ΑΣΚΗΣΗ 1

(α) Επειδή, σύμφωνα με την εκφώνηση, ανάγουμε το πρόβλημα στην επίλυση ενός επίπεδου κυματοδηγού κατά x και ενός κατά y, προκειμένου να βρούμε τους ενεργούς δείκτες διάθλασης του κυματοδηγού ράβδωσης, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η λύση του προβλήματος μπορεί να γραφεί ως εξής:

$\Psi(x,y,z) = \psi(x,y)e^{-j\beta z}$, (Ψ: ηλεκτρικό ή μγνητικό πεδίο)

όπου $\psi(x,y) = P(y)Q(x)$ (1)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} + (k_0^2 n^2 - \beta_y^2)P = 0 \ (2) \\ \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \left(\beta_y^2 - \beta^2\right)P = 0 \ \ (3) \end{cases} \quad όπου \ \ \beta_y = k_0 n_{eff}$$

Οι παραπάνω μερικές διαφορικές εξισώσεις είναι ίδιες με αυτές ενός επίπεδου κυματοδηγού διηλεκτρικής πλάκας. Όπως φαίνεται ο προσδιορισμός του β γίνεται από την εξίσωση (3) (κυματοδηγός κατά y), η οποία όμως προϋποθέτει τη λύση της (2), δηλαδή το προσδιορισμό των n_{eff} των slabs. Ωστόσο η σχέση (1) μας δίνει και όλη την πληροφορία για τον προσδιορισμό της διεύθυνσης του πεδίου: Τα $P(y), Q(x)$ πρέπει να είναι ομόρροπα, προκειμένου να καταλήγουμε σε μία σχέση της μορφής (1). Δηλαδή, αν το $P(y)$ βρεθεί για τους TM ρυθμούς του κ/ου κατά y, τότε η $Q(x)$ θα πρέπει να λυθεί για τους TE. Συνεπώς καταλήγουμε στα εξής:

$TE_{2D} = TE_x + TM_y$ και $TM_{2D} = TM_x + TE_y$

Όπου σύμφωνα με τις συντεταγμένες της άσκησης οι φορές του ηλεκτρικού πεδίου είναι κατά $\hat{x}$ για τους TE και κατά $\hat{y}$ για τους TM για τους κυματοδηγούς κατά y αντίστροφά για τον κ/ο κατά x. Με αυτό τον τρόπο επιβεβαιώνεται ο παραπάνω συλλογισμός.

Στη συνέχεια παρατίθεται η διαδικασία με τον αντίστοιχο κώδικα για την κατασκευή του ζητούμενου διαγράμματος.

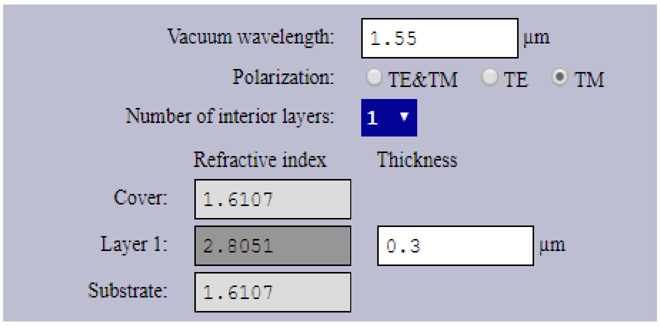
Στον κ/ο κατα y χρησιμοποίησα τη δοθείσα συνάρτηση στο matlab, διότι οι τιμές των t,h είναι σταθερές. Για τα n_{eff} που προέκυψαν διακρίνουμε δύο περιπτώσεις (μία για κάθε ρυθμό του 2D κ/ου) και χρησιμοποίσα την online εφαρμογή για υπολογισμό των ζητούμενων n_{eff}. Να σημειωθεί, ότι, επειδή στα t-slabs δε προέκυψαν TM ρυθμοί, στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε $n_{eff} = 1.45$ θεωρώντας ότι το φως διαρρέει πλήρως στο υπόστρωμα $Si0_2$, όπως ακριβώς δίνεται στην εκφώνηση.

