2. Υπολογισμοί σε οπτικές ίνες στα πλαίσια της βαθμωτής προσέγγισης

Οι οπτικές ίνες για μετάδοση σε μεγάλες αποστάσεις λειτουργούν σχεδόν στο σύνολο τους στο πλαίσιο της ασθενούς κυματοδήγησης, δηλαδή ο δείκτης διάθλασης πυρήνα (n_1) είναι πολύ κοντά στο δείκτη διάθλασης του περιβλήματος (n_2), $n_1 \approx n_2$. Αυτό επιτρέπει τη μελέτη της οδήγησης με τη χρήση ενός βαθμωτού μεγέθους ψ, το οποίο εκφράζει κάποια εγκάρσια συνιστώσα του ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου. Οι ρυθμοί που υπολογίζονται στα πλαίσια της βαθμωτής αυτής προσέγγισης μπορεί να θεωρηθεί ότι έχουν γραμμική πόλωση κατά $\hat{\mathbf{x}}$ ή $\hat{\mathbf{y}}$ και αντιστοιχίζονται προς τους γραμμικά πολωμένους ρυθμούς LP_{nm} που έχουν εισαχθεί στη διανυσματική αντιμετώπιση.

(α) Ξεκινώντας από τη βαθμωτή εξίσωση κύματος

$$\nabla^2\psi + k_0^2 n^2 \psi = 0\,,$$

αποδείξτε ότι η **χαρακτηριστική εξίσωση** έχει τη μορφή:

$$\frac{UJ_n'(U)}{J_n(U)} = \frac{WK_n'(W)}{K_n(W)},\; U = a\sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2}, W = a\sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}$$

Η συνάρτηση K_n είναι τροποποιημένη συνάρτηση Bessel και συνδέεται άμεσα με σχέση αναλογίας με τη συνάρτηση Hankel 1ου είδους, $K_n(x) = (\pi / 2) j^{n+1} H_n^{(1)}(jx)$.

(β) Για την περίπτωση του **βασικού ρυθμού** $(n = 0)$ και κάνοντας χρήση της κανονικοποιημένης σταθεράς διάδοσης

$$b = \frac{\beta^2 / k_0^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}$$

και της παραμέτρου V της ίνας

$$V = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

αποδείξτε ότι η **χαρακτηριστική εξίσωση** μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{\sqrt{1-b}\,J_1(V\sqrt{1-b})}{J_0(V\sqrt{1-b})} = \frac{\sqrt{b}\,K_1(V\sqrt{b})}{K_0(V\sqrt{b})}.$$

(γ) Επιλύστε την παραπάνω εξίσωση αριθμητικά (με τη συνάρτηση fsolve του MATLAB) και δώστε σε γραφική παράσταση τη **σχέση διασποράς** $b = b(V)$ όταν $0.1 \le V \le 12$ για το βασικό ρυθμό LP_{01}. Η καμπύλη που θα βρείτε θα πρέπει να έχει μεγάλη ομοιότητα με την πρώτη καμπύλη του Σχήματος 2.17.

(δ) Δώστε σε γραφική παράσταση τη μεταβολή της **ενεργού επιφάνειας** A_{eff} για το βασικό ρυθμό LP_{01} όταν η παράμετρος V λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0.8, 2.4]$. Η ενεργός επιφάνεια δίνεται από τη σχέση

$$A_{\text{eff}} = \frac{\left(\iint_{\infty} \left| \psi(x,y) \right|^2 dxdy \right)^2}{\iint_{\infty} \left| \psi(x,y) \right|^4 dxdy},$$

όπου $\psi(x,y)$ είναι το εγκάρσιο προφίλ του ρυθμού και η ολοκλήρωση γίνεται σε όλο το εγκάρσιο xy-επίπεδο.

Σημείωση 1: Τα ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν αριθμητικά από δείγματα της συνάρτησης $\psi(x,y)$ σε ικανοποιητικά μεγάλη έκταση στο xy-επίπεδο ώστε να προσομοιώνεται η άπειρη διατομή στα ολοκληρώματα της ενεργού επιφανείας.

Σημείωση 2: Η καμπύλη $A_{\text{eff}}(V)$ να απεικονισθεί κανονικοποιημένη ως προς τη γεωμετρική επιφάνεια του πυρήνα της ίνας.