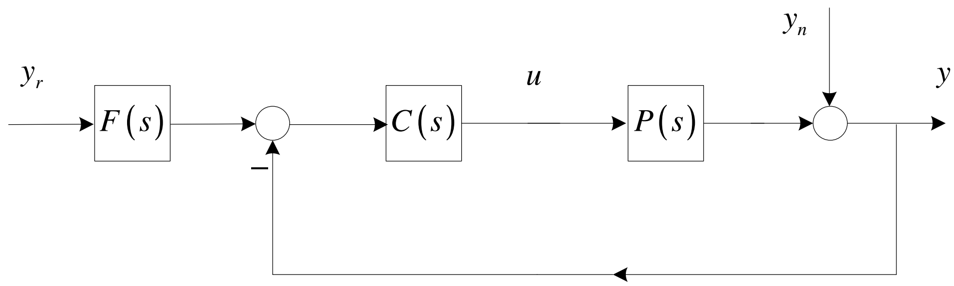
Az alábbiakban a jegyzet 10-dik és 15-dik fejezetében tárgyalt „Általános polinomiális módszer szabályozók tervezésére” című fejezetekkel kapcsolatos gondolatokat foglaljuk össze.

Folytonos rendszerek: csak holtidő mentes rendszerekkel foglalkozunk
Induljunk ki az alábbi 2DOF struktúrából:



A Youla-tervezéshez hasonlóan (ahol megtanultuk, hogy pólus-zérus kiejtéses szabályozó tervezésekor a szakasz inverz labilis zérusai és a holtidő egyaránt megjelennek a zárt kör átviteli függvényeiben) határozzuk meg a C soros szabályozót és az F előkompenzátort úgy, hogy a zárt körben a zavarkompenzáció

$$\frac{Y(s)}{Y_n(s)} = 1 - R_n B_-$$

a szervo tulajdonság pedig

$$\frac{Y(s)}{Y_r(s)} = R_r B_-$$

legyen, ahol a Youla-tervezés feltételeitől eltérően itt a $P = P_+ P_-$ faktorizációban $P_+ = \dfrac{B_+}{A_+}$ stabil és inverz stabil, $P_- = \dfrac{B_-}{A_-}$ labilis és inverz labilis, továbbá R_n és R_r tervezési átviteli függvények. A szabályozó származtatásának lépései hasonlóságot fognak mutatni a Youla-tervezésnél látottakhoz. Az általános polinomiális tervezés jellegzetes vonásait ki fogjuk emelni a továbbiakban is. Így meg kell jegyeznünk, hogy most az $\dfrac{Y(s)}{Y_n(s)} = 1 - R_n B_-$ egyenletben szereplő R_n tervezési átviteli függvény polinomiális tervezés esetén egy R tervezési polinom felhasználásával, továbbá egy a tervezés során keletkező polinommal fog kiadódni, míg az R_r tervezési átviteli függvény továbbra is szabadon felvehető.

A C szabályozóval most is közvetlenül kompenzálni fogjuk a „kiejthető” zérusokat és pólusokat:

$$C = \frac{Y}{X} = \frac{Y' A_+}{X' B_+}$$

tehát zárt kör $1 + CP = 0$ karakterisztikus polinomja:

$$AX + BY = A_+ A_- X + B_+ B_- Y = A_+ A_- X' B_+ + B_+ B_- Y' A_+ = A_+ B_+ \left(A_- X' + B_- Y' \right) = A_+ B_+ R\,,$$

ahol az R a korábban említett, stabilis tervezési polinom.

A karakterisztikus polinom közös tényezőit elhagyva a $C=\frac{Y}{X}$ szabályozó meghatározásához az

$$A_{-}X'+B_{-}Y'=R$$

DIOPHANTOS-i egyenletet kell megoldanunk úgy, hogy megadjuk a tervezett rendszer R karakterisztikus polinomját, majd megkeressük azt az $\{X',Y'\}$ polinom párt, amely kielégíti a DIOPHANTOS-i egyenletet.