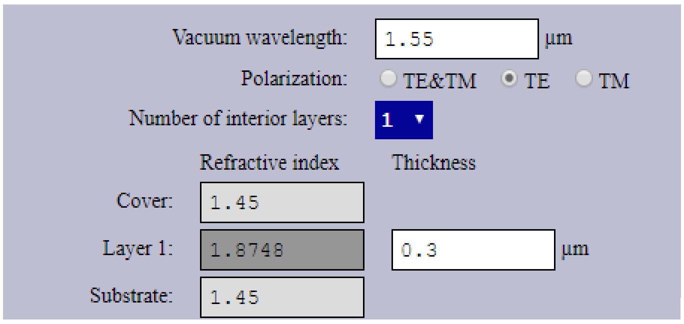
```
% [n1, n2, n3]       n1 > n2 > n3

% 3 slabs - Διεύθυνση y: TE & TM ρυθμοί
[neff_TE_ty, neff_TM_ty] = APDWG(1.55, 0.05, 3.45, 1.45, 1);
[neff_TE_hy, neff_TM_hy] = APDWG(1.55, 0.22, 3.45, 1.45, 1);
```

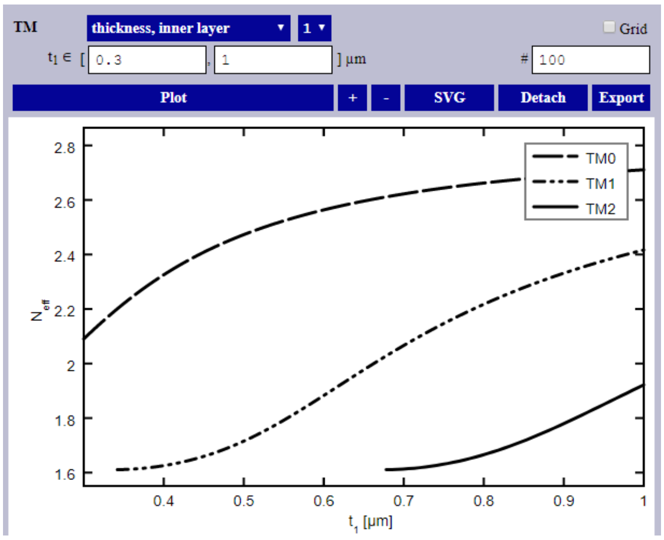
Προκύπτουν: $n_{eff}^{t,TE} = 1.6107$ *και* $n_{eff}^{h,TE} = 2.8051$, $n_{eff}^{h,TM} = 1.8748$

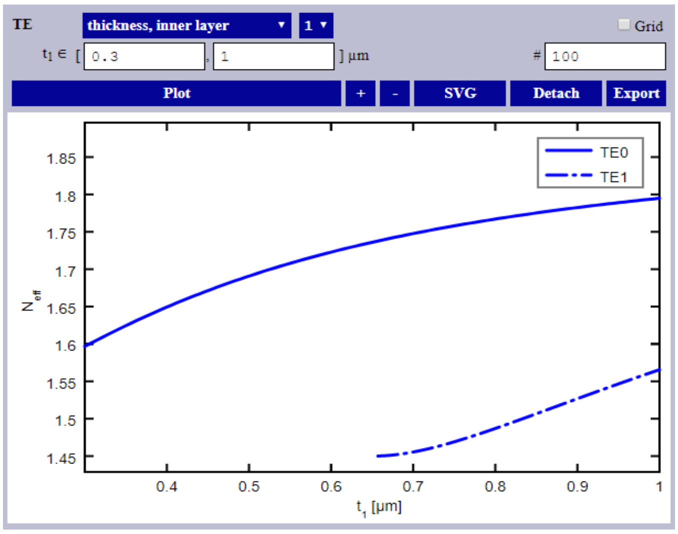
Άρα για το επόμενο στάδιο (κυματοδηγός κατά x) τις εξής 2 περιπτώσεις:

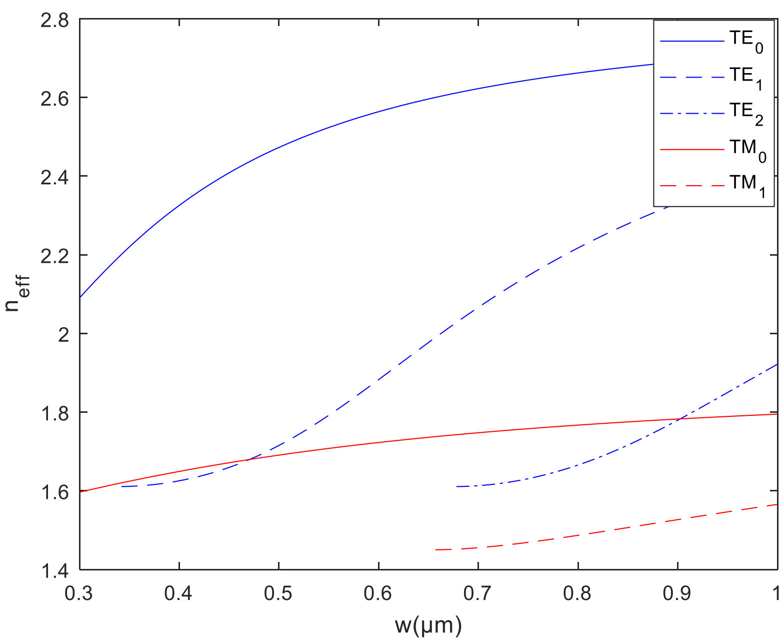
TE_2D **TM_2D**












```
plot(TM0(:,1),TM0(:,2),'b')
hold on
plot(TM1(:,1),TM1(:,2),'--b')
plot(TM2(:,1),TM2(:,2),'-.b')
plot(TE0(:,1),TE0(:,2),'r')
plot(TE1(:,1),TE1(:,2),'--r')
ylabel('n_e_f_f')
xlabel('w(µm)')
legend('TE_0', 'TE_1',
'TE_2', 'TM_0', 'TM_1')
```

