ΑΣΚΗΣΗ 2

(α) Υποθέτουμε ότι υπάρχει μόνο η E_x συνιστώσα του πεδίου. Τη γράφουμε στη μορφή: $E_x = \psi(\rho,\varphi)e^{-j\beta z}$. Η εξίσωση Helmholtz γίνεται:

$$\Delta_t\psi_i + (k_0^2 n_i^2 - \beta^2)\psi_i = 0 \ \ (1), \qquad \gamma\iota\alpha\ i = 1,2$$

όπου $\Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ και $\psi(\rho,\varphi) = \begin{cases}\psi_1(\rho,\varphi), & \rho \le \alpha \\ \psi_2(\rho,\varphi), & \rho > \alpha\end{cases}$

Η (1) δίνει, σύμφωνα με τη θεωρία, τις λύσεις:

$\psi_1(\rho,\varphi) = A_1 J_m\left(\rho\frac{u}{a}\right)\cos(m\varphi), \quad u = a\sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2}$ και

$\psi_2(\rho,\varphi) = A_2 K_m\left(\rho\frac{w}{a}\right)\cos(m\varphi), \quad w = a\sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}$

Όμως οι ψ_1, ψ_2 αντιστοιχούν σε συνιστώσα του E κατά x. Επομένως, θα πρέπει να μετασχηματίσουμε τις οριακές συνθήκες των E_φ και E_z (στην περίπτωση της ασθενούς κυματοδήγησης, αλλά όχι στην ειδική περίπτωση των LP ρυθμών)σε οριακές συνθήκες της συνιστώσας E_x. Αποδεικνύεται ότι, στην περίπτωσή μας, αυτές οι συνθήκες -στη διαχωριστική επιφάνεια ρ=α- για $n_1 \approx n_2$ είναι οι εξής (η απόδειξη ξεφεύγει από τα πλαίσια της εργασίας):

$$\begin{cases}\psi_1 = \psi_2 \\ \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\rho} = \dfrac{\partial\psi_2}{\partial\rho}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A_1 J_m(u) = A_2 K_m(w) \\ A_1\dfrac{u}{a}J_m'(u) = A_1\dfrac{w}{a}K_m'(u)\end{cases}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω σχέσεις τελικά προκύπτει ότι:

$$\frac{uJ_m'(u)}{J_m(u)} = \frac{wK_m'(w)}{K_m(w)}$$

(β) Από το τυπολόγιο χρησιμοποιούμε τις σχέσεις:

$$J_0'(x) = -J_1(x) \ \ (1) \ \ \kappa\alpha\iota \ \ K_0'(x) = -K_1(x) \ (2)$$

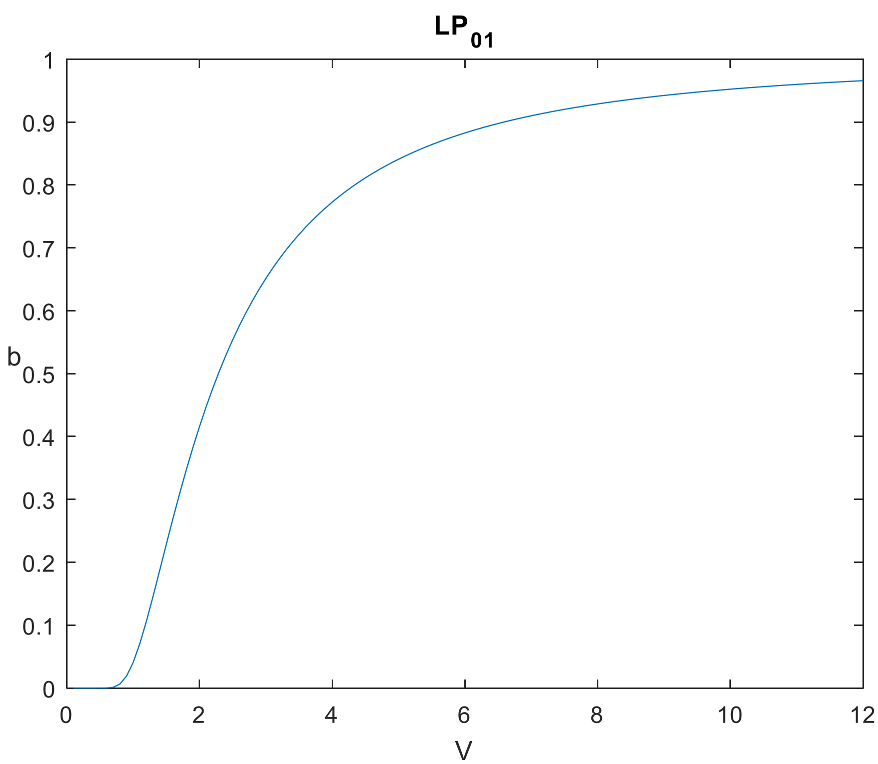
Επίσης, λύνοντας τη σχέση της κανονικοποιημένης σταθεράς διάδοσης ως προς β παίρνουμε: $\beta^2 = k_0^2\left(n_2^2 + b(n_1^2 - n_2^2)\right)$ (3). Επομένως έχουμε:

- $u = a\sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} \overset{(3)}{\Rightarrow} u = a\sqrt{k_0^2 n_1^2 - k_0^2 n_2^2 - k_0^2 b(n_1^2 - n_2^2)} = ak_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\sqrt{1-b} = V\sqrt{1-b}$ (4)
- $w = a\sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2} \overset{(3)}{\Rightarrow} w = a\sqrt{k_0^2 n_2^2 + k_0^2 b(n_1^2 - n_2^2) - k_0^2 n_2^2} = ak_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\sqrt{b} = V\sqrt{b}$ (5)

Από τη χαρακτηριστική εξίσωση του ερωτήματος (α), θέτοντας n=0 και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1),(2),(4) και (5), καταλήγουμε στη ζητούμενη μορφή της χαρακτηριστικής εξίσωσης για τον βασικό ρυθμό.

(γ) Επειδή $0 \leq b \leq 1$, αρχικά έθεσα ως αρχική τιμή στην fsolve την $b_0 = 1$, αλλά διαπίστωσα ασυνέχειες στην καμπύλη, οπότε την τροποποιήσα σε $b_0 = 0.99$, προκειμένου να εντοπιστούν οι λύσεις στο [0,1). Ο κώδικας και το διάγραμμα δίνονται παρακάτω.

```
v = 0.1:0.1:12;
b = zeros(1,length(v));
k = 0;
for V = v
    k = k + 1;
    g = @(b) sqrt(1-b)*besselj(1,V*sqrt(1-b))/besselj(0,V*sqrt(1-b))...
            -sqrt(b)*besselk(1,V*sqrt(b))/besselk(0,V*sqrt(b));
    b(k) = fsolve(g,0.99);
end
plot(v,b)
xlabel('V')
ylabel('b')
title('LP_0_1')
set(get(gca,'ylabel'),'rotation',0)
```



(δ) Για τον βασικό ρυθμό, θέτοντας m=0, παίρνουμε:

$$\psi_1(\rho,\varphi) = A_1 J_0\left(\rho\frac{u}{a}\right), u = V\sqrt{1-b} \quad \kappa\alpha\iota \quad \psi_2(\rho,\varphi) = A_2 K_0\left(\rho\frac{w}{a}\right), w = V\sqrt{b}$$

- Ο αριθμιτής του A_{eff} γράφεται:

$$\text{AP} = \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\psi^2(\rho,\varphi)\,\rho d\rho d\varphi\right)^2 = \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}{A_1}^2{J_0}^2\left(\rho\frac{u}{a}\right)\rho d\rho d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_{\alpha}^{\infty}{A_2}^2\,{K_0}^2\left(\rho\frac{w}{a}\right)\rho d\rho d\varphi\right)^2$$

$$= 4\pi^2\left({A_1}^2\int_0^{\alpha}{J_0}^2\left(\rho\frac{u}{a}\right)\rho d\rho + {A_2}^2\int_0^{\alpha}{K_0}^2\left(\rho\frac{w}{a}\right)\rho d\rho\right)^2$$