Mielőtt rátérnénk a DIOPHANTOS-i egyenlet vizsgálatára, tervezési megfontolásainkat még egy tekintetben általánosítjuk. Jelesül azt az esetet fogjuk lefedni, amikor a tervezendő szabályozónak egy részét rögzíteni kívánjuk, pl. egy integrátort szeretnénk biztosítani a körben. Legyen Y_d az a polinom, amelyet a szabályozó számlálójában, X_d pedig az a polinom, amelyet a szabályozó nevezőjében szeretnénk biztosítani (természetesen az $X_d=1$ és $Y_d=1$ is lehetséges választás):

$$C=\frac{Y}{X}=\frac{Y'Y_dA_+}{X'X_dB_+}$$

Ekkor a DIOPHANTOS-i egyenlet új alakja

$$A_{-}X_dX'+B_{-}Y_dY'=A'X'+B'Y'=R$$

az alkalmasan bevezetett $A'=A_{-}X_d$ és $B'=B_{-}Y_d$ jelölésekkel. Ez azt jelenti, hogy a szabályozó kívánt bővítését a szabályozandó szakasz részeként fogjuk figyelembe venni.

A fentiek alapján a zavarelhárítási feltételből

$$\frac{1}{1+CP}=\frac{1}{1+\frac{A_+Y_dY'}{B_+X_dX'}\frac{B_+B_-}{A_+A_-}}=\frac{1}{1+\frac{Y_dY'}{X_dX'}\frac{B_-}{A_-}}=\frac{X_dX'A_-}{X_dX'A_-+Y_dY'B_-}=,$$

$$=\frac{X_dX'A_-+Y_dY'B_--Y_dY'B_-}{X_dX'A_-+Y_dY'B_-}=1-\frac{Y_dY'B_-}{R}=1-R_nB_-$$

amiből

$$R_n=\frac{Y_dY'}{R}\quad ,$$

amely valóban tartalmazza az R tervezési polinomot és a DIOPAHNTOS-i egyenlet megoldásával kapott Y' polinomot is.

A szervo feltételből

$$\frac{F\frac{A_+Y_dY'}{B_+X_dX'}\frac{B_+B_-}{A_+A_-}}{1+\frac{A_+Y_dY'}{B_+X_dX'}\frac{B_+B_-}{A_+A_-}}=\frac{FY_dY'B_-}{X_dX'A_-+Y_dY'B_-}=\frac{FY_dY'B_-}{R}=R_rB_-\ ,$$

így

$$F=\frac{RR_r}{Y_dY'}=\frac{R_r}{R_n}\ .$$

Az F előkompenzátor megvalósíthatóságával kapcsolatban látnunk kell, hogy míg R egy polinom, R_r átviteli függvény!

Összefoglalva: $C=\frac{Y}{X}=\frac{Y'Y_dA_+}{X'X_dB_+}$ és $F=\frac{RR_r}{Y_dY'}$ választással és a $A\_X_dX'+B\_Y_dY'=A'X'+B'Y'=R$ DIOPHANTOS-i kielégítésével a zárt kör átviteli függvényeivel kifejezve a kimenőjelet

$$y=R_rB_-y_r+\left(1-R_nB_-\right)y_n=T_ry_r+S_ny_n$$

adódik a zárt rendszerre, tehát

$$T_r=R_rB_-\ \text{ és }\ S_n=1-R_nB_-=1-\frac{Y_dY'B_-}{R}\ .$$

A zárt kör tulajdonságai:

- A zárt kör stabil, mert az R tervezési polinom stabil.
- A szervo átvitel részben tervezett $\left(R,R_r\right)$, részben a szakasztól függ $\left(B_-\right)$. Ha B_- hatását közvetlenül (nem pedig R_r alkalmas megválasztásával) akarjuk kompenzálni, akkor F bővíthető $F=\frac{RR_r}{Y_dY'}G_r$ szerint.
- A zavarelhárítás $R_n=\frac{Y_dY'}{R}$ következtében a tervezett szabályozó kiadódó Y' polinomjától is függ, így nem tervezhető közvetlen módon, csak $\frac{Y'}{R}$-n keresztül.