Οι ρυθμοί ανώτερης τάξης επισημαίνονται με διακεκομένες γραμμές και αρχίζουν να εμφανίζονται για $w \simeq 0.335\ \mu m$

(β) Επειδή, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, μία συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων που προέρχονται από δύο διαδοχικά προβλήματα, δηλαδή:

$$E_{2D} = E^y E^x \quad \textit{και} \; H_{2D} = H^y H^x$$

όπου οι δείκτες x,y δηλώνουν τη διεύθυνση του αντίστοιχου κυματοδηγού διηλεκτρικής πλάκας, το διάνυσμα Poynting θα είχε μέτρο:

$$S_z = E^y E^x (H^y H^x)^* = S_z^y S_z^x$$

Από τους τρεις κυματοδηγούς κατά y, μας ενδιαφέρει μόνο το ποσοστό ισχύος που συγκεντρώνεται στον κεντρικό, διότι εκεί οδηγείται το κύμα. Ο υπολογισμός του ποσοστού ισχύος θα γίνει με αριθμιτική ολοκλήρωση του διανύσματος Poynting. Πιο συγκεκριμένα:

$$\Pi = \frac{\int_{x_{down}}^{x_{up}} S_z(x)dx}{\int_{-x_w}^{x_w} S_z(x)dx}, \qquad \textit{όπου το 'w' συμβολίζει το μέγεθος του παραθύρου που έχουμε επιλέξει}$$

στην online εφαρμογή που μας εμφανίζει τις τιμές και το διάγραμμα του $S_z(x)$.

Για τον αριθμιτικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος τραπεζίου, στην οποία, για μία συνάρτηση f(x) που ορίζεται σε διάστημα [a,b], ισχύει ότι:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\delta}{2}\left\{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{\substack{x_i = i\delta \\ 2 \le i \le N-1}} f(x_i) \right\}, \; \textit{όπου} \; \delta = \frac{b-a}{N}$$

Στη δική μας περίπτωση, το δ είναι κοινό σε αριθμιτή και παρονομαστή, οπότε το παραπάνω κλάσμα απλοποιείται στην εξής έκφραση:

$$\boxed{\Pi = \frac{f(x\_down) + f(x\_up) + 2\sum_{\substack{x_i: \\ x_{down} < x_i < x\_up}} f(x_i)}{f(-x_w) + f(x_w) + 2\sum_{\substack{x_i: \\ -x_w < x_i < x_w}} f(x_i)} \quad (1)}$$

- Κυματοδηγός κατά y
  Επειδή τα n_1, n_2, n_3 σταθερά στο slab-h, έπεται ότι το $\Pi_h = \textit{σταθερό}$
  Εδώ, για την ευκολία στο κώδικα, τροποποιούμε τις τιμές του διανύσματος **x** (περιέχει τις τιμές του x από το διάγραμμα $S_z(x)$, έτσι ώστε $x_{down} = 0$ & $x_{up} = w$, διότι οι δύο αυτές παράμετροι είχαν τιμές πολύ κοντά στις παραπάνω.

```
function Sz_ratio = Power_Ratio_h_1D(A,w)

% Στον πίνακα A καταχωρούμε τις τιμές του Sz (2xN πίνακας)
% Cover:     1
% Layer1:    3.45
% Substrate: 1.45
% h = 0.22 um

    x = A(:,1); % οι τιμές x
    p = A(:,2); % οι τιμές Sz(x)

    x1 = find(x==0); % βρίσκει το index x1 του x όπου x(x1)==0
    x2 = find(x==w);

    x_down = x1;
    x_up = x2;

    % Μέθοδος τραπεζίου για την αριθμιτική ολοκλήρωση του διανύσματος Poynting
    s = 0;
    for j = (x_down+1):(x_up-1)
        s = s + p(j);
    end
    sum_guide = p(x_down) + p(x_up) + 2*s;
    sum_total = p(1) + p(end) + 2*(sum(p)-p(1)-p(end));

    Sz_ratio = sum_guide/sum_total;
end
```