Όμως από την πρώτη οριακή συνθήκη για τη συνάρτηση $\psi(\rho,\varphi)$ μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σχέση μεταξύ των συντελεστών A_1, A_2:

$$A_2 = A_1\frac{J_0(u)}{K_0(w)} = A_1 p(u,w)\ (1)$$

Επίσης κάνοντας αλλαγή μεταβλητής στα ολοκληρώματα $r = \frac{\rho}{\alpha}$

$$\int_0^{\alpha}\rho{J_0}^2\left(\rho\frac{u}{a}\right)d\rho = \int_0^1 ar{J_0}^2(ur)adr = a^2\int_0^1 r{J_0}^2(ur)dr\ \ (2)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1),(2) ο αριθμιτής παίρνει τη μορφή:

$$AP = 4\pi^2 a^4 {A_1}^4\left(\int_0^1 x{J_0}^2(ux)dx + p^2(u,w)\int_1^{\infty}x{K_0}^2(wx)dx\right)^2\ \ (3)$$

- Με παρόμοιο σκεπτικό ο παρονομαστής απλοποιείται στην παρακάτω μορφή:

$$\Pi A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\psi^4(\rho,\varphi)\,\rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\alpha}{A_1}^4{J_0}^4\left(\rho\frac{u}{a}\right)\rho d\rho d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_{\alpha}^{\infty}{A_2}^4\,{K_0}^4\left(\rho\frac{w}{a}\right)\rho d\rho d\varphi$$

$$= 2\pi{A_1}^4\left(\int_0^{\alpha}\rho{J_0}^2\left(\rho\frac{u}{a}\right)d\rho + p^4(u,w)\int_a^{\infty}\rho{K_0}^2\left(\rho\frac{w}{a}\right)d\rho\right)$$

$$\Pi A = 2\pi a^2{A_1}^4\left(\int_0^1 x{J_0}^4(ux)dx + p^4(u,w)\int_1^{\infty}x{K_0}^4(wx)dx\right)\ (4)$$

- Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3),(4) βρίσκουμε ότι η κανονικοποιημένη μορφή της ενεργού επιφάνειας είναι:

$$A_{eff,n} = \frac{A_{eff}}{\pi\alpha^2} = 2\frac{\left(\int_0^1 x{J_0}^2(ux)dx + p^2(u,w)\int_1^{\infty}x{K_0}^2(wx)dx\right)^2}{\int_0^1 x{J_0}^4(ux)dx + p^4(u,w)\int_1^{\infty}x{K_0}^4(wx)dx}$$

Ο κώδικας σε matlab και το ζητούμενο διάγραμμα δίνονται παρακάτω

```
v = 0.8:0.01:2.4;
b = zeros(1,length(v));
Aeff_n = zeros(1,length(v));
k = 0;

for V = v
    k = k + 1;
    g = @(b) sqrt(1-b)*besselj(1,V*sqrt(1-b))/besselj(0,V*sqrt(1-b))...
            -sqrt(b)*besselk(1,V*sqrt(b))/besselk(0,V*sqrt(b));
    b = fsolve(g,0.99);

    u = V*sqrt(1-b);
    w = V*sqrt(b);
    p = besselj(0,u)/besselk(0,w);
    bessj1 = @(x) x.*(besselj(0,u*x)).^2;
    intj1 = integral(bessj1,0,1);
    bessj2 = @(x) x.*(besselj(0,u*x)).^4;
    intj2 = integral(bessj2,0,1);
    bessk1 = @(x) x.*(besselk(0,w*x)).^2;
    intk1 = integral(bessk1,1,Inf);
    bessk2 = @(x) x.*(besselk(0,w*x)).^4;
    intk2 = integral(bessk2,1,Inf);
    % normalized Aeff
    Aeff_n(k) = 2*((intj1 + p^2*intk1)^2)/(intj2 + p^4*intk2);
end

plot(v,Aeff_n)
xlabel('V')
ylabel('A_e_f_f_,_n')
```