Az $A\_X'+B\_Y'=R$ DIOPHANTOS-i egyenlet megoldását illetően olyan megoldást keresünk, ahol $\deg\left\{R\right\}=2\deg\left\{A_-\right\}-1$, $\deg\left\{X'\right\}=\deg\left\{A_-\right\}-1$ és $\deg\left\{Y'\right\}=\deg\left\{A_-\right\}-1$.

Példa (10.1) a jegyzetből:

a/ Adott $P=\frac{-1}{s-2}$, amely labilis. A zárt kör tulajdonságait meghatározó tervezési polinomot $R\left(s\right)=s+2$ szerint választjuk meg. Esetünkben $A_-=s-2$, legyen $B_-=-1$, $A_+=B_+=1$, továbbá $Y'=K$ és $X'=1$, így $\frac{Y'}{X'}=\frac{K}{1}=K$. Ekkor a DIOPHANTOS-i egyenlet

$$A\_X'+B\_Y'=\left(s-2\right)X'-Y'=\left(s-2\right)-K=R=s+2\ ,$$

ahonnan $K=-4$.

Szervo tulajdonság: $F=1$ mellett $y=\frac{4}{s+2}y_r$ adódik, amely stabil, statikus átvitele azonban nem egységnyi, hanem 2. Használjuk ki az $F=\frac{RR_r}{Y_d Y'}G_r$ szerinti lehetőségeinket, korlátozzuk magunkat a $G_r=Y_d=1$ esetre! Ha $F=\frac{RR_r}{Y'}=\frac{(s+2)R_r}{-4}=\frac{1}{2}$ (azaz $R_r=\frac{-2}{(s+2)}$), akkor a statikus átvitel máris egységnyi lesz. Gyorsítani is tudjuk a zárt kör átmeneti függvényét, legyen például $R_r=\frac{-2}{(s+2)}\frac{10(s+2)}{(s+20)}=\frac{-20}{(s+20)}$, így $y=\frac{20}{s+20}y_r$.
Zavarelhárítás: az arányos szabályozónak megfelelően a zavarelhárítás nem túl hatékony:

$$y=\frac{1}{1+L}y_n=\frac{1}{1+\frac{4}{s-2}}y_n=\frac{s-2}{s+2}y_n\,,$$

jelentős a maradó hiba értéke.

b/ Továbbra is adott $P=\frac{-1}{s-2}$, amely labilis. Ezúttal belekényszerítünk a körbe egy integrátort: $X_d=s$. Válasszuk a tervezési polinomot $R(s)=(s+2)(s+4)$ értékűre. A DIOPHANTOS-i egyenlet további komponensei: $Y_d=X'=1$, $Y'=K(s+a)$, így a DIOPHANTOS-i egyenlet

$$A\_X'+B\_Y'=(s-2)s-K(s+a)=R=s^2+6s+8\,,$$

amiből $K=-8$ és $a=1$. A szabályozó így $C=\frac{K(s+a)}{s}=\frac{-8(s+1)}{s}$ és $L=CP=\frac{8(s+1)}{s(s-2)}$.

Szervo tulajdonság: $F=1$ mellett $y=\frac{L}{1+L}y_r=\frac{8(s+1)}{s^2+6s+8}y_r$ (ez zérus állandósult hibát eredményez), amely átvitelnek a dinamikája az a/ részben bemutatott technikával tovább finomítható.
Zavarelhárítás: az arányos szabályozónak megfelelően a zavarelhárítás nem túl hatékony, $y=\frac{1}{1+L}y_n=\frac{1}{1+\frac{8(s+1)}{s(s-2)}}y_n=\frac{s(s-2)}{s^2+6s+8}y_n$, ami zérus maradó hibát eredményez.

