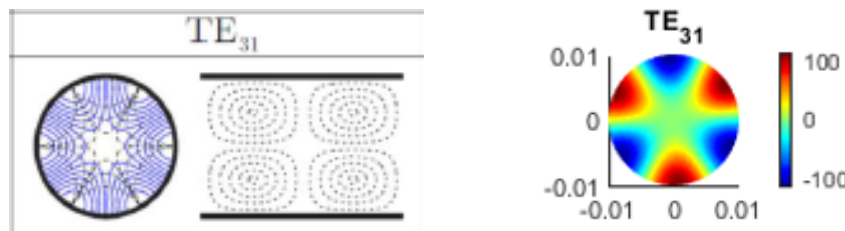
$$\mathbf{TM} \rightarrow \mathbf{H} // \text{ισοσταθμικές της } E_z$$

Άρα στους ρυθμούς TM κοιτώ οι ισοσταθμικές της E_z να συμπίπτουν με το \mathbf{H} (διακεκομμένες γραμμές στα σχήματα του βιβλίου). Για παράδειγμα στον TM_{01} οι ισοσταθμικές είναι κύκλοι, όπως και το \mathbf{H}



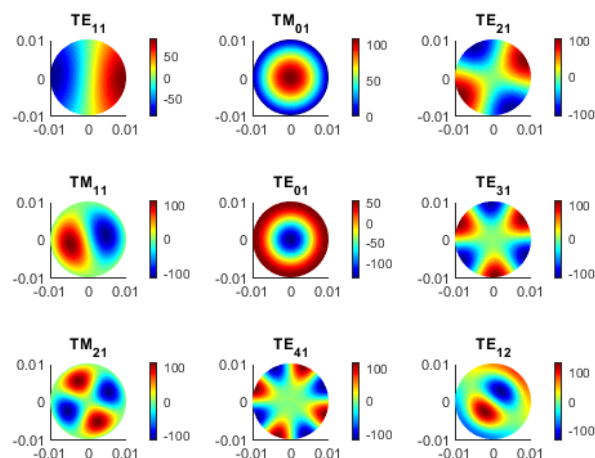
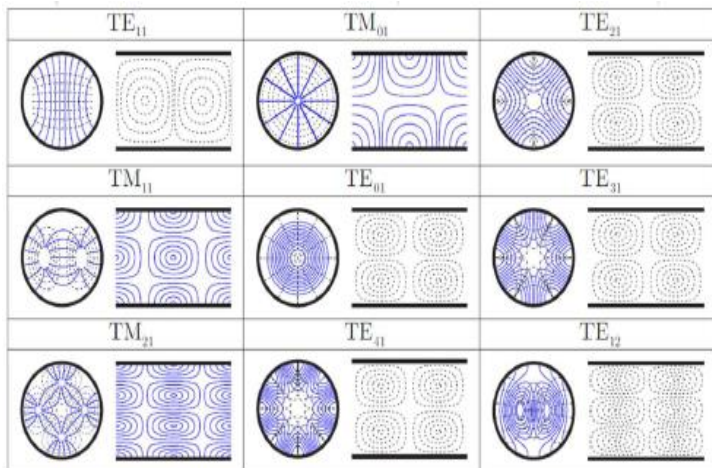
Με ακριβώς ίδια ανάλυση προκύπτει ότι στους TE:

$$\mathbf{TE} \rightarrow \mathbf{E} // \text{ισοσταθμικές της } H_z$$



Παρατηρούμε ότι οι ισοσταθμικές είναι «βουναλάκια» και μάλιστα 6 στον αριθμό, όπως ακριβώς και το μοτίβο που διαγράφουν οι συνεχείς μπλέ καμπύλες του αριστερού σχήματος.