- Κυματοδηγός κατά x ($TE_x = TM_{2D}$, $TM_x = TE_{2D}$)
  Εδώ $x_{down} = -\frac{w}{2}$ $και$ $x_{up} = \frac{w}{2}$ (προκύπτει από τα διαγράμματα $S_z(x)$ με την online εφαρμογή)
  - TEx ρυθμοί: Το S_z είναι συνεχές στα όρια x_{down} και x_{up} και για το λόγο αυτό οι τιμές $S_z(x_{down})$, $S_z(x_{up})$ εμφανίζονται δύο φορές στο αρχείο των τιμών που παίρνουμε από την online εφαρμογή.Έτσι στο άθροισμα του παρονομαστή της σχέσης (1) πρέπει να αφαιρέσουμε μία φορά τις δύο αυτές τιμές

  - TMx ρυθμοί: Το S_z εμφανιίζει ασυνέχεια στα όρια x_{down} και x_{up} και για το λόγο αυτό οι τιμές $S_z(x_{down})$, $S_z(x_{up})$ εμφανίζονται μόνο μια φορά στο αρχείο των τιμών που παίρνουμε από την online εφαρμογή.

```
function Sz_ratio = Power_Ratio_TM_2D(A,w)

% TEx
% Cover:     1.6107
% Layer1:    2.8051
% Substrate: 1.6107
% w -> [0.3, 1]

    x = A(:,1); % οι τιμές x
    p = A(:,2); % οι τιμές Sz(x)

    x1 = find(x==-w/2);
    x2 = find(x==w/2);
    x_down = x1(2); % <0
    x_up = x2(1); % >0
```

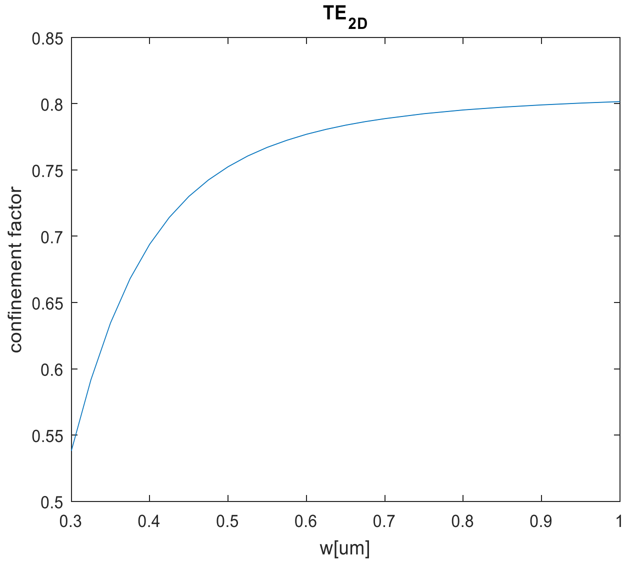
```
    % Μέθοδος τραπεζίου για την αριθμιτική ολοκλήρωση του διανύσματος Poynting
    s = 0;
    for j = (x_down+1):(x_up-1)
        s = s + p(j);
    end
    sum_guide = p(x_down) + p(x_up) + 2*s;
    % Εδώ αφαιρούμε μία φορά τα p(x_down), p(x_up)
    sum_total = p(1) + p(end) + 2*(sum(p)-p(1)-p(end)-p(x_down)-p(x_up));

    Sz_ratio = sum_guide/sum_total;

end


function Sz_ratio = Power_Ratio_TE_2D(A,w)

% TMx
% Στον πίνακα A καταχωρούμε τις τιμές του Sz (2xN πίνακας)
% Cover:     1.45
% Layer1:    1.8748
% Substrate: 1.45
% w -> [0.3, 1]

    x = A(:,1); % οι τιμές x
    p = A(:,2); % οι τιμές Sz(x)

    x_down = find(x==-w/2); % <0
    x_up = find(x==w/2); % >0

    % Μέθοδος τραπεζίου για την αριθμιτική ολοκλήρωση του διανύσματος Poynting
    s = 0;
    for j = (x_down+1):(x_up-1)
        s = s + p(j);
    end
    sum_guide = p(x_down) + p(x_up) + 2*s;
    sum_total = p(1) + p(end) + 2*(sum(p)-p(1)-p(end));

    Sz_ratio = sum_guide/sum_total;

end
```