Példa (10.2) a jegyzetből:
Adott $P=\frac{0.1}{s+0.1}$, amely stabilis, a zárt kör kialakításával a szakasz tranziens válaszát kívánjuk felgyorsítani, ezért a zárt kör tulajdonságait meghatározó tervezési polinomot $R(s)=s+0.5$ szerint választjuk meg. Esetünkben $A\_=B\_=1$, $A_+=s+0.1$, $B_+=0.1$

továbbá $\dfrac{Y'}{X'} = \dfrac{K}{1} = K$, és legyen egy integrátor is a körben: $X_d = s$, $X' = 1$ és $Y' = K$. Ekkor a DIOPHANTOS-i egyenlet

$$A\_X' + B\_Y' = s + K = R = s + 0.5 \ ,$$

ahonnan $K = 0.5$, a soros szabályozó pedig $C = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{Y'Y_d A_+}{X'X_d B_+} = \dfrac{0.5(s+0.1)}{0.1s} = \dfrac{5(s+0.1)}{s}$.

<u>Szervo tulajdonság</u>: $F = 1$ mellett $y = \dfrac{0.5}{s+0.5} y_r$ adódik, amely stabil, statikus átvitele az integrátornak köszönhetően 1.

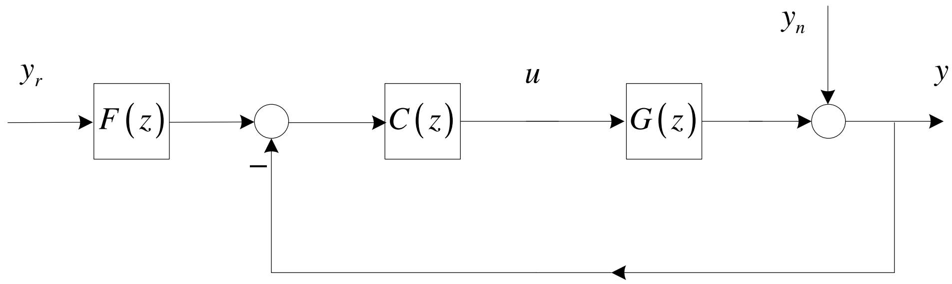
<u>Zavarelhárítás</u>: az arányos szabályozónak megfelelően a zavarelhárítás zérus maradó hibát eredményez:

$$y = \frac{1}{1+L} y_n = \frac{1}{1+\frac{0.5}{s}} y_n = \frac{s}{s+0.5} y_n .$$

Megjegyezzük, hogy stabilis szakaszról lévén szó a Youla-tervezés azonos eredményt ad.

<u>Mintavételes rendszerek:</u> itt holtidős rendszereket is tárgyalunk

Induljunk ki ismét az alábbi 2DOF struktúrából:



ahol $G(z)=\left(1-z^{-1}\right)z^{-d}Z\{v[k]\}$ a $P(s)$ átviteli függvénnyel rendelkező folytonos folyamat és a zérusrendű tartószerv együttes z-transzformáltja, $v[k]$ a folyamat mintavételezett átmeneti függvénye, a folytonos folyamat holtideje pedig $T_d=dT_s$ (itt T_s a mintavételezési idő, d egész szám).

Határozzuk meg a C soros szabályozót és az F előkompenzátort úgy, hogy a zárt körben a zavarkompenzáció