Ομοίως επιβεβαιώνονται και τα υπόλοιπα σχήματα



Στο αρχείο B1.m υπολογίζονται και τα σχετικά σφάλματα των συχνοτήτων αποκοπής για διάφορες τιμές του αριθμού των refinements. Να επισημανθεί ότι τα παρακάτω σφάλματα του πίνακα είναι σε ποσοστό %

N_{ref}	TE_{11}	TM_{01}	TE_{21}	TM_{11}	TE_{01}	TE_{31}	TM_{21}	TE_{41}	TE_{12}
0	0.564632	0.62298	1.057078	1.493376	1.852796	1.735809	2.715825	2.689	4.794403
1	0.14237	0.158431	0.270589	0.379535	0.468388	0.451639	0.690163	0.68147	1.289667
2	0.035104	0.040593	0.069036	0.095593	0.117839	0.110366	0.173853	0.172375	1.977728
3	0.008129	0.010961	0.018199	0.024065	0.029594	0.026654	0.043871	0.043929	0.05109

Παρατηρούμε ότι:

- Για συγκεκριμένο N_{ref} τα σφάλματα αυξάνουν καθώς ο ρυθμός αυξάνει. Αυτό οφείλεται ίσως στο γεγονός ότι, καθώς αυξάνεται ο ρυθμός (και άρα η συχνότητα), το μήκος κύματος μικραίνει και άρα χρειαζόμαστε πιο πυκνή τριγωνοποίηση προκειμένου να «πιάσουμε» τις μεταβολές του πεδίου.
- Με την αύξηση του N_{ref} , η μείωση είναι πολύ μεγάλη. Για παράδειγμα, για τον βασικό ρυθμό TE_{11} , το σφάλμα πέφτει από 0.56% ($N_{ref} = 0$) σε μόλις 0.008% ($N_{ref} = 3$), δηλαδή από σφάλμα 3^{ου} δεκαδικού σε σφάλμα 5^{ου} δεκαδικού.

B.2 Σκέδαση από άπειρο κυκλικό τέλεια αγωγίμο κύλινδρο

- PML

- Ο συντελεστής ανάκλασης στο PML δίνεται από τη σχέση:

$$R = e^{-2\beta k_0 d \cos\theta} \Rightarrow \beta = -\frac{\lambda_0 \ln(R)}{4\pi d \cos\theta}$$

Για κάθετη πρόσπτωση ($\theta = 0$) και συντελεστή ανάκλασης ($R = 10^{-6}$) υπολογίζω το β ανάλογα με την τιμή του d ($\lambda_0 = 1m$).

- Για τις 8 περιοχές του PML, υπολόγισα τα $\varepsilon_{zz}, \mu_{xx}, \mu_{yy}$ σχηματίζοντας τρία διανύσματα, που περιέχουν τα στοιχεία των διαγωνίων των πινάκων L_x, L_y, L_{xy} της θεωρίας:

$L_x = [1/\alpha; \alpha; \alpha]; L_y = [\alpha; 1/\alpha; \alpha]; L_{xy} = [1; 1; \alpha^2];$

Και στη συνέχεια κατασκεύασα πίνακα $M_{3 \times 9}$, στον οποίο οι γραμμές αντιστοιχούν στα $\varepsilon_{zz}, \mu_{xx}, \mu_{yy}$ της αντίστοιχης δικής μου περιοχής (αντίστοιχη στήλη του πίνακα). Η περιοχή 1 (1^η στήλη) αντιστοιχεί στον αέρα, ενώ για τις υπόλοιπες περιοχές χρησιμοποιώ τις σωστές τιμές του αντίστοιχου πίνακα από τους παραπάνω τρεις.

- Ο μετασχηματισμός των περιοχών του matlab στις δικές μου έγινε ως εξής:

Καλώ τη συνάρτηση για τη δημιουργία των περιοχών $[d1, bt] = \text{decsg}(gd, sf, ns)$, βάζοντας και ένα δεύτερο όρισμα στην έξοδο bt. Πρόκειται για ένα πίνακα με διαστάσεις (πλήθος περιοχών που θα «τριγωνοποιηθούν») x (μέγεθος του gd, δηλ πλήθος όλων των περιοχών που υπάρχουν).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
7	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
9	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