Καλούμε τις δύο παραπάνω συναρτήσεις για όλα τα αρχεία που με τις τιμές των [x,Sz(x)] και παιρνάμε τα αποτελέσματα στα διανύσματα PowerRatioTE, PowerRatioTM. Από την πρώτη συνάρτηση προκύπτει ότι h_TE = 0.8084 και h_TM = 0.5344

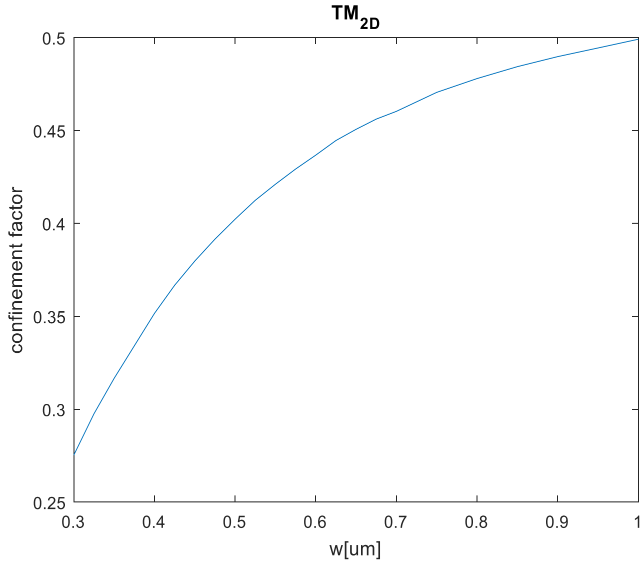
Ο κώδικας που ακολουθεί κατασκευάζει τα ζητούμενα διαγράμματα

```
w = [0.3:0.025:0.7, 0.75:0.05:1];
h_TE = 0.8084;
h_TM = 0.5344;

plot(w, h_TE*PowerRatioTE)
xlabel('w[um]')
ylabel('confinement factor')
title('TE_2_D')
figure
plot(w, h_TM*PowerRatioTM)
xlabel('w[um]')
ylabel('confinement factor')
```

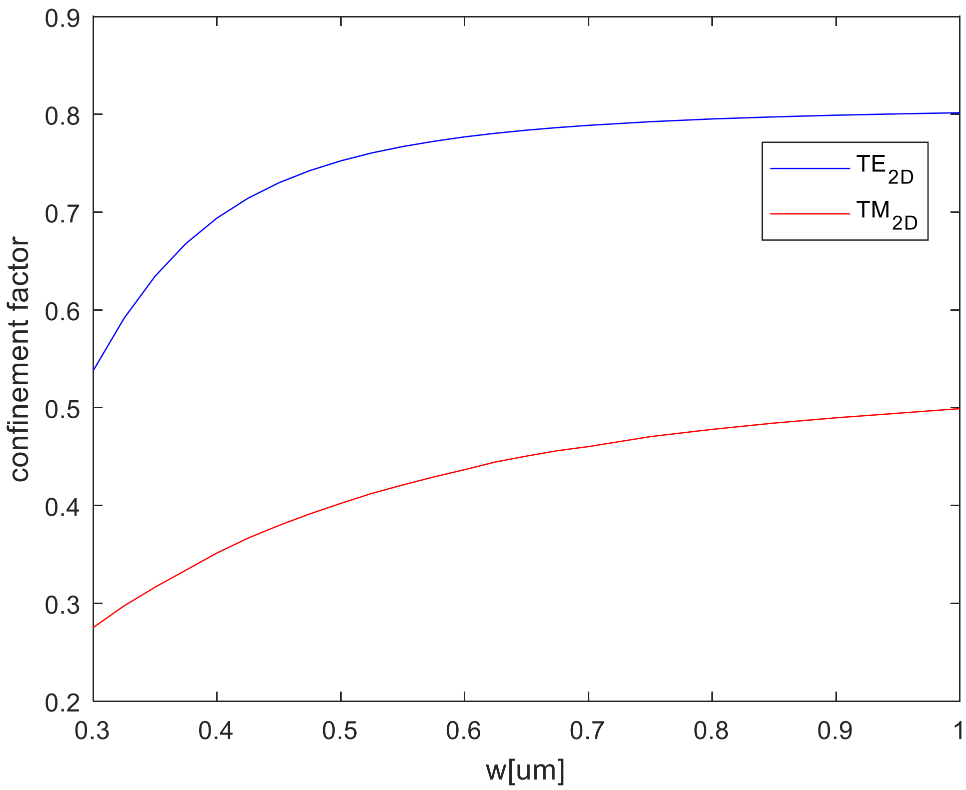
```
title('TM_2_D')
```



TE_{2D}
confinement factor
w[um]