$$\frac{Y(z)}{Y_n(z)}=1-R_nB_-z^{-d}$$

a szervo tulajdonság pedig

$$\frac{Y(z)}{Y_r(z)}=R_rB_-z^{-d}$$

legyen, ahol a <u>Youla-tervezés feltételeitől eltérően</u> itt a $G=G_+G_-$ faktorizációban $G_+=\frac{B_+}{A_+}$ stabil <u>és</u> inverz stabil, $G_-=\frac{B_-}{A_-}$ labilis <u>és</u> inverz labilis, továbbá R_n és R_r tervezési átviteli függvények. A szabályozó származtatásának lépései hasonlóságot fognak mutatni a Youla-tervezésnél látottakhoz. Az általános polinomiális tervezés jellegzetes vonásait ki fogjuk emelni a továbbiakban is. Így meg kell jegyeznünk, hogy most az $\frac{Y(z)}{Y_n(z)}=1-R_nB_-$ egyenletben szereplő R_n tervezési impulzusátviteli függvény polinomiális tervezés esetén egy R tervezési polinom felhasználásával fog kiadódni, de tartalmazni fog egy olyan összetevőt is, amely a tervezési folyamat során kap értéket. Az R_r tervezési impulzusátviteli függvény továbbra is szabadon felvehető marad.

A C szabályozóval most is közvetlenül kompenzálni fogjuk a „kiejthető" zérusokat és pólusokat:

$$C=\frac{Y}{X}=\frac{Y'A_+}{X'B_+}$$

tehát zárt kör $1+CP=0$ karakterisztikus polinomja:

$$AX+BYz^{-d}=A_+A_-X+B_+B_-z^{-d}Y=A_+A_-X'B_++B_+B_-z^{-d}Y'A_+=A_+B_+\left(A_-X'+B_-z^{-d}Y'\right)=A_+B_+R',$$

A karakterisztikus polinom közös tényezőit elhagyva a $C = \dfrac{Y}{X}$ szabályozó meghatározásához az

$$z^d A_- X' + B_- Y' = z^d R' = R \,,$$

ahol az R a korábban említett, stabilis tervezési polinom. Az $R = z^d R'$ polinomot azért vezettük be, hogy z pozitív hatványival számolhassunk.
DIOPHANTOS-i egyenletet kell megoldanunk úgy, hogy megadjuk a tervezett rendszer R karakterisztikus polinomját, majd megkeressük azt az $\{X', Y'\}$ polinom párt, amely kielégíti a DIOPHANTOS-i egyenletet.
Mielőtt rátérnénk a DIOPHANTOS-i egyenlet vizsgálatára, tervezési megfontolásainkat még egy tekintetben általánosítjuk. Jelesül azt az esetet fogjuk lefedni, amikor a tervezendő szabályozónak egy részét rögzíteni kívánjuk, pl. egy integrátort szeretnénk biztosítani a körben. Legyen Y_d az a polinom, amelyet a szabályozó számlálójában, X_d pedig az a polinom, amelyet a szabályozó nevezőjében szeretnénk biztosítani (természetesen az $X_d = 1$ és $Y_d = 1$ is lehetséges választás):

$$C = \frac{Y}{X} = \frac{Y' Y_d A_+}{X' X_d B_+}$$

Ekkor a DIOPHANTOS-i egyenlet új alakja

$$A_- X_d X' + B_- z^{-d} Y_d Y' = A' X' + B' z^{-d} Y' = R'$$

az alkalmasan bevezetett $A' = A_- X_d$ és $B' = B_- Y_d$ jelölésekkel. Ez azt jelenti, hogy a szabályozó kívánt bővítését a szabályozandó szakasz részeként fogjuk figyelembe venni.

A fentiek alapján a zavarelhárítási feltételből

$$\frac{1}{1+CP} = \frac{1}{1+\dfrac{A_+ Y_d Y'}{B_+ X_d X'}\dfrac{B_+ B_- z^{-d}}{A_+ A_-}} = \frac{1}{1+\dfrac{Y_d Y'}{X_d X'}\dfrac{B_- z^{-d}}{A_-}} = \frac{X_d X' A_-}{X_d X' A_- + Y_d Y' B_- z^{-d}} = ,$$

$$= \frac{X_d X' A_- + Y_d Y' B_- z^{-d} - Y_d Y' B_- z^{-d}}{X_d X' A_- + Y_d Y' B_- z^{-d}} = 1 - \frac{Y_d Y' B_- z^{-d}}{R'} = 1 - R_n B_- z^{-d}$$