Table 1: πίνακας bt

Παρατηρούμε ότι η 10^η περιοχή θα εξαιρεθεί (εσωτερικό του κυλίνδρου) και άρα η 10^η στήλη περιέχει μόνο μηδενικά. Για παράδειγμα, το στοιχείο $bt(2,6)=1$ σημαίνει ότι η 2^η περιοχή του matlab αντιστοιχεί στην 6^η δική μου. Άρα, η αντιστοίχιση γίνεται αυτόματα με τις παρακάτω εντολές κώδικα:

```
% matlab region numbers
matre = zeros(1, size(bt, 2)-1);
for k = 1:length(matre)
    matre(k) = find(bt(:, k)==1);
end

% adjust region numeration to desired numbers
for ie = 1:Ne
    t(4, ie) = find(matre==t(4, ie));
end
```

- Όσο αφορά τις μη ομογενείς **συνθήκες στο όριο του σκεδαστή** ακολουθήσα τα παρακάτω βήματα:
 - Υπολογίζω αρχικά το incident wave E_i σε κάθε σημείο του χώρου, θεωρώντας ότι πίσω από το σκεδαστή δεν υπάρχει προσπίπτον πεδίο (καθώς εν τέλει θα σκεδαστεί και δε θα υπάρξει κύμα πίσω από αυτόν), δηλαδή $E_i = 0$, $x > 0$ & $-a < y < a$. Αλλιώς, $E_i = e^{-j\frac{2\pi x}{\lambda_0}}$. Να σημειωθεί, ότι μέσα στο PML δεν έχω προφανώς k_0 , αλλά πρέπει να υπολογίσω το μήκος κύματος στο αντίστοιχο μέσο. Βέβαια, επειδή η τιμή του πεδίου στο PML είναι αδιάφορη, θα μπορούσα να επιλέξω μηδενική τιμή του προσπίπτοντος πεδίου. Άλλωστε τελικά δεν απεικονίζω το πεδίο μέσα στο PML.

```
% incident wave
E0 = 1; % [V/m]
Ei = zeros(Nn,1);
for in = 1:Nn
    if ( p(2,in)<a && p(2,in)>-a && p(1,in)>0 )
        Ei(in) = 0;
    else
        Ei(in) = E0*exp(-1i*2*pi*p(1,in)/lamda);
    end
end
```

- Για να αρχικοποιήσω το διάνυσμα αγνώστων $X0$, ελέγχω ποιοι κόμβοι ανήκουν στον κύκλο ακτίνας a και απλά δίνω την αντίστοιχη τιμή του $-E_i$

```
for id = 1:Nd
    % check if the id-th edge belongs to an interface
    if ( (e(6,id)==0) || (e(7,id) == 0) )
        % check which edges belong to the a-circle -> Escat = -Ei
        % sqrt(x^2 + y^2) < 3a/2
        if ( sqrt( p(1,e(1,id))^2 + p(2,e(1,id))^2 ) < 3*a/2 )
            % mark both two nodes of the edge as known
            node_id(e(1,id)) = 0;
            node_id(e(2,id)) = 0;
            X0(e(1,id)) = -Ei(e(1,id));
            X0(e(2,id)) = -Ei(e(2,id));
        end
    end
end
```

• Τελική μορφή των εξισώσεων

Από τη θεωρία, γνωρίζουμε ότι η εξίσωση που έχουμε να διακριτοποιήσουμε είναι:

$$\iint_{\Omega} \nabla x \mathbf{E}^{s'} \cdot \bar{\mu}^{-1} \nabla x \mathbf{E}^s ds - \omega^2 \iint_{\Omega} \mathbf{E}^{s'} \cdot \bar{\epsilon} \mathbf{E}^s ds = 0 \quad (1)$$

Για ευκολία στην αντιστοίχιση με τη θεωρία του πρώτου μέρους ονομάζω $E_z^s = \varphi$.