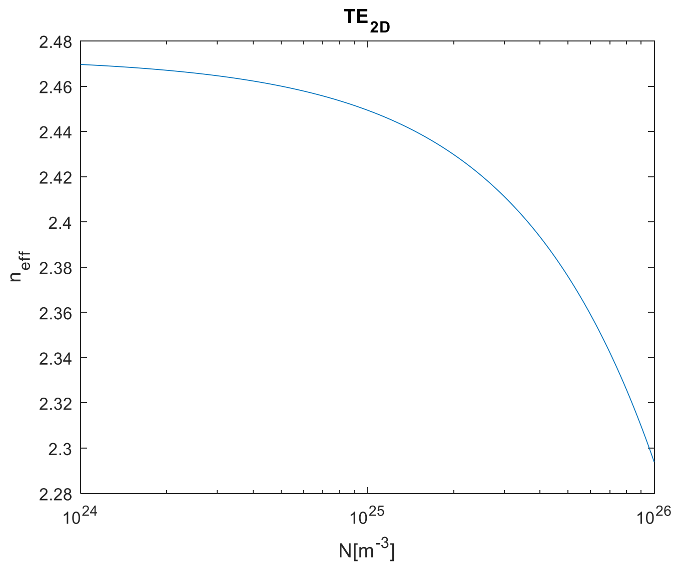
TM_{2D}
confinement factor
w[um]

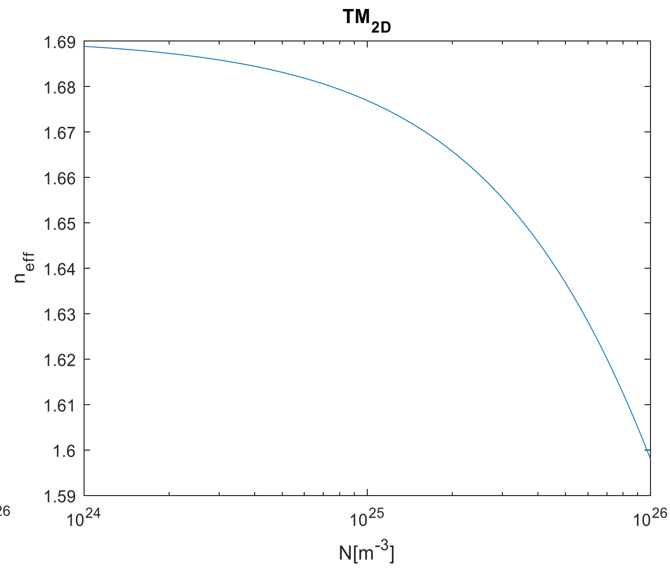


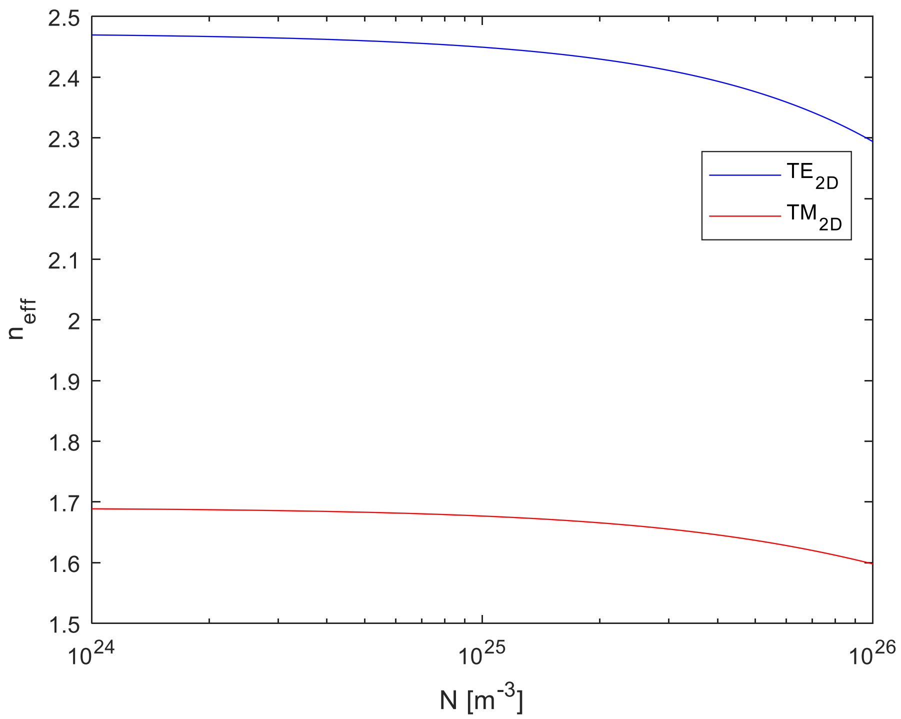
TE_{2D}
TM_{2D}
confinement factor
w[um]