amiből

$$R_n = \frac{Y_d Y'}{R'} \quad ,$$

amely azon túlmenően, hogy tartalmazza az R tervezési polinomot, egy a tervezés során kiadódó összetevőtől is függ ($R_n = Y'$)
A szervo feltételből

$$\frac{F\dfrac{A_+ Y_d Y'}{B_+ X_d X'}\dfrac{B_+ B_- z^{-d}}{A_+ A_-}}{1+\dfrac{A_+ Y_d Y'}{B_+ X_d X'}\dfrac{B_+ B_- z^{-d}}{A_+ A_-}} = \frac{F Y_d Y' B_- z^{-d}}{X_d X' A_- + Y_d Y' B_- z^{-d}} = \frac{F Y_d Y' B_- z^{-d}}{R'} = R_r B_- z^{-d} \;,$$

így

$$F=\frac{R'R_r}{Y_d Y'}=\frac{R_r}{R_n}\ .$$

Az F előkompenzátor megvalósíthatóságával kapcsolatban látnunk kell, hogy míg R' egy polinom, R_r impulzusátviteli függvény!

Összefoglalva: $C=\frac{Y}{X}=\frac{Y'Y_d A_+}{X'X_d B_+}$ és $F=\frac{R'R_r}{Y_d Y'}$ választással és az $z^d A_- X_d X'+B_- Y_d Y'=z^d A'X'+B'Y'=z^d R'=R$ DIOPHANTOS-i egyenlet kielégítésével a zárt kör átviteli függvényeivel kifejezve a kimenőjelet

$$y=R_r B_- z^{-d}y_r+\left(1-R_n B_- z^{-d}\right)y_n=T_r y_r+S_n y_n$$

adódik a zárt rendszerre, tehát

$$T_r=R_r B_-\ \text{ és }\ S_n=1-R_n B_- z^{-d}=1-\frac{Y_d Y'B_- z^{-d}}{R'}\ .$$

A zárt kör tulajdonságai:

- A zárt kör stabil, mert az R tervezési polinom stabil.
- A szervo átvitel részben tervezett $\left(R,R_r\right)$, részben a szakasztól függ $\left(B_- z^{-d}\right)$. Ha B_- hatását közvetlenül (nem pedig R_r alkalmas megválasztásával) akarjuk kompenzálni, akkor F bővíthető $F=\frac{RR_r}{Y_d Y'}G_r$ szerint (G_r egy további, a tervező által megadandó polinom)
- A zavarelhárítás $R_n=\frac{Y_d Y'}{R'}$ következtében a szabályozó kiadódó Y' polinomjától is függ, így nem tervezhető közvetlen módon, csak $\frac{Y'}{R'}$-n keresztül.

Az $z^d A_- X'+B_- Y'=z^d R'$ DIOPHANTOS-i egyenlet megoldását illetően olyan megoldást keresünk, ahol $\deg\{R\}=2\deg\{A_-\}-1$, $\deg\{X'\}=\deg\{A_-\}-1$ és $\deg\{Y'\}=\deg\{A_-\}-1$.

<u>Példa</u> (15.1) a jegyzetből:

a/ Adott $G=\frac{-0.2}{z-1.2}$, amely labilis (figyeljük meg, hogy ez egy holtidő nélküli rendszer mintavételes modellje, tehát $d=0$ és $R=R'$). A zárt kör tulajdonságait meghatározó tervezési polinomot $R(z)=R'(z)=z-0.2$ szerint választjuk meg. Esetünkben $A_-=z-1.2$, legyen $B_-=-0.2$, $A_+=B_+=1$, továbbá $Y'=K$ és $X'=1$, így $\frac{Y'}{X'}=\frac{K}{1}=K$, ekkor a DIOPHANTOS-i egyenlet

$$A_- X'+B_- Y'=\left(z-1.2\right)X'-0.2Y'=\left(z-1.2\right)-0.2K=R'=R=z-0.2\ ,$$

ahonnan $K = C = -5$. Ezzel a hurokátviteli függvény $L = CG = -5\dfrac{-0.2}{z-1.2} = \dfrac{1}{z-1.2}$.