α) Αποδείξαμε ότι η πρώτη υπο-ολοκλήρωση ποσότητα ισούται με

$$\mu_{xx}^{-1} \frac{d\varphi'}{dy} \frac{d\varphi}{dy} + \mu_{yy}^{-1} \frac{d\varphi'}{dx} \frac{d\varphi}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{d\varphi'}{dx} & \frac{d\varphi'}{dy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{yy}^{-1} & 0 \\ 0 & \mu_{xx}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\varphi}{dx} \\ \frac{d\varphi}{dy} \end{bmatrix} = \nabla \varphi' \cdot \tilde{\mu} \nabla \varphi, \quad \tilde{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{yy}^{-1} & 0 \\ 0 & \mu_{xx}^{-1} \end{bmatrix}$$

Συνεπώς ο πρώτος όρος παίρνει τη μορφή:

$$\iint_{\Omega} \nabla \varphi' \cdot \tilde{\mu} \nabla \varphi \, ds = F'^T S F$$

διότι έχει τη γνωστή μορφή (grad-grad). Η διαφορά, ωστόσο, έγκειται στην ύπαρξη του πίνακα $\tilde{\mu}$, ο οποίος «επιδρά» στον υπολογισμό του πίνακα S και, πιο συγκεκριμένα, στον υπολογισμό του τοπικού πίνακα

$$S_{ij}^e = \iint_{\Omega_e} \nabla \zeta_i \cdot \tilde{\mu} \nabla \zeta_j \, ds = A_e [b_i \ c_i] \begin{bmatrix} \mu_{yy}^{-1} & 0 \\ 0 & \mu_{xx}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_j \\ c_j \end{bmatrix} = (b_i \mu_{yy}^{-1} b_j + c_i \mu_{xx}^{-1} c_j) A_e$$

b) Ο δεύτερος όρος γίνεται:

$$\iint_{\Omega} \varphi' \varepsilon_{zz} \varphi \, ds = F'^T T F$$

Όπου ο τοπικός πίνακας μάζας υπολογίζεται ως εξής:

$$T_{ij}^e = \iint_{\Omega_e} \zeta_i \varepsilon_{zz,e} \zeta_j \, ds = \begin{cases} \frac{\varepsilon_{zz,e} A_e}{6}, & i = j \\ \frac{\varepsilon_{zz,e} A_e}{12}, & i \neq j \end{cases}$$

Άρα με τη διακριτοποίηση η (1) γράφεται:

$$F'^T S F - \omega^2 F'^T T F = 0 \Rightarrow F'^T (S - \omega^2 T) F = 0 \Rightarrow F'^T P F = 0, \quad P = S - \omega^2 T$$

Επιλέγοντας ως συναρτήσεις βάσεις τις συναρτήσεις δοκιμής (ορίζοντάς τις μη μηδενικές μόνο στους γνωστούς κόμβους), τότε παίρνουμε (όμοια με την ανάλυση του ηλεκτροστατικού προβλήματος):

$$P_{ff} F_f = -P_{fp} F_p \Rightarrow (S_{ff} - \omega^2 T_{ff}) F_f = -(S_{fp} - \omega^2 T_{fp}) F_p$$

Το τμήμα του κώδικα που υλοποιούνται αυτοί οι πίνακες δίνεται παρακάτω:

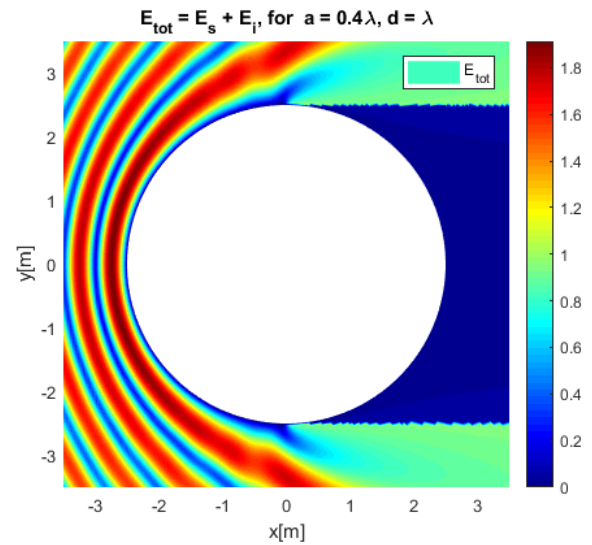
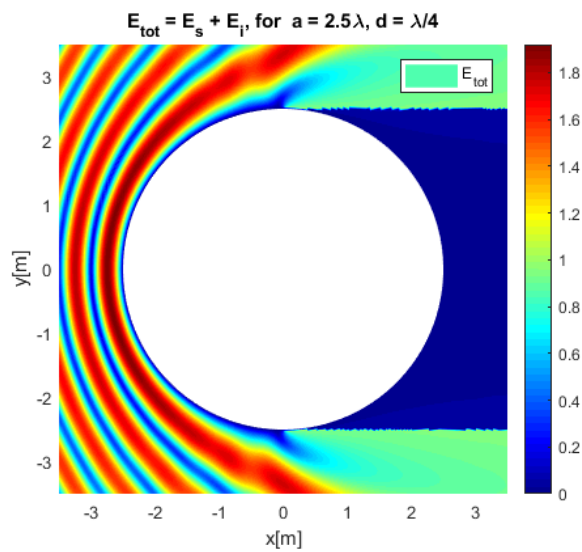
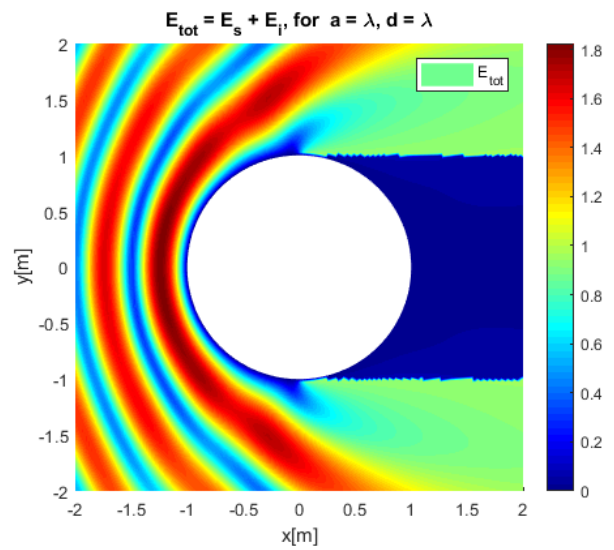
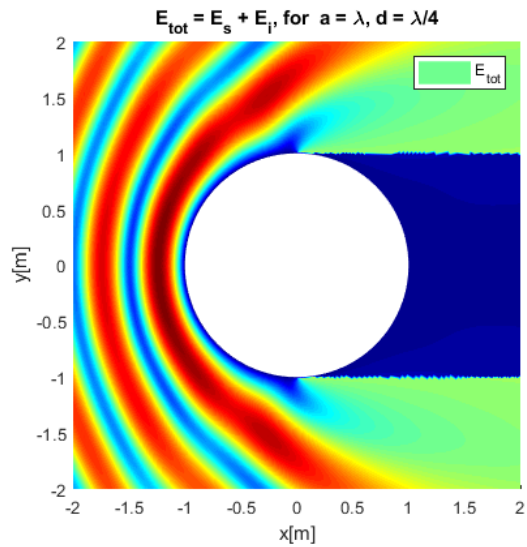
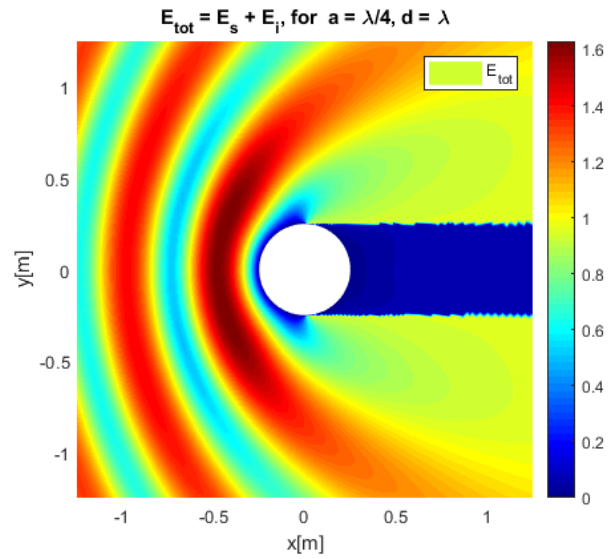
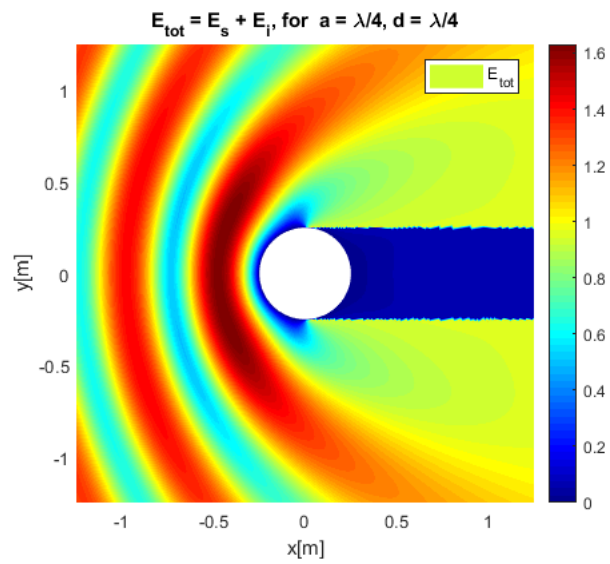
$$\varepsilon_{zz} \rightarrow M(3, rg) \quad \mu_{xx} \rightarrow M(1, rg) \quad \mu_{yy} \rightarrow M(2, rg),$$