(γ) Ο κώδικας δίνεται παρακάτω μαζί με σχόλια και τα αντίστοιχα διαγράμματα

```
sne = 8.8e-28;
snh = 4.6e-28;
nSi0 = 3.45;
t = 0.05; %um
h = 0.22; %um
w = 0.5;  %um

k = 0;
N = 1e24:1e23:1e26;
neff_TE_2D = zeros(1,length(N));
neff_TM_2D = zeros(1,length(N));

for n = N
    k = k + 1;
    nSi = nSi0 - n*sne - (n*snh)^0.8;

    % Κυματοδηγός κατά y (TE_y, TM_y)
    % Για κάθε διαφορετική τιμή του nSi, μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι
    % του ενός ρυθμοί στα slabs: a)slab_t -> TE_ty, TM_ty
    %                            b)slab_h -> TE_hy, TM_hy
    [neff_TE_ty, neff_TM_ty] = APDWG(1.55, t, nSi, 1.45, 1);
    [neff_TE_hy, neff_TM_hy] = APDWG(1.55, h, nSi, 1.45, 1);

    % Κυματοδηγός κατά x (TE_x, TM_x)

    % TE_2D = TM_x  (neff_TE_hy, neff_TE_ty, neff_TE_ty -> vectors)
    % Για κάθε συνδυασμό των παραπάνω neff προκύπτει TM_x -> vector
    % Επομένως πρέπει να πάρω τον βασικό ρυθμό, άρα το TM_x(1)
    neff_TM_x_MIN = 100;
    for i = 1:length(neff_TE_hy)
        for j = 1:length(neff_TE_ty)
            [a, neff_TM_x] = APDWG(1.55,w,neff_TE_hy(i),neff_TE_ty(j),neff_TE_ty(j));
            if (neff_TM_x(1) < neff_TM_x_MIN)
                neff_TM_x_MIN = neff_TM_x(1);
            end
        end
    end
    neff_TE_2D(k) = neff_TM_x_MIN;

    % TM_2D
    % TM_2D = TE_x  (neff_TM_hy -> vector, 1.45, 1.45)
    % Για κάθε τιμή του παραπάνω neff_TM_hy προκύπτει TE_x -> vector
    % Επομένως πρέπει να πάρω τον βασικό ρυθμό, άρα το TE_x(1)
    neff_TE_x_MIN = 100;
    for i = 1:length(neff_TM_hy)
        [neff_TE_x, b] = APDWG(1.55, w, neff_TM_hy(i), 1.45, 1.45);
        if(neff_TE_x(1) < neff_TE_x_MIN)
            neff_TE_x_MIN = neff_TE_x(1);
        end
    end
    neff_TM_2D(k) = neff_TE_x_MIN;
end

semilogx(N,neff_TE_2D, 'b')
hold on
semilogx(N,neff_TM_2D,'r')
xlabel('N [m^-^3]')
ylabel('n_e_f_f')
legend('TE_2_D','TM_2_D')
```







Αυτό που θέλουμε στο συγκεκριμένο ερώτημα είναι, για συγκεκριμένο μήκος κυματοδηγού (το οποίο πρέπει να υπολογίσουμε), η φάση του κύματος στον κυματοδηγό, συναρτήσει του n_{eff}, να έχει εύρος τιμών [0,π]. Με άλλα λόγια, για συγκεκριμένο κυματοδηγό (δλδ συγκεκριμένο μήκος) και συγκεκριμένο κύμα στην είσοδο του, ρυθμίζοντας κατάλληλα το n_{eff}, μπορώ στο εισερχόμενο κύμα να δημιουργή φάση στο διάστημα [0,π].

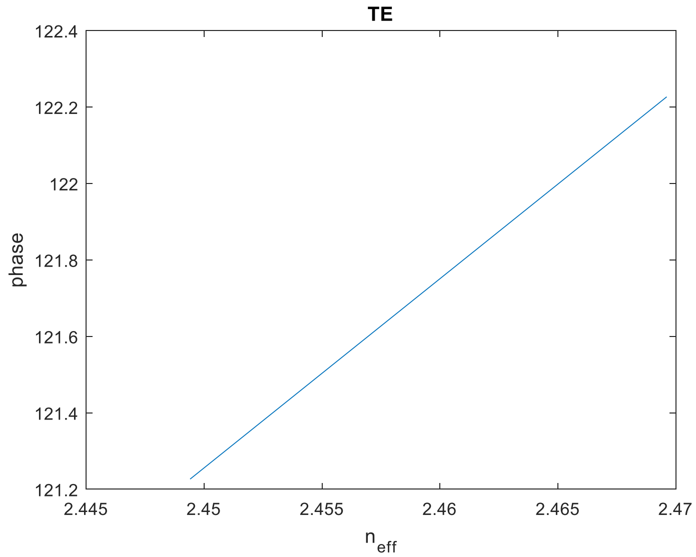
Στη συνέχεια τρέχουμε ξανά τον παραπάνω κώδικα μέχρι το άνω επιτρεπτό όριο που δίνεται: $N = 10^{25} m^{-3}$ $(N \in [10^{24}, 10^{25}]\ m^{-3})$ και προσδιορίζουμε το αντίστοιχο εύρος τιμών του n_{eff}. Η φάση του κύματος στο τέλος του κυματοδηγού δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi = \beta l = 2\pi \frac{l}{\lambda_o} n_{eff}$$

Επομένως απαιτούμε:

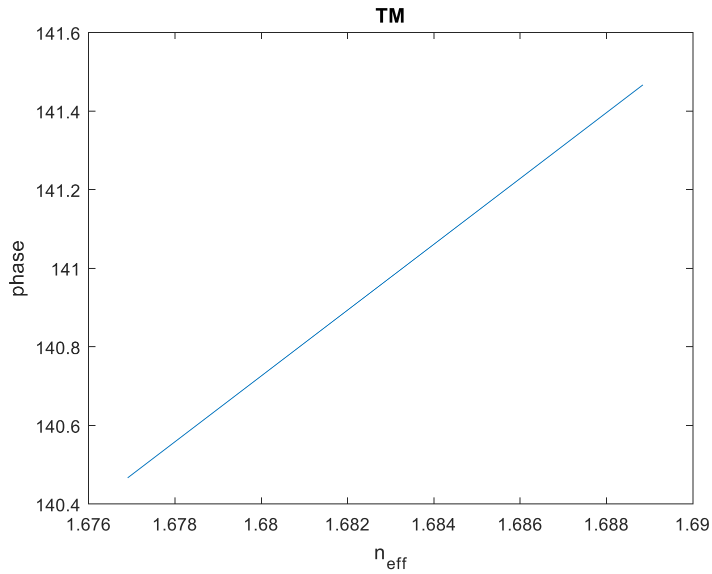
$$\Delta\varphi = \varphi_{max} - \varphi_{min} = 2\pi \;\Rightarrow\; 2\pi\frac{l}{\lambda_o}\left(n_{eff,max} - n_{eff,min}\right) = \pi \;\Rightarrow\; l = \frac{\lambda_o}{2\left(n_{eff,max} - n_{eff,min}\right)}$$

- TE ρυθμοί: $l_{TE} = 38.3565\ \mu m$




```
lo = 1.55;
L = (lo/2)/(neff_TE_2D(1)-
neff_TE_2D(end));
phase = 2*(L/lo)*neff_TE_2D;
plot(neff_TE_2D,phase)
ylabel('phase')
xlabel('n_e_f_f')
title('TE')
```

- TM ρυθμοί: $l_{TM} = 64.9183\ \mu m$




```
lo = 1.55;
L = (lo/2)/(neff_TM_2D(1)-
neff_TM_2D(end));
phase = 2*(L/lo)*neff_TM_2D;
plot(neff_TM_2D,phase)
ylabel('phase')
xlabel('n_e_f_f')
title('TM')
```

Παρατηρούμε ότι $l_{TM} \approx 1.7 l_{TE}$ το οποίο οφείλεται στο γεγονός ότι, στους TE ρυθμούς το n_{eff} είναι πιο «ευαίσθητο» στις μεταβολές του N, με αποτέλεσμα η κλίση της καμπύλης $n_{eff} = n_{eff}(N)$ να είναι μεγαλύτερη και να οδηγεί σε οδηγεί σε μ