<u>Szervo tulajdonság</u>: $F = 1$ mellett $y = \dfrac{1}{z-0.2} y_r$ adódik, amely stabil, statikus átvitele azonban nem egységnyi, hanem $y_\infty = 1.25$. Használjuk ki az $F = \dfrac{R'R_r}{Y_d Y'} G_r$ szerinti lehetőségeinket, de korlátozzuk magunkat a $G_r = Y_d = 1$ esetre: $F = \dfrac{R'R_r}{Y'}$!

Mivel $T_r = R_r B_-$ és $B_- = -0.2$, így $R_r = \dfrac{-4}{z-0.2}$ esetén $T_r = \dfrac{-4}{z-0.2}(-0.2) = \dfrac{0.8}{z-0.2}$, aminek egységnyi a statikus erősítése ($T_r(1) = 1$). Ehhez az F előerősítést $F = \dfrac{R'R_r}{Y'} = \dfrac{z-0.2}{-5}\dfrac{-4}{z-0.2} = 0.8$ értékre kell választani.

Ugyanezen a módon gyorsítani is tudjuk a zárt kör átmeneti függvényét, legyen a cél $T_r = \dfrac{0.9}{z-0.1}$ elérése, ehhez $T_r = R_r B_-$ szerint $R_r = \dfrac{-4.5}{z-0.1}$ tartozik, így $F = \dfrac{R'R_r}{Y'} = \dfrac{z-0.2}{-5}\dfrac{-4.5}{z-0.1} = 0.9\dfrac{z-0.2}{z-0.1}$.

<u>Zavarelhárítás</u>: az arányos szabályozónak megfelelően a zavarelhárítás a maradó hiba miatt nem igazán elfogadható:

$$y = \frac{1}{1+L} y_n = \frac{1}{1+\frac{1}{z-1.2}} y_n = \frac{z-1.2}{z-0.2} y_n .$$

Egységugrás alakú zavarás esetén például $y[0] = 1$, $y[1] = 0$, $y[2] = -0.2$, $y[3] = -0.24$, $y[4] = -0.248$, … $\lim_{k\to\infty} y[k] = -0.25$.

b/ Továbbra is adott $G = \frac{-0.2}{z-1.2}$, amely labilis. Ezúttal belekényszerítünk a körbe egy integrátort: $X_d = z-1$. Válasszuk a tervezési polinomot $R(z) = R'(z) = (z-0.4)(z-0.6)$ értékűre. A DIOPHANTOS-i egyenlet további komponensei: $Y_d = X' = 1$, $Y' = K(z+a)$, így a DIOPHANTOS-i egyenlet

$$A\_X' + B\_Y' = (z-1.2)(z-1) - 0.2K(z+a) = R' = R = z^2 - z + 0.24,$$

amiből $K = -6$ és $a = -0.8$. A szabályozó így $C = \frac{K(z+a)}{z-1} = \frac{-6(z-0.8)}{z-1}$ és $L = CG = \frac{-6(z-0.8)}{z-1}\frac{-0.2}{z-1.2} = \frac{1.2(z-0.8)}{(z-1)(z-1.2)}$.

<u>Szervo tulajdonság</u>: $F = 1$ mellett $y = \frac{L}{1+L} y_r = \frac{1.2(z-0.8)}{(z-0.4)(z-0.6)} y_r$, és ez zérus állandósult hibát eredményez.

<u>Zavarelhárítás</u>: az integráló szabályozónak megfelelően a zavarelhárítás is hibamentes:

$$y = \frac{1}{1+L} y_n = \frac{(z-1.2)(z-1)}{(z-0.6)(z-0.4)} y_n .$$