οπου M ο πίνακας στο *matlab* με ε, μ που όρισα παραπάνω και $rg = t(4, ie)$

```
% Af & Bf
Se = zeros(3); Pe = zeros(3); Te = (Ae/12)*ones(3);
Te = M(1,rg)*( Te - diag(diag(Te)) + diag((Ae/6)*ones(1,3)) );
for i=1:3
    for j=1:3
        Se(i,j) = ( b(i)*(1/M(3,rg))*b(j) + c(i)*(1/M(2,rg))*c(j) ) *Ae;
        Pe(i,j) = Se(i,j) - (2*pi*3e8/lamda)^2*Te(i,j);
        if (node_id(n(i))~=0)
            if (node_id(n(j))~=0) % i,j:unknown
                Af(index(n(i)),index(n(j))) = Af(index(n(i)),index(n(j))) + Pe(i,j);
            else % i:unknown j:known
                Bf(index(n(i))) = Bf(index(n(i))) - Pe(i,j)*X0(n(j));
            end
        end
    end
end
end
end

% direct solver
X = Af\Bf;
```


Παρακάτω απεικονίζεται το συνολικό πεδίο με 4 refinements και για διάφορες τιμές των a, d



Παρατηρήσεις:

- Φαίνεται ότι και το PML πάχους $d=\lambda/4$ λειτουργεί εξίσου ικανοποιητικά με το PML πάχους $d=\lambda$.
- Πολύ κοντά στον κύλινδρο το πεδίο παίρνει σχεδόν μηδενικές τιμές (και στον κύλινδρο μηδενίζεται, λόγω των οριακών συνθηκών).
- Καθώς η ακτίνα του κυλίνδρου αυξάνει, προσπίπτον και σκεδαζόμενο κύμα δίνουν πιο συχνούς (και πλησιέστερα στον σκεδαστή) και ισχυρότερους συντονισμούς (σκούρο καφέ) και πιο «βαθιά» μηδενικά (σκούρο μπλε).
- Καθώς απομακρυνόμαστε από το σκεδαστή, το μέτρο του πεδίου φαίνεται να κυμαίνεται μεταξύ 0.8-1.5 V